Cheatsheet Analysis 2

Nicolas Wehrli

January 2023

1 Differential equations

Ordinary Differential Equation (ODE)

In general an **ordinary** differential equation (ODE) relates a function $f(x)$ at x to the values of its derivatives at x. I.e. it's an equation of the Form

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$$

The order of the diff. equation is the highest order of derivative that appears in the equation.
A partial diff. equation is a diff. equation for a function of several variables. (It involves "partial derivatives").

$f'(x+2) = f(x)$ is not an **ordinary** differential equation.

Linear ODE

A linear ODE of order k on I, is an equation of the form

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

where $b, a_1, ..., a_{k-1}$ are continous functions of x defined on I with values in $\mathbb{C}$.
If $b(x) = 0, \forall x \in I$, we call the ODE **homogeneous** and otherwise **inhomogeneous**.

Recognising a linear ODE

- no coefficients before the highest order derivative (**what about constants?**)
- alle coefficients are continous functions
- no products of y and it's derivatives
- y and all of it's derivatives occur with the power one
- Neither y nor it's derivatives are *inside* another function.

Solutions of Linear ODE's

Let $I \subset \mathbb{R}$ open interval, $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$.

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... + a_0 y = b$$

is a linear ODE over I with continous coefficients.
Then

1. The set of solutions S_0 for the associated **homogeneous** ODE (when $b = 0$), is a vector space of dimension k.
2. For any initial conditions (i.e. any choice of $x_0 \in I$ and $(y_0, ..., y_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$) there exists an **unique** solution $f \in S_0$ s.t. $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_1, ..., f^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}$.
3. For any arbitrary $b(x)$, the set of solutions of the ODE is
$$S_b = \{f + f_p \mid f \in S_0\}$$
where f_p is a **paritcular** solution of the ODE.
4. For any initial condition there is a unique condition there is a unique solution $f \in S_b$.

S_b is **not** a Vector Space! (It's an affine Space.)

1.1 Linear ODE's of order 1

$I \subset \mathbb{R}$ be an open interval.
We consider the diff. equation of the form

$$y' + a(x)y = b(x)$$

1. (Homogeneous solution)
$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \quad (\text{assuming } y \neq 0, \forall x \in I) \\ \ln(|y|) &= -A(x) + C \\ y &= e^C \cdot e^{-A(x)} = Ke^{-A(x)}, K \in \mathbb{C} \end{aligned}$$
If an initial condition is given, we can determine K.
2. (Particular solution)
Use either "Variation of parameters" or "Educated guess".

1.2 Variation of parameters

We assume that the particular solution is of the form $f_p = K(x)e^{-A(x)}$ for a function $K : I \to \mathbb{C}$. Then we can insert our guess into the ODE and see what it forces K to satisfy. We get

$$\begin{aligned} b(x) &= (K(x)e^{-A(x)})' + a(x)(K(x)e^{-A(x)}) \\ b(x) &= K'(x)e^{-A(x)} - a(x)K(x)e^{-A(x)} + a(x)K(x)e^{-A(x)} \\ b(x) &= K'(x)e^{-A(x)} \\ K'(x) &= b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

and thus

$$K(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\, dt$$

Therefore we get

$$f_p = \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\, dt \right) \cdot e^{-A(t)}$$

The method with the "Integration factor" gives the same particular solution!

1.3 Educated Guess for general case

(1) If $b(x) = x^d e^{\beta x}$ and β **is not a root of the companion Polynomial** P, then we try $f_p(x) = Q(x)e^{\beta x}$, where Q is a Polynomial of degree d.

(2) If $b(x) = x^d \cos(\beta x)$ or $b(x) = x^d \sin(\beta x)$ and β **is not a root of the companion Polynomial** P, we try
$$f_p(x) = Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)$$
where Q_1, Q_2 are polynomials of degree d.

(3) If b is of the form of the previous two examples but β **is a root with multiplicity** j **of the companion polynomial**, then one tries the same functions, except that the Polynomials Q (or Q_1, Q_2 resp.) have degree $d + j$.

(4) The special case $\beta = 0$ in cases $(1), (2), (3)$ corresponds to the situation where b is a polynomial of degree d. Therefore we try f_p as a polynomial of degree d, unless 0 is a root with multiplicity j, then we try f_p as a polynomial of degree $d + j$.

1.4 Educated Guess for constant coefficients

If $b(x)$ is of a specific form, we try following f_p, where we insert the f_p into the ODE, which gives us a system of equations for the constants:

$b(x)$	Ansatz
$a \cdot e^{\alpha x}$	$b \cdot e^{\alpha x}$
$a\sin(\beta x)$	$c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)$
$b\cos(\beta x)$	$c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)$
$ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\Big)$
$be^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\Big)$
$P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$	$R_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
$P_n(x) \cdot e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}(R_n(x)\sin(\beta x) + S_n(x)\cos(\beta x))$
$P_n(x) \cdot e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}(R_n(x)\sin(\beta x) + S_n(x)\cos(\beta x))$

P_n, R_n and S_n are Polynomials of degree n.

1. If $b(x)$ is a linear combination of any of the base functions, try that linear combination of 'Ansatz' functions.
2. If $b(x) = c \cdot e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{C}$ for which α is a zero of the characteristic polynomial (i.e. α is a root and $b(x)$ a solution for the homogeneous equation), then we try $f_p = d \cdot x^m \cdot e^{\alpha x}$, where m is the multiplicity of the root α.

1.5 Linear ODE's with constant coefficients

We consider an ODE of the form

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

We search for a homogeneous solution of the form $e^{\lambda x}$. Now we can solve the characteristic polynomial:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = e^{\lambda x}\left(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_0\right) = 0 \\ \implies 0 = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_0 \end{aligned}$$

- The roots of $P(\lambda)$ are the Eigenvalues λ_i, with corresponding multiplicity m_r. Thus the functions $f_{i,r} : x \to x^r e^{\lambda_i x}, 0 \leq r < m_r$ span the Vector Space S_0.
- If $\lambda = \beta + \gamma i$ is a complex of $P(\lambda)$, then the complex conjugation, i.e. $\bar{\lambda} = \beta - \gamma i$ is also a root. Thus $f_1 = e^{\lambda x}$ and $f_2 = e^{\bar{\lambda} x}$ are solutions to the homogeneous equation.
- We realize that $f_1 = e^{\lambda x} = e^{\beta x}(\cos(\gamma x) + i\sin(\gamma x))$ and $f_2 = e^{\bar{\lambda} x} = e^{\beta x}(\cos(\gamma x) - i\sin(\gamma x))$.
- We can thus replace f_1 and f_2 by $\tilde{f}_1 = e^{\beta x}\cos(\gamma x)$ and $\tilde{f}_2 = e^{\beta x}\sin(\gamma x)$. (Note that $f_1 = \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2$ and $f_2 = \tilde{f}_1 - i\tilde{f}_2$)
- Note that we are often only interested in finding real-valued solutions if the coefficients are all real valued.
- If $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ only has real coefficients, every pair of complex conjugated roots $\beta_j \pm \gamma_j i$ with multiplicity m_j leads to a solution

  $$x^l e^{\beta_j x}\Big(\cos(\gamma_j x) + i\sin(\gamma_j x)\Big) \quad \text{for } 0 \leq l < m_j$$

  of which then the real part can be extracted.

To find a particular solution f_p we can as in the general case use **Varation of parameters** or **Educated guess**. We will now show an simple example with 2 basis functions:
Consider the Linear ODE $y'' + ya_1y' + a_0y = b$

(1) Assume the space of homogeneous solutions S_0 is spanned by f_1, f_2, i.e. $f_0 = f_1 + f_2$ is also a solution

(2) Now we try $f_p = z_1(x)f_1 + z_2(x)f_2$

(3) We first insert f_p into the ODE and we require the additional constraint that $z_1'(x)f_1 + z_2'(x)f_2 = 0$ to find a concrete solution.

Therefore we get the following system of equations:

$$\begin{aligned} z_1'(x)f_1 + z_2'(x)f_2 = 0 \\ z_1'(x)f_1' + z_2'(x)f_2' = b(x) \end{aligned}$$

We can solve this as follows:

$$\begin{aligned} W = f_1f_2' - f_2f_1' \neq 0 \\ \Rightarrow z_1' = \frac{-f_2 b}{W}, z_2' = \frac{f_1 b}{W} \\ \Rightarrow f_p = \left(\int \frac{-f_2 b}{W} dt\right) f_1 + \left(\int \frac{f_1 b}{W} dt\right) f_2 \end{aligned}$$

1.6 Seperation of Variables

Consider a differential equation of the form

$$y'(x) = b(x)g(y)$$

Assume $g(y(x)) \neq 0$. If $\exists y_0$ s.t. $g(y_0(x)) = 0$ then $y = y_0$ is a solution.

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{g(y(x))} = b(x) \\ \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\, dx = \int b(x)\, dx \end{aligned}$$

Applying substitution with $u = y(x)$ we obtain

$$\int \frac{1}{g(u)}\, du = \int b(x)\, dx$$

We can then determine both integrals and solve for $u = y$.

2 Derivations in $\mathbb{R}^n$

Monomial in $\mathbb{R}^n$

A Monomial of degree e is a function $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \alpha x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n} \\ e = d_1 + \ldots + d_n \end{aligned}$$

$\to$ i.e. a Polynomial that only has one term.

Polynomial in $\mathbb{R}^n$

A Polynomial with n variables of degree d is a finite sum of Monomials of degree $e \leq d$.

2.1 Convergence

1. Dot product: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=0} x_i \cdot y_i$
2. Euclidean norm: $||x|| := \sqrt{x_2^1 + \cdots + x_n^2}$ with the following properties:
   a) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \iff x = 0$
   b) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
   d) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$

Definition Convergence

Let $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, x_k \in \mathbb{R}^n$. The following definitions for $\lim_{k\to\infty} x_k = y$ equivalent:

1. $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ such that $\forall k \geq N$ $||x_k - y|| < \epsilon$.
2. For every $i, 1 \leq i \leq n$ the sequence $(x_{k,i})_k$ of real numbers converges to y_i.
3. The sequence $||x_k - y||$ of real numbers converges to 0.

2.2 Continuity

Definition Continuity

Let $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $x_0 \in \mathcal{X}$.
f is continous in x_0, if one of the following conditions is fulfilled:

1. $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ such that for all $x \in \mathcal{X}$

   $$||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$$

2. $\forall$ sequences (x_k) in X with $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ we have

   $$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(x_0)$$

f is continous on $\mathcal{X} \iff f$ is continous at every point $x_0 \in \mathcal{X}$.
In Addition we have the following:

1. Cartesian product of continous functions is continous.
2. $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$
   $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$
   is continous $\iff f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continous $\forall i = 1, \ldots, m$.
3. Linear Maps $x \mapsto Ax$ are continous.
4. Finite sums and products of continous functions are continous.
5. Functions with seperated Variables are continous if each factor is continous. (i.e. $f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdot ... \cdot f_n(x_n)$ is continous if $f_1, f_2, ..., f_n$ are continous.)

6. In particular Polynomials are continous.
7. The composition of continous functions is continous.
8. If $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ is continous. For an arbitrary fixed $y_0 \in \mathbb{R}$ we can define $g_{y_0}(x) := f(x, y_0)$. Since g_{y_0} is a composition of continous functions it is also continous.
9. Warning! The converse is not true. g_{y_0} continous for all $y_0 \in \mathbb{R}$ does **not** imply that f is continous!

Sandwich-Lemma

If $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are functions with $f(x) < g(x) < h(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Let $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \implies \lim_{x\to a} g(x) = L$$

2.3 Properties of sets

A set $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ is

- **bounded**, if the set $\{||x|| \mid x \in \mathcal{X}\}$ is bounded in $\mathbb{R}$(i.e. $\exists K \geq 0, \forall x \in \mathcal{X} : ||x|| \leq K$).
- **closed**, if every sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$, that converges to some Vector $y \in \mathbb{R}^n$, we have $y \in \mathcal{X}$ (i.e. limits of sequences in X are also in X).
- **compact**, if its closed and bounded.
- **open** if, for any $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{X}$, there exists $\delta > 0$ such that the set

  $$\{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \delta, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

  is contained in $\mathcal{X}$.
- **convex**, if $\forall x, y \in \mathcal{X} : \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{X}, \forall 0 \leq \lambda \leq 1$ (the line segment between x, y is contained in $\mathcal{X}$).
- **open**, if and only if the complement $Y = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}$ is **closed**. (Equivalent definition)

Important examples:

- $(a, b) \subset \mathbb{R}$ is open.
- $[a, b) \subset \mathbb{R}$ is neither open nor closed.
- $\mathbb{R}^n$ and $\varnothing$ are both open and closed. There exists no other set in $\mathbb{R}^n$ which is both open and closed.
- If $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ are both bounded (rsp. closed/compact) then $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ is bounded (rsp. closed/compact)
- In particular the cartesian product of compact intervals $I_i \in \mathbb{R}$: $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in I_i\}$ is compact (i.e. closed and bounded).
- Let $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ be continous. Then for every closed(/open) set $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, the set $f^{-1}(Y)$ is closed(/open).

Bolzano-Weierstrass

Every bounded sequence in $\mathbb{R}^n$ has a converging partial sequence.

Min-Max-Theorem

Let $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{X} \neq \varnothing$ be compact and $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ a continous function. Then f is bounded and achieves a max and a min. I.e. $\exists x^+, x^- \in \mathcal{X}$, such that

$$f(x^+) = \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x) \quad f(x^-) = \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x)$$

2.4 Partial Derivatives

Partial Derivative

To find the partial derivative of $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (whereby $\mathcal{X}$ open) with respect to $x_j, 1 \leq j \leq n$ at a point $x_0 \in \mathcal{X}$ we define:

$$\partial_j f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h}$$

where e_j is the j-th canonical basis vector of $\mathbb{R}^n$.

For $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Partial derivatives have following properties:

1. $\partial_j(f + g) = \partial_j(f) + \partial_j g$
2. $\partial_j(f \cdot g) = \partial_j(f) \cdot g + \partial_j(g) \cdot f$
3. $\partial_j(f/g) = \frac{\partial_j(f)\cdot g - \partial_j(g)\cdot f}{g^2}$ for $g \neq 0$

Jacobi-Matrix

Let $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $\mathcal{X}$ an open set. The Jacobi-Matrix is the $m \times n$ Matrix:

$$J_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}}$$

Gradient

In the special case of a function $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, the Jacobi-Matrix is a row vector which transposed gives us ∇f. The geometric interpretation is a vectorfield, defined by ∇f, which indicates the direction and magnitude of the biggest growth of f.

2.5 Differentiability

Differentiability

Let $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ be open, $x_0 \in \mathcal{X}$. We have $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$.
We say that f is **differentiable** at x_0, with the differential u, if there exists a **linear map** $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ such that

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - u \cdot (x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

We denote $u = df(x_0) = d_{x_0} f$.

- If f is differentiable at all points $x_0 \in \mathcal{X}$, then f is differentiable on $\mathcal{X}$.
- Having all partial derivatives defined is not sufficient to conclude Differentiability.
- If all partial derivatives are defined and continous, then f is differentiable.

Conclusions from Differentiability

If f, g are differentiable in $x_0 \in \mathcal{X}$ we have:

1. f is continous in x_0
2. f has all partial derivatives at x_0 and the matrix of the linear map $df(x_0) : x \mapsto Ax$ is given by the **Jacobi-Matrix** of f at x_0, i.e. $A = J_f(x_0)$
3. $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
4. If $m = 1$, then $f \cdot g$ is differentiable. If additionally $g \neq 0$, then f/g is also differentiable. (Product rule and Quotient rule apply)
5. (Chain rule): Let $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ be open.

   If $f : \mathcal{X} \to Y, g : Y \to \mathbb{R}^p$ are both differentiable, we have $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$. Furthermore

   $$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

   Therefore

   $$d(g \circ f)(x_0) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^p \qquad x \mapsto J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) \cdot x$$

Tangent Space

The **tangent space** at x_0 of f is given by the graph of the affine linear map $g(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$.
I.e.

$$\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid g(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)\}$$

Directional Derivative

Let $f : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be differentiable at $x_0 \in \mathcal{X}$. For any $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ the **directional Derivative** of f at x_0 exists and is defined as

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = J_f(x_0) \cdot v$$

Change of variables (Bijection)

Let $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ differentiable. f is a **change of variable** around $x_0 \in \mathcal{X}$ if there exists a radius $r > 0$ such that the Ball

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < r\}$$

has the property that the Image $Y = f(B_r(x_0))$ is open and there exists a differentiable map $g : Y \to B_r(x_0)$ such that $f \circ g = g \circ f = \text{id}$.
We find that if $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ (i.e. $J_f(x_0)$ is invertible), then f is a change of variables around x_0. Moreover the Jacobian of the inverse map g is determined by

$$J_g(f(x_0)) = J_f(x_0)^{-1}$$

(Analog to the fact that a function $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is bijective from I to its image if $h' > 0$ or $h' < 0$)

2.6 Higher derivatives

Notation for higher partial derivatives

For a function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t$ we denote higher order partial derivatives with the following:
First let $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$ and $|m| = m_1 + m_2 + ... + m_n$.
We write

$$\frac{\partial^{|m|} f_j}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{m_n}} = \partial_{x^m}^{|m|} f_j, \; 1 \leq j \leq t$$

Differential Classes

Let $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ be open, $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$.

- We say that f is differentiable of class C^1 if f is differentiable on $\mathcal{X}$ and all its partial derivatives are continous. The set of all C^1 functions from $\mathcal{X}$ to $\mathbb{R}^m$ are denoted by $C^1(\mathcal{X} : \mathbb{R}^m)$.
- Let $k \geq 2$. We say $f \in C^k(\mathcal{X} : \mathbb{R}^m)$ (i.e. f is of class C^k) if its differentiable and each $\partial_{x_i} f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$ $(1 \leq i \leq n)$ is of class C^{k-1}.
- We say that f is smooth or of class C^∞ if $f \in C^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- All polynomials, trigonometric and exponential functions are of class C^∞.
- If $f \in C^k, k \geq 2$ then all partial derivatives of order $\leq k$ are commutative.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$$

Hessian

Let $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ a C^2 function.
For an $x_0 \in \mathcal{X}$, the **Hessian matrix** of f at x_0 is the symmetric $n \times n$ matrix that denotes the second derivative:

$$\text{Hess}_f(x_0) := \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \, \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Sometimes we also denote it by $\nabla^2 f(x_0)$ or $H_f(x_0)$.

2.7 Taylorpolynomials

Sei $k \leq 1$ und $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Klasse C^k auf $\mathcal{X}$. Sei $x_0 \in \mathcal{X}$ fix. Das k-te Taylorpolynom von f am Punkt x_0 ist das Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$:

$$T_k f(y; x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0) \cdot y_i + \ldots$$
$$+ \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} \cdot y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$$

Beispiele

$$T_1 f(\vec{x}; x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \vec{x}$$
$$T_2 f(\vec{x}; x_0) := T_1 f + \frac{1}{2} \cdot \vec{x}^\top \cdot \text{Hess}_f(x_0) \cdot \vec{x}$$

2.8 Definit

Eine symmetrische Matrix ist

- **positiv definit**, falls alle Eigenwerte positiv sind.
- **negativ definit**, falls alle Eigenwerte negativ sind.
- **indefinit**, falls sowohl positive als negative Eigenwerte existieren.

Eigenwerte können mit dem charakteristischen Polynom gefunden werden:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow ad - (a + d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

Für nichtsymmetrische Matrizen müssen wir für jeden Vektor v testen, ob $v^\top Av > 0$ (bzw. < 0) gilt.

Determinante in drei Dimensionen

$$a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

2.9 Extrema

Lokale Extrema

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathcal{X}$ eine offene Menge. Dann ist $x_0 \in \mathcal{X}$ ein lokales Maximum (Minimum) falls wir eine Umgebung $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < r\} \subset \mathcal{X}$ finden können, wo gilt:

$$\forall x \in B_r(x_0) : f(x) \leq (\geq) f(x_0)$$

Wenn $x_0 \in \mathcal{X}$ ein lokales Extrema ist, dann gilt ausserdem $\nabla f(x_0) = 0$.

Kritische Punkte

Ein Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ wo $\nabla f(x_0) = 0$ gilt ist ein kritischer Punkt. Wenn $\det(\text{Hess}_f(x_0)) \neq 0$, dann ist x_0 nicht-degeneriert.

Sattelpunkt

Wenn ein kritischer Punkt weder Maximum noch Minimum ist, dann nennen wir ihn Sattelpunkt.

Globale Extrema

Sei $f : K \mapsto \mathbb{R}$ und K kompakt, dann existiert ein globales Extrema von f und es ist entweder ein kritischer Punkt oder am Rand von K. Um ein solches Extrema zu bestimmen, teilen wir K in sein Inneres $\mathcal{X}$ und den Rand B auf.
Nun bestimmen wir zuerst wie zuvor die kritischen Punkte von $\mathcal{X}$. Um die Maximas/Minimas von B zu bestimmen, benötigen wir nur Wissen aus Analysis I (da von der Form $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$).

Testen von kritischen Punkten

Sei $f : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \mathcal{X}$ offen und $f \in C^2$. Sei x_0 ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f. Dann gilt:

1. $\text{Hess}_f(x_0)$ pos. def. $\implies$ x_0 ist lokales Minimum.
2. $\text{Hess}_f(x_0)$ neg. def. $\implies$ x_0 ist lokales Maximum.
3. $\text{Hess}_f(x_0)$ indefinit $\implies$ x_0 ist Sattelpunkt.

Dies funktioniert nicht, wenn x_0 ein degenerierter kritischer Punkt ist. In einem solchen Fall müssen die Vorzeichen überprüft werden.

Kritische Punkte mit Nebenbedingungen

Wenn wir Minimas/Maximas einer Funktion $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ mit einer Nebenbedingung $g(x) = 0, g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ bestimmen wollen, können wir dafür Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

Lagrange-Multiplikator

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen der Klasse C^1. Wenn $Y = \{x \in \mathcal{X} \mid g(x) = 0$ ist, dann ist $x_0 \in Y$ ein lokales Extrema, welches die Nebenbedingung erfüllt, falls

$$\exists \delta > 0, f(y) \leq (\geq) f(x_0), \quad \forall y \in B_\delta(x_0) \cap Y$$

gilt. Nun ist entweder $\nabla g(x_0) = 0$ oder $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0)$, wobei λ dann Lagrange-Multiplikator gennant wird.

3 Integrale in $\mathbb{R}^n$

3.1 Einfache Integrale

Für $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ ist das Integral definiert als

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

Kurve

Eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Ableitung $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ wobei γ stückweise in C^1 ist, d.h. wir können γ so partitionieren, das alle Partitionen in C^1 sind. Eine parametrisierte Kurve muss nicht injektiv sein.

3.2 Wegintegrale

Sei $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, welche das Bild von γ beinhaltet. Sei $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist ein Wegintegral (auch: Kurvenintegral) definiert als:

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

Wegintegrale haben folgende Eigenschaften:

1. Sie sind unabhängig von orientierungserhaltenden Reparametrisierungen, d.h. sie hängen nur vom Bild der Kurve und nicht von der Parametrisierung ab.

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n \\ \tilde{\gamma} &: [c, d] \mapsto \mathbb{R}^n \\ \Phi &: [c, d] \mapsto [a, b] \\ \tilde{\gamma} &= \gamma \circ \Phi = \gamma(\Phi) \\ \Rightarrow \int_\gamma f(s)\, ds &= \int_{\tilde{\gamma}} f(s)\, ds \end{aligned}$$

2. Sei $\gamma_1 + \gamma_2$ ein Pfad gegeben durch die Vereinigung zweier Kurven. Dann gilt

$$\gamma_1 + \gamma_2 := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b, d + b - c] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(s)\, ds = \int_{\gamma_1} f(s)\, ds + \int_{\gamma_2} f(s)\, ds$$

3. Sei $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Pfad und $-\gamma$ ist der Pfad in die Gegenrichtung (d.h. $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$). Dann gilt

$$\int_{-\gamma} f(s)ds = -\int_\gamma f(s)ds$$

3.3 Potential

Ein differenzierbares skalares Feld $g : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $\nabla g = f, f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$ wird ein **Potential** von f genannt. Dies kann wie folgt verwendet werden:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\, ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)\, dt \\ &= (g \circ \gamma)(b) - (g \circ \gamma)(a) \end{aligned}$$

3.4 Konservative Vektorfelder

Sei $\mathcal{X}$ offen und $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Falls für irgendwelche $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ das Wegintegral $\int_\gamma f(s)ds$ unabhängig von der Kurve in $\mathcal{X}$ von x_1 nach x_2 ist, dann ist das Vektorfeld f konservativ.
2. Jedes Wegintegral in f entlang einer geschlossenen Kurve (Schlaufe) ist 0.
3. Ein Potential für f existiert.

Es gilt ausserdem folgende notwendige, aber nicht ausreichende Bedingung:

$$f \text{ ist konservativ} \quad \implies \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Wegzusammenhängend

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{X}$ ist wegzusammenhängend, falls für jedes Paar an Punkten $x, y \in \mathcal{X}$ ein Pfad $\gamma : (0, 1] \mapsto \mathcal{X}$ existiert, der in C^1 ist und $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ hält.

Sternförmig

Eine Teilmenge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ wird sternförmig genannt, falls $\exists x_0 \in \mathcal{X}$ so dass $\forall x \in \mathcal{X}$ eine Linie x_0 nach x existiert, die komplett in $\mathcal{X}$ enthalten ist.

$$\mathcal{X} \text{ ist konvex} \implies \mathcal{X} \text{ ist sternförmig}$$

Wenn $\mathcal{X}$ eine sternförmige, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^1$ ein Vektorfeld ist, dann gilt:

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \quad \forall i, j \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konservativ}$$

$$\text{curl}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konservativ}$$

$\text{curl}(f)$ ist definiert als

$$\text{curl}(f) := \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

3.5 Riemann-Integral in $\mathbb{R}^2$

Partition in zwei Dimensionen

Eine Partition P eines abgeschlossenen Rechtecks $R = [a, b] \times [c, d]$ ist eine Menge von Rechtecken. Für jede Partition P_x : $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ von $[a, b]$ und P_y (analog) erhalten wir eine Partition $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ von R mit der Fläche $\mu(P_{i,j} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}))$.

Mit den Hilfsdefinitionen

$$f_{i,j} = \inf_{P_{i,j}} f(x, y), \quad F_{i,j} = \sup_{P_{i,j}} f(x, y)$$

können wir die Unter- und Obersumme bestimmen:

$$s(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} \cdot \mu(P_{i,j})$$
$$S(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_{i,j} \cdot \mu(P_{i,j})$$

Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt. f ist auf R integrierbar, falls $\sup_{(P_x,P_y)} s(P_x, P_y)$ $\inf_{(P_x,P_y)} S(P_x, P_y)$ gilt. Dieser Wert ist dann definiert als:

$$\int_R f(x,y)\, d(x,y) \text{ oder } \int\int_R f(x,y)\, d(x,y)$$

Nicht-Quadratische Flächen

Sei $A \subset R$ eine Fläche. $f : A \subset R \mapsto \mathbb{R}$ ist auf A integrierbar, falls $f \cdot \mathcal{X}_A$ auf R integrierbar ist.

$$\int_R f(x,y) \cdot \mathcal{X}_A(x,y)\, d(x,y) \text{ oder } \int_A f(x,y)\, d(x,y)$$

$\mathcal{X}_A$ ist die charakteristische Funktion von A.

Eigenschaften des Integrals

Sei $f, g : A \subset R \mapsto \mathbb{R}$ auf A integrierbar, dann gilt folgendes:

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ ist integrierbar:
$$\int_A \alpha f + \beta g\, d(x,y) = \alpha \int_A f\, d(x,y) + \beta \int_A g\, d(x,y)$$
2. Falls $\forall (x,y) \in A : f(x,y) \leq g(x,y)$, dann gilt:
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) \leq \int_A g(x,y)\, d(x,y)$$
3. Falls $f(x,y) \geq 0$ und $B \subset A$, dann gilt:
$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) \leq \int_A f(x,y)\, d(x,y)$$
4. Dreiecksungleichung:
$$\left| \int_A f(x,y)\, d(x,y) \right| \leq \int_A |f(x,y)|\, d(x,y)$$
5. Falls $f = 1$, dann gilt:
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_A 1\, d(x,y) = \gamma(A)$$

Satz von Fubini

Für eine Region $D \subset \mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g(x) < y < h(x)\}$ gilt:

$$\int_D f(x,y)\, dx\, xy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Für eine Region $D \subset \mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, G(y) < x < H(y)\}$ gilt:

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{G(y)}^{H(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Satz von Stolz

Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrierbar auf $R = [a,b] \times [c,d]$. Sei $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar auf $[c,d]$ für jedes $x \in [a,b]$. Dann folgt:

$$\int_R f(x,y)\, (\, d(x,y)) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

Nullmenge

Eine Nullmenge $X \subset R \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Menge, so dass für alle $\epsilon > 0$ eine endliche Menge an Rechtecken $R_k, 1 \leq k \leq n$ existiert, so dass:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{n} R_k,\ \sum_{k=1}^{n} \mu(R_k) < \epsilon$$

(Informell: Wir können die ganze Menge mit einer endlichen Menge an Rechtecken beliebiger Grösse überdecken.)

Weitere Integrationskriterien

1. Sei R ein kompaktes Rechteck und $f : R \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig. Dann ist f integrierbar auf R.
2. Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und X die Menge aller nicht stetigen Punkte von f. Wenn X eine Nullmenge ist, dann ist f auf R integrierbar.
3. Sei $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig mit $\forall x \in [a,b] : \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ und $A = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Falls $f : A \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, so ist f auf A integrierbar und es folgt dass
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Lipschitz-Kurve

Eine Kurve $\varphi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ ist Lipschitz, falls

$$||\varphi(s) - \varphi(t)|| \leq M \cdot |s - t|\ \forall s, t \in [0,1]$$

Es folgt ausserdem, dass $\varphi([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist.

3.6 Variablenwechsel

Sei ∂A der Rand einer Menge A:

$$\begin{aligned} \partial A = \Big\{ &(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \delta > 0, \\ &R = (x - \delta, x + \delta) \times (y - \delta, y + \delta), \\ &A \cap R \neq \emptyset \text{ und } \mathbb{R}^2 \backslash A \cap R \neq \emptyset \Big\} \end{aligned}$$

Sei $\varphi : B \mapsto A$ eine stetige Abbildung, wobei $A = A_0 \cup \partial A$, $B = B_0 \cup \partial B$ kompakte Mengen mit A_0, B_0 offen und $\partial A, \partial B$ Nullmengen sind. Wenn $\varphi : B \setminus \mathbb{N} \mapsto A$ injektiv ist und $N \subset B$ die Nullmenge ist, dann folgt

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_B f(\varphi(u,v)) \cdot |\det J_\varphi(u,v)|\, d(u,v)$$

1. Polarkoordinaten: $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$
2. Zylindrische Koordinaten: $dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\theta\, dz$
3. Kugelkoordinaten: $dx\, dy\, dz = r^2 \sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Achtung: Multiplikation mit der Determinante von Jacobi-Matrix nicht vergessen!

Beispiel mit Kettenregel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\nabla f \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 7 \right) = (6, 2, 0)$. Wenn wir nun $\frac{\partial f}{\partial r} \left(\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi, 7 \right)$ mit zylindrischen Koordinaten berechnen wollen, dann ist

$$\frac{\partial f(g(r,\theta,z))}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial r}$$

Nun können wir die obige Information brauchen, um für $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ einzusetzen.

3.7 Satz von Green

Der Satz von Green stellt eine Beziehung zwischen Linienintegralen und Doppelintegralen über einen von einer parametrisierten Kurve umschlossenen Bereich her.
Eine parametrisierte Jordan-Kurve ist eine geschlossene parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, wobei $\gamma :]a,b] \mapsto \mathbb{R}$ injektiv ist. Eine Jordan-Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist das Bild einer parametrisierten Jordan-Kurve.

Seien b_1, b_2 die Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$. Dann ist die Orientierung genau dann positiv, wenn die Matrix $[b_1, b_2]$ eine positive Determinante hat.
Ein reguläres Gebiet ist eine offene, beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand ∂A endliche Vereinungen von disjunkten Jordan-Kurven ist.
Eine parametrisierte Jordan-Kurve γ, die eine Randkomponente von A bildet, hat einen positiven Umlaufsinn, falls $(n(t), \gamma'(t))$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet. Dabei ist $n(t)$ der Einheitsvektor, welcher orthogonal zu $\gamma'(t)$ steht und von A weg zeigt. (Intuitiv: wenn die umschlossene Menge immer "links" liegt.)

Satz von Green

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Gebiet und $F : U \mapsto \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld der Klasse C^1, wobei $(A \cup \partial A) \subset U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_{\partial a} F(x)\, ds = \int\int_A (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\, dx\, dy$$

Um Flächen mit dem Satz von Green zu berechnen, benutzen wir ein Vektorfeld mit $\mathrm{curl}(f) = 1$, beispielsweise

$$f = (0, x) \text{ oder } f(-y, 0)$$

4 Themen aus Analysis I

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten $(g(x))$, wo das Integral periodisch ist $(\sin, \cos, e^x, ...)$ integrieren $(f'(x))$
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. im Fall von $\int \log(x)\ \mathrm{d}x$)
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

Substitution

Um $\int_a^b f(g(x))\ \mathrm{d}x$ zu berechnen: Ersetze $g(x)$ durch u und integriere $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$.

- $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann u wieder durch x substituiert werden.

Partialbruchzerlegung

Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome. $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ wird wie folgend berechnet:

1. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.
2. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
   - Einfach, reell: $x_1 \to \frac{A}{x-x_1}$
   - n-fach, reell: $x_1 \to \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   - Einfach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
   - n-fach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{A_1x+b_1}{x^2+px+q} + \ldots$
4. Parameter $A_1, \ldots, A_n$ (bzw. $B_1, \ldots, B_n$) bestimmen. (x jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

5 Trigonometrie

5.1 Regeln

5.1.1 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

5.1.2 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

5.1.3 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

5.1.4 Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

5.1.5 Potenzen

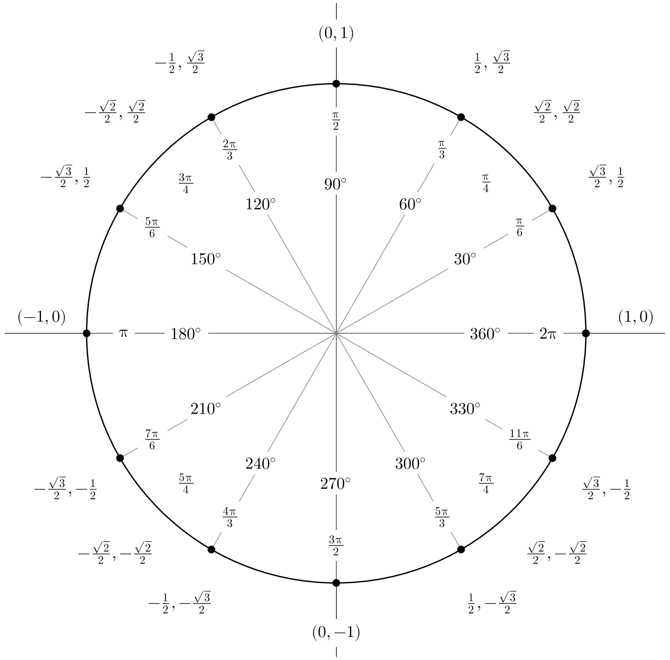
- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

5.1.6 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Wichtige Werte

deg	0°	30°	45°	60°	90°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0



6 Tabellen

6.1 Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$	a^{kx}	$ka^{kx}\ln(a)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1+\tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c}\cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c\cdot e^{cx}$
$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

6.2 Weitere Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x^x \ (x>0)$	$x^x\cdot(1+\ln x)$

6.3 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$

7 Quellen

Ein Grossteil des Cheatsheets wurde stark vom Cheatsheet von Danny Camenisch inspiriert. Ausserdem stammen Teile der Tabellen aus dem Buch “Formeln, Tabellen und Konzepte”. Die Definitionen sind meistens dem Skript “Analysis 1” von Marc Burger und dem Skript “Analysis 2” von E. Kowalski entnommen.