Theoretische Informatik HS24

Nicolas Wehrli

Übungsstunde 05
22. Oktober 2024

ETH Zürich
nwehrl@ethz.ch

Heute

1. Feedback zur Serie
2. Nichtdeterministische Endliche Automaten
   - Mindestanzahl Zustände
3. Turing Maschinen
4. Midterm Prep

Feedback zur Serie

Feedback

- Pumping Lemma war mid. Heute Repetition.
- Common Mistakes:
  I. Ihr zeigt für eine Teilmenge aller möglichen Aufteilungen, dass (i), (ii) und (iii) nicht alle gelten. Es muss für **alle** gezeigt werden.
  II. Vorsicht bei Case Distinctions Aufgabe 12.b.
- Widerspruch jeweils zu Ende führen.

Beispielaufgabe Pumpinglemma

Wir zeigen per Pumping Lemma, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } ab \text{ gleich oft wie das Teilwort } ba\}$$

nicht regulär ist.

Pumping Lemma

Sei L regulär. Dann existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile x, y und z zerlegen lässt, das heisst $w = yxz$, wobei

(i) $|yx| \leq n_0$
(ii) $|x| \geq 1$
(iii) entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

Beispielaufgabe Pumpinglemma

Lösung

Sei L regulär.

Nach dem Pumping Lemma existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort w mit $|w| \geq n_0$ die Bedingung des PL erfüllt.

Sei $w = (abc)^{n_0}(bac)^{n_0}$. Offensichtlich gilt $|w| \geq n_0$. Nach dem PL existiert eine Zerlegung $w = yxz$, die (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Da yxz die Bedingung (i) erfüllt, gilt $|yx| \leq n_0$. Insbesondere folgt daraus, dass x komplett in der ersten Hälfte (i.e. $(abc)^{n_0}$) enthalten ist.

Aus (ii) folgt weiter, dass x mindestens ein Buchstaben enthält.

Beispielaufgabe Pumpinglemma

Case Distinction

I. **Case x = c**
   In diesem Fall enthält $yx^0z = yz$ das Teilwort ba einmal mehr als ab.
   Somit gilt in diesem Fall $yx^0z \notin L$.

II. **Case x enthält mindestens ein a oder b**
   Wir betrachten $yx^0z = yz$. In diesem Fall bleibt die Anzahl der Teilwörter ba gleich oder erhöht sich. Da aber die Anzahl der Teilwörter ab um mindestens 1 kleiner wird, gilt $yx^0z \notin L$.

Da die Case Distinction alle Fälle abdeckt folgt für die Zerlegung $yx^0z \notin L$. Aus $yxz \in L$ ergibt sich somit ein Widerspruch.

Demnach ist die Annahme falsch und L nicht regulär.

Nichtdeterministische Endliche Automaten

Definition NEA

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** ist ein Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Dabei ist

(i) Q eine endliche Menge, **Zustandsmenge** genannt,
(ii) Σ ein Alphabet, **Eingabealphabet** genannt,
(iii) $q_0 \in Q$ der **Anfangszustand**,
(iv) $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** und
(v) δ eine Funktion von $Q \times \Sigma$ nach $\mathcal{P}(Q)$, **Übergangsfunktion genannt**.

Ein NEA kann zu einem Zustand q und einem gelesenen Zeichen a mehrere oder gar keinen Nachfolgezustand haben.

Konfigurationen für NEAs

Eine **Konfiguration** von M ist ein Tupel $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$.

- "M befindet sich in einer Konfiguration $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$, wenn M im Zustand q ist und noch das Suffix w eines Eingabewortes lesen soll."

Ein **Schritt** von M ist eine Relation (auf Konfigurationen) $\vdash_M \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$, definiert durch

$$(q, w) \vdash_M (p, x) \iff w = ax, a \in \Sigma \text{ und } p \in \delta(q, a)$$

Berechnungen für NEAs

Eine **Berechnung von M** ist eine endliche Folge $C_1, ..., C_k$ von Konfigurationen, so dass

$$C_i \vdash_M C_{i+1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Eine **Berechnung von M auf x** ist eine Berechnung $C = C_0, ..., C_m$, wobei $C_0 = (q_0, x)$ und **entweder** $C_m \in Q \times \{\lambda\}$ so dass $\delta(q, a) = \emptyset$.

Falls $C_m \in F \times \{\lambda\}$, sagen wir, dass C eine **akzeptierende Berechnung** von M auf x ist, und dass M **das Wort** x **akzeptiert**.

Weitere Definitionen

Die Relation $\vdash_M^*$ ist die reflexive und transitive Hülle von $\vdash_M$, genau wie bei einem EA.

Wir definieren

$$\mathbf{L}(\mathbf{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (p, \lambda) \text{ für ein } p \in F\}$$

als die **von M akzeptierte Sprache.**

Zu der Übergangsfunktion δ definieren wir die Funktion $\hat{\delta} : (Q \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(Q)$ wie folgt:

(i) $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$ für alle $q \in Q$

(ii) $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(r, a)$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Beispiel aus der Vorlesung

Wir betrachten folgenden NEA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma_{\text{bool}}, \delta, q_0, \{q_2\})$

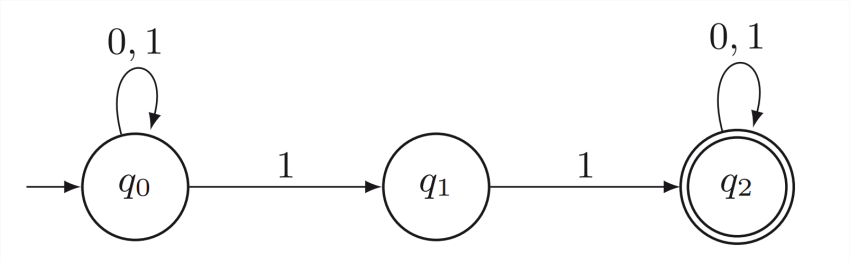


Abbildung 1: Abb. 3.15 aus dem Buch

Berechnungsbaum

Für ein Wort $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$ ist ein Berechnungsbaum $\mathcal{B}_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$ nützlich, um zu erkennen, ob $x \in L(M)$.

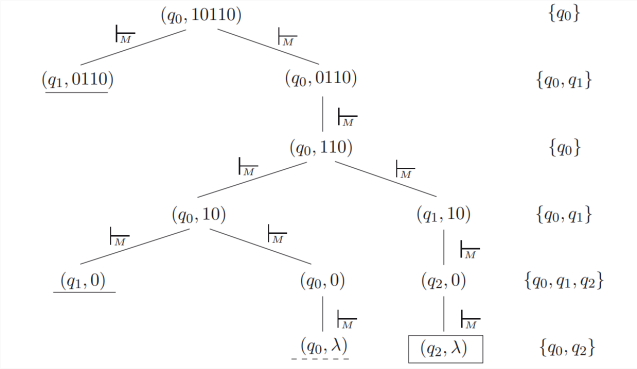


Abbildung 2: Abb. 3.16 aus dem Buch

Sprache des NEA - Lemma 3.5

Wir können die Sprache des NEA bestimmen.

$$L(M) = \{x11y \mid x, y \in (\Sigma_{\text{bool}})^*\}$$

Beweisidee

Beide Inklusionen zeigen und fertig. (Siehe Buch)

Wir definieren die Klasse $\mathcal{L}_{\text{NEA}}$.

$$\mathcal{L}_{\text{NEA}} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein NEA}\}$$

Äquivalenz von NEA und EA

Beweis von $\mathcal{L}_{\text{NEA}} = \mathcal{L}_{\text{EA}}$ per **Potenzmengenkonstruktion**.

Satz 3.2

Zu jedem NEA M existiert ein EA A, so dass

$$L(M) = L(A)$$

Beweisidee

Potenzmengenkonstruktion und dann Induktion auf der Länge von einem Input i.e. $|x|$. (Siehe Buch)

Potenzmengenkonstruktion

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta_M, q_0, F)$ ein NEA. Wir konstrurieren einen äquivalenten Endlichen Automaten $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_{0A}, F_A)$.

(i) $Q_A = \{\langle P \rangle \mid P \subseteq Q\}$

(ii) $\Sigma_A = \Sigma$

(iii) $q_{0A} = \langle \{q_0\} \rangle$

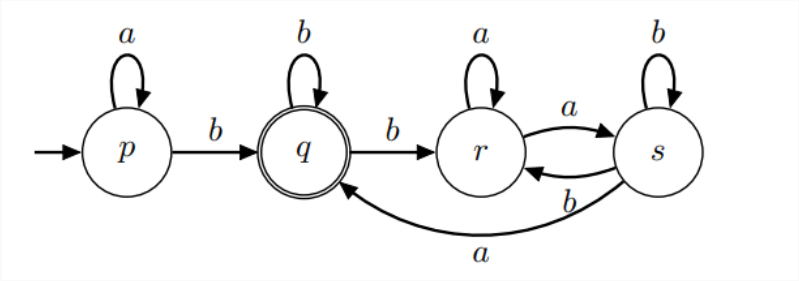
(iv) $F_A = \{\langle P \rangle \mid P \subseteq Q \text{ und } P \cap F \neq \emptyset\}$

(v) $\delta_A : (Q_A \times \Sigma_A) \to Q_A$ ist eine Funktion, definiert wie folgt. Für jedes $\langle P \rangle \in Q_A$ und jedes $a \in \Sigma_A$ ist

$$\begin{aligned} \delta_A(\langle P \rangle, a) &= \left\langle \bigcup_{p \in P} \delta_M(p, a) \right\rangle \\ &= \langle \{q \in Q \mid \exists p \in P, \text{ so dass } q \in \delta_M(p, a)\} \rangle \end{aligned}$$

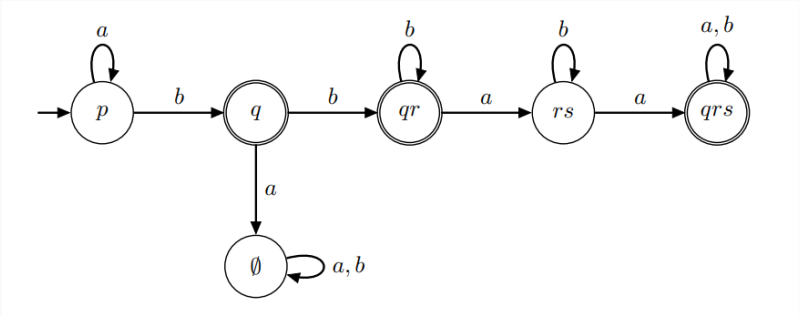
Potenzmengenkonstruktion mit Beispiel NEA

Wenden wir Potenzmengenkonstruktion an:



Potenzmengenkonstruktion mit Beispiel NEA

Lösung:



Exponentiell mehr Zustände - manchmal

Sei

$$L_k = \{x1y \mid x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*,\ y \in (\Sigma_{\text{bool}})^{k-1}\}$$

Folgender NEA A_k mit $k+1$ Zuständen akzeptiert L_k.

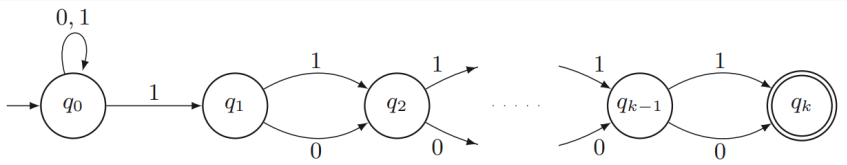


Abbildung 3: Abb. 3.19 im Buch

Exponentiell mehr Zustände - manchmal

Lemma 3.6

Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ muss jeder EA, der L_k akzeptiert, mindestens 2^k Zustände haben.

Beweis

Sei $B_k = (Q_k, \Sigma_{bool}, \delta_k, q_{0k}, F_k)$ ein EA mit $L(B_k) = L_k$.

Nach **Lemma 3.3** gilt für $x, y \in (\Sigma_{bool})^*$:

Wenn $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) = \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$, dann gilt für alle $z \in (\Sigma_{bool})^*$:

$$xz \in L(B_k) \iff yz \in L(B_k)$$

Exponentiell mehr Zustände - manchmal

Die Idee des Beweises ist es, eine Menge S_k von Wörtern zu finden, so dass für keine zwei unterschiedlichen Wörter $x, y \in S_k$ die Gleichung $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) = \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$ gelten darf. Dann müsste B_k mindestens $|S_k|$ viele Zustände haben.

Wir wählen $S_k = (\Sigma_{bool})^k$ und zeigen, dass $\hat{\delta}_k(q_{0k}, u)$ paarweise unterschiedliche Zustände für alle $u \in S_k$ sind.

Wir beweisen dies per Widerspruch.

Exponentiell mehr Zustände - manchmal

Seien $x = x_1x_2...x_k$ und $y = y_1y_2...y_k$ für $x_i, y_i \in \Sigma_{bool}, i \in \{1, ..., k\}$ zwei unterschiedliche Wörter aus S_k.

Nehmen wir zum Widerspruch an, dass $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) = \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$.

Weil $x \neq y$, existiert ein $j \in \{1, ..., k\}$, so dass $x_j \neq y_j$. O.B.d.A. setzen wir $x_j = 1$ und $y_j = 0$. Betrachten wir nun $z = 0^{j-1}$. Dann ist

$xz = x_1...x_{j-1}1x_{j+1}...x_k0^{j-1}$ und $yz = y_1...y_{j-1}0y_{j+1}...y_k0^{j-1}$

und daher $xz \in L_k$ und $yz \notin L_k$.

Dies ist ein Widerspruch! Folglich gilt $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) \neq \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$ für alle paarweise unterschiedliche $x, y \in S_k = (\Sigma_{bool})^k$.

Daher hat B_k mindestens $|S_k| = 2^k$ viele Zustände.

Mindestanzahl Zustände n - Beweisschema

Die Grundidee ist es n Wörter anzugeben und zu beweisen, dass jedes von diesen n Wörtern in einem eigenen Zustand enden muss.

Seien $w_1, ..., w_n$ diese Wörter. Dann geben wir für jedes Paar von Wörtern $w_i \neq w_j$ einen Suffix $z_{i,j}$ an, so dass folgendes gilt:

$$w_i z_{i,j} \in L \iff w_j z_{i,j} \in L$$

Dann folgt aus Lemma 3.3

$$\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$$

Es eignet sich die Suffixe als Tabelle anzugeben.

Um die Wörter und Suffixe zu finden, kann es sich als nützlich erweisen, den Endlichen Automaten zu konstruieren.

Mindestanzahl Zustände n - Beweisschema

Wir nehmen zum Widerspruch an, dass es einen EA für L gibt mit weniger als n Zuständen.

Betrachten wir $w_1, ..., w_n$. Per Pigeonhole-Principle existiert $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$$

Per Lemma 3.3 folgt daraus, dass

$$\forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

Für $z = z_{i,j}$ gilt aber per Tabelle

$$w_i z_{i,j} \in L \not\iff w_j z_{i,j} \in L \quad (\mathbf{1})$$

für alle $i < j$.

Da keines der n Wörter im gleichen Zustand enden kann: Widerspruch.

Mindestanzahl Zustände n - Beweisschema

Dann noch Angabe der Tabelle für (**1**)

	w_2	...	w_n
w_1	$z_{1,2}$	...	$z_{1,n}$
...		...	...
w_{n-1}			$z_{n-1,n}$

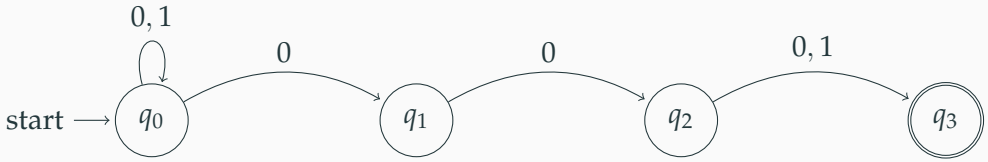
- Wenn es offensichtlich ist, muss (**1**) nicht bei jedem Suffix begründet werden.
- Ein minimaler endlicher Automat ist nicht notwendig für den Beweis. Hilft aber fürs
  i. Finden der w_i
  ii. Finden der $z_{i,j}$
  iii. Beweis von $w_i z_{i,j} \in L \not\Longleftrightarrow w_j z_{i,j} \in L$ (Leicht überprüfbar)

Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.a

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{x00y \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } y \in \{0,1\}\}$$

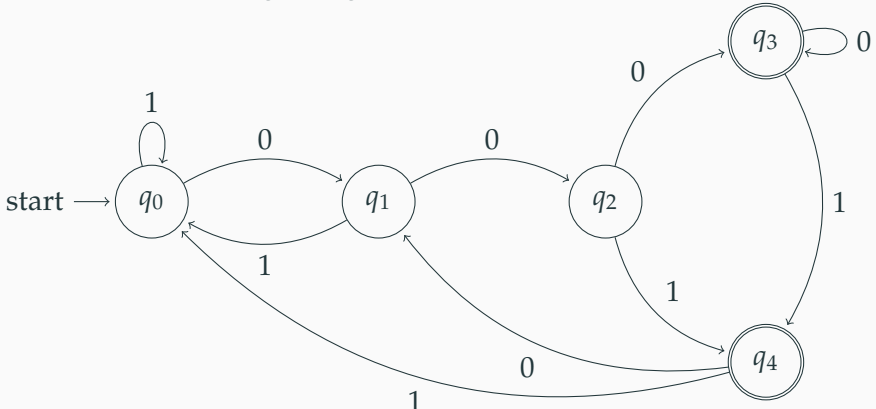
Konstruieren Sie einen nichtdeterminstischen endlichen Automaten mit höchstens 4 Zuständen, der L akzeptiert.



Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.b

Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der L akzeptiert, mindestens 5 Zustände braucht.

Wir zeichnen den zugehörigen EA zuerst.



Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.b

Nehmen wir zum Widerspruch an, dass es einen endlichen Automaten gibt, der L akzeptiert und weniger als 4 Zustände hat.

Wir wählen die Wörter $B = \{\lambda, 0, 00, 000, 001\}$.

Nach dem Pigeonhole-Principle existieren zwei Wörter $w_i, w_j \in B, w_i \neq w_j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$$

Per Lemma 3.3 folgt daraus, dass

$$\forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.b

Wir betrachten folgende Tabelle mit Suffixen.

	0	00	000	001
λ	01	1	λ	λ
0		1	λ	λ
00			λ	λ
000				1

Der zeigt für jedes Wortpaar $x, y \in B, x \neq y$ die Existenz eines Suffixes z, so dass

$$(xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$$

Dies kann man mit den angegebenen Suffixen und dem angegebenen EA einfach überprüfen.

Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.b

Dies widerspricht der vorigen Aussage, dass ein Wortpaar $w_i, w_j \in B, w_i \neq w_j$ existiert, so dass

$$\forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

Somit ist unsere Annahme falsch und es existiert kein EA mit ≤ 4 Zuständen für L.

■

Mindestanzahl Zustände n - Bemerkung

Manchmal ist es zu schwierig einen minimalen EA zu finden und es funktioniert einfacher die Wörter durch Trial and Error zu finden. (Siehe Midterm HS22)

Turing Maschinen

Motivation und Überblick

Formalisierung notwendig, um mathematisch über die automatische Unlösbarkeit zu argumentieren.

Jede vernünftige Programmiersprache ist eine zulässige Formalisierung.

Aber nicht geeignet (meistens komplexe Operationen).

Die Turingmaschine erlaubt ein paar **elementare Operationen** und besitzt trotzdem die **volle Berechnungsstärke** beliebiger Programmiersprachen.

Ziel dieses Kapitels ist, dass ihr ein gewisse Gespür dafür bekommt, was eine Turingmaschine kann und was nicht.

Turing Maschinen - Formalisierung von Algorithmen

Informell

Eine Turingmaschine besteht aus

(i) einer endlichen Kontrolle, die das Programm enthält,

Für formale Beschreibung siehe Buch.

Turing Maschinen - Formalisierung von Algorithmen

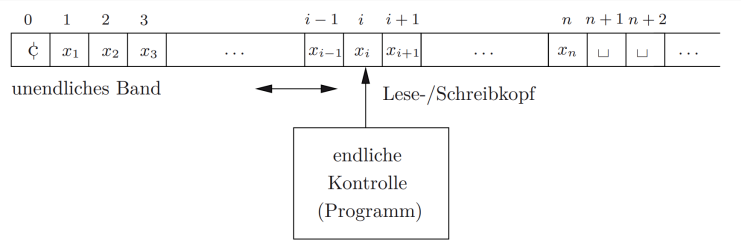


Abbildung 4: Abb. 4.1 vom Buch

Elementare Operation einer TM - Informell

Input

- Zustand der Maschine (der Kontrolle)
- Symbol auf dem Feld unter dem Lese-/Schreibkopf

Aktion

(i) ändert Zustand

(ii) schreibt auf das Feld unter dem Lese-/Schreibkopf

(iii) bewegt den Lese-/Schreibkopf nach links, rechts oder gar nicht. Ausser wenn ¢, dann ist links nicht möglich.

Turing Maschinen - Formalisierung von Algorithmen

Eine **Konfiguration** C von M ist ein Element aus

$$\textbf{Konf(M)} = \{¢\} \cdot \Gamma^* \cdot Q \cdot \Gamma^+ \cup Q \cdot \{¢\} \cdot \Gamma^*$$

- Eine Konfiguration $¢w_1qaw_2$ mit $w_1, w_2 \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$ sagt uns: M im Zustand q, Inhalt des Bandes $¢w_1aw_2␣␣␣...$, Kopf an Position $|w_1| + 1$ und liest gerade a.

Es gibt wieder eine Schrittrelation $\vdash_M \subseteq \text{Konf}(M) \times \text{Konf}(M)$.

Abbildung 5: Diagramm von Adeline

Berechnung von M, Berechnung von M auf einer Eingabe x etc. durch $\vdash_M$ definiert.

Die Berechnung von M auf x heisst

- **akzeptierend**, falls sie in einer akzeptierenden Konfiguration $w_1 q_{\text{accept}} w_2$ endet (wobei ¢ in w_1 enthalten ist).
- **verwerfend**, wenn sie in in einer verwerfenden Konfiguration $w_1 q_{\text{reject}} w_2$ endet.
- **nicht-akzeptierend**, wenn sie entweder eine **verwerfende** oder unendliche Berechnung ist.

Die von der **Turingmaschine M akzeptierte Sprache** ist

$$\mathbf{L}(\mathbf{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 ¢ w \vdash_M^* y q_{\text{accept}} z, \text{ für irgendwelche } y, z \in \Gamma^*\}$$

Wichtige Klassen

Reguläre Sprachen

$$\mathcal{L}_{\mathbf{EA}} = \{L(A) \mid A \text{ ist ein EA}\} = \mathcal{L}_{\mathbf{NEA}}$$

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Eien Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv aufzählbar**, falls eine TM M existiert, so dass $L = L(M)$.

$$\mathcal{L}_{\mathbf{RE}} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM}\}$$

ist die **Klasse aller rekursiv aufzählbaren Sprachen**.

Wichtige Klassen

Halten

Wir sagen das M **immer hält**, wenn für alle Eingaben $x \in \Sigma^*$

(i) $q_0 ¢ x \vdash_M^* y q_{\text{accept}} z, y, z \in \Gamma^*,$ falls $x \in L$ und

(ii) $q_0 ¢ x \vdash_M^* u q_{\text{reject}} v, u, v \in \Gamma^*,$ falls $x \notin L$.

Rekusive Sprachen

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv (entscheidbar)**, falls $L = L(M)$ für eine TM M, die **immer hält**.

$$\mathcal{L}_{\mathbf{R}} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM, die immer hält}\}$$

ist die **Klasse der rekursiven (algorithmisch erkennbaren) Sprachen**.

Mehrband-Turingmaschine

Mehrband-TM - Informelle Beschreibung

Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat eine k-Band Turingmaschine

- eine endliche Kontrolle
- ein endliches Band mit einem Lesekopf (Eingabeband)
- k Arbeitsbänder, jedes mit eigenem Lese-/Schreibkopf (nach rechts unendlich)

Insbesondere gilt 1-Band TM $\neq$ "normale" TM

Am Anfang der Berechnung einer MTM M auf w

- Arbeitsbänder "leer" und die k Lese-/Schreibköpfe auf Position 0.
- Inhalt des Eingabebands ¢w\$ und Lesekopf auf Position 0.
- Endliche Kontrolle im Zustand q_0.

Äquivalenz von Maschinen (TM, MTM)

Seien A und B zwei Maschinen mit **gleichem** Σ.
Wir sagen, dass **A äquivalent zu B ist**, wenn für jede Eingabe $x \in \Sigma^*$

(i) A akzeptiert $x \iff B$ akzeptiert x
(ii) A verwirft $x \iff B$ verwirft x
(iii) A arbeitet unendlich lange auf $x \iff B$ arbeitet unendlich lange auf x

Wir haben

$$A \text{ und } B \text{ äquivalent} \implies L(A) = L(B)$$

aber

$$L(A) = L(B) \not\implies A \text{ und } B \text{ äquivalent}$$

da A auf x unendlich lange arbeiten könnte, während B x verwirft.

Äquivalenz von 1-Band TM zu TM

Lemma 4.1

Zu jeder TM A existiert eine zu A äquivalente 1-Band-TM B

Beweisidee

B kopiert die Eingabe zuerst aufs Arbeitsband und simuliert dann A.

Äquivalenz von TM zu k-Band-TM

Lemma 4.2

Zu jeder Mehrband-TM A existiert eine zu A äquivalente TM B

Beweis

postponed

Äquivalenz Folgerung

Aus Lemma 4.1 und 4.2 folgt direkt

Satz 4.1

Die Maschinenmodelle von Turingmaschinen und Mehrband-Turingmaschinen sind äquivalent.

Note:

> ”Äquivalenz” für Maschinenmodelle wird in Definition 4.2 definiert. Maschinenmodelle sind Klassen von Maschinen (i.e. Mengen von Maschinen mit gewissen Eigenschaften).

Midterm Prep