

Zespół R - Zadanie 3

Nicolas Wielocha
Matusz Redzimski
Maciej Cymański

30.03.2022

Spis treści

1	Zadanie	
2	Wstęp teoretyczny	
2.1	Wielomian interpolacyjny w postaci Lagrange'a	
3	Rozważmy funkcje dane tabelką:	
4	Opis implementacji algorytmu	
4.1	Klasy	
4.2	Funkcje algorytmu	
5	Opis implementacji GUI	
5.1	Layout	

1 Zadanie

Obliczyć $\log_2 22$ za pomocą wielomianów interpolujących funkcję z tabeli

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Sprawdzić eksperymentalnie jaki podzbiór danych z tabelki daje najlepsze przybliżenie dokładnej wartości logarytmu (czyli dla jakiego zestawu tych węzłów wielomian Lagrange'a przebiega najbliżej punktu $(22, \log_2 22)$).

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Wielomian interpolacyjny w postaci Lagrange’a

Dla parami różnych węzłów x_0, \dots, x_n i danych wartości y_0, \dots, y_n wielomian P stopnia co najwyżej n , dany wzorem

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x),$$

gdzie

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, i = 0, 1, \dots, n,$$

spełnia warunki

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n.$$

Wielomiany $l_i = l_i(x)$ nazywamy **mnożnikami Lagrange’a**

Przy pomocy interpolacji wielomianów obliczymy $f(22)$, a następnie przy pomocy języka programowania Python przeprowadzimy serie obliczeń dla każdego możliwego podzbioru i ustalimy który przy użyciu wielomianu Lagrange’a najlepiej oddaje estymacje położenia punktu $(22, \log 22)$. Do obliczeń użyjemy biblioteki `scipy`.

3 Rozważmy funkcje dane tabelką:

Za pomocą metody zaprezentowanej w poprzednim podpunkcie interpolujemy wielomian na podstawie wybranych węzłów.

x	8	16	32	64
$f(x)$	3	4	5	6

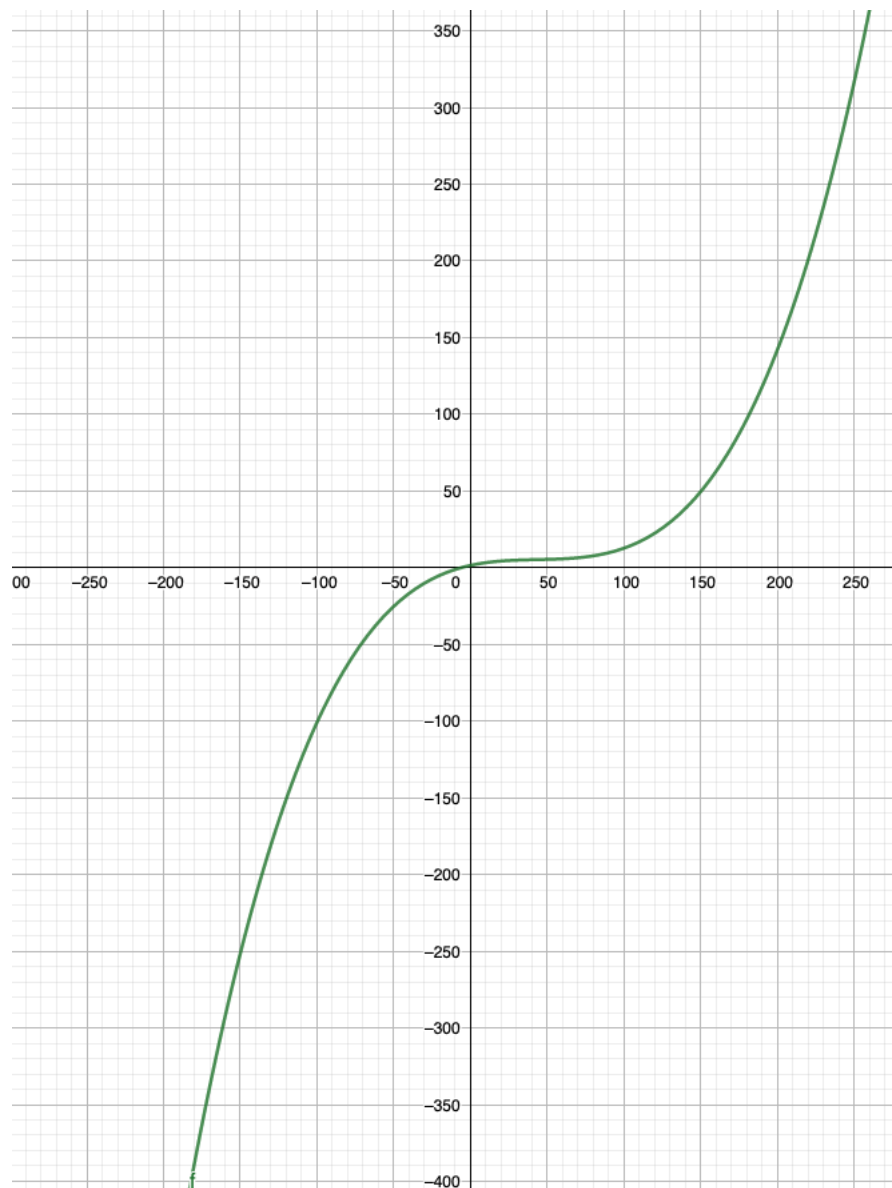
Niech $x_0 = 8, x_1 = 16, x_2 = 32, x_3 = 64$. Liczymy współczynniki $l_i(x)$, wtedy

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-16)(x-32)(x-64)}{(8-16)(8-32)(8-64)} = \frac{(16-x)(32-x)(64-x)}{10752} \\ l_1(x) &= \frac{(x-8)(x-32)(x-64)}{(16-8)(16-32)(16-64)} = \frac{(32-x)(64-x)(-8+x)}{6144} \\ l_2(x) &= \frac{(x-8)(x-16)(x-64)}{32-8 \quad 32-16 \quad 32-64} = \frac{(64-x)(-16+x)(-8+x)}{12288} \\ l_3(x) &= \frac{(x-8)(x-16)(x-32)}{(64-8)(64-16)(64-32)} = \frac{(x-8)(x-16)(x-32)}{86016} \end{aligned}$$

Jeśli $y_0 = 3, y_1 = 4, y_2 = 5, y_3 = 6$, to

$$P(x) = 3 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 5 \cdot l_2(x) + 6 \cdot l_3(x) = \frac{x(18816 - 392x + 3x^2)}{86016} + \frac{32}{21}$$

Odpowiedź: Dla $x = 22$, wartość interpolowanego wielomianu wynosi 4,5019.



Rysunek 1: Wykres interpolowanego wielomianu

4 Opis implementacji algorytmu

4.1 Klasy

Estimation

Klasa reprezentująca pojedynczą kompozycję węzłów, wielomian na nich podstawie oraz wartość obliczoną przez podstawienie danej wartości za x .

- Parametr **nodes**: lista węzłów w tabeli.
- Parametr **polynomial**: wielomian interpolowany z podanymi węzłami.
- Parametr **estimated_value**: wartość po podstawieniu dowolnej liczby w wielomian.

Lagrange

Klasa stworzona w celu dostarczenia danych do aplikacji GUI, która implementuje algorytm interpolacji LaGrange.

- Parametr **table**: tabela w formie słownika, gdzie klucze są węzłami, a wartości odpowiadają wartością $f(nodes)$.

4.2 Funkcje algorytmu

Podzbiory

Funkcja tworzy wszystkie możliwe podzbiory dla tabeli:

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Współczynnik $l(x)$

Funkcja tworzy współczynnik $l(x)$ używany we wzorze Lagrange.

- Parametr **nodes**: lista węzłów używanych do obliczenia współczynnika.
- Parametr **i**: liczba iteracji funkcji nadrzędnej **create_polynomial**.
- **Return**: funkcja zwraca obliczony wielomian w postaci obiektu **sympy**.

Wielomian

Funkcja tworzy wielomian z podanych węzłów. Węzły muszą być zawarte we właściwości tabeli obiektu.

- Parametr **nodes**: funkcja przyjmuje węzły, z których interpolowany jest wielomian.
- **Return**: funkcja zwraca wielomian interpolowany.

Najlepsza estymacja

Funkcja tworzy obiekt klasy **Estimation** z najlepszym możliwym wynikiem.

- Parametr **input_value**: dane wejściowe do obliczenia wartości wielomianu.
- Paramater **value**: wartość do porównania z **wielomianem(input_value)**
- **Return**: obiekt estymacji zawierający wielomian/węzły, które interpolowały wielomian/wartość **wielomianu(input)**.

Najgorsza estymacja

Funkcja tworzy obiekt **Estimation** z najgorszym możliwym wynikiem.

- Parametr **input_value**: dane wejściowe do obliczenia wartości wielomianu.
- Parametr **value**: wartość do porównania z **wielomianem(input_value)**
- **Return**: obiekt estymacji zawierający wielomian/węzły, które interpolowały wielomian/wartość **wielomianu(input)**

Estymacja przez wartość

Funkcja szacuje wartość wielomianu interpolowanego przy użyciu całej tablicy obiektu z podanymi danymi wejściowymi.

- Parametr **input_value**: dane wejściowe do obliczenia wartości wielomianu.
- **Return**: obiekt klasy **Estimation**.

5 Opis implementacji GUI

Przy tworzeniu **GUI - Graphical User Interface** korzystamy z biblioteki PySimpleGUI. Biblioteka ta pozwala nam na stworzenie prostej reprezentacji wyników wykonywanych obliczeń.

5.1 Layout

Szablon na podstawie, którego funkcja **sg.Window** tworzy interaktywne okno aplikacji.

Korzystamy z poniższych funkcji **Layout'u**:

- **sg.Text**: wypisuje informacje w niej zawarte.
- **sg.Image**: rysuje obraz w niej zawarty.
- **sg.Checkbox**: tworzy interaktywne okienka z możliwością zaznaczania.
- **sg.Button**: tworzy interaktywne przyciski, służące do wywoływania różnych funkcji.
- **sg.Input**: tworzy okno, które przyjmuje wartość przekazywaną do funkcji.
- **sg.Output**: zarezerwowana przestrzeń dla informacji zwracanych przez program.

Rysunek 2: GUI

Projekt I - Zespół R

— □ ×

Program pozwalający na obliczenie logarytmu za pomocą wielomianów interpolujących funkcję z tabeli podanej poniżej:

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Podaj liczbę której wartość chcesz obliczyć dla wielomianu lagaraża powstałego na podstawie wyżej pokazanej tabeli.

Liczby z przedziału 1-2048

Za pomocą tego programu możesz również sprawdzić eksperymentalnie jaki podzbiór danych z tabelki daje najlepsze przybliżenie dokładnej wartości logarytmu o podstawie 2 z 22. Zaznacz pola wartości X które chcesz uwzględnić w swoim eksperymentalnym wyliczeniu:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 64 ☐ 128 ☐ 256 ☐ 512 ☐ 1024 ☐ 2048