MOWNIT - Laboratorium 8

Całkowanie metodą Monte Carlo

Mikołaj Wróblewski

1. Bazowa metoda Monte Carlo

Do ćwiczenia przystąpiłem przypominając sobie bazową metodę Monte Carlo. Mając zakres (a,b) oraz znając przedział wartości funkcji na przedziale (a,b), niech będzie to (ymin, ymax), bazową metodę Monte Carlo definiujemy w sposób następujący:

- Losujemy n punktów (x,y), gdzie x jest z przedziału (a,b), a y z przedziału (ymin,ymax)
- Jeżeli nasz punkt znajduje się pod wykresem funkcji - lub nad, gdy punkt jest poniżej osi OX - inkrementujemy licznik ‘c’ trafionych punktów, tzw. “rzutek”
- Całka jest wynikiem pomnożenia pola prostokąta zdefiniowanego przez przedziały (a,b) oraz (ymin,ymax) pomnożonego przez stosunek punktów trafionych, do wszystkich = c / n
- zatem całka = (b - a) * (ymax - ymin) * c / n

Metoda ta ma zasadniczą wadę - musimy znać wartość maksymalną i minimalną funkcji na przedziale, na którym całkujemy. Dopóki funkcję możemy zróżniczkować, bądź jej przebieg jest oczywisty to nie jest to problemem.

2. Testy metody bazowej

Przeprowadziłem testy dla całek podanych w ćwiczeniu, konfrontując wyniki z wartościami oczekiwanymi. Przyjąłem następujące ilości próbek w testach: 10,100,1000,10000,100000. Wyniki testów można znaleźć w pliku montecarlo_basic.txt.

W zależności od testowanej funkcji oraz ilości użytych próbek możemy wysnuć następujące wnioski:

1. Dla funkcji y = x, błąd maleje nieznacznie pomiędzy ilością 10 próbek a większą ilością, pomiędzy 100, 1000, 10000, a 100000 próbek nie widzimy znacznych różnic w wielkości błędu.
2. Dla funkcji y = 1/x^2, widzimy podobne zachowanie. Błąd nieznacznie maleje, a pomiędzy wielkościami innymi niż 10 próbek błąd jest praktycznie taki sam.
3. Generalnie dla reszty testowanych funkcji obserwacje są bardzo podobne. Jedynie dla funkcji y = x^2 + 2x widzimy większe różnice w wielkościach błędu. Generalnie błędy obliczeń dla tej funkcji są największe.

Najprawdopodobniej dzieje się tak, gdyż funkcja ta jest funkcją szybko rosnącą, zatem mamy sporą szansę, że losując nasz punkt nie znajdzie się w interesującym nas obszarze.

Metoda ta zdecydowanie lepiej sprawdzi się dla funkcji wolno rosnących.

Dokładne wartości całek dla poszczególnych funkcji:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ dx$$

ans = 0.5

$$\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x^5+8}}\ dx$$

ans = 0.4350597200114438

$$\int_1^{22} \frac{1}{\sqrt{x+8}}\ dx$$

ans = 4.954451150103322

$$\int_1^{22} x^2+2x\ dx$$

ans = 4032

$$\int_1^3 \sqrt{x^5}\ dx$$

ans = 13.07582051553134

3. Metoda “rozszerzona” Monte Carlo

Zmodyfikowana metoda Monte Carlo ma zasadniczy plus nad metodą podstawową. Nie musimy znać przedziału wartości funkcji w naszym przedziale całkowania, by wyznaczyć całkę. Generalnie losujemy tylko wartości x (generalnie w wymiarze M losujemy M - 1 zmiennych) w przedziale (a,b). Następnie całka liczona jest za pomocą wzoru:

$$A = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

4. Testy metody rozszerzonej

Następnie analogicznie do metody podstawowej przeprowadziłem testy metody rozszerzonej. Wyniki testów umieszczone zostały przeze mnie w pliku montecarlo_ext.txt

Błędy są mniejsze aniżeli w przypadku metody podstawowej. Nadal jednak są one dużo większe niż w przypadku całkowania metodami takimi jak chociażby metoda trapezów.

5. Wyliczanie objętości brył metodą podstawową.

- Kula

Obliczanie objętości kuli metodą podstawową jest dosyć proste. Najpierw losujemy n punktów (x,y,z), wszystkie zmienne w przedziale [-5,5], ponieważ przyjmuję środek kuli w punkcie (0,0,0). Następnie mnożymy stosunek trafionych punktów do wszystkich przez objętość sześcianu opisanego na tej kuli.
Wyniki pomiarów zamieszczam w pliku sphere_basic.txt, wykonuję kilka razy test pomiarowy. W zależności od n nasz błąd maleje, jednak w pewnym momencie różnica nie jest tak spektakularna. Widzimy, że program uruchomiony kilka razy zwraca dla tych samych n podobne rzędy wielkości błędu.
Dokładny wynik dla kuli podanej w zadaniu: 523.598775598

- Stożek

Żeby obliczyć objętość stożka postępujemy analogicznie, za ‘pudełko’ przyjmujemy prostopadłościan, następnie losujemy punkty (x,y,z) i sprawdzamy, czy

nasz punkt trafił w stożek. Wyniki zamieściłem w pliku cone.txt. Widzimy, że błąd maleje ze wzrostem próbek.
Dokładny wynik dla stożka: 1047.1975512

- Trzeci przypadek

Wyznaczanie postępuje analogicznie. Wyniki zamieściłem w pliku weird_case.txt. Wartość dokładną bryły uzyskałem z wolframa.
Dokładny wynik: 4019.144201492542

Podsumowanie

Jak możemy zauważyć metoda Monte Carlo jest całkiem dobrą metodą wyznaczania wartości zarówno pola powierzchni pod krzywą, jak i objętości brył.