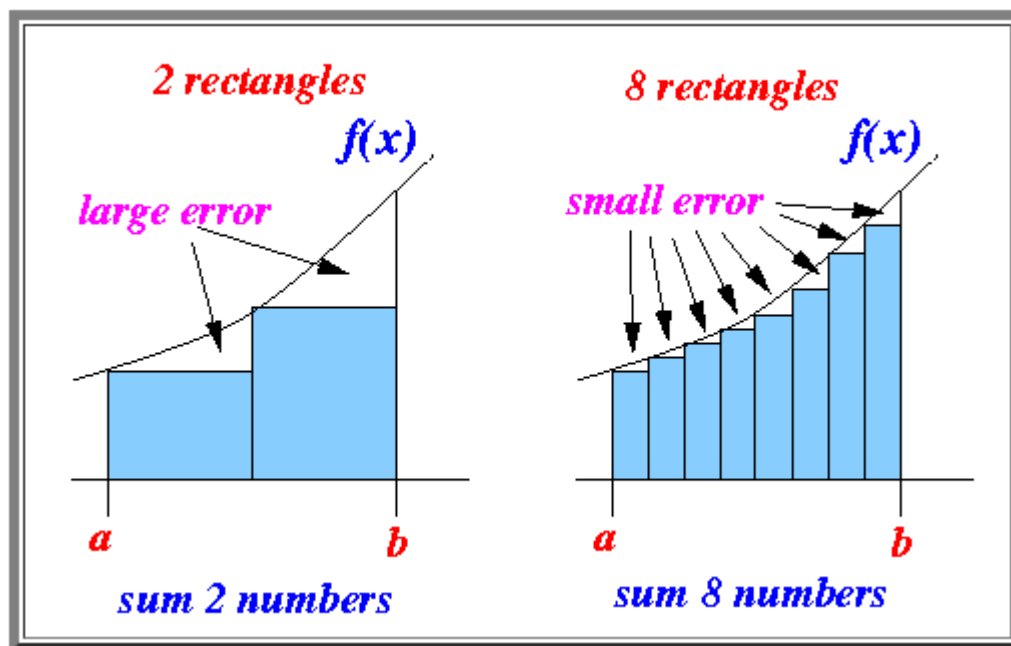




MOWNIT – Laboratorium 6
Całkowanie numeryczne – metody
podstawowe
Mikołaj Wróblewski

1. Pierwszą rzeczą do zrobienia na laboratorium 6 było zaimplementowanie metody całkowania zwaną metodą prostokątów. Generalnie dzielimy przedział po którym całkujemy na n podprzedziałów, gdzie pierwszy przedział to $(a, a+h)$, gdzie h wynosi $(b-a)/n$. Możemy to zobrazować na obrazku:

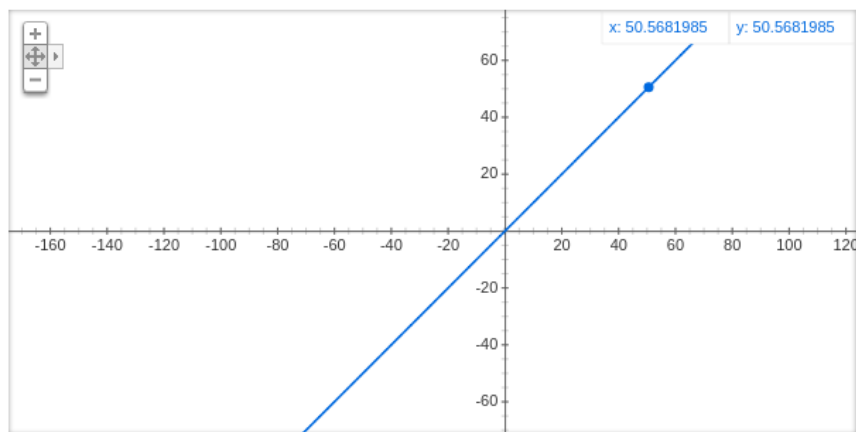


Liczenie całki sprowadza się zatem do zsumowania pól wszystkich prostokątów w naszym przedziale.

Następnie przeprowadziłem testy dla wszystkich funkcji, których wartości całek mieliśmy wyznaczyć:

Funkcja liniowa:

Wykres funkcji x



Więcej informacji

Wyniki obliczonych całek dla podanych przedziałów, wraz z wartością błędu bezwzględnego, wyznaczenie dokładnego wyniku dla tej funkcji było trywialne, zatem obliczenie błędu będzie miarodajne.

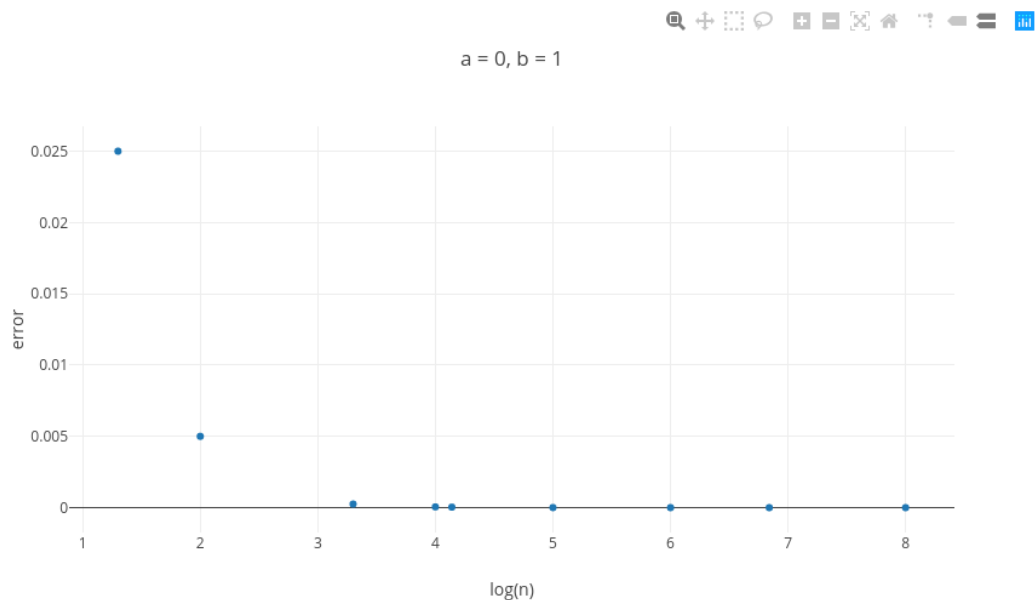
```
rectangle rule tests:
f = x
a = 0.0 b = 1.0
n = 5
wynik 0.40000000000000001 error 0.09999999999999992
n = 20
wynik 0.47500000000000003 error 0.02499999999999967
n = 100
wynik 0.4949999999999999 error 0.0050000000000001155
n = 2000
wynik 0.49975 error 0.0002499999999997247
n = 10000
wynik 0.49995000000000017 error 4.9999999982796e-05
n = 14000
wynik 0.49996428571428586 error 3.571428571413904e-05
n = 100000
wynik 0.49999500000000024 error 4.999999997552e-06
n = 1000000
wynik 0.49999950000000001 error 4.99999999033555e-07
n = 7000000
wynik 0.49999992857142944 error 7.142857055830731e-08
n = 100000000
wynik 0.49999999500000007 error 4.99999930347883e-09
a = 0.0 b = 100.0
n = 5
wynik 4000.0 error 1000.0
n = 20
wynik 4750.0 error 250.0
n = 100
wynik 4950.0 error 50.0
n = 2000
wynik 4997.5 error 2.5
n = 10000
wynik 4999.49999999991 error 0.500000000009095
n = 14000
wynik 4999.642857142857 error 0.357142857143117
n = 100000
wynik 4999.950000000003 error 0.04999999997453415
```

```

n = 1000000
wynik 4999.995000000021 error 0.004999999979190761
n = 7000000
wynik 4999.999285714286 error 0.0007142857139115222
n = 100000000
wynik 4999.999949999998 error 5.0000002374872565e-05
a = 0.0 b = 200.0
n = 5
wynik 16000.0 error 4000.0
n = 20
wynik 19000.0 error 1000.0
n = 100
wynik 19800.0 error 200.0
n = 2000
wynik 19990.0 error 10.0
n = 10000
wynik 19997.999999999964 error 2.00000000003638
n = 14000
wynik 19998.571428571428 error 1.428571428572468
n = 100000
wynik 19999.800000000001 error 0.19999999998981366
n = 1000000
wynik 19999.980000000083 error 0.019999999916763045
n = 7000000
wynik 19999.997142857144 error 0.0028571428556460887
n = 100000000
wynik 19999.999799999999 error 0.00020000000949949026

```

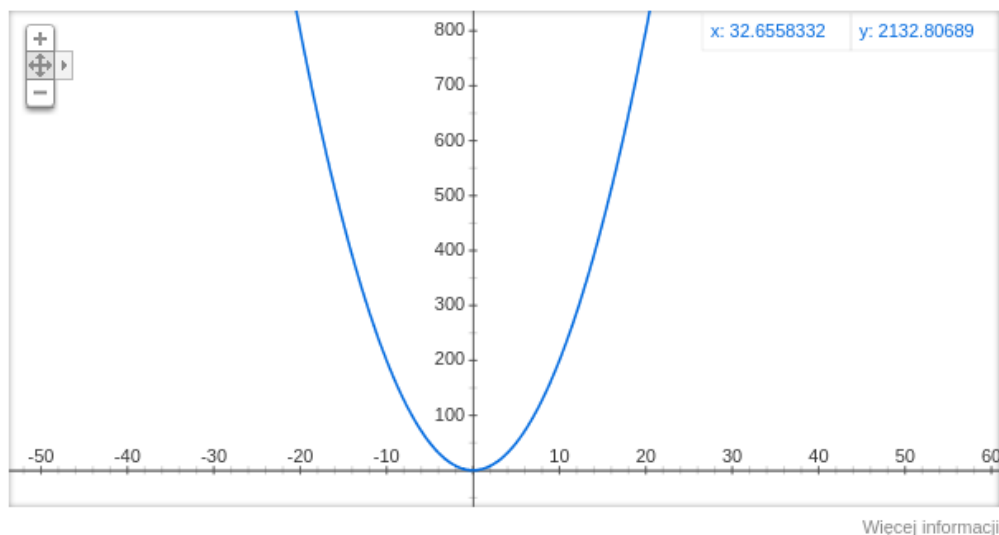
Dodatkowo dla pierwszego przedziału wykonałem wykres błędu



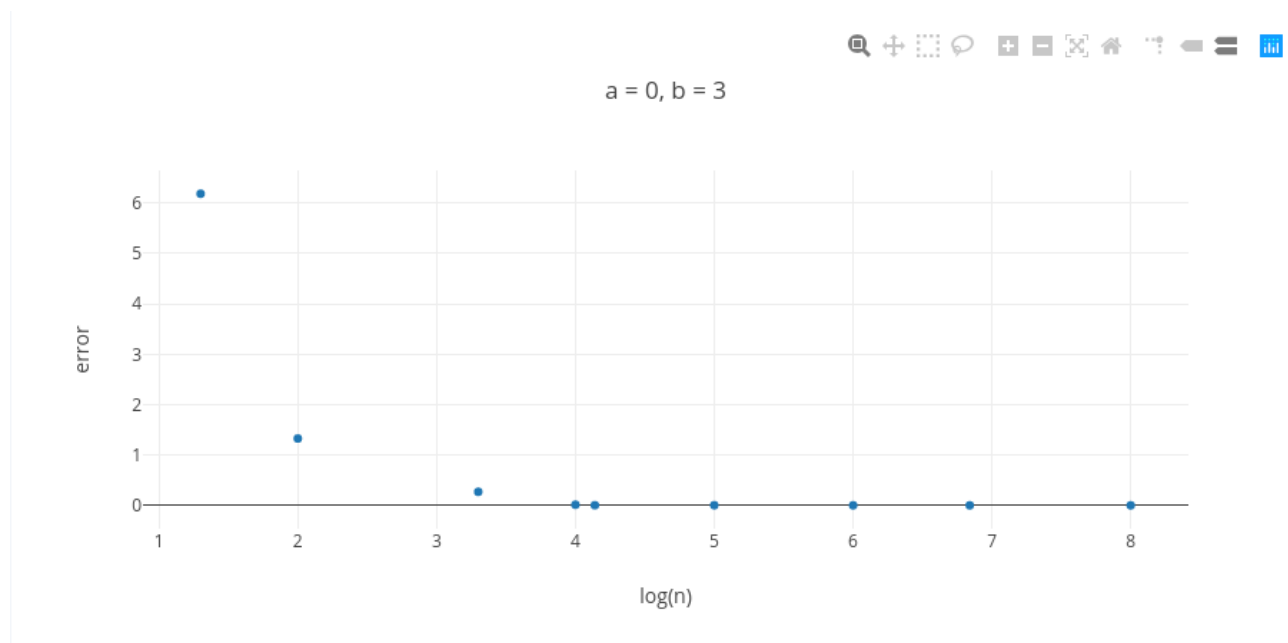
Gdzie n jest liczbą przedziałów, skala logarytmiczna dla lepszego zobrazowania.

Funkcja kwadratowa:

Wykres funkcji $2x^2$

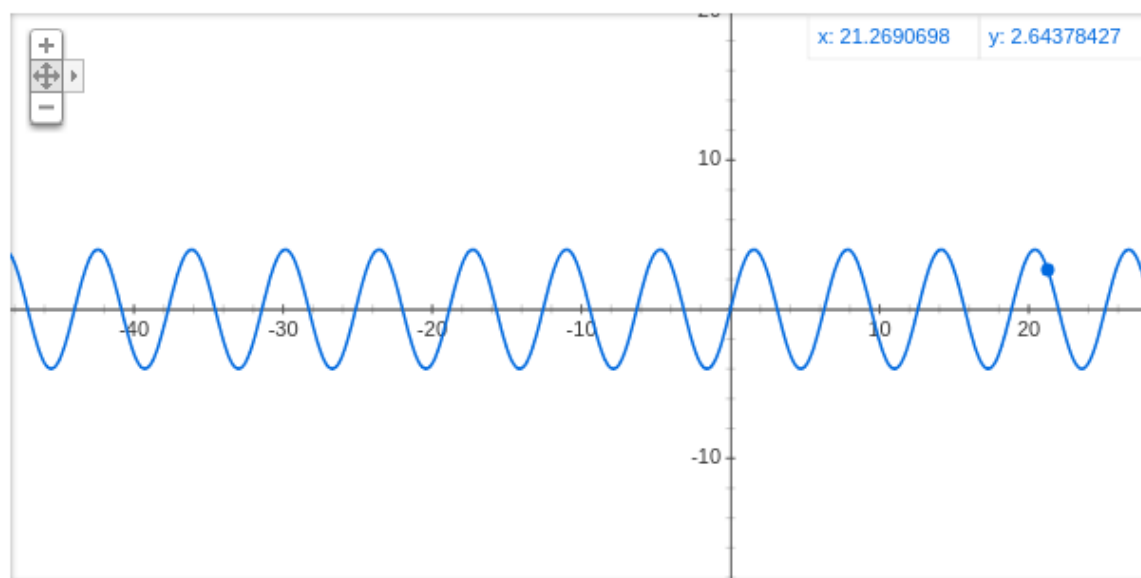


Wyniki testów zostają umieszczone w pliku dołączonym do archiwum z rozwiązaniem, poniżej wykres błędu dla pierwszego liczonego przedziału:



Funkcja sinus:

Wykres funkcji $4\sin(x)$

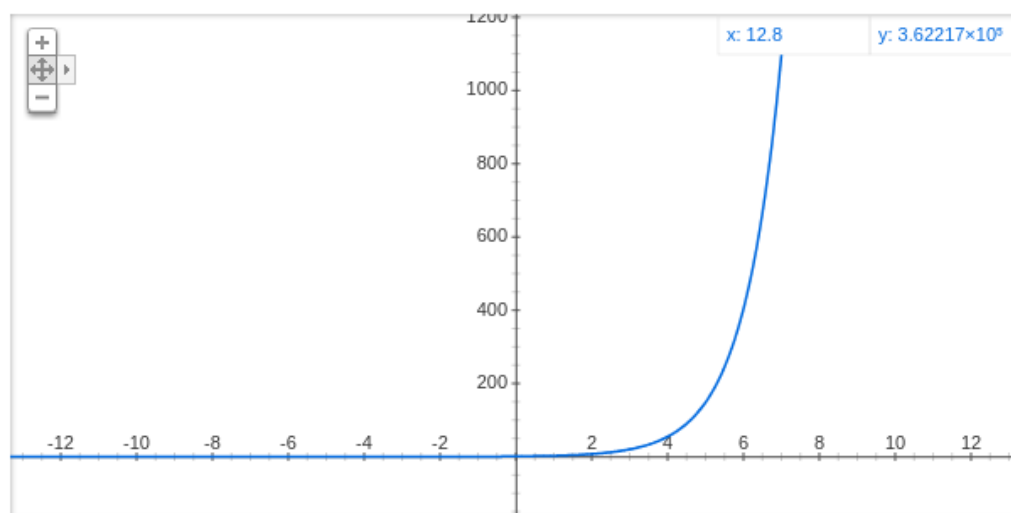


Więcej informacji

Testy zostały umieszczone w pliku tekstowym dołączonym do archiwum, tak samo dla dalszych testów.

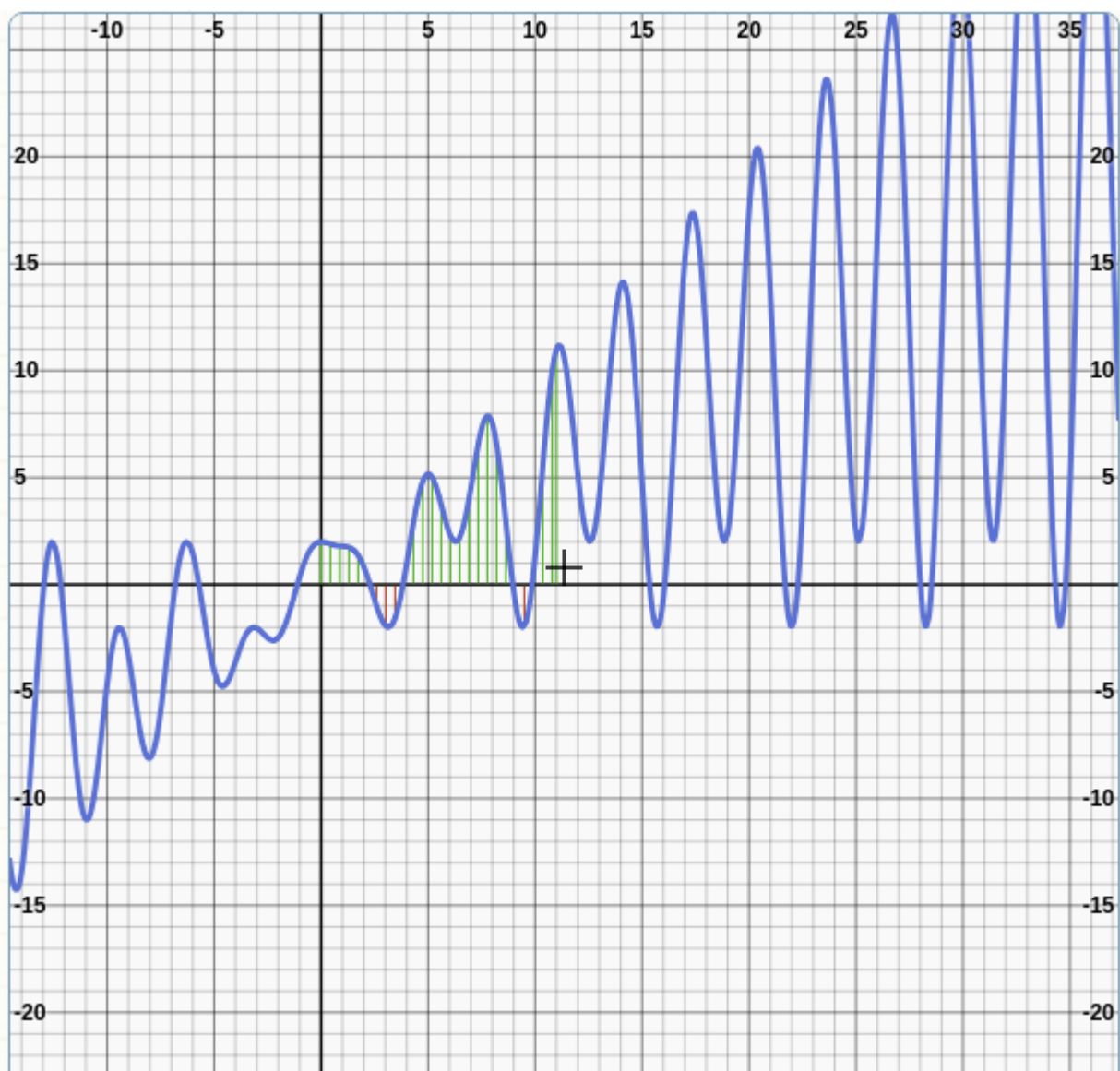
Funkcja eksponencjalna:

Wykres funkcji e^x

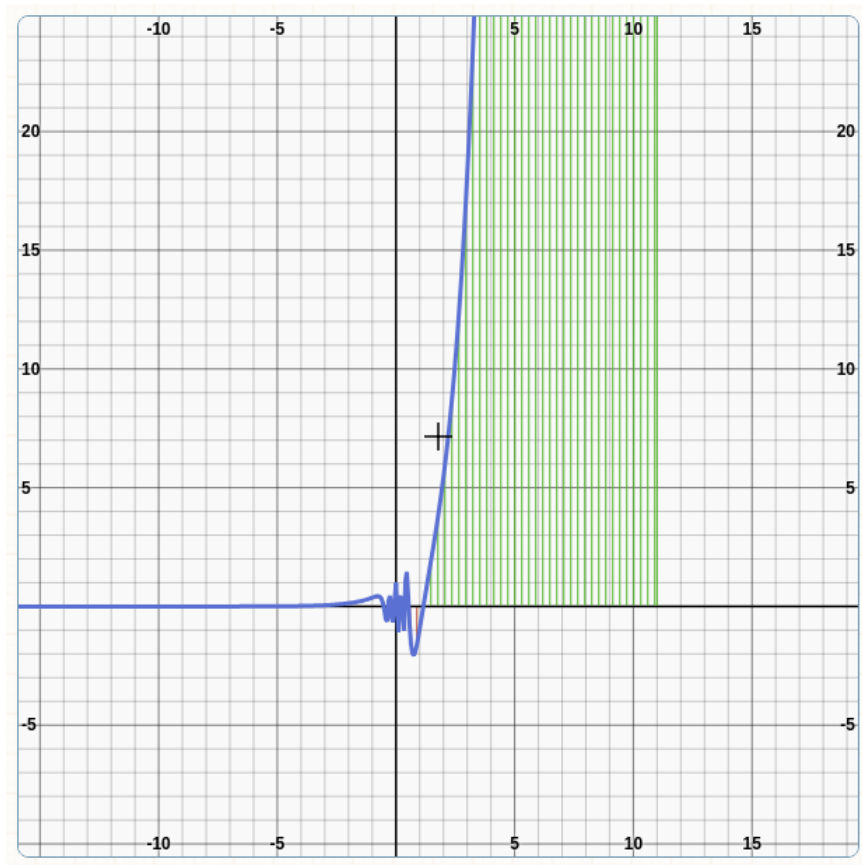


Więcej informacji

Funkcja $x\sin^2(x) + 2\cos(x)$



Funkcja $\cos((x+1)/(x^2+0.04)) \cdot e^x$



Funkcja ta jest szczególnie ciekawa, ponieważ jej całki nie da się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Wartość do której porównywałem jest wartością obliczoną numerycznie przez zewnętrzne serwisy.

2. Metoda trapezów

Metoda trapezów polega na obliczaniu całki poprzez wyliczanie pola trapezu prostokątnego, gdzie podstawy to $f(a)$ oraz $f(a+h)$, a wysokość to po prostu $h = (b-a)/n$.

Wyniki testów do metody trapezów zamieszczam w jednym pliku, tak samo jak wyniki testów dla metody simpsona.

3. Metoda Simpsona

Metoda ta opiera się na interpolacji funkcji całkowanej wielomianem drugiego stopnia, obliczamy całkę zgodnie ze wzorem:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(y_0 + 4 \sum_{i=1}^k y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} y_{2i} + y_n \right).$$

4. Błędy obliczeniowe.

W metodzie prostokątów mieliśmy narzut błędu związany z ilością prostokątów, warto zauważyć duży błąd przy szerszym przedziale całkowania, a mniejszej ilości kroków całkujących. Jest to całkiem logiczne, jeżeli nasza funkcja rośnie stosunkowo szybko, to błąd ten będzie się zwiększał. Ogólnie im więcej prostokątów tym nasz wynik będzie dokładniejszy. W swoim kodzie wybrałem right-rule, czyli bierzemy prawy koniec prostokąta. Oczywiście błąd możemy minimalizować używając midpoint-rule, czyli wybieramy środek podprzedziału jako wysokość naszego prostokąta. Wzór na błąd metody prostokątów jawi się wzorem:

$$|I[f] - M_n[f]| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Generalnie przy tej metodzie zauważyć możemy duże błędy przy funkcjach przechodzących przez oś liczbową.

W metodzie trapezów narzut związany z małą ilością podprzedziałów a szerokością przedziału jest zdecydowanie mniejszy, jest to dosyć oczywiste. Możemy zauważyć, że dla funkcji liniowej metoda ta daje błąd równy 0, lub błędy rzędu 1-e16, albo nawet mniejsze. Jest to dosyć oczywiste. Dla funkcji liniowej jesteśmy w stanie praktycznie idealnie obliczyć pole, ponieważ pole funkcji liniowej jest rzeczywiście trapezem prostokątnym. Wzór na błąd metody trapezów jawi się wzorem:

$$\frac{f''(\xi)h^3N}{12} = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12N^2}$$

(ξ) - jest wartością należącą do (a,b)

Widzimy, że kiedy druga pochodna jest równa 0, to nasz błąd wynosi zero – czyli dla funkcji liniowej. Dla funkcji kwadratowej uzyskamy błąd stały.

Metoda Simpsona generuje najmniejsze błędy związane z całkowaniem numerycznym, jej błąd jawi się wzorem:

$$-\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

(ξ) - jest wartością należącą do (a,b)

Mała wartość błędu bezpośrednio związana jest z tym, że we wzorze analitycznym o jego wielkości świadczy wartość czwartej pochodnej.