RootLattice

Noboru Nawashiro

2025 年 7 月 2 日

1 reflection groups と root system

ここで登場する記号は Mathlib とは関係ない独立したものであり，証明も Mathlib のものとは異なる場合がある．

以下，V を $\mathbb{R}^n$ の subspace とし，$\alpha, \beta \in V$ の内積を $\langle \alpha, \beta \rangle$ と書き，α のノルムを $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ と書く．

定義 1.1. $f : V \to V$ を線型写像とする．このとき，f が**直交変換**であるとは，

$$\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

が成り立つことである．また，V 上の直交変換全体の集合を $O(V)$ と書く．

注意 1.2. 定義から $\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$ がすぐわかる．

以下，$\boldsymbol{k}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし (Lean では `RCLike`)，E を $\boldsymbol{k}$-内積空間，K を E の $\boldsymbol{k}$-部分加群とする．

定義 1.3. $\forall v \in E,\ \exists w \in K$ s.t. $v - w \in K^{\perp}$ とする．線型連続写像 $\mathrm{proj}_K : E \to K; \mathrm{proj}_K(v) = w$ を**正射影 (projection)** という．すなわち，$x \in E$ を $x = \mathrm{proj}_K(x) + (x - \mathrm{proj}_K(x)) \in K \oplus K^{\perp}$ と書ける．

定理 1.4. 任意の $v, w \in E$ に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{k}v}(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v.$$

証明. 略. ■

定義 1.5. 次の直交変換を **reflection** という：

$$s_K : E \to E;\ x \mapsto 2 \cdot \mathrm{proj}_K(x) - x.$$

証明. 略. ■

定理 1.6. 任意の $u, v \in E$ に対し，次が成り立つ：

$$s_{\boldsymbol{k}u}(v) = 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u - v.$$

証明. 略. ■

注意 1.7. 以前，α に関する reflection は

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle \alpha, \lambda\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

と表せることを見た．定理 1.6からわかるように，$s_{\boldsymbol{k}\alpha}$ は s_α と逆向き (すなわち，$s_\alpha = s_{H_\alpha} = s_{(\mathbb{R}\alpha)^\perp}$) である．

定理 1.8. 任意の $x \in E$ に対して次が成り立つ：

$$s_K(x) = x \iff x \in K.$$

証明. 略. ■

定理 1.9. E' を $\boldsymbol{k}$-内積空間，$f : E \to E'$ を線形同型な等長写像 (すなわち，$\|f(x)\| = \|x\|$) とする．このとき，任意の $x \in E'$ に対して次が成り立つ：

$$s_{f(K)}(x) = f(s_K(f^{-1}(x))).$$

証明. 略. ■

定理 1.10. 任意の $v \in E$ に対し，$v \in K^\perp$ なら $s_K(v) = -v$ である．

証明. 略. ■

定義 1.11. $O(V)$ の部分群 W が次を満たすとき，W を **finite reflection group** という：

(i) W は finite group,

(ii) W は reflections で生成される，すなわち

$$\forall w \in W,\ \exists s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r} \in W\colon \text{reflections s.t. } w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}.$$

注意 1.12. $s_\alpha^2 = 1$.

定義 1.13. finite reflection group W が次を満たすとき，W は **essential** であるという：

$$\mathrm{Fix}(W) := \{\lambda \in V \mid \forall w \in W,\ w(\lambda) = \lambda\} = \{0\}.$$

注意 1.14. W が essential でないとき，$V = \mathrm{Fix}(W) \oplus \mathrm{Fix}(W)^\perp$ である．また，部分空間 $\mathrm{Fix}(W)^\perp$ 上では W は essential である．

定義 1.15. 空でない V の有限部分集合 Φ が次を満たすとき，Φ を **root system** という：

(i) Φ は V を生成する，

(ii) $\forall \alpha \in \Phi,\ \mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \Phi,\ s_\beta(\alpha) \in \Phi$.

また，Φ の元を **root vector**，または単に **root** という．

定義 1.16. root system Φ が次を満たすとき，**crystallographic** であるという：

(iv) $\forall \alpha, \beta \in \Phi,\ 2\dfrac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$.

finite reflection group が与えられると，それに対応する root system が存在する：

命題 1.17. W を essential finite reflection group とする．このとき，$\Phi := \{\alpha \in V \mid \|\alpha\| = 1,\ s_\alpha \in W\}$ は root system である．

証明. (i)を示すために，$\mathrm{Fix}(W) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$ を示す：

($\subseteq$) 任意に $\lambda \in \mathrm{Fix}(W)$，$\alpha \in \Phi$ をとると，$s_\alpha \in W$ であるから $s_\alpha(\lambda) = \lambda$ である．よって，

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = \langle \alpha, s_\alpha(\lambda) \rangle = \left\langle s_\alpha^{-1}(\alpha), \lambda \right\rangle = \langle s_\alpha(\alpha), \lambda \rangle = \langle -\alpha, \lambda \rangle = -\langle \alpha, \lambda \rangle. \qquad \therefore \langle \alpha, \lambda \rangle = 0.$$

したがって，$\lambda \in H_\alpha$ である．

($\supseteq$) $\lambda \in \bigcap_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$ とする．任意に $w \in W$ をとり，$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ と reflections の積で書く．ただし，$\|\alpha_1\| = \cdots = \|\alpha_r\| = 1$ としておく．すると，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi$ であるから，$\lambda \in H_{\alpha_i}$ である．よって，

$$w(\lambda) = (s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{r-1}} s_{\alpha_r})(\lambda) = (s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{r-1}})(\lambda) = \cdots = \lambda.$$

よって，W は essential だから，

$$\{0\} = \mathrm{Fix}(W) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} H_\alpha.$$

したがって，

$$V = \mathrm{Fix}(W)^\perp = \left(\bigcap_{\alpha\in\Phi} H_\alpha \right)^\perp = \sum_{\alpha\in\Phi} H_\alpha^\perp = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\alpha$$

であるから Φ は V を生成する．

(ii)は $\|\alpha\| = 1$ からわかる．

(iii)を示す．$\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対し，$\|s_\beta(\alpha)\| = \|\alpha\| = 1$ である．また，補題 ??より，$s_{s_\beta(\alpha)} = s_\beta s_\alpha s_\beta^{-1} \in W$ である．よって，$s_\beta(\alpha) \in \Phi$ が成り立つ． ■

逆に，root system が与えられると，それに対応する finite reflection group が存在する：

命題 1.18. $\Phi \subseteq V$ を root system とする．このとき，$\{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ が生成する群 W_Φ は essential finite reflection group である．

証明. 命題 1.17の証明中(i)で，$\Phi = \{\alpha_1 \ldots, \alpha_r\}$ とし，W を W_Φ と読み替えれば $\mathrm{Fix}(W_\Phi) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$ が成り立つ．よって，Φ は V を生成するから $\mathrm{Fix}(W_\Phi)^\perp = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\alpha = V$ である．したがって，W_Φ は essential である．

あとは W_Φ が有限であることを示せば良い．(iii)より，$\forall \alpha \in \Phi$，$s_\alpha(\Phi) = \Phi$ であるから $\forall w \in W$，$w(\Phi) = \Phi$ である．すなわち，w は Φ 上の置換とみなせる．よって，

$$\begin{array}{cccc} p: & W_\Phi & \longrightarrow & \mathrm{Perm}(\Phi) \\ & \cup & & \cup \\ & w & \longmapsto & (\alpha \mapsto w(\alpha)) \end{array}$$

と定めると，これは group hom である ($\mathrm{Perm}(\Phi)$ は Φ の置換群)．これが単射であることを示せば，$|W_\Phi| \leq |\mathrm{Perm}(\Phi)| < \infty$ が示せる．

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Ker}\, p &\iff \forall \alpha \in \Phi,\ w(\alpha) = \alpha \\ &\iff w = 1 \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{Ker}\, p = \{1\}$ であり，単射であることが示せた． ■

root system は finite reflection group の生成系を与えているが，群の生成元の個数はできるだけ少なくしたい．そこで，root system を “うまく” 取る方法を考える．

定義 1.19. $\Phi \subseteq V$ を root system とし，$p \in V \setminus \{0\}$ は $\forall \alpha \in \Phi$, $\langle \alpha, p \rangle \neq 0$ を満たすとする．このとき，$\Pi := \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, p \rangle > 0\}$ を **positive root system** という．

注意 1.20. Π は p の取り方による．

定義 1.21. Π を positive root system とする．$\Delta \subseteq \Pi$ が次を満たすとき，Δ を **simple root system** という：

(i) Δ は V の基底,
(ii) $\forall \alpha \in \Pi$, $\exists c_\beta \geq 0$ s.t. $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$.

simple root system は必ず存在し，しかも一意である：

事実 1.22. Φ を root system，Π を positive root system とする．

(1) $\exists ! \Delta \subseteq \Phi$: simple root system,
(2) W_Φ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ で生成される．

以下，essential finite reflection group W に対し，その root system を Φ，その simple root system を Δ とする．また，$\alpha, \beta \in \Delta$ に対し，$m(\alpha, \beta)$ を $s_\alpha s_\beta$ の位数，$c(\beta, \alpha) = 2\dfrac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ とする．

注意 1.23. $s_\alpha^2 = 1$ より $m(\alpha, \alpha) = 1$ である．また，$s_\beta s_\alpha = (s_\alpha s_\beta)^{-1}$ より $m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha)$ である．

補題 1.24. $\alpha \neq \beta \in \Delta$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$\langle \alpha, \beta \rangle = - \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}.$$

命題 1.25. $V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ とし，W_1, W_2 をそれぞれ V_1, V_2 上の finite reflection groups とする．このとき，$W_1 \times W_2$ は $V_1 \oplus V_2 \subseteq \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ 上の finite reflection group である．ここで，

$$(w_1, w_2)(\lambda_1, \lambda_2) = (w_1(\lambda_1), w_2(\lambda_2)), \quad (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in V_1 \oplus V_2$$

と定める．

定義 1.26. finite refrection group W が 2 つ以上の finite reflection group の直積で書けないとき，W を**既約**という．

命題 1.27. α と β は線型独立とする．Φ が crystallographic なとき，$m(\alpha, \beta) = 2, 3, 4, 6$ である．

証明. 補題 1.24より，

$$c(\beta, \alpha) = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2\frac{-\|\alpha\| \, \|\beta\| \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}}{\|\alpha\|^2} = -2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$$

であるから，

$$c(\alpha, \beta) c(\beta, \alpha) = \left(-2\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos \frac{\pi}{m(\beta, \alpha)}\right) \left(-2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}\right) = 4\cos^2 \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$$

である．Φ は crystallographic，すなわち $c(\alpha,\beta), c(\beta,\alpha) \in \mathbb{Z}$ であるから，$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 0,1,2,3,4$ である．

$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 4$ のとき，$m(\alpha,\beta) = 1$ となるが，これは α と β の線型独立性に矛盾する．

$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha) = 0,1,2,3$ のとき，それぞれ次のようになる： ■

表1　$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha)$ と $m(\alpha,\beta)$ の関係

$c(\alpha,\beta)c(\beta,\alpha)$	$\cos^2\frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$	$\cos\frac{\pi}{m(\alpha,\beta)}$	$m(\alpha,\beta)$
0	0	0	2
1	1/4	1/2	3
2	1/2	$1/\sqrt{2}$	4
3	3/4	$\sqrt{3}/2$	6

定義 1.28. $\Delta = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ とする．このとき，r 次正方行列 $C := (c(\alpha_i,\alpha_j))$ を Φ の **Cartan matrix** という．また，r 次正方行列 $M := (m(\alpha_i,\alpha_j))$ を Φ の **Coxeter matrix** という．

例 1.29. 後述の図 **??**において，E_8 の Certan matrix, Coxeter matrix はそれぞれ次のようになる：

$$C_{E_8} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{E_8} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 1.30. $\Delta = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ とする．このとき，Φ の **Coxeter diagram** を次のように定義する：

(i) r 個の頂点を持つ，

(ii) 頂点 α_i と頂点 α_j は $m(\alpha_i,\alpha_j)$ と書かれた辺で結ぶ，

(iii) 特に，$m(\alpha_i,\alpha_j) = 2,3,4,6$ のときは，(ii)の代わりに表 1で対応する $c(\alpha_i,\alpha_j)c(\alpha_j,\alpha_i)$ 本の辺で結ぶ．

定義 1.31. Coxeter diagram に次の条件を追加したものを **Coxeter-Dynkin diagram** という：

(iv) $|c(\alpha_i,\alpha_j)| < |c(\alpha_j,\alpha_i)|$ のとき，頂点 α_i から頂点 α_j に向きをつける．

定理 1.32. Φ, Φ' を root systems とし，これらに対応する simple root systems をそれぞれ Δ, Δ' とする．また，$G_\Delta, G_{\Delta'}$ をそれぞれ Δ, Δ' の Coxeter-Dynkin diagram とする．このとき，$G_\Delta \simeq G_{\Delta'}$ なら $W_\Phi \simeq W_{\Phi'}$ である．

定理 1.33. 既約 essential finite reflection group の simple root system から定まる Coxeter-Dynkin diagram は，次の図において crystallographic であれば上 9 つ，そうでなければ下 3 つのいずれかである：

命題 1.34. W_1, W_2 を essential finite reflection groups とし，$G_{\Delta_1}, G_{\Delta_2}$ をそれぞれ対応する Coxeter-Dynkin diagram とする．このとき，$W_1 \times W_2$ は essential finite reflection group であり，その Coxeter-Dynkin diagram は $G_{\Delta_1} \sqcup G_{\Delta_2}$ である．

よって，任意の essential finite reflection group から定まる Coxeter-Dynkin diagram は，図 **??**の組み合

わせで表される.

2 E_8 lattice

定義 2.1. E_8 格子とは，integralLattice であって，even unimodular かつランクが 8 であるもののことである．

定理 2.2. 2 つの E_8 格子 Λ_1，Λ_2 は同型である．

証明. sorry. ■

定義 2.3. E_8 の Cartan 行列を M_0，それを 1 行ずつ行基本変形していき (その過程の行列を $M_1, M_2, \ldots, M_6$ とする) 上三角にしたものを M_7 とする：

$$M_0 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

補題 2.4. M_7 は上三角である．

証明. 略. ■

補題 2.5. $\det M_7 = 1$ である．

証明. 補題 2.4より，M_7 の行列式は対角成分たちの積であるから

$$\det M_7 = 2 \cdot 2 \cdot (3/2) \cdot (5/6) \cdot (4/5) \cdot (3/4) \cdot (2/3) \cdot (1/2) = 1.$$

■

定理 2.6. E_8 の Cartan 行列の行列式は 1 である．

証明. 補題 2.5より

$$(\text{求める行列式}) = \det M_0 = \det M_1 = \cdots = \det M_7 = 1.$$

■

定義 2.7. B を E_8 の Cartan 行列 $C(= M_0) \in \mathrm{M}_8(\mathbb{Z})$ から定まる双線型形式とする：

$$B(x, y) := {}^t x C y = \langle x, Cy \rangle \qquad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^8).$$

補題 2.8. 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} B(x,x) = 2(&x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 \\ &- (x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7)) \end{aligned}$$

証明. 内積の形にして，あとは具体的に計算：

$$B(x,x) = \langle x, Cx \rangle = (\text{右辺}).$$

■

補題 2.9. 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し，平方完成すると次のようになる：

$$\begin{aligned} B(x,x) = &\left(\sqrt{2}\,x_0 - \sqrt{\frac{1}{2}}\,x_2\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,x_1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\,x_3\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,x_3\right)^2 \\ &+ \left(\sqrt{\frac{5}{6}}\,x_3 - \sqrt{\frac{6}{5}}\,x_4\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{5}}\,x_4 - \sqrt{\frac{5}{4}}\,x_5\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\,x_5 - \sqrt{\frac{4}{3}}\,x_6\right)^2 \\ &+ \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x_6 - \sqrt{\frac{3}{2}}\,x_7\right)^2 + \frac{1}{2}x_7^2 \end{aligned}$$

証明. 左辺に補題 2.8を代入して計算すれば得られる． ■

定理 2.10. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^8,\ B(x+y, z) = B(x,z) + B(y,z).$

証明. 計算するだけ． ■

定理 2.11. $\forall x, y \in \mathbb{Z}^8,\ B(x,y) = B(y,x).$

証明. 計算するだけ． ■

定理 2.12. $\forall x \in \mathbb{Z}^8,\ B(x,x) \geq 0.$

証明. 補題 2.9より，$B(x,x)$ は平方の和で表せるから成り立つ． ■

定理 2.13. $\forall x \in \mathbb{Z}^8,\ B(x,x) = 0 \implies x = 0.$

証明. 補題 2.9より，$B(x,x)$ は平方の和で表せ，$=0$ とすると各項が 0 である．よって，最後の項に注目すると，$x_7 = 0$ である．したがって，最後から 2 番目の項に注目すると，$x_6 = 0$ である．これを繰り返すと，$x_0 = \cdots = x_7 = 0$ を得る． ■

定理 2.14. $\forall x \in \mathbb{Z}^8,\ 2 \mid \langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}}.$

証明. 補題 2.8より従う． ■

定理 2.15. E_8 格子は unimodular である．

証明. sorry. ■

定理 2.16. E_8 格子は存在する．

証明. sorry. ■

定理 2.17. E_8 格子 Λ に対し，$\forall n \in \mathbb{N},\ \#\{x \in \Lambda \mid B(x,x) = n\} < \infty$.

証明. sorry. $\blacksquare$

補題 2.18. E_8 格子 Λ に対し，$\#\{x \in \Lambda \mid B(x,x) = 2\} = 240$.

証明. sorry. $\blacksquare$