# My formalization project

苗代

2025 年 6 月 18 日

## 1 section1

**Definition 1.** $E_8$ 格子とは，integralLattice であって，even unimodular かつランクが 8 であるもののことである．

**Theorem 2.** 2 つの $E_8$ 格子 $\Lambda_1$，$\Lambda_2$ は同型である．

*Proof.* sorry. □

**Definition 3.** $E_8$ の Cartan 行列を $M_0$，それを 1 行ずつ行基本変形していき (その過程の行列を $M_1, M_2, \ldots, M_6$ とする) 上三角にしたものを $M_7$ とする：

$$M_0 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 4.** $M_7$ は上三角である．

*Proof.* 略. □

**Lemma 5.** $\det M_7 = 1$ である．

*Proof.* 補題 4より，$M_7$ の行列式は対角成分たちの積であるから

$$\begin{aligned} \det M_7 &= 2 \cdot 2 \cdot (3/2) \cdot (5/6) \cdot (4/5) \cdot (3/4) \cdot (2/3) \cdot (1/2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

**Theorem 6.** $E_8$ の Cartan 行列の行列式は 1 である．

*Proof.* 補題 5より

$$(\text{求める行列式}) = \det M_0 = \det M_1 = \cdots = \det M_7 = 1.$$

□

**Definition 7.** $B$ を $E_8$ の Cartan 行列 $C \in \mathrm{M}_8(\mathbb{Z})$ から定まる双線型形式とする：

$$B(x, y) := {}^t x C y = \langle x, Cy \rangle \qquad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^8).$$

**Lemma 8.** 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} B(x, x) = 2(&x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 \\ &- (x_0 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_7)) \end{aligned}$$

*Proof.* 内積の形にして，あとは具体的に計算：

$$B(x, x) = \langle x, Cx \rangle = (\text{右辺}).$$

□

**Lemma 9.** 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し，平方完成すると次のようになる：

$$\begin{aligned} B(x, x) = &\left(\sqrt{2}\, x_0 - \sqrt{\frac{1}{2}}\, x_2\right)^2 + \left(\sqrt{2}\, x_1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\, x_3\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\, x_3\right)^2 \\ &+ \left(\sqrt{\frac{5}{6}}\, x_3 - \sqrt{\frac{6}{5}}\, x_4\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{5}}\, x_4 - \sqrt{\frac{5}{4}}\, x_5\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\, x_5 - \sqrt{\frac{4}{3}}\, x_6\right)^2 \\ &+ \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, x_6 - \sqrt{\frac{3}{2}}\, x_7\right)^2 + \frac{1}{2} x_7^2 \end{aligned}$$

*Proof.* 左辺に補題 8を代入して計算すれば得られる． □

**Theorem 10.** $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^8,\ \langle x + y, z \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle x, z \rangle_{\mathbb{Z}} + \langle y, z \rangle_{\mathbb{Z}}$.

*Proof.* 計算するだけ． □

**Theorem 11.** $\forall x, y \in \mathbb{Z}^8,\ \langle x, y \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle y, z \rangle_{\mathbb{Z}}$.

*Proof.* 計算するだけ． □

**Theorem 12.** $\forall x \in \mathbb{Z}^8,\ \langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}} \geq 0$.

*Proof.* 補題 9より，$\langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}}$ は平方の和で表せるから成り立つ． □

**Theorem 13.** $\forall x \in \mathbb{Z}^8,\ \langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}} = 0 \implies x = 0$.

*Proof.* 補題 9より，$\langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}}$ は平方の和で表せ，$= 0$ とすると各項が 0 である．よって，最後の項に注目すると，$x_7 = 0$ である．したがって，最後から 2 番目の項に注目すると，$x_6 = 0$ である．これを繰り返すと，$x_0 = \cdots = x_7 = 0$ を得る． □

**Theorem 14.** $\forall x \in \mathbb{Z}^8,\ \langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}} = 0 \implies x = 0.$

*Proof.* 補題 8より従う. $\square$