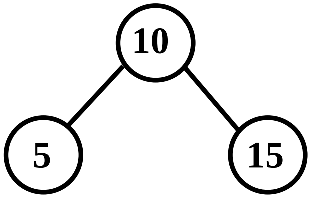
제 **10** 장
효율적인 이원 탐색 트리

최적 이원 탐색 트리(1)

◆ 개요

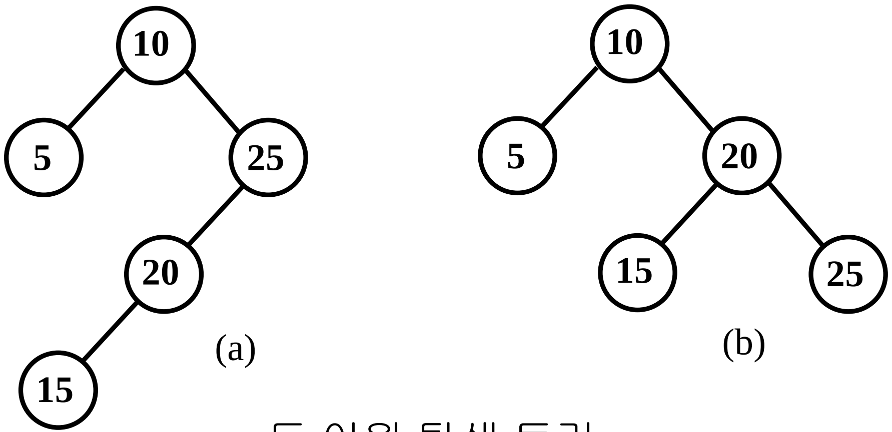
- 정적 원소들의 집합에 대한 이원 탐색트리 구조
  - 삽입이나 삭제는 하지 않고 탐색만 수행
- 정렬된 리스트
  - 함수 Get(프로그램 5.19 참고) 이용
- 비용 측정 방법
  - 함수 Get 이용 for 루프를 l번 반복



리스트(5,10,15)에서의 이원 탐색에 해당되는 이원 탐색 트리

최적 이원 탐색 트리(2)

◆ 예제 10.1



두 이원 탐색 트리

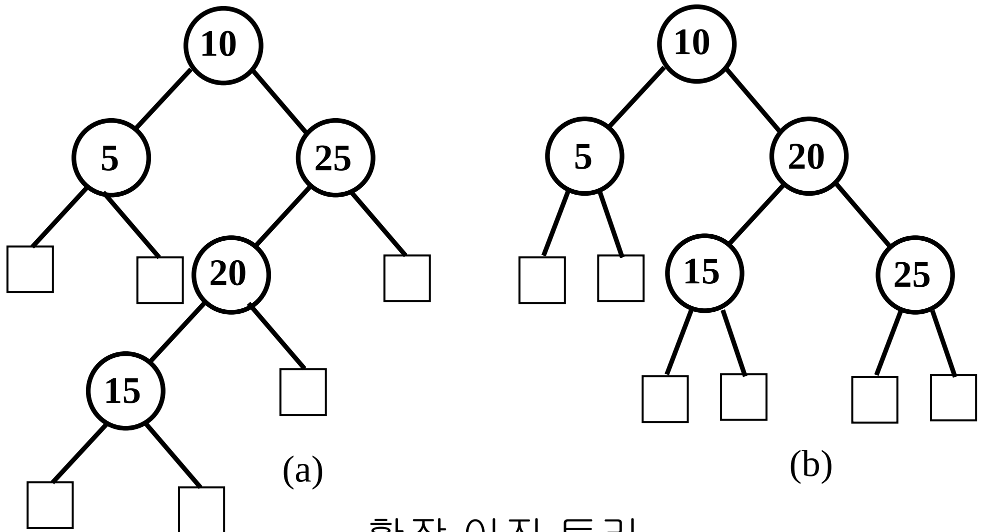
– 최악의 경우 탐색시간: (a) 4번, (b) 3번

– 성공적인 탐색에 필요한 평균: (a) 2.4번, (b) 2.2번

– 5,10,15,20,25가 각각 0.3,0.3,0.05,0.05,0.3의 확률로 탐색
: (a) 1.85, (b) 2.05

최적 이원 탐색 트리(3)

- 이원탐색트리의 평가
  - 특별한 사각형 노드(square node) 추가시 유용

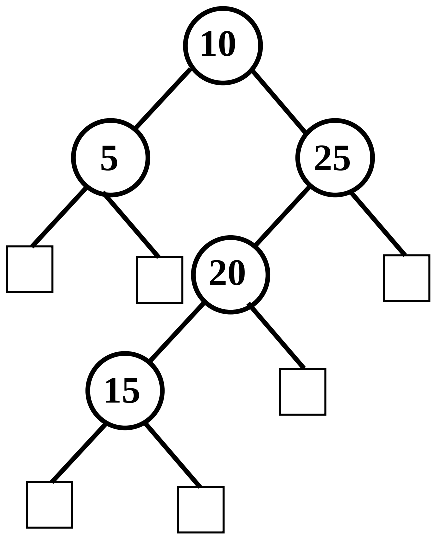


확장 이진 트리

  - 외부노드(실패노드) : n+1개의 사각노드
  - 내부노드 : 원래 노드

최적 이원 탐색 트리(4)

- 외부경로길이(external path length)
  - 루트로부터 각 외부노드 경로 길이의 합
- 내부경로길이(internal path length)
  - 루트로부터 각 내부노드 경로 길이의 합



- 내부경로길이(I)=0+1+1+2+3=7
- 외부경로길이(E)=2+2+4+4+3+2=17

- I와 E의 관계(n개의 내부노드를 가질경우)

$E=I+2n$

***E*가 최고일때 *I*도 최고**

최적 이원 탐색 트리(5)

- **I의 최소값**
  - 최악의 경우: 트리가 편향될 때

$$I = \sum_{j=0}^{n-1} i = n(n-1)/2$$

  - 일반적인 경우

$$\mathbf{0 + 2\times1 + 4\times2 + 8\times3 + \ldots\ldots +}$$

  - 완전 이진 트리일 경우

$$i = \sum_{1\le i\le n} \log_2 i = O(n\log_2 n)$$

최적 이원 탐색 트리(6)

- 정적 원소 집합을 이원탐색 트리로 표현
  - 탐색이 성공적일때 비용

$$\sum_{1 \le i \le n} p_i * \text{level}(a_i)$$

(a$_i$ 를 탐색할 확률이 p$_i$ 일경우)

  - 탐색이 실패적일때 비용

$$\sum_{1 \le i \le n} q_i * (\text{level}(\text{실패노드}i) - 1)$$

(탐색중인 원소가 E_i에 있을 확률이 q$_i$ 일경우)

  - 이원탐색트리의 총 비용

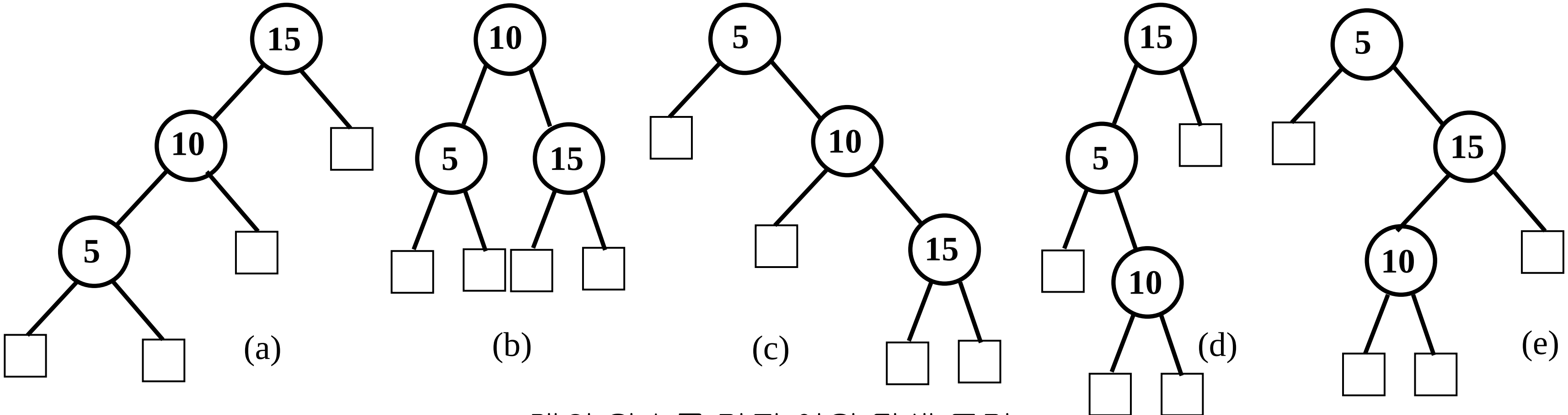
$$\sum_{1 \le i \le n} p_i * \text{level}(a_i) + \sum_{1 \le i \le n} q_i * (\text{level}(\text{실패노드}i) - 1)$$

  - 최적 이원탐색트리의 성립

$$\sum_{1 \le i \le n} p_i + \sum_{1 \le i \le n} q_i = 1$$

최적 이원 탐색 트리(7)

- 예제 10.2



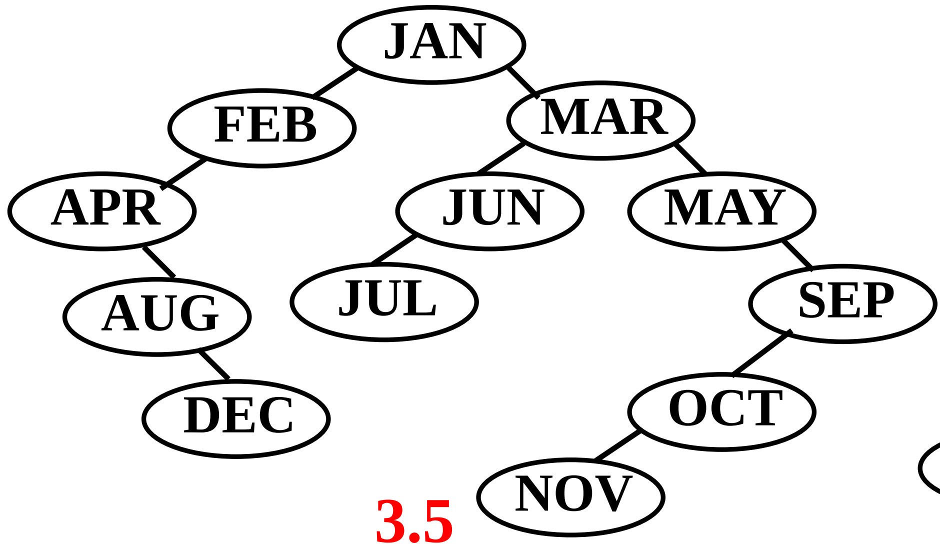
3개의 원소를 가진 이원 탐색 트리

– 똑같은 확률 $p_i = q_i = 1/7$일 경우
  - cost(tree a) = 15/7 ; **cost(tree b) = 13/7**
    cost(tree c) = 15/7 ; cost(tree d) = 15/7 ; cost(tree e) = 15/7

– $p_1=0.5$, $p_2=0.1$, $p_3=0.05$, $q_0=0.15$, $q_1=0.1$, $q_2=0.05$, $q_3=0.05$
  - cost(tree a) = 2.65 ; cost(tree b) = 1.9
    cost(tree c) = 1.5 ; cost(tree d) = 2.05 ; cost(tree e) = 1.6

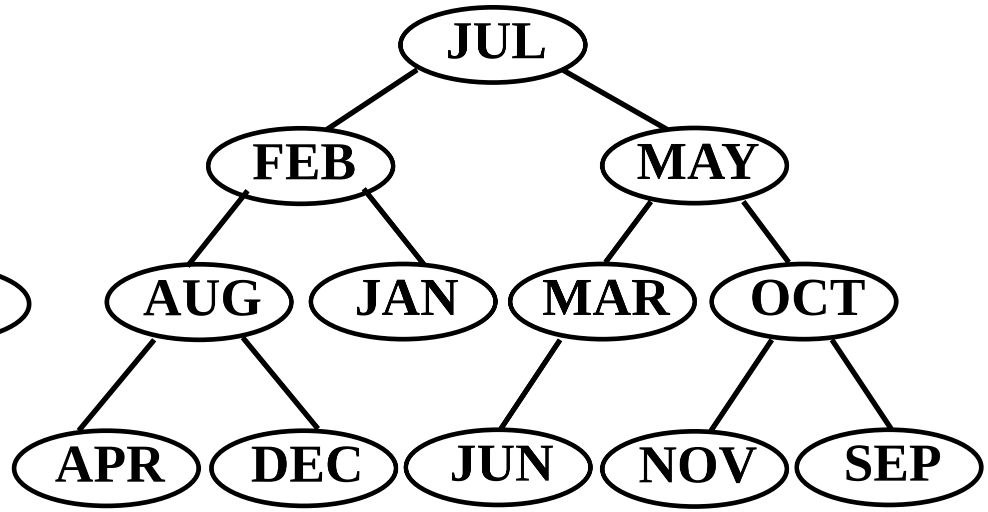
AVL 트리(1/3)

- 어떤 원소를 찾기 위한 최대 비교 횟수



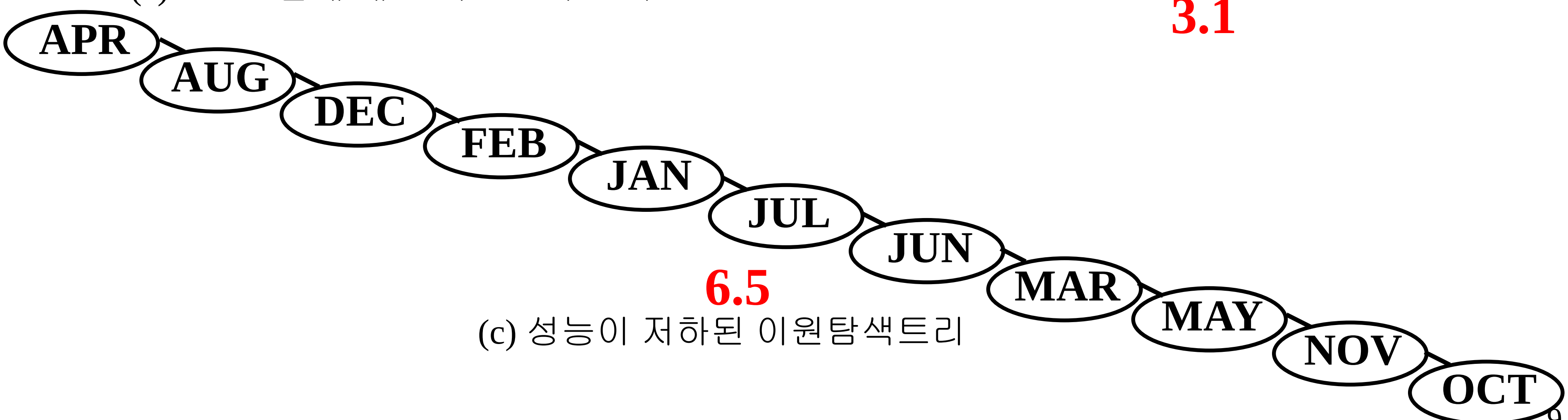
3.5

(a) 1년 12달에 대한 이원탐색 트리



(b) 1년 12달에 대한 균형트리

3.1



6.5

(c) 성능이 저하된 이원탐색트리

AVL 트리(2/3)

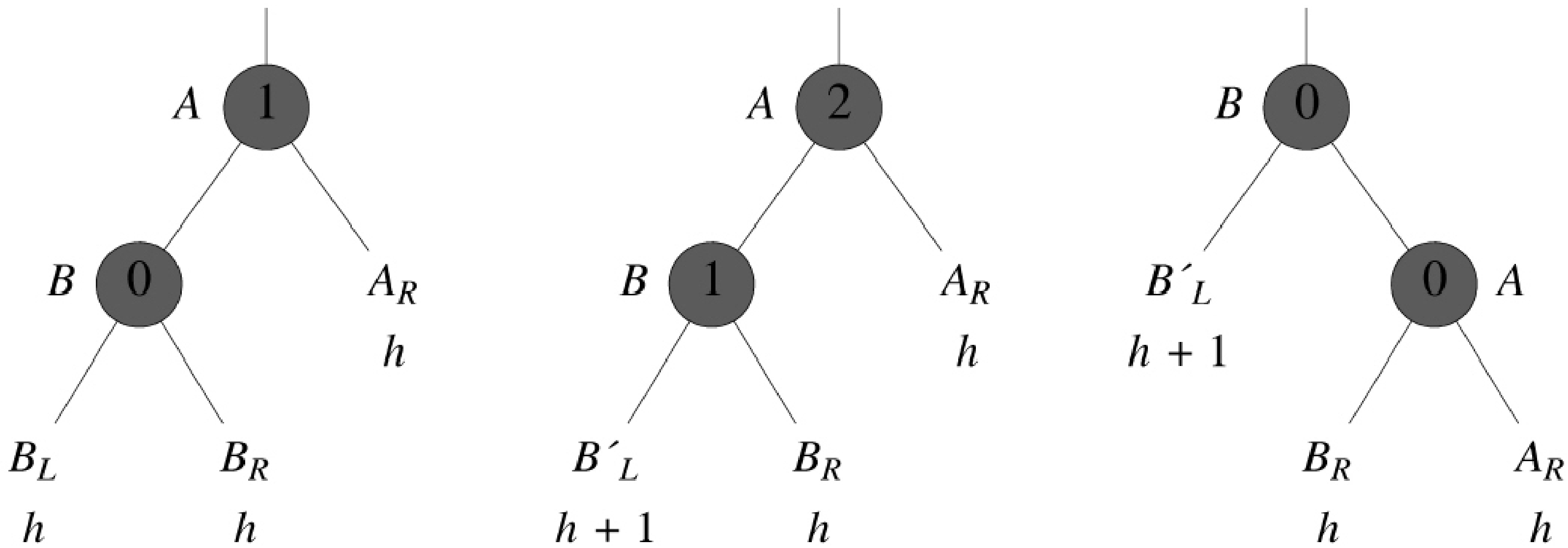
- **Definition**
  - An empty tree is height-balanced.
  - If T is a nonempty binary tree with T_L and T_R as its left and right subtrees respectively, then T is height-balanced iff
    (1) T_L and T_R are height-balanced and
    (2) $|h_L - h_R| \le 1$ where h_L and h_R are the heights of T_L and T_R, respectively.

- 앞 장에서
  - (a), (c)는 높이균형을 이루지 못하는 반면
  - (b)는 높이균형을 이룸

AVL 트리(3/3)

- **균형인수(balance factor)**
  - 왼쪽, 오른쪽 서브트리 사이의 높이 차
  - $BF(T) = h_L - h_R$
  - AVL 트리의 어떠한 노드 T에 대해서도 BF(T)= -1, 0, 1
- **삽입된 노드 Y에 가장 가까우면서 균형인수가 ±2인 nearest ancestor A에 대한 회전 성질**
  - LL: 새 노드 Y는 A의 왼쪽 서브트리의 왼쪽 서브트리에 삽입
  - LR: Y는 A의 왼쪽 서브트리의 오른쪽 서브트리에 삽입
  - RR: Y는 A의 오른쪽 서브트리의 오른쪽 서브트리에 삽입
  - RL: Y는 A의 오른쪽 서브트리의 왼쪽 서브트리에 삽입
- **단일회전(Single rotation) : LL과 RR 불균형을 바로잡는 변환**
- **이중회전(Double rotation) : LR과 RL 불균형을 바로잡는 변환**

LL 회전

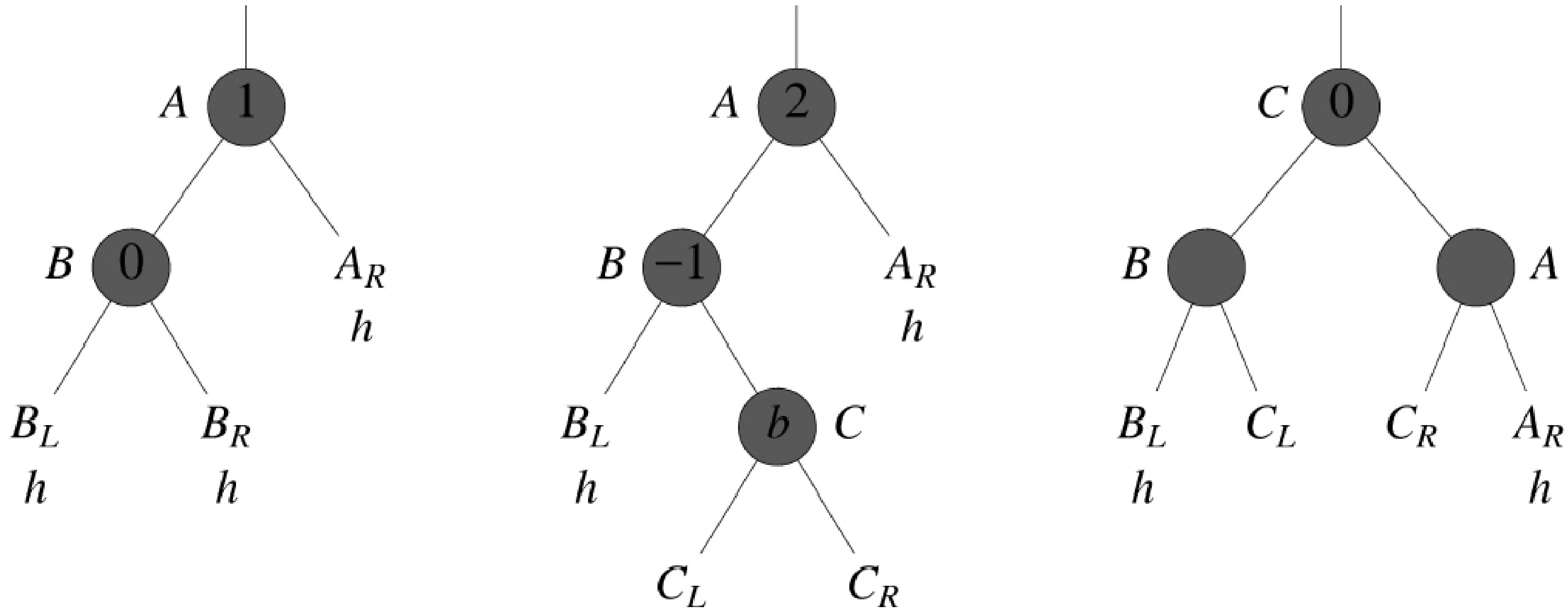


삽입 전 B_L에 삽입한 뒤 LL 회전 뒤

균형 인수는 노드 안에 있음

서브트리 높이는 서브트리 이름 밑에 있음

LR 회전



삽입 전　　　B_R에 삽입한 뒤　　　LR 회전 뒤

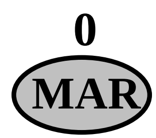
b = 0 ⇒ bf(B) = bf(A) = 0 회전 뒤

b = 1 ⇒ bf(B) = 0 and bf(A) = -1 회전 뒤

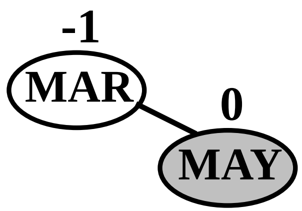
b = -1 ⇒ bf(B) = 1 and bf(A) = 0 회전 뒤

트리 확장 및 균형유지 과정(1/5)

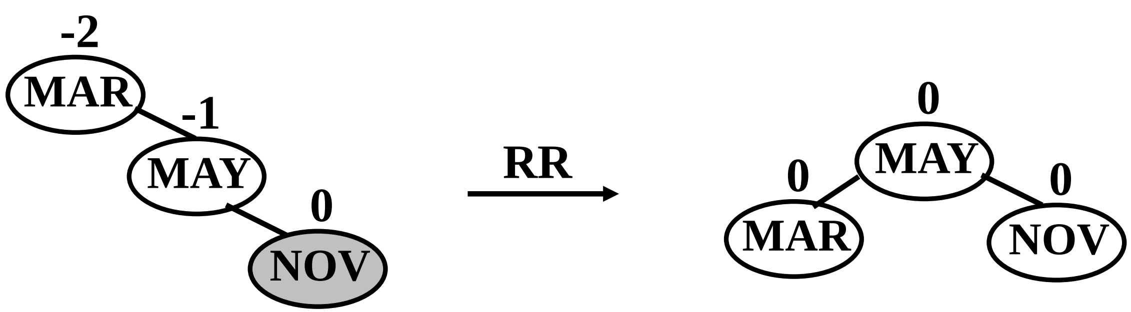
- 삽입순서
  - MAR, MAY, NOV, AUG, APR, JAN, DEC, JUL, FEB, JUN OCT, SEP 순



(a) 삽입 MARCH

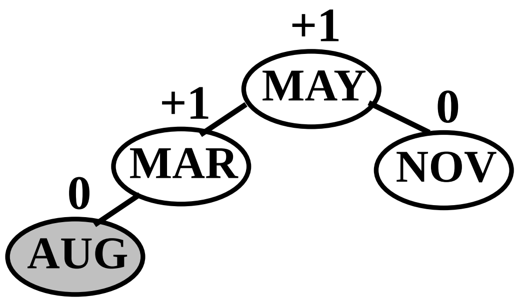


(b) 삽입 MAY

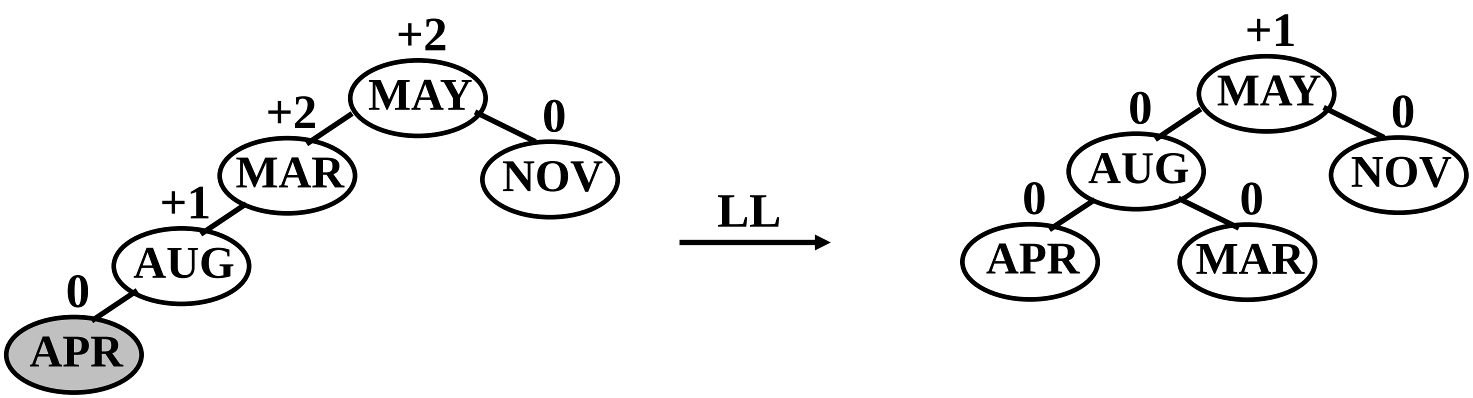


(c) 삽입 NOV

트리 확장 및 균형유지 과정(2/5)

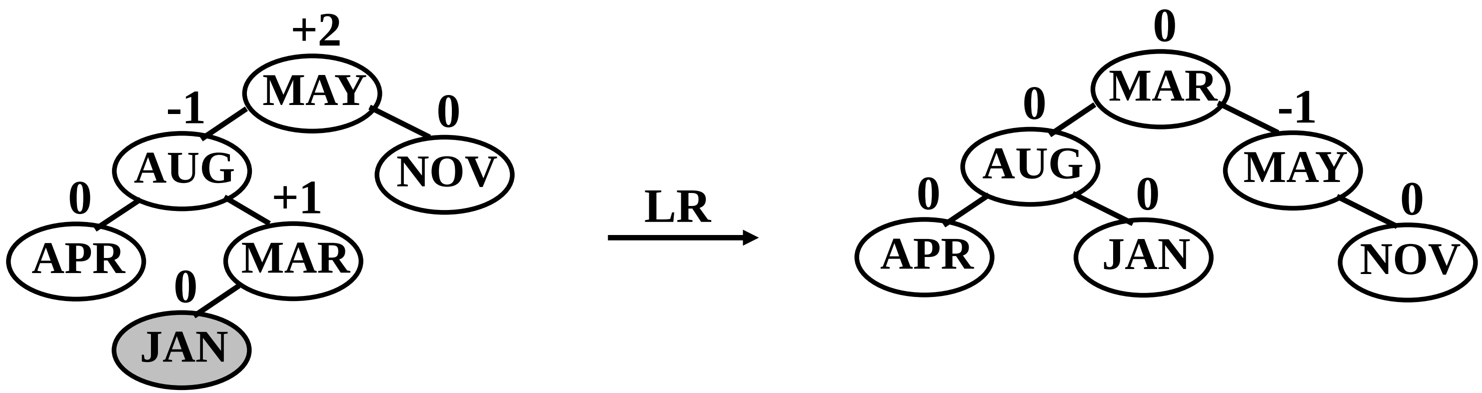


(d) 삽입 AUGUST

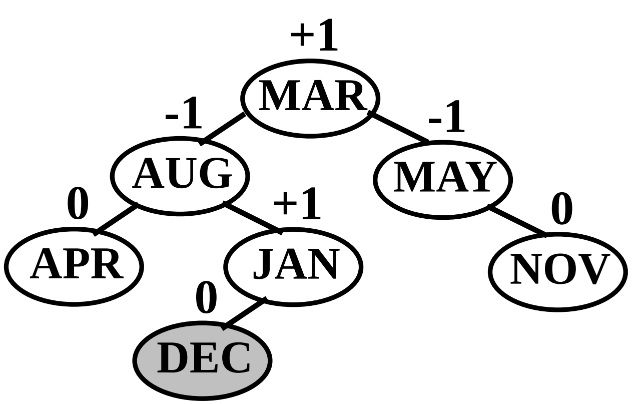


(e) 삽입 APRIL

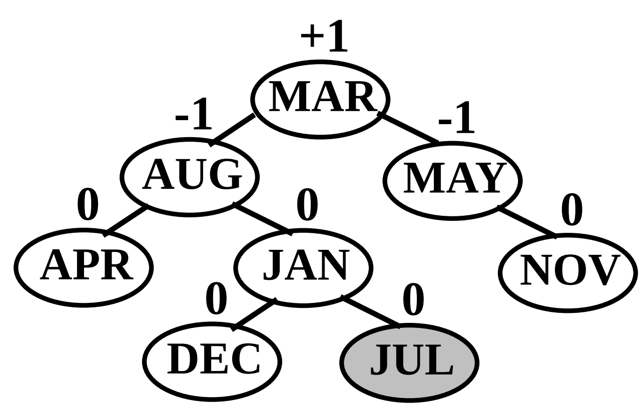
트리 확장 및 균형유지 과정(3/5)



(e) 삽입 JANUARY

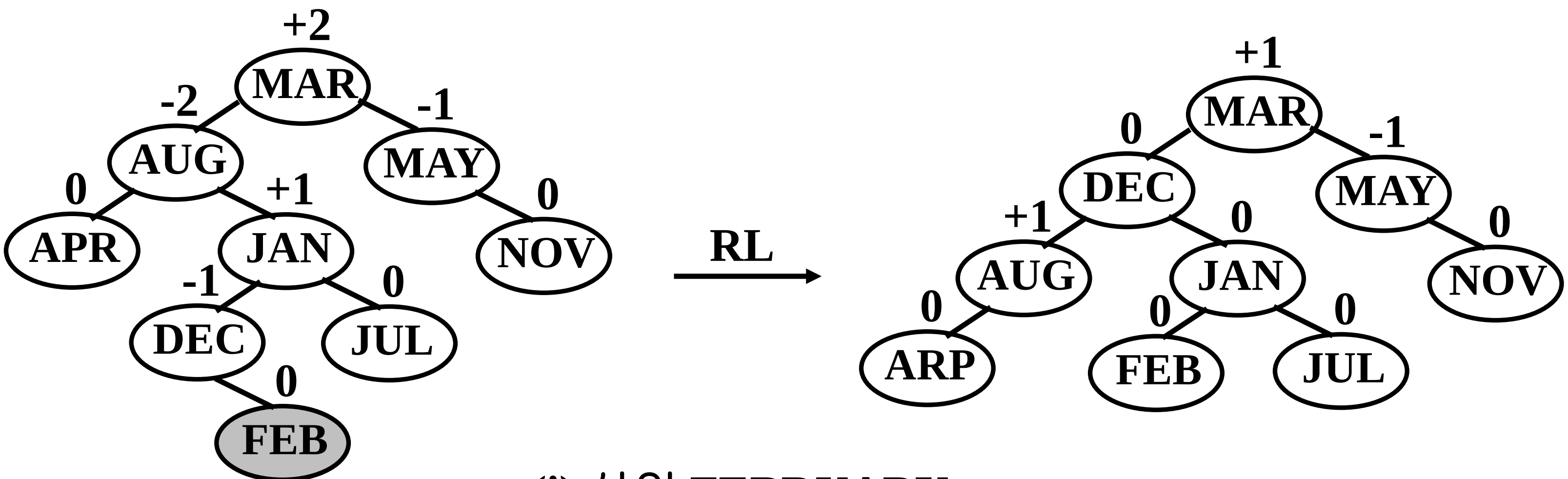


(g) 삽입 DECEMBER

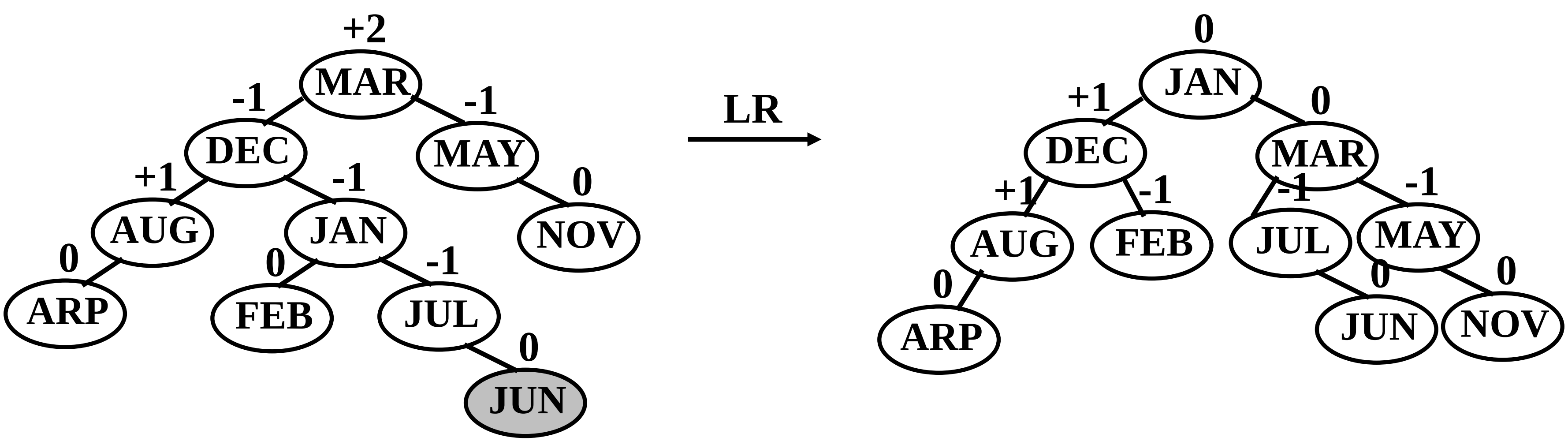


(h) 삽입 JULY

트리 확장 및 균형유지 과정(4/5)

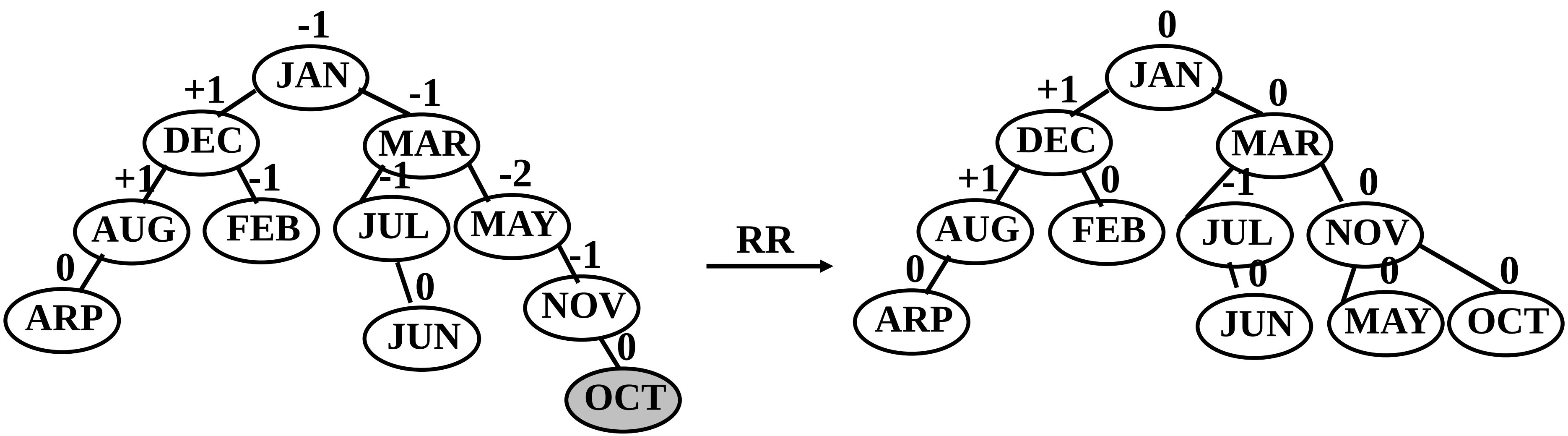


(i) 삽입 FEBRUARY

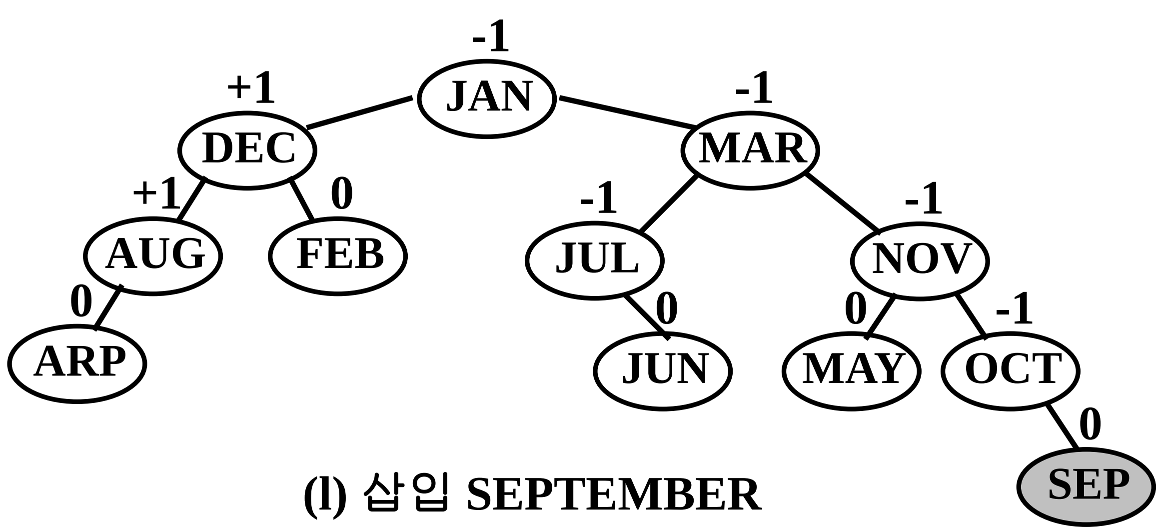


(j) 삽입 JUNE

트리 확장 및 균형유지 과정(5/5)



(k) 삽입 OCTOBER



(l) 삽입 SEPTEMBER

AVL 트리에서의 삽입

◆ 여러 구조들의 비교

연　　산	순차리스트	연결리스트	AVL트리
키가 k인 원소탐색	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
j번째 원소탐색	$O(1)$	$O(j)$	$O(\log n)$
키가 k인 원소삭제	$O(n)$	$O(1)$[1]	$O(\log n)$
j번째 원소삭제	$O(n - j)$	$O(j)$	$O(\log n)$
삽입	$O(n)$	$O(1)$[2]	$O(\log n)$
순서대로 출력	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$

1. k의 위치가 알려진 이중 연결 리스트
2. 삽입할 위치가 알려진 경우