Név : ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez. : ....

Pontszám : ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 1. zárthelyi
2024. október 18.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. (6 pont) Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést (a, b olyan valós számokat jelöl, melyekkel a kifejezés értelmes) :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2+3ab}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$$

2. (4 pont) Az alábbi P polinomból emeljük ki az $x_0=2$-höz tartozó gyöktényezőt annyiszor, ahányszor csak lehet. Hányszoros gyöke a 2 a P polinomnak ?

$$P(x):=2x^4-7x^3+3x^2+8x-4$$

3. (3+6 pont) Adott az alábbi egyenlet a valós számok halmazán :

$$\sqrt{x-\sqrt{x+2}}=\sqrt{6-x}$$

a) Határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát.
b) Oldjuk meg az egyenletet.

4. (2+6 pont) Adott az alábbi egyenlőtlenség a valós számok halmazán :

$$\log_2(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(4-x^2)>-1$$

a) Határozzuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.
b) Oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

5. (8 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán :

$$2\cdot\cos(2x)\cdot\sin x=\sqrt{3}\cdot(\sin^4 x-\cos^4 x)$$

6. (1+6+1 pont)
a) Fogalmazzuk meg kvantorok segítségével az alábbi állítást :

Minden elég nagy n természetes szám esetén :

$$\frac{7n^5-4n^4+n^3-12n^2+392n-2}{2n^7-3n^6+n^2-27n+11}<\frac{1}{2024}.$$

b) Megfelelő küszöb megadásával igazoljuk az állítást.

c) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

7. (7 pont) Igazoljuk teljes indukcióval :

$$\forall n\in\mathbb{N}^+ :\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k\cdot(k+1)\cdot 2^k}=1-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$$