

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2024. december 16.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

Az 5. feladat (elméleti kérdés) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. (12 pont) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

2. Tekintsük az alábbi W alteret és x vektort \mathbb{R}^4 -ben:

$$W := \text{Span}((1, 1, -1, 1), (-1, -3, 3, -1), (3, 4, 4, 3)), \quad x = (3, 1, 7, -1)$$

- (a) (2 pont) Döntsük el, hogy a W altér fent megadott generátorrendszere ortogonális rendszer-e.
- (b) (8 pont) Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.
- (c) (4 pont) Bontsuk fel az x vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. Adottak az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények:

(a) (6 pont) $f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad (x \in (3, +\infty))$

(b) (3 pont) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3x + 7}, \quad (x \in (-3, 2))$

Döntsük el, hogy a két függvény közül melyik invertálható (indoklással, hogy miért az vagy miért nem). Amelyik invertálható, annál adjuk meg a $D_{f^{-1}}$ és $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

4. (8 pont) A definíció alapján igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2x - 6x^2 + 7x^3 - 3x^4}{2x^3 + x^2 + 5x + 14} = -\infty$$

5. (elméleti kérdés, a feladatlap hátoldalára)

- (a) (1 pont) Mit jelent az, hogy egy mátrix diagonalizálható?
- (b) (2 pont) Írja fel a szinguláris mátrixok 5 ekvivalens jellemzéséről szóló tételt.
- (c) (1+3 pont) Mondja ki és igazolja a véges dimenziós altérre való merőlegességről szóló tételt.