

Név: , NEPTUN-kód

Csoport, gyak.vez.:

Pontszám:

*Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 2. zárthelyi
2024. november 22.*

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

A 6. feladat (elméleti kérdés) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. (7+4 pont)

- (a) Tekintsük a $z_1 = 20 - 24i$, $z_2 = 22 - 2i$, $z_3 = 8 - 3i$, $z_4 = 4 - i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \overline{z_3 \cdot z_4}$$

- (b) Oldjuk meg a $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

2. (6+4 pont) Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ és $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Határozzuk meg a következő számolások eredményét. (FIGYELEM: Ebben a feladatban a Gauss-Jordan-elimináció nem használható.)

- (a) $(A \cdot B^T)^{-1} \cdot (B - A) = ?$
(b) $\det(B^T \cdot B) = ?$

3. (3 pont) Altere-e az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortérnek a következő F halmaz?

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

4. (2+6+1 pont) Tekintsük az \mathbb{R}^4 vektortér alábbi alterét:

$$W = \{(x + y + 2z - 2u, 2x - 2y + 2z - 8u, -x + 3y + 6u, x + y + 2z - 2u) \mid x, y, z, u \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Adjunk meg egy generátorrendszeret W -ben.
(b) Adjunk meg egy bázist W -ben.
(c) Hány dimenziós a W altér?

5. (6+1+1+2 pont) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszeret Gauss–Jordan-eliminációval. Adjuk meg az együtthatómátrix rangját. Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is. Adjuk meg az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldáshalmazának egy bázisát.

$$\begin{array}{rl} -3x_1 - x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 4x_5 &= -8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 6 \end{array}$$

6. (2+2+3 pont) (elméleti kérdés, a feladatlap hátoldalára)

- (a) Hogyan definiáljuk mátrix oszlopvektorterét? Hogyan definiáljuk mátrix rangját?
(b) Adja meg a dimenzióval kapcsolatos „4 apró állítás”-t. (A lin. független rendszereknek és a generátorrendszernek a dimenzióval való kapcsolatáról szólnak.)
(c) Bizonyítsa be, hogy ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű.