MATH102 Calculus II Lecture Note

20240505 공현성

2025 Fall Semester

Contents

1 벡터와 행렬

1.1 2차원 벡터

1.2 노름과 내적

1.3 쌍선형 함수(생략)

1.4 n차원 벡터

1.5 n차원에서의 노름과 내적

1.6 행렬식

1.7 부호있는 부피

1.8 선형 함수와 그들의 행렬 표현

2 함수

이 챕터는, 다변수 함수와 그 연속에 대해 다룬다. 연속의 정의는 1변수함수에서 $\epsilon - \delta$를 이용해 정의했던 것과 유사하게 정의된다. 또한, 이 챕터는 우리가 기존에 잘 알고 사용하던 직교좌표계와는 다른, 3가지 종류의 새로운 좌표계에 대해서도 다룬다. 이 좌표계들은 나중에 적분을 할 때 중요하게 사용된다.

2.1 다변수함수

우리는 벡터 $X \in \mathbb{R}^n$을 $\mathbb{R}^m$의 한 벡터로 옮기는 다변수함수 F를 $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$와 같이 표기한다. 여기서 D는 정의역(domain)이다. $F(D)$는 치역(range)로 집합의 각 원소를 함수 F에 넣어 옮긴 결과를 모았다고 생각하면 된다.
만약, $U = V$일 때만 $F(U) = F(V)$가 성립하면 이 함수 F를 단사(onto 또는 surjective)라고 한다. F가 $D \to B$일 때, $F(D) = B$이면, 이 함수를 전사(one-to-one 또는 injective)라고 한다.

Definition 2.1 (다변수 함수)**.** *함수 $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 각 $X \in D$를 $F(X) \in \mathbb{R}^m$으로 대응하는 함수로,*

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), \cdots, f_m(X))$$

와 같이 쓴다. 각 함수 f_j는 F의 j번째 원소 함수(j-th component function)라고 한다.

Definition 2.2 (상수 함수)**.** *함수 $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 모든 $X \in \mathbb{R}^n$에 대해, $F(X) = C$이면 ($C \in \mathbb{R}^m$) F를 상수 함수(constant function)라고 한다.*

Definition 2.3 (선형 함수)**.** *함수 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 선형 함수(linear function)라는 것은 모든 벡터 $U, V \in \mathbb{R}^n$과 실수 $a \in \mathbb{R}$에 대해*

1. *$aL(U) = L(aU)$*
2. *$L(U + V) = L(U) + L(V)$*

를 만족하는 것이다.

Theorem 2.1. *모든 선형 함수 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 다음과 같은 형태로 쓰일 수 있다.*

$$L(X) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = CX$$

여기서 C는 L의 행렬 혹은 L을 표현하는 행렬이라고 한다.

Definition 2.4 (행렬 노름)**.** *행렬 $C = [c_{ij}]$에 대해, C의 노름(norm) $||C||$은 다음과 같이 정의된다.*

$$||C|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2}$$

Theorem 2.2. *C를 $m \times n$ 행렬이라고 하자. 그러면, 모든 벡터 $X \in \mathbb{R}^n$에 대해 다음이 성립한다.*

$$||CX|| \leq ||C|| \cdot ||X||$$

Definition 2.5 (레벨 집합)**.** *함수 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$과 실수 $c \in \mathbb{R}$에 대해, $f(X) = c$를 만족하는 D 내의 모든 벡터 X의 집합을 f의 c 레벨집합(level set)이라고 한다.*

Definition 2.6 (함수 합성)**.** *함수 $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$이고, G: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$이라고 하자. G의 치역이 F의 정의역에 포함되어 있다고 하자. 그러면, 다음을 F와 G의 합성 함수(composite function)라고 한다.*

$$(F \circ G)(X) = F(G(X))$$

여기서 $F \circ G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$이다.

2.2 연속

Definition 2.7 (함수의 연속). *함수 $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 $X \in D$에서 연속(continuous)이라는 것은 모든 $\epsilon > 0$에 대해, 적당한 $\delta > 0$가 존재하여,*

$$\textit{if } ||X - Y|| < \delta \quad \textit{then} \quad ||F(X) - F(Y)|| < \epsilon$$

인 것이다.

함수 F가 어떠한 집합 D의 모든 점에서 연속이면, F가 D에서 연속이라고 한다.

Definition 2.8 (수열의 수렴). *수열 $X_1, \cdots, X_k, \cdots \in \mathbb{R}^n$이 X로 수렴(converge)한다는 것은 모든 $\epsilon > 0$에 대해, 적당한 $N > 0$이 존재하여,*

$$\textit{if } k > N \quad \textit{then} \quad ||X_k - X|| < \epsilon$$

인 것이다.

Theorem 2.3. *함수 $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 D에서 연속이면, X로 수렴하는 수열 $\{X_n\}$에 대해, $\{F(X_n)\}$가 $F(X)$로 수렴한다.*

Theorem 2.4. *함수 $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$인 $F(X) = (f_1(X), \cdots, f_m(X))$가 연속일 필요충분조건은 각 함수 f_i가 전부 연속인 것이다.*

1변수 함수와 유사하게, 함수의 덧셈과 곱셈, 그리고 0이 아닌 지점에서 나눗셈, 연속인 두 함수를 합성한 함수 또한 연속이다.

Definition 2.9 (곡선). *연속함수 $X : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$의 치역을 곡선(curve)이라고 한다. 이 함수 X를 곡선의 매개변수화(parametrization)라고 한다. 만약 $I = [a, b]$ 꼴이면, $X(a), X(b)$를 곡선의 끝점(end point)이라고 한다. 만약 $X(a) = X(b)$이면, 우리는 곡선이 닫혀있고(closed) 고리(loop)를 형성한다고 한다.*

Definition 2.10 (연결된 집합). *$A \subseteq \mathbb{R}^n$이 연결(connected)되었다는 것은 모든 $P, Q \in A$에 대해, 둘을 끝점으로 하는 곡선이 A 안에 존재해야 한다.*

Definition 2.11 (열린 공). *$\mathbb{R}^n$에서 반지름이 $r > 0$인 열린 공(open ball)은 어떤 점 $A \in \mathbb{R}^n$을 중심으로 하고 거리가 r 미만인 모든 점 X의 집합이다. 즉, 다음을 만족하는 모든 점 X이다.*

$$||X - A|| < r$$

Definition 2.12 (내부 점). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$의 점 A가 내부 점(interior point)이라는 것은, A를 중심으로 하는 열린 공이 존재하여 그 공이 D 안에 들어있는 경우이다. D의 내부는 이러한 내부 점들의 집합이다.*

Definition 2.13 (열린 집합). *집합 D가 열렸다(open)는 것은 D의 모든 점이 내부 점인 경우이다.*

Definition 2.14 (경계 점). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$의 점 A가 경계 점(boundary point)이라는 것은 A를 중심으로 하는 모든 열린 공에 대해, 그 공이 D 내부의 점과 외부의 점을 동시에 포함하는 경우이다. D의 경계는 이러한 경계 점을 전부 모은 집합이며, ∂D로 표기한다.*

Definition 2.15 (닫힌 집합). *집합 D가 닫혔다(close)는 것은 그것이 모든 경계 점을 포함하는 경우이다. D의 폐쇄(closure)는 D와 ∂D의 합집합이다. D의 폐쇄는 $\bar{D}$로 표기한다.*

Theorem 2.5. *집합 D의 폐쇄 $\bar{D}$는 닫힌 집합이다.*

Theorem 2.6. *열린 집합의 여집합은 닫힌 집합이다. 반대도 성립한다.*

Definition 2.16 (유계). *$D \in \mathbb{R}^n$이 유계(bounded)라는 것은 어떠한 숫자 b가 존재하여, 모든 $X \in D$에 대해 다음을 만족하는 것이다.*

$$||X|| < b$$

Theorem 2.7. *만약 점들의 수열 $\{X_n\}$이 닫힌 집합 $C \in \mathbb{R}^n$에 속해있고, X로 수렴한다면, $X \in C$이다.*

Theorem 2.8 (최대 최소 정리, Extreme Value Theorem). *닫혀있고 유계인 집합 C에서 정의된 연속 함수 $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$은 어떤 C 내의 점에 대해 항상 최댓값과 최솟값을 갖는다.*

Definition 2.17 (균등 연속). *함수 $F : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 S 위에서 균등 연속(uniformly continuous)이라는 것은 모든 $\epsilon > 0$에 대해, $\delta > 0$가 존재하여 모든 $X, Z \in S$에 대해*

$$\textit{if } ||X - Z|| < \delta \quad \textit{then} \quad ||F(X) - F(X)|| < \epsilon$$

을 만족하는 것이다.

Theorem 2.9. *닫혀있고 유계인 집합 C에서 정의된 연속 함수 $F : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$는 C에서 균등 연속이다.*

2.3 좌표계

2.3.1 극좌표계

극좌표계(polar coordinate)는 2차원에서 점을 원점으로부터의 거리와 회전 각을 통해 나타내는 좌표계이다.

Definition 2.18 (극좌표계)**.**

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

여기서 $r \geq 0$*이고,* $0 \leq \theta \leq 2\pi$*이다.*

2.3.2 원통좌표계

원통좌표계(cylindrical coordinate)는 극좌표계에 z축을 추가하여 3차원을 나타내는 좌표계이다.

Definition 2.19 (원통좌표계)**.**

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

여기서 $r \geq 0$*이고,* $0 \leq \theta \leq 2\pi$*이다.*

2.3.3 구면좌표계

구면좌표계(spherical coordinate)는 3차원에서 점을 원점으로부터의 거리와 x축과 z축에 각각 회전된 정도를 통해 나타내는 좌표계이다.

Definition 2.20 (구면좌표계)**.**

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}$$

여기서 $\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$*이다.*

3 미분

이 챕터는, 다변수함수의 미분에 대해 다룬다. 우선 2변수함수에 대해 다룬 뒤, 이를 벡터 표기법으로 확장한다. 벡터 표기법을 이용했을 때, 1변수함수의 미분과 유사한 점을 발견할 수 있을 것이다.

3.1 미분가능성

f가 $x = a$에서 미분가능하다는 것은 f가 특정 점 a에서 선형함수에 근사할 수 있다는 뜻이다. 이를 확장해서, 다변수함수에서는 다음과 같이 정의한다. 여기서, 선형함수 $l(h,k)$는 원점을 지나는 형태의 평면이다.

Definition 3.1 (미분 가능성)**.** *중심이 (a,b)인 원판 위에서 정의된 함수 f가 미분가능(differentiable)하다는 것은, $f(a+h,b+k)-f(a,b)$가 선형함수 $l(h,k)$에 의해 잘 근사되는 것이다. 여기서 잘 근사된다는 것은 아래의 식이 $||(h,k)|| \to 0$일때, 0이 되는 것을 의미한다.*

$$\frac{(f(a+h,b+k)-f(a,b))-l(h,k)}{||(h,k)||}$$

정의에서 (h,k)는 변위이다. 즉, (a,b)에서 얼마나 떨어져있는지를 나타낸다고 볼 수 있다. $f(a+h,b+k)-f(a,b)$는 h=k=0일 때, 값이 0이 된다.
여기서 $h = x-a$, $k = y-b$로 변위를 표현함으로써 우리는 $f(x,y)$의 (a,b) 근처에서의 선형 근사(linear approximation) $L(x,y) = f(a,b) + l(x-a, y-b)$를 얻을 수 있다. 이 정의는 A=(a,b), H=(h,k)로 쓰면 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{(f(A+H)-f(A))-l(H)}{||H||} \to 0 \quad \text{when} \quad ||H|| \to 0$$

Theorem 3.1. *함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$가 $A \subseteq \mathbb{R}$에서 미분가능하다면, A에서 연속이다.*

Theorem 3.2 (평균값 정리 1, Mean Value Theorem 1)**.** *(a,b)를 포함하는 개집합에서 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$에 f_x, f_y 가 존재한다고 하자. 그러면, 충분히 작은 $||(h,k)||$를 보장하는 h와 k에 대해,*

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = hf_x(a+h',b+k') + kf_y(a,b+k')$$

을 만족하는 $h' \in (a,a+h)$와 $k' \in (b,b+k)$가 존재한다.

Definition 3.2 (편도함수)**.** *f가 (a,b)에서 미분 가능하고, 미분가능성 정의에서 $l(h,k) = p \cdot h$라고 하자. 그러면, $f(x,b)$가 단일 변수 x에 대해 a에서 미분가능하게 된다. 이때, p를 (a,b)에서 f의 x에 대한 편미분계수라고 부른다. 그리고,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad or \quad f_x(a,b)$$

로 쓴다. 이러한 과정을 한 축에 대해 전부 진행하여 얻은 함수를 편도함수(partial derivative)라 하고, 축을 명시한다. 위의 경우에는 $f_x(x,y)$ 또는 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$와 같이 쓴다.

위 정의에서 $l(h,k) = p \cdot h$로 쓴 것은, $k = 0$으로 두어 y축의 변위를 생각하지 않는다는 것을 표현하는 것이다. 또한, 이 정의를 통해 선형근사 함수를 $L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$로 고쳐 쓸 수 있다.

Theorem 3.3. *만약 f의 편도함수가 (a,b)를 포함하는 개집합에서 연속이면, f는 (a,b)에서 미분가능하다.*

Definition 3.3 (자코비안)**.** *함수 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$와 점 $A \in \mathbb{R}^n$에 대해,*

$$DF(A) = [a_{ij}]_{n \times m} \quad where \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(A)$$

라고 하자. 이 DF(A)를 미분 행렬(matrix derivative)이라고 부른다. n=m인 경우에, $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) = \det D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$를 자코비안(jacobian)이라고 정의한다.

Definition 3.4 (그레디언트)**.** *함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$의 편도함수를 모은 벡터*

$$gradf = \nabla f = (f_{x_1}, \cdots, f_{x_n})$$

를 f의 그레디언트(gradient)라고 한다.

함수 f를 A 근처에서 근사한 결과는 $f(A+H) \approx f(A) + \nabla f(A) \cdot H$가 된다.

Definition 3.5 (연속 미분성)**.** *$F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$가 연속 미분(continously differentiable)인 것은 모든 편도함수가 U에서 연속함수인 것이다. 이러한 함수를 C^1 함수라고 부른다.*

Theorem 3.4. *$F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$가 U에서 C^1이면, F는 U의 각 점에서 미분가능하다.*

3.2 접평면과 편미분

1변수 함수의 미분의 기하학적 의미는, 그 점에서의 접선의 기울기였다. 비슷하게, 다변수 함수의 미분의 기하학적 의미는 접평면의 기울기 벡터에서 온다. 2변수 함수 f(x,y)가 (a,b)에서 미분 가능하다고 하면, 점 (a,b,f(a,b))에서 함수 f에 접하는 접평면은 아래와 같다.

$$z = L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$$

이 방정식의 모든 변을 한쪽으로 몰아넣어 재작성하면,

$$(-1)(z - f(a,b)) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = (f_x(a,b), f_y(a,b), -1) \cdot (x-a, y-b, z)$$

가 된다. 여기서 $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$는 접평면의 법선 벡터(normal vector)이다.
이 법선 벡터를 얻는 또 다른 방법은, 아래와 같은 함수 c_1과 c_2를 구성하는 것이다.

$$\begin{cases} c_1(t) = (a,b,f(a,b)) + t(0,1,f_y(a,b)) \\ c_2(t) = (a,b,f(a,b)) + t(1,0,f_x(a,b)) \end{cases}$$

그러면, 접평면의 매개변수 방정식은 아래와 같음을 알 수 있다.

$$P(s,t) = (a,b,f(a,b)) + s(1,0,f_x(a,b)) + t(0,1,f_y(a,b))$$

법선 벡터는 $(1,0,f_x(a,b))$와 $(0,1,f_y(a,b))$의 내적으로 구할 수 있다.

3.3 사슬 규칙

Theorem 3.5 (사슬 규칙 1, The Chain Rule 1)**.** *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$이 $U \in \mathbb{R}^2$에서 C^1이라고 하고, $X : I \to U$인 $X(t) = (x(t), y(t))$가 I에서 미분가능하다고 하자. 그러면, 합성함수 f(x(t),y(t))는 $I \to \mathbb{R}$이고,*

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot X'(t)$$

가 성립한다.

위의 사슬 규칙은 곡선에서의 사슬 규칙이다.

Definition 3.6 (방향 미분)**.** *함수 $f : P \in U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 C^1이고, $V \in \mathbb{R}^n$라고 하자. $D_V f(P) = \nabla f(P) \cdot V$를 f의 P에서 V 방향으로의 방향 미분(directional derivative)이라고 한다.*

방향 미분은 f의 P에서의 증가방향에 대한 직관을 준다. $||V|| = 1$이기 때문에,

$$D_V f(P) = \nabla f(P) \cdot V = ||\nabla f(P)|| \cos\theta$$

이다. 여기서 θ는 $\nabla f(P)$와 V의 각도이다. 여기서 방향 미분은 $\cos\theta = 1$일 때 가장 큼을 알 수 있다. 이 방향은 V가 $\nabla f(P)$의 방향이 될 때이다. 즉, 점 P에서 가장 f의 값이 커지는 방향은 $\nabla f(P)$ 벡터 방향이다.
k가 임의의 수라 하자. $f(x,y,z) = k$를 만족하는 점의 집합 S를 생각하자. 여기서, f가 S에서 C^1 함수이고, $\nabla f(a,b,c) \neq 0$이면, $\nabla f(a,b,c)$는 S에 수직이다. 집합 S는 level curve이다.

Theorem 3.6 (사슬 규칙 2, The Chain Rule 2)**.** *$y = f(x_1, \cdots, x_n)$이 $U \subseteq \mathbb{R}^n$에서 C^1 함수이고, $z = g(y)$가 $V \subseteq \mathbb{R} \to E \subseteq U$에서 C^1 함수라고 하자. 그러면, 합성함수 $g \circ f$는 U에서 C^1이고,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g(f(x_1, c \ldots, x_n)) = \frac{dg}{dy}\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

이다. 달리말해, $D(g \circ f)(X) = \frac{dg}{dy} \nabla f(X)$이다.

Theorem 3.7 (사슬 규칙 3, The Chain Rule 3)**.** *$U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$이라고 하자. $X(T) = (x_1(T), \cdots, x_m(T))$가 U에서 C^1 함수이고, $F(X) = (y_1(X), \cdots, y_n(X))$가 V에서 C_1 함수이며, X의 치역이 V에 속해있다고 하자. 그러면, $F(X(T))$는 U에서 C^1 함수이고, 미분은 아래와 같은 미분행렬의 곱으로 나타내진다.*

$$D(F \circ X)(T) = DF(X(T)) \cdot DX(T)$$

이 미분행렬의 각 항 a_{ij}은 다음과 같다.

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \frac{\partial y_i}{\partial t_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y_i}{\partial t_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots \frac{\partial y_i}{\partial t_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_j}$$

사슬 규칙 3은 사슬 규칙 1, 2를 포괄하는 가장 일반화된 정리이다. 그러나, 이해를 돕고 계산을 빠르게 하기 위해서는 사슬 규칙 1, 2를 아는 것이 도움이 된다.

Theorem 3.8 (평균값 정리 2, Mean Value Theorem 2). *$F = (f_1, \cdots, f_m)$이 $U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$인 C_1 함수라고 하자. $0 \le t \le 1$일 때, $A + tH \in U$라고 하자. 그러면, $i = 1, 2, \cdots, m$에 대해 $0 < \theta_i < 1$인 θ_i가 존재해서 다음이 만족한다.*

$$F(A+H) - F(A) = MH$$

여기서 M은 i번째 행이 $\nabla f_i(A + \theta_i H)$인 $n \times m$ 행렬이다.

Definition 3.7 (2번 연속미분). *xy 평면에서 함수 f가 원판에서 정의되어 있다고 하자. 함수의 f_x, f_y가 존재하고 각각이 연속인 편도함수 f_{xx}, f_{xy}와 f_{yx}, f_{yy}가 존재하면, f는 2번 연속미분가능(continuously differentiable)하다고 한다. 또한, 이러한 함수 f를 C^2 함수라고 한다.*

Theorem 3.9 (클레로의 정리, Clairaut Theorem). *f가 C^2 함수라고 하자. 그러면, $f_{xy} = f_{yx}$이다.*

3.4 역함수

1변수 함수 $y = f(x)$가 미분가능하고, 도함수가 연속이라고 하자. 또한, $f'(a) \neq 0$이라고 하자. 그러면, f는 충분히 작은 구간 $a \in I$에 대해, 역함수(inverse function) g가 존재한다. 이 g는 점 $f(a)$에서 미분가능하고, $g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$이다.

이 단원에서는 같은 흐름으로 다변수함수에서의 역함수와, 그에 관련된 정리를 공부하게 된다.

Lemma 3.1. *$F = (f, g)$가 $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{R}^2$에서 정의된 C^1 함수라고 하자. 모든 $A \in \mathscr{O}$에 대해, 원판 $N_r(A)$가 존재해서 모든 $A + P, A + Q \in N_r(A)$에 대해 다음이 성립한다.*

$$||R(P) - R(Q)|| \le s(P, Q) \cdot ||P - Q||$$

또한, $r \to 0$일 때 $s(P, Q) \to 0$이다.

Theorem 3.10 (역함수 정리, Inverse Function Theorem). *$U = F(X)$가 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$에서 C^1 함수라고 하자. 만약, $A \in \mathbb{R}^2$에서 $DF(A)$가 역행렬이 존재한다면, F는 A를 포함하는 매우 작은 영역에서 일대일 함수이다. 즉, F는 이 영역에서 역함수 G가 존재한다. 이 G는 점 F(A)에서 미분가능하고, $DG(F(A)) = DF(A)^{-1}$*

위의 역함수 정리는 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$으로도 확장이 가능하다. 또한, 위의 정리로부터 따라오는 정리가 있다.

Theorem 3.11 (음함수 정리 1, Implicit Function Theorem 1). *f가 $P \in \mathbb{R}^3$을 포함하는 영역에서 C^1이라고 하자. $f_z(P) \neq 0$이라고 하자. 그러면, P에 충분히 가까운 점 X에 대해 $f(X) = f(P)$를 만족하는 경우, $X = (x, y, g(x, y))$ 꼴을 만든다. 여기서 g는 C^1 함수이다. g의 편도함수는 아래와 같은 관계가 있다.*

$$g_x = -\frac{f_x}{f_z}, \quad g_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

Theorem 3.12 (음함수 정리 2, Implicit Function Theorem 2).

$$F(X, Y) = (f_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m))$$

가 $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$이고, (A, B)를 포함하는 작은 영역에서 C^1 함수라고 하자. 또한, $(X, Y) \in S \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$에 대해, 아래를 만족한다고 하자.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) &= c_1 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) &= c_2 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) &= c_m \end{aligned}$$

$(A, B) = (a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m) \in S$이고, 편도함수 행렬 $[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(A, B)]$의 행렬식이 0이 아니라고 하자. 그러면, C^1 함수 $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$가 존재하여, (A,B)와 충분히 가까운 점 $(X, Y) \in S$에 대해, $(X, Y) = (X, G(X, Y))$인 경우, 아래를 만족한다.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \cdots, x_n) \\ y_2 &= g_2(x_1, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= g_m(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

편도함수 f_i와 g_j는 아래의 관계를 갖는다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \cdots, n$$

3.5 회전과 발산

함수 $G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$와 $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$를 정의하자. 이 단원은, 이 두 함수에 대해 특별한 편도함수의 조합에 대해 다룰 것이다.

Definition 3.8 (회전)**.** *회전(curl)은 다음과 같이 정의되는 연산자이다.*

$$curlG = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}, \quad curlF = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right), \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

Definition 3.9 (발산)**.** *발산(divergence)는 다음과 같이 정의되는 연산자이다.*

$$divG = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}, \quad divF = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Definition 3.10 (라플라스 연산자)**.** *라플라스(laplace)* 연산자 Δ는 $\Delta f = div\ grad f$와 *같이 정의된다.*

이러한 회전과 발산은 나중에 그린의 정리, 발산 정리 등을 공부할 때 중요하게 사용된다.

4 미분의 활용

이 챕터는, 미분을 활용하여 다변수함수의 극값을 찾는 방법에 대해 다룬다. 또한, 다변수함수를 적당한 n차 함수로 근사하는 방법에 대해서도 다루게 된다.

4.1 다변수함수의 고계도미분

클레로의 정리에 의해, 우리는 $f(x, y)$ 꼴의 함수가 C^2이면, $f_{xy} = f_{yx}$가 성립함을 알고 있다.

Definition 4.1 (n번 연속미분)**.** *함수 $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$이 n번 연속미분가능(continuously differentiable)이라는 것은 이 함수가 모든 가능한 조합의 n계 편도함수를 가지고, 각각이 연속일 때이다. 이러한 함수 f를 C^n 함수라고 한다.*

Theorem 4.1 (클레로의 정리 2, Clairaut Theorem 2)**.** *$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$가 C^n 함수라고 하자. 그러면 f의 l계 편도함수 $(l \le n)$는 각 변수의 편미분 횟수에만 의존한다.*

4.2 2변수함수의 극값

1변수 함수에서 그랬던 것처럼, 다변수 함수에서도 극값이 존재한다.

Definition 4.2 (극값)**.** *함수 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to R$에 대해, $A \in D$에서 함수 f가 극솟값(local minimum)을 갖는다는 것은 A를 중심으로 하는 개집합이 존재하여 그 집합 안의 모든 점 X에 대해 $f(X) \ge f(A)$인 것이다. 반대로, A에서 함수가 극댓값(local maximum)을 갖는다는 것은 A를 중심으로 하는 개집합이 존재하여 그 집합 안의 모든 점 X에 대해 $f(X) \le f(A)$인 것이다. 극댓값과 극솟값을 합쳐서 극값(local extremum)이라고 부른다. 만약, $X \ne A$인 영역에서 부등호에서 등호가 빠진 형태라면($f(X) > f(A)$ 또는 $f(X) < f(A)$) 엄격한(strict)라고 한다.*

Theorem 4.2 (1계도미분 판정법, 1st Derivative Test)**.** *$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to R$이 미분가능하다고 하자. f가 내부 점(interior point) $A \in D$에 대해 $f(A)$가 극댓값이라고 할 때, $\nabla f(A) = 0$이다.*

Definition 4.3 (헤세 행렬)**.** *$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 C^2 함수라고 하자. $(x_1, \cdots, x_n)$에서 정의되는 다음의 $n \times n$ 행렬을 f의 $(x_1, \cdots, x_n)$에서의 헤세 행렬(hessian matrix)이라고 한다.*

$$\mathscr{H} f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

헤세 행렬은 대칭 행렬(symmetric matrix)이다.

Definition 4.4 (양정 행렬)**.** *2×2 대칭행렬 S가 양정(positive definite) 행렬이라는 것은 다음을 만족하는 것이다.*

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

$$S(u, v) = U \cdot SU > 0 \quad forall \;\; U = (u, v) \ne 0$$

만약, $-S$가 양정 행렬이라면, S는 음정(negative definite) 행렬이다. 두 경우가 아닌 경우, S는 부정(indefinite) 행렬이다.

Theorem 4.3. *$S = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$가 양정 행렬일 필요충분조건은 모든 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$에 대해 다음이 성립하는 $m > 0$이 존재하는 것이다.*

$$S(u, v) = (u, v) \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = pu^2 + 2quv + rv^2 \ge m(u^2 + v^2)$$

Theorem 4.4. *대칭 행렬 S가 양정 행렬이고, $U = (u, v) \in \mathbb{R}^2$에 대해 다음이 성립한다고 하자.*

$$S(u, v) = U \cdot SU \ge m(u^2 + v^2)$$

그러면, 충분히 작은 원소들을 갖는 T에 대해, $S + T$가 대칭 행렬이면, 다음이 성립한다.

$$(S + T)(u, v) = U \cdot (S + T)U \ge \frac{m}{2}(u^2 + v^2)$$

Theorem 4.5 (2계도미분 판정법 1, 2nd Derivative Test 1)**.** *$f : D \subseteq \mathbb{R}^2$가 C^2 함수이고, D의 내부 점(interior point) (c, d)에 대해, $\nabla f(c, d) = 0$이라고 하자. 그러면 헤세 행렬 $\mathscr{H} f(c, d)$에 대해,*

(a) $\mathscr{H} f(c, d)$가 양정 행렬이면, f는 (c,d)에서 엄격한 극솟값을 갖는다.

(b) $\mathscr{H} f(c, d)$가 음정 행렬이면, f는 (c,d)에서 엄격한 극댓값을 갖는다.

(c) $\mathscr{H} f(c, d)$가 부정 행렬이면, f는 (c,d)에서 극값을 갖지 않는다.

Theorem 4.6. *대칭 행렬 $S = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$은 $p > 0 \quad and \quad pr - q^2 > 0$이면 양정 행렬이다. 반면, $p < 0 \quad and \quad pr - q^2 > 0$이면 음정 행렬이며, $pr - q^2 > 0$이면 부정 행렬이다.*

4.3 다변수함수의 극값

Theorem 4.7 (테일러 정리, Taylor Theorem)**.** *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} t A \in R^n$ 근처에서 C^{m+1} 함수라고 하자. 그러면,*

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{i_1=1}^{n} h_{i_1} f_{x_{i_1}}(A) + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} f_{x_{i_1} x_{i_2}}(A) + \cdots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \cdots, i_m=1}^{n} (h_{i_1} \cdots h_{i_m}) f_{x_{i_1} \cdots x_{i_m}}(A) + R_m(A, H)$$

가 성립한다. 여기서 어떤 k에 대해 $|R_m(A, H) \leq k||H||^{m+1}$이다. 나머지 항 R_m은 $||H||^m$보다 빠르게 0에 다가간다. ($0 < \frac{|R_m(A,H)|}{||H||^m} < k||H||$)

테일러 정리는 임의의 C^{n+1} 함수를 n차 함수로 근사하는 방법에 대해 다룬다. 즉, 다변수함수의 미분에 대해 공부하며 다뤘던 선형 근사(linear approximation)의 보다 일반화된 버전이다. 근사를 할 때 가장 중요한 것 중 하나는 실제 함수와 근사된 함수의 차이이다. 위 정리에서는 그 차이를 나머지 항 R_m을 통해 제시한다.

Theorem 4.8 (2계도미분 판정법 2, 2nd Derivative Test 2)**.** *f가 A를 포함하는 $\mathbb{R}^n$ 영역에서 C^3 함수라고 하자. 만약 A에서 $\nabla f(A) = 0$이고, 헤세 행렬이 양정 행렬이면, f는 A에서 극솟값을 갖는다.*

Theorem 4.9. *f가 A를 포함하는 $\mathbb{R}^n$ 영역에서 C^3 함수라고 하자. 만약 A에서 $\nabla f(A) = 0$이고, 헤세 행렬이 양정 행렬이면, 1차 테일러 근사*

$$f(A+H) \approx p_1(A+H) = f(A) + \nabla f(A) \cdot H$$

는 충분히 작은 H에 대해 $f(A+H) \geq p_1(A+H)$가 성립한다.

Theorem 4.10. *행렬 $M = [m_{ij}]$가 $n \times n$ 대칭 행렬이라고 하자. 다음이 모두 양수면, M은 양정 행렬이다.*

$$m_{11}, \quad \det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \det M$$

4.4 라그랑주 승수법

극댓값 정리는 유계이고 닫힌 집합에서 정의된 연속 함수가 극댓값과 극솟값을 가짐을 보장해준다. 함수를 미분하여 0이 되는 지점을 찾으면 이러한 극값들을 찾을 수가 있다. 아래의 정리는 이 결과를 다변수함수로 확장한 결과이다.

Theorem 4.11 (라그랑주 승수법, Lagrange Multiplier Method)**.** *함수 f, g가 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$이고 C^1 함수라고 하자. 레벨 집합 S가 $g(x, y, z) = c$로 정의되었다고 하자. P가*

(a) $\nabla g(P) \neq 0$

(b) f가 S의 P 위에서 극댓값을 가진다.

를 만족하면 $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$를 만족하는 숫자 λ가 존재한다. 이러한 λ를 라그랑주 승수(lagrange multiplier)라고 부른다.

5 적분 (기말 범위)

5.1 면, 부피, 그리고 적분

5.2 2계도 연속함수의 적분

5.3 연속된 단일적분으로 쪼개지는 2중적분

5.4 2중적분 변수치환

5.5 무계집합에서의 적분

5.6 3중적분과 다중적분

6 선적분과 표면적분 (기말 범위)

6.1 선적분

6.2 보존장

6.3 표면과 표면적분

7 발산 정리, 스토크스 정리, 보존 법칙 (기말 범위)

7.1 $\mathbb{R}^2$에서의 그린 정리와 발산 정리

Theorem 7.1 (발산 정리)**.** *만약* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*가 정규 집합* D*에서* C^1 *이면,*

$$\int_D div\boldsymbol{F} dA = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} ds$$

7.2 $\mathbb{R}^3$에서의 발산 정리

7.3 스토크스 정리

7.4 보존 법칙

7.5 보존 법칙과 일차원 유량