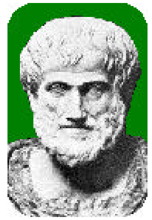
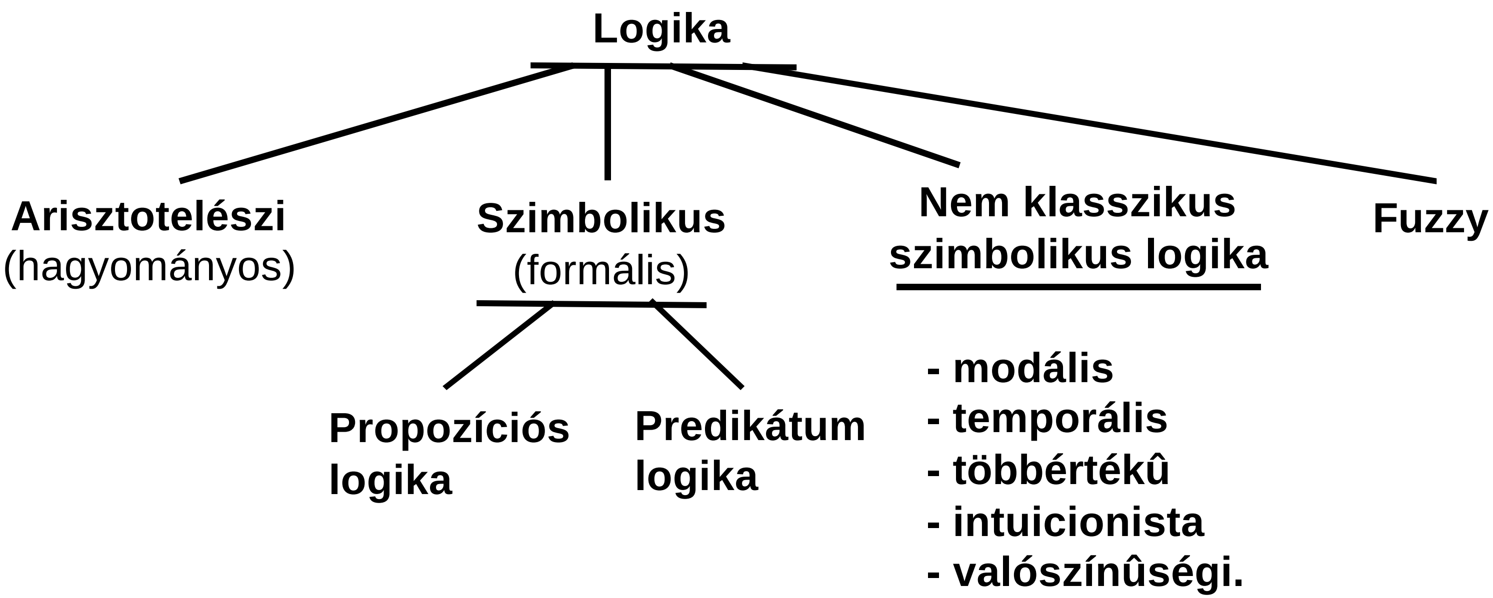


Tudásszemléltetés formális logikával

- **A logikáról**

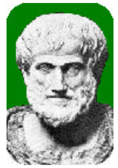
  A logika a bölcselés tudománya, a helyes gondolkodás mûvészetének tana.

  - **A logika osztályozása**



dr.Dudás László

A szimbolikus logika kifejlõdése



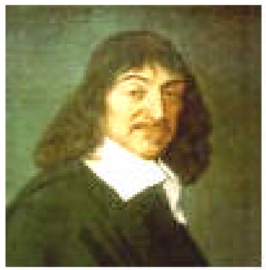
- **Petrus Ramus** (1515-1572)
  - Bírálta az arisztotelészi logikát.
  - "A logika: a helyes érvelés eszköze."

1.

- **Francis Bacon** (1561-1626)
  - "A logika az új ismeretek megszerzésének eszköze."
  - Kísérletek, mérések fontossága.

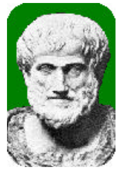
2.

- **René Descartes** (1596-1650)
  - *"Értekezés a módszerrõl"* c. mûve
    - A problémákat osszuk független, vagy kevéssé összefüggõ részekre
    - Az egyszerûtõl haladjunk a bonyolultabb felé
    - Csak olyan dolgokat fogadjunk el igaznak, melyek igazsága megkérdõjelezhetetlen
    - Törekedjünk a teljes felsorolásokra.



3.

1. www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/ .../neuzeit/ramus.htm 2. "**www.amorc.no/images/bacon.jpg**"
3. www.homeoint.org/seror/ articles/raison.htm

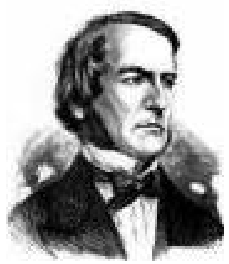


A szimbolikus logika kifejlõdése ..

- **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)**
  - A szimbolikus logika elõfutára.
  - "Logika $\cong$ matematika."
  - **Azonosság** definíciója**:**
    "Azok a terminusok tekintendõk azonosnak, vagy egybeesõnek, amelyek egymással tetszés szerint felcserélhetõk anélkül, hogy ezáltal bármelyik állítás igazsága megváltozna."

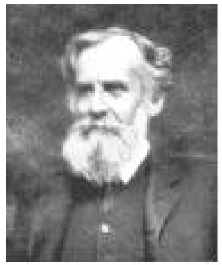
1.

- **George Boole** (1815-1864)
  - A szimbolikus logika megalapítója.
  - *"A logika matematikai analízise"* címû mûve.
  - A **logikai szorzás** és **logikai összeadás** mûveletének bevezetése.



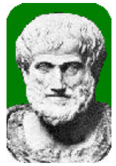
2.

- **John Venn** (1834-1923)
  - *"Symbolic Logic"* címû mûve
  - Diagramok: teljes esemény = téglalap; körök: mindenféle egymásbametszés



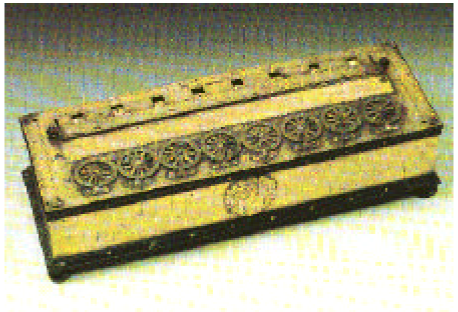
3.

1. http://usuarios.lycos.es/Cantemar/Leibniz.html 2. powerreporting.com/ altavista.htm
3. lawrence.lancour.students.noctrl.edu/ mathematicians.html



A szimbolikus logika kifejlõdése ..

- **William S. Jevons** (1835-1882)
  - *"megengedõ vagy"*
  - Elsõ logikai gép (a logikai zongora)



1.

- **Charles S. Peirce** (1839-1914)
  - Boole összes logikai mûvelete kiváltható *egyetlen mûvelettel*, a "sem...., sem' mûvelettel.

2.

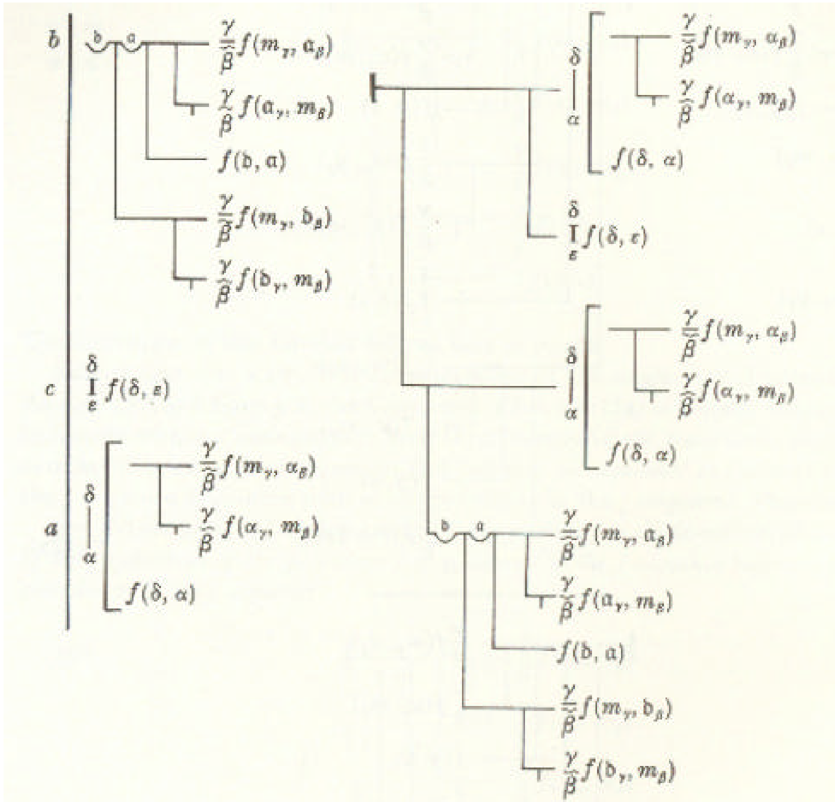
- **Augustus de Morgan** (1806-1871)
  - Reláció-azonosságok.

3.

1. "**pierre.mf.free.fr/tpe/ partie2/pasclin2.gif**" 2. www.macalester.edu/~warren/ courses/P50-01_timeln.htm
3. www.din.uem.br/ia/precursores/ morgan.html

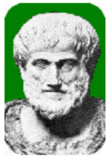
A szimbolikus logika kifejlõdése ..

- **Gottlob Frege** (1848-1925)
  - Kimagasló teljesítménye
  - ***"A szimbolikus logika atyja"***
  - *"Fogalomírás, a tiszta gondolkodás aritmetika mintájára megalkotott formanyelve" c. mûve*

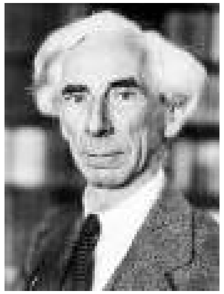


Részlet a *Begriffschrift*-bõl

A szimbolikus logika kifejlõdése ..



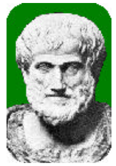
- **Bertrand Russell** (1872-1970)
  - Frege-tõl függetlenül ugyanoda eljutott
  - Hézagok az elõdök munkáiban: logikai **paradoxonok**.
  - *"Az osztályok osztálya eleme-e önmagának ?"*
  - **Típuselmélete**: magyarázat a paradoxonokra.



1.

1. www.univie.ac.at/bvi/photo-gallery/ photo_gallery.htm

Új irányzatok a logikában



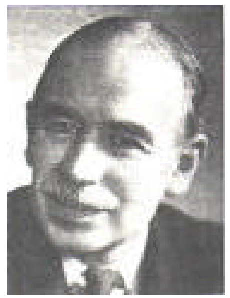
- *A **modális** logikákkal* olyan terminusok is kifejezhetõk, mint a "lehetséges", "szükségszerû" és ezek változatai. A modális logika a klasszikus logika kiterjesztése.
- *A **deontikus** logika* olyan etikai és jogi kifejezések elemzésével foglalkozik, mint a "Megtiltott, hogy...", "Megengedett, hogy...", stb.

- **Jan Lukasiewicz** (1878-1956)
  - ***Háromértékû logika:* 0, 1/2, 1**
  - Az 1/2 érték a bizonytalanságot fejezi ki.
  - Eljutott *a végtelenértékû logikáig*.

1.

- **E.L.Post** (1897-1954)
  - ***Többértékû*** logika, Lukasievicz-csel egyidõben.

- ***J.M.Keynes*** (1883-1946)
  - *Ch.S.Peirce-szel együtt a **valószínûségi** logika* megalkotóinak tartják.
  - Logikai valószínûség: a racionális hit (ésszerû meggyõzõdés) foka, 0...1 közötti érték.



2.

1. www.fmag.unict.it/PolPhil/ Lukas/Lukas.html 2. www.ssc.upenn.edu/~ues/

Propozíciós logika

- Egyéb elnevezések: kijelentéskalkulus, ítéletkalkulus, nulladrendû predikátum-kalkulus.

- *Propozíció*: egy kijelentõ mondat formában megadott állítás, mely az adott kontextusban egyértelmû *igaz*, vagy *hamis* logikai értékkel bír.

- A propozíciós logika olyan egyszerû nyelvtani kapcsolatokat alkalmaz a legegyszerûbb "atomi mondatok" között, mint az ***és*, *vagy*, *nem*.**

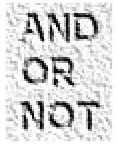
- *Atomi mondatok* :

  A= " A víz száz fokon forr."

  B= " A macskák ugatnak."

  Az ilyen atomi összetevõk (objektumok) **egyértelmûen megítélhetõk** az igaz, vagy hamis értékek valamelyikével. (Általános tapasztalat szerint A igaz, B hamis).

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.



Propozíciós logika ..

- ***A propozíciós logika tárgya, célja*** összetett szerkezetek kiértékelésére formális szabályt adni. A kiértékelésben az atomi összetevõk (objektumok) igazságértékeit kell csak figyelembe venni, jelentésüktõl eltekintünk.

- Atomi kijelentések helyett szimbólumok:

  Esik az esõ. $\Rightarrow$ A

- Eltekintünk a természetes nyelvi jelentéstõl
  Nem természetes átalakítás, pl.:
  A: Jóska megbetegedett.
  B: Jóska elment az orvoshoz.

  Hétköznapi értelemben **A és B** jelentése eltér **B és A** összetett kijelentésétõl.

  Csak az igaz, vagy hamis értéke fontos számunkra A-nak és B-nek.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

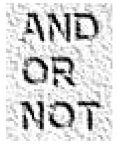
A propozíciós logika szintaxisa

- **Jelkészlet**
  - **Elválasztójelek:** , ( ) [ ]
  - **Logikai operátorok** (mûveleti jelek): {csökkenõ precedenciasorrendben}

Ø	Ù	Ú	®	º
negáció	konjunkció	diszjunkció	implikáció	ekvivalencia
'nem'	'és'	'vagy'	'ha ... akkor ...'	'akkor és csak akkor'
			'következik'	'azonos'

  - **Logikai változók** (ítéletváltozók): ***p, q, r, ...***
  - **Logikai konstansok** (ítélet-, predikátumkonstansok) : ***T, F (True, False), (igaz, hamis)*****.**

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.



A propozíciós logika szintaxisa ..

- A propozíciós logika (kijelentéskalkulus, ítéletkalkulus) ***formuláit*** a jelkészlet elemeibõl a ***szintaxis szabályai*** szerint építjük fel:

- *Atomi formula* (atom)
  - Minden ítéletkonstans atom : **T, F**
  - Minden ítéletváltozó atom : **p, q, r, …**

- *Formula* (jól formált formula):
  - Minden atomi formula egyben formula
  - Ha **A** és **B** formulák, akkor a .

    ØA, AÙB, AÚB, A®B, AºB

    kifejezések is formulák.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

A propozíciós logika szemantikája

- Egy logikai formulának az igazságértéke ad ***jelentést***, mely igazságértéket a *szemantika szabályai* szerint kapja meg.

- **A jelentésadás lépései:**
  1. Interpretálás
  2. Kiértékelés

- **Interpretálás**
  A formula *interpretálása:* minden egyes ítéletváltozójához az *igaz*, vagy a *hamis* értéket rendeljük *minden lehetséges módon*. Egy hozzárendelés egy interpretációt ad.
  Az interpretációk száma a propozíciós logikában véges: 2^n ahol n a változók száma.

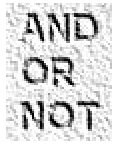
  pl.: *A:=(pÙq) ® (r º (Øs))*

  két lehetséges interpretációja:

  I_1: *(p,q,r,s) ¬(T,T,F,F)*

  I_2: *(p,q,r,s) ¬(F,T,T,F)*

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.



A propozíciós logika szemantikája ..

- **Kiértékelés**
  Az interpretált formula kiértékelését a logikai **mûveleti jelek szemantikája alapján** végezzük:

A	*B*	*ØA*	*AÙB*	*AÚB*	*A®B*	*AºB*
T	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*

Pl.: Ha süt a nap, nem tanul Péter.

süt a nap : *p*

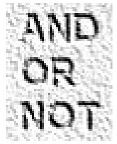
tanul Péter : *q*

A:= p®(Ø q)

A lehetséges 4 interpretáció egyike: p= T, q= F,
a kiértékelt formula: T®(Ø F); T ® T; T, az A állítás igaz.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

■ Logikai azonosságok a propozíciós logikában



- Összetett kijelentések kiértékelését, illetve egyszerûsítését, vagy kijelentések egyenértékûségének belátását segítik a logikai azonosságok:
- Igazságtáblával igazolhatók, pl.: *A, B, C* esetén $2^3 = 8$ eset, mindkét oldalon ugyanazt adja.

A º B = *(A® B) Ù (B® A)*

A® B = *Ø AÚ B*

Ezen két azonosság értelmében elegendõ csak a metszet *Ù*, az unió *Ú* és a tagadás *Ø* logikai mûveletek alkalmazása:

AÚFalse = *A*

AÙTrue = *A*

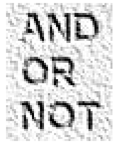
AÚTrue = *True*

AÙFalse = *False*

AÚØA = *True*

AÙØA = *False*

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

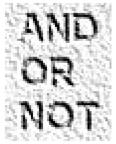


Logikai azonosságok a propozíciós logikában ..

Kettõs tagadás:	*ØØ A*	=	*A*
Idempotencia:	*AÙ A*	=	*A*
Kommutativitás:	*AÙ B*	=	*BÙ A*
(felcserélhetõség)	*AÚ B*	=	*BÚ A*
Asszociativitás:	*(AÙ B)Ù C*	=	*AÙ (BÙ C)*
(társíthatóság)	*(AÚ B)Ú C*	=	*AÚ (BÚ C)*
Abszorpció:	*AÙ (AÚ B)*	=	*A*
(elnyelés)	*AÚ (AÙ B)*	=	*A*
Disztributivitás:	*AÙ (BÚ C)*	=	*(AÙ B)Ú (AÙ C)*
(széttagolhatóság)	*AÚ (BÙ C)*	=	*(AÚ B)Ù (AÚ C)*
DeMorgan összefüggés:	*Ø (AÙ B)*	=	*Ø AÚØ B*
	Ø (AÚ B)	=	*Ø AÙØ B*

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Kielégíthetetlen és érvényes kifejezések



A kielégíthetetlen logikai kifejezések és az érvényes kifejezések fontos szerepet játszanak a **tételbizonyításban**. A **tétel** azt jelenti, hogy állításokból logikailag következik a konklúzió.

- **Tautologikus törvény:** *A Ú B = A*, ha *A* tautológia,
  A Ù B = B, ha *A* tautológia.

  A logikai kifejezés tautológia, azaz **érvényes** kifejezés akkor, ha **minden lehetséges helyettesítése igaz.**

- **Kielégíthetetlenségi törvény:** *AÚ B = B,* ha *A* kielégíthetetlen,
  AÙ B =A, ha *A* kielégíthetetlen.

  A logikai kifejezés **kontradikció**, azaz kielégíthetetlen kifejezés akkor, ha minden lehetséges helyettesítésre hamis értéket ad.

Természetesen a formulák többsége egyes interpretációkban hamis, más interpretációkban igaz, azaz kielégíthetõ.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

dr.Dudás László

Tételbizonyítás a propozíciós logikában

- Egy propozíciós logikai formula **érvényességének igazolására** alkalmas módszerek:
  - Igazságtáblás
  - Formális levezetés
  - Quine algoritmusa
  - Wang algoritmusa
  - Rezolúció.

- A rezolúció szabálya: $$\frac{\alpha \vee \beta,\ \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$$

  Mivel β nem lehet egyszerre igaz és hamis, ezért valamelyik premisszában, elõfeltételben a másik tagnak (α, vagy γ) igaznak kell lennie, tehát az $\alpha \vee \gamma$ igaz.

- A rezolúció módszere kiemelkedik a többi közül, mivel ez a bizonyítási módszer alkalmazható a predikátum logikában is.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

dr.Dudás László

Tételbizonyítás a propozíciós logikában ..

AND
OR
NOT

- A **tétel** igaz állításokból és egy, azokból állítólag következõ konklúzióból áll.
- A **tételbizonyítás** feladata formális szabályok gépies alkalmazásán keresztül igazolni, hogy a konklúzió a premisszák következménye.
- A rezolúciós módszer **lépései**:
  - A bizonyítandó tétel **tagadott alakját** vesszük alapul azáltal, hogy feltesszük, hogy a konklúzió ellentettje igaz a premisszák igaz értékei mellett. Ha az ily módon kapott összetett formula kielégíthetetlen voltát sikerül belátni, akkor az eredeti tétel igaz.
  - Ehhez konjunktív normál forma alakra (KNF) hozzuk az összetett formulát és a **rezolúció ismételt alkalmazásával**, fokozatos egyszerûsítéseken keresztül **jutunk el az ellentmondáshoz**.
- A rezolúció alkalmazása a propozíciós logikában (ítéletkalkulus) korlátozott, mivel bonyolultabb problémák leírására ez a logika nem ad eszközöket.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Tételbizonyítás a propozíciós logikában ..

- A konjunktív normálforma
  - Klózok konjunkciója, ÉS kapcsolata
  - Az eredeti formulával ekvivalens
  - Egyszerû felépítése miatt gépiesen kezelhetõ.

- A klóz literálok diszjunkciója (VAGY kapcsolata), vagy egyetlen literál.
- A literál egy ítéletváltozó (logikai változó), vagy annak negáltja.

Példa:

$$\overbrace{\underbrace{(p \lor \neg q)}_{\textit{klóz}} \land \underbrace{(\neg p \lor r)}_{\textit{klóz}} \land \underbrace{(\neg r \lor \neg s)}_{\textit{klóz}} \land \underbrace{q}_{\textit{klóz}} \land \underbrace{s}_{\textit{klóz}}}^{\textit{konjunktív normál forma}}$$

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Tételbizonyítás a propozíciós logikában ..

- Formulák konjunktív normálformára hozásának lépései:
  1. Azonosságok kiküszöbölése: $A \equiv B \;=\; (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  2. Implikációk kiküszöbölése: $A \rightarrow B \;=\; \neg A \vee B$
  3. A negálás hatáskörének redukálása: $\neg (A \vee B) \;=\; \neg A \wedge \neg B$
     $\neg (A \wedge B) \;=\; \neg A \vee \neg B$
  4. Klózok konjunkciójának létrehozása: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

- A diszjunktív normál formából elhagyva a konjunkció operátorokat, a formula literálokra esik szét, melyek halmazára alkalmazzuk a rezolúció szabályát ciklusban. Ily módon a rezolúció egy olyan könnyen automatizálható eljárás, melynek segítségével egy klózhalmaz, illetve a neki megfelelõ konjunktív normál forma kielégíthetetlenségét belátjuk.

- A klózhalmaz egyszerûsítése rezolválható klózpárokon keresztül történik.

- Rezolválható klózpár: egyetlen ellentett literálpárt tartalmaznak, pl:

  $$p \vee A, \quad \neg p \vee B$$

  ahol A és B közvetlenül tovább már nem rezolválható klózok.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Tételbizonyítás a propozíciós logikában ..

AND
OR
NOT

- A rezolúciós folyamat során a rezolválható párok rezolválása eredményeként adódó rezolvens klózt a halmazhoz adjuk.
- A klózhalmaz kielégíthetetlenségét az jelzi, hogy végül üres klózt kapunk.
- A rezolúció algoritmusa:

```
Procedure Rezolúció
1. KLÓZHALMAZ feltöltése
2. do
3.     Rezolválható klózpár Ci, Cj kiválasztása a KLÓZHALMAZ-ból
4.     Rezolválás: Cij ⇐ R(Ci,Cj)
5.     KLÓZHALMAZ bõvítése Cij rezolvenssel
6. while Cij ≠ NIL
end
```

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Tételbizonyítás a propozíciós logikában ..

- Példa:

KNF: $(p \lor \neg q) \land (\neg p \lor r) \land (\neg r \lor \neg s) \land q \land s$

$p \lor \neg q$ $\qquad$ $\neg p \lor r$

$\neg q \lor r$ $\qquad$ $\neg r \lor \neg s$

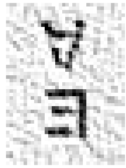
$\neg q \lor \neg s$ $\qquad$ q

$\neg s$ $\qquad$ s

NIL

A rezolúció teljességének tétele garantálja, hogy egy kielégítetlen formula klózhalmazából kiindulva, minden lehetséges módon képezve a klózpárok rezolvensét, véges sok lépésben eljutunk az üres klózhalmazhoz.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.



Predikátum logika

További elnevezések: elsõrendû predikátumkalkulus, vagy egyszerûen predikátumkalkulus.

- *Predikátum:* objektumok sajátságainak és az objektumok közötti kapcsolatok, viszonyok, relációk szimbolikus formában való megadására alkalmas állítás, mely egy adott interpretációban egyértelmû igaz, vagy hamis minõsítéssel bír.

- **A predikátum logika jellemzõi:**
  - MI feladatok reprezentálására alkalmas (ld.: PROLOG).
  - *Kijelentéseink **tartalmát** is leírja*, mivel az állítások az individuumkonstansok, individuumváltozók és individuumfüggvények révén egy tartomány (, alaphalmaz, domain) elemeire vonatkozhatnak.
  - Az ítélet-, vagy logikai függvények, azaz a ***predikátumok*** használatá-val indivíduum paraméterektõl függõ igazságú állítások fogalmazhatók meg.
  - Új logikai operátorok, a **kvantorok** segítségével kifejezhetjük a *"minden"* és a *"létezik"* fordulatokat is.
  - Az *interpretáció módja eltér* a propozíciós logikáétól, és ebbõl eredõen a predikátum logikában egy formulának **végtelen sok interpretációja** lehetséges az alaphalmaz, és az azon értelmezett függvények és predikátumok tetszõleges választhatósága miatt.

dr.Dudás László

Predikátum logika ..

Bonyolultabb tételek bizonyíthatók, mint a propozíciós logikában:

Pl.:

Premisszák, ismert tények:

(1) Van olyan hallgató, aki minden tárgyat szeret.

(2) A szócséplést egyik hallgató sem szereti.

Igaz-e a fenti állítások ismeretében a következõ állítás?

Bizonyítandó állítás:

(4) Egyik tárgy sem szócséplés.

A predikátum logika szintaxisa

- ***Jelkészlet:***
  - **Elválasztójelek:** , ( ) [ ]
  - **Logikai operátorok** (mûveleti jelek): $\neg \wedge \vee \rightarrow \equiv$
  - **Kvantorok:** univerzális kvantor ("minden"): $\forall$

    egzisztenciális kvantor ("létezik" vagy "van olyan"): $\exists$.

    (precedencia: $\forall \; \exists \; \neg \; \wedge \; \vee \; \rightarrow \; \equiv$)

  - **Elemkonstansok** (individuumkonstansok): *a, b, c,...*,vagy nevek (például: *János, asztal*).
  - **Elemváltozók** (individuum változók): *x, y, z...*
  - **Függvényszimbólumok** (individuumfüggvények): *f, g, h,...* , vagy

    például: *testvére(Józsi)* Þ *Laci*
  - **Ítéletkonstansok** (logikai konstansok): *True, False*.
  - **Ítéletváltozók** (logikai változók): *p, q, r...*
  - **Predikátumszimbólumok** (logikai függvények): *P, Q, R,...* , vagy

    például: *testvérek(x, y)*,

    P(x,y).

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

A predikátum logika szintaxisa ..

- **A jelkészletelemeibõl a *kifejezések* 3 osztálya alkotható meg:**
  Term-ek, Atomi formulák (Atomok) és Jólformált formulák (Formulák).

- ***Term*** (individuum konstans, individuum változó, individuum függvény):
  - Minden elemkonstans (individuum konstans) term. Pl.: *a,b,...,asztal, szék*, stb.
  - Minden elemváltozó (individuum változó) term. Pl.: *x, y*.
  - Ha *f* egy *n*-argumentumú függvényszimbólum és $t_1,...,t_n$ term-ek, akkor $f(t_1,...,t_n)$ is term. Pl.: *f(a,x)*, *gyereke(Pál,x)*,
    színe(haj,idõskorban) Þ *õsz*,
    színe(haj,fiatalkorban) Þ *szõke*.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

A predikátum logika szintaxisa ..

- ***Atomi formula*** (kiértékelve *True*, vagy *False*):
  - **Minden ítéletkonstans atomi formula.** (*True, False*)
  - **Minden ítéletváltozó atomi formula.** (*p, q, r,…*)
  - **Ha *P egy n*-argumentumú predikátumszimbólum (logikai függvény) és $t_1,\ldots,t_n$ term-ek, akkor $P(t_1, \ldots,t_n)$ atomi formula.**
    Pl.: *házaspár(Pál,Irén)* Þ *True*.

Forrás: *Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.*: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

dr.Dudás László

A predikátum logika szintaxisa ..

- ***Formula*** (jólformált formula):
  - **Minden atomi formula egyben formula.** (*True, p, P(a,b)*)
  - **Ha *A* és *B* formulák, akkor a**
    ***(Ø A), (A Ù B), (AÚ B), (A ® B), (A º B)* kifejezések is formulák.**
  - **Ha az *A* egy formula és az *x* egy elem (individuumváltozó), akkor a**
    ***(" x)A, ($ x)A*   kifejezések is. formulák.** Pl.: *(" x) testvére (x,Pál)*

Precedenciasorrend: ∀∃¬ ∧ ∨ → ≡, pl.: (((∃x)A) ∨ (B) helyett: (∃x)A ∨ B

Példa: Vagy van egy részeg, vagy nem volt már ital.

A:= részeg(x)=R(x),
C= volt ital..
(∃x)R(x) ∨ ¬C.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

A predikátum logika szintaxisa ..

- **Kötött változó:**
  Minden elõfordulása a formulában kvantor hatása alatt áll.

  (" x) P(x,y) *x* kötött változó, *y* nem kötött változó.

  (" x) [P(x,y) Ù ($ y) Q(x,y)] mindkét *x* kötött *[]* miatt, *y* elsõ elõfordulása nem kötött, második elõfordulása kötött.

- **Mondat:** olyan formula, melyben minden változó összes elõfordulása kötött.
  Csak mondatokkal foglalkozunk.

  Példa mondatra: *(" x) [P(x) Ú ($ y) Q(x,y)]*

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Példa a formulázásra

Feladat:

Állítások: (1) **Van olyan hallgató, aki minden tárgyat szeret.**

(2) **A szócséplést egyik hallgató sem szereti.**

----

(4) **Egyik tárgy sem szócséplés**

Formalizálás:

Alkalmazott predikátumok:

H(x): *az x egy hallgató*

T(y): *az y egy tárgy*

C(y): *az y egy szócséplés*

S(x,y): *az x szereti y-t.*

A formalizált állítások:

F1: ($ x)[H(x) Ù (" y)(T(y) ® S(x,y))]

F2: (" x)[H(x) ® (" y)(C(y) ® Ø S(x,y))]

F3: (" x)[T(x) ® Ø C(x)]

dr.Dudás László

A predikátumkalkulus szemantikája

- Az elsõrendû predikátumkalkulus formuláinak is hasonlóan adunk **jelentést**, mint az ítélet-kalkulusban:
  - elõször ***interpretáljuk*, **majd
  - ***kiértékeljük*** a formulát. (Eredmény: True, vagy False).

- ***Interpretáció:***
  - ***Individuumtartomány*** (az értelmezés alaphalmazának) **megválasztása:** jele *D*, nem üres.
  - **Hozzárendelések:**
    - Minden *individuumkonstans-szimbólumnak* feleltessük meg *D* egy elemét. (*a:= asztal*)
    - Minden *n*-argumentumú *individuumfüggvényhez* (pl.: *f(a,b)*) rendeljünk hozzá egy D^n Þ *D* leképezést. (*gyermeke(a,b)* Þ *c*, *gyermeke(Pál,Irén)* Þ *Jutka*).
    - Minden *n*-argumentumú *predikátumfüggvénynek* feleltessünk meg egy D^2 Þ *{T,F}* leképezést, ahol *T* a logikai igaz, *F* pedig a logikai hamis értéket jelöli. (Pl.: *házaspár(Pál,Irén)* Þ *True*).

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

A predikátumkalkulus szemantikája ..

- ***Kiértékelés:***

  - Ha az *A* és *B* formulák igazságértéke ismert, akkor a ***(Ø A), (A Ù B), (A Ú B), (A ® B), (A º B)*** formulák *igazságértékét* a logikai mûveleti jelek propozíciós logikánál megadott igazságtáblái alapján *határozzuk meg*.

  - A ***(" x)A*** formula igazságértéke pontosan akkor *T* az adott interpretációban, ha az *A* formula igazságértéke *minden x Î D* esetén *True*, egyébként *(" x)A* értéke *False*.

  - A ***($ x)A*** formula igazságértéke pontosan akkor *True* az adott intrepretációban, ha az *A formula* igazságértéke *legalább egy x Î D* esetén *True*; egyébként *($ x)A* értéke *False*.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Predikátum formula igazságértéke az interpretáció függvénye

- A formula: ***(" x) [P(f (x,x), b) ® P(x, b)]***

- **Értelmezések:**

a., *D* a <u>természetes számok</u> halmaza.

Megfeleltetések:

b := 1

f(x,y) := x× y (*f* a szorzást jelölõ függvény)

P := egyenlõ (*P* legyen az egyenlõség relációja)

Ezekkel a formula:

(" x) [(x^2 = 1) ® (x = 1)]

T= igaz, a természetes számok körében.

b., *D* az <u>egész számok</u> halmaza.

Megfeleltetések: mint fent.

A formula értéke ***F=hamis***, mert *x* = *-1* esetén x^2 = *1* -bõl nem következik, hogy *x* = 1.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Predikátum-logikai formulák kielégíthetõsége

- ***Kielégíthetõ*** az a formula, amelyik valamely interpretációban igaz.
- ***Érvényesnek*** nevezünk egy formulát, ha minden interpretációban igaz.
  Például a *(" x)P(x) Ú ($ y) Ø P(y)*.
- ***Kielégíthetetlen*** *az a* formula, amely minden interpretációban hamis értékû.
  Például a *("x)P(x) Ù ($y) Ø P(y)*.

- **Az *érvényes*, illetve a *kielégíthetetlen* formulák a fontosak** számunkra, ugyanis a tételbizonyítást egy formula érvényességének, illetve kielégíthetetlenségének a belátására lehet visszavezetni.

- **Probléma:** az elsõrendû predikátum kalkulus egy formuláját *nem tudjuk az összes lehetséges interpretációban kiértékelni*, mivel végtelen sok alaphalmazt lehet megadni.

- **Megoldás*:*** *a rezolúciós eljárás, mellyel egy formula* érvényessége, vagy kielégíthetetlensége belátható.

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Logikai azonosságok a predikátum kalkulusban

- Két formula **ekvivalens**, ha minden interpretációban ugyanaz az igazságértékük.

- A propozíciós logikában megadott azonosságok itt is érvényesek

- **További azonosságok:**
  Q jelölheti a ∀, vagy a ∃ jelek bármelyikét. Jelöljön A*(x)* olyan formulát, amelyben az *x* változó elõfordul, *B* pedig olyat, amely az *x*-et nem tartalmazza.

  (Qx)A(x) Ú B = (Qx)(A(x) Ú B)

  (Qx)A(x) Ù B = (Qx)(A(x) Ù B)

  Ø ((" x)A(x)) = ($ x)(Ø A(x))

  Ø (($ x)A(x)) = (" x)(Ø A(x))

  (" x) A(x) Ù (" x) B(x) = (" x) (A(x) Ù B(x))

  ($ x) A(x) Ú ($ x) B(x) = ($ x) (A(x) Ú B(x))

  (Q1x) A(x) Ú (Q2x) B(x) = (Q1x) (Q2y) (A(x) Ú B(y)) (*)

  (Q1x) A(x) Ù (Q2x) B(x) = (Q1x) (Q2y) (A(x) Ù B(y)).

Forrás: Fekete I.-Gregorics T.-Nagy S.: **Bevezetés a mesterséges intelligenciába** LSI Oktatóközpont, Budapest, 1990. p290.

Rezolúció a predikátum logikában

Bonyolultabb tételek bizonyíthatók, mint a propozíciós logikában, ugyanakkor a bizonyítás lépései is jóval összetettebbek.
A következõkben egy egyszerû példát mutatunk, amely rámutat a predikátum logikán belüli rezolúció egyik erõsségére: A bizonyítás folyamán individuumváltozó - individuumkonstans hozzárendeléseket is végez, amely révén arra is választ kapunk, hogy milyen feltételek mellett igaz a tétel.

Igazi erejét megtapasztalhatjuk a Prolog programozási nyelvben.

Pl.: Feladat: Értik-e a hallgatók a rezolúciót?

Premisszák, ismert tények:

(1) A hallgatók értelmesek.

(2) Az értelmesek mindent értenek, ami egyszerû.

(3) Az értelmeseknek a rezolúció egyszerû.

Igaz-e a fenti állítások ismeretében a következõ állítás?

Bizonyítandó állítás:

(4) A hallgatók értik a rezolúciót.

Rezolúció a predikátum logikában ..

Formulázás:

- Alkalmazott predikátumok:

  hallgató(x) - az x az egy hallgató

  értelmes(x) - az x értelmes

  érti(x,y) - az x érti az y-t

  egyszerû(y) - az y egyszerû

- A premisszák és a negált következmény formalizált alakban:

  (1) $\neg$ hallgató(x) $\vee$ értelmes(x)

  (2) $\neg$ értelmes(x) $\vee$ érti(x,y) $\vee$ $\neg$egyszerû(y)

  (3) $\neg$ értelmes(x) $\vee$ egyszerû (Rezolúció)

  (4) hallgató(x) $\wedge$ $\neg$ érti(x,Rezolúció) $\Leftarrow$ tagadása $\Leftarrow$

  $\neg$ hallgató(x) $\vee$ érti(x,Rezolúció)

dr.Dudás László

Rezolúció a predikátum logikában ..

A klózhalmaz:

$\neg$ hallgató(x) $\vee$ értelmes(x) $\neg$ értelmes(x) $\vee$ érti(x,y) $\vee$ $\neg$egyszerû(y)

$\neg$ értelmes(x) $\vee$ egyszerû (Rezolúció)   hallgató(x) $\neg$ érti(x,Rezolúció)

A rezolúciós folyamat lépései:

$\neg$ hallgató(x) $\vee$ értelmes(x)   hallgató(x)

értelmes(x) $\neg$ értelmes(x) $\vee$ érti(x,y) $\vee$ $\neg$egyszerû(y)

$\neg$ érti(x,Rezolúció)   érti(x,y) $\vee$ $\neg$egyszerû(y)

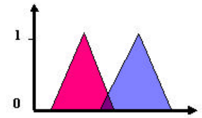
y $\Leftarrow$ Rezolúció

$\neg$egyszerû(Rezolúció) $\neg$ értelmes(x) $\vee$ egyszerû (Rezolúció)

$\neg$ hallgató(x) $\vee$ értelmes(x) $\neg$ értelmes(x)

$\neg$ hallgató(x)   hallgató(x)

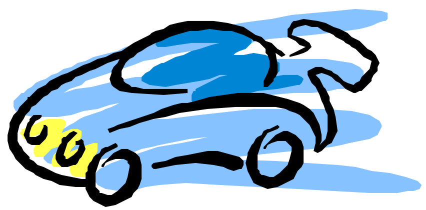
NIL



A Fuzzy logika alapjai

A Fuzzy logika Lofti Zadeh nevéhez fûzõdik. (1965)

- A hagyományos kétértékû logika helyett végtelenértékû, **folytonos változókat** és a hamis és igaz közötti folytonos átmenetet használ a fogalmak, jellemzõk igazságértékének megadására.
- Hiányos adatok elfogadása, zajtûrõ képessége, kollektív döntést utánzó mûködése a mesterséges neurális hálózatokhoz hasonlóan **robusztus**, megbízható alkalmazások készítését teszi lehetõvé bizonytalan adatok esetére is.
- Szimbolikus szinten mûködik, **nyelvi változókat** használ, ezáltal közel áll az emberi gondolkodáshoz.
- Alkalmazása különösen a szabályozástechnikában igen elterjedt.



A Fuzzy logika alapjai ..

Fuzzy halmazok

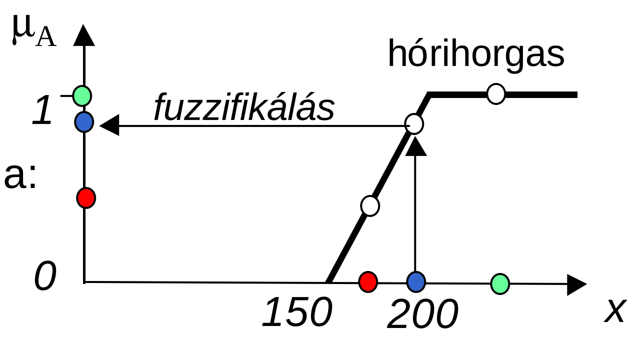
- Egy elemnek a fuzzy halmazba való tartozásának foka, 0-1 közötti mértéke van, nem merev igen/nem.

- Értelmezés:
  Ha **X** az x jellemzõk, értékek egy csoportja, akkor az **X**-en értelmezett **A** fuzzy halmaz a következõ rendezett párok halmaza:

$$\mathbf{A} = \{ (x, \mu_A(x)) : x \in \mathbf{X} \}$$

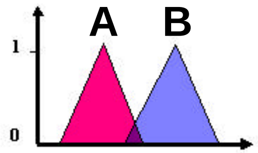
A $\mu_A(x)$ neve *tagsági függvény*, értéke az x tagsági aránya, beletartozásának mértéke az **A** fuzzy halmazba, ill. az **A** tagsági függvényhez társított nyelvi érték igazságának foka. A $\mu_A(x)$ tagsági függvény az **X** értékhalmazt leképezi az **M** tagsági térbe ($\mu_A(x) \in [0;1]$).

Példa: **X** testmagasságértékek [cm].
A halmaz: a „hórihorgas” nyelvi értéknek megfelelõ x, $\mu_A(x)$ számpárok halmaza, ábrája:
fizikai változó: x= 200 ;
fuzzy változó: testmagasság = hórihorgas
igazságértéke= 0.9



A Fuzzy logika alapjai ..

Fuzzy logikán alapuló következtetõ rendszer



- Produkciós, szabályalapú mûködés, de:
- a szabályok feltételoldalán fuzzy ÉS, ill. fuzzy VAGY logikai mûveletekkel összekötött

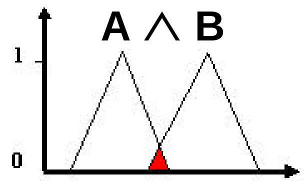
  fuzzy változó = nyelvi érték

  beletartozási relációk vannak, melyek értékét a fuzzy változóhoz tartozó fizikai változó (x) aktuális értéke és a nyelvi értékhez tartozó tagfüggvény együttesen határozzák meg.

- A feltételoldali logikai kifejezés eredõ érvényességi, igazsági értékét a fuzzy ÉS, ill, VAGY logikai mûveletek értelmezésének felhasználásával számítjuk és ez lesz a következmény oldal érvényessége is egyben.

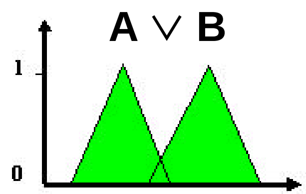
- Fuzzy ÉS mûvelet értelmezése (**C**= **A** $\wedge$ **B**):

  $$\mu_C(x) = \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\}, \ x \in \mathbf{X}$$



- Fuzzy VAGY muvelet értelmezése (**C**= **A** $\vee$ **B**):

  $$\mu_C(x) = \max\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\}, \ x \in \mathbf{X}$$



A Fuzzy logika alapjai ..

Fuzzy logikán alapuló következtetõ rendszer..

- A következmény oldalon egyetlen
  fuzzy változó = nyelvi érték
  reláció áll, melynek érvényessége, igazságértéke megegyezik a feltételoldalra meghatározott értékkel.

- Az összes szabály egyszerre mûködik a fizikai változók, mint bemenõ tények felhasználásával és kollektív döntést hoz. A kollektív döntés eredményét a fuzzy nyelvi értékek tagfüggvényeinek felhasználásával, a fuzzy változó terében az érvényességi értékekrõl a fizikai változóra való áttéréssel, ún. defuzzifikálással nyerjük.

- A defuzzifikálás módszerei:
  - Területközéppont meghatározással (legelterjedtebb eljárás)
  - Tagsági függvény maximumok súlyozott átlagának meghatározásával
  - A legnagyobb érvényességû következmény-tagfüggvény maximumával.

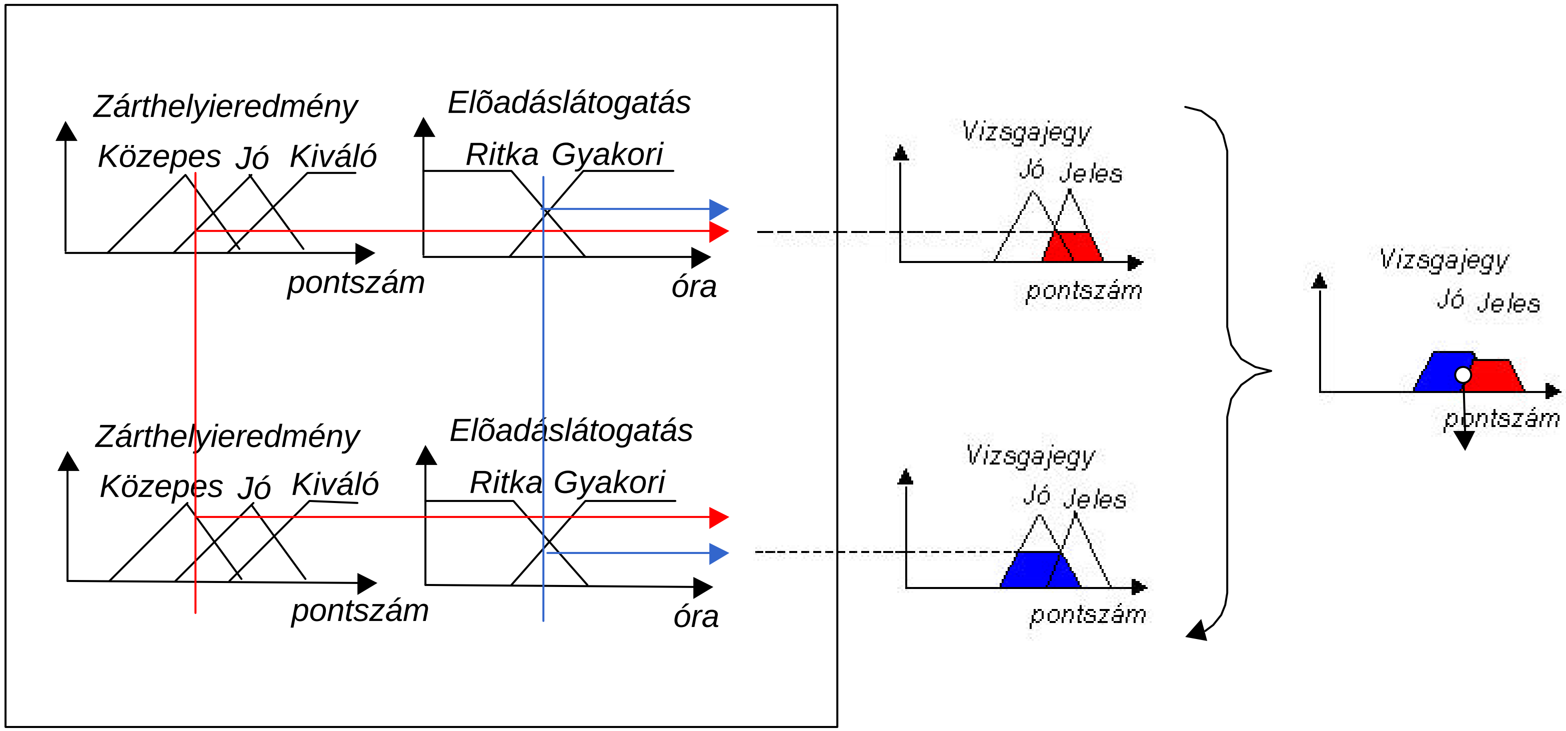
Forrás: Erdélyi Ferenc: A technológiai menedzsment informatikai eszközei; információ rendszerek Miskolc, 1997.

A Fuzzy logika alapjai ..

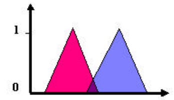
Fuzzyfikálás, defuzzifikálás

If Zárthelyieredmény = Jó ÉS Elõadáslátogatás = Ritka then Vizsgajegy = Jeles

If Zárthelyieredmény = Közepes ÉS Elõadáslátogatás = Gyakori then Vizsgajegy = Jó



dr.Dudás László



A Fuzzy logika alapjai ..

Fuzzy szabályozórendszer vázlata