



南昌航空大学  
NANCHANG HANGKONG UNIVERSITY

# 工程数学2

-----数值分析及数理统计



# 绪论

- 数值分析主要研究对求解各种数学问题的算法设计，分析及其具体实现的一门学科，它是科学计算的理论支持。小到随处可见的计算器大到航空器，都离不开数值分析。
- 数理统计则以数据为唯一研究对象，包括对数据的收集、整理、分析和建模，从而给出数据中存在的某些规律来进行预测或决策。现今就是一个大数据时代，统计学习方法必将会起着越来越大的作用。



# 数值分析的主要内容:

## 1. 数值逼近:

➤ 插值与逼近, 数值微分和数值积分

## 2. 数值代数:

➤ 解线性方程组的直接解法和间接解法, 求矩阵的特征值和特征向量

## 3. 方程求解:

➤ 非线性方程, 常微分方程的数值解法



# 数理统计的主要内容:

1. 基本概念,
  - 如定义抽样方法, 怎样设计随机试验
2. 参数估计
  - 点估计, 区间估计等
3. 假设检验
  - 正态分布均值与方差的假设检验等
4. 统计学习 (扩展)
  - 主要设计统计学习的三要素: 模型, 策略, 算法等概念的理解。



# 数值分析的入门概述:

- 在工程计算和科学试验中总会遇到诸如线性方程组的求解，函数微分，积分的运算求解等常见的数学问题。有些数学问题我们可以用数学方法求出结果的表达式，这样的解就是精确解或者称为解析解，如求一元二次方程的根；但是大多数问题，我们是无法求得解析解的，比如求解满足某个微分方程的函数，只能通过计算机并结合相关的数学理论，设计数值算法来获取具有一定精度的数值解，这就是这门课研究的主要问题。



## 例1：利用计算机计算任意角的正弦值。

- 在不调用相应的库函数 (Matlab, C/C++) 的情况下，计算机是不能直接计算  $\sin(x)$  的，我们也仅仅知道一些特殊角度的函数值，然而由 Taylor 公式（数学理论），我们可得到这样的近似公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

这样仅仅需要在编程时做基本的加减乘除就可以近似计算  $\sin(x)$ 。  
事实上，计算机语言中的数学库函数都可以采用这种方法计算。



例2：给定 $a$ 和 $b$ 的值，计算 $a^2 - b^2$ 的值。

- 算法1：直接计算，需要2次乘法，1次减法
- 算法2：使用公式 $(a + b)(a - b)$ 计算，需要计算1次乘法，1次加法，1次减法。



### 例3：给定x，计算多项式的值

$$0.0625x^4 + 0.425x^3 + 1.215x^2 + 1.912x + 2.1296$$

- 算法1：直接按原型计算，需要10次乘法，4次加法
- 算法2：合并同类项为下式再计算，需要4次乘法，4次加法

$$(((0.0625x + 0.425)x + 1.215)x + 1.912)x + 2.1296$$

- 算法3：也可转化为下述形式计算，需要3次乘法，5次加法

$$[(0.5x + 0.6)^2 + 0.5x + 0.7][(0.5x + 0.6)^2 + 0.8] + 0.9$$





## 例4：求解n行n列的线性方程组的解。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

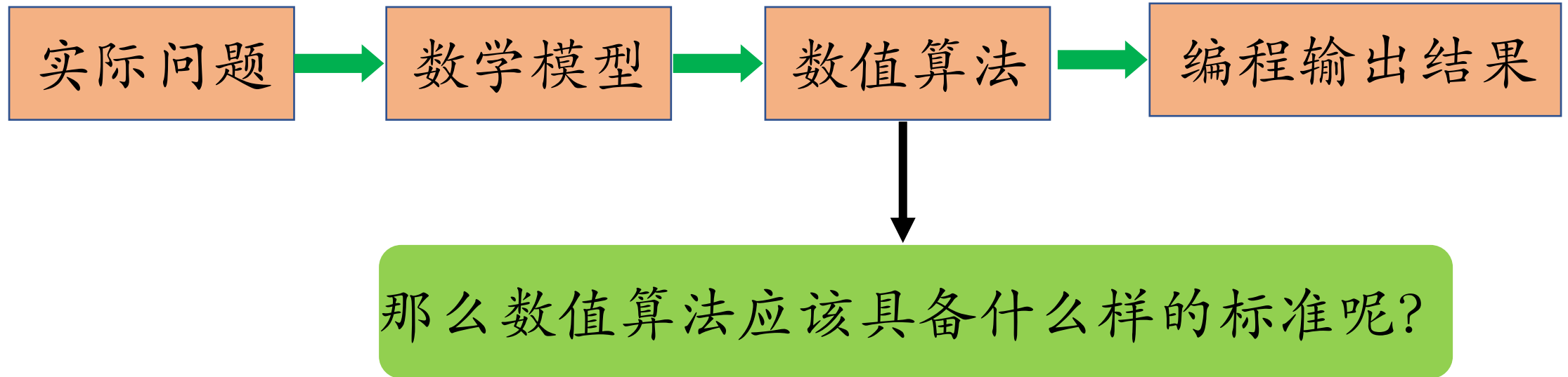
.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

- 算法1：当n=20时，使用Cramer法则，需要  $9.7 * 10^{21}$  次乘除法运算，大约需要1~1.5万年 (20~30亿次/s)
- 算法2：若使用高斯消元法，只需要3060次运算。



- 总的来说，数值分析就是研究科学计算的一门课程。怎样利用计算机所能执行的加、减、乘、除运算来设计完整的解题步骤，就称为算法。数值计算就是研究各种各样的算法的。





## 概括起来大致有四点：

1. 面向计算机，要根据计算机的特点提供切实可行的有效算法。算法只能包括加减乘除和逻辑运算，以及一些数学库函数。
2. 要有可靠的理论分析，能达到指定的精度要求，对近似算法要保证收敛性和数值稳定性，还要对误差进行分析，这些都需要一套相应的数学理论来保证。
3. 要有好的时间复杂性（节省时间）和空间复杂性（节省存储空间），关系到算法能否在计算机上实现。
4. 要通过数值实验验证是有效的，可靠的。