第二章 插值

2.1 插值问题的提出

- 许多实际问题都可以用函数$y=f(x)$来表示某种内在的规律关系，其中大部分都是通过实验或者观测得到的，并且大部分情况下我们只能得到其在某个区间$[a,b]$上的一系列对应点集

$$y_i=f(x_i)(i=0,1,\dots,n)$$

这实际上是一张函数表。

- 另外一些问题虽有解析表达式，但由于计算复杂，使用不方便，通常也造一个函数表，比如平方根表、对数表和三角函数表等。

■ 为了研究函数的变化规律，往往需要求出不在表上的函数值，因此我们希望根据给定的数据，估计出一个简单的连续函数便于我们计算。

■为了研究函数的变化规律，我们希望根据给定的函数表，估计出一个简单的连续函数$P(x)$便于我们计算不在函数表上的函数值，满足

$$P(x_i) = f(x_i)(i = 0, 1, \ldots, n)$$

这样确定的函数就是我们希望得到的插值函数。

➢从几何上看，满足以上条件的插值函数$P(x)$就是通过给定的$\mathrm{n}+1$个点，并且近似未知曲线$f(x)$，如右图所示

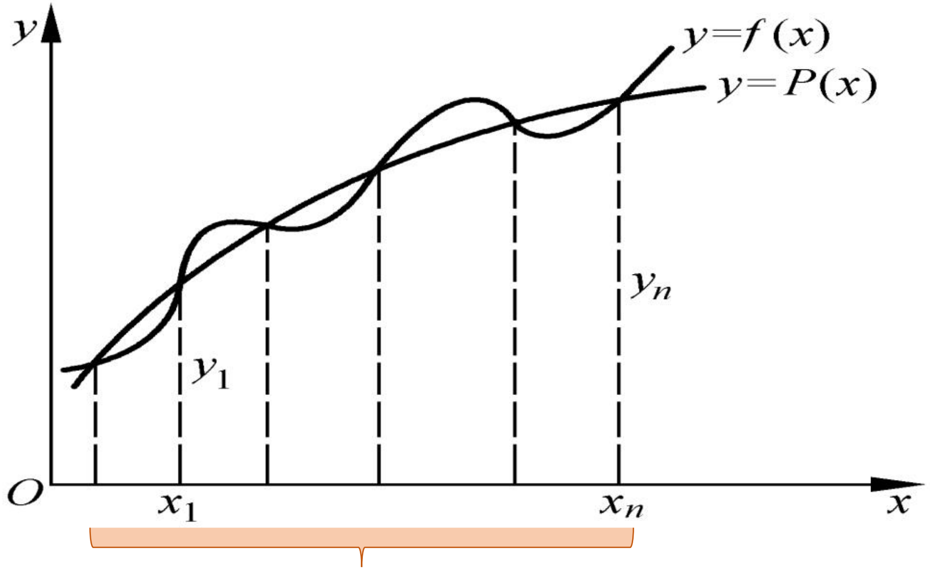


图2-1

2.1.1 插值法的定义

- 设函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上有定义，且在已知点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的值为$y_0, y_1, \ldots, y_n$，若存在简单函数$P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i, i = 0,1, \ldots, n$$

成立，就称$P(x)$是$f(x)$的插值函数。点$x_0, x_1, \ldots, x_n$称为插值节点，包含插值节点的区间称为插值区间，求插值函数$P(x)$的方法称为插值法。

- 若$P(x)$是次数不超过n的代数多项式，即

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

其中a_i是实数，就称$P(x)$为插值多项式，相应的插值法称为多项式插值。这只是多项式的一种表示形式，实际上还有其他的形式，回想中学学过的直线的表示形式。

■若$P(x)$为分段多项式，就是分段插值。若$P(x)$为三角多项式，就称为三角插值。这点体现的是对模型空间的假设来源。

本章的研究内容

■根据插值节点求插值多项式，分段插值函数，样条插值函数，并讨论插值多项式$P(x)$的存在唯一性，收敛性及误差估计等。

1. 满足插值条件的多项式$P(x)$是否存在，是否唯一？
2. 若$P(x)$存在，如何求解或者(构造) $P(x)$？
3. 一旦求出$P(x)$，它对$f(x)$的误差有多大？

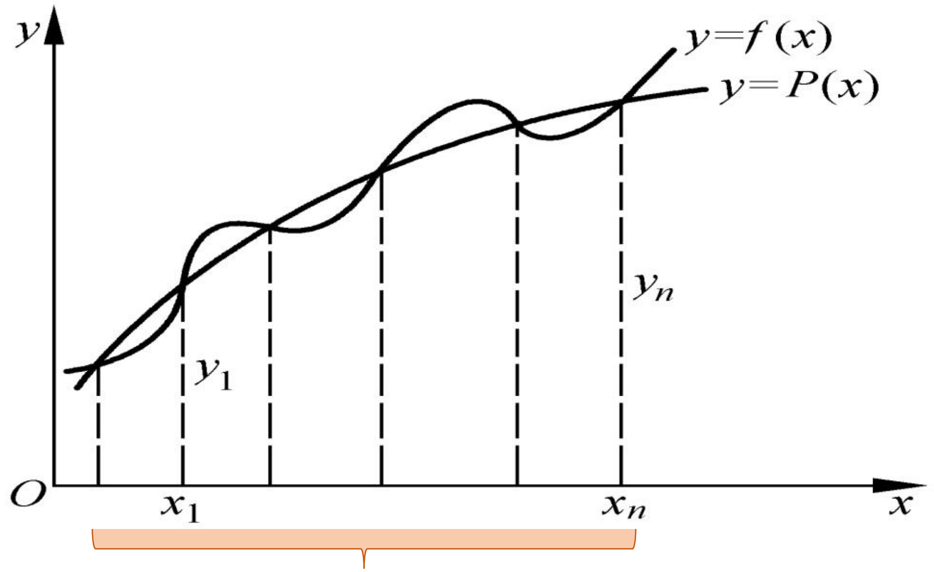


图2-1

2.1.2 插值多项式的存在唯一性定理

■设$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，用$H_n$代表所有次数不超过n的多项式集合，于是$P(x)\in H_n$.所谓差值多项式$P(x)$存在且唯一，就是指在集合$H_n$中有且只有一个$P(x)$满足插值条件$P(x_i)=y_i, i=0,1,\ldots,n$。

➢由插值条件可得

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ \cdots\quad\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

这是一个关于$a_0,a_1,\ldots,a_n$的n+1元线性方程组。

■要证明插值多项式的存在唯一性，只要证明上述方程组存在唯一解，也就是证明方程组的系数行列式的值不为零。

● 系数行列式为：

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

式中$V_n(x_0,x_1,\dots,x_n)$称为Vandermond行列式。
利用行列式的性质可得

$$V_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)$$

由于$i\neq j$时$x_i\neq x_j$，于是Vandermond行列式不等于零。

因此由插值条件决定的n次插值多项式存在唯一解。

定理1：满足条件$P(x_i)=y_i, i=0,1,\ldots,n$的次数不超过n的插值多项式是存在唯一的。

注：

若不将多项式次数限制为n，则插值多项式不唯一。

例如 $P(x)=P_n(x)+p(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 也是一个插值多项式，其中 $\boldsymbol{p(x)}$ 可以是任意多项式。

待定系数法：

例1 当$x=1,-1,2$时，$f(x)=0,-3,4$，求$f(x)$的插值多项式$P(x)$。

解：设$P(x)=ax^2+bx+c$，则由插值条件可知

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=-3 \\ 4a+2b+c=4 \end{cases}$$

消元法解线性方程组可知$P(x)=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$

例2 已知函数$f(x)$的如下数据，求$f(x)$的插值多项式$P(x)$。

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	1
$f'(x)$	0	1	

解：由于已知函数$f(x)$的三个插值节点上的函数值和2个插值节点上的导数值，故可以构造一个不超过4次的插值多项式

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 含有5个待定系数

并且$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$\begin{cases} P(0)=f(0) \\ P(1)=f(1) \\ P(2)=f(2) \\ P'(0)=f'(0) \\ P'(1)=f'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4=1 \\ a_1=0 \\ a_1+2a_2+3a_3+4a_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0, a_1=0, \\ a_2=\frac{9}{4}, a_3=-\frac{3}{2}, \\ a_4=\frac{1}{4} \end{cases}$$

解法二：

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	1
$f'(x)$	0	1	

观察先函数值和导数值为零的点。

由插值条件知$P(0) = \mathrm{f}(0) = 0, \mathrm{P}'(0) = \mathrm{f}'(0) = 0$

可知0是函数$f(x)$的二重零点，故可直接设

$P(x) = x^2(ax^2 + bx + c)$ 这样含有三个待定系数

代入另外的三个插值条件，同样可得$P(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$

思考： 使用待定系数法求解插值多项式的优缺点是什么？

优点： 基函数简单, $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$

缺点： 需要求解线性方程组， 当线性方程组过大的时候， 手工求解过于繁琐。

那么， 有没有一种方法可以直接写出插值多项式呢？

2.2 拉格朗日插值

- 2.2.1 线性插值与抛物插值
- 2.2.2 拉格朗日插值多项式
- 2.2.3 插值余项与误差估计

■难点：Lagrange插值基函数及其构造与截断误差分析。

2.2.1 线性插值与抛物插值

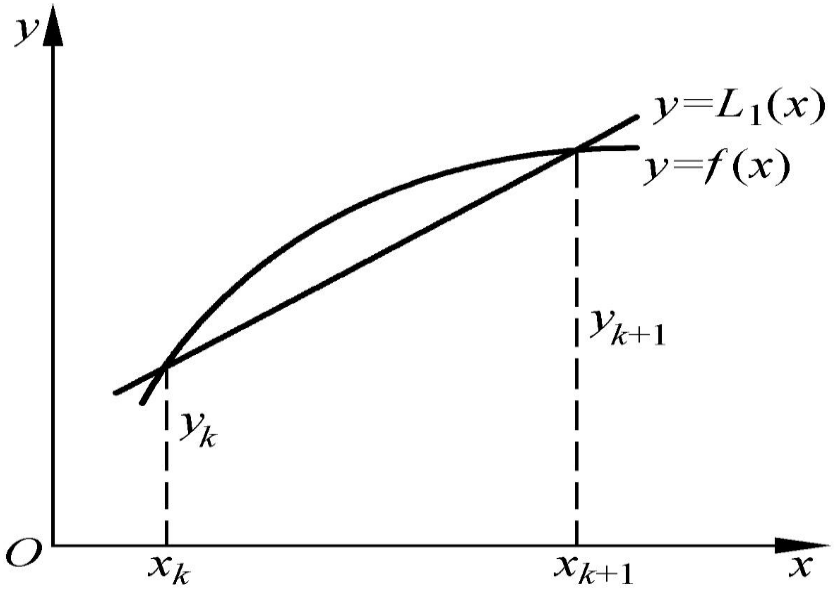
问题：给定区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 及端点函数值 $y_k = f(x_k), y_{k+1} = f(x_{k+1})$

要求求线性差值多项式 $L_1(x)$，使它满足

$$L_1(x_k) = y_k, \quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

其几何其几何意义就是通过两点 $(x_k, y_k), (x_k, y_{k+1})$ 的直线，

如右图所示。



- 因为$L_1(x)$是一条线段，因此

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \qquad \text{（点斜式）}$$

（2.1）

$$L_1(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \qquad \text{（两点式）}$$

由两点式可以看出，$L_1(x)$是由下面两个线性函数的组合得到的

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \qquad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

其系数分别为y_k, y_{k+1}，也即$L_1(x)$可以写成

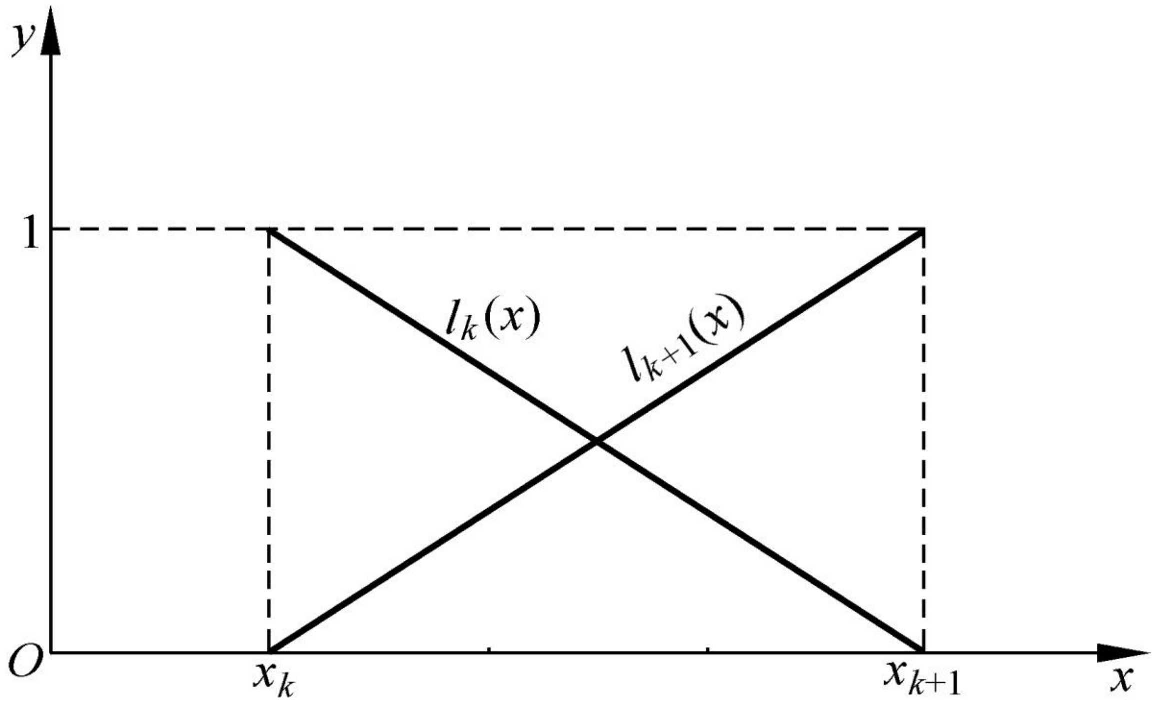
$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

显然，$l_k(x), l_{k+1}(x)$也是差值多项式，他们过如下的两点

$$l_k(x_k) = 1, \qquad l_k(x_{k+1}) = 0,$$

$$l_{k+1}(x_k) = 0, \quad l_{k+1}(x_{k+1}) = 1,$$

我们称$l_k(x)$和$l_{k+1}(x)$为线性插值基函数，他们的图示如下：



假定插值节点为x_{k-1}, x_k, x_{k+1} 求二次插值多项式，使它满足

$$L_2(x_j) = y_j \quad (j = k-1, k, k+1)$$

几何上$L_2(x)$是通过三点（$x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$的抛物线。采用类似两点式求直线方法来求$L_2(x)$的表达式，

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

也就是说让$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$，$l_{k+1}(x)$这三项均满足过某一个已知点，其他两个点上的值都为零。

- 此时这些函数$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$是二次函数，且在插值节点上应该满足以下条件

$$l_{k-1}(x_{k-1}) = 1, \quad l_{k-1}(x_k) = 0, \quad l_{k-1}(x_{k+1}) = 0;$$
$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_{k-1}) = 0, \quad l_k(x_{k+1}) = 0;$$
$$l_{k+1}(x_{k+1}) = 1, \quad l_{k+1}(x_{k-1}) = 0, \quad l_{k+1}(x_k) = 0.$$

■那么怎么求这三项$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$，$l_{k+1}(x)$呢？以求$l_{k-1}(x)$为例，由上述的插值条件，我们知道它应该有两个零点x_k和x_{k+1}，因此$l_{k-1}(x)$可表示为

$$l_{k-1}(x) = A(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

■其中A为待定系数，可由插值条件$l_{k-1}(x_{k-1})=1$算出

$$A=\frac{1}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}.$$

于是

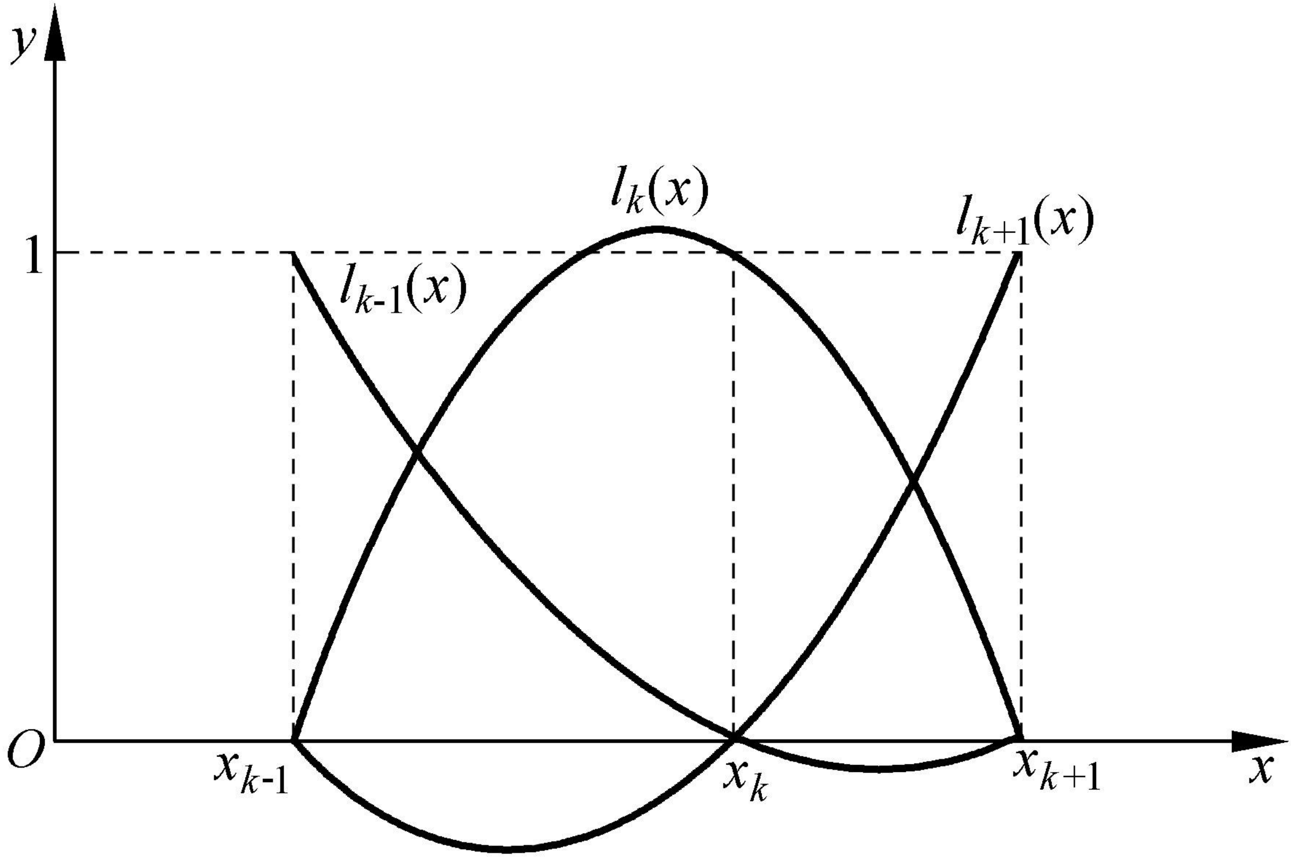
$$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}.$$

同理可得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})},$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

- 这三个函数$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$，$l_{k+1}(x)$在插值区间中 $[x_{k-1},x_{k+1}]$上的图形如下所示。



■将$l_{k-1}(x)$，$l_k(x)$，$l_{k+1}(x)$代入

$$L_2(x)=y_{k-1}l_{k-1}(x)+y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

便可得到满足插值条件的抛物型的插值多项式

$$L_2(x)=y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$$

$$+y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

2.2.2 拉格朗日插值多项式

■接下来，我们讨论如何构造通过n+1个节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$的n次插值多项式$L_n(x)$。

➢根据插值的定义$L_n(x)$应满足

$$L_n(x_i) = y_i, i = 0,1,\ldots,n$$

为构造$L_n(x)$，我们先定义n次插值基函数。

定义1 若n次多项式$l_j(x)(j=0,1,\dots,n)$在$n+1$个节点$x_0<x_1<\cdots<x_n$上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}\quad (j,k=0,1,\cdots,n)$$

就称这$n+1$个n次多项式$l_0(x),l_1(x),\dots,l_n(x)$为插值节点$x_0,x_1,\dots,x_n$上的$n$次插值基函数，其表达式为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

■由$l_k(x)$的定义，知n次拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)\ ,\quad (j=0,1,\cdots,n) \qquad （2.9）$$

前面讲述了$n=1$和$n=2$的情形，也就是线性插值和抛物插值。

■若引入记号 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

■于是公式（2.9）可改写成

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \tag{2.11}$$

注意: n次插值多项式$L_n(x)$通常是次数为n的多项式，特殊情况下次数可能小于n。

2.2.3 插值余项与误差估计

定理2 设$f^{(n)}(x)$在$[a,b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，插值节点为$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，$L_n(x)$是满足插值条件的多项式，则对任何$x \in [a,b]$，其插值余项（截断误差）为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (2.14)$$

这里$\xi \in (a,b)$且依赖于x。

证明 由给定条件知$R_n(x)$在节点$x_k(k=0,1,\ldots,n)$上为零，即$R_n(x_k)=0(k=0,1,\ldots,n)$，于是得

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

其中$K(x)$是与x有关的待定函数.

现把x看成$[a,b]$上的一个固定点，做函数

$$\phi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

根据插值条件及余项定义，可知$\phi(t)$在点$x_0,x_1,\ldots,x_n$及x处均为零，因此$\phi(t)$在$[a,b]$上有n+2个零点。

根据罗尔定理，$\phi'(t)$在$[a,b]$内至少有n+1个零点。对$\phi'(t)$
再应用罗尔定理，可知$\phi''(t)$在$[a,b]$内至少n个零点。

依此类推，$\phi^{(n+1)}(t)$在(a,b)内至少有一个零点，记为$\xi\in(a,b)$，使得

$$\phi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\,K(x)=0$$

于是，

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad \xi\in(a,b)，且依赖x$$

将其代入$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)$，就得到余项表达式

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

注意：

1. 余项表达式只有在$f(x)$的高阶导数存在时才能应用；
2. ξ在(a,b)内的具体位置通常不可能给出，如果可以求出$f(x)$的n+1阶导数在开区间(a,b)内的最大值，也即

$$\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$$

那么插值多项式$L_n(x)$逼近$f(x)$的截断误差限是

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

例1 已知 $\sin 0.32 = 0.314567$，$\sin 0.34 = 0.333487$，$\sin 0.36 = 0.352274$，用线性插值及抛物插值计算 $\sin 0.3367$ 的值并估计截断误差。

解 由题意，取

$$x_0 = 0.32, \quad y_0 = 0.314567,$$

$$x_1 = 0.34, \quad y_1 = 0.333487,$$

$$x_2 = 0.36, \quad y_2 = 0.352274.$$

用线性插值计算，取 $x_0 = 0.32, x_1 = 0.34$，由公式（2.1）

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$ （点斜式）

$$L_1(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$ （两点式）

选择点斜式计算得，

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367)$$

$$= y + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.3367 - x_0)$$

$$= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02} \times 0.0167$$

$$= 0.330365$$

由（2.16），其截断误差

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,$$

其中

$$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)| = \max_{x_0 \le x \le x_1} |-\sin x| = \sin x_1 \le 0.3335,$$

于是

$$\begin{aligned} |R_1(0.3367)| &= |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)| \\ &\le \frac{1}{2} \times 0.3335 \times 0.0167 \times 0.0033 \\ &\le 0.92 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

用抛物插值计算，由公式（2.5）得

$$\sin 0.3367 \approx L_2(0.3367)$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 0.314567 \times \frac{0.7689 \times 10^{-4}}{0.0008} + 0.333487 \times \frac{3.89 \times 10^{-4}}{0.0004}$$

$$+ 0.352274 \times \frac{-0.5511 \times 10^{-4}}{0.0008}$$

$$= 0.330374.$$

这个结果与6位有效数字的正弦函数表完全一样，说明查表时用二次插值精度已相当高了

由截断误差限公式

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中

$$M_3 = \max_{x_0 \le x \le x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.828$$

于是

$$|R_2(0.3367)| \le \frac{1}{6} \times 0.828 \times 0.0167 \times 0.033 \times 0.0233$$

$$< 0.178 \times 10^{-6}.$$

[补充资料-01] 罗尔(Rolle)定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间(a, b)内具有导数，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a) = (b)$，那么在(a, b) 内至少有一点ξ（$a< \xi<b$），使得函数$f(x)$在该点的导数等于零：$f'(\xi) = 0$