第三节　估计量的评选标准

一、问题的提出

二、无偏性

三、有效性

四、相合性

五、小结

一、问题的提出

从前一节可以看到, 对于同一个参数, 用不同的估计方法求出的估计量可能不相同.而且, 很明显, 原则上任何统计量都可以作为未知参数的估计量.

问题

(1)对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2)评价估计量的标准是什么?

下面介绍几个常用标准.

二、无偏性

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数，(Θ 是 θ 的取值范围)

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)\ (k \geq 1)$ 存在，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，试证明不论总体服从什么分布，k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

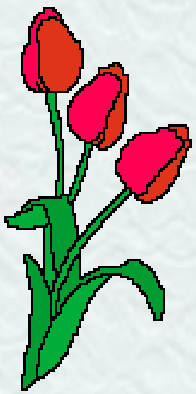
证 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 同分布，

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k$，$i = 1, 2, \cdots, n.$

即 $E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \mu_k.$

故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特别的:



不论总体 X 服从什么分布,

只要它的数学期望存在,

$\overline{X}$ 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1 = E(X)$ 的无偏估计量.

例2 对于均值 μ, 方差 $\sigma^2>0$ 都存在的总体, 若 $\mu,\ \sigma^2$ 均为未知, 则 σ^2 的估计量 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是有偏的(即不是无偏估计).

证 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=A_2-\overline{X}^2,$

因为 $E(A_2)=\mu_2=\sigma^2+\mu^2,$

又因为 $E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2,$

所以 $E(\hat{\sigma}^2)=E(A_2-\overline{X}^2)=E(A_2)-E(\overline{X}^2)$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$ 所以 $\hat{\sigma}^2$ 是有偏的.

若以 $\frac{n}{n-1}$ 乘 $\hat{\sigma}^2$,所得到的估计量就是无偏的.

(这种方法称为**无偏化**).

$$E\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right) = \frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2.$$

因为 $$\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

即 S^2 是 σ^2 的无偏估计,故通常取 S^2 作 σ^2 的估计量.

例3 设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布, 概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$, 又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 试证 $\overline{X}$ 和 $nZ=n[\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证明 因为 $E(\overline{X})=E(X)=\theta$,

所以 $\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

而 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从参数为 $\dfrac{\theta}{n}$ 的指数分布,

概率密度 $f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{nx}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故知 $E(Z)=\dfrac{\theta}{n}$, $E(nZ)=\theta$,

所以 nZ 也是 θ 的无偏估计量.

由上例可知,一个参数可以有不同的无偏估计量.

三、有效性

比较参数θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$，如果在样本容量n相同的情况下，$\hat{\theta}_1$的观察值在真值θ的附近较$\hat{\theta}_2$更密集，则认为$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度，所以无偏估计以方差小者为好.

设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$都是$\theta$的无偏估计量，若有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

例4　(续例3)

试证当$n>1$时，θ的无偏估计量$\overline{X}$较nZ有效.

证明　由于 $D(X)=\theta^2$，　故有 $D(\overline{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$，

又因为 $D(Z)=\dfrac{\theta^2}{n^2}$，　故有 $D(nZ)=\theta^2$，

当$n>1$时，　$D(nZ)>D(\overline{X})$，

故θ的无偏估计量$\overline{X}$较nZ有效.

四、相合性

若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时，$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$依概率收敛于$\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量.

例如 由第六章第二节知，样本$k(k\geq 1)$阶矩是总体X的k阶矩$\mu_k=E(X^k)$的相合估计量，进而若待估参数$\theta=g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，其中$g$为连续函数，则$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}=g(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\cdots,\hat{\mu}_n)=g(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是$\theta$的相合估计量.

五、小结

估计量的评选的三个标准 $\begin{cases} \text{无偏性} \\ \text{有效性} \\ \text{相合性} \end{cases}$

相合性是对估计量的一个基本要求, 不具备相合性的估计量是不予以考虑的.

由最大似然估计法得到的估计量, 在一定条件下也具有相合性. 估计量的相合性只有当样本容量相当大时,才能显示出优越性, 这在实际中往往难以做到,因此,在工程中往往使用无偏性和有效性这两个标准.

第四节　区间估计

一、区间估计的基本概念

二、典型例题

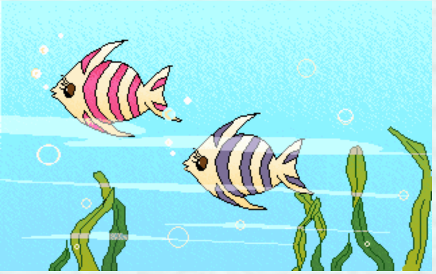
三、小结

引言

前面，我们讨论了参数点估计．它是用样本算得的一个值去估计未知参数．但是，点估计值仅仅是未知参数的一个近似值，它没有反映出这个近似值的误差范围．区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷．

譬如，在估计湖中鱼数的问题中，若我们根据一个实际样本，得到鱼数*N*的极大似然估计为1000条.

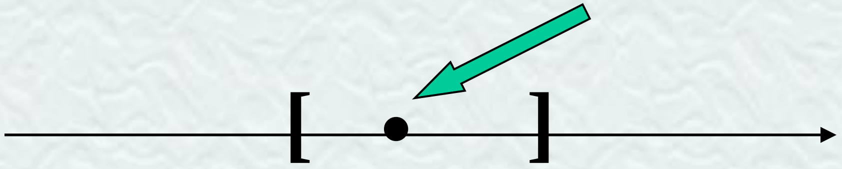
实际上，*N*的真值可能大于1000条，也可能小于1000条.

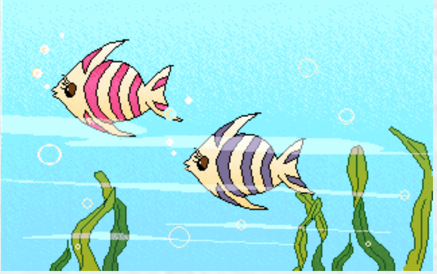


若我们能给出一个区间，在此区间内我们合理地相信 *N* 的真值位于其中. 这样对鱼数的估计就更有把握.

也就是说，我们希望确定一个区间，使我们能以比较高的可靠程度相信它包含真参数值.

湖中鱼数的真值





这里所说的“可靠程度”是用概率来度量的，称为置信概率，置信度或置信水平.

习惯上把置信水平记作$1-\alpha$，这里α是一个很小的正数.

一、区间估计的基本概念

1. 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ, 对于给定值 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信度.

关于定义的说明

被估计的参数θ虽然未知，但它是一个常数，没有随机性，而区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$是随机的.

因此定义中下表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

的本质是：

随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含着参数$\theta$的真值，而不能说参数$\theta$以$1-\alpha$的概率落入随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

还可以描述为:

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是n)

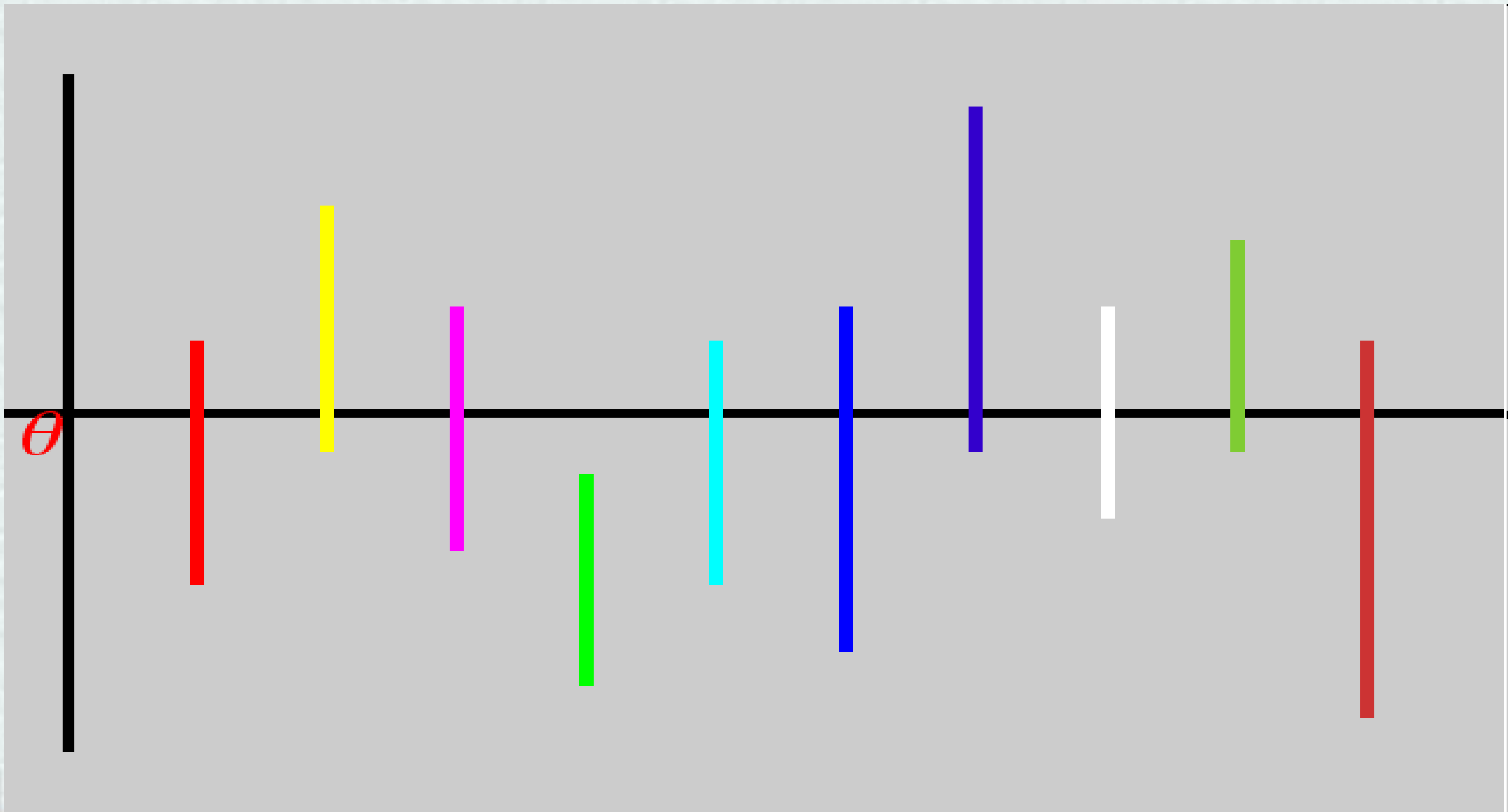
每个样本值确定一个区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

每个这样的区间或包含θ的真值或不包含θ的真值,

则在这样多的区间中,

包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$,不包含的约占$100\alpha\%$.

例如　若 $\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,
则得到的 1000 个区间中不包含 θ 真值的约为10个.



2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数:

$$Z = Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 θ, 并且 Z 的分布已知且不依赖于任何未知参数 (包括 θ).

(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使 $P\{a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

样本容量 n 固定, 置信水平 $1-\alpha$ 增大, 置信区间长度增大, 可信程度增大, 区间估计精度降低.

置信水平 $1-\alpha$ 固定, 样本容量 n 增大, 置信区间长度减小, 可信程度不变, 区间估计精度提高.

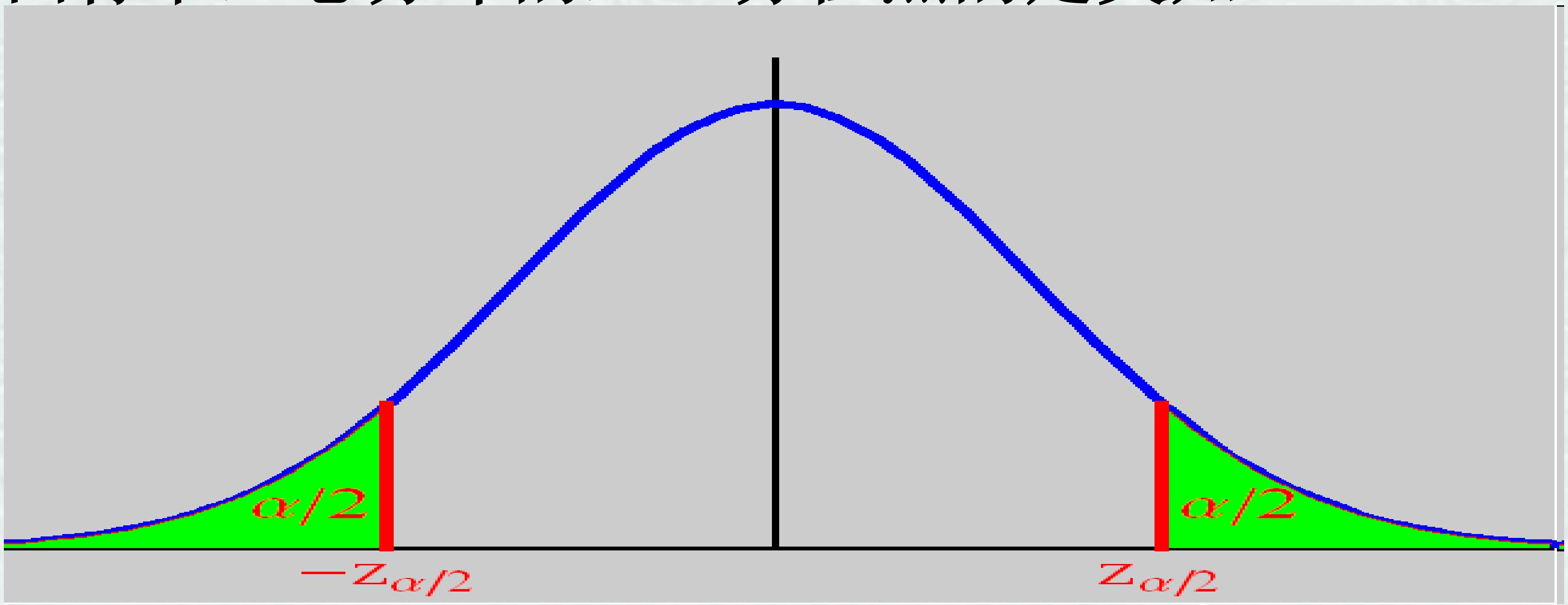
例1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 为已知，μ 为未知，求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计,

$$且\ U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 是不依赖于任何未知参数的,

由标准正态分布的上α分位点的定义知



$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

于是得μ的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$.

其置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$.

注意：置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是不唯一的.

如果在例1中取 $n=16,\ \sigma=1,\ \alpha=0.05,$

查表可得 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96,$

得一个置信水平为0.95的置信区间 $\left(\bar{X}\pm\frac{1}{\sqrt{16}}\times1.96\right).$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\bar{x}=5.20,$

则置信区间为 (5.20 ± 0.49)，即 $(4.71,\ 5.69).$

在例1中如果给定 $\alpha = 0.05$,

则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$,

即 $P\{\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\} = 0.95$,

故 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为0.95的置信区间.

其置信区间的长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025} = 3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04}+z_{0.01}) = 4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. **置信区间短表示估计的精度高.**

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取a和b关于原点对称时,能使置信区间长度最小.

三、小结

点估计不能反映估计的精度, 故而本节引入了区间估计.

置信区间是一个随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, 它覆盖未知参数具有预先给定的概率(置信水平), 即对于任意的$\theta \in \Theta$, 有 $P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geq 1-\alpha$.

求置信区间的一般步骤(分三步).

第五节　正态总体均值与方差的区间估计

一、单个总体的情况

二、两个总体的情况

三、小结

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$的情况

设给定置信水平为$1-\alpha$, 并设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本, $\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差.

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2为已知, 由上节例1可知:

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$.

例1 包糖机某日开工包了12包糖, 称得质量(单位:克)分别为506, 500, 495, 488, 504, 486, 505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布, 且标准差为 $\sigma = 10$, 试求糖包的平均质量 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间 (分别取 $\alpha = 0.10$).

解 $\sigma = 10, \quad n = 12,$

计算得 $\bar{x} = 502.92,$

当 $\alpha = 0.10$ 时, $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.95,$

查表得 $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645,$

附表2-1

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=502.92-\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=498.17,$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=502.92+\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=507.67,$$

即μ的置信度为90%的置信区间为

(498.17，507.67).

(2) σ^2为未知,

μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

推导过程如下:

由于区间$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$,不能

直接使用此区间,

但因为S^2是σ^2的无偏估计,可用$S=\sqrt{S^2}$替换σ,

又根据第六章定理三知 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

则 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例2 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\alpha = 0.05,\quad n-1=15,$

附表3-1

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(15) = 2.1315,$

计算得 $\bar{x} = 503.75,\quad s = 6.2022,$

得μ的置信度为95%的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right) \text{ 即 } (500.4,\quad 507.1).$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间，这个估计的可信程度为95%.

若依此区间内任一值作为μ的近似值,

其误差不大于 $\dfrac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$(克).

这个误差的可信度为95%.

2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要, 只介绍 μ 未知的情况.

方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

推导过程如下:

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

根据第六章第二节定理二知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

则 $$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得:

标准差 σ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

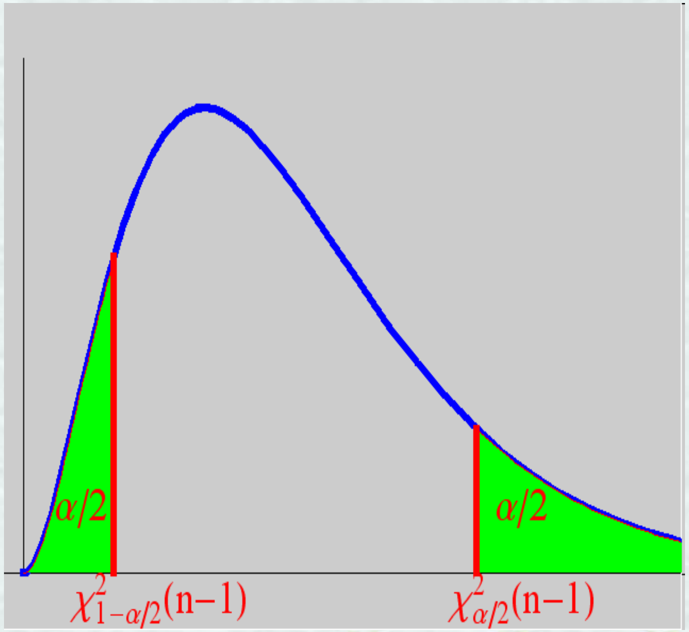
$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

注意: 在密度函数不对称时,

如 χ^2 分布和 F 分布,

习惯上仍取对称的分位点来

确定置信区间(如图).



例3 (续例1) 求例1中总体方差σ^2和标准差σ的置信度为0.95的置信区间.

解 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025,\quad 1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,\quad n-1=11,$

查$\chi^2(n-1)$分布表可知:

$\chi^2_{0.025}(11)=21.920,\quad \chi^2_{0.975}(11)=3.816,\quad s=12.35,$

方差σ^2的置信区间 $(78.97,\ 453.64)$;

标准差σ的置信区间 $(8.87,\ 21.30)$.

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 $\mu_1,\ \mu_2$ 为未知

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

第七节　单侧置信区间

一、问题的引入

二、基本概念

三、典型例题

四、小结

一、问题的引入

在以上各节的讨论中,对于未知参数θ,我们给出两个统计量$\underline{\theta}, \overline{\theta}$,得到$\theta$的双侧置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

但在某些实际问题中,例如,对于设备、元件的寿命来说,平均寿命长是我们希望的,我们关心的是平均寿命θ的“下限”;与之相反,在考虑产品的废品率p时,我们常关心参数p的“上限”,这就引出了单侧置信区间的概念.

二、基本概念

1. 单侧置信区间的定义

对于给定值 $\alpha\,(0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

又如果统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，对于任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$,

则称随机区间$(-\infty,\overline{\theta})$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\overline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是μ, 方差是σ^2 (均为未知),

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本, 由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1).$

又根据 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

有 $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

三、典型例题

例1 设从一批灯泡中, 随机地取5只作寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1050, 1100, 1120, 1250, 1280, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $1-\alpha=0.95,\quad n=5,\quad \bar{x}=1160,\quad s^2=9950,$

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318,$$

μ 的置信水平为0.95的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065.$$

四、小结

正态总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(-\infty, \boxed{\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}\right), \quad \left(\boxed{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}, +\infty\right),$$

单侧置信上限 $\overline{\mu}$　　单侧置信下限 $\underline{\mu}$

正态总体方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(0, \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right).$$

单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}$