2.4 Hermite插值

- 2.4.1 Hermite插值多项式的构造
- 2.4.2 一个重要特列

■内容：Hermite插值法及基函数。

■重点：Hermite插值基函数及插值多项式的表达式 。

■难点：利用基函数的方法构造Hermite插值多项式的思想方法和过程。

2.4.1 Hermite插值多项式的构造

有些实际的插值问题不但要求在节点上函数值相等，而且还要求对应的导数值也相等，甚至要求高阶导数也相等。满足这种要求的插值多项式就是埃尔米特插值多项式。

这里，我们以函数值与导数值个数相等这种特殊情况为例。

设在节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上，$f(x_j) = y_j, f'(x_j) = m_j$，$(j = 0,1,\cdots,n)$, 要求一插值多项式$H(x)$，使其满足条件

$$H(x_j) = y_j, \quad H'(x_j) = m_j, \quad j = 0,1,\cdots,n \quad (5.1)$$

这里共有$2n + 2$个插值条件，可惟一确定一个次数不超过$2n + 1$的多项式$H_{2n+1}(x) = H(x)$，其形式为

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

我们可采用求拉格朗日插值多项式的基函数方法来分析。

将满足条件（5.1）的插值多项式$H_{2n+1}(x) = H(x)$写成用插值基函数表示的形式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n}[y_j\alpha_j(x) + m_j\beta_j(x)] \quad (5.2)$$

那么，$2n + 2$个插值基函数$\alpha_j(x)$及$\beta_j(x)$ $(j = 0,1,\cdots,n)$应该满足如下条件

$$\begin{cases} \alpha_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \qquad \alpha_j'(x_k) = 0; \\ \beta_j(x_k) = 0, \qquad \beta_j'(x_k) = \delta_{jk} \quad (j,k = 0,1,\cdots,n) \end{cases} \quad (5.3)$$

下面的问题就是如何求出这些基函数$\alpha_j(x)$及 $\beta_j(x)$ $(j=0,1,\cdots,n)$了。我们可以利用拉格朗日插值基函数$l_j(x)$进行构造。

令，$\alpha_j(x)=(ax+b)l_j^2(x)$,

由条件（5.3）得

$$\alpha_j(x_j)=(ax_j+b)l_j^2(x_j)=1\,,$$
$$\alpha_j'(x_j)=l_j(x_j)[al_j(x_j)+2(ax_j+b)l_j'(x_j)]=0,$$

整理得:

$$\begin{cases} ax_j+b=1; \\ a+2l_j'(x_j)=0. \end{cases}$$

也即

$$a=-2l_j'(x_j),\quad b=1+2x_jl_j'(x_j).$$

由于

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)},$$

两边取对数，再求导得

$$l_j'(x_j) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k},$$

于是

$$\alpha_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j) \cdot \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right) \cdot l_j^2(x)$$

同理，可得

$$\beta_j(x) = (x - x_j) \cdot l_j^2(x)$$

由此我们可以写出Hermite插值多项式。

证明：满足Hermite插值条件的多项式是唯一的。

反证法。假设$H_{2n+1}(x)$及$\bar{H}_{2n+1}(x)$均满足插值条件（5.1）（导数值和函数值都相等）

于是函数$\phi(x) = H_{2n+1}(x) - \bar{H}_{2n+1}(x)$在每个节点$x_k$上的值及导数值均为零，即$x_k$为二重根。这样，$\phi(x)$有$2n + 2$重根，但$\phi(x)$是不高于$2n + 1$次的多项式，因此$\phi(x) \equiv 0$。唯一性成立。

Hermite插值余项:

仿照拉格朗日插值余项的证明方法，可知:

若$f(x)$在(a,b)内的$2n+2$阶导数存在，则Hermite插值多项式的余项为

$$R(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^{2}(x) \quad （5.6）$$

其中$\xi\in(a,b)$且与x有关。

2.4.2 一个典型特列

当$n=1$时，我们取插值节点为x_k及x_{k+1}，可以确定一个3次的Hermite插值多项式，满足

$$\begin{cases} H_3(x_k)=y_k, \quad H_3(x_{k+1})=y_{k+1} \\ H_3'(x_k)=m_k, \quad H_3'(x_{k+1})=m_{k+1} \end{cases} \qquad (5.7)$$

相应的插值基函数为$\alpha_k(x),\alpha_{k+1}(x),\beta_k(x),\beta_{k+1}(x)$,

它们满足条件：

根据前面推导的公式

$$\alpha_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j) \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right) \cdot l_j^2(x), \quad \beta_j(x) = (x - x_j) \cdot l_j^2(x)$$

便可得到

$$\begin{cases} \alpha_k(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_k(x) = (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\ \beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \end{cases}$$

于是满足条件（5.7）的插值多项式是

$$H_3(x) = y_k\alpha_k(x) + y_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x) \quad （5.10）$$

余项$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$，由（5.6）式得

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}).$$

$$\boxed{R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \quad （5.6）}$$

从上述特例中，我们应该知道以下事实:

$$\alpha_k(x_k)=1,\quad \alpha_k(x_{k+1})=0,$$

$$\alpha_k'(x_k)=\alpha_k'(x_{k+1})=0,$$

$$\alpha_{k+1}(x_k)=0,\quad \alpha_{k+1}(x_{k+1})=1,$$

$$\alpha_{k+1}'(x_k)=\alpha_{k+1}'(x_{k+1})=0;$$

$$\beta_k(x_k)=\beta_k(x_{k+1})=0,$$

$$\beta_k'(x_k)=1,\quad \beta_k'(x_{k+1})=0,$$

$$\beta_{k+1}(x_k)=\beta_{k+1}(x_{k+1})=0,$$

$$\beta_{k+1}'(x_k)=0,\quad \beta_{k+1}'(x_{k+1})=1.$$

如果题目没要求用Hermite
插值基函数的形式，来解答，
那还有其他的解法吗?

另一个典型特例：

求满足$P(x_j)=f(x_j)\ (j=0,1,2)$及$P'(x_1)=f'(x_1)$的插值多项式及其余项表达式。

解 由给定的4个条件，可确定次数不超过3的插值多项式，由于多项式通过点$(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$,

故它的形式为

$$P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

常数A可由最后的导数条件确定。

通过计算可得:

$$A = \frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}.$$

为了求出余项$R(x) = f(x) - P(x)$的表达式，可设

$R(x) = k(x)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$，其中$k(x)$为待定系数。

构造$\phi(t) = f(t) - P(t) - k(x)(t - x_0)(t - x_1)^2(t - x_2)$

显然，$\phi(x_j) = 0\ (j = 0,1,2)$, 且$\phi'(x_1) = 0, \phi(x) = 0,$

故$\phi(t)$在(a, b)内有5个零点。反复应用罗尔定理，知$\phi^{(4)}(t)$在(a, b)内至少有一个零点ξ，因此

$$\phi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!\,k(x) = 0$$

于是，

$$k(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

进而余项表达式为

$$R(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) \quad （5.11）$$

式中ξ位于x_0,x_1,x_2和x所界定的范围内。

2.5 分段低次插值

2.5.1 高次插值的病态性质

2.5.2 分段线性插值

内容： Runge现象，分段低次插值法。

重点：分段低次插值法的基本思想 。

难点：分段3次Hermite插值。

2.5.1 高次插值的病态性质

根据区间$[a,b]$上给出的节点做出的插值多项式$L_n(x)$，在次数n增加时，逼近$f(x)$的精度不一定增加。

这是因为对任意的插值节点，当$n \to \infty$时，$L_n(x)$不一定收敛到$f(x)$。

考虑函数$f(x)=1/(1+x^2)$，它在[-5,5]上的各阶导数均存在。以[-5,5]上的$n+1$个等距节点

$$x_k=-5+10\frac{k}{n}\,,\quad k=0,1,\cdots,n$$

所构造的拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{1+x_j^2}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}.$$

令$x_{n-1/2}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)$，则$x_{n-1/2}=5-\frac{5}{n}$,

可根据拉格朗日插值多项式计算不同插值个数时的函数值。

表2-5列出了$n = 2,4,\cdots,20$时$L_n(x_{n-1/2})$的计算结果及在$x_{n-1/2}$上的误差$R(x_{n-1/2})$.

表2－5

n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	$R(x_{n-1/2})$
2	0.137931	0.759615	−0.621684
4	0.066390	−0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	−0.553416
8	0.049651	−0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	−1.531662
12	0.045440	−2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	−5.288409
16	0.043530	−10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	−20.080751
20	0.042440	−39.952449	39.994889

可见，随 n 的增加，$R(x_{n-1/2})$ 的绝对值几乎成倍增加。这说明当 $n\to\infty$ 时 L_n 在 $[-5,5]$ 上是不收敛的。

龙格证明了，存在一个常数 $c\approx 3.63$，使得当 $|x|\le c$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x)=f(x)$，而当 $|x|>c$ 时 $\{L_n(x)\}$ 发散。

取$n=10$, 根据计算画出$y=1/(1+x^2)$及$y=L_{10}(x)$在[-5,5]上的图形，见图2-5。

从图上看到，在$x=\pm 5$附近, $L_{10}(x)$与$f(x)$偏离很远，这说明高次插值多项式的近似效果并不好。

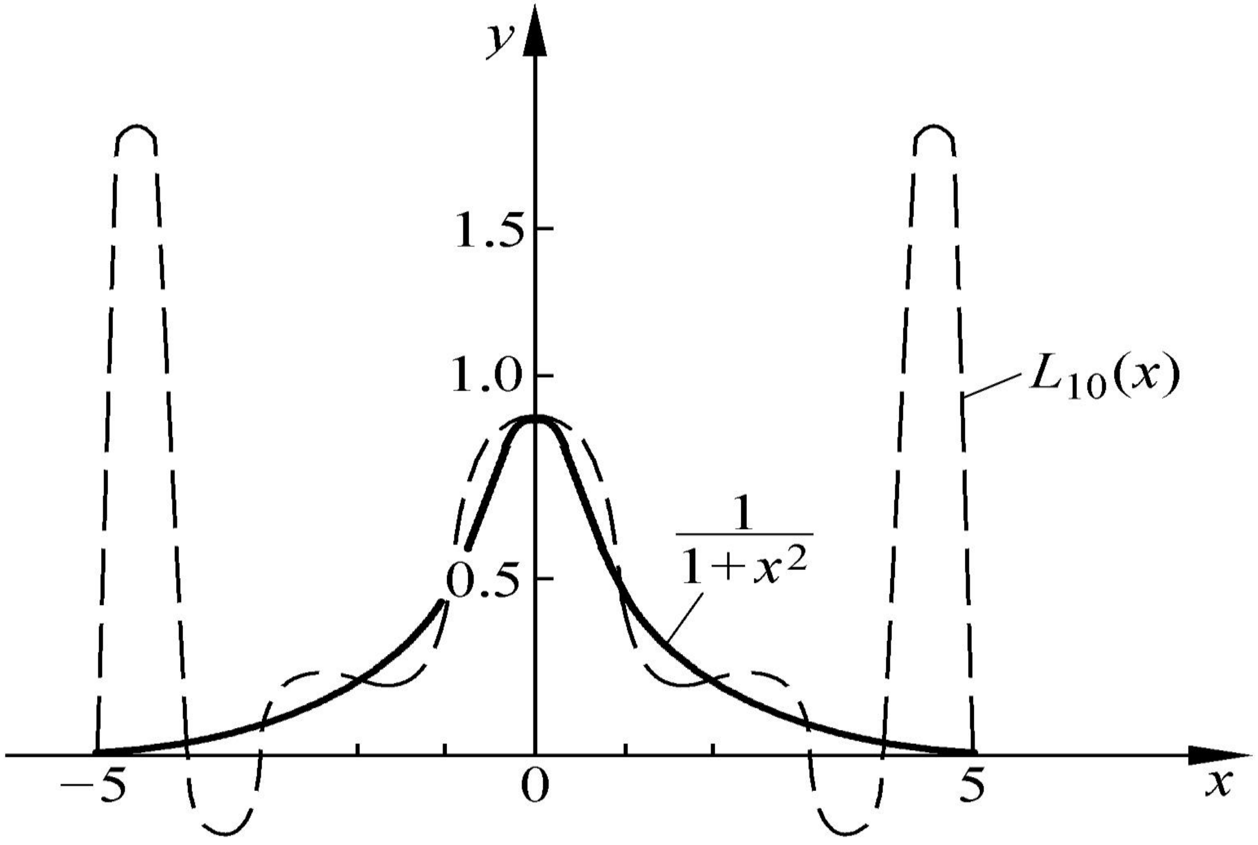


图2−5

2.5.2 分段线性插值

由于升高插值多项式的阶数有时并不能达到提高精度的效果，所以实际中常采用分段插值的思想。

分段插值的基本思想是将插值区间划分为若干个小区间，然后在每个小区间上做满足一定条件的低阶插值。

所谓分段线性插值就是通过插值点用折线段连接起来逼近 $f(x)$.

设已知节点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$上的函数值$f_0, f_1, \cdots, f_n$，记$h_k = x_{k+1} - x_k, h = \max\limits_k h_k$，求一折线函数$I_h(x)$，满足：

1. $I_h(x) \in C[a, b]$,
2. $I_h(x_k) = f_k \quad (k = 0,1,\cdots,n)$,
3. $I_h(x)$在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上是线性函数。

则称$I_h(x)$为分段线性插值函数。

由定义可知$I_h(x)$在每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$上可表示为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f_{k+1}\quad (x_k\le x\le x_{k+1})\quad（6.1）$$

若用插值基函数表示，则在整个区间[a,b]上$I_h(x)$为

$$I_h(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x)\qquad (6.2)$$

其中基函数$l_j(x)$满足条件

$$l_j(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j(j=0\text{略去})\\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}(j=n\text{略去})\\ 0, & x\in[a,b],x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}\quad (6.3)$$

利用线性插值的余项公式，可得分段线性插值的误差估计为

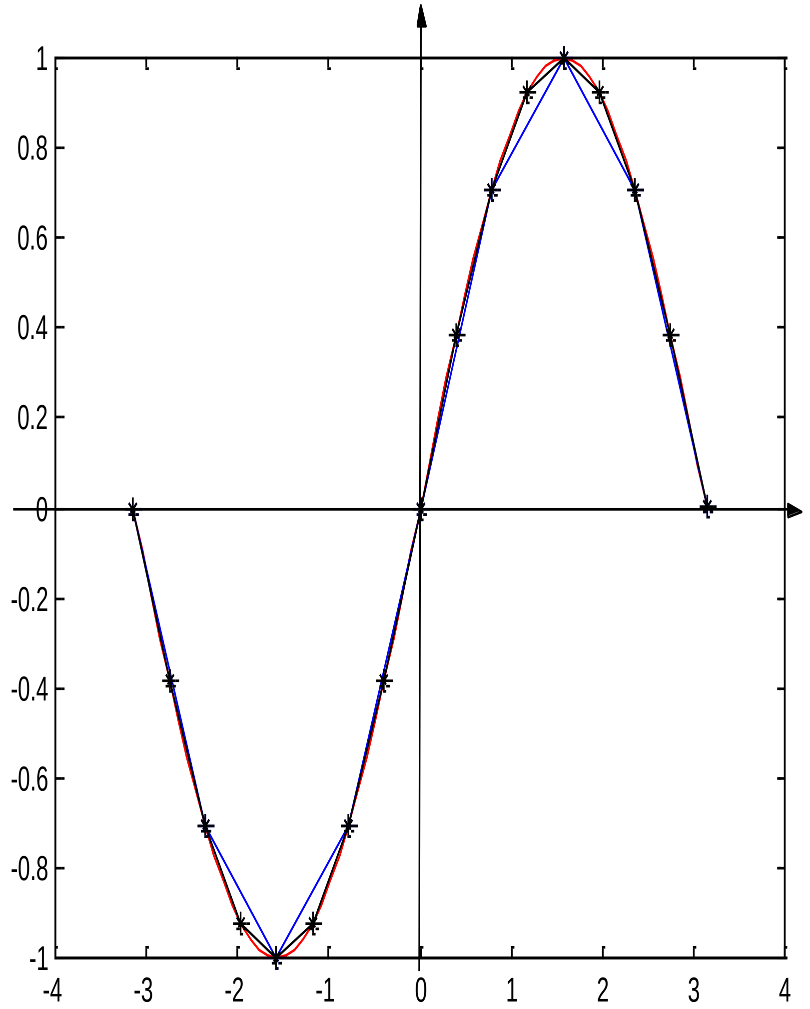
$$\max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f(x) - I_h(x)| \le \frac{M_2}{2} \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |(x - x_k)(x - x_{k+1})|$$

或者

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - I_h(x)| \le \frac{M_2}{8} h^2，其中 M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

分段线性插值也称折线插值,如右图。

不难看出，曲线的光滑性较差，在节点处有尖点，这是分段低次插值的缺点所在。



2.6 三次样条插值

2.6.1 三次样条函数

2.6.2 样条插值函数的建立

2.6.3 误差界与收敛性

内容：样条函数插值法的基本概念，边界条件。

重点：样条函数插值法的基本概念，边界条件的确定。

难点：三次样条函数插值函数的构造方法。

2.6.1 三次样条函数

- 定义4 若函数$S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，其中$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$是给定节点，则称$S(x)$是节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的三次样条函数。

若在节点x_j上给定函数值$y_j = f(x_j)(j = 0,1,\cdots,n)$，并成立

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n) \qquad (6.1)$$

则称$S(x)$为三次样条插值函数。

由于$S(x)$在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上有4个待定系数，总共有n个小区间，所以共有4n个待定参数。

又由于$S(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续，所以在节点$x_j(j = 1,2,\cdots,n-1)$处应满足连续性条件：

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0),$$
$$S'\left(x_j - 0\right) = S'\left(x_j + 0\right),$$
$$S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0)$$

这些共有3n-3个条件，再加上 $S(x)$ 本身还要满足的n+1个插值条件，共有4n-2个条件，因此还需要2个条件才能确定$S(x)$。

通常可在区间[a,b]端点$a = x_0, b = x_n$上各加一个条件，称为边界条件。常见的边界条件有以下三种：

1. 已知两端的一阶导数值，即

$$S'(x_0) = f_0', \quad S'(x_n) = f' \qquad (6.3)$$

2. 已知两端的二阶导数，即

$$S''(x_0) = f_0'', \quad S''(x_n) = f_n'' \qquad (6.4)$$

特殊情形为$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$，此时称为自然边界条件。

3. 当$f(x)$是以x_n-x_0为周期的周期函数时，则要求$S(x)$也是周期函数。此时的边界条件是：

$$\begin{aligned} S(x_0+0) &= S(x_n-0), \\ S'(x_0+0) &= S'(x_n-0), \\ S''(x_0+0) &= S''(x_n-0) \end{aligned} \qquad (6.6)$$

此时插值条件（6.1）中$y_0 = y_n$。

这样确定的样条函数$S(x)$称为周期样条函数。

2.6.2 样条插值函数的建立

下面利用$S(x)$的二阶导数值$S''(x_j) = M_j (j = 0,1,\cdots,n)$表示$S(x)$。

由于$S(x)$在区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，故$S''(x)$在$[x_j, x_{j+1}]$是线性函数，可表示为

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j}$$

对 $S''(x)$积分两次，并利用$S(x_j) = y_j$及$S(x_{j+1}) = y_{j+1}$。

得三次样条表达式

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x-x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j} \quad (j = 0,1,\cdots,n-1) \tag{6.8}$$

这里$M_j (j = 0,1,\cdots,n)$是未知的。

为了确定M_j，对$S(x)$求导得

$$S'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j} + M_{j+1} \frac{(x-x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} + \frac{M_{j+1}-M_j}{6} h_j$$

由此可得

$$S'(x_j+0) = -\frac{h_j}{3} M_j - \frac{h_j}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}.$$

类似上面的操作，可得$S(x)$在区间$[x_{j\text{-}1}, x_j]$上的表达式，从而得到

$$S'(x_j-0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3} M_j + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}},$$

利用$S'(x_j+0) = S'(x_j-0)$可得

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad (j = 1,2,\cdots,n-1) \qquad （6.10）$$

其中，

$$\mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j},\quad \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j},\quad j=0,1,\cdots,n$$

$$d_j=6\frac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{h_{j-1}+h_j}=6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]$$

对第一种边界条件(6.3)，可导出两个方程

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-f_0') \\ M_{n-1}+2M_n=\dfrac{6}{h_{n-1}}(f_n'-f[x_{n-1},x_n]) \end{cases} \tag{6.12}$$

如果令，

$$\lambda_0 = 1, \quad d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0'),$$

$$\mu_n = 1, \quad d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f_n' - f[x_{n-1}, x_n])$$

那么（6.10）和（6.12）可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \qquad (6.13)$$

因此，只需要插值条件外加端点处的导数值，就可以计算出结果。

对第二种边界条件（6.4），直接得端点方程

$M_0 = f_0''$ ，$M_n = f_n''$ （6.14）

如果令，$\lambda_0 = \mu_n = 0, d_0 = 2f_0'', d_n = 2f_n''$，则（6.10）和（6.14）也可以写成（6.13）的矩阵形式。

同样对于第三种边界条件(7.5)，可得

$$M_0 = M_n\ ,\quad \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \quad （6.15）$$

其中，

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1}+h_0}\ ,\quad \mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_0},$$

$$d_n = 6\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]}{h_{n-1}+h_0},$$

（6.10）和（6.15）也可写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad （6.16）$$

（6.13）和（6.16）是关于$S(x)$在节点处的二阶导数$M_j(j = 0,1,\cdots,n)$的三对角方程组，M_j在力学上解释为细梁在x_j截面处的弯矩，称为$S(x)$的矩，方程组（6.13）和（6.16）称为三弯矩方程。

（6.13）和（6.16）的系数矩阵为严格对角占优矩阵，有惟一解,求解方法可利用求线性方程组的追赶法，将解得结果代入（6.8）的表达式即可。

例5 设 $f(x)$ 为定义在 $[27.7,30]$ 上的函数，在节点 $x_i\,(i=0,1,2,3)$ 上的值如下：

$$f(x_0)=f(27.7)=4.1,\quad f(x_1)=f(28)=4.3,$$
$$f(x_2)=f(29)=4.1,\quad f(x_3)=f(30)=3.0.$$

试求三次样条函数 $S(x)$，使它满足边界条件

$S'(27.7)=3.0$ ， $S'(30)=-4.0.$

解 由定义知

$$h_0 = 0.30, \quad h_1 = h_2 = 1, \quad \mu_1 = \frac{3}{13}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = 1,$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \frac{10}{13}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0') = -46.666,$$

$$d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = -4.00002,$$

$$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -2.70000,$$

$$d_3 = \frac{6}{h_2}(f_3' - f[x_2, x_3]) = -17.4.$$

由此得矩阵形式的方程组（6.13）为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{3}{13} & 2 & \frac{10}{13} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 - 17.4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46.666 \\ -4.00002 \\ -2.7000 \\ -17.4000 \end{bmatrix}.$$

求解得

$$M_0 = -23.531, \quad M_1 = 0.395, \quad M_2 = 0.830, \quad M_3 = -9.115.$$

代入（6.8）式得

$$S(x)=\begin{cases}13.07278(x-28)^3-14.84322(x-28)+0.21944\\ \quad\times(x-27.7)^3+14.31358(x-27.7),\\ 0.06583(29-x)^3+4.23417(29-x)+0.13833\\ \quad\times(x-28)^3+3.96167(x-28),\\ 0.13833(30-x)^3+3.96167(30-x)-1.51917\\ \quad\times(x-29)^3+4.51917(x-29),\end{cases}$$

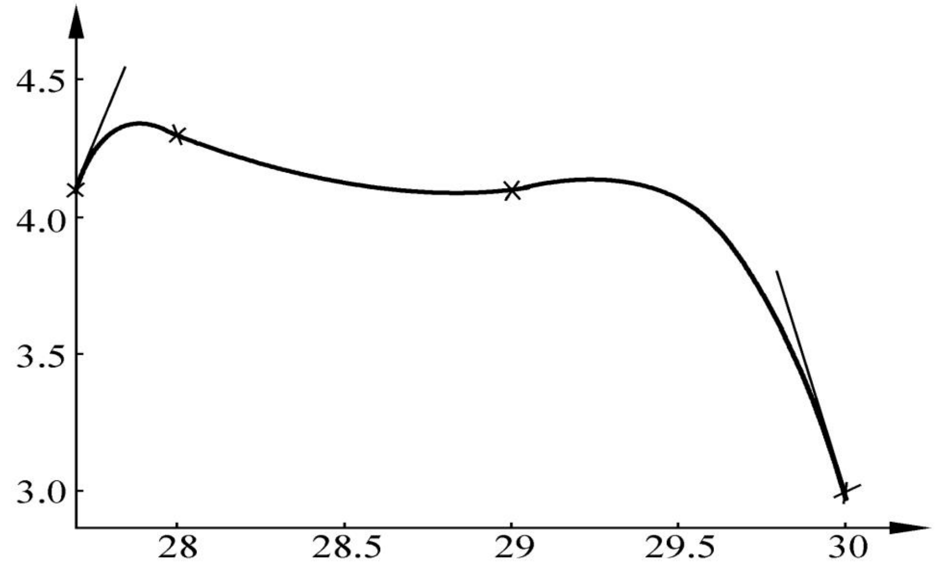


图2-6

例4 给定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$-5\le x\le 5$，节点

$$x_k=-5+k\ (k=0,1,\cdots,10)$$

用三次样条插值求 $S_{10}(x)$.

解 取

$$S_{10}(x_k)=f(x_k)\ \ (k=0,1,\cdots,10),$$

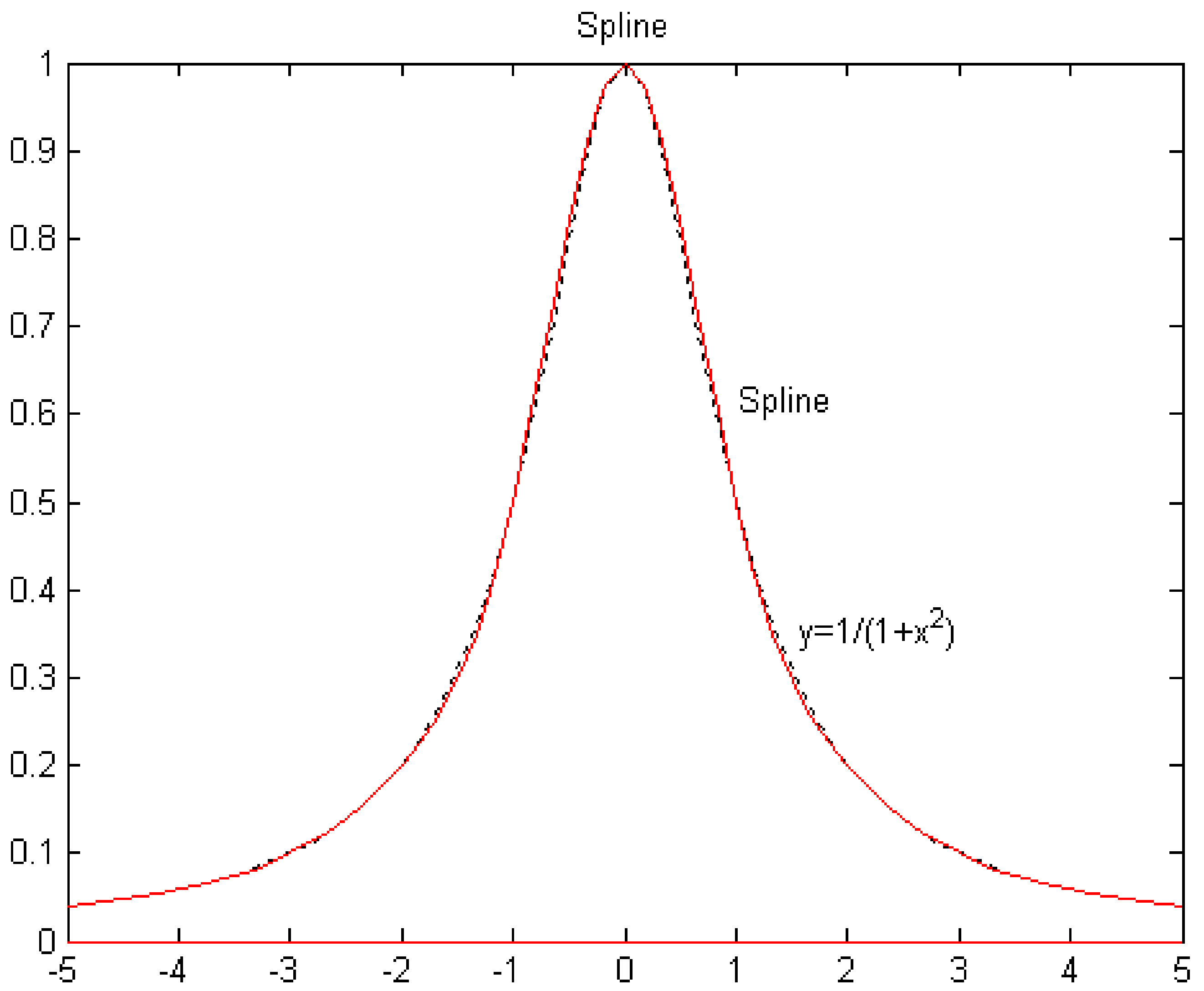
$$S_{10}'(-5)=f'(-5),\ S_{10}'(5)=f'(5)$$

直接上机计算可求出 $S_{10}(x)$在表2-6所列各点的值。

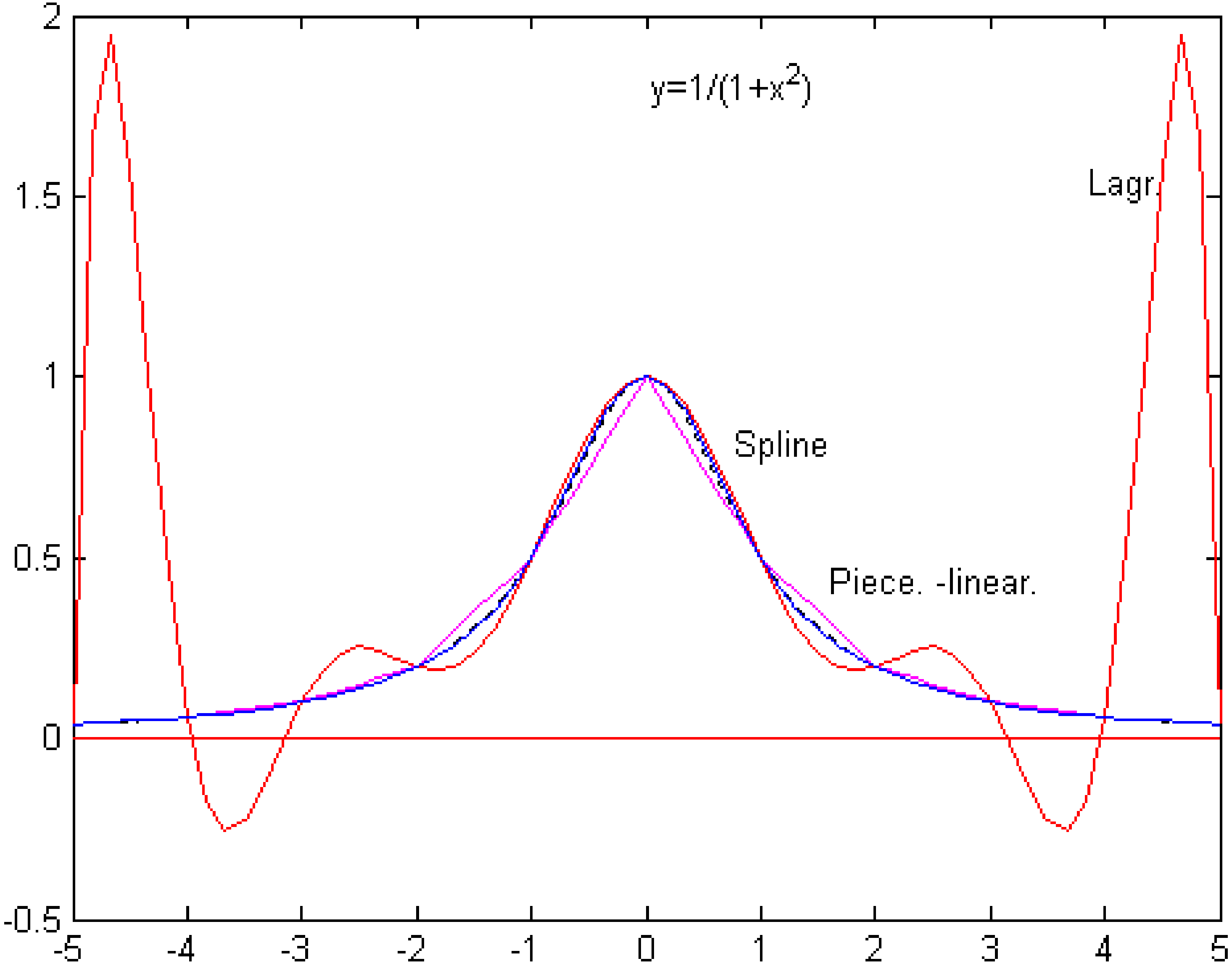
表2-6

x	$\frac{1}{1+x^2}$	$S_{10}(x)$	$L_{10}(x)$	x	$\frac{1}{1+x^2}$	$S_{10}(x)$	$L_{10}(x)$
–5.0	0.03846	0.03846	0.03846	–2.3	0.15898	0.16115	0.24145
–4.8	0.04160	0.03758	1.80438	–2.0	0.20000	0.20000	0.20000
–4.5	0.04706	0.04248	1.57872	–1.8	0.23585	0.23154	0.18878
–4.3	0.05131	0.04842	0.88808	–1.5	0.30769	0.29744	0.23535
–4.0	0.05882	0.05882	0.05882	–1.3	0.37175	0.36133	0.31650
–3.8	0.06477	0.06556	–0.20130	–1.0	0.50000	0.50000	0.50000
–3.5	0.07547	0.07606	–0.22620	–0.8	0.60976	0.62420	0.64316
–3.3	0.08410	0.08426	–0.10832	–0.5	0.80000	0.82051	0.84340
–3.0	0.10000	0.10000	0.10000	–0.3	0.91743	0.92754	0.94090
–2.8	0.11312	0.11366	0.19837	0	1.0000	1.0000	1.0000
–2.5	0.13793	0.13971	0.25376				

右图是
用Matlab
完成的
样条插值：



拉格朗日、
分段线性
与三次样条
插值对比：



2.6.3 误差界与收敛性

定理4 设 $f(x)\in C^4[a,b]$, $S(x)$为满足第一种或第二种边界条件（6.3）或（6.4）的三次样条函数，令

$$h=\max_{0\le i\le n-1} h_i,\ h_i=x_{i+1}-x_i\ (i=0,1,\cdots,n-1)$$

则有估计式

$$\max_{a\le x\le b}\left|f^{(k)}(x)-S^{(k)}(x)\right|\le C_k\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^{4-k},\ \boxed{k=0,1,2}\qquad（6.17）$$

其中 $C_0=\dfrac{5}{384},C_1=\dfrac{1}{24},C_2=\dfrac{3}{8}.$

这个定理不但给出了三次样条插值函数$S(x)$的误差估计。

还说明了当$h\to 0$时，$S(x)$及其一阶导数$S'(x)$和二阶导数$S''(x)$均分别一致收敛于$f(x)$，$f'(x)$及$f''(x)$.