§7.1 方程求根与二分法

内容：非线性方程求根的基本概念及原理；二分法的原理及使用。

重点：非线性方程求根的基本原理；二分法的原理。

难点：含根区间的搜索。

7.1.1 引言

本章主要讨论单变量非线性方程

$$f(x)=0 \qquad (1.1)$$

的求根问题，这里 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\in C[a,b]$.

其中一类特殊的问题是多项式方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq 0) \qquad (1.2)$$

的求根问题，其中系数 $a_i\ (i=0,1,\cdots,n)$为实数。

方程 $f(x)=0$ 的根 x^*，又称为函数 $f(x)$ 的零点。

若 $f(x)$ 可分解为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$$

其中 m 为正整数，且 $g(x^*)\neq 0$. 则

当 $m=1$ 时，称 x^* 为单根。

若 $m>1$ 称 x^* 为 m 重根，或 x^* 为 $f(x)$ 的 m 重零点。

若 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重零点，且 $g(x)$ 充分光滑，则

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\quad f^{(m)}(x^*)\neq 0.$$

当 $f(x)$为代数多项式（1.2）时，由代数基本定理，n次方程在复数域有且只有 n个根（含复根，m重根为m个根）。

$n=1,2$时方程的根是大家熟悉的，$n=3,4$时虽有求根公式但比较复杂，可在数学手册中查到，但已不适合于数值计算，而 $n\geq 5$时就不能用公式表示方程的根。

通常对 $n\geq 3$的多项式方程求根与一般连续函数方程（1.1）一样都可采用迭代法。

事实上，非线性方程的精确解一般都难以求得，只能求其近似解，而这又需分两步走:

（1）根的分离。即找出一些小区间，使得每个区间只含方程的一个根，称为含根区间。

通常可通过逐次搜索法求得方程的含根区间。即从某 x_0 出发，选取步长 Δx，若有

$$f(x)\cdot f(x+\Delta x)<0$$

其中 $x=x_0+i\cdot\Delta x$,$(i=0,1,\cdots,N_0)$. 则由连续函数性质可知方程在 $(x, x+\Delta x)$ 内必有一根。

（2）近似根的精确化。用数值的方法，使求得的近似根精确化，直到具有足够的精度。

例1 用搜索确定下述方程在 $[0.1, 4]$ 内的含根区间。

$$f(x) = 1 + 5.2x - 1/\cos\sqrt{0.68x} = 0$$

解 取 $a = 0.1, b = 4.0, \Delta x = 0.1.$

于是得含根区间为 $(3.3, 3.4)$.

7.1.2 二分法

考察有根区间$[a,b]$，取中点$x_0=(a+b)/2$将它分为两半，假设中点x_0不是$f(x)$的零点，然后对根搜索。

检查$f(x_0)$与$f(a)$是否同号，

如果同号，说明所求的根$x*$在x_0的右侧，这时令$a_1=x_0,b_1=b$;否则$x*$必在x_0的左侧，这时令$a_1=a,b_1=x_0$. 见图7-1。

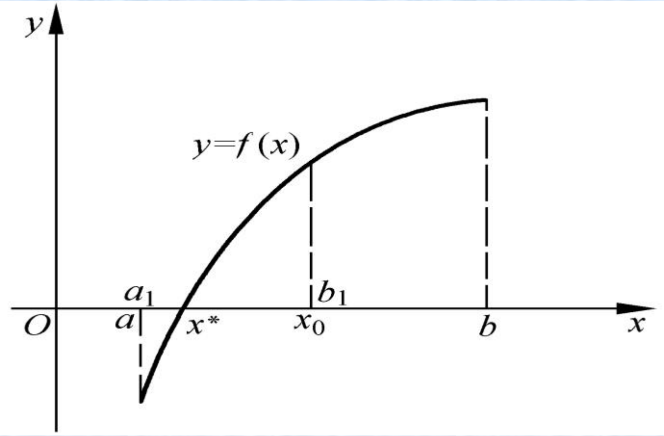

图7-1

不管出现哪一种情况，新的有根区间$[a_1, b_1]$的长度仅为$[a,b]$的一半。

对压缩了的有根区间$[a_1, b_1]$，又可施行同样的手续，即用中点 $x_1 = (a_1 + b_1)/2$将区间 $[a_1, b_1]$再分为两半，通过根的搜索判定所求的根在 x_1的哪一侧，从而又确定一个新的有根区间$[a_2, b_2]$，其长度是$[a_1, b_1]$的一半。

如此反复二分下去，即可得出一系列有根区间

$$[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots$$

其中每个区间都是前一个区间的一半。

不难看出区间$[a_k, b_k]$的长度为

$$b_k - a_k = (b-a)/2^k$$

当$k \to \infty$时趋于零。

就是说，如果二分过程无限地继续下去，这些区间最终必收缩于一点 x^*，该点显然就是所求的根。

每次二分后，设取有根区间$[a_k, b_k]$的中点作为根的近似，则在二分过程中可以获得一个近似根的序列

$$x_0, x_1, x_2 \cdots, x_k, \cdots, \quad x_k = (a_k + b_k)/2$$

该序列必以根 x^*为极限。

由于

$$\left|x^* - x_k\right| \le (b_k - a_k)/2 = (b-a)/2^{k+1} \qquad （1.3）$$

只要二分足够多次（即k充分大），便有$\left|x^* - x_k\right| < \varepsilon$, 这里$\varepsilon$为预定的精度。

例2 求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在区间$[1.0,1.5]$内的一个实实根，要求准确到小数点后第2位。

解 这里$a = 1.0, b = 1.5$，而 $f(a) < 0,\ f(b) > 0.$

按误差估计（1.3）式，设置预定精度为$\varepsilon = 0.005$, 则

$$\left|x^*-x_k\right| \le (b_k-a_k)/2 = (b-a)/2^{k+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{k+1}} < 0.005$$

只需 $k=6$，即二分6次，便能达到预定的精度。

计算结果如表7-1。

表7–1

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$符号
0	1.0	1.5	1.25	−
1	1.25		1.375	+
2		1.375	1.3125	−
3	1.3125		1.3438	+
4		1.3438	1.3281	+
5		1.3281	1.3203	−
6	0.3203		1.3242	−

7.2.1 不动点迭代

将方程（1.1）改写成等价的形式

$$x = \phi(x) \tag{2.1}$$

若 x^* 满足 $f(x^*) = 0$，则 $x^* = \phi(x^*)$；反之亦然，称 x^* 为函数 $\phi(x)$ 的一个不动点。

求 $f(x)$ 的零点就等价于求 $\phi(x)$ 的不动点。

选择一个初始近似值 x_0，将它代入（2.1）式右端，即可求得

$$x_1 = \phi(x_0).$$

如上反复迭代，得到

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad (k = 0,1,\cdots) \qquad （2.2）$$

其中$\phi(x)$称为迭代函数。

如果对任何$x_0 \in [a,b]$，由（2.2）式得到的序列$\{x_k\}$有极限

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

则称迭代方程（2.2）收敛，且$x^* = \phi(x^*)$为$\phi(x)$的不动点，故称（2.2）为不动点迭代法。

上述迭代法是一种逐次逼近法，其基本思想是将隐式方程$x=\phi(x)$归结为一组显式的公式 $x_{k+1}=\phi(x_k)$。就是说，迭代过程实质上是一个逐步显示化的过程。

方程 $x=\phi(x)$ 的求根问题在 xOy平面上就是要确定曲线 $y=\phi(x)$ 与直线 $y=x$的交点 P^*.

上述不动点迭代法就是使初值 x_0不断逼近该交点。其几何意义如图7-2所示。

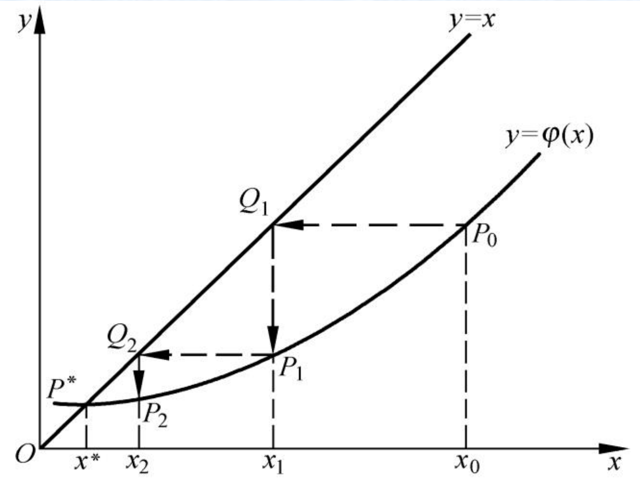

图7-2

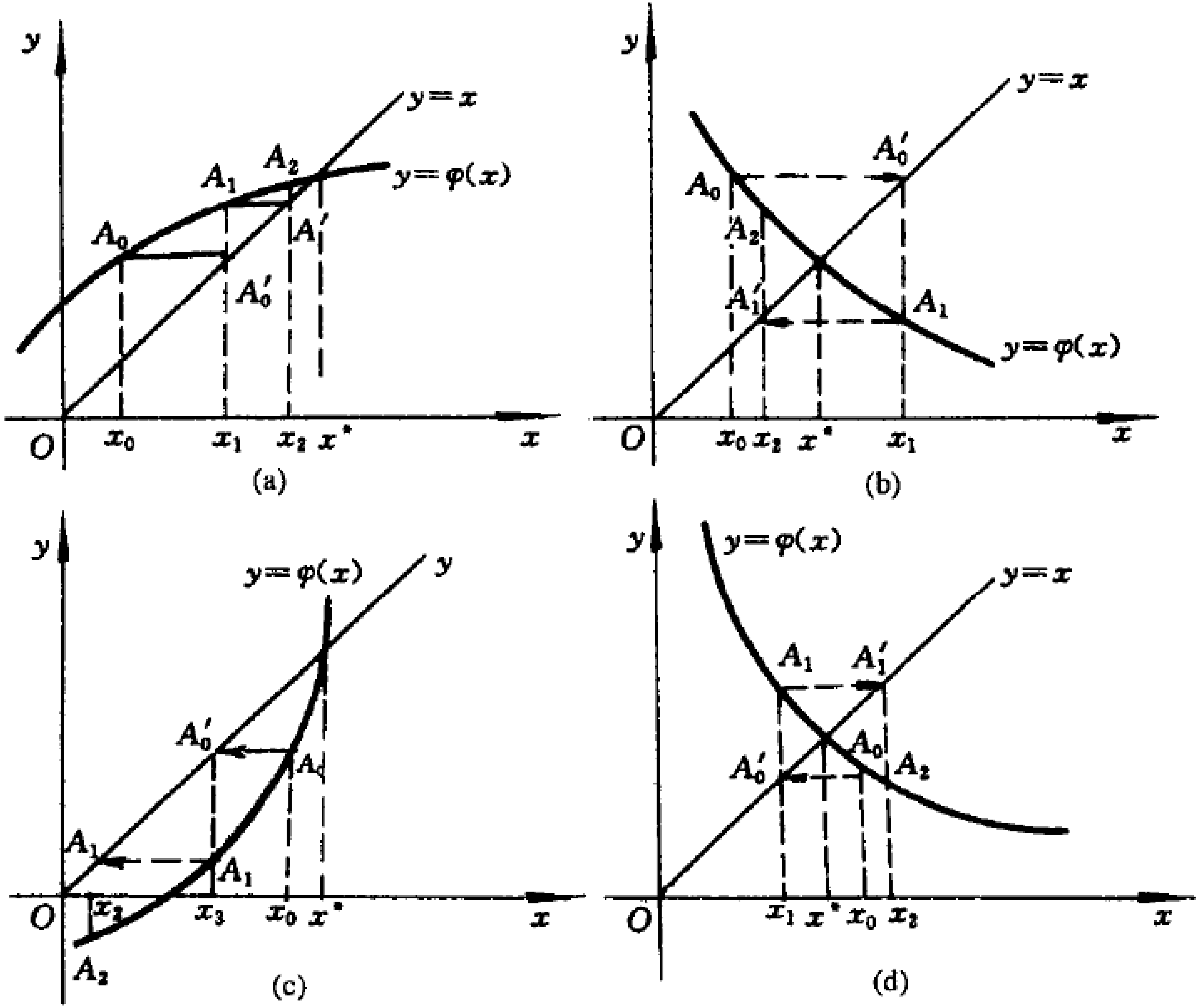

图 5-2　迭代法的几何意义示图

例3 求方程

$$f(x)=x^3-x-1=0 \tag{2.3}$$

在 $x_0=1.5$ 附近的根 x^*.

解　设将方程（2.3）改写成：$x=\sqrt[3]{x+1}$

据此建立迭代公式：

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

表7－2

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.32476
1	1.35721	6	1.32473
2	1.33086	7	1.32472
3	1.32588	8	1.32472
4	1.32494		

结果见表7-2。显见，可认为

$x^*\approx 1.32472.$

但若采用方程（2.3）的另一种等价形式

$$x = x^3 - 1$$

建立迭代公式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1$$

仍取迭代初值 $x_0 = 1.5$，则有

$$x_1 = 2.375, \quad x_2 = 12.39.$$

结果会越来越大，不可能趋于某个极限。

这种不收敛的迭代过程称作是**发散**的。

一个发散的迭代过程，显然是毫无价值的。

7.2.2 迭代法的收敛性

首先考察 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上不动点的存在惟一性。

定理1 设 $\phi(x)\in C[a,b]$ 满足以下两个条件:

1. 对任意 $x\in[a,b]$ 有 $a\le\phi(x)\le b$;

2. 存在正常数 $L<1$，使对任意 $x,y\in[a,b]$ 都有

$$|\phi(x)-\phi(y)|\le L|x-y| \tag{2.4}$$

则 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在惟一的不动点 x^*.

证明 先证不动点的存在性。

若 $\phi(a)=a$ 或 $\phi(b)=b$，则不动点为a或 b，于是存在性得证。

定义函数

$$f(x)=\phi(x)-x$$

显然 $f(x)\in C[a,b]$。又由于 $a\le\phi(x)\le b$，于是有

$$f(a)=\phi(a)-a>0,\ f(b)=\phi(b)-b<0$$

由连续函数性质可知存在 $x^*\in(a,b)$，使 $f(x^*)=0$。即 x^* 为 $\phi(x)$的不动点。

设 $x_1^*, x_2^* \in [a,b]$ 都是 $\phi(x)$ 的不动点，则由（2.4）得

$$|x_1^* - x_2^*| = |\phi(x_1^*) - \phi(x_2^*)|$$

$$\le L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

引出矛盾。故 $\phi(x)$ 的不动点只能是惟一的。

定理2 设 $\phi(x) \in C[a,b]$ 满足定理1中的两个条件，则对任意 $x_0 \in [a,b]$，由（2.2）得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\phi(x)$ 的不动点 x^*，并有误差估计

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \quad (2.5)$$

证明 设$x^*\in[a,b]$是$\phi(x)$在$[a,b]$上的惟一不动点，由已知条件，有$\{x_k\}\in[a,b]$, 再由（2.4）得

$$|x_k - x^*| = |\phi(x_{k-1}) - \phi(x^*)|$$

$$\le L|x_{k-1} - x^*| \le \cdots \le L^k|x_0 - x^*|$$

因$0<L<1$，故当$k\to\infty$时序列$\{x_k\}$收敛到 x^*。

再证明估计式（2.5），由（2.4）有

$$|x_{k+1} - x_k| = |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \le L|x_k - x_{k-1}| \qquad (2.6)$$

反复递推得

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^k|x_1 - x_0|$$

于是对任意正整数 p 有

$$|x_{k+p}-x_k| \le |x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|$$

$$\le (L^{k+p-1}+L^{k+p-2}+\cdots+L^k)|x_1-x_0|$$

$$\le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

在上式令 $p\to\infty$，由 $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k+p}=x^*$ 即得式（2.5）。

迭代过程是个极限过程。在用迭代法计算时，必须按精度要求控制迭代次数。

原则上可以用估计式（2.5）确定迭代次数，但由于它含有 L 而不便于实际应用。

为了方便控制迭代次数，我们往往采用如下转换。

根据式（2.6），对任意正整数 p 有

$$|x_{k+p}-x_k| \le (L^{p-1}+L^{p-2}+\cdots+1)|x_{k+1}-x_k|$$

$$\le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

在上式中令$p \to \infty$知

$$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

由此可见，只要相邻两次计算结果的偏差$|x_{k+1}-x_k|$足够小，即可保证近似值x_k具有足够精度。

对定理1和定理2中的条件2，如果$\phi(x)\in C^1[a,b]$，且对任意$x\in[a,b]$有

$$|\phi'(x)|\le L<1 \qquad (2.7)$$

则由中值定理知，对$\forall x,y\in[a,b]$有

$$|\phi(x)-\phi(y)|=|\phi'(\xi)(x-y)|\le L|x-y|,\ \xi\in(a,b)$$

表明定理中的条件2可用（2.7）代替。

例3中，当$\phi(x)=\sqrt[3]{x+1}$时，$1\le\sqrt[3]{2}\le\phi(x)\le\sqrt[3]{3}\le 2$，且

$$|\phi'(x)|=\left|\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}\right|\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}<1$$

所以迭代法收敛。

7.2.3 局部收敛性与收敛阶

上面给出了迭代序列$\{x_k\}$在区间$[a,b]$上的收敛性，通常称为**全局收敛性**。

定理的条件有时不易检验，实际应用时通常只在不动点x^*的邻近考察其收敛性，即局部收敛性。

定义1 设$\phi(x)$有不动点x^*，如果存在x^*的某个邻域$R: |x-x^*|\le\delta$，对任意$x_0\in R$，迭代（2.2）产生的序列$\{x_k\}\in R$，且收敛到x^*，则称迭代法（2.2）**局部收敛**。

定理3 设 x^*为$\phi(x)$的不动点，$\phi'(x)$在 x^*的某个邻域连续，且$|\phi'(x^*)|<1$，则迭代法（2.2）局部收敛。

证明 由连续函数的性质，存在 x^*的某个邻域 $R:|x-x^*|\le\delta$，使对于任意 $x\in R$ 成立

$$|\phi'(x)|\le L<1$$

此外，对于任意 $x\in R$，总有$\phi(x)\in R$，这是因为

$$|\phi(x)-x^*|=|\phi(x)-\phi(x^*)|\le L|x-x^*|\le|x-x^*|$$

于是,依据定理2可以断定迭代过程$x_{k+1}=\phi(x_k)$对于任意初值 $x_0\in R$ 均收敛。

下面讨论迭代序列的收敛速度。

例4 用不同方法求方程 $x^2-3=0$的根 $x^*=\sqrt{3}$.

解 这里 $f(x)=x^2-3$, 改写为各种不同的等价形式，其不动点为 $x^*=\sqrt{3}$. 由此得到不同的迭代法:

(1) $x_{k+1}=x_k^2+x_k-3, \phi(x)=x^2+x-3, \phi'(x)=2x+1,$

$\phi'(x^*)=\phi'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}+1>1;$

(2) $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k}, \phi(x)=\dfrac{3}{x}, \phi'(x)=-\dfrac{3}{x^2}, \phi'(x^*)=-1;$

(3) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}(x_k^2-3), \phi(x)=x-\dfrac{1}{4}(x^2-3),$

$$\phi'(x)=1-\frac{1}{2}x,\phi'(x^*)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1.$$

(4) $$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{3}{x_k}),\ \phi(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{3}{x}),$$

$$\phi'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{3}{x^2}),\phi'(x^*)=\phi'(\sqrt{3})=0.$$

取 $x_0=2$，计算三步所得的结果如下表

表7–3 计算结果

k	x_k	迭代法 (1)	迭代法 (2)	迭代法 (3)	迭代法 (4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.73475	1.732143
3	x_3	87	1.5	1.732361	1.732051
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

定义2 设迭代过程 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 收敛于方程 $x = \phi(x)$ 的根 x^*，如果迭代误差 $e_k = x_k - x^*$ 当 $k \to \infty$ 时成立下列渐近关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to C \quad (C \neq 0)$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的。

特别地，$p = 1$ 时称线性收敛;

$p > 1$ 时称超线性收敛;

$p = 2$ 时称平方收敛。

定理4 对于迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$，如果 $\phi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续，并且

$$\phi'(x^*)=\phi''(x^*)=\cdots=\phi^{(p-1)}(x^*)=0,$$

$$\phi^{p}(x^*)\neq 0, \qquad (2.8)$$

则该迭代过程在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的。

证明 由于 $\phi'(x^*)=0$，据定理3立即可以断定迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$ 具有局部收敛性。

又将 $\phi(x_k)$ 在根 x^* 处泰勒展开，并利用条件（2.8）有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p，\xi在x_k与x^*之间.$$

注意到 $\phi(x_k)=x_{k+1}$, $\phi(x^*)=x^*$，由上式得

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

因此对迭代误差，当 $k\to\infty$ 时有

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to\frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!} \qquad (2.9)$$

这表明迭代过程确实为 p 阶收敛。

定理表明，迭代过程的收敛速度依赖于迭代函数 $\phi(x)$ 的选取。若 $\phi'(x^*)\neq 0$，则迭代只可能线性收敛。

7.3.1 埃特金加速法

设 x_0 是根 x^* 的某个近似值，由迭代公式校正得

$$x_1 = \phi(x_0)$$

由微分中值定理，有

$$x_1 - x^* = \phi(x_0) - \phi(x^*) = \phi'(\xi)(x_0 - x^*)$$

其中 ξ 介于 x^* 与 x_0 之间。

假定 $\phi'(x)$ 改变不大，近似地取某个近似值 L，则有

$$x_1 - x^* \approx L(x_0 - x^*) \tag{3.1}$$

若将校正值 x_1 再校正一次，又得 $x_2=\phi(x_1)$.

由于

$$x_2-x^*\approx L(x_1-x^*)$$

将它与（3.1）式联立，消去未知的 L，有

$$\frac{x_1-x^*}{x_2-x^*}\approx\frac{x_0-x^*}{x_1-x^*}$$

由此推知

$$x^*\approx\frac{x_0x_2-x_1^2}{x_2-2x_1+x_0}=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$

于是，我们可用上式右端作为 x^* 的新近似，记作 $\overline{x}_1$。

一般情形是由x_k计算x_{k+1},x_{k+2}，记

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

$$= x_k - (\Delta x_k)^2 / \Delta^2 x_k, (k = 0,1,\cdots) \qquad (3.2)$$

（3.2）称为埃特金（Aitken）加速方法。

可以证明

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{x}_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = 0$$

它表明序列$\{\bar{x}_k\}$的收敛速度比$\{x_k\}$的收敛速度快。

$$
\begin{cases}
\tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k) & \text{(迭代)} \\
\bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1}) & \text{(迭代)} \\
x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k} & \text{(加速)} \qquad (k=0,1,2,\cdots)
\end{cases}
\tag{5-12}
$$

7.4.1 牛顿法及其收敛性

牛顿法是一种线性化方法，其基本思想是将非线性方程 $f(x)=0$ 逐步归结为某种线性方程来求解。

设已知方程 $f(x)=0$ 有近似根 x_k（假定 $f'(x_k)\neq 0$），将函数 $f(x)$ 在点 x_k 展开，则有

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

于是方程 $f(x)=0$ 可近似地表示为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0 \tag{4.1}$$

这是个线性方程，记其根为x_{k+1}，则x_{k+1} 的计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \cdots) \qquad (4.2)$$

这就是**牛顿(Newton)法**。

牛顿法的几何解释:

首先，方程 $f(x) = 0$的根 x^* 可看做曲线 $y = f(x)$与 x轴的交点的横坐标(图7-3)。

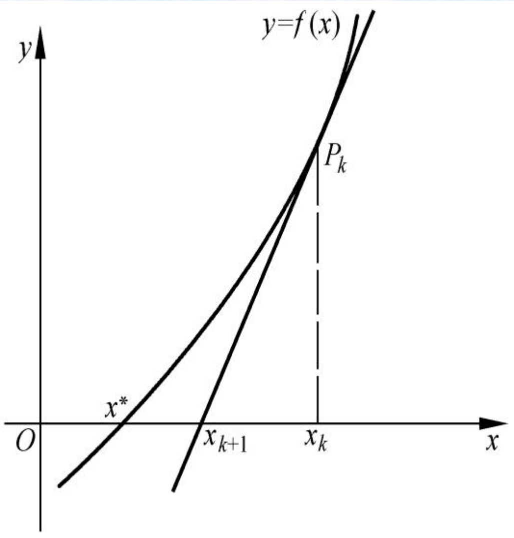

图7-3

设 x_k 是根 x^* 的某个近似值，过曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_k 的点 P_k 引切线，并将该切线与 x 轴的交点的横坐标 x_{k+1} 作为 x^* 的新的近似值。

注意到切线方程为

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

这样求得的值 x_{k+1} 必满足（4.1），从而就是牛顿公式（4.2）的计算结果。

由于这种几何背景，牛顿法也称**切线法**。

（4.2）的迭代函数为$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，且有

$$\phi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},\ \phi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

假定x^*是 $f(x)$ 的一个单根，即 $f(x^*)=0,\ f'(x^*)\neq 0$，

则由上式知 $\phi'(x^*)=0$，于是由定理4可知，牛顿法在

根 x^*的邻近是平方收敛的。

再由（2.9）可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \qquad （4.3）$$

例7 用牛顿法解方程

$$xe^{x}-1=0 \tag{4.4}$$

解 这里牛顿公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$$

取迭代初值 $x_0=0.5$，结果见表。

表7–5计算结果

k	x_k
0	0.5
1	0.57102
2	0.56716
3	0.56714

所给方程（4.4）实际上是方程$x=e^{-x}$的等价形式

若用不动点迭代到同一精度要迭代17次。可见牛顿法的收敛速度是很快的。

对于给定的正数 C，应用牛顿法解二次方程

$$x^2 - C = 0$$

可导出求开方值 $\sqrt{C}$ 的计算程序:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{C}{x_k}\right) \qquad (4.5)$$

这种迭代公式对于任意初值 $x_0 > 0$ 都是收敛的。

事实上，对（4.5）式进行配方可得:

$$x_{k+1} - \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{C})^2$$

$$x_{k+1} + \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}(x_k + \sqrt{C})^2$$

以上两式相除得

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{C}}{x_{k+1}+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{C}}{x_k+\sqrt{C}}\right)^2$$

据此反复递推有

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{C}}{x_{k+1}+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}\right)^{2^k} \qquad (4.6)$$

记

$$q=\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}$$

整理（4.6）式，得 $x_k-\sqrt{C}=2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}$.

对任意 $x_0 > 0$，总有 $|q| < 1$，故由上式知，当 $k \to \infty$ 时 $x_k \to \sqrt{C}$，即迭代过程恒收敛。

例8 求 $\sqrt{115}$。

解 取初值 $x_0 = 10$，按（4.5）式迭代3次，便得到精度为 10^{-6} 的结果（见表7-6）。

表7－6

k	x_k
0	10
1	10.750000
2	10.723837
3	10.723805
4	10.723805

由于公式（4.5）对任意初值 $x_0 > 0$ 均收敛，且速度很快，因此可取确定的初值，如 $x_0 = 1$ 编成通用程序。

牛顿法的优点是收敛快，缺点：一是每步都要计算 $f(x_k)$ 及 $f'(x_k)$，计算量大且有时 $f'(x_k)$ 计算较难;

二是初值 x_0 只在根 x^* 附近才能保证收敛。

（2） 牛顿下山法

牛顿法收敛性依赖初值x_0的选取。

如果x_0偏离所求根 x^*较远，则牛顿法可能发散。

例如，用牛顿法求方程

$$x^3 - x - 1 = 0 \tag{4.8}$$

在 $x = 1.5$附近的一个根 x^*。

设取迭代初值 $x_0 = 1.5$，用牛顿法公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \tag{4.9}$$

计算得

$$x_1 = 1.34783, \quad x_2 = 1.32520, \quad x_3 = 1.32472$$

迭代3次得到的结果 x_3 有6位有效数字。

但如果改用 $x_0 = 0.6$ 作为迭代初值，则依牛顿法公式（4.9）迭代一次得 $x_1 = 17.9$. 这个结果反而比 $x_0 = 1.5$ 时更偏离了所求的根 $x^* = 0.32472$。

为了防止迭代发散，对迭代过程再附加一项要求，即具有单调性：

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \qquad (4.10)$$

满足这项要求的算法称下山法。

牛顿下山法是将牛顿法与下山法结合起来使用，即在下山法保证函数值稳定下降的前提下，用牛顿法加快收敛速度。

将牛顿法的计算结果 $\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 与前一步的近似值 x_k 适当加权平均后，作为新的改进值：

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda) x_k \tag{4.11}$$

其中 $\lambda (0 < \lambda \le 1)$ 称为下山因子。

（4.11）即为

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \cdots) \qquad (4.12)$$

选择下山因子时从 $\lambda = 1$ 开始，逐次将 λ 减半进行试算，直到能使下降条件（4.10）成立为止。

若用此法解方程（4.8），当 $x_0 = 0.6$ 时由（4.9）求得 $x_1 = 17.9$, 它不满足条件（4.10）。

通过 λ 逐次取半进行试算，当 $\lambda = 1/32$ 时可求得 $x_1 = 1.140625.$

此时有 $f(x_1)=-0.656643$， 而 $f(x_0)=-1.384$, 显然 $|f(x_1)|<|f(x_0)|$.

由 x_1 计算 $x_2, x_3, \cdots$ 时 $\lambda=1$, 均能使条件（4.10）成立。计算结果如下 ：

$$x_2=1.36181, \quad f(x_2)=0.1866;$$

$$x_3=1.32628, \quad f(x_3)=0.00667;$$

$$x_4=1.32472, \quad f(x_4)=0.0000086.$$

x_4 即为 x^* 的近似。一般只要能使条件（4.10）成立，则可得到 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=0$，从而使 $\{x_k\}$ 收敛。

用牛顿法求方程 $f(x)=0$的根，每步除计算 $f(x_k)$ 外，还要算 $f'(x_k)$。

当函数 $f(x)$比较复杂时，计算 $f'(x)$往往较困难，为此可以利用已求函数值 $f(x_k), f(x_{k-1}),\cdots$来回避导数值 $f'(x_k)$ 的计算。

7.4.1 弦截法

设 x_k, x_{k-1} 是 $f(x)=0$ 的近似根，利用 $f(x_k), f(x_{k-1})$ 构造一次插值多项式 $p_1(x)$，并用 $p_1(x)=0$ 的根作为新的近似根 x_{k+1} 。

由于

$$p_1(x)=f(x_k)+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_k) \tag{5.1}$$

因此有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}) \tag{5.2}$$

（5.2）可以看作将牛顿公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

中的导数 $f'(x_k)$ 用差商 $\dfrac{f(x_k) - f\left(x_{k-1}\right)}{x_k - x_{k-1}}$ 取代的结果。

接着讨论几何意义。

将曲线 $y = f(x)$ 上横坐标为 x_k, x_{k-1} 的点分别记为 P_k, P_{k-1}，则弦线 $\overline{P_k P_{k-1}}$ 的斜率为差商值：

$$\frac{f(x_k) - f\left(x_{k-1}\right)}{x_k - x_{k-1}}$$

其方程为 $y=f(x_k)+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_k)$

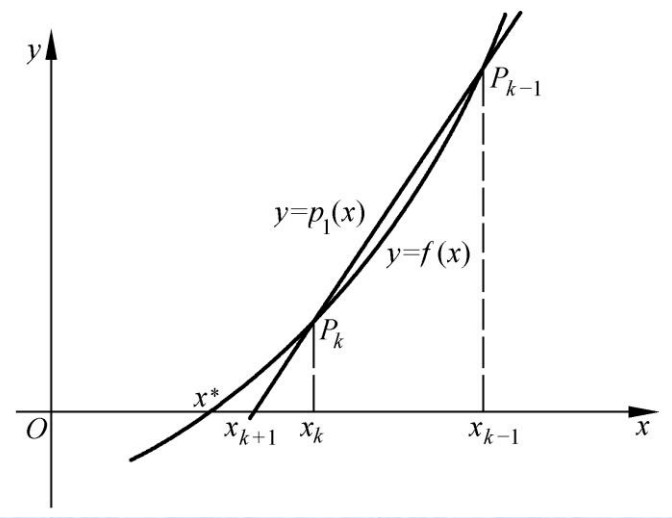

表7-5

按（5.2）式求得的x_{k+1} 实际上是弦线$\overline{P_k P_{k-1}}$ 与x 轴交点的横坐标。这种算法因此而称为**弦截法**。

弦截法与切线法（牛顿法）都是线性化方法，但两者有本质的区别。切线法在计算 x_{k+1} 时只用到前一步的值 x_k. 而弦截法（5.2），在求 x_{k+1} 时要用到前面两步的结果 x_k, x_{k-1}，因此该方法需要两个处始值 x_0, x_1。

例10　用弦截法解方程

$$f(x) = xe^x - 1 = 0.$$

解　设取 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$ 作为开始值。结果见表7-8。

表7-8计算结果

k	x_k
0	0.5
1	0.6
2	0.56532
3	0.56709
4	0.56714

比较例7牛顿法的计算结果可以看出，弦截法的收敛速度也是相当快的。

实际上，弦截法具有超线性的收敛性。

定理6 假设 $f(x)$在根 x^*的邻域 $\Delta: |x-x^*| \le \delta$内具有二阶连续导数，且对任意 $x \in \Delta$有 $f'(x) \ne 0$，又初值 x_0, $x_1 \in \Delta$, 那么当邻域Δ充分小时，弦截法（5.2）将按p阶收敛到根 x^*。

这里 $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$是方程$\lambda^2-\lambda-1=0$的正根。