投资学 第三章
资产组合选择理论——均值方差方法

主讲：王润东

对外经济贸易大学

参考教材（课件）：肖欣荣、尹澄溪老师投资学课程[1]

目录

---

[1] 版权声明：该课件仅用于对外经济贸易大学《投资学》学业助理课程使用，帮助同学们学习本校课程，并已得到老师们的许可。其内容均参考肖欣荣、尹澄溪老师讲授的《投资学》教材课件、余湄老师主持的《金融经济学导论》课程教材课件。严禁外传！

1. 均值-方差选择的数学基础

资产期望收益：

$$E(r)=\sum_{i=1}^{n}P_iE(r_i)$$

资产的方差：

$$\sigma_i^2=\sum_{i=1}^{n}P_i\big(r_i-E(r)\big)^2$$

两资产的协方差：

$$cov(r_1,r_2)=E\big[\big(r_1-E(r_1)\big)\big(r_2-E(r_2)\big)\big]=\sum_{i=1}^{n}P_i\left(r_{1,i}-E(r_1)\right)\left(r_{2,i}-E(r_2)\right)$$

两资产相关系数：

$$\rho_{1,2}=\frac{cov(r_1,r_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

两资产组成投资组合的期望收益：

$$E\big(r_p\big)=w_1E(r_1)+w_2E(r_2),w_1+w_2=1$$

两资产组成投资组合的方差：

$$\sigma_p^2=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2cov(r_1,r_2)$$

特别的，一个风险资产和一个无风险组合的期望收益：

$$E\big(r_p\big)=wE(r_i)+(1-w)r_f$$

特别的，一个风险资产和一个无风险资产组合的标准差：

$$\sigma_p=w\sigma_i$$

N 个资产组成投资组合的期望收益：

$$E\big(r_p\big)=\sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)$$

N 个资产组成投资组合的方差和标准差：

$$\sigma_p^2=w^TVw=(w_1\quad\cdots\quad w_n)\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

2. 一个风险资产和一个无风险资产的组合——导出 CAL 线

2.1 一个风险资产和一个无风险资产的可行集

可行集：可行集是所有可以实现的资产组合的均值-方差的集合

$$E(r_c) = wE(r_p) + (1-w)r_f \tag{1}$$

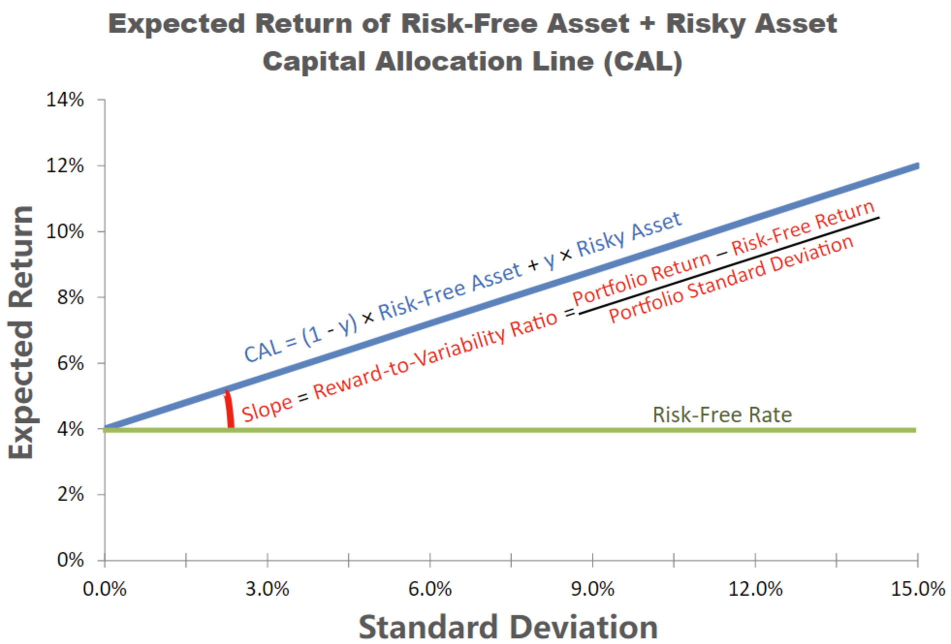
$$\sigma_c = |w|\sigma_p \tag{2}$$

$$|w| = \frac{\sigma_i}{\sigma_p} \tag{3}$$

$$E(r_c) = \frac{\sigma_c}{\sigma_p}E(r_p) + \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_p}\right)r_f \text{ or } E(r_c) = -\frac{\sigma_c}{\sigma_p}E(r_p) + \left(1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_p}\right)r_f \tag{4}$$

$$E(r_c) = r_f + \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}\sigma_c \text{ or } E(r_c) = r_f - \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}\sigma_c \tag{5}$$

公式（5）即是资本配置线（Capital Allocation Line, CAL）的方程。资本配置线（CAL）描述了一个风险资产和一个无风险资产能组成的所有投资组合在“期望收益-标准差”坐标系内的图形。资本配置线的图形如下：



2.2 CAL 的性质和变形

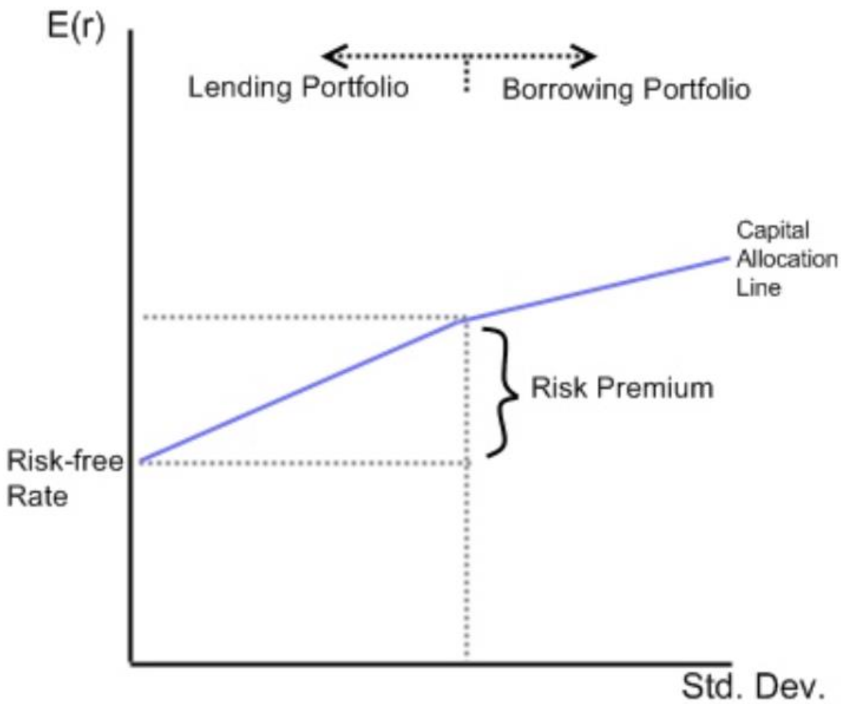
资产配置线有以下几个性质和知识点需要掌握：

【重点 1】资产配置线的斜率：单位风险的超额收益，风险报酬比，又被称作是夏普比率：

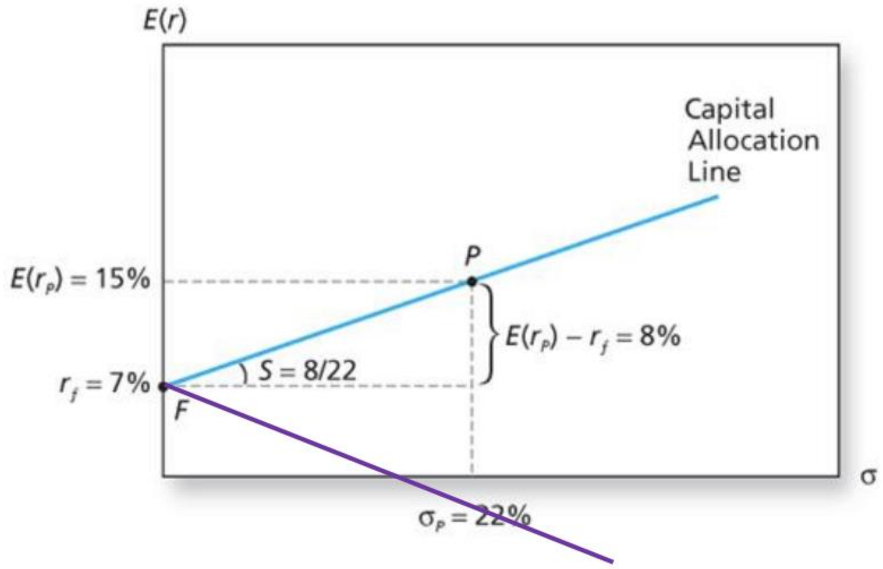
$$SP = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$$

处在同一条 CAL 上的资产组合必须具有相同的夏普比率

【重点 2】借入和借出利率不相等时的 CAL：



【重点 3】卖空风险资产买入无风险资产时的 CAL



2.3 结合效用函数与 CAL 线进行投资决策

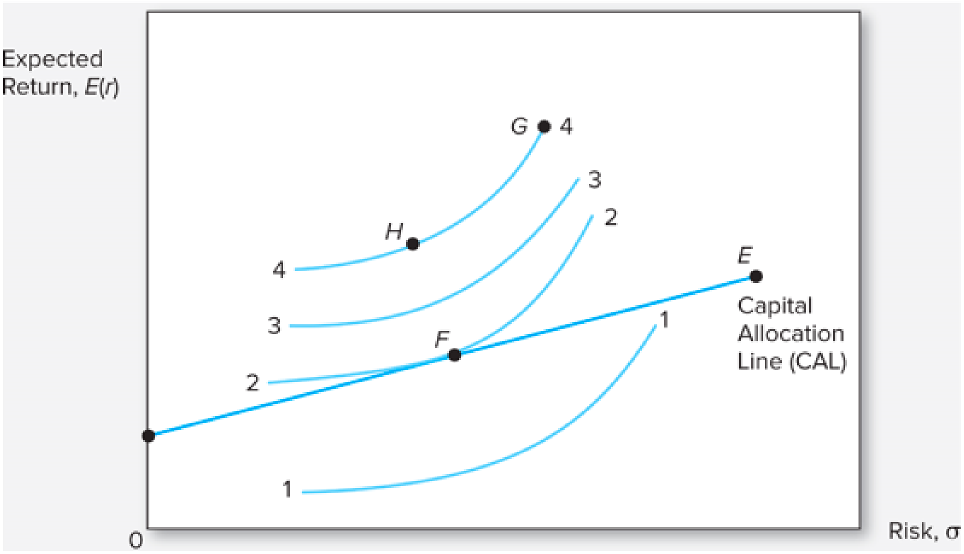
$$U = E(r_c) - 0.005A{\sigma_c}^2$$

$$E(r_c) = wE(r_p) + (1-w)r_f$$

$$\sigma_c = w\sigma_p$$

决策的内容：确定最优的投资比例，最终求得最优解（切点解）：

$$w = \frac{E(r_p) - r_f}{0.01A\sigma_p^2}$$



2.4 一个风险资产和一个无风险资产组合的例题

1、假如你拥有一个风险资产，期望收益率为 12%，标准差为 20%，无风险收益率为 3%。如果你可以 以无风险利率借入资金，你如何得到一个回报率为 X 的组合？组合的风险为多少？

（1）X=8%

（2）X=18%

（3）X=0%

2、加入投资者的效用函数为二次型$U=E(r_c)-0.005A\sigma_c{}^2$，当投资者面临一个风险资产和一个无风险资产时，推导投资者对风险资产最优投资比例

3、已知投资者的效用函数为二次形式，若市场中有 1 个风险资产组合 p 与一个无风险资产。已知 $E(r_p)=15\%, E(r_f)=7\%, \sigma_p=22\%$. 问要让投资者效用最大时需要分配多少资产给风险资产组合？

4、已知股票 A 的期望收益率为 8%，标准差为 8%； 无风险资产收益率 7%。某投资者的效用函数为 $U=E(r_c)-0.01A\sigma_c{}^2$。求该投资者的最优投资组合中 A 以及无风险资产的权重，以及最优投资组合 的期望收益率和标准差，并画图说明。

5、考虑考虑一个资产组合，其预期收益率为 12%，标准差为 18%。国库券的无风险收益率为 7%，要让投资者与 国库券相比更偏好风险资产组合，最大的风险厌恶水 平是多少？假设投资者效用函数为$U=E(r_c)-0.01A\sigma_c{}^2$。

3. 两个风险资产的组合——导出最小方差点（MVP）

两资产组成投资组合的期望收益：

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

两资产组成投资组合的方差：

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2cov(r_1, r_2)$$

求解使得组合方差最小的投资比例：