X. LIMIT

Ringkasan Materi :

Kasus I : x → a (x mendekati bilangan tertentu) ada 2 bentuk

Bentuk I : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Contoh :

(1). $\lim\limits_{x \to -2} (2x^2 - 4) = 2.(-2)^2 - 4 = 2.4 - 4 = 8 - 4 = 4$

(2). $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 2} = \dfrac{3^2 - 9}{3 - 2} = \dfrac{9 - 9}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

Secara singkat kita katakan bahwa limit - limit pada bentuk I adalah limit yang selesai cukup dengan **disubtitusikan**

Bentuk II : $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Dalam bentuk ini $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tidak dapat dicari dengan mengganti (mensubtitusi) x dengan a, sebab nilai $f(a)$ akan berupa bilangan tak tentu (yaitu $\dfrac{0}{0}$)

Ingat ! bahwa $\dfrac{0}{0}$ adalah bilangan taktentu/ tak terdefinisi

Untuk menyelesaikan langkahnya adalah **dengan menyederhanakan** baik **melalui faktorisasi** atau mengalikan dengan sekawannya

Contoh :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Pada soal ini apabila x diganti 3, maka hasilnya adalah :

$\dfrac{3^2 - 9}{3 - 3} = \dfrac{9 - 9}{0} = \dfrac{0}{0}$ yang merupakan bilangan tak tentu

sebab $\dfrac{0}{0}$ hasilnya bisa 1, bisa 2, 3, dll, dan ini bukan jawaban, maka perlu diadakan penyederhanaan yaitu dengan proses faktorisasi

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}.(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Jadi $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ = 6

Tips Penyelesaian limit untuk x → a :

i. setiap soal limit untuk x → a langkah pertama selalu ganti saja x dengan a, apabila hasilnya ada (bukan $\dfrac{0}{0}$) maka itulah hasilnya, dan jika hasilnya $\dfrac{0}{0}$, maka adakan penyederhanaan.

ii. **Cara singkat yang dapat ditempuh jika f(a) =** $\dfrac{0}{0}$ adalah dengan cara menurunkan

Jadi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f^1(x) = f^1(a)$ dst

Contoh :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{1} = \lim_{x \to 3} 2x = 2.3 = 6$$

iii. Bedakan antara bentuk – bentuk $\dfrac{0}{1}, \dfrac{0}{9}, \dfrac{0}{-6}$ dengan bentuk $\dfrac{1}{0}, \dfrac{9}{0}, \dfrac{-6}{0}$

Bentuk $\dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{9} = \dfrac{0}{-6} = 0$, tetapi

Bentuk $\dfrac{1}{0} = \dfrac{9}{0} = \infty, dan \dfrac{-6}{0} = -\infty$

Kasus II : x → ∞ (x mendekati tak hingga) ada 2 bentuk

Bentuk I : $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r})$

Untuk bentuk ini kita pakai saja cara praktis ,

(i). Jika $p = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + qx + r})$ = $\dfrac{b - q}{2\sqrt{a}}$

(ii). $p < a$, $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r})$ = **∞**

(iii). $p > a$, $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r})$ = **- ∞**

Bentuk II : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots}{px^n + qx^{n-1} + \ldots}$

Cara Praktis :

(i). Jika **m = n**, maka hasilnya = $\dfrac{a}{p}$

(ii). Jika **m < n**, maka hasilnya = **0**

(iii). Jika **m > n**, maka hasilnya = **∞**

Contoh Soal :

1. $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} \right)$ = ...

a. -8
b. -2
d. 2
e. 8

c. 0

Penyelesaian :

Jelas jika x diganti -3 maka hasilnya = $\frac{(-3)^2-2.(-3)-15}{-3+3}$

= $\frac{9+6-15}{0}=\frac{15-15}{0}=\frac{0}{0}$

Maka harus disederhanakan **atau turunkan saja :**

$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2-2x-15}{x+3}\right)$ = $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x-2}{1}=2.(-3)-2=-6-2=-8$

Jadi jawabannya A.

2. Nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2}\right)=....$
   a. ∞
   b. 2
   c. 1
   d. 0
   e. -1

Penyelesaian :

Jelas ini kasus x→∞ bentuk I.

Ubah soal menjadi :

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2}\right)$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}\right)$

Berarti ini kasus a = p, dengan b = 2 dan q = 0, dan a = p = 1 maka hasilnya adalah $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

= $\frac{2-0}{2\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$

Jadi jawabannya C

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+5}{17+5x-2x^3}=....$
   a. -4
   d. 4
   b. -2
   e. ∞
   c. 0

Penyelesaian :

Ubah bentuk soal agar susunan suku – suku pada penyebut dari x yang pangkatnya tertinggi :

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+5}{17+5x-2x^3}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+5}{-2x^3+5x+17}$

Tampak bahwa ini kasus x→∞ bentuk II dengan m = n = 3, maka hasilnya $\frac{a}{p}$

= $\frac{8}{-2}=-4$

Jadi jawabannya A

<u>Paket Soal 18</u> :

Kelompok x → a

1. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x+2}=....$
   a. -8
   d. 4
   b. -4
   e. 8
   c. -2

2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ = ...
   a. $-\frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{4}$
   b. $-\frac{1}{4}$
   e. $\frac{1}{2}$
   c. 0

3. Nilai dari $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x^2-3x}{x^3+2x^2-15x}\right)=....$
   a. $\frac{1}{3}$
   d. $\frac{1}{8}$
   b. $\frac{1}{6}$
   e. $\frac{1}{9}$
   c. $\frac{1}{7}$

4. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-2x-8}{x-4}$ = ...
   a. -6
   d. 2
   b. -2
   e. 6
   c. 0

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{x-1}$ = ...
   a. 5
   d. 15
   b. 7
   e. 18
   c. 9

6. Nilai $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2+x-12}$ = ...
   a. 4
   d. $\frac{3}{7}$
   b. 3
   e. $\frac{1}{7}$
   c. 2

7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(3x-1)^2-4}{x^2+4x-5}$ = ...

a. 0
d. 4
b. ∞
e. 8
c. 2

8. Nilai $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ = ... (UN 2010)

a. -6
d. $\frac{3}{2}$
b. $-\frac{3}{2}$
e. 6
c. 0

9. Nilai $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-14x+8}{x^2-3x-4}$ = ... (UN 2011)

a. 4
d. -2
b. 2
e. -4
c. $\frac{1}{2}$

Catatan : soal – soal nomor 1 s.d 7 dapat ditentukan dengan model penurunan.

Kelompok x→∞

10. Nilai $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$ adalah ....

a. $-6\frac{1}{2}$
d. $-2\frac{1}{2}$
b. $-4\frac{1}{2}$
e. -2
c. $-3\frac{1}{2}$

11. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+2x+11}$ = ...

a. -2
d. 2
b. 0
e. ∞
c. 1

12. $\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{2x^2+5x+8}-\sqrt{2x^2+2x-1}\right\}$ = ...

a. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
d. $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$
b. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$
e. $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$
c. $-\frac{3}{\sqrt{2}}$

13. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+5x}-\sqrt{3x^2-3}\right)$ =...

a. $5\sqrt{3}$
d. $\frac{5}{4}\sqrt{3}$
b. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$
e. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$
c. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

14. $\underset{x\to\infty}{\text{limit}}\left(\sqrt{4x^2-2x-5}-\sqrt{(2x-2)^2}\right)$ = ...

a. -2
b. $-\frac{3}{2}$
c. $-\frac{1}{2}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{3}{2}$

15. Nilai $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x+3}-(x+3)$ = ...

a. -8
d. 2
b. -4
e. 4
c. -2

16. Nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{3+4x-x^2}{3x^2+2x+3}$ = ...

a. -1
d. 0
b. $-\frac{1}{3}$
e. 1
c. $\frac{1}{3}$

17. Nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+1}{3x^2+2}$ = ... (UN 2010)

a. $\frac{4}{3}$
d. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{3}{4}$
e. 0
c. $\frac{3}{5}$

18. Nilai $\lim_{x\to\infty}\left((5x-1)-\sqrt{25x^2+5x-7}\right)$ = ... (UN 2011)

a. $\frac{3}{2}$
d. $-\frac{1}{2}$
b. $\frac{2}{3}$
e. $-\frac{3}{2}$
c. $\frac{1}{2}$