XI. TURUNAN

Ringkasan Materi :

1. Menentukan turunan fungsi aljabar
   - Misalkan suatu fungsi dituliskan dengan f(x) = y, maka **turunan pertama fungsi** tersebut terhadap variabel x **dituliskan** dengan $f^1(x)$ **atau** y^1 **atau** $\frac{df(x)}{dx}$ **atau** $\frac{dy}{dx}$
   - Rumus pokok turunan fungsi aljabar

     (i). Jika $f(x) = ax^n$, maka $f^1(x) = n.a.x^{n-1}$

     (ii). Jika f(x) =a (konstanta), maka $f^1(x) = 0$

     (iii). Jika f(x)=ax, maka $f^1(x)$ =a

     Contoh :

     (i). $f(x)=2x^3 + 5$, maka $f^1(x)=3.2x^{3-1} + 0 = 6x^2$

     (ii). f(x)= $\frac{3}{x^5} - 5x$, maka bentuknya diubah dulu menjadi $f(x)= 3.x^{-5} -5x$, sehingga :

     $f^1(x)=(-5).3x^{-5-1}-5 = -15x^{-6}-5= -\frac{15}{x^6}$ - 5

2. Menentukan nilai turunan fungsi aljabar

   Jika $f^1(x)$ adalah turunan fungsi f(x), maka nilai turunan fungsi f(x) di x = a adalah $f^1(a)$.

   Contoh :

   $f(x) = 2x^2 -3x$, tentukanlah nilai turunan fungsi f(x) di x= -2 !

   Penyelesaian :

   Jelas $f^1(x)= 4x-3$, maka $f^1(-2) = 4.(-2)-3 = -8-3 = -11$

3. Aplikasi/ Penerapan konsep turunan
   - Menentukan gradien dan persamaan garis singgung di suatu titik pada kurva y = f (x)

     (i).**Gradien (m) garis singgung di titik (x_1 ,y_1)** pada kurva y = f(x) dapat ditentukan dengan :

     $m = f^1(x_1)$

     (ii).Persamaan garis singgung pada kurva y=f(x) di titik (x_1 ,y_1), dirumuskan dengan :

     $y - y_1 = m.(x - x_1)$
   - Menentukan nilai maksimum atau minimum fungsi f(x)

     (i). Fungsi f(x) akan mencapai maksimum/ minimum, untuk x yang memenuhi **$f^1(x) = 0$**

     > Ingat !
     > Untuk menentukan nilai maksimum atau minimum fungsi jika fungsinya berupa fungsi kuadrat juga bisa menggunakan konsep pada fungsi kuadrat yaitu pakai rumus untuk mencari y_b (y-nya titik balik) <u>lihat kisi 5</u>

     (ii). Menentukan **nilai maksimum/minimum fungsi f(x) pada interval tertutup a ≤ x ≤ b**

     Langkahnya :

     ✓ Carilah x yang memenuhi $f^1(x) = 0$

     ✓ Periksalah nilai f(x) untuk x = a, x = b, dan x yang diperoleh dari langkah pertama, dengan catatan x tersebut nilainya lebih dari a dan kurang dari b.

     ✓ Jika yang diminta adalah nilai maksimum maka pilihlah nilai – nilai f(x) dari langkah dua yang nilainya paling besar, dan sebaliknya jika yang diminta adalah nilai minimum, maka pilihlan nilai f(x) dari langkah dua yang nilainya paling kecil.
   - Menerapkan turunan pada soal cerita

     Untuk penerapan jenis ini Ringkasan Materi sama dengan saat mencari nilai maksimum/ minimum, yaitu;

     f (x) akan mencapai maksimum atau minimum untuk x yang memenuhi $f^1(x) = 0$

     (biasanya soal dalam bentuk soal cerita, dan f(*x*) perlu dirumuskan dahulu)
   - Menentukan interval fungsi naik atau turun

     (i). f(x) **naik jika** $f^1(x) > 0$

     (ii). f(x) **turun jika** $f^1(x) < 0$

<u>Contoh Soal</u> :

1. Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 4x + 1$ adalah $f^1(x) = ...$

   a. $x^3 + x^2 - 2$ d. $2x^3 + 2x^2 - 4x$
   b. $x^3 + 2x^2 - 4$ e. $2x^3 + 2x^2 - 4$
   c. $2x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

Penyelesaian :

Jelas $f^1(x) = 4.\frac{1}{2}x^{4-1} + 3.\frac{2}{3}x^{3-1} - 4$

$\Leftrightarrow f^1(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4$ jadi jawabannya C

2. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ adalah $f^1(x)$. Nilai $f^1(1) = ...$

   a. 4 d. 11
   b. 6 e. 13
   c. 8

Penyelesaian :

Jelas $f^1(x) = 6x^2 + 6x - 1$, maka $f^1(1) = 2.1^3 + 3.1^2 - 1$= 4.

Jadi jawabannya A

3. Persamaan garis singgung pada kurva y = x^2+4x + 1 di titik (2,13) adalah ....

   a. y = 8x – 3　　　d. y = 2x + 9
   b. y = 8x + 13　　e. y = 4x + 5
   c. y = 8x – 16

Penyelesaian :

Jelas $y^1 = f^1(x) = 2x + 4$, maka m = $f^1(2) = 2.2 + 4 = 8$

Sehingga persamaan garis singgungnya :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ y – 13 = 8 (x – 2)

$\Leftrightarrow$ y – 13 = 8x -16

$\Leftrightarrow$ y = 8x -16 + 13

$\Leftrightarrow$ y = 8x – 3 **jadi jawabannya A**

4. Nilai maksimum dari $f(x) = -2x^2 - 2x + 13$ adalah ....

   a. $6\frac{5}{8}$　　d. $14\frac{1}{2}$
   b. $8\frac{7}{8}$　　e. $15\frac{5}{8}$
   c. $13\frac{1}{2}$

Penyelesaian :

Cara I :

Untuk mencapai maksimum, maka x harus memenuhi $f^1(x)=0$

Jelas $f^1(x) = -4x - 2$

Syaratnya $f^1(x)=0$

$\Leftrightarrow$ -4x – 2 = 0

$\Leftrightarrow$ -4x = 2

$\Leftrightarrow$ x = $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

maka

fmaks = $f(-\frac{1}{2})$

$= -2.(-\frac{1}{2})^2 - 2.(-\frac{1}{2}) + 13$

$= -2.\frac{1}{4} + 1 + 13$

$= -\frac{1}{2} + 14$ = $13\frac{1}{2}$ **Jadi jawabannya C**

Cara II : pakai konsep titik balik pada fungsi kuadrat

Dari fungsi di atas, jelas a = -2, b = -2, c = 13.

Ingat ! $x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2.(-2)} = -\frac{1}{2}$

Maka $f_{maks} = y_b = -2.(-\frac{1}{2})^2 - 2.(-\frac{1}{2}) + 13$

$= -2.\frac{1}{4} + 1 + 13$

$= -\frac{1}{2} + 14$ = $13\frac{1}{2}$ **Jadi jawabannya C**

5. Sebuah home industry memproduksi x unit barang dengan biaya yang dinyatakan dengan $(x^2 - 30x + 125)$ ribu rupiah, dan pendapatan setelah barang tersebut habis terjual adalah $(60x)$ ribu rupiah. Keuntungan maksimal home industry tersebut adalah ....

   a. Rp1.900.000,00
   b. Rp1.150.000,00
   c. Rp550.000,00
   d. Rp300.000,00
   e. Rp100.000,00

Penyelesaian :

Langkah pertama :

buat model fungsi keuntungan = pendapatan – biaya

f(x) = $(60x)$ - $(x^2 - 30x + 125)$ ribu rupiah

f(x) = $-x^2 + 90x - 125$ ribu rupiah

kita pakai cara II: pakai konsep fungsi kuadrat

jelas $x_b = -\frac{90}{2.(-1)} = 45$, maka keuntungan maksimum adalah (y_b) = $f(45) = -45^2 + 90.45 - 125$

$= -2025 + 4050 - 125 = 1900$ rb

Jadi jawabannya Rp1.900.000,00 (A)

<u>Paket Soal 17</u> :

Kelompok Menentukan $f^1(x)$ dan nilai nilai turunan

1. Diketahui f(x) = $3x^3$+4x+8. Jika turunan pertama f(x) adalah f’(x), maka f’(x) adalah....

   a. x^2+4
   b. $9x^2$+4
   c. $27x^2$+4
   d. $9x^2$+4x+8
   e. $27x^2$+4x+8

2. Diketahui f’(x) adalah turunan pertama dari f(x). Jika f(x) = 4 - 5x - $2x^3$ maka f’(x)= ....

   a. $2x^2$ – 5
   b. $-2x^2$ – 5
   c. -6x + 5
   d. $-6x^2$ + 5
   e. $-6x^2$ – 5

3. Jika f'(x) adalah turunan pertama dari

f(x) = $\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 4x - 1$ maka f'(x) adalah ....

a. $x^3 - x^2 - 4$

b. $x^3 - 2x^2 - 4$

c. $2x^3 - 2x^2 + 4$

d. $2x^3 - 2x^2 + 4x$

e. $2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

4. Diketahui f(x) = $(2x-3)^4$ dan f^1 adalah turunan pertama fungsi f. Nilai f^1 (3) adalah ....

a. 24

b. 36

c. 72

d. 108

e. 216

5. Diketahui $f(x) = (2x - 1)^4$ dan f' adalah turunan pertama fungsi f. Nilai $f'(2)$ adalah ....

a. 216

b. 108

c. 72

d. 36

e. 24

6. Diketahui $f(x) = 5 + 2x - 3x^2$, maka $f^1(-2) = ...$

a. -11

b. -10

c. -4

d. 13

e. 14

7. Diketahui $f(x) = x^6 + 12x^4 + 2x^2 - 6x + 8$ dan $f^1(x)$ adalah turunan pertama dari $f(x)$. Nilai $f^1(1)$ = ... (UN 2010)

a. 64 d. 56

b. 60 e. 52

c. 58

8. Diketahui $f(x) = (3x^2 - 5)^4$. Jika f' adalah turunan pertama f, maka $f'(x)$ = ... (UN 2011)

a. $4x(3x^2 - 5)^3$ d. $24x(3x^2 - 5)^3$

b. $6x(3x^2 - 5)^3$ e. $48x(3x^2 - 5)^3$

c. $12x(3x^2 - 5)^3$

Kelompok penerapan turunan

9. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 8$ di titik (-3, 2)adalah ....

a. $y = -8x - 26$

b. $y = -8x + 26$

c. $y = 8x + 22$

d. $y = 8x + 26$

e. $y = 8x - 26$

10. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 3x^2 - 8x + 1$ di titik (1,–4) adalah ....

a. $y - 2x + 6 = 0$

b. $y + 2x - 2 = 0$

c. $y + 2x + 2 = 0$

d. $y - 5x + 9 = 0$

e. $y + 5x - 1 = 0$

catatan : persamaan garis dapat disajikan dalam bentuk y = ax + b atau dalam bentuk ax+by+c =0, atau dalam bentuk by + ax + c = 0

11. Diketahui kurva y = $8x^2$-14x-15 dan titik P berabsis 1. Gradien garis singgung kurva yang melalui titik P adalah ....

a. -30 d. 2

b. -18 e. 30

c. -2

12. Persamaan garis singgung pada kurva y = $x^2 - 2x + 3$ di titik (2, 3) adalah ....

a. y = 2x –1

b. y = 2x – 7

c. y = 2x + 1

d. y = 3x – 1

e. y = 3x – 7

13. Nilai maksimum untuk fungsi f(x) = $x^3 - 3x^2 + 3$ pada interval $-1 \le x \le 2$ adalah ....

a. –6

b. –1

c. 3

d. 6

e. 8

14. Nilai maksimum untuk fungsi f (x) = $2x(x^2 - 12)$ pada selang $-3 \le x \le 2$ adalah ....

a. 8

b. 12

c. 16

d. 24

e. 32

15. Diketahui suatu kurva dengan persamaan f(x)=4 +3x - x^3 untuk x > 0 nilai maksimum dari f (x) adalah ....

a. 4

b. 5

c. 6

d. 7

e. 8

16. Nilai minimum fungsi kuadrat $f(x) = 3x^2 - 24x + 7$ adalah ....

a. –151

b. –137

c. –55

d. –41

e. –7

17. Sebuah perusahaan furnitur mempunyai sebanyak *x* orang pegawai yang masing-masing memperoleh gaji yang dinyatakan dengan fungsi $G(x) = (3x^2 - 900x)$ dalam rupiah. Jika biaya tetap satu juta rupiah dan agar biayanya minimum, maka banyaknya karyawan seharusnya ....

a. 200 orang

b. 400 orang

c. 600 orang

d. 800 orang

e. 900 orang

18. Untuk memproduksi barang perhari diperlukan biaya ($x^3 - 2000x^2 + 3000000x$) rupiah per unit. Agar biaya produksi per hari minimum maka jumlah barang yang harus diproduksi adalah .... unit

a. 1000

b. 1500

c. 2000

d. 3000

e. 4000

19. Beaya produksi per x unit barang dirumuskan $B(x) = x^2 - 6x + 20$. Banyak unit barang akan mencapai beaya minimum pada saat diproduksi sebanyak ... unit.

a. 8

b. 9

c. 10

d. 11

e. 12

20. Tinggi h meter dari sebuah peluru yang ditembakkan ke atas setelah t detik dinyatakan dengan $h(t) = 25 + 16t - 4t^2$. Tinggi maksimum yang dicapai peluru adalah ....

a. 40 meter

b. 41 meter

c. 42 meter

d. 43 meter

e. 44 meter

21. Suatu persegi panjang dengan panjang (2x + 4) cm dan lebar (4 -x) cm. Agar luas persegi panjang maksimum, ukuran panjang adalah ....

a. 4 cm

b. 6 cm

c. 8 cm

d. 10 cm

e. 12 cm

22. Biaya produksi barang dinyatakan dengan fungsi $f(x) = (x^2 - 100x + 4500)$ ribu rupiah. Biaya minimum untuk memproduksi barang tersebut adalah ....(UN 2010)

a. Rp1.000.000,00

b. Rp2.000.000,00

c. Rp3.500.000,00

d. Rp4.500.000,00

e. Rp5.500.000,00

23. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 20$ turun pada interval .... (UN 2010)

a. $-2 < x < 6$

b. $-6 < x < 2$

c. $-6 < x < -2$

d. $x < -6$ atau $x > 2$

e. $x < -2$ atau $x > 6$

24. Biaya produksi barang dinyatakan dengan fungsi $B(x) = (2x^2 - 180x + 2500)$ ribu rupiah. Agar biaya minimum , maka harus diproduksi barang sebanyak .... (UN 2011)

a. 30

b. 45

c. 60

d. 90

e. 135

25. Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ turun pada interval .... (UN 2011)

a. $1 < x < 3$

b. $-1 < x < 3$

c. $x < -3$ atau $x > -1$

d. $x < -1$ atau $x > 3$

e. $x < -3$ atau $x > 1$