等差数列

一般項

初項が a, 公差が d の等差数列の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a + d + d + \cdots + d \\ &= a + (n-1)d \end{aligned}$$

和の公式

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は,

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \end{aligned}$$

(初項 a_1 と末項 a_n の平均値 $\dfrac{a_1 + a_n}{2}$ を n 倍したものが S)

等比数列

一般項

初項が a, 公比が r の等比数列の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

和の公式

等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は,

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \end{aligned}$$

発展

a, b, c が〇〇数列

a, b, c がこの順に等差数列 $\iff$ $2b = a + c$

a, b, c がこの順に等比数列 $\iff$ $b^2 = ac$

(等差)×(等比) の数列の和 S

$\rightarrow$ $S - rS$ を計算する

和の公式

シグマの公式

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 \ + 1 \ + 1 \ + \cdots + 1 \ = n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 \ + 2 \ + 3 \ + \cdots + n \ = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right.$ は等差数列の和の公式で, $a_1 = 1, a_n = n$ とした場合と同じ$\left.\right)$

発展

階差数列

数列 $\{a_n\}$ の「隣り合う項の差」をとったときに現れる数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$n \geqq 2 \quad \text{のとき,} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$\sum_{k=1}^{n-1}$ を計算するには, シグマの公式の n を $n-1$ に置き換えればよい.

$$\sum_{k=1}^{n-1} 1 = (n-1)$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}(n-1)n$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2$$

部分分数分解

$$\frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

和と一般項の関係

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$