

Samopodobnost standardne preslikave Chirikovega

Aljaž Pavšek

18. januar 2020

1 Navodilo naloge

Ilustriraj hierarhijo faznega prostora v šibko kaotični standardni preslikavi. Izberi zaporedje povečav sekundarnih otokov regularnega gibanja (Poincaré-Birkhoffovih resonanc) pri primerinem parametru, $k \sim 1$. Napravi npr. zaporedje kakih 5-6 sličic, kjer je vsaka primerna povečava detajla prejšnje. Komentiraj samopodobnost v statističnem smislu.

2 Uvod

Preden se lotimo konstrukcije problema in analize rezultatov, je pametno ponoviti nekaj pojmov, ki so neposredno povezani z našim problemom.

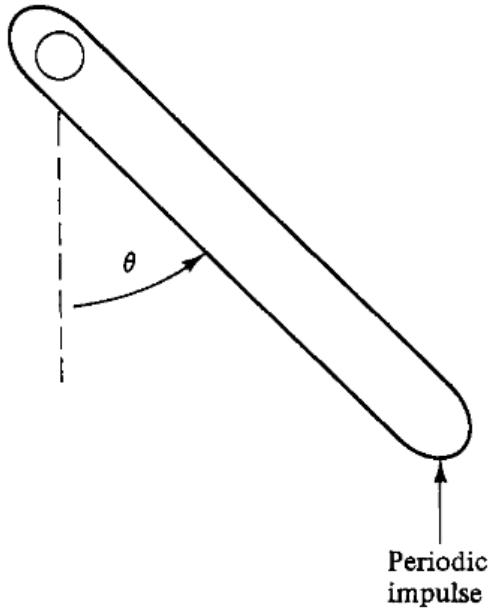
2.1 Brcan rotator in standardna preslikava

Standardna preslikava Chirikova, ki je eden od najbolj temeljito preučevanih dinamičnih sistemov, temelji na realnem fizikalnem sistemu tako imenovanega 'brcanega rotatorja'. Imamo palico z vztrajnostnim momentom \bar{I} , ki je vpeta na enem koncu in dopušča rotacijo okoli ene osi, pri čemer zanemarimo trenje (slika 1). Palico v periodičnih sunkih brcamo v navpični smeri (glede na sliko 1). Časovno odvisni Hamiltonijan takega sistema in njemu pripadajoče dinamične enačbe so

$$\begin{aligned} H(p, \theta, t) &= \frac{p^2}{2\bar{I}} + k \cos \theta \sum_n \delta(t - n\tau) \\ \frac{dp}{dt} &= k \sin \theta \sum_n \delta(t - n\tau) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p}{\bar{I}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Kot p_n in θ_n označimo vrednosti p in θ pri časih $t = n\tau + 0^+$. Če zgornji dinamični enačbi integriramo preko enega periodičnega časovnega intervala (do $t = (n+1)\tau + 0^+$), dobimo diskretizirano časovno evolucijo

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k \sin \theta_{n+1} \mod 2\pi \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + p_n \mod 2\pi. \end{aligned} \tag{2}$$



Slika 1: Brčani rotator. Vir: [1]

Vzeli smo $\tau/\bar{I} = 1$ in upoštevali periodičnost θ . Prav tako smo upoštevali periodičnost v p , kar se izkaže za eno glavnih lastnosti standardne preslikave. Omenimo še, da je preslikava simplektrična, torej ohranja diferencial 'simplekitičnega območja' [1]. Prav tako poudarimo, da vsi Hamiltonski sistemi ohranjajo $2N$ dimenzionalen volumen faznega prostora.

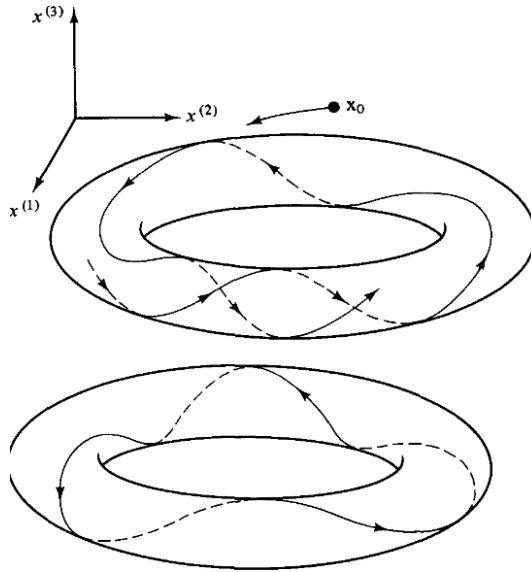
2.2 KAM teorem

N -dimenzionalni Hamiltonski sistemi $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, ki niso eksplisitno odvisni od časa, so integrabilni, če jim lahko najdem N neodvisnih konstant gibanja. Za tak sistem obstaja kanonična transformacija v tako imenovane 'action-angle' spremenljivke $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$. V brezdimenzijski obliki te spremenljivke tečejo med 0 in 2π . Za Hamiltonian v taki obliki je značilno, da ni več odvisen od prostorske koordinate $\boldsymbol{\theta}$. To nam da

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{q}} = 0 \\ \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \end{aligned} \tag{3}$$

oz.
 $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}(0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t.$

Komponente $\boldsymbol{\omega}$ so frekvence, s katerimi točke faznega prostora z neko energijo krožijo po iru-decibilnih zankah N dimenzionalnega torusa (slika 2). Če so razmerja posameznih komponent



Slika 2: 2D torus v 3D. Kvaziperiodična (zgoraj) in periodična (spodaj) orbita Vir: [1]

ω enaka nekim razmerjem celih števil m_i/m_j , $1 \leq i, j \leq N$, se orbita po n obhodih zaključi sama vase, če pa takih števil ni mogoče najti, trajektorija enakomerno zapolni cel torus. Za tako kvaziperiodično orbito karekterizirano z ω torej ne obstaja vektor \mathbf{m} ($m_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$), da bi veljalo

$$\omega \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (4)$$

KAM teorem nam podaja pogoj, glede na katerega bomo vedeli, če bo po neki majhni perturbaciji originalnega integrabilnega Hamiltonijana $H_0(\mathbf{I})$ ta ostal integrabilen. Hočemo torej najti taka nova \mathbf{I}' in θ' , da bomo perturbiran Hamiltonian

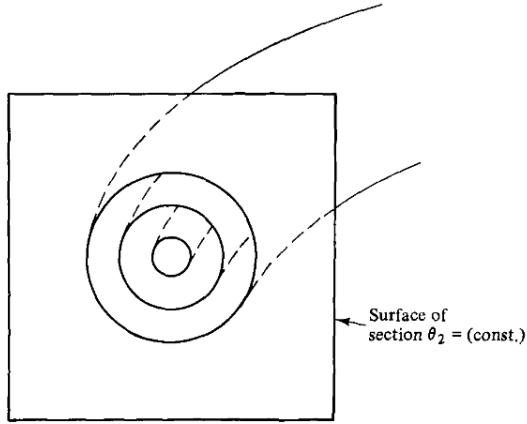
$$H(\mathbf{I}, \theta) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \theta) \quad (5)$$

lahko zapisali kot $H(\mathbf{I}')$. Brez dokazovnja o pravkar opisanem problemu povejmo le to, da je ključnega pomena za obstoj orbite po perturbaciji prav $\omega \cdot \mathbf{m} \neq 0$. Za take N-dimenzionalne toruse pravimo, da so neresonantni.

2.3 Poincaré-Birkhoff teorem

Kaj pa se zgodi z resonantnimi torusi, za katere velja $\omega \cdot \mathbf{m} = 0$ in na katerih imamo prave periodične orbite? Kot smo že omenili, ti torusi ne preživijo perturbacije.

Preučimo zadevo na primeru dinamičnega sistema z dvema prostostnima stopnjama ($N=2$), katerega fazni prostor lahko opišemo z 'angle-action' koordinatami $(\theta_1, \theta_2, I_1, I_2)$. Če izvedemo Poincaréjevo redukcijo in fiksiramo npr. θ_2 , dobimo diskretno preslikavo na ravnino (slika 3). Preseki torusov in ravnine so sklenjene zanke, ki jih lahko brez izgube splošnosti obravnavamo kot



Slika 3: Levo: Presek dvodimesionalnega torusa z ravnino $\theta_2 = \text{konst}$. Desno: Periodična orbita na resonantnem torusu. Vir: [1]

koncentrične kroge. Točke v tem prostoru lahko popolnoma opišemo s polarnimi koordinatami; $\phi \equiv \theta_1$, ki je periodična na 2π in I_1 , ki je proporcionalen radiju krožnic r . Dobimo diskretno preslikavo $(r_{n+1}, \phi_{n+1}) = \mathbf{M}_0(r_n, \phi_n)$:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi R(r_n) \mod 2\pi, \end{aligned} \tag{6}$$

kjer smo z rotacijskim številom $R(r_n)$ označili razmerje frekvenc ω_1/ω_2 ($\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_1, \omega_2) = (\partial H_0/\partial I_1, \partial H_0/\partial I_2)$), ki je za resonanten torus enako razmerju dveh celih, neničelnih števil m/n . Očitno je, da bo trajektorija po n obhodih celega torusa (ϕ_2 od 0 do 2π) prispevala nazaj v prvotno pozicijo (slika 2 spodaj), n-krat aplicirana preslikava $(\mathbf{M}_0)^n \equiv \mathbf{M}_0^n$ torej točke iz resonantnega torusa karakteriziranega z ω_1/ω_2 , prevede nazaj vase

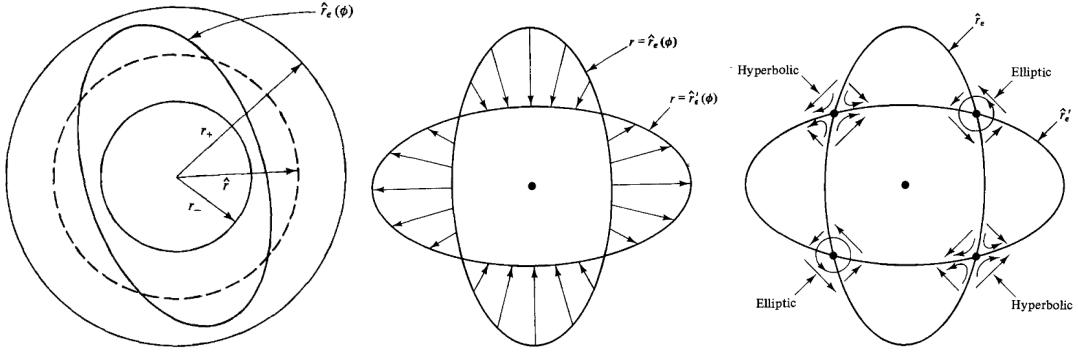
$$\mathbf{M}_0^n(r_{n+1}, \phi_{n+1}) = [r_n, \phi_n + 2\pi m \mod 2\pi] = (r_n, \phi_n). \tag{7}$$

Predpostavimo, da je \mathbf{M}_0^n v okolici resonantnega 'KAM' kroga neničelna v prvem odvodu. To pomeni, da se že pri majhni spremembi r točke na krogu z manjšim $r^- < r$ po preslikavi \mathbf{M}_0^n zasukajo v npr. pozitivni smeri. Prav tako se točke pri malo večjem $r^+ > r$ po preslikavi \mathbf{M}_0^n zasukajo v negativni smeri. Na preučevanem resonantnem torusu s periodo n , kot že omenjeno po \mathbf{M}_0^n ni spremembe v ϕ .

Po majhni perturbaciji Hamiltonijana (5) dobimo \mathbf{M}_ϵ :

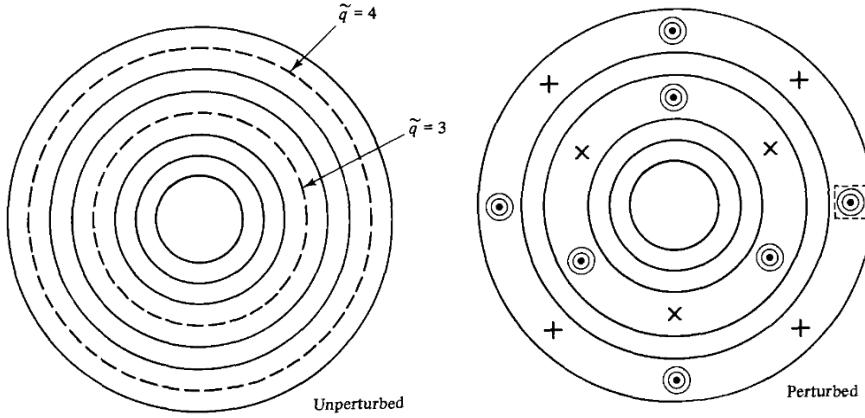
$$\mathbf{M}_\epsilon(r_{n+1}, \phi_{n+1}) = [r_n + \epsilon g(r_n, \phi_n), \phi_n + 2\pi R(r_n) + \epsilon h(r_n, \phi_n) \mod 2\pi] = (r_n, \phi_n). \tag{8}$$

Prav tako kot je v primeru pred perturbacijo med r^+ in r^- obstajala krožnica, na kateri se po preslikavi \mathbf{M}_0^n točke niso zasukale, mora po perturbaciji obstajati zanka $r_\epsilon(\phi)$ (slika 4 levo), na kateri se točke slikajo v $r'_\epsilon(\phi)$ kvečjemu v radialni smeri (slika 4 sredina). Ker se volumen preslikave ohranja, se krivulji $r_\epsilon(\phi)$ in $r'_\epsilon(\phi)$ sekata v sodem številu točk (verjetnost, da se krivulji tangentno stakneta, je glede na scenarij, ko se krivulji sekata, praktično 0). Če preučimo tok



Slika 4: Preslikava M_ϵ^n . Nevtralen krog, (na katerem ni zasuka), se po perturbaciji deformira v $r_\epsilon(\phi)$ (levo), ki ga preslikava M_ϵ^n slika v $r'_\epsilon(\phi)$ (sredina), kar rezultira v kreaciji sodega števila eliptičnih in hiperboličnih točk. Vir: [1]

točk v reduciranim faznem prostoru pri taki preslikavi, ugotovimo, da z majhno perturbacijo H_0 resonantne KAM krivulje s periodo n razpadejo na sodo število fiksnih točk preslikave M_ϵ^n , polovica katerih so eliptične in polovica hiperbolične točke (slika 4 desno). Nadaljnje opazimo, da ker so presečišča $r_\epsilon(\phi)$ in $r'_\epsilon(\phi)$ fiksne točke preslikave M_ϵ^n , mora po perturbaciji iz resonantnega torusa z rotacijskim številom m/n nastati n (ali večkratnik n) eliptičnih in prav tako število hiperboličnih točk (slika 5). Okoli novih eliptičnih točk imamo prav tako



Slika 5: Iz resonantnega torusa, na katerem so orbite periode \tilde{q} nastane $\alpha\tilde{q}$ hiperboličnih in $\alpha\tilde{q}$ eliptičnih točk, α je neko neznanost naravno število. Okoli novo nastalih eliptičnih točk se pojavijo nove q' periodične orbite (različni q'), ki prav tako razpadejo. Zgodba se ponavlja v neskončnost. Vir: [1]

neresonantne in resonantne KAM krivulje z novimi rotacijskimi števili. Slednje prav tako po perturbaciji razpadejo na nove verige eliptičnih otokov. Dobljena slika je sebi-podobna v frak-

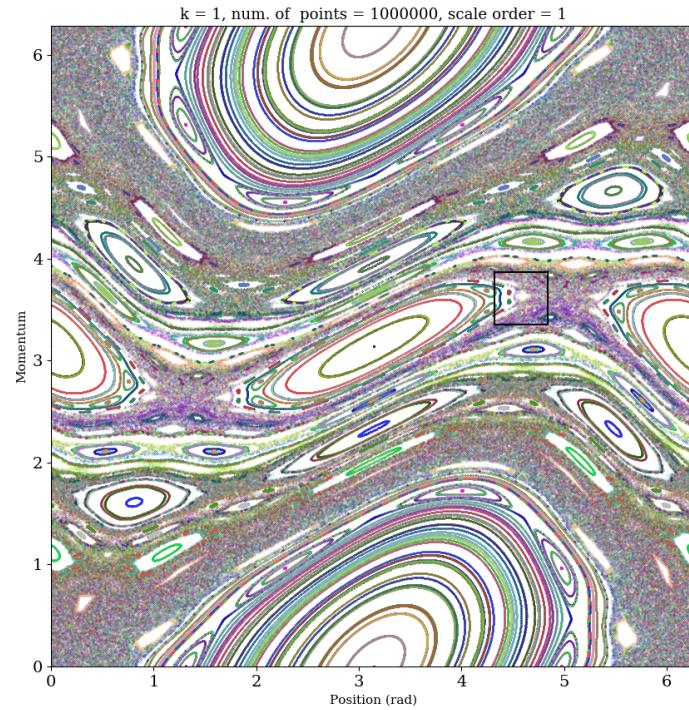
talnem smislu - na vseh velikostnih skalah lahko najdemo podobne strukture. Omenimo lahko še, da po zadostni perturbaciji začetnega Hamiltonijana pričnejo razpadati tudi neresonantni torusi. Stopnja perturbacije, ki je potrebna, da neresonantni torusi razpadajo, je neposredno povezana s 'stopnjo iracionalnosti' rotacijskega števila R (kako hitro aproksimacija R_n konvergira k pravi vrednosti, ko v reprezentaciji R_n z veržnim ulomkom zaporedno dodajamo člene a_i)

$$R_n = [a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots] \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n. \quad (9)$$

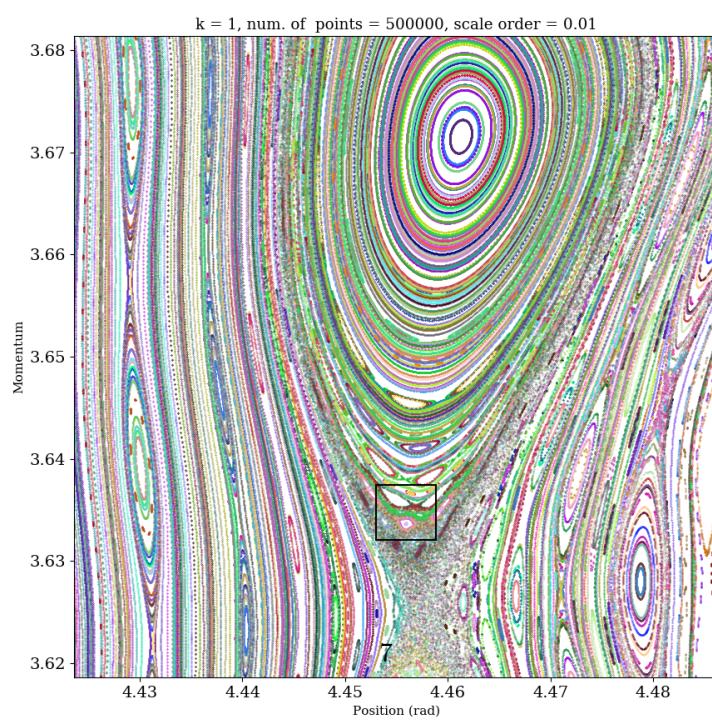
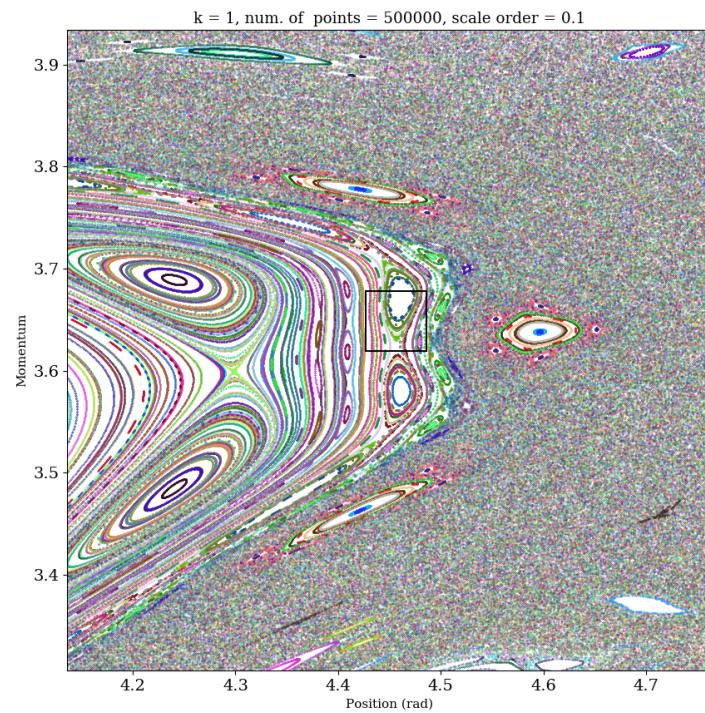
3 Samopodobnost standardne preslikave

3.1 Konstrukcija kode

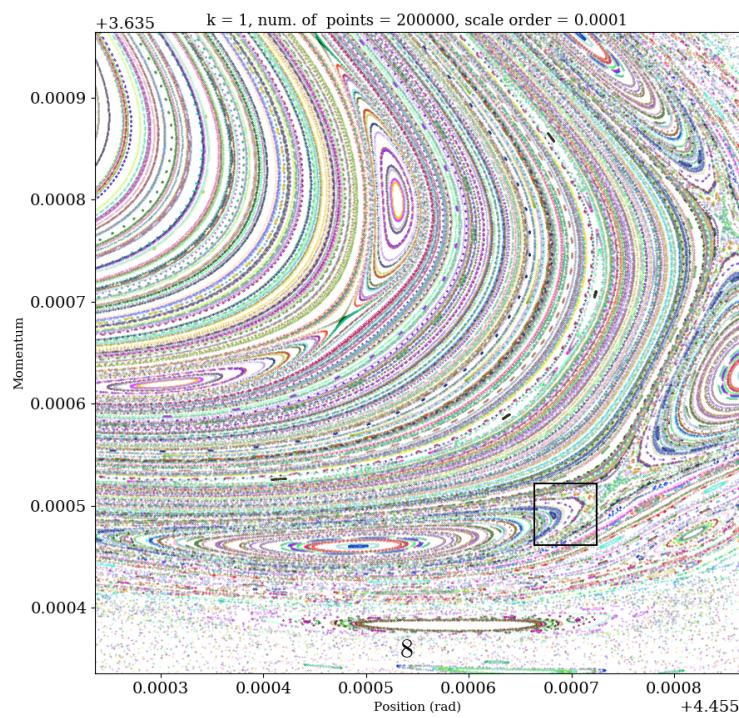
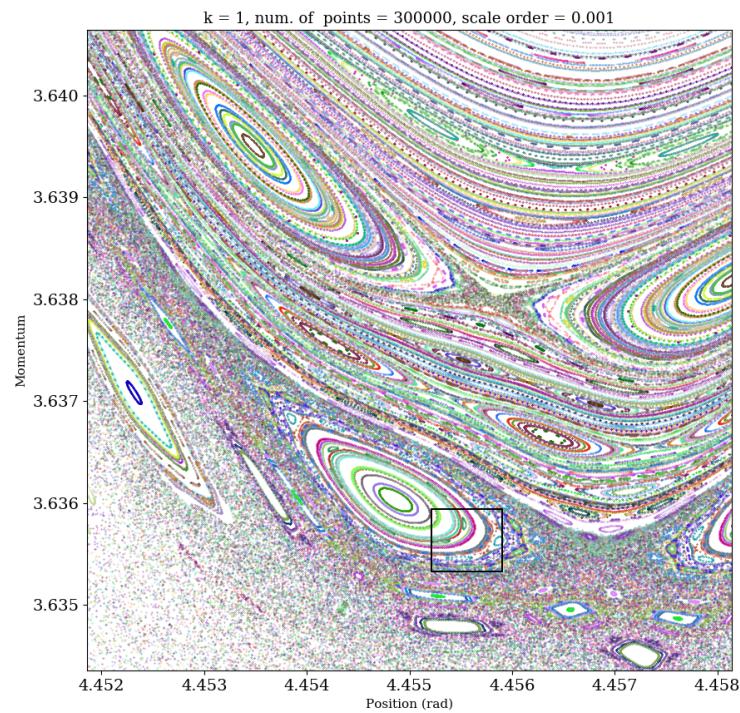
Izberemo mrežo $n \times n$ začetnih pogojev znotraj območja $\Sigma = [x - 10^{-m}\pi, x + 10^{-m}\pi] \times [p - 10^{-m}\pi, p + 10^{-m}\pi]$ za m -kratno povečavo. Začnemo izvajati iteracijo - propagiramo n^2 točk po en časovni korak naprej. Ko se na Σ nabere željeno število točk ($\mathcal{O}(10^5)$), iteracijo ustavimo in narišemo točke, ki izvirajo iz enakega začetnega pogoja z enako barvo.



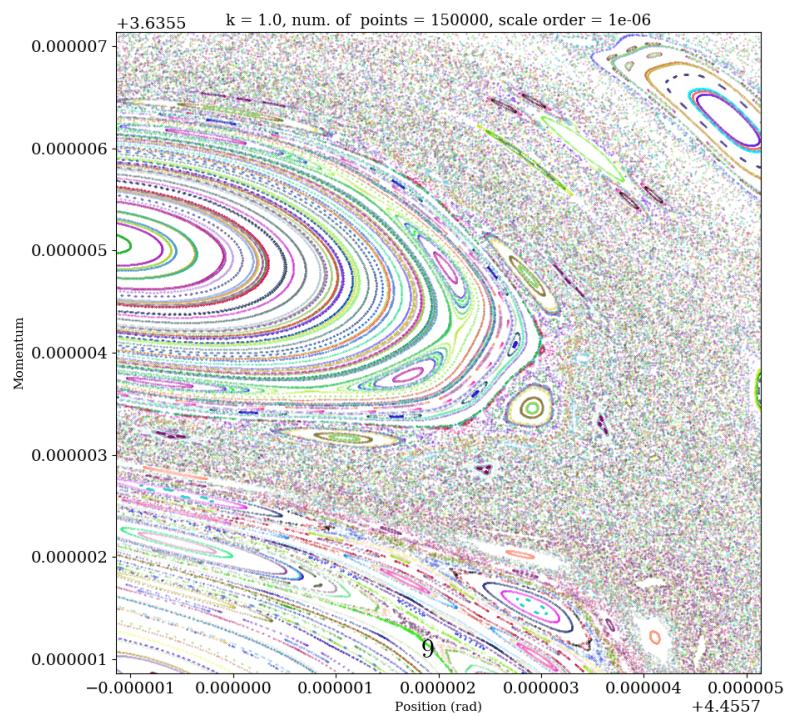
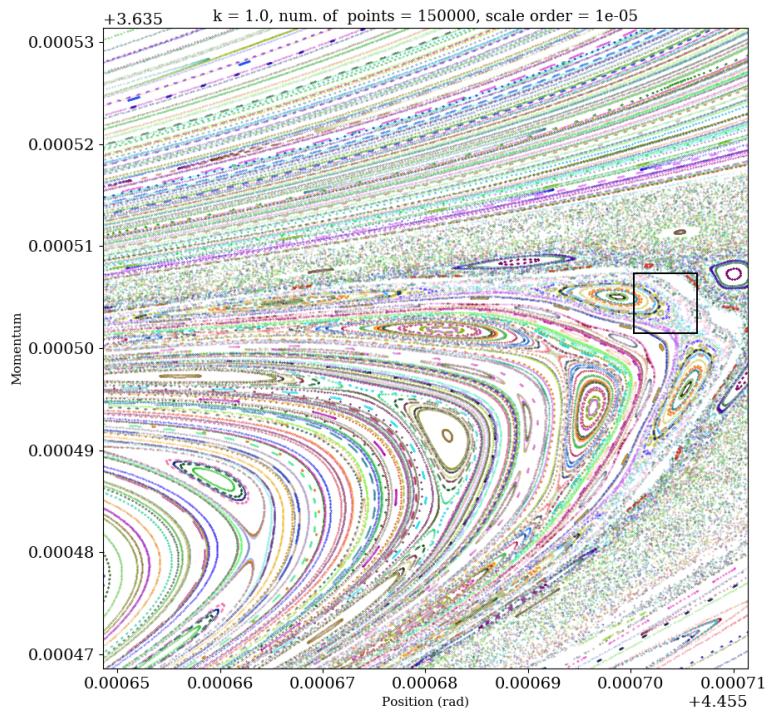
Slika 6: Standardna preslikava pri $k=1$. Vir: [\[1\]](#)



Slika 7: Standardna preslikava pri $k=1$, enkratna ($m=1$) in dvokratna ($m=2$) povečava. Vir: [1]



Slika 8: Standardna preslikava pri $k=1$, enkratna ($m=3$) in dvokratna ($m=4$) povečava. Vir: [1]



Slika 9: Standardna preslikava pri $k=1$, enkratna ($m=5$) in dvokratna ($m=6$) povečava. Vir: [1]

3.2 Rezultati

Prepišimo še enkrat enačbo (1) v 'angle-action' koordinatah (I_1, θ_1) (identičen izraz)

$$H(I_1, \theta_1, t) = \frac{I_1^2}{2\bar{I}} + k \cos \theta_1 \sum_n \delta(t - n\tau), \quad \tau/\bar{I} = 1. \quad (10)$$

Brcani rotor je Hamiltonski sistem z eno prostostno stopnjo ($N=1$), ki je periodično odvisen od časa s periodo τ (1). Fazni prostor razširimo na $2N+1=3$, tako, da uvedemo novo kotno spremenljivko θ_2 , ki je sorazerna času, tako da velja

$$\theta_2 + n\tau = \theta_2, \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}. \quad (11)$$

Na tak način lahko prostovrteči rotator opazujemo na preseku torusa z ravnino $\theta_2 = \text{konst.}$, velikost parametra k , ki je sorazmeren z intenzitetu 'brcanja', pa obravnavamo kot perturbacijo časovno neodvisnega dela Hamiltonijana.

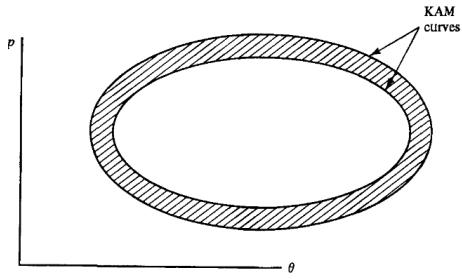
Na slikah 6-9 je prikazana standardna preslikava pri različnih povečavah. Na vsaki (razen zadnji) je označeno območje naslednje povečave. Slike so bile risane pri $k = 1$, ki je zelo blizu kritični vrednosti $k_c \approx 0.971635406$, pri kateri razpadne še zadnji neresonantni torus, ki v θ_1 teče čez cel fazni prostor (od 0 do 2π). Ta tako imenovani zlati krog (golden circle) izvira iz periodične orbite z rotacijskim številom R enakim zlatemu rezu $(1 + \sqrt{5}/2)$, ki je najbolj iracionalno (glede na (9) najpočasneje konvergira). V primeru Hamiltonskega sistema z eno prostostno stopnjo ($N=1$), katerega fazni prostor smo razširili še na časovno dimenzijo, je namreč R neposredno vezan le na edino 'nepoljubno' ohranjeno količino - energijo, ki določa frekvenco kroženja θ_1 (seveda to velja pod pogojem $\tau/\bar{I} = 1$, ki da diskretni enačbi (2) brezdimenzijsko obliko ter obenem fiksira τ , ki bi bil 'sorazmeren z I_2 ' v časovno razširjenem faznem prostoru).

Razlog, da smo opazovali samopodobnost standardne preslikave prav v bližini k_c je, da smo pri $k = k_c$ priča neke vrste faznemu prehodu v smislu, da korelacijska dolžina naraste preko vseh meja, kar pomeni, da je v tem obmučju k Poincaréjev fazni portret sebi-podoben preko različnih velikostnih skal. Prav tako je k_c meja, nad katero lahko moment I_1 neomejeno narašča. Difuzijo momenta pod k_c prepoveduje Poincaré-Caratanoov integralski teorem

$$\oint_{\Gamma_1} (pdq - Hdt) = \oint_{\Gamma_2} (pdq - Hdt), \quad (12)$$

ki obenem tudi narekuje, da se bo območje med dvema invariantnima KAM zankama slikalo samo vase (slika 10).

Na slikah 6-9 se lepo vidijo verige $\tilde{\gamma}$ eliptičnih otokov, ki imajo okoli sebe novih $\tilde{\gamma}'$ eliptičnih otokov, ki imajo spet okoli sebe $\tilde{\gamma}''$ eliptičnih otokov itd.



Slika 10: Območje med dvema invariantnima KAM zankama se slika samo vase. Vir: [1]

Literatura

- [1] Ott, E. (1993). *Chaos In Dynamical Systems*. Canada: Cambridge University Press