**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Комбинаторика

Combinatorics

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 051474

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение обучающихся классическим и современным приемам комбинаторики; развитие у обучающихся навыков построения комбинаторных моделей и их исследования.  
Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: ознакомление обучающихся с основными комбинаторными объектами и приемами работы с ними; развитие навыков решения комбинаторных задач; освоение некоторых аналитических приемов решения рекуррентных соотношений и работы с производящими функциями; получение опыта решения комбинаторных задач; развитие способности находить адекватное математическое описание прикладных проблем, приводящее к комбинаторным задачам.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Программа курса предназначена для обучающихся 1 курса. Обучающиеся должны владеть основными разделами школьной математики.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и умение использовать их в профессиональной деятельности. Умение строго доказать утверждение, корректно поставить задачу. Владение методами исследования математических моделей, описывающих проблемы естествознания и техники в виде комбинаторных задач. Получение способности к творческому применению, развитию и реализации математически сложных алгоритмов в современных специализированных программных комплексах.

Знание основных комбинаторных структур: упорядоченных и неупорядоченных выборок, перестановок, отображений, разбиений множеств и чисел, графов и их разновидностей; знание приемов комбинаторной теории вероятностей; умение находить математическую формулировку для прикладных комбинаторных задач и выбирать адекватные приемы для их решения; навыки решения рекуррентных соотношений и работы с производящими функциями.

Выпускник должен знать содержание дисциплины «Комбинаторика» и иметь представление о возможностях применения ее разделов, уметь решать комбинаторные задачи, сводящиеся к прямому подсчету или к разрешению несложных рекуррентных соотношений, освоить приемы работы с производящими функциями, не требующими знаний комплексного анализа.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Курс комбинаторики дает бакалавру комплекс комбинаторных и аналитических методов, применяемых в прикладных задачах и в других областях математики. Дисциплина «Комбинаторика» является одной из базовых в подготовке к профессиональной деятельности в области информационных технологий и служит основой для изучения других математических дисциплин как теоретического, так и прикладного характера, входящих в программу обучения на факультете, таких как теория вероятностей, дискретный анализ, топология.

Аудиторная учебная работа: практические занятия 2 часа в неделю во 2-м учебном семестре.

Самостоятельная работа с использованием методических материалов: индивидуальная работа с доступными информационными и образовательными ресурсами, имеющимися в библиотеке, в открытом доступе в сети Интернет и локальной сети Университета с целью преодоления индивидуальных трудностей в освоении отдельных разделов предмета, а также удовлетворения личных познавательных потребностей; решение задач и заданий.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 2 |  |  |  | 24 |  | 6 |  |  | 2 |  |  |  | 26 | 6 | 8 |  | 10 | 2 |
|  |  |  |  | 10-25 |  | 10-25 |  |  | 10-25 |  |  |  | 1-1 | 1-1 | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО |  |  |  | 24 |  | 6 |  |  | 2 |  |  |  | 26 | 6 | 8 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 2 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Тема 1. Базовые комбинаторные объекты и понятия

Метод математической индукции. Предполагается дать основные представления о методе и проиллюстрировать применения его задачами из разных разделов элементарной математики. Более сложные задачи на использование метода математической индукции рассматриваются в последующих темах.

Базовые комбинаторные объекты и их перечисление. Бином Ньютона. К базовым комбинаторным объектам относятся размещения, перестановки, сочетания и разбиения. Предполагается освоить соответствующие приемы рассуждений, включая выделение указанных понятий в различных ситуациях и применение бинома к выводу комбинаторных формул.

Формула включения-исключения. Эта тема выделена из предыдущей ввиду особой важности.

Графы и их элементарные свойства. Язык теории графов постоянно используется в разнообразных разделах математики. Предполагается освоить элементарные разделы этого языка и научиться рассуждать с его использованием, а также научиться решать простейшие задачи.

Раскраски графов и сходные задачи. Двумерный вариант леммы Шпернера. Раскраски плоскости. Теорема Хелли.

Тема 2: Комбинаторная теория вероятностей

Комбинаторика и вероятности. Предполагается дать общие представления о вычислении вероятностей по классическому определению на основе симметрии и перечислительных формул.

Тема 3: Рекуррентные соотношения и производящие функции

Линейные рекуррентные уравнения. Предполагается освоить навыки решения однородных уравнений, включая технику нахождения их частных решений и общий вид решения, а также принципы решения неоднородных уравнений.

Производящие функции и их применения к выводу комбинаторных формул. Предполагается разобрать важнейшие приемы составления уравнений при помощи производящих функций, а также процедуры решения этих уравнений в ряде случаев.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

По курсу комбинаторики предусмотрено проведение практических занятий. Практические занятия проводят опытные преподаватели, как правило, с большим стажем работы. Все обучающиеся должны быть обеспечены учебниками, рекомендованными по курсу.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

При выполнении индивидуальных и контрольных заданий обучающимся необходимо знать материал предшествующих практических занятий, уметь формулировать определения основных понятий и утверждений, уметь применять методы доказательств для решения конкретных задач. При самостоятельной работе целесообразно использовать рекомендованные учебники и задачники, а также дополнительную литературу.

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Применить метод математической индукции для доказательства тождеств.

2. Подсчитать количество комбинаторных объектов, сводя их к известным объектам и применяя правила сложения и умножения.

3. Доказать комбинаторное неравенство путем построения частичной биекции.

4. Распознать необходимость применения формулы включения-исключения и применить ее.

5. Свести прикладную задачу к задаче на графы и решить ее.

6. Найти вероятность осуществления событий в схеме равновероятных исходов.

7. Построить рекуррентное соотношение по комбинаторной задаче.

8. Решить линейное однородное или неоднородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами, либо заданное явно, либо возникающее при решении комбинаторных задач.

9. Найти уравнение на производящую функцию, возникающее из рекуррентного соотношения, связывающего ее коэффициенты.

10. Найти коэффициенты производящей функции, являющейся рациональной дробью, экспонентой, логарифмом или их простыми комбинациями.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

По дисциплине «Комбинаторика» в течение учебного семестра проводятся контрольные работы в соответствии с графиком, а также зачет. В процессе обучения каждый обучающийся снабжается набором задач, которые необходимо уметь решать для положительной оценки по аттестации.

Текущий контроль успеваемости проводится с помощью решения задач контрольных работ, а также домашних заданий по каждому из разделов курса. Успешное написание контрольных и решение хотя бы половины задач из домашних заданий является необходимым условием для получения зачета.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Зачет проводится в письменной форме. Обучающимся предлагается решить 5 задач по темам курса. Список тем сообщается обучающимся заранее, но сами задачи выдаются в начале зачета. В качестве одной (но не более) из задач может быть предложено дать определение и/или сформулировать важную теорему по теме курса. На решение задач и оформление решений отводится 120 минут. Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при решении задач зачета категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и обучающийся удаляется с зачета. После того, как обучающиеся сдают свои работы, преподаватель проверяет их и оценивает каждую задачу на основании написанного от 0 до 3 баллов. Оценка 3 балла выставляется за правильно решенную задачу, оценка 2 балла – за в принципе решенную задачу, при решении которой допущены незначительные погрешности (скажем, арифметические ошибки). Оценка 1 балл выставляется в случае, если решение не найдено, но присутствуют рассуждения, которые, будучи доведены до конца, могли бы привести к решению. В противном случае выставляется оценка 0 баллов. После проверки работы выдаются обучающимся для ознакомления, но должны быть возвращены преподавателю. В исключительных случаях по апелляции обучающегося преподаватель может повысить выставленную за ту или иную задачу оценку.

Для получения зачета необходимо набрать за все 5 задач в сумме не менее 7 баллов.

Нижняя грань в 7 баллов может быть понижена преподавателем по результатам всей группы, но не может быть повышена.

Примерный перечень вопросов к зачету по всему курсу:

1. Базовые комбинаторные объекты и понятия
2. Комбинаторная теория вероятностей
3. Рекуррентные соотношения и производящие функции
4. *n* семейных пар рассаживаются за длинный стол, сервированный на 2*n* человек, по *n* с каждой стороны. Найдите количество способов рассадки таких, что ни одна семейная пара не сидит друг напротив друга.
5. 3*n* человек делятся на *n* групп по 3 человека. Найдите количество способов сделать это так, чтобы четыре заданные человека попали каждый в свою группу.
6. Найдите формулу для количества разбиений множества из *n* элементов, в которых имеется блоков размера *i*, где , *i*=1,2,…,*n*, — заданные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношению .
7. Докажите, что количество разбиений числа *n* на 3 части равно количеству разбиений числа 2*n* на 3 части меньшего размера, чем *n*.
8. Предельный углеводород — молекула , в которой каждый из *m* атомов углерода имеет четыре связи, а каждый из *n* атомов водорода — одну связь, и никакая последовательность атомов не образует цикла. Как должны быть связаны *n* и *m*, чтобы такая молекула существовала?
9. Докажите, что в любой группе из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей. (Знакомство считается симметричным.) Приведите пример знакомств в компании из 5 человек, чтобы не было ни трех попарно знакомых, ни трех попарно незнакомых людей.
10. Имеется стопка из *n* карточек, на которых написаны числа от 1 до *n*. Стопку разделили на две непустых стопки, взяв несколько верхних карт, и не меняя порядка положили верхнюю часть вниз. Эту же процедуру проделали еще 2 раза. Найдите вероятность того, что после этого порядок чисел в стопке совпадет с исходным.
11. В ящике имеется 99 обычных монет и одна фальшивая, того же размера, что и обычная, но на обеих ее сторонах изображен герб. Вы выбрали из ящика одну монету и, подкинув ее несколько раз, все время получали гербы. Насколько длинной должна быть серия из гербов, чтобы можно было с вероятностью, большей 1/2, утверждать, что вы используете для бросков фальшивую монету?
12. Найдите явную формулу для последовательности , заданной начальными данными и рекуррентными соотношениями:
13. а) (*n*≥2), , ;
14. б) (*n*≥2), ;
15. в) (*n*≥3), , , .
16. Найдите явную формулу для количества способов замостить прямоугольник размера 2×*n* доминошками размера 1×2 и квадратиками размера 1×1. (Доминошки можно вращать.)
17. Докажите, что при всех *n*∈*N* количество разбиений числа *n*, в которых слагаемое *k* повторяется не более *k* раз, совпадает с количеством разбиений числа *n*, в которых отсутствуют слагаемые вида *j*(*j*+1), *j*=1,2,3,….
18. Найдите рекуррентное соотношение для количества последовательностей из 0 и 1 длины *n*, в которых никакая цифра не повторяется ровно два раза (но может повторяться большее число раз). Сведите ответ к рекуррентному соотношению конечного порядка.

Примерный перечень тем задач к зачету по всему курсу:

1. Элементарная теория графов: граф, компонента связности, деревья, циклы, теорема о рукопожатиях, лемма Шпернера.
2. Биномиальные коэффициенты, треугольник Паскаля, сочетания с повторениями.
3. Производящие функции; линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами; числа Фибоначчи, формула Бине.
4. Теория вероятностей: комбинаторное представление о вероятности, условная вероятность, формула полной вероятности, независимость событий.
5. Перестановки, количество перестановок; цикловая структура.
6. Разбиения множеств; числа Стирлинга первого и второго рода.
7. Индукция в комбинаторике.
8. Элементарная теория конечных множеств, формула включений и исключений, перестановки без неподвижных точек.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К преподаванию дисциплины могут быть допущены преподаватели, имеющие диплом о высшем образовании по соответствующему направлению.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Специальных требований нет.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Требуются стандартно оборудованные аудитории

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Не предусмотрены.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не предусмотрены.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не предусмотрены.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел, губки, бумага формата А4, канцелярские товары, картриджи принтеров, диски в объеме, необходимом для проведения занятий, по заявкам преподавателей.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М.:МЦНМО, 2010.

2. Харари Ф. Теория графов. М.:Либроком, 2009.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Холл М. Комбинаторика. М.:Мир, 1970.

2. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.:Наука, 1982.

3. Кнут Д., Грэхем Р., Паташник О. Конкретная математика. М.:Мир, 2006.

4. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. - М.: МЦНМО, 2007. ЭР открытого доступа в сети интернет: <https://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf>

5. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. - М.: Мир, 1977.

6. Харари Ф. Теория графов. – М, 2009-2015.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

1. http://www.etudes.ru,   
2. http://www.problems.ru

**Раздел 4. Разработчики программы**

Якубович Юрий Владимирович, Канд.ф-м.н., Доцент, yuyakub@gmail.com; 428-42-12