Teoría de Toma de Decisiones

Inferencia bayesiana recursiva

Capítulo 8 de “Bayesian perception: an introduction”, Wei Ji Ma, Kording, Goldreich

Nazareno Faillace

24/07

Inferencia bayesiana recursiva

Inferencia bayesiana + evolución temporal = Inferencia bayesiana recursiva

Idea general: discretizar el tiempo (por ejemplo, en intervalos de 100ms). Utilizar la creencia posterior a tiempo t como la creencia a priori a tiempo $t+1$. Combino esto con la likelihood del tiempo $t+1$ para obtener la creencia posterior a tiempo $t+1$ mediante la regla de Bayes.

$$p(m|x_{i+1}) \propto p(x_{i+1}|m)p(m|x_i)$$

Inferencia bayesiana recursiva

Inferencia bayesiana $+$ evolución temporal = Inferencia bayesiana recursiva

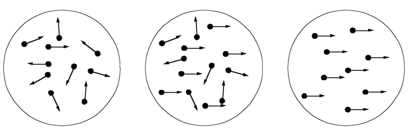
Idea general: discretizar el tiempo (por ejemplo, en intervalos de 100ms). Utilizar la creencia posterior a tiempo t como la creencia a priori a tiempo $t+1$. Combino esto con la likelihood del tiempo $t+1$ para obtener la creencia posterior a tiempo $t+1$ mediante la regla de Bayes.

$$p(m|x_{i+1}) \propto p(x_{i+1}|m)p(m|x_i)$$

Dos casos generales:

- El estado del mundo no cambia con el tiempo $\rightarrow$ Sistema no dinámico, acumulación de evidencia
- El estado del mundo cambia con el tiempo $\rightarrow$ Sistema dinámico

Sistema no dinámico - Acumulación de evidencia

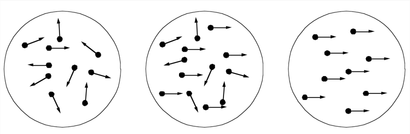


El sujeto incorpora información durante una ventana de tiempo. Sea x el estado del mundo y s_i la observación a tiempo i, suponiendo que las observaciones son condicionalmente independientes, tenemos lo siguiente:

$$p(x|s_1 \dots s_t) \propto p(x)p(s_1, \dots, s_t|x) =$$

$$= p(x)p(s_t|x)\prod_{i=1}^{N-1} p(s_i|x) \propto \underbrace{p(x|s_1, \dots, s_{t-1})}_{\text{posterior de } t\,-\,1}\ \underbrace{p(s_t|x)}_{\text{likelihood en } t}$$

Sistema no dinámico - Acumulación de evidencia



El sujeto incorpora información durante una ventana de tiempo. Sea x el estado del mundo y s_i la observación a tiempo i, suponiendo que las observaciones son condicionalmente independientes, tenemos lo siguiente:

$$p(x|s_1 \dots s_t) \propto p(x)p(s_1, \dots, s_t|x) =$$

$$= p(x)p(s_t|x) \prod_{i=1}^{N-1} p(s_i|x) \propto \underbrace{p(x|s_1, \dots, s_{t-1})}_{\text{posterior de } t\,-\,1} \underbrace{p(s_t|x)}_{\text{likelihood en } t}$$

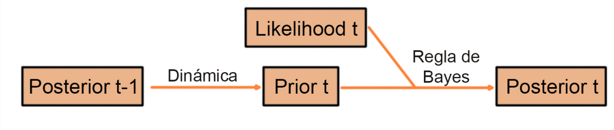
Como se trata de una tarea binaria, podemos considerar la variable de decisión dada por:

$$d = ln\left(\frac{p(x = \leftarrow |s_1, \dots, s_N)}{p(x = \rightarrow |s_1, \dots, s_N)}\right) = ln\left(\frac{p(x = \leftarrow)}{p(x = \rightarrow)}\right) + \sum_{i=1}^{N} ln\left(\frac{p(s_i|x = \leftarrow)}{p(s_i|x = \rightarrow)}\right)$$

Cuando d supera cierta cota superior o cae debajo de cierta cota inferior, el sujeto toma una decisión.

Sistema dinámico

- El estado del mundo cambia a lo largo del tiempo siguiendo cierta dinámica
- Cada estado depende sólo del estado anterior (proceso de Markov)
- El sujeto conoce la dinámica



Sistema dinámico - Caso discreto - Modelo oculto de Markov

Dirección real: I, D   Dirección observada: $\leftarrow$, $\rightarrow$

La dinámica del sistema viene dada por:

$$
\begin{array}{ll}
p(I_{i+1}|I_i) = 0{,}8 & p(I_{i+1}|D_i) = 0{,}2 \\
p(D_{i+1}|I_i) = 0{,}2 & p(D_{i+1}|D_i) = 0{,}8
\end{array}
$$

Sistema dinámico - Caso discreto - Modelo oculto de Markov

Dirección real: I, D   Dirección observada: $\leftarrow$, $\rightarrow$

La dinámica del sistema viene dada por:

$$p(I_{i+1}|I_i) = 0{,}8 \qquad p(I_{i+1}|D_i) = 0{,}2$$
$$p(D_{i+1}|I_i) = 0{,}2 \qquad p(D_{i+1}|D_i) = 0{,}8$$

Entonces, utilizando la probabilidad posterior de i y teniendo en cuenta la dinámica, podemos obtener la probabilidad prior de $i + 1$ mediante marginalización:

$$p(R_{i+1}) = p(R_{i+1}|R_i)p(R_i) + p(R_{i+1}|L_i)p(L_i)$$
$$p(L_{i+1}) = p(L_{i+1}|L_i)p(L_i) + p(L_{i+1}|R_i)p(R_i)$$

Dirección real: I, D   Dirección observada: $\leftarrow$, $\rightarrow$

La dinámica del sistema viene dada por:

$$p(I_{i+1}|I_i) = 0{,}8 \qquad p(I_{i+1}|D_i) = 0{,}2$$
$$p(D_{i+1}|I_i) = 0{,}2 \qquad p(D_{i+1}|D_i) = 0{,}8$$

Entonces, utilizando la probabilidad posterior de i y teniendo en cuenta la dinámica, podemos obtener la probabilidad prior de $i+1$ mediante marginalización:

$$p(R_{i+1}) = p(R_{i+1}|R_i)p(R_i) + p(R_{i+1}|L_i)p(L_i)$$
$$p(L_{i+1}) = p(L_{i+1}|L_i)p(L_i) + p(L_{i+1}|R_i)p(R_i)$$

Por otro lado, la función de likelihood viene dada por:

$$p(\leftarrow|I) = 0{,}8 \qquad p(\rightarrow|I) = 0{,}2$$
$$p(\leftarrow|D) = 0{,}2 \qquad p(\rightarrow|D) = 0{,}8$$

Sistema dinámico - Caso discreto - Modelo oculto de Markov

Dirección real: I, D **Dirección observada: $\leftarrow$, $\rightarrow$**

La dinámica del sistema viene dada por:

$$p(I_{i+1}|I_i) = 0{,}8 \qquad p(I_{i+1}|D_i) = 0{,}2$$
$$p(D_{i+1}|I_i) = 0{,}2 \qquad p(D_{i+1}|D_i) = 0{,}8$$

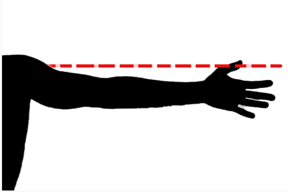
Entonces, utilizando la probabilidad posterior de i y teniendo en cuenta la dinámica, podemos obtener la probabilidad prior de $i+1$ mediante marginalización:

$$p(R_{i+1}) = p(R_{i+1}|R_i)p(R_i) + p(R_{i+1}|L_i)p(L_i)$$
$$p(L_{i+1}) = p(L_{i+1}|L_i)p(L_i) + p(L_{i+1}|R_i)p(R_i)$$

Por otro lado, la función de likelihood viene dada por:

$$p(\leftarrow|I) = 0{,}8 \qquad p(\rightarrow|I) = 0{,}2$$
$$p(\leftarrow|D) = 0{,}2 \qquad p(\rightarrow|D) = 0{,}8$$

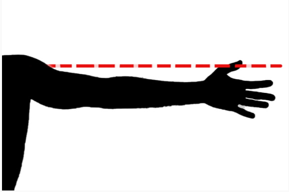
$\rightarrow$ luego ,aplicamos la regla de Bayes para obtener la probabilidad posterior a tiempo $i+1$



Se asume que las probabilidades prior y posterior siguen una distribución normal y que la función de likelihood es gaussiana. Por otro lado, se tiene que el sistema evoluciona con la siguiente dinámica:

$$x_{n+1} = Ax_n + \eta \qquad A \in (0,1],\ \eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

Sistema dinámico - Caso continuo - Filtro de Kalman

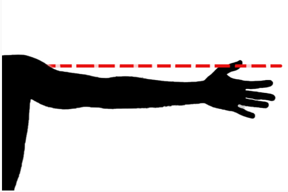


Se asume que las probabilidades prior y posterior siguen una distribución normal y que la función de likelihood es gaussiana. Por otro lado, se tiene que el sistema evoluciona con la siguiente dinámica:

$$x_{n+1} = Ax_n + \eta \qquad A \in (0, 1],\ \eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

Nuevamente, para obtener la prior de $i+1$, utilizamos la posterior de i y la dinámica. En este caso, la marginalización da lugar a una convolución de dos gaussianas. Así, si teníamos que la probilidad posterior a tiempo i es $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces la probabilidad prior a tiempo $i+1$ sigue una distribución $N\left(A\mu_i, \sqrt{A^2\sigma_i^2 + \sigma_\eta^2}\right)$.

Sistema dinámico - Caso continuo - Filtro de Kalman



Se asume que las probabilidades prior y posterior siguen una distribución normal y que la función de likelihood es gaussiana. Por otro lado, se tiene que el sistema evoluciona con la siguiente dinámica:

$$x_{n+1} = Ax_n + \eta \qquad A \in (0,1],\ \eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

Nuevamente, para obtener la prior de $i+1$, utilizamos la posterior de i y la dinámica. En este caso, la marginalización da lugar a una convolución de dos gaussianas. Así, si teníamos que la probilidad posterior a tiempo i es $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces la probabilidad prior a tiempo $i+1$ sigue una distribución $N\left(A\mu_i, \sqrt{A^2\sigma_i^2 + \sigma_\eta^2}\right)$. Luego, podemos aplicar la regla de Bayes para obtener la distribución posterior a tiempo $i+1$

Al aplicar la regla de Bayes en cada intervalo temporal, tenemos que:

$$\mu_{\text{posterior}} = A\mu_{\text{prior}}(1 - W) + W\mu_{\text{likelihood}} \qquad W = \frac{\sigma^2_{\text{prior}}}{\sigma^2_{\text{prior}} + \sigma^2_{\text{likelihood}}}$$

En el contexto del filtro de Kalman, W es denominada ganancia de Kalman (*Kalman gain*) y sirve para medir si el sujeto le da más peso a la observación o a la estimación a priori.

Sistema dinámico - Caso continuo - Filtro de Kalman