Практика

Жаров Никита

Задачи. 0

1. Пусть k – некоторое поле и $p \in k[x]$ – произвольный многочлен степени n. Через $k[x]_{<n}$ обозначим многочлены степени строго меньше, чем n.

   (a) На множестве $k[x]_{<n}$ введем операции сложения и умножения следующим образом: если $f, g \in k[x]$, то $f + g := f + g \pmod p$ и $fg := fg \pmod p$. Покажите, с этими операциями $k[x]_{<n}$ превращается в коммутативное кольцо.

   (b) Что является единицей и нулем этого кольца?

   (c) Пусть $f \in k[x]_{<n}$. Когда к элементу f существует обратный? Как найти обратный явно?

   (d) Рассмотрим отображение $\pi\colon k[x] \to k[x]_{<n}$ по правилу $f \mapsto f \pmod p$. Покажите, что это отображение является гомоморфизмом колец.

   (e) Докажите, что π сюръективно, а его ядро совпадает с (p).

   (f) Покажите, что $k[x]/(p) \cong k[x]_{<n}$ как кольца.

   Пользуясь последним утверждением мы будем отождествлять остатки $k[x]_{<n}$ с фактором $k[x]/(p)$. В частности, можно считать, что $1, x, \ldots, x^{n-1}$ образуют базис $k[x]/(p)$. *Решение*:

   (a) Нам нужна коммутативность умножения. Это явно следует из того, как мы его задали, ведь само умножение многочленов коммутативно, а взять результата этого действа по модулю, не изменится при перестановке множителей. У нас присутствует ассоциативность сложения (без разницы в каком порядке брать остаток), Существует 0 (остаток от него 0), есть обратный, дистрибутивность умножения. И существует единица для умножения, ведь прежде чем взять остаток умнлжим на 1 и многочлен не поменяется.

   (b) Из предыдущего пункта следует, что единица и нуль этого кольца это единица и нуль из k, ведь мы работаем над ним.

   (c) Если многочлен p взаимнопрост с f и не приводим в кольце, то можем найти обратный, а в явном виде используем расшиеренный алгоритм Евклида и найдем представление мнолгочленов в таком виде $af + bp = 1$, отсюда и обратный

   (d) проверим сложение: $\pi(f + h) = f + h(modp) = f(modp) + h(modp) = \pi(f) + \pi(h)$ умножение: $\pi(fh) = fh(modp) = f(modp)h(modp) = \pi(f)\pi(h)$

   (e) Видим, что все многочлены из образа, совпадают с многочленами $k[x]_{<n}$, значит сюръекция есть.

   (f) из предыдущих пунктов плюс в ядро входят все многочлены кратные p, но вспомним определение идеала, из него следует, что в (p), лежат только такие и все кратные p значит идеал и ядро совпадают. По теореме о гомоморфизме колец изоморфизм.

2. Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$ имеет вид $p(x) = 3 - 2x - 2x^2 + x^3$.

   (a) Найдите чему равны произведения $x^i x^j$ в кольце $\mathbb{C}[x]/(p) = \mathbb{C}[x]_{<3}$, где $0 \leqslant i, j \leqslant 2$.

   (b) Выясните к каким из следующих элементов существует обратный и найдите его: x, $x - 1$ и $x^2 - 1$.

   Решение: Элементы данного факторкольца представляются единственным образом в виде многочлена второй степени. Любой многочлен в данном факторкольце записывается в таком виде, при помощи взятия остатка от деления на многочлен $p(x)$

(a) Элементы $x^i x^j$, где $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ в итоге будут иметь вид x^{i+j}, следовательно степень данного элемента будет $\leqslant 4$. Теперь рассмотрим как они представимы. Все элементы степени меньше 3, то есть $1, x, x^2$, остаются как и были. Но у нас есть еще степень 3 и 4. Для x^3, надо чтобы выполнялось равенство для многочлена нулю, то есть $p(x) = 3-2x-2x^2+x^3 = 0$, следовательно $x^3 = 2x+2x^2-3$. Остался x^4, его найдем домножив x^3 на x, $x^4 = 2x^2+2x^3-3x$ подставим вместо x^3, его в нашем виде и получится, что $x^4 = 2x^2+2(2x+2x^2-3)-3x = 6x^2+x-6$. Нашли все элементы $x^i x^j$ $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ в данном факторкольце.

(b) Обратные элементы есть для всех многочленов взаимнопростых с $p(x)$. К x очень легко найти обратный. Выведем x из такого равненства $p(x) = 0$, получаем $x(\frac{2}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{3}) = 1$, отсюда обратный к x это $\frac{2}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{3}$. Далее $p(x)$ кратен $x-1$ (при делении получится x^2-3-x), следовательно взаимной простоты нет. $x-1$ входит в x^2-1, следовательно для него тоже не достигается условие нахождения обратного элемента.

Задачи. 1

1. Рассмотрим модуль $V = k[x]/(p)$, где p – некоторый многочлен, как векторное пространство. И пусть оператор $\varphi\colon V \to V$ задан умножением на x.

   (a) Найдите матрицу этого оператора в базисе $1, x, \dots, x^{n-1}$.

   (b) Найдите след этого оператора.

   (c) Найдите определитель этого оператора.

   Решение:

   (a) Главный идеал после деления многочлена на старший коэффициентp не изменится и $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. Базис этого векторного пространства после применения к нему оператора φ, базис будет иметь вид: $x, x^2, \dots, x^{n-1}$, x^n выразим через $p(x)$ и он будет иметь вид $x^n = -c_0 - c_1 x - \dots - c_{n-1}x^{n-1}$. Матрицей л.о. является матрица в которой по столбцам записаны координаты образов базисных векторов. Поэтому наша матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & . & -c_1 \\ . & 1 & 0 & . & -c_2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

   (b) Как видим на главной диагонали, кроме последнего элемента все нули, следовательно след матрицы будет равен $-c_{n-1}$

   (c) Как видим из вида матрицы, для нахождения определителя лучше всего воспользоваться разложением по строке/столбцу. В данном случае лучше всего раскладывать по первой строке, тк как там один элемент и минор имеет вид единичной матрицы. Получаем определитель равный $(-1)^{n-1}(-c_0) \cdot det\|E\| = (-1)^{n-1}(-c_0)$

2. Пусть $V = k[x]/(p) \oplus k[x]/(q)$, где p и q – взаимнопростые многочлены. Тогда любой элемент $v \in V$ имеет вид $v = (a, b)$, где $a \in k[x]/(p)$ и $b \in k[x]/(q)$.

   (a) Так как p и q взаимно просты, то найдутся такие $f, h \in k[x]$, что $1 = fp + hq$. Покажите, что $f(x)p(x)v = (0, b)$ и $h(x)q(x)v = (a, 0)$.

   (b) Покажите, что множество элементов вида $\{(a, 0) \mid a \in k[x]/(p)\}$ совпадает с $\ker p(x)$, а множество элементов $\{(0, b) \mid b \in k[x]/(q)\}$ с $\ker q(x)$.

   Решение:

   (a) Сначала поймем что из себя представляет элемент вида $f(x)p(x)v$ - это $f(x)p(x)(a, b) = (f(x)p(x)a, f(x)p(x)b)$. Но при этом $f(x)p(x)a$ из-за a равен 0 по модулю идеала (p). Теперь второй элемент: из равенства данного в условии про взаимнопростые многочлены, то $f(x)p(x) = 1 - h(x)q(x)$, что значит, что по модулю идеала (q) он равен b. Следовательно $f(x)p(x)(a, b) = (0, b)$. Для $h(x)q(x)v$ все будет аналогично и он будет равен $(a, 0)$.

(b) К сожалению не очень понял, что из себя представляет отображение как многочлен и как искать у него ядро. Осмелюсь предположить, что есть какое-то отображение, например из пары элементов на второй, тогда дествительно ядром у первого будет $(a, 0)$ и для второго аналогично $(0, b)$

Утверждение. *Определитель матрицы T кососимметричен по столбцам, то есть выполнены следующие свойства:*

1. $\det(T_1|\ldots|T_i + T_i'|\ldots|T_n) = \det(T_1|\ldots|T_i|\ldots|T_n) + \det(T_1|\ldots|T_i'|\ldots|T_n)$.
2. $\det(T_1|\ldots|\lambda T_i|\ldots|T_n) = \lambda \det(T_1|\ldots|T_i|\ldots|T_n)$.
3. $\det(T_1|\ldots|T_i|\ldots|T_k|\ldots|T_n) = -\det(T_1|\ldots|T_k|\ldots|T_i|\ldots|T_n)$.

Задача. 2 Докажите это утверждение в случае матриц 3 на 3, когда второй столбец состоит из элементов модуля M.

Решение: Заметим, что если раскрывать по строке в которой все элементы умноженный на какой-то коэффициент, то миноры умножатся на такой же коэффициент следовательно и все элементы определителя умножатся на этот коэффициент. Далее, если представим какую-либо из трех строк как сумму из других строк $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$. То при раскрытии по этой строке, получим в миноре опять сумму двух миноров с элементами a'_{ij} и a''_{ij}. Это все показывает линейность определителя разложенного по строке/столбцу, первые два условия из утверждения. Кососимметричность видна в явном виде, так как чтобы переставить строки нам всегда требуется нечетное количество шагов, то есть определитель сменит каждый раз знак, что и говорит о его кососимметричности.

Каждое из этих свойств можно показать явно большим количеством сумм по формулам по определению.

Теперь все-таки вспомним, что вопрос стоял о применении модуля как второго столбца. Кольцо над которым наш модуль - коммутативное, следовательно по правилам действия с модулями (аксиомам), имеют место равенства вида $n(m' + m'')l = nm'l + nm''l$) (где $m \in M; n, l \in A$, A - коммутативное кольцо), а также $(n' + n'')ml = n'ms + n''ml$, и $nm(l' + l'') = nml' + nml''$. То есть тут полная аналогия со случаем, когда все переменные принимали бы значения в кольце. Поэтому предыдущие рассуждения с обычными определителями переносятся на этот случай, когда $a_{2j} \in M$ (элементы второго столбца), и $a_{1j}, a_{3j} \in A$.

Задача. 3 Рассмотрим $V = \mathbb{C}[x]/((x-\lambda)^k)$ как векторное пространство. Тогда оператор $\varphi\colon V \to V$ задан умножением на x. Найдите матрицу этого оператора в базисе $(x-\lambda)^{n-1}, \ldots, (x-\lambda), 1$.

Решение: Рассмотрим куда перейдут базисные вектора после умножения на $x - \lambda$. Они сместятся по кругу (циклические), кроме первого, он перейдет в 0, тк как $(x-\lambda)^n = 0$ в V. Значит столбцы матрицы координат этого набора векторов базиса после умножения на $x - \lambda$ будет иметь вид матрицы, в которой будут все единицы выше диагонали и остальные элементы нули. Наш оператор представляет из себя умножение на x, он представим в таком виде $x = (x-\lambda) + \lambda$. Для λ матрица ло будет иметь вид единичной с λ на диагонали, а матрицу первого мы уже описали. Так как оператор линейный, то он представим в виде суммы двух ло, матрицы которых мы описали сложим их и получим матрицу такого вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \lambda \end{pmatrix}$$

Как можно заметить это выглядит как Жорданова клетка:)

Задача. 4 Пусть V – векторное пространство с оператором $\varphi\colon V \to V$, рассматриваемое как модуль над $\mathbb{C}[x]$. Докажите, что

1. пространство V изоморфно $\mathbb{C}[x]/((x-\lambda)^k)$ тогда и только тогда, когда в каком-то базисе матрица φ совпадает с $J_k(\lambda)$.
2. пространство V изоморфно прямой сумме модулей $V_1 \oplus V_2$ тогда и только тогда, когда существует базис, в котором матрица φ блочно диагональная $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

3. пространство V изоморфно $\bigoplus_{i=1}^{k}\mathbb{C}[x]/((x-\lambda_i)^{n_i})$ тогда и только тогда, когда существует базис, в котором матрица φ имеет вид
$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}$$

Решение:

1. В предыдущей задаче мы показали что это оператор имеет матрицу в виде Жордановой клетки. Поэтому доказательство в одну сторону у нас уже есть.

   Но перед доказательством в обратную сторону увидим что, объекты вида $\mathbb{C}[x]/((x-\lambda)^k)$ для фикс. k и различных λ, будут изоморфны, так как они имеют одинаковые размерности. Но в задаче речь идёт о пространствах с оператором, то есть фактически о $\mathbb{C}[x]$-модулях. Допустим, что при $\lambda \neq \mu$ имеется изоморфизм модулей $f\colon V_1 \to V_2$, где $V_1 = \mathbb{C}[x]/((x-\lambda)^k)$, $V_2 = \mathbb{C}[x]/((x-\mu)^k)$. Тогда действие $(x-\mu)^k$ на любой вектор $v \in V_2$ нулевое, так как $(x-\mu)^k$ представляет собой нулевой многочлен в факторкольце. С другой стороны, действие $(x-\mu)^k$ также нулевое, так как при $v = f(w)$, $w \in V_1$, получается $(x-\lambda)^k v = (x-\lambda)^k f(w) = f((x-\lambda)^k w) = f(0) = 0$

   Многочлены $(x-\mu)^k$ и $(x-\lambda)^k$ взаимно просты, поэтому 1 можно по ним разложить в виде $1 = u(x)(x-\lambda)^k + v(x)(x-\mu)^k$ для некоторых $u, v \in \mathbb{C}[x]$, откуда получится, что $v = 0$ для всех $v \in V_2$, противоречие, так как V_2 ненулевое по причине $\dim V_2 = k \geq 1$ Как можно еще заметить что если V имеет пока не известную нам структуру, но матрица оператора умножения на x в каком-то базисе равна $J_k(\lambda)$, то матрица $(x-\lambda)^k$ оказывается нулевой, и $\mathbb{C}[x]$-модуль становится $\mathbb{C}[x]/((x-\lambda)^k)$-модулем. Изоморфизм V и пространства $\mathbb{C}[x]/((x-\lambda)^k)$ усматривается на основании рассмотрения базиса из единичных векторов, которые порождают всё пространство в силу совпадения размерностей, а действие умножения на x на этом базисе нам известно.

2. У нас блочная матрица, поэтому берем базис из единичных векторов. Первые n (размер матрицы A_1) базисов порождают подмодуль V_1, последние m (размер матрицы A_2) базисов порождают подмодуль V_2, n и m очевидно не пересекаются и в сумме дают все V, значит сумма подмодулей прямая, значит V изоморфно $V_1 \oplus V_2$

   В другую сторону, если дана прямая сумма, то выбираем в каждом из слагаемых этой суммы базисы Векторы любого из этих базисов задают подпространство, инвариантное относительно действия оператора. Если взять матрицы оператора в каждом базисе (это матрицы $A_1 A_2$), то увидим, что при их объединении оператор дает блочную структуру.

3. Как мы увидели ранее если $V \simeq \oplus_{i=1}^{k}\mathbb{C}[x]/((x-\lambda_i)^{n_i})$, то матрица оператора (в нужных базисах) имеет вид Жордановой формы. В другую сторону, если матрица имеет блочный вид, то по предыдущему пункту и с помощью математической индукции получим разложение всего V в прямую сумму, где разложение оператора на прямые слагаемые имеет вид Жордановой клетки, в определенном базисе. Тогда по первому пункту этой задачи видим, что вся сумма изоморфна $\mathbb{C}[x]/((x-\lambda_i)^{n_i})$.

Пусть M – конечномерный модуль над кольцом $k[x]$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис M как векторного пространства над k. Рассмотрим гомоморфизм $k[x]$ модулей $\pi\colon k[x]^n \to M$ по правилу $(f_1, \ldots, f_n) \mapsto f_1(x)e_1 + \ldots + f_n(x)e_n$. Так как e_i были базисом, то это отображение сюръективно. Тогда по теореме о гомоморфизме $M \cong k[x]^n / \ker\pi$.

Пусть $u_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in k[x]^n$, где 1 стоит на i-ом месте. Тогда u_i являются базисом модуля $k[x]^n$. Кроме того, как $k[x]$-модуль ядро $\ker\pi$ порождается последовательностями вида $m_\alpha = (g_1^\alpha, \ldots, g_n^\alpha)$, где α пробегает какое-то (вообще говоря бесконечное) множество. Рассмотрим матрицу T составленную из строк m_α. У нее n столбцов и бесконечное количество строк. Такая матрица полностью задает ядро $\ker\pi$.

Замена базиса в $k[x]^n$ Определим на образующих u_i (определенных выше) следующие элементарные операции.

1. Для фиксированного i и некоторого ненулевого $\lambda \in k$ заменим u_i на λu_i, а остальные u_j оставим нетронутыми.

2. Поменяем местами два вектора u_i и u_j.

3. Для фиксированных i и j и некоторого $f(x) \in k[x]$ заменим u_i на $u_i + f(x)u_j$, а остальные u_k оставим нетронутыми.

Задачи. 5 Покажите, что при элементарных преобразованиях определенных выше

1. базис u_i переходит в базис.
2. в матрице T происходят элементарные преобразования столбцов. Найдите какие именно преобразования столбцов соответствуют каждому элементарному преобразованию.

1. Рассмотрим все преобразования. Если в базисе меняем местами два вектора, то получится базис, но с переставленными коэффициентами в новом разложении. При умножении вектора на ненулевой коэффициент, в новом разложении мы просто коэффициент домножим на обратные к тому ненулевому. Третье преобразование рассмотрим по определению $u_i + f(x)u_j$ раскладывается, остальные вектора без изменений. Такое преобразование обратимо, и обратное имеет тот же вид $u_i^{'} = u_i + f(x)u_j$ меняется на $u_i = u_i^{'} - f(x)u_j^{'}$ при $j \neq i$, аналогично, все остальное без изменений. Все векторы старой системы раскладываются по новой, причём это разложение получается единственно. Базис, тем самым, переходит в базис.
2. Это просто преобразование Гаусса. 1) умножаем столбец на ненулевой коэффициент. 2)переставляем столбцы. 3) прибавление к i-ому столбцу j-го домноженно на $f(x)$.

Замена образующих $\ker \pi$ На множестве образующих $\ker \pi$ зададим слегка другие преобразования.

1. Для произвольного семейства ненулевых чисел $\lambda_\alpha \in k$ заменим каждый m_α на $\lambda_\alpha m_\alpha$.
2. Поменяем местами два элемента m_α и $m_{\alpha'}$.
3. Для фиксированного α и произвольного семейства многочленов $f_{\alpha'}(x) \in k[x]$, где $\alpha' \neq \alpha$, оставим m_α нетронутым, а $m_{\alpha'}$ заменим на $m_{\alpha'} - f_{\alpha'}(x)m_\alpha$.

Задачи. 6 Покажите, что

1. при элементарных преобразованиях (определенных выше) порождающие $\ker \pi$ переходят в порождающие $\ker \pi$.
2. эти элементарные преобразования дают преобразования строк матрицы T. Поймите какие именно преобразования получаются.

Решение: Задача аналогична предыдущей. Тут рассматриваются те же гауссовы преобразования, только чуть в изменённой форме. То, что порождающие ядра переходят в порождающие, следует из того, что элементы новой системы выражаются через элементы старой по построению, а в обратную сторону это следует из обратимости преобразований.

Со строками происходит то, что уже было описано: они либо переставляются, либо домножаются на ненулевой коэффициент из поля, либо одна строка работает с другими: она сама не меняется, а из других строк вычитаются некоторые строки образованные домножением той неизменной на многочлен..

Задачи. 7 Мы только что представили V как $k[x]^n / \ker \pi$, где $\ker \pi$ задан матрицей T с n столбцами и бесконечным числом строк.

1. Покажите, что для любой строки элементарными преобразованиями столбцов (определенных выше) можно сделать так, что появится многочлен, на который делятся все остальные элементы строки.
2. Покажите, что для любого столбца элементарными преобразованиями строк (определенными выше) можно сделать так, что появится многочлен, на который делятся все остальные элементы столбца.
3. Пользуясь наблюдениями выше, покажите, что элементарными преобразованиями строк и столбцов, матрицу T можно привести к диагональному виду. А значит, в результирующей матрице T будет только конечное число ненулевых строк.

Решение:

1. Рассмотрим все элементы первого столбца. Это многочлены, которые порождают идеал. В кольце многочленов над полем, он является главным. Пусть $d(x)$ - его порождающий. Тогда $d(x)$ выражается через конечное число строк по формуле $d(x) = f_1(x)m_1(x) + \dots + f_k(x)m_k(x)$ - многочлены из первого столбца матрицы, а $f_i(x)$ - коэффициенты модуля. Среди строк матрицы есть нулевая, и к ней мы последовательно прибавим строки, из которых взяты m_i, с домножением на f_i. Получим в одной из строк $d(x)$ в первом столбце. Поставим эту строку на первое место. Все остальные элементы первого столбца кратны $d(x)$, так как принадлежат главному идеалу. Из той строки, где первый элемент равен $f(x)d(x)$, вычтем первую строку, домноженную слева на $f(x)$. Получится 0, и так будет для всех строк кроме первой. В итоге первый столбец примет вид из нулей, с элементом $d(x)$ в начале первой строки.

2. Для столбцов так же как и для строк. Элементы первой строки не обязаны делиться на $d(x)$, полученные выше. Но, если они не все делятся, то главный идеал в кольце многочленов, порождаемый элементами первой строки, имеет порождающий элемент степени меньшей по сравнению в $d(x)$. Ввиду того, что степень не может понижаться бесконечно долго, мы, повторяя описанные действия для строк и столбцов, получим многочлен, степень которого понизить уже нельзя. Тогда на $d(x)$ будут делиться и элементы столбца, и элементы строки, и мы далее получим нули в первом столбце и в первой строке, помимо самого $d(x)$.

3. Убирая построенную первую строку и первый столбец, мы получаем матрицу, к которой применяем те же самые действия. Ввиду конечности числа столбцов, мы рано или поздно придём к матрице, у которой по главной диагонали расположено несколько многочленов, а всё остальное равно нулю. Нулевые строки удаляем, и получаем искомый диагональный вид.

Утверждение. *Заменой образующих $k[x]^n$ и порождающих $\ker\pi$, а также выбрасывая нулевые образующие $\ker\pi$, можно добиться того, чтобы матрица T имела следующий вид*

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & t_k & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Задача. 8

Рассмотрим гомоморфизм

$$k[x]^n \to k[x]/(t_1) \oplus k[x]/(t_k) \oplus k[x] \oplus \ldots \oplus k[x]$$
$$(f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n) \mapsto (f_1 \pmod{t_1}, \ldots, f_k \pmod{t_k}, f_{k+1}, \ldots, f_n)$$

Покажите, что его ядро задается в точности матрицей T.

Решение: Ker данного гомоморфизма состоит из строк, в которых для первых k элементов мы видим делимость i-го элемента на t_i, все остальное 0. Рассмотрим матрицу на строках которой элементы данного ядра. Будем использовать преобразования корректность и алгоритм которых уже проверены. На первой строке поставим $(t_1, 0, \ldots, 0)$. Остальные строки преобразовываем так: их первые элементы имеют вид $(g_1 t_1, \ldots)$, и к ним прибавляем нашу первую строку, с коффициентом $-g_1$. Теперь первые элементы равны 0, остальные не меняются, а комбинация строк остаётся прежней. Все элементы первого столбца новой матрицы, кроме элемента $t1$, оказываются нулевыми. Повторяем этот алгоритм для других i и t_i. В итоге получаем матрицу T, что и требовалось показать

Задачи. 9 Пусть $V = k[x]/(p^n)$, где p – многочлен степени k.

1. Найдите такой базис V, чтобы оператор умножения на x имел следующий блочный вид

$$\begin{pmatrix} A & B & & \\ & A & \ddots & \\ & & \ddots & B \\ & & & A \end{pmatrix}$$

где A и B – матрицы k на k.

2. Выразите эти матрицы через коэффициенты многочлена p.

Решение: Многочлен p разделим на его старший коэффициент, и запишем в виде $p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \cdots - a_1x - a_0$.

Рассмотрим систему векторов $x^{k-1}p^{n-1}$, $ldots$, xp^{n-1}, p^{n-1}; … ; $x^{k-1}p$, … , xp, p; x^{k-1}, … , x, 1. Число векторов в ней равно kn, то есть размерности пространства $V = k[x]/(p^n)$. Теперь главное понять, что любой многочлен по такой системе раскладывается. Это же понять для степеней x. Ниже мы подействуем на каждый вектор системы оператором умножения на x, и разложим образ по векторами системы. Отсюда будет всё следовать, так как вектор 1 раскладывается, и далее по индукции будут раскладываться x, x^2, … и все остальные степени.

Система состоит из n кластеров по k векторов в каждом. При умножении на x, каждый из векторов кроме самого первого в своем кластере, переходит в предыдущий. Это значит, что соответствующие столбцы будущей матрицы будут состоять из нулей и одной единицы, которая стоит на один элемент выше главной диагонали. Для первых же векторов кластера мы получим следующее:

$$x \cdot x^{k-1}p^{n-1} = x^kp^{n-1} = (p + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0)p^{n-1} = a_{k-1}x^{k-1}p^{n-1} + \cdots + a_1xp^{n-1} + a_0p^{n-1}$$

то есть первый столбец искомой матрицы будет состоять из чисел a_{k-1}, … , a_1, a_0 и последующих нулей. Для понимания мы использовали тот факт, что $p^n = 0$ в V.

Далее при всех $0 \le i < n-1$ мы получим

$x \cdot x^{k-1}p^i = x^kp^i = (p+a_{n-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0)p^i = p^{i+1}+a_{n-1}x^{k-1}p^i+\cdots+a_1xp^i+a_0p^i$,, и в соответствующем столбце появятся те же числа a_{k-1}, … , a_1, a_0 над которыми будет стоять одна единица как коэффициент при p^{i+1}.

Из данного описания следует, что, во-первых, наша система является базисом, а во-вторых, матрица умножения на x принимает блочный вид из условия, где матрица A порядка k имеет первый столбец из a_{k-1}, … , a_1, a_0, а в остальных столбцах будут находиться единицы на диагонали выше главной. Остальное в матрице равно нулю.

Матрица B будет состоять из нулей за исключением элемента на пересечении её последней строки и первого столбца, где находится число 1.