

Hoore論理の健全性

(H-Sep): このとき $\vdash \{A\} C \{B\}$ は

$$C = C_1; C_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vdash \{A\} C_1 \{A'\} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\vdash \{A'\} C_2 \{B\} \quad \dots \textcircled{3} \quad \text{for some } C_1, C_2, A'$$

$\sigma, \sigma', \sigma''$ を任意に選ぼう.

$\sigma \models A$ から C_1 changes σ to $\sigma' \dots \textcircled{4}$ を仮定する.

$$\textcircled{4} \text{ と I.H. より, } \sigma' \models A' \dots \textcircled{5}$$

また、任意の σ'' に対して C_2 changes σ' to $\sigma'' \dots \textcircled{6}$ を仮定する.

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ と I.H. より, } \sigma'' \models B \quad \text{よ.乙 示された。}$$

(H-IF) の場合:

$$\vdash \{A\} C \{B\} \text{ は}$$

$$C = (\text{if } b \text{ then } C_1 \text{ else } C_2) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vdash \{A \wedge b\} C_1 \{B\} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\vdash \{A \wedge \neg b\} C_2 \{B\} \quad \dots \textcircled{3}$$

for some b, C_1, C_2

任意の σ, σ' について

$$\sigma \models A \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{if } b \text{ then } C_1 \text{ else } C_2 \text{ changes } \sigma \text{ to } \sigma' \dots \textcircled{5}$$

を仮定する.

⑤ が (E-If True) で導出された場合 について証明する.

$$\text{このとき, } \sigma \models b \Downarrow \text{true} \quad \dots \textcircled{6} \quad \text{から}$$

$$C_1 \text{ changes } \sigma \text{ to } \sigma' \quad \dots \textcircled{7}$$

⑥と講義中の Lemma から.

$$\sigma \models b \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{4} \text{ と } \textcircled{8} \text{ から, } \sigma \models A \wedge b \dots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{2} \text{ と I.H., } \textcircled{9}, \textcircled{7} \text{ より, } \sigma' \models B \text{ へと示された。}$$

(H-Cons_{seq})の場合:

$$\vdash \{A\} \subset \{B\} \text{ は}$$

$$\vdash A \Rightarrow A' \dots \textcircled{1}$$

$$\vdash \{A'\} \subset \{B'\} \dots \textcircled{2}$$

$$\vdash B' \Rightarrow B \dots \textcircled{3} \quad \text{for some } A', B'$$

任意の σ, σ' について,

$$\sigma \models A \dots \textcircled{4} \text{ から } C \text{ changes } \sigma \text{ to } \sigma' \dots \textcircled{5} \text{ を仮定する。}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より, } \sigma \models A' \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{2}, \text{I.H., } \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より,}$$

$$\sigma' \models B' \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{7} \text{ より, } \sigma' \models B \text{ へと示された。}$$

(H-While)の場合:

$$\vdash \{A\} \subset \{B\} \text{ は}$$

$$C = \text{while } b \text{ do } C' \dots \textcircled{1}$$

$$\vdash \{A \wedge b\} C' \{A\} \dots \textcircled{2}$$

$$B = A \wedge \neg b \text{ for some } b, C' \dots \textcircled{3}$$

任意の σ, σ' について

$$\sigma \models A \quad \dots (4)$$

C changes σ to σ' $\dots (5)$ を仮定する.

⑤ が $E\text{-WhileFalse}$ で導出された場合を考える.

このとき,

$$\sigma \models b \Downarrow \text{false} ; \dots (6)$$

$$\sigma' = \sigma \quad \dots (7)$$

⑥ と IF の lemma から, $\sigma \models \neg b$, $\dots (8)$

$$(4), (8) \text{ より } \sigma \models A \wedge \neg b \quad \dots (9)$$

③, ⑦, ⑨ より, $\sigma' \models B$ となり示された。