POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL

MTH2302D - PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Devoir - Hiver 2023

Date de remise : 18 avril avant 23h59 (dans Moodle)

Veuillez remplir le tableau suivant et joindre cette page à votre rapport.

Identification de l'étudiant(e)	
Nom : Benzekri	**Prénom :** Omar
Groupe : 01	**Matricule :** 2244082

Question	Note
a)	/4
b)	/7
c)	/12
d)	/5
Présentation	/2
TOTAL	/30

Mardi le 18 avril 2023

Contexte

Le devoir est une étude de cas qui consiste en une analyse de données (recueillies durant une période de temps) relatives aux ventes de sièges d’automobile (pour enfants) d’un fabricant.

Les données

Les données à analyser sont constituées d’un échantillon de 195 observations (points de vente) avec quatre variables mesurant un certain nombre de caractéristiques socio-économiques à différents points de vente répartis dans plusieurs villes. Le Tableau 1 ci-dessous présente les variables de l’étude (numéro de colonne dans le fichier, symbole, nom, et description).

Col. nº	Symbole	Nom	Description
1	−−	Identification	Le numéro du point de vente dans la base de données
2	Y	Ventes (`Sales`)	Nombre de sièges vendus (en milliers) au point de vente
3	X_1	Prix (`Price`)	Prix du siège du fabricant au point de vente (en $)
4	X_2	Publicité (`Advertising`)	Montant (en 1000 $) investi en publicité au point de vente
6	X_3	Lieu (`Region`)	Lieu du point de vente : urbain (**1**) ou rural (**0**).

Logiciel

Pour ce devoir, j’ai utilisé RStudio afin d’étudier et analyser les données.

Données

```
source("charger.R")
mondata <- charger(2244082)
View(mondata)
```

```
Sales Price Advertising Region
43    5.05   117          0       1
9     4.97   160          0       1
5     6.42   126          5       1
91   10.71    79         10       0
36   13.39   134         20       1
6     5.61   154          9       0
27    5.56   146          0       0
177   8.19   155          0       0
29    4.90   144         13       0
70   10.77   103         17       0
61    9.43   129         11       0
267   7.57    99          2       1
209   6.98    97          0       0
15    8.68   104         10       0
42    6.85   154          5       1
86    8.68    86          0       0
254   6.37   132         15       1
213  14.90    82          0       0
109   8.78   100          0       1
115   8.77   114          7       0
245   6.03   129         10       1
138   4.90   128          0       0
45    6.43   107          0       1
73   13.28    96          7       1
22    6.71    93          0       1
259   8.33   131         11       0
101   4.68   135          0       0
```

228	5.31	129	10	1
94	4.42	108	0	1
4	4.34	111	0	0
289	3.02	90	11	0
287	7.54	122	0	1
90	6.52	118	0	1
75	9.58	129	23	1
62	4.83	107	3	1
39	5.30	97	0	0
251	8.73	121	16	1
275	10.51	119	9	0
34	10.96	86	11	1
283	8.85	91	0	1
270	11.07	96	11	0
107	6.38	128	5	1
225	11.67	87	10	1
178	2.34	144	15	1
83	8.41	77	13	1
110	6.50	150	16	0
155	11.85	120	15	1
89	12.11	104	18	0
196	11.17	118	11	1
199	8.79	101	13	0
114	7.40	97	4	1
226	9.01	100	9	0
163	6.92	119	13	1
238	4.36	123	2	0
125	8.23	139	5	1
112	7.36	133	0	1
103	6.20	118	0	1
51	6.56	111	7	1
253	7.81	118	13	0
166	4.43	145	1	1
136	6.67	125	5	1
74	11.62	139	4	1
81	7.38	93	0	0
162	6.62	151	12	1
44	9.34	49	0	0
242	7.23	128	18	1
239	7.30	117	0	1
171	9.31	106	9	1
229	6.63	108	0	1
50	3.63	149	0	1
23	4.47	147	7	0
197	6.97	129	19	0
188	11.48	77	15	1
185	8.67	112	14	1
191	7.52	128	0	1
160	5.53	132	8	1
285	8.86	104	0	1
19	1.82	133	0	1
55	5.73	144	0	1
14	4.95	110	5	1
161	5.36	101	0	1
35	10.61	149	0	1
100	2.07	126	0	0
256	5.83	112	7	0
184	6.50	94	3	1
48	4.62	138	0	1
142	9.14	90	0	1
132	6.52	116	3	1
255	6.81	125	0	0
202	9.48	132	10	0
216	2.93	160	5	0

63	9.32	70	0	0
195	8.77	128	13	1
220	8.71	144	5	0
211	13.14	105	10	1
37	9.03	110	13	1
221	8.74	124	0	1
154	5.71	118	4	1
57	6.01	127	11	1
58	4.56	135	0	1
108	7.77	115	6	1
66	12.30	94	10	0
149	6.89	110	10	0
261	8.55	92	23	0
274	8.31	117	0	1
104	7.71	69	0	1
282	11.48	87	13	1
21	9.50	120	11	1
186	12.29	131	13	1
33	6.54	124	0	0
214	5.52	116	0	1
18	5.32	102	6	1
47	7.22	151	2	0
212	4.69	124	0	0
181	12.61	104	10	0
52	7.37	128	8	1
134	8.39	84	5	1
12	8.98	90	0	0
257	10.07	107	11	1
159	10.43	24	0	1
241	8.80	119	0	1
279	5.36	117	0	0
122	4.10	133	6	1
93	0.53	159	7	1
82	4.88	107	3	0
268	3.24	138	0	0
262	12.49	127	24	0
69	9.45	92	12	0
46	8.97	125	0	0
31	6.71	137	17	1
167	6.88	108	5	1
247	10.31	121	0	1
10	5.16	114	0	0
206	5.42	103	15	1
128	10.00	88	0	0
233	6.90	90	20	1
88	11.70	126	7	0
269	4.53	125	0	1
219	8.47	101	10	1
120	6.59	102	0	1
98	8.77	117	11	1
56	7.96	124	0	1
130	4.38	108	0	1
133	4.20	144	0	1
164	4.74	140	4	1
222	5.07	96	0	1
92	7.95	119	3	0
105	2.05	157	0	1
77	11.19	105	7	0
193	3.67	131	0	1
187	8.09	122	0	0
157	8.67	115	14	0
263	7.45	129	5	1
117	5.12	100	10	0
227	8.22	141	0	0

249	6.41	131	2	1
1	5.40	163	13	0
59	10.08	130	10	0
217	7.80	104	12	0
96	7.78	116	3	1
265	7.56	93	0	0
78	7.91	129	3	1
240	0.37	191	7	1
124	9.01	115	14	1
3	4.21	137	14	0
232	7.80	98	0	0
243	12.13	109	12	0
169	7.49	157	0	1
203	10.27	109	12	1
237	3.47	81	0	0
230	5.55	97	8	1
139	1.00	185	0	0
198	8.01	118	12	1
147	12.44	70	14	0
65	6.41	136	0	0
258	6.88	112	0	0
246	12.49	55	12	1
53	6.67	173	13	1
119	9.39	120	14	1
72	9.32	108	16	1
150	4.67	111	0	0
85	3.90	131	0	1
244	7.78	64	0	1
205	4.15	128	3	1
201	10.49	114	8	0
192	10.62	116	19	1
156	4.42	94	7	1
170	8.65	120	18	0
146	11.91	84	0	1
7	3.47	103	2	1
135	13.91	68	0	0
280	7.53	113	11	0
41	7.81	102	15	1
174	6.20	137	12	0
40	7.70	89	12	0

On initialise les variables:

```
mondata
#On set les variables
sales <- mondata$Sales
price <- mondata$Price
advertising <- mondata$Advertising
region <- mondata$Region
```

<u>Phase I</u> : Analyse statistique descriptive et inférence.

a)

```r
#Phase 1)
#a)
hist(sales, col = "blue", main = "Histogramme des ventes",
     xlab="Nombre de sièges vendus (en milliers)",ylab="Fréquence")
boxplot(sales, horizontal=T,xlab="Nombre de sièges vendus (en milliers)",
        ylab = "Distribution", col = "green", main = "Diagramme de Tukey des ventes")
qqnorm(sales, main="Droite de Henry des Ventes",
       ylab="Quantiles de l'échantillon", xlab="Quantiles Théoriques")
qqline(sales)
shapiro.test(sales)
#Tableau Descriptif
summary(sales)
sd(sales)                #Écart-type
t.test(sales)$conf.int   #Intervalle de confiance
```

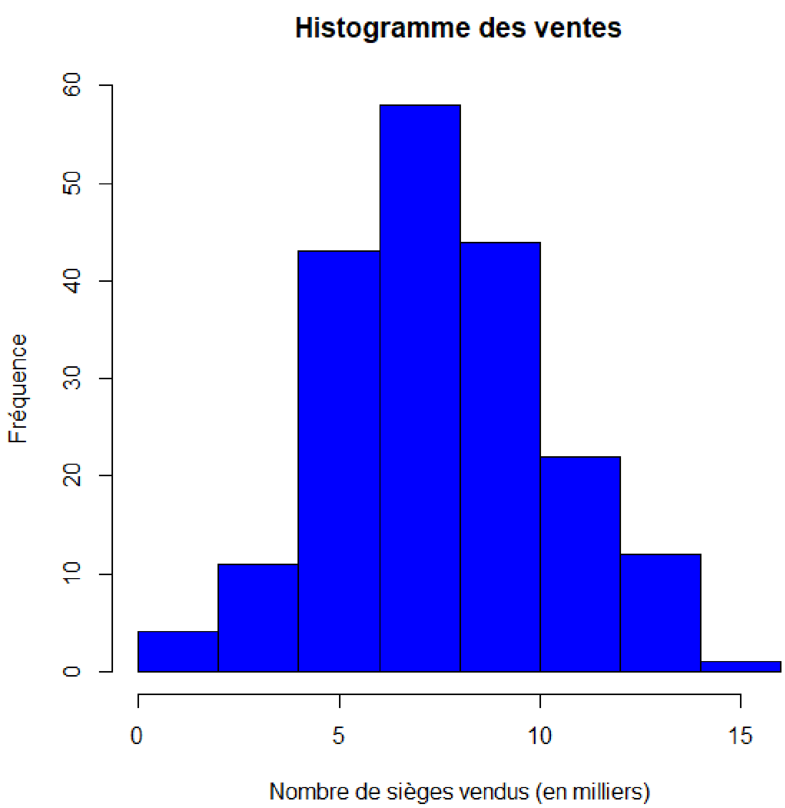


Figure 1. Histogramme des ventes

Dans cet histogramme, on peut observer la plage des ventes, qui varie de 0 à environ 15000. La hauteur des barres de l'histogramme représente l'effectif, ce qui permet de constater que l'effectif le plus fréquent se situe entre 6000 et 8000 ventes, avec environ 50 occurrences. On peut donc supposer que la médiane se situe également entre ces deux valeurs. Par ailleurs, on note un faible effectif entre 14000 et 15000 ventes. La forme de l'histogramme ressemble à celle de la distribution normale, ce qui permettrait d'envisager cette hypothèse. Toutefois, il n'est pas possible de confirmer cette hypothèse car la symétrie par rapport à la moyenne ne peut pas être mesurée à partir de cet histogramme.

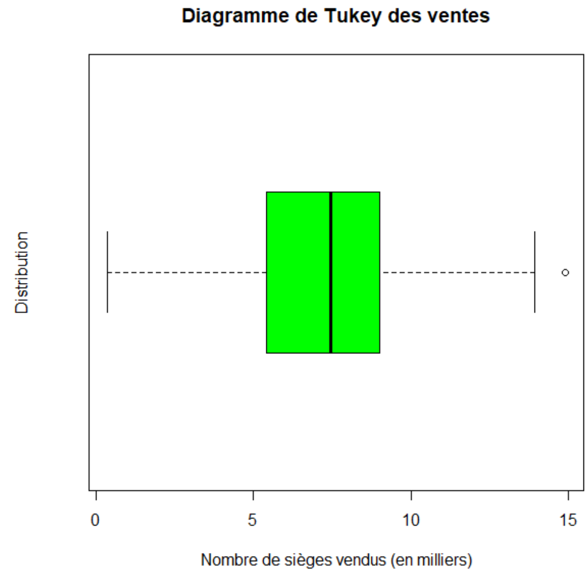


Figure 2. Boîte de Tukey pour les ventes

Le diagramme de Tukey des ventes ci-dessus permet de relever plusieurs données intéressantes lors de l'analyse statistique descriptive des ventes. Tout d'abord, ce diagramme représente les quartiles de la variable. Dans ce cas, le premier quartile se situe autour de 5500 ventes, la médiane se situe autour de 7500 ventes et le troisième quartile se situe autour de 9000 ventes. Par ailleurs, il est possible d'estimer les valeurs extrêmes à partir de ce diagramme en boîte à moustaches : la valeur minimale est de 400 ventes et la valeur maximale est de 13500 ventes. Ainsi, on peut conclure que la moitié des données se situent entre 5500 ventes et 9000 ventes car la boîte en mauve représente l'écart interquartile contenant 50% des observations par définition. En outre, on peut remarquer que la médiane est plus proche du deuxième quartile que du troisième.

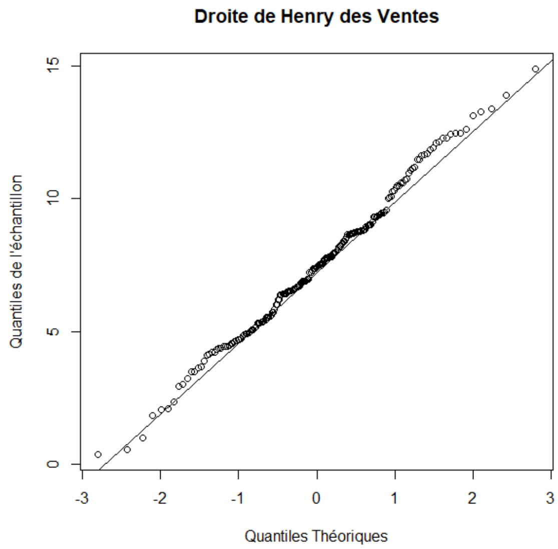


Figure 3. Droite de Henry pour les ventes

Sur la droite de Henry des ventes représentée ci-dessus, les données de ventes sont représentées par des p etits cercles et la droite représente la droite de Henry qui suit une probabilité normale. Étant donné que la majorité des observations se situent sur cette droite, on peut supposer que les ventes suivent une loi norma le. Seules les observations situées aux extrémités sont nettement en dehors du tracé de la droite normale. P our vérifier cette hypothèse de normalité, il est nécessaire d'effectuer un test de normalité Shapiro-Wilk. Ce test permet d'obtenir le carré d'un coefficient de corrélation W et la valeur P, deux indicateurs qui sont néc essaires pour confirmer l'hypothèse. L'hypothèse nulle (H0) stipule que Y (Ventes) suit une loi normale, tand is que l'hypothèse alternative (H1) soutient que Y (Ventes) ne suit pas une loi normale.

```
        Shapiro-Wilk normality test

data:  sales
W = 0.99348, p-value = 0.5458
```

Figure 4. Test de normalité (Shapiro-Wilk)

On a obtenu W=0.99348 et p-value=0.5458. Premièrement, on est poussé à accepter H0, car notre valeur de W n'est pas proche de 0.70 (limite inférieure de cette statistique) et est en fait très proche de 1; la limite supérieure de cette statistique. On doit rejeter H0 lorsque la valeur de W est petite et proche de 0.70. De plus, H0 est acceptée lorsque la P-value, limitée par 0 et 1, est grande. Ayant obtenu une p-value de 0.9872 très grande et proche de sa limite supérieure, on peut donc accepter H0. Puisque cette hypothèse nulle est acceptée dans les deux cas, on peut donc dire que la variable Y représentant les ventes suit effectivement une loi normale.

Moyenne	Q1	Q2 (Mediane)	Q3	Écart type	Intervalle de confiance
7.467	5.410	7.450	9.010	2.743	[7.079,7.854]

Figure 5. Tableau de statistiques descriptives

Le tableau de statistiques descriptives présenté ci-dessus présente la moyenne, les quantiles et l'intervalle de confiance des ventes.

b)

```r
#b)
windows()
layout(matrix(1:2, 1, 2))
hist(sales[region=="1"], col="lightblue", main=paste("Urbain"),
     xlab="Nombre de sièges vendus en milliers",ylab="Fréquences")
hist(sales[region=="0"], col="lightgreen",main=paste("Rural"),
     xlab="Nombre de sièges vendus en milliers",ylab="Fréquences")
boxplot(sales ~ region, col=c("lightblue", "lightgreen"),
        main="Comparaison des ventes par région", xlab="Région", ylab="Ventes (en milliers)")
#Stats Urbain
summary(sales[region == 1])
var(sales[region==1])                  #Variance
sd(sales[region == 1])                 #Écart-type
t.test(sales[region == 1])$conf.int   #Intervalle de confiance
#Stats Urbain
summary(sales[region == 0])
var(sales[region==0])                  #Variance
sd(sales[region == 0])                 #Écart-type
t.test(sales[region == 0])$conf.int   #Intervalle de confiance
#Test d'hypothèses sur l'égalité des variances pour les deux groupes
var.test(sales[region == 1], sales[region == 0])
#Test d'hypothèses sur l'égalité des moyennes pour les deux groupes
t.test(sales[region == 1], sales[region == 0])
```

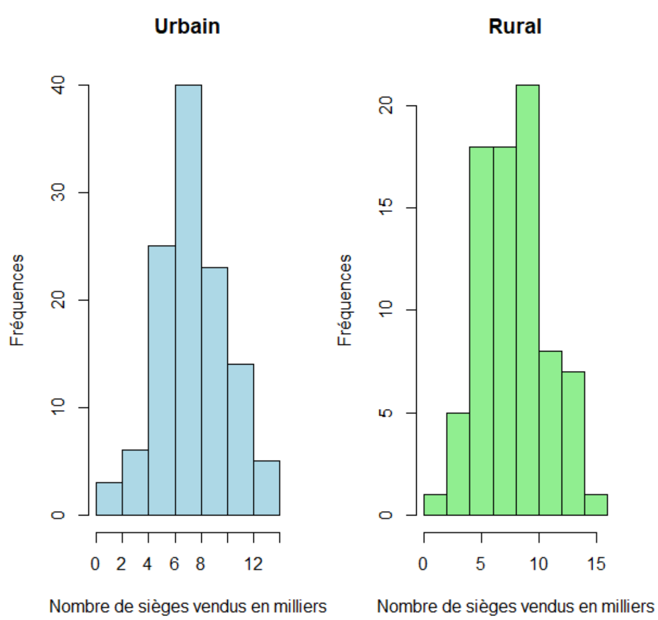


Figure 6. Histogramme des ventes pour les points de vente urbains et ruraux

L'histogramme correspondant à la région 0 représente les ventes effectuées dans les points de vente situés en milieu rural, tandis que l'autre représente celles en milieu urbain. Premièrement, il est à noter que les ventes de la région 1 semblent davantage suivre la distribution en cloche de la loi normale que celles de la région 0. Deuxièmement, la classe avec l'effectif le plus important diffère entre les deux groupes. Dans la région 0, il s'agit de la classe située entre 8000 et 10000 ventes, tandis que dans la région 1, il s'agit de la classe située entre 6000 et 8000 ventes.

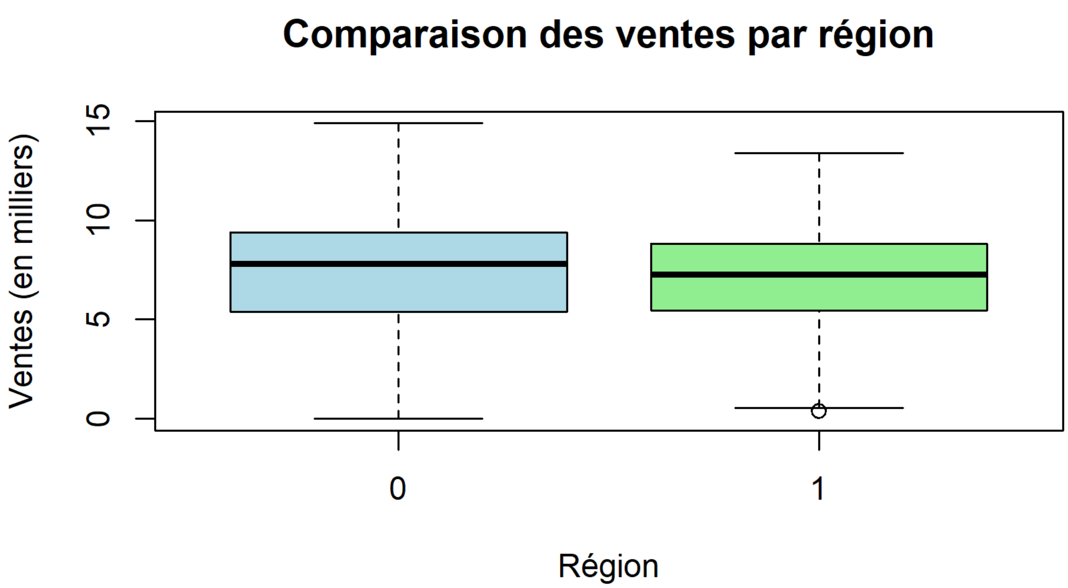


Figure 7. Boîte de Tukey pour les ventes par région

On peut observer une disparité de l'étendue des données par région. En milieu rural, les données s'étendent de 2000 ventes à proche de 15000 ventes, tandis qu'en milieu urbain, les observations s'étendent de 1000 ventes à 13500 ventes. Une certaine disparité est aussi présente dans l'écart interquartile, celui de la région 0 est plus grand que dans la région 1. De plus, la médiane des ventes dans la région rurale est autour de 7750 ventes, tandis qu'en région urbaine, la médiane semble être plus proche de 7250 ventes.

	Moyenne	Q1	Q2	Q3	Écart type	Variance	Intervalle
Urbain	7.295	5.495	7.265	8.812	2.656	7.052	[6.806,7.783]
Rural	7.707	5.380	7.800	9.385	2.898	8.398	[7.057,8.355]

Figure 8. Tableau de statistiques descriptives par groupe

Le tableau de statistiques descriptives présenté ci-dessus présente la moyenne, les quantiles et les intervalles de confiance des ventes dans les région urbaine et rurale.

```
        F test to compare two variances

data:  sales[region == 0] and sales[region == 1]
F = 1.1647, num df = 78, denom df = 115, p-value = 0.4535
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.7799153 1.7677926
sample estimates:
ratio of variances
          1.164701
```

Figure 9. Test d'hypothèses sur l'égalité des variances pour les deux groupes

L'hypothèse nulle est formulée en termes d'égalité des variances (H0 : σ02 = σ12) tandis que l'hypothèse alternative suppose leur non-égalité (H1 : σ02 ≠ σ12). Pour effectuer ce test, il est nécessaire de connaître la valeur de F0 et celle de la loi de Fisher F(α/2, n0-1, n1-1). Si F0 > F (α/2, n0-1, n1-1), alors l'hypothèse nulle est rejetée. Dans ce cas-ci, on obtient F0 = 1.1647 et F = 5.102369, ce qui nous permet d'accepter l'hypothèse nulle et de confirmer l'égalité des variances entre les deux groupes. La p-value étant supérieure à 0,05, on peut en conclure que les variances ne présentent pas de différence significative entre les deux groupes.

```
        Welch Two Sample t-test

data:  sales[region == 0] and sales[region == 1]
t = 1.0453, df = 159.01, p-value = 0.2975
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3773656  1.2260191
sample estimates:
mean of x mean of y
 7.719241  7.294914
```

Figure 10. Test d'hypothèses sur l'égalité des moyennes pour les deux groupes

On pose l'hypothèse nulle comme l'égalité des moyennes pour les deux groupes (H0 : µ0=µ1) et l'hypothèse alternative comme la non-égalité des moyennes pour les deux groupes (H1 : µ0≠µ1). Pour ce test, on a besoin de la valeur de t0 et la valeur de la loi de Student t(α/2, v). On rejette l'hypothèse nulle si abs(t0) > t. Calculée ci-dessus, on obtient t0 = 1.0453, t=1.974438 et v=df=159.01, on peut donc accepter l'hypothèse nulle dans ce cas-ci et confirmer l'hypothèse de l'égalité des moyennes pour les deux groupes.

<u>Phase II</u> : Recherche du meilleur modèle.

c)

Modèle 1 : $Y = \beta 0 + \beta 1X1 + \varepsilon$:

```
#Phase 2: Recherche du meilleur modèle
#c)
#Modèle 1:
#Tableau des coefficients de régression
reg1 <- lm(sales ~ price)
summary(reg1)
#Tableau d'analyse de la variance
anova (reg1)
#Nuages de points
plot (price,sales, main="Nuage de points du modèle 1", xlab="Prix",
      ylab="Nombre de sièges vendus en milliers", col="red")
abline (reg1, col="blue")
#Analyse des résidus
par (mfrow=c(2,2))
plot (reg1)
#Intervalle de confiance des coefficients de régression
confint (reg1)
```

```
Call:
lm(formula = sales ~ price)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-5.8192 -1.8188 -0.1694  1.5349  6.8463 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 13.48516    0.87060  15.489  < 2e-16 ***
price       -0.05180    0.00734  -7.058 2.96e-11 ***
---
Residual standard error: 2.452 on 193 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2052,	Adjusted R-squared:  0.201 
F-statistic: 49.81 on 1 and 193 DF,  p-value: 2.963e-11
```

Figure 11. Tableau des coefficients de régression du modèle 1.

```
Response: sales
           Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)    
price       1  299.56 299.562  49.814 2.963e-11 ***
Residuals 193 1160.63   6.014
```

Figure 12. Tableau d’analyse de la variance du modèle 1.

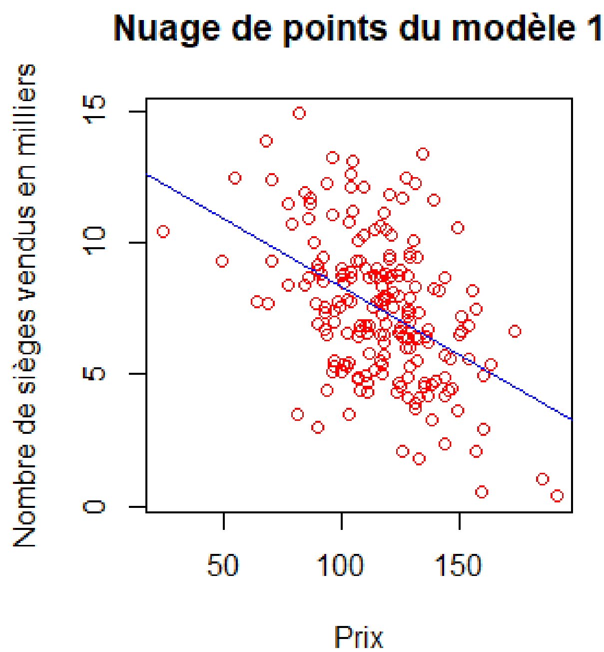


Figure 13. Test de signification du modèle 1.

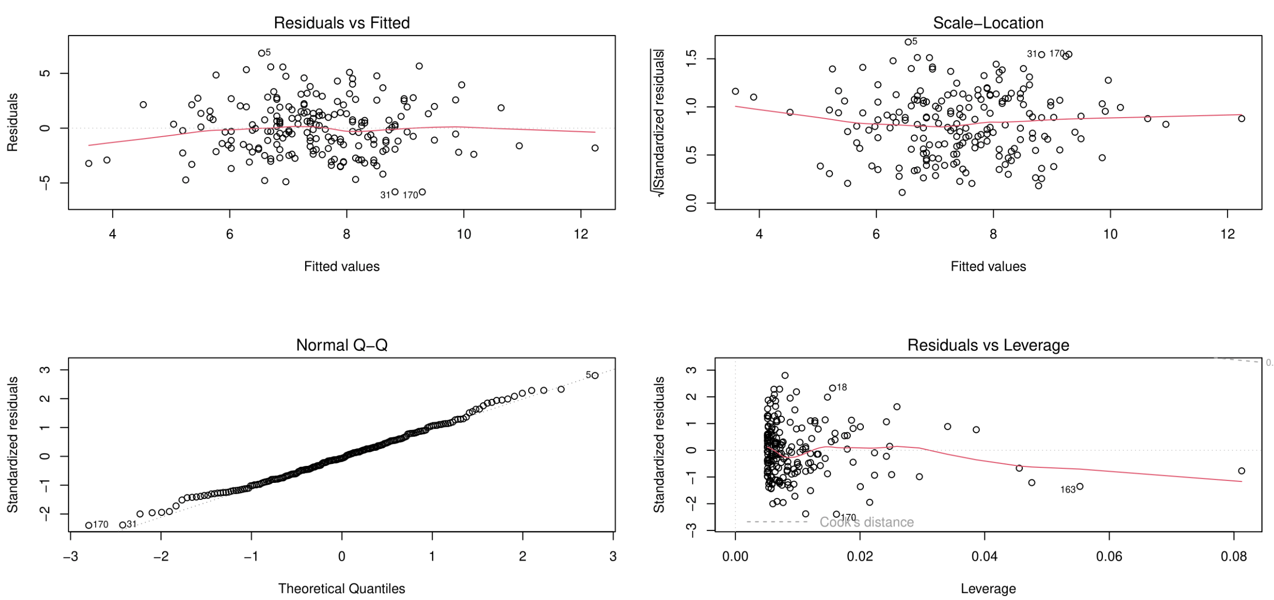


Figure 14. Analyse des résidus du modèle 1.

Pour évaluer la normalité des résidus, nous devons nous fier au « Normal Probability Plot » représenté ci-dessus. On peut observer que les résidus en mauve suivent une ligne droite et se situe majoritairement sur la ligne de normalité en rouge indiquant que l'hypothèse de normalité est respectée. De plus, les résidus sont dispersés de façon homogène autour de la droite horizontale dans le graphique « Residuals vs Fitted » indiquant l'homoscédasticité. Cependant, dans ce même graphique, les résidus se situant en dehors de l'intervalle -2 à 2 doivent être rejetées, car ce sont des données atypiques.

```
                 2.5 %      97.5 %
(Intercept) 11.7680393 15.20228356
price       -0.0662782 -0.03732599
```

Figure 15. Intervalle de confiance pour les paramètres du modèle 1.

Calculée ci-dessus, avec un niveau de confiance 95%, le paramètre β0 est compris entre 11.7680393 et 15.20228356 et le paramètre β1 est compris entre -0.0662782 et -0.03732599.

Modèle 2 : $Y = \beta 0 * X1^{(\beta 1)} * e^{(\varepsilon)}$:

Équation transformée : $\ln(Y) = \ln(\beta 0) + \beta 1 \ln(X1) + \varepsilon$:

```
#Modèle 2:
#Tableau des coefficients de régression
reg2 <- lm(log(sales)~log(price))
summary(reg2)
#Tableau d'analyse de la variance
anova (reg2)
#Nuages de points
par (mfrow=c(1,1))
plot (log(price), log(sales), main="Nuage de points du modèle 2", xlab="Prix",
      ylab="Nombre de sièges vendus en milliers", col="red")
abline (reg2, col="blue")
#Analyse des résidus
par (mfrow=c(2,2))
plot (reg2, col="purple")
#Intervalle de confiance des coefficients de régression
confint (reg2)
```

```
Call:
lm(formula = log(sales) ~ log(price))

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-2.46161 -0.21102  0.06951  0.27545  0.82030 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)   6.0144     0.6445   9.332  < 2e-16 ***
log(price)   -0.8657     0.1361  -6.362 1.41e-09 ***
---
Residual standard error: 0.4495 on 193 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1734,	Adjusted R-squared:  0.1691 
F-statistic: 40.48 on 1 and 193 DF,  p-value: 1.411e-09
```

Figure 16. Tableau des coefficients de régression du modèle 2.

```
Analysis of Variance Table

Response: log(sales)
            Df Sum Sq Mean Sq F value
log(price)   1  8.180  8.1802  40.479
Residuals  193 39.003  0.2021        
              Pr(>F)    
log(price) 1.411e-09 ***
Residuals              
```

Figure 17. Tableau d'analyse de la variance du modèle 2.

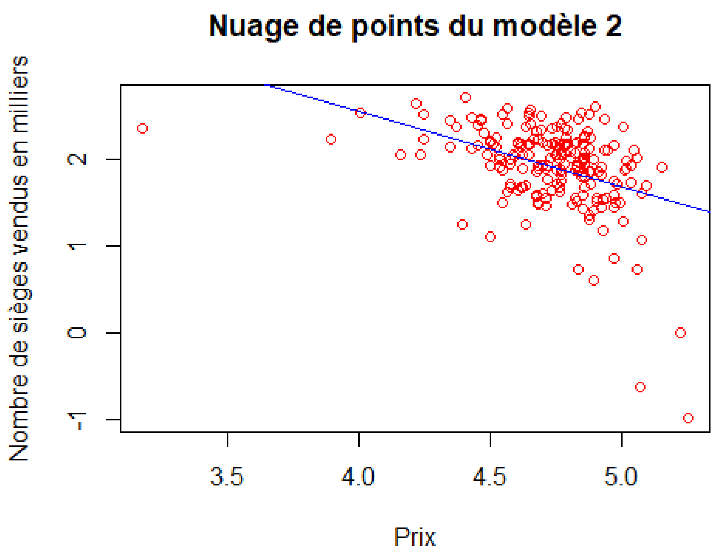


Figure 18. Test de signification du modèle 2.

Les tableaux ci-dessous me permettent de faire le test de signification des coefficients. Pour ces tests, le critère de rejet de l'hypothèse est que la p-value soit plus petite que α. On pose comme hypothèse nulle que les coefficients soient égaux à zéro (H0 : β0 = 0 β1= 0) ainsi que l'hypothèse alternative que les coefficients ne soient pas égaux à zéro (H1 : β0 ≠ 0 β1≠0). Dans ce modèle, α=0.05, la p-value (β0) = 2e-16 et la p-value (β1) = 1.41e-9. Ces valeurs sont significativement plus petites que 0.05, on peut donc rejeter l'hypothèse nulle dans les deux tests. On peut donc conclure que la relation linéaire entre le prix (X1) et les ventes (Y) est significative. De plus, la valeur de R2 trouvée dans le tableau d'analyse de la variance est de 0.1361, étant loin de 1 ceci indique que le modèle n'est pas une bonne représentation de la relation entre les ventes et le prix. Aussi, sur le nuage de points ci-dessus on peut observer que les observations suivent majoritairement la ligne bleue représentant la relation entre le prix et les ventes, ce qui confirme le rejet de l'hypothèse nulle de β1.

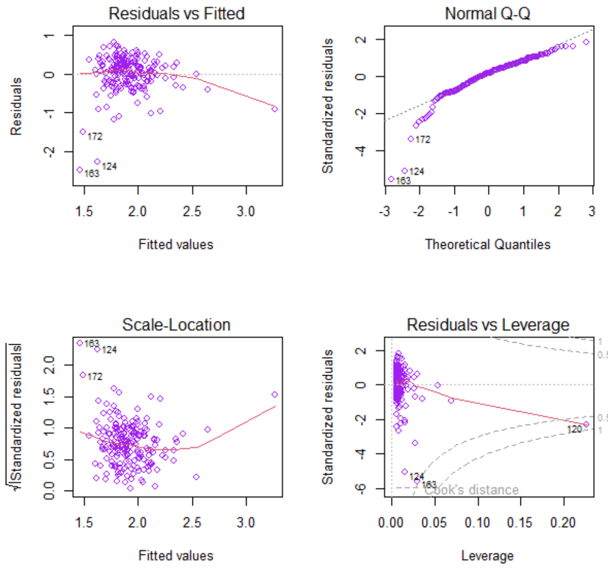


Figure 19. Analyse des résidus du modèle 2.

Pour vérifier la normalité des résidus, il convient de se référer au « Normal Probability Plot » représenté ci-dessus. On peut constater que près de 90% des résidus en mauve suivent une ligne droite et se situent en grande partie sur la ligne de normalité en rouge, ce qui indique que l'hypothèse de normalité est respectée pour la plupart des observations. De plus, les résidus sont distribués de manière homogène autour de la droite horizontale dans le graphique « Residuals vs Fitted », ce qui témoigne de l'homoscédasticité. Toutefois, les résidus situés en dehors de l'intervalle -2 à 2 doivent être considérés comme des données atypiques et rejetés.

```
                2.5 %    97.5 %
(Intercept)  4.743289  7.285531
log(price)  -1.134109 -0.597350
```

Figure 20. Intervalle de confiance pour les paramètres du modèle 1.

Calculée ci-dessus, avec un niveau de confiance 95%, le paramètre β0 est compris entre 4.743289 et 7.285531 et le paramètre β1 est compris entre 1.134109 et -0.597350.

Modèle 3 : $Y = \beta0 * e^{(\beta1 * X1 + \varepsilon)}$:

Équation transformée : $\ln(Y) = \ln(\beta0) + \beta1 * X1 + \varepsilon$:

```
#Modèle 3:
#Tableau des coefficients de régression
reg3 <- lm(log(sales)~price)
summary(reg3)
#Tableau d'analyse de la variance
anova(reg3)
#Nuages de points
par (mfrow=c(1,1))
plot (price, log(sales), main="Nuage de points du modèle 3", xlab="Prix",
      ylab="Nombre de sièges vendus en milliers", col="red")
abline (reg3, col="blue")
#Analyse des résidus
par (mfrow=c(2,2))
plot (reg3, col="purple")
#Intervalle de confiance des coefficients de régression
confint (reg3)
```

```
Call:
lm(formula = log(sales) ~ price)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-2.17532 -0.21112  0.07678  0.26388  0.85112 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  3.065320   0.154007  19.904  < 2e-16 ***
price       -0.009865   0.001298  -7.598 1.27e-12 ***
---
Residual standard error: 0.4338 on 193 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2303,	Adjusted R-squared:  0.2263 
F-statistic: 57.73 on 1 and 193 DF,  p-value: 1.267e-12
```

Figure 21. Tableau des coefficients de régression du modèle 3.

```
Analysis of Variance Table

Response: log(sales)
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)    
price       1 10.864 10.8643  57.733 1.267e-12 ***
Residuals 193 36.319  0.1882
```

Figure 22. Tableau d’analyse de la variance du modèle 3.

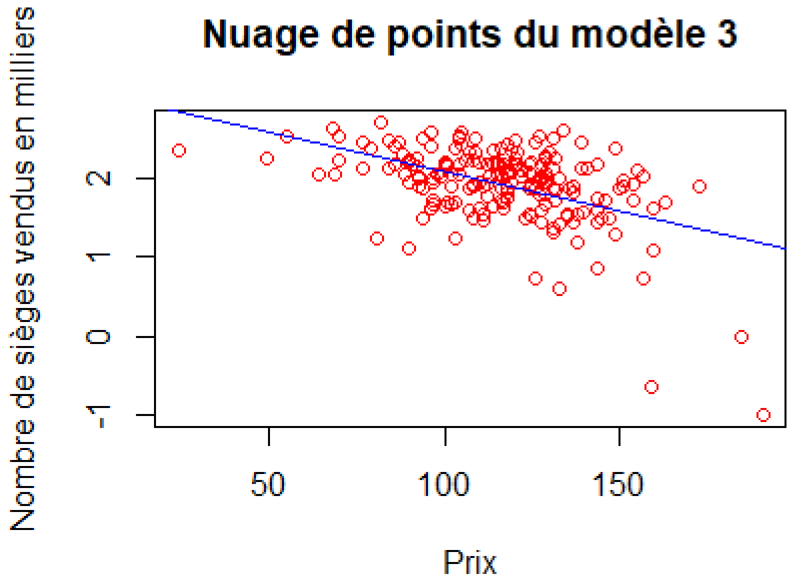
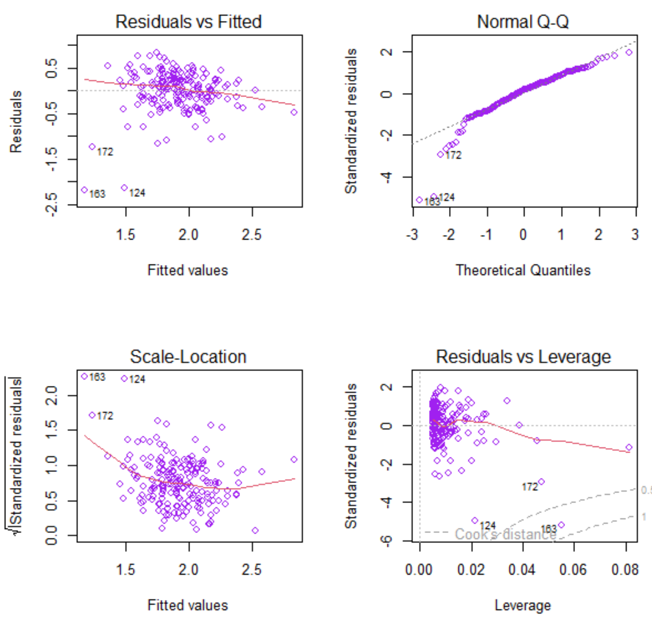


Figure 23. Test de signification du modèle 3.

Les tableaux ci-dessous me permettent de faire le test de signification des coefficients. Pour ces tests, le critère de rejet de l'hypothèse est que la p-value soit plus petite que α. On pose comme hypothèse nulle que les coefficients soient égaux à zéro (H0 : $\beta 0 = 0$ $\beta 1= 0$) ainsi que l'hypothèse alternative que les coefficients ne soient pas égaux à zéro (H1 : $\beta 0 \neq 0$ $\beta 1 \neq 0$). Dans ce modèle, $\alpha=0.05$, la p-value (β0) < 2e-16 et la p-value (β1) = 1.27e-12. Ces valeurs sont significativement plus petites que 0.05, on peut donc rejeter l'hypothèse nulle dans les deux tests. On peut donc conclure que la relation linéaire entre le prix (X1) et les ventes (Y) est significative. De plus, la valeur de R2 trouvée dans le tableau d'analyse de la variance est de 0.23, étant loin de 1 ceci indique que le modèle n'est pas une bonne représentation de la relation entre les ventes et le prix. Aussi, sur le nuage de points ci-dessus on peut observer que les observations suivent majoritairement la ligne bleue représentant la relation entre le prix et les ventes, ce qui confirme le rejet de l’hypothèse nulle de β1.

Figure 24. Analyse des résidus du modèle 3.

Pour évaluer la normalité des résidus, nous devons nous fier au « Normal Probability Plot » représenté ci-dessus. On peut observer qu’environ 85% des résidus en mauve suivent une ligne droite et se situent en bonne partie sur la ligne de normalité en rouge indiquant que l’hypothèse de normalité est respectée pour la plupart des observations. De plus, les résidus sont dispersés de façon homogène autour de la droite horizontal dans le graphique « Residuals vs Fitted » indiquant l’homoscédasticité. Cependant, dans ce même graphique



, les résidus se situant en dehors de l’intervalle -2 à 2 doivent être rejetées, car ce sont des données atypiques.

```
                 2.5 %       97.5 %
(Intercept)  2.76156702  3.369073355
price       -0.01242595 -0.007304401
```

Figure 25. Intervalle de confiance pour les paramètres du modèle 3.

Calculée ci-dessus, avec un niveau de confiance 95%, le paramètre β0 est compris entre 2.76156702 et 3.369073355 et le paramètre β1 est compris entre -0.01242595 et -0.007304401.

Modèle 4 : $Y = \beta 0+\beta 1*X2+\varepsilon$:

```r
#Modèle 4:
#Tableau des coefficients de régression
reg4 <- lm(sales~advertising)
summary(reg4)
#Tableau d'analyse de la variance
anova (reg4)
#Nuages de points
par (mfrow=c(1,1))
plot (advertising,sales, main="Nuage de points du modèle 4", xlab="Publicité",
      ylab="Nombre de sièges vendus en milliers", col="red")
abline (reg4, col="blue")
#Analyse des résidus
par (mfrow=c(2,2))
plot (reg4, col="purple")
#Intervalle de confiance des coefficients de régression
confint (reg4)
```

```
Call:
lm(formula = sales ~ advertising)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-7.2065 -1.9808  0.0461  1.6108  8.3708 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  6.52919    0.26084  25.032  < 2e-16 ***
advertising  0.14962    0.02936   5.097  8.2e-07 ***
---
Residual standard error: 2.582 on 193 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1186,	Adjusted R-squared:  0.1141 
F-statistic: 25.98 on 1 and 193 DF,  p-value: 8.198e-07
```

Figure 26. Tableau des coefficients de régression du modèle 4.

```
Analysis of Variance Table

Response: sales
             Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)    
advertising   1  173.23 173.232  25.979 8.198e-07 ***
Residuals   193 1286.96   6.668                      
```

Figure 27. Tableau d’analyse de la variance du modèle 4.

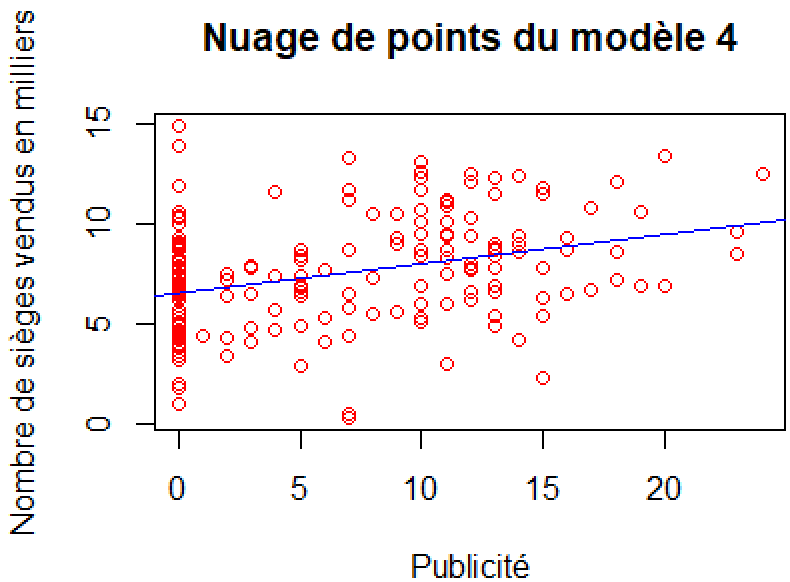


Figure 28. Test de signification du modèle 4.

Pour ces tests, le critère de rejet de l'hypothèse est que la p-value soit plus petite que α. On pose comme hypothèse nulle que les coefficients soient égaux à zéro (H0 : $\beta 0 = 0$ $\beta 1=0$) ainsi que l'hypothèse alternative que les coefficients ne soient pas égaux à zéro (H1 : $\beta 0 \neq 0$ $\beta 1 \neq 0$). Dans ce modèle, $\alpha=0.05$, la p-value ($\beta 0$) < 2e-16 et la p-value ($\beta 1$) = 8.2e-07. Ces valeurs sont significativement plus petites que 0.05, on peut donc rejeter l'hypothèse nulle dans les deux tests. On peut donc conclure que la relation linéaire entre la publicité (X2) et les ventes (Y) est significative. De plus, la valeur de R2 trouvée dans le tableau d'analyse de la variance est de 0.1186, étant loin de 1 ceci indique que le modèle n'est pas une bonne représentation de la relation entre les ventes et la publicité. Aussi, sur le nuage de points ci-dessus on peut observer que les observations sont dispersées majoritairement autour de la ligne bleue représentant la relation entre la publicité et les ventes, ce qui confirme le rejet de l'hypothèse nulle de β1.

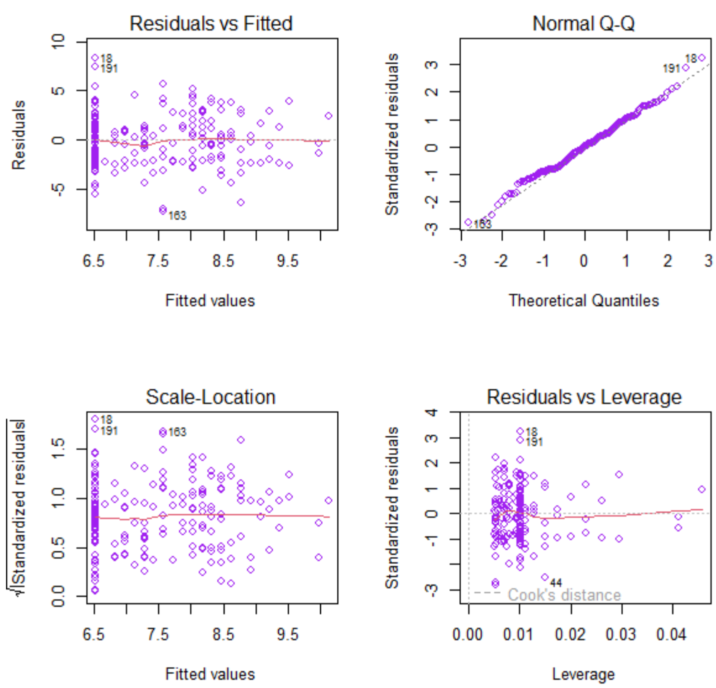


Figure 29. Analyse des résidus du modèle 4.

Pour évaluer la normalité des résidus, nous devons nous fier au « Normal Probability Plot » représenté ci-dessus. On peut observer que les résidus en mauve suivent majoritairement une ligne droite et se situent en bonne partie sur la ligne de normalité en rouge indiquant que l'hypothèse de normalité est respectée. De plus, les résidus sont dispersés de façon homogène autour de la droite horizontale dans le graphique « Residuals vs Fitted » indiquant l'homoscédasticité. Cependant, dans ce même graphique, les résidus se situant en dehors de l'intervalle -2 à 2 doivent être rejetées, car ce sont des données atypiques.

```
                 2.5 %    97.5 %
(Intercept) 6.01472880 7.0436493
advertising 0.09172383 0.2075203
```

Figure 30. Intervalle de confiance pour les paramètres du modèle 4.

Calculée ci-dessus, avec un niveau de confiance 95%, le paramètre β0 est compris entre 6.01472880 et 7.0436493 et le paramètre β1 est compris entre 0.09172383 et 0.2075203.

Modèle 5 : $Y = \beta0 * (8+X2)^{(\beta1)} * e^{(\varepsilon)}$:

Équation transformée : $\ln(Y) = \ln(\beta0) + \beta1 * \ln(8+X2) + \varepsilon$:

```
#Modèle 5:
#Tableau des coefficients de régression
reg5 <- lm(log(sales)~log(8+advertising))
summary(reg5)
#Tableau d'analyse de la variance
anova (reg5)
#Nuages de points
par (mfrow=c(1,1))
plot (log(8+advertising),log(sales), main="Nuage de points du modèle 5",
      xlab="Publicité", ylab="Nombre de sièges vendus en milliers", col="red")
abline (reg5, col="blue")
#Analyse des résidus
par (mfrow=c(2,2))
plot (reg5, col="purple")
#Intervalle de confiance des coefficients de régression
confint (reg5)
```

```
Call:
lm(formula = log(sales) ~ log(8 + advertising))

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.95670 -0.22109  0.08772  0.27969  0.92424

Coefficients:
                     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)           1.16405    0.20211   5.760 3.28e-08 ***
log(8 + advertising)  0.29483    0.07777   3.791 0.000201 ***
---
Residual standard error: 0.477 on 193 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.0693,   Adjusted R-squared:  0.06448
F-statistic: 14.37 on 1 and 193 DF,  p-value: 0.0002006
```

Figure 31. Tableau des coefficients de régression du modèle 5.

```
Analysis of Variance Table

Response: log(sales)
                      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
log(8 + advertising)   1  3.270  3.2698  14.371 0.0002006 ***
Residuals            193 43.913  0.2275
```

Figure 32. Tableau d’analyse de la variance du modèle 5.

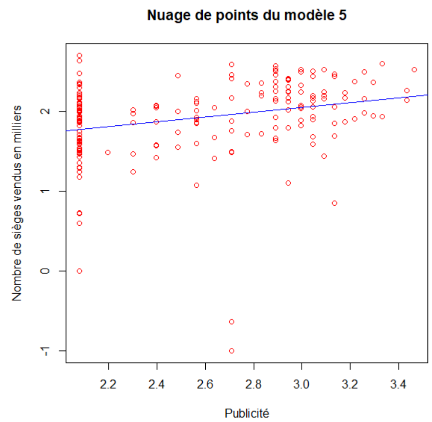


Figure 33. Test de signification du modèle 5.

Pour ces tests, le critère de rejet de l'hypothèse est que la p-value soit plus petite que α. On pose comme hypothèse nulle que les coefficients soient égaux à zéro (H0 : $\beta 0 = 0$ $\beta 1=0$) ainsi que l'hypothèse alternative que les coefficients ne soient pas égaux à zéro (H1 : $\beta 0 \neq 0$ $\beta 1 \neq 0$). Dans ce modèle, $\alpha=0.05$, la p-value ($\beta 0$) < 2e-16 et la p-value ($\beta 1$) = 0.000201. Ces valeurs sont significativement plus petites que 0.05, on peut donc rejeter l'hypothèse nulle dans les deux tests. On peut donc conclure que la relation linéaire entre la publicité (X2) et les ventes (Y) est significative. De plus, la valeur de R2 trouvée dans le tableau d'analyse de la variance est de 0.0693, étant loin de 1 ceci indique que le modèle n'est pas une bonne représentation de la relation entre les ventes et la publicité. Aussi, sur le nuage de points ci-dessus on peut observer que les observations sont dispersées majoritairement autour de la ligne bleue représentant la relation entre la publicité et les ventes, ce qui confirme le rejet de l'hypothèse nulle de β1.

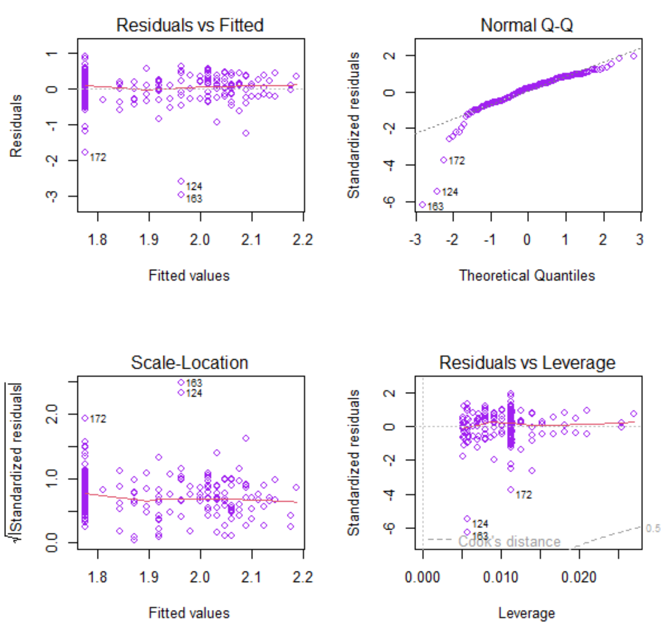


Figure 34. Analyse des résidus du modèle 5.

Pour évaluer la normalité des résidus, nous devons nous fier au « Normal Probability Plot » représenté ci-dessus. On peut observer que 85% des résidus en mauve suivent une ligne droite et se situent en bonne partie sur la ligne de normalité en rouge indiquant que l'hypothèse de normalité est respectée pour la majorité des observations. De plus, les résidus sont dispersés de façon homogène autour de la droite horizontale dans le graphique « Residuals vs Fitted » indiquant l'homoscédasticité. Cependant, dans ce même graphique, les résidus se situant en dehors de l'intervalle -2 à 2 doivent être rejetées, car ce sont des données atypiques.

```
                          2.5 %   97.5 %
(Intercept)           0.7654201 1.56267
log(8 + advertising) 0.1414325 0.44822
```

Figure 35. Intervalle de confiance pour les paramètres du modèle 5.

Calculée ci-dessus, avec un niveau de confiance 95%, le paramètre β0 est compris entre 0.7654201 et 1.56267 et le paramètre β1 est compris entre 0.1414325 et 0.44822.

Modèle 6 : $Y = \beta0*e\text{^}(\beta1*X2+\varepsilon)$:

Équation transformée : $\ln(Y) = \ln(\beta0) + \beta1*X2+ \varepsilon$:

```
#Modèle 6:
#Tableau des coefficients de régression
reg6 <- lm(log(sales)~advertising)
summary(reg6)
#Tableau d'analyse de la variance
anova (reg6)
#Nuages de points
par (mfrow=c(1,1))
plot (advertising, log (sales), main="Nuage de points du modèle 6",
      xlab="Publicité", ylab="Nombre de sièges vendus en milliers", col="red")
abline (reg6, col="blue")
#Analyse des résidus
par (mfrow=c(2,2))
plot (reg6, col="purple")
#Intervalle de confiance des coefficients de régression
confint (reg6)
```

```
Call:
lm(formula = log(sales) ~ advertising)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-2.92923 -0.23988  0.09063  0.27957  0.91712 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 1.784246   0.048007  37.166  < 2e-16 ***
advertising 0.021533   0.005403   3.986 9.54e-05 ***
---
Residual standard error: 0.4753 on 193 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.07605,	Adjusted R-squared:  0.07126 
F-statistic: 15.88 on 1 and 193 DF,  p-value: 9.539e-05
```

Figure 36. Tableau des coefficients de régression du modèle 6.

```
Analysis of Variance Table

Response: log(sales)
             Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)    
advertising   1  3.588  3.5881  15.885 9.539e-05 ***
Residuals   193 43.595  0.2259
```

Figure 37. Tableau d'analyse de la variance du modèle 6.

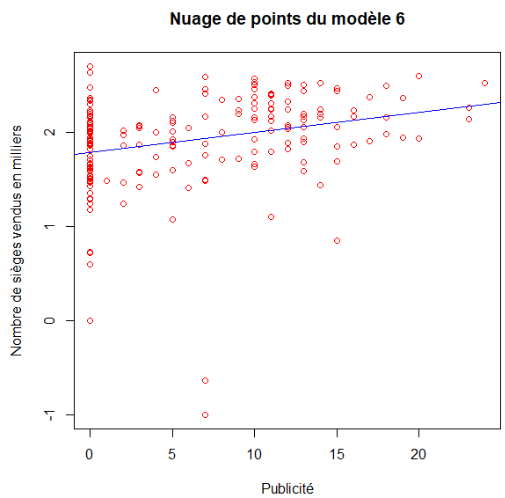


Figure 38. Test de signification du modèle 6.

Pour ces tests, le critère de rejet de l'hypothèse est que la p-value soit plus petite que α. On pose comme hypothèse nulle que les coefficients soient égaux à zéro (H0 : $\beta 0 = 0$ $\beta 1=0$) ainsi que l'hypothèse alternative que les coefficients ne soient pas égaux à zéro (H1 : $\beta 0 \neq 0$ $\beta 1 \neq 0$). Dans ce modèle, $\alpha=0.05$, la p-value ($\beta 0$) < 2e-16 et la p-value ($\beta 1$) = 0.00111. Ces valeurs sont significativement plus petites que 0.05, on peut donc rejeter l'hypothèse nulle dans les deux tests. On peut donc conclure que la relation linéaire entre la publicité (X2) et les ventes (Y) est significative. De plus, la valeur de R^2 trouvée dans le tableau d'analyse de la variance est de 0.05515, étant loin de 1 ceci indique que le modèle n'est pas une bonne représentation de la relation entre les ventes et la publicité. Aussi, sur le nuage de points ci-dessus on peut observer que les observations sont dispersées majoritairement autour de la ligne bleue représentant la relation entre la publicité et les ventes, ce qui confirme le rejet de l'hypothèse nulle de $\beta 1$.

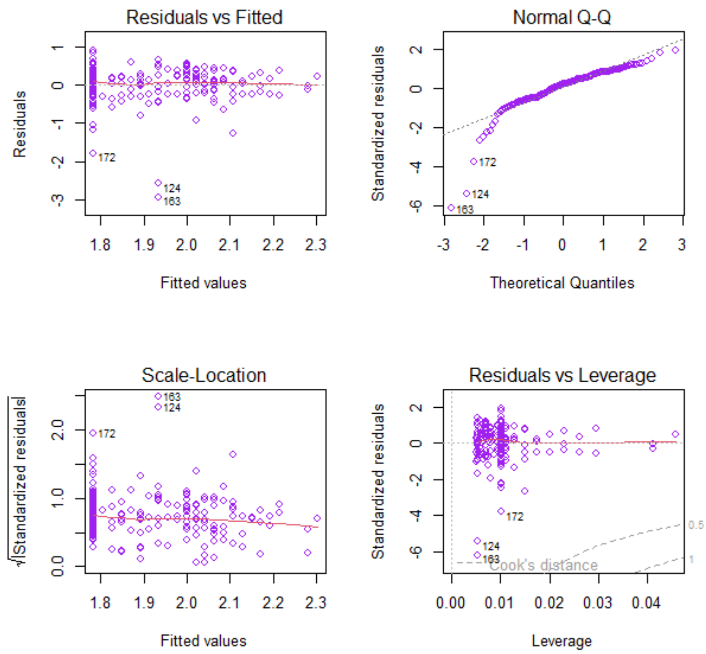


Figure 39. Analyse des résidus du modèle 6.

Pour évaluer la normalité des résidus, nous devons nous fier au « Normal Probability Plot » représenté ci-dessus. On peut observer que 75% des résidus en mauve suivent une ligne droite et se situent en bonne partie sur la ligne de normalité en rouge indiquant que l'hypothèse de normalité est respectée pour la majorité des observations. De plus, les résidus sont dispersés de façon homogène autour de la droite horizontale dans le graphique « Residuals vs Fitted » indiquant l'homoscédasticité. Cependant, dans ce même graphique, les résidus se situant en dehors de l'intervalle -2 à 2 doivent être rejetées, car ce sont des données atypiques.

```
                 2.5 %     97.5 %
(Intercept) 1.68955949 1.87893259
advertising 0.01087728 0.03218965
```

Figure 40. Intervalle de confiance pour les paramètres du modèle 6.

Calculée ci-dessus, avec un niveau de confiance 95%, le paramètre β0 est compris entre 1.68955949 et 1.87893259 et le paramètre β1 est compris entre 0.01087728 et 0.03218965.

Comparaison et choix du modèle le plus préférable :

En me basant sur le test de signification, R2, et la normalité des résidus, je choisis le modèle 1. Le modèle 1 démontre bien la relation significative entre le prix et les ventes. De plus, son R2 est celui qui se rapproche le plus de 1. Les résidus de ce modèle suivent mieux la droite normale que n'importe quel autre modèle. Bref, ce modèle représente le mieux la relation linéaire entre le prix et les ventes.

d)

```
#d)
interprev <- data.frame(price=118, advertising=12, region=0)
predict(reg1, interprev, interval="prediction")
```

```
       fit      lwr      upr
1 7.372514 2.523374 12.22165
```

Figure 41. Intervalle de prévision des ventes

Avec un niveau de confiance de 95% ainsi que X1=102, X2=14, X3=0, on peut affirmer que les ventes seraient entre 2.523374 et 12.22165 milliers de ventes. Dans ce modèle, en utilisant les valeurs des coefficients trouvées dans le tableau des coefficients de régression, les ventes serait de 7.37251 milliers de ventes.