



POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

2244 082

11

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - HIVER 2023

Nom : Benzelri

(lettres moulées)

Prénom : Omar

(lettres moulées)

No du cours : MTH2302D

Section : 01

Titre du cours : PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement le cahier.
2. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée**. La note 0 sera attribuée à toute réponse non justifiée.
3. N'utilisez que le **recto** pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon. Inscrivez votre **matricule** sur chaque page.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet. Vérifiez que le cahier compte bien **18 pages**.
6. **Documentation** : 1 feuille résumée manuscrite 8,5x11 recto-verso.
7. **Calculatrice non-programmable permise**. Les appareils électroniques personnels (téléphones, tablettes, ordinateurs, etc.) sont interdits.
8. *Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.*

Réservé

1.	2	/2
2.	2.25	/3
3.	4	/4
4.	4	/4
5.	1	/4
6.	2.5	/3
TOTAL		/20

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Signature de l'étudiant(e)

Date : **samedi, le 18 février 2023**

Heure : **10h00 à 12h00**

15/20

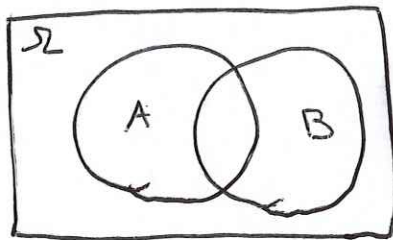
QUESTION N°1 (2 points)

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

$$P(A) = 0,40; \quad P(\bar{B} | A) = 0,25; \quad P(B | \bar{A}) = 0,50.$$

- a) (1 point) Calculer la probabilité $P(B)$.
- b) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.

RÉPONSE



$$P(A) = 0,4 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,6$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\bar{B} | A) = 0,25 = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,25 \cdot 0,4$$

$$\Rightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,1$$

$$P(B | \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3$$

$$a) \quad P(B) = (P(A) - P(\bar{B} \cap A)) + P(B \cap \bar{A})$$

$$= 0,4 - 0,1 + 0,3 = 0,6$$

$$b) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - (P(A) - P(\bar{B} \cap A))$$

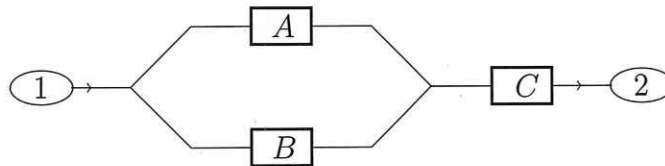
$$= 0,4 + 0,6 - 0,3$$

$$= 0,7$$

QUESTION N° 1 (suite)

QUESTION N° 2 (3 points)

On considère un système (voir schéma ci-dessous) constitué de trois composants A , B et C . Le système fonctionne s'il y a au moins un chemin, liant les points 1 et 2, constitué de composants qui fonctionnent. Les trois composants opèrent indépendamment les uns des autres et chacun a une fiabilité de 0,95.



Sachant que le système fonctionne, quelle est alors la probabilité que le composant B fonctionne ?

RÉPONSE

Événement D : "Le système fonctionne"

$$P(D) = P(A \cap C) \cup P(B \cap C)$$

$$= 1 - (1 - 0,95 \cdot 0,95) \cdot (1 - 0,95 \cdot 0,95)$$

$$\approx 0,99$$

Non

-0.5

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{0,95 \cdot 0,95}{0,99}$$

Comment

-0.25

$$\approx 0,91$$

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION N° 3 (4 points)

4/4

On suppose que chaque nouvelle que vous recevez provient (origine) d'une seule des trois sources suivantes : F , T , C . Les sources F et T sont des réseaux sociaux tandis que la source C est constituée des médias conventionnels (télé, radio, etc.).

On suppose que 50% des nouvelles que vous recevez proviennent de F , 30% proviennent de T et le reste provient de C . De plus, une étude montre que 60% des nouvelles de F sont fausses, cette proportion est de 40% pour les nouvelles de T et de 10% pour celles de C .

Vous venez de recevoir une nouvelle.

- a) (2 points) Quelle est la probabilité que la nouvelle soit fausse ?
- b) (2 points) Si la nouvelle est fausse, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne d'au moins une des sources des réseaux sociaux ?

RÉPONSE

$$P(F) = 0,5 ; P(T) = 0,3 ; P(C) = 0,2 \text{ (car } \Omega = 1)$$

X : "Fausse Nouvelle" ✓

$$\begin{aligned} a) \quad P(X) &= P(F) \cdot P(X|F) + P(T) \cdot P(X|T) + P(C) \cdot P(X|C) \\ &= 0,5 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,1 \\ &= \frac{11}{25} = \boxed{0,44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad P(F|X) &= \frac{P(F \cap X)}{P(X)} = \frac{0,5 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4}{0,44} = \frac{21}{22} \\ &\approx \boxed{0,95} \end{aligned}$$

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION N° 4 (4 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

4/4

où k est une constante réelle.

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k .

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (1,5 point) Calculer la probabilité $P(Y > 3/4)$.

2.b) (1,5 point) Calculer la moyenne de Y , c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$k \int_{-1}^1 (1+x) dx = 1$$

$$k \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 1$$

$$2k = 1$$

$$(1) \quad k = \frac{1}{2}$$

$$b) P(Y > 3/4) = P(1 - X^2 > 3/4)$$

$$= P(X^2 < \frac{1}{4})$$

$$= P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{2} (1+x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-0.5}^{0.5}$$

$$P(Y > 3/4) = 0.5$$

$$2.b) E(Y) = \int_{-1}^1 (1 - X^2) \frac{1}{2} (1+x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x - x^2 - x^3) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1$$

$$= 2/3$$

$$E(Y) = \frac{2}{3}$$

1,5

QUESTION N° 4 (suite)

QUESTION N° 4 (suite)

QUESTION N° 5 (4 points)

Une boîte contient 3 jetons dont les valeurs sont différentes. Un jeton a la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et un jeton a la valeur 2. On choisit au hasard et sans remise deux jetons de la boîte. *équiprobable*
 Soit X la valeur du premier jeton obtenu, et Y la somme des valeurs des deux jetons obtenus.

- a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$, en y incluant les valeurs possibles et les distributions marginales de X et de Y .

Laisser les probabilités sous forme fractionnaire (par exemple $1/4$ au lieu de $0,25$).

- b) (2 points) Calculer l'écart-type de la variable $T = 20 + 2X - Y$.

RÉPONSE

$y \backslash x$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$
$P_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

$$P(0,0) = 0$$

$$P(1,0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(2,0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(0,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(0,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(2,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} b) \quad V(T) &= V(20 + 2X - Y) \\ &= (2)^2 (V(X)) - 2(2)(-1) \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(0^2 \cdot \frac{2}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6}\right) - \left(0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= \frac{2}{3} \quad (\text{Identique à } V(X)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \left(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}\right) - \mu_X \mu_Y \\ &= \frac{2}{3} - 1 \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

QUESTION N° 5 (suite)

$$V(T) = 4 \cdot \frac{2}{3} + (2) \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

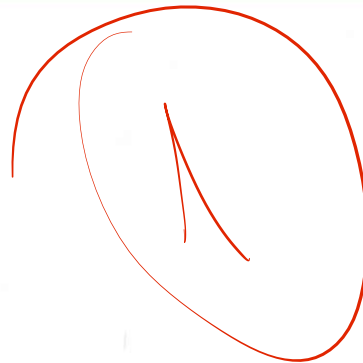
$$= \frac{10}{3} \approx 3,33$$

$$\sigma_T (\text{Écart Typ}) = \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\approx 1,88$$



QUESTION N° 5 (suite)

QUESTION N° 5 (suite)

QUESTION N° 6 (3 points)

On suppose que les autobus de la ville passent à un certain arrêt, durant le jour, selon un processus de Poisson de moyenne 5 autobus par heure.

- a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'il passe à cet arrêt au moins 3 autobus durant les 25 prochaines minutes ?
- b) (2 points) Étant donné qu'un usager attend l'autobus à cet arrêt depuis 5 minutes, quelle est la probabilité qu'un autobus arrive dans moins de 10 minutes à compter de maintenant ?

RÉPONSE

X : nb de bus de ville qui passent à un certain arrêt ; $X \sim \text{Poi}(c)$

$\lambda = 5$; t : nb d'heures ; $c = \lambda t$

a) $25 \text{ min} = \frac{5}{12} \text{ d'heure} \Rightarrow t = \frac{5}{12} \Rightarrow c = \frac{25}{12}$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-c} c^0}{0!} + \frac{e^{-c} c^1}{1!} + \frac{e^{-c} c^2}{2!} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 - (\approx 0,27)$$

$$= 0,73$$

b) Y : temps d'attente

$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$; $\lambda = 5$; $t = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} P(Y \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{12} | Y > \frac{1}{12}) \\ = P(Y \leq \frac{1}{6}) \quad (\text{absence de mémoire}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \leq \frac{1}{6}) &= F_Y(\frac{1}{6}) \\ &= 1 - e^{-5 \cdot \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\approx 0,56$$

QUESTION N° 6 (suite)

Page supplémentaire