→ Loi normal: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu$; $V(X)=\sigma^2$ → sommet $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Normal centrée réduite: $Z\sim N(0,1)$ → sommet $1/\sqrt{2\pi}$ → $P(Z<a)=\Phi(a)$

$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$ | $X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)=Z$

TCL: $Y=a_0+a_1X_1+\dots$ avec X_i v.a quelconque.

Si $n>30 \Rightarrow Y\sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ avec $\mu_Y=a_0+\sum a_iE(X_i)$; $\sigma_Y^2=\sum a_i^2V(X_i)$

→ Loi lognormale: $X\sim \lg N(\mu_Y,\sigma_Y^2)\Leftrightarrow Y=\ln X\sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$

$Y=\ln X \Rightarrow X=e^{Y}$ (Normale) ← ne jamais centré réduire en lg

$E(X)=\mu_X=e^{\mu_Y+\frac{1}{2}\sigma_Y^2}$; $V(X)=\sigma_X^2=\mu_X^2(e^{\sigma_Y^2}-1)$ $X\sim N(\mu,\sigma^2)\to\bar X\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

Variance: $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2=\frac{1}{n-1}\left(\left(\sum X_i^2\right)-n\bar X^2\right)$

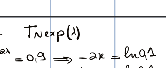
Etendue: Max − Min

Coefficient de variations: $CV=\frac{S}{\bar X}$ $CV_Y<CV_X$ → Y est plus centré autour de sa moyenne.

→ Loi de Khi-2 $\chi^2_k(\alpha)$

$Y=Z_1^2+Z_2^2+\dots+Z_k^2$ avec $Z_i\sim N(0,1)$ → $Y\sim\chi^2_k$

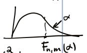
$E(\chi^2_k)=k$; $V(\chi^2_k)=2k$; $\chi^2_u+\chi^2_v=\chi^2_{u+v}$



→ Student T_k: $T_k=\frac{Z}{\sqrt{\chi^2_k/k}}$ ou $Z\sim N(0,1)$ $t_k(\alpha)=-t_k(1-\alpha)$

$E(T_k)=0$; $V(T_k)=\frac{k}{k-2}$ si $k>2$

→ Fisher:



$F_{n,m}=\frac{\chi^2_n/n}{\chi^2_m/m}$ ou χ^2_n et χ^2_m ind $F_{n,m}(\alpha)=\frac{1}{F_{m,n}(1-\alpha)}$

$E(F_{n,m})=\frac{m}{m-2}$ $V(F_{n,m})=\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$

→ $\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$; $\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim T_{n-1}$; $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2_{n-1}$; $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n-1,m-1}$

$P(T_{10}>t_{10}(\alpha))=\alpha$ $P(\chi^2_n>\chi^2_n(\alpha))=\alpha$ $P(F_{n,m}>F_{n,m}(\alpha))=\alpha$

→ Estimateur: Biais$(\hat\theta)=E(\hat\theta)-\theta$; EQM$(\hat\theta)=V(\hat\theta)-[\text{Biais}(\hat\theta)]^2$

si EQM$(\theta_1)<$ EQM(θ_2) ⇒ θ_1 est meilleur que θ_2

→ Méthode des moments: $E(X^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ $k=1,2,\dots$ trouver θ

→ Méthode du Maximum de vraisemblance:

① Calculer $L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}P_X(x_i) & \text{si X discrète}\\ \prod_{i=1}^{n}f_X(x_i) & \text{si X continue}\end{cases}$ $E(\bar X)=E(X)$; $V(\bar X)=\frac{V(X)}{n}$

② Calculer $\ln(L(\theta))$

③ Résoudre $\frac{d}{d\theta}\ln(L(\theta))=0$ et isoler θ (on vérifie que $\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(L(\theta))<0$)

→ Estimation par intervalle de confiance: IDC (Tableau)

• Longueur $l=U-L=2Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Si $n\uparrow$ alors $l\downarrow$ $\lim_{n\to\infty}l=0$ $(\mu=\bar X)$

• Erreur d'estimation: $E=|\bar X-\mu|$ → $E_{max}=Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

→ Erreur type 1. P(Rejeter H0 | H0 vraie) = α   P(accepter H0 | H0 vraie) = 1 − α

Erreur type 2. Accepter H0 | H0 fausse P(accepter H0 | H0 fausse) = β

P(Rejeter H0 | H0 fausse) = 1 − β

→ p_value: $=\begin{cases}P(\text{loi} > |\text{statistique du test}|) & \text{si Unilatéral}\\ 2P(\text{loi} > |\text{statistique du test}|) & \text{si Bilatéral}\end{cases}$

Rejeter H0 si p-value < α

→ Test d'ajustement: H0: X∼loi vs H1: X≁loi $n=\sum O_i$

$P_i=P(X\in\text{classe } i)$ $E_i=nP_i$

Statistique du test: $Q=X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$

Rejeter H0 si $Q>\chi^2_{k-p-1}(\alpha)$ où p: nb de paramètres de la loi testée / nb de paramètres estimés

→ Test d'indépendance: H0: X,Y ind vs H1: X,Y dep

$E_{ij}=\frac{O_iO_j}{\text{Total}}$. $Q=\chi^2_0=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$ Rejeter H0 si $Q>\chi^2_{(r-1)(c-1)}(\alpha)$

→ Méthode des moindres carrées:

Il faut que $\sum\varepsilon_i=0$ et $\sum\varepsilon_i^2$ minimale

$\hat\beta_1=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$; $\hat\beta_0=\bar Y-\hat\beta_1\bar X$ $S_{yy}=\sum(Y_i-\bar Y)^2=\sum Y_i^2-n\bar Y^2$

$S_{xx}=\sum(X_i-\bar X)^2=\sum X_i^2-n\bar X^2=(n-1)S^2$

$S_{xy}=\sum(X_i-\bar X)(Y_i-\bar Y)=\sum(X_iY_i)-n\bar X\bar Y$

→ Coefficient de détermination R^2:

$\underbrace{\sum(y_i-\bar Y)^2}_{S_{yy}\text{ ← variabilité totale}}=\underbrace{\sum(Y_i-\hat Y_i)^2}_{SS_E\text{ ← expliquée par erreur/résidu}}+\underbrace{\sum(\hat Y_i-\bar Y)^2}_{SS_R}$ ← variabilité expliquée par la regression

$R^2=\frac{SS_R}{S_{yy}}\in[0,1]$ ← taux occupé par la regression

$1-R^2=\frac{SS_E}{S_{yy}}\in[0,1]$ ← taux occupé par les erreurs

• $SS_R=\hat\beta_1S_{xy}=\frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$ • $SS_E=S_{yy}-SS_R=S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$

→ Tableau d'analyse de variance:

Source de variation	Somme des carrées	Nb de ddl	Moyenne des carrés	F_0
Regression	SS_R	1	$MS_R=\frac{SS_R}{1}$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Résidus	SS_E	$n-2$	$MS_E=\frac{SS_E}{n-2}=\sigma^2$	
Total	$SS_T=S_{yy}$	$n-1$		

→ Test de signification globale (Test de Fisher)

H0: $\hat\beta_1=0$ vs H1: $\hat\beta_1\neq0$ Rejeter H0 si $F>F_{1,n-2}(\alpha)$

→ Test de signification individuel (Test de Student)

H0: $\hat\beta_1=0$ vs H1: $\hat\beta_1\neq0$ Rejeter H0 si $|T_0|>T_{n-2}(\frac{\alpha}{2})$

$T_0=\frac{\hat\beta_1}{\sqrt{MS_E/S_{xx}}}$

→ Coefficient de corrélation $r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}\in[-1,1]$

$r^2=R^2\Rightarrow r=\begin{cases}-\sqrt{R^2} & \text{si }\hat\beta_1<0\\ \sqrt{R^2} & \text{si }\hat\beta_1>0\end{cases}$

→ Intervalle de prévision:

$X_{n+1}\in\bar X\pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})S\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

→ Intervalle de confiance/prévision sur Y lorsque $X=x_0$

De confiance: (moyenne)

$E(Y|X=x_0)\in\hat y_0\pm t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar X-X_0)^2}{S_{xx}}\right)}$

De prévision: (prédiction)

$Y|_{X=x_0}\in\hat y_0\pm t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{MS_E\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(\bar X-X_0)^2}{S_{xx}}\right)}$

$R(t)=P(T>t)$; $P(T\le t)=F(t)$; $R(t)=1-F(t)$

$R'(t)=-f_T(t)$; $R(t)=\exp\left(-\int_0^t r(x)dx\right)$

→ Durée moyenne: $\tau=E(T)=\int_0^\infty tf_T(t)dt=\int_0^\infty R(t)dt$

Si T discrète (par cycle) $\begin{cases}R(t)=\sum_{i=t+1}^{\infty}p(i)=1-F(t)=1-\sum_{i=0}^{t}p(i)\\ \tau=E(T)=\sum_{i=0}^{\infty}ip(i)=\sum_{i=0}^{\infty}R(i)\end{cases}$

→ Taux de panne: $r(t)=-\frac{R'(t)}{R(t)}=\frac{f(t)}{R(t)}$

→ Fiabilité des systèmes en série: $R(t)=\prod_{i=1}^{k}R_i(t)$

↳ avec la loi exponentielle: $R(t)=e^{(-\sum\lambda_i)t}$ $\tau=E(T)=\frac{1}{\sum\lambda_i}$

→ Système // à redondance active: $T=\max\{T_1,T_2,\dots,T_k\}$

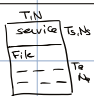
$R(t)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-R_i(t))$ Tous les composants fonctionnent dès le début

→ Système // à redondance passive: un composant à la fois

$T=\sum T_i$ * Si $T_i\sim\exp(\lambda)\Rightarrow T=\sum T_i\sim\Gamma(k,\lambda)$

* Si $T_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)\Rightarrow T\sim N(\mu_T=\sum\mu_i ; \sigma_T^2=\sum\sigma_i^2)$

$T=T_S+T_q$ $N=N_S+N_q$ moyenne $\begin{cases}\bar T=\bar T_S+\bar T_q\\ \bar N=\bar N_S+\bar N_q\end{cases}$



$\bar N=\lambda_e\bar T$, $\bar N_S=\lambda_e\bar T_S$, $\bar N_q=\lambda_e\bar T_q$ avec λ_e: Taux d'entrée

→ File M|M|1: capacité infinie

On doit avoir $\lambda<\mu$ pour atteindre l'équilibre (régime stationnaire)

Si $\lambda\ge\mu$ le système sera débordé. λ: taux d'arrivés, μ: taux d'entrée

$\Pi_k=P(N=k)=(1-\rho)\rho^k$ $k=0,1,\dots$ avec $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$

$\begin{cases}\bar N=\frac{\rho}{1-\rho}\\ \bar N_S=1-\Pi_0=\rho\\ \bar N_q=\bar N-\bar N_S=\frac{\rho^2}{1-\rho}\end{cases}$ $\begin{cases}\bar T=\frac{\bar N}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}\\ \bar T_S=\frac{1}{\mu}\\ \bar T_q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}\end{cases}$

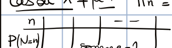
$N_S\sim B(\rho)\to\bar N_S=\rho=\frac{\lambda}{\mu}$

$T\sim\exp(\mu-\lambda)\to\bar T=\frac{1}{\mu-\lambda}$ $N+1\sim G(p=1-\rho)$

→ File M|M|1|K:

Système limité à K places donc (K−1) places dans la file

Cas où $\lambda\neq\mu$: $\Pi_n=P(N=n)=\rho^n\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$ $n=0,1,\dots,k$



$\bar N=\sum nP(N=n)$ $\bar T=\frac{\bar N}{\lambda_e}=\frac{\bar N}{\lambda(1-\Pi_k)}$

Cas où $\lambda=\mu$: les cas sont équiprobables:

n	0	1	2	3	4
P(N=n)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\lambda=\mu=5$

→ Deux proportion $P_1=P_2$

$Z_0=\frac{\hat P_1-\hat P_2}{\sqrt{\hat P(1-\hat P)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$ (statistique du test)   avec $\hat P=\frac{n_1\hat P_1+n_2\hat P_2}{n_1+n_2}$

Decision: si $P_1\neq P_2$ → Rejeter H0 si $|Z_0|>Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$P_1>P_2$ → Rejeter H0 si $Z_0>Z_\alpha$

Si $n_1=n_2$ $S_p^2=\frac{S_1^2+S_2^2}{2}$

$S_D=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(D_j-\bar D)^2}$

→ IDC pour β_0: $\beta_0\in\hat\beta_0\pm t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar X^2}{S_{xx}}\right)}$

→ IDC pour β_1: $\beta_1=\hat\beta_1\pm t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}}$

Binomiale: $X\sim B(n,p)$

X: nb de succès sur n épreuves ind

p: proba de réussir chaque épreuve

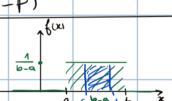
$P_X(x)=C_x^np^x(1-p)^{n-x}=P(X=x)$

avec $x\in\{0,1,\dots,n\}$

$E(X)=np$; $V(X)=np(1-p)$

Uniforme, $X\sim U[a,b]$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } a\le x\le b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$



$P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a}$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$; $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\le x<b\\ 1 & \text{si } x\ge b\end{cases}$

$n=\left\lceil\left(\frac{Z_{\alpha/2}}{2E}\right)^2\right\rceil$ quand $\hat p=0{,}5$

Exponentielle. $X\sim Exp(\lambda)$ (Absence de mémoire)

$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\ge0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\sigma$ $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\ge0\end{cases}$

$P(X>x)=e^{-\lambda x}$

Test d'hypothèse sur β_0: H0: $\beta_0=\beta_{0,0}$ vs H1: $\beta_0\neq\beta_{0,0}$

$t_0=\frac{\hat\beta_0-\beta_{0,0}}{\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar X^2}{S_{xx}}\right)}}\sim T_{n-2}$ Rejeter H0 si $|t_0|>t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})$

T: temps pour enregistrement d'un passager $T\sim\exp(\lambda)$

$P(T<2)=0{,}9\Rightarrow 1-e^{-2\lambda}=0{,}9\Rightarrow -2\lambda=\ln0{,}1$; $\lambda=-\frac{\ln0{,}1}{2}$

On cherche $P(T<90s)=1-e^{\frac{3}{2}\times\frac{\ln0{,}1}{2}}=0{,}82$

b) Soit T' le temps d'enregistrement de 200 passagers

$T'=T_1+T_2+\dots+T_{200}$

D'après TCL sachant que $n=200$ grand

$T'\sim N(\mu=200\times\frac{1}{1{,}15}, \sigma^2=200\times\frac{1}{1{,}15^2})$

$T'\sim N(\mu=173{,}91 ; \sigma^2=151{,}22)$

$P(T'<180)=P\left(Z<\frac{180-173{,}91}{\sqrt{151{,}22}}\right)=\Phi(0{,}49)=68\%$

X: temps nécessaire exécution $X\sim N(\mu=5\text{min}, \sigma^2=1)$

16 fois $\bar X$, S^2

On a $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2_{15}(0{,}05)$

⇒ $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2=\chi^2_{15}(0{,}05)\Rightarrow S^2=\frac{\chi^2_{15}(0{,}05)\sigma^2}{n-1}=26$

X: nb de défauts $X\sim B(3,p)$

↳ échantillon $n=300$ H0: $X\sim B(3,p)$ vs H1: $X\not\sim B(3,p)$

x_i	0	1	2	3	Total
Fréquence O_i	138	96	54	12	300
P_i	0,42	0,42	0,14	0,015	1
E_i	126	126	42	4,5	300

$\bar X=\frac{300}{4}=75$ $\frac{\bar X}{n}=\frac{75}{300}=0{,}25$

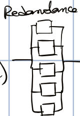
On estime p par la méthode des moments

Pour $k=1$: $E(X)=\bar X=np=\bar X$

⇒ $\hat p=\frac{\bar X}{n}$

→ $P_0=C_0^3\times0{,}25^0(1-0{,}25)^3=0{,}42$

Redondance active



a) $T\sim Exp(\lambda=1)$

$P(T>2|T>1)=\frac{P(T>2)}{P(T>1)}$ (absence de mémoire)

b) M|M|1|2   1 place dans la file

$\lambda=5$ $\mu=6$ $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{6}$

$\Pi_2=P(N=2)=\rho^2\frac{1-\rho}{1-\rho^3}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1-\frac{5}{6}}{1-(\frac{5}{6})^3}=0{,}277$

$X\sim N(\mu,\sigma^2=9=3^2)$

↳ Echantillon $\begin{cases}n=25\\ \bar X \text{ moyenne d'échantillon}\end{cases}$

Test sur μ tq H0 rejetée si $\bar X\notin[13{,}77 ; 16{,}23]$ ⇒ H0 rejetée de 2 côtés ↳ Test bilatéral

H0: $\mu=\mu_0$ vs H1: $\mu\neq\mu_0$

σ^2 connue → ligne 1

Trouver μ_0 = ?

Table des tests: ligne 1 / col 3

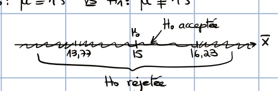
Rejeter H0 si $|Z_0|>Z_{\frac{\alpha}{2}}$

⇒ $\begin{cases}Z_0>Z_{\frac{\alpha}{2}}\\ \text{ou}\\ Z_0<-Z_{\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}\frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>Z_{\frac{\alpha}{2}}\\ \text{ou}\\ \frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-Z_{\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}\bar X>Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0\\ \text{ou}\\ \bar X<-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0\end{cases}$

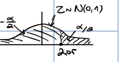
⇒ $\begin{cases}Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0=16{,}23 \ ①\\ \text{ou}\\ -Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0=13{,}77 \ ②\end{cases}$ ①② $2\mu_0=16{,}23+13{,}77$

⇒ $\mu_0=\frac{30}{2}=15$

→ H0: $\mu=15$ vs H1: $\mu\neq15$



b) $\alpha=P(\text{rejeté H0}|\text{H0 vraie})$



de ①: $Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{25}}+15=16{,}23\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}05$

$1-\frac{\alpha}{2}=P(Z<2{,}05)=0{,}9798\Rightarrow\alpha=0{,}0404=4{,}04\%$

---

e) Question supplémentaire:

* $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$ estimer σ^2 (variance résidu)

$\sigma^2=MS_E=1397{,}785$

* Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.

$r_{X,Y}=r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}=+\sqrt{R^2}=\sqrt{0{,}9897}=0{,}9948$ (+$\sqrt{R^2}$ car pente positive)

→ Borner l'erreur d'approximation :

$$|p-\hat{p}| = \left| z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right| \leq E$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$$

---

a) File d'attente M|M|1 ← 1 serveur, file illimitée $\quad \lambda < \mu$

Arrivées : $\lambda = 27$ clients / heure

Départ : $\mu = ?$ clients / heure

T : Durée passée dans le système (heure)

$P(T > 3 \text{ minute}) = 0{,}9 \Rightarrow P(T > \frac{1}{20}) = 0{,}9$

Chercher $\overline{N}$

$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$ ou $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

on a $T \sim Exp(\mu-\lambda) \Rightarrow P(T > \frac{1}{20}) = e^{-\frac{1}{20}(\mu-\lambda)} = 0{,}9$

$\Rightarrow \frac{\mu-\lambda}{20} = \ln 0{,}9 \Rightarrow \mu - \lambda = 20 \ln 0{,}9$

$\Rightarrow \mu = 20 \ln 0{,}9 + \lambda \Rightarrow \mu = 29{,}107$ clients / heure

$\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}927$

$\Rightarrow \overline{N} = 12{,}69$ clients

	1	2	3	4	5	Total
Av	84	75	93	79	84	415
Ap	81	74	92	78	84	409
Total	165	149	185	157	168	824

Avant : $\begin{cases} n_1 = 5 \\ \overline{X}_1 = 83 \\ S_1^2 = 45{,}5 \end{cases}$ Après : $\begin{cases} n_2 = 5 \\ \overline{X}_2 = 81{,}8 \\ S_2^2 \end{cases}$

a) $\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_n(\frac{\alpha}{2})} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$

$\sigma^2 \in \left[\frac{4 \times 45{,}5}{\underbrace{\chi^2_5(0{,}025)}_{12{,}83}} ; \frac{4 \times 45{,}5}{\underbrace{\chi^2_4(0{,}975)}_{0{,}48}}\right]$

$\sigma^2 \in [14{,}18 ; 379{,}17]$

b) $X_6 \in \overline{X}_1 \pm t_4(0{,}025) S_1 \sqrt{1+\frac{1}{5}}$

$X_6 \in 83 \pm 2{,}78 \sqrt{45{,}5} \sqrt{\frac{6}{5}}$

$X_6 \in 83 \pm 20{,}54$

$X_6 \in [62{,}46 ; 103{,}54]$

c) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Statistique du test : $T_0 = \frac{\overline{D}}{S_D / \sqrt{n}}$

	1	2	3	4	5
D	3	1	1	1	0

$\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$S_D = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{5} (D_i - \overline{D})^2}$

---

n fils d'attentes n service

$$\overline{N} = \overline{N}_q + \overline{N}_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

X : Durée de service (minute)

↳ Echantillon taille : $\begin{cases} n = 53 + 36 + \dots + 21 = 150 \\ \overline{X} = 2{,}5 \text{ minutes} \end{cases}$

H_0 : $X \sim$ Exponentielle vs H_1 : $X \not\sim$ Exponentielle

	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	≥ 4
O_i	53	36	28	12	21
P_i	$P_1 = 0{,}33$	0,221	0,148	0,099	0,202
E_i	$E_1 = 49{,}45$	33,15	22,22	14,89	30,30

Ici $P_1 = P(0 < X < 1) = e^{-\lambda 0} - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1}$

Rappel : $X \sim Exp(\rho)$

$P(a < X < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b$

$= -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a}$

Estimons λ avec méthode des moments (par exemple)

Pour $\underline{K=1}$: $\Rightarrow E(X) = \overline{X}$

Géométrique : $X \sim G(p)$

X : nb d'épreuve indépendantes jusqu'à avoir un premier succès

$X \sim \{1, 2, 3, \dots\}$

$$P_X(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \; ; \; V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$$

Poisson : $X \sim P(\lambda)$

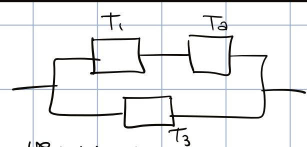
$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, \dots$$

$E(X) = V(X) = \lambda$

X : nb d'arrivées dans un interval T

Y : nb d'arrivées dans un interval T'

Si $X \sim P(\lambda) \Rightarrow Y \sim P(\lambda' = \lambda . \frac{T'}{T})$



$\tau = \int_0^\infty R(t)\, dt$

$R(t) = P(T > T_3) + R(T_2 T_1)$

$= e^{-3t} + e^{-t}$

redondance passive

$T_i \sim Exp(2)$

$\lambda = \frac{1}{2}$

$\tau = \int_0^\infty e^{-3t} + e^{-t}\, dt$

$= \left[-\frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}\right]_0^\infty$

$= \frac{e^0}{3} + e^0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$