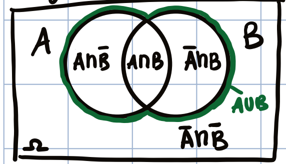
Disjoint (incompatible) si $A\cap B \neq \emptyset$



$P(A)=P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cup B\cup C)$

- Evenement équiprobable:

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{\text{nb cas favorable}}{\text{possible}}$$

- successif avec remise : n^k
- successif sans remise : P_k^n

↑ ordre ↑ sans répétition

- Tirage simultané : C_k^n

pas d'ordre ↑ pas de répétition (sans remise)

→ Indépendants : $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $P(\bar{A}/B)=1-P(A/B)$

↳ A et B indep $\Leftrightarrow P(A/B)=P(A/\bar{B})=P(A)$

→ - Loi des probabilités totales (LPT):

$$P_A=\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)$$

→ - Loi de Bayes:

$$P(B_k/A)=\frac{P(A/B_k)P(B_k)}{P(A/B_1)P(B_1)+\dots+P(A/B_n)P(B_n)}$$

- **V.a discrète** (masse)

$P_x(x)=P(X=x)$ ou $x\in R_x$ $\quad \sum P_x(x)=1$

$\mu=\sum x P_x(x)$ $\quad V(X)=\sum x^2 P_x(x)$ $\quad \sigma=\sqrt{V(X)}$

↑ espérance (moyenne) ↑ Écart type

- **V.a continue** (densité)

$$\begin{cases} f_x(x)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx=1 \end{cases} \qquad P(X=x)=0$$

$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$ $\quad V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$

$=E(X^2)-[E(X)]^2$

- **Fonction de répartition $F_X(x)$:**

$F_X(x)=P(X\leq x)$: proba cumulée de $-\infty$ à x

$\lim_{x\to\infty}F_X(x)=1$ $\quad \lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ $\quad F_X \nearrow$ définie sur $\mathbb{R}$

→ Cas discret:

$F_X(x)=P(X\leq x)=\sum_{y\leq x}P_X(y)$

en escaliers

→ Cas continu:

$F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\,dx$

⊢ Discret et continue

$$P(a<x\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$$

→ X et Y continues $Y=g(X)$

- Si g monotone →

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}\right|$$

$y=g(x)\Rightarrow x=g^{-1}(y)$

- Si g pas monotone → $F'_Y(y)$

* $E(Y)=E(g(X))\rightarrow$

$$\begin{cases}\sum_x g(x)P_X(x) \text{ si X discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)\,dx \text{ si X continue}\end{cases}$$

X,Y ind ssi $P_{X,Y}(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$ $(\forall x,y)$

→ $E(Y)=\sum y P_Y(y)$

$E(Y|X=x)=\sum y P_{Y|X=x}(y)$

- $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ avec $E(XY)=\sum_x\sum_y xy P(x,y)$

→ Coefficient de corrélation:

$$\rho_{X,Y}=\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} \qquad \rho\in[-1,1]$$

X,Y ind $\Rightarrow \rho=0$ $(Cov(X,Y)=0)$

$\rho=0$ X,Y non correlées $\quad |\rho_{X,X}=1$

Si $Y=aX+b$ $(a\neq 0)$ $\rho=\begin{cases}1 & \text{si } a>0 \\ -1 & \text{si } a<0\end{cases}$

Bernoulli: $X\sim B(p=P(\text{succès}))$

$E(X)=p$; $V(X)=p(1-p)$

$X=\begin{cases}1 & \text{si succès} \\ 0 & \text{si echec}\end{cases}$

Binomiale: $X\sim B(n,p)$

X: nb de succès sur n épreuves ind

p: proba de réussir chaque épreuve

$P_X(x)=C_x^n p^x(1-p)^{n-x}=P(X=x)$

avec $x\in\{0,1,\dots,n\}$

$E(X)=np$; $V(X)=np(1-p)$

Géométrique: $X\sim G(p)$

X: nb d'épreuve indépendantes jusqu'à avoir un premier succès

$X\sim\{1,2,3,\dots\}$

$P_X(x)=P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$

$E(X)=\dfrac{1}{p}$; $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

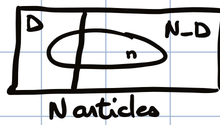
$P(X\leq x)=1-(1-p)^x$

Absence de mémoire:

$$P(X>s+t\,|\,X>s)=P(X>t)$$

Hypergéométrique:

Tirage simultané de n articles parmi N



X: nb d'articles tirés dans D.

$X\sim Hpg(N,n,D)$

$$P(X=x)=\frac{C_x^D\,C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

Approximation Hypergéométrique par binomiale:

$X\sim Hpg(N,n,D)$

Si $\frac{n}{N}\leq 0{,}1$ alors $X\approx B(n,p=\frac{D}{N})$

Poisson: $X\sim P(\lambda)$

$P_X(x)=P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $\quad x=0,1,\dots$

$E(X)=V(X)=\lambda$

X: nb d'arrivées dans un interval T

Y: nb d'arrivées dans un interval T'

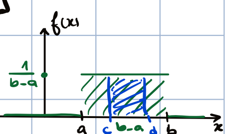
Si $X\sim P(\lambda)\Rightarrow Y\sim P(\lambda'=\lambda\cdot\frac{T'}{T})$

Approximation binomiale et poisson:

$X\sim B(n,p)$ si $\begin{cases}n\geq 100 \\ p\leq 0{,}1\end{cases}\Rightarrow X\approx P(\lambda=np)$

Uniforme: $X\sim U[a,b]$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } a\leq x\leq b \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$



$P(c\leq X\leq d)=\dfrac{d-c}{b-a}$

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$; $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leq x<b \\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$$

Exponentielle: $X\sim Exp(\lambda)$ (Absence de mémoire)

$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\sigma$ $\quad V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

$F_X(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

$P(X>x)=e^{-\lambda x}$

Lien entre Poisson et exponentielle:

X: nb d'arrivés dans un intervalle

Y: durée entre 2 arrivées successives

$X\sim P(\lambda)\rightarrow Y\sim Exp(\lambda)$

Gamma:

$X_1; X_2; \ldots, X_n$ ind ou $X_i \sim Exp(\lambda)$

$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad Y \sim \Gamma(n, \lambda)$

Si $n = 1$: $\Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$

$Y \sim \Gamma(n, \lambda) \Longrightarrow \begin{cases} E(Y) = n/\lambda \\ V(Y) = n/\lambda^2 \end{cases}$

$P(Y \leq y) = 1 - P(X \leq n-1)$ ou $X \sim P(\lambda y)$