MTH2302D - TD 5

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

Une agente immobilière exige un tarif fixe de 500 $ et une commission égale à 4 % du montant de la vente de l'immeuble. En supposant que ce montant est uniformément distribué entre 200 000 $ et 600 000 $, déterminez l'espérance et la variance du total des honoraires de l'agente.

- $X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$

$$\mu_X = E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

- Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, alors

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Ex. 1 - Réponse

Calculez l'espérance μ_H et la variance σ_H^2 des honoraires H.

$$H = 500 + 0.04 \cdot M$$

$$M \sim \mathrm{U}(200000, 600000)$$

$$\mu_H = E(H) = E(500 + 0.04 \cdot M) = 500 + 0.04 \cdot E(M)$$
$$= 500 + 0.04 \cdot \frac{200000 + 600000}{2} = 16500\$$$

$$\sigma_H^2 = Var(H) = Var(500 + 0.04 \cdot M) = 0.04^2 \cdot Var(M)$$
$$= 0.04^2 \cdot \frac{(600000 - 200000)^2}{12} \approx 21333333.33\$^2$$

tarif fixe: 500$
commission: 4% du montant M
M uniforme entre 200k et 600k

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$
$$\mu_X = E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, alors

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$
$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Ex. 2 - Énoncé

Soit X une variable de loi uniforme symétrique par rapport à 0 et de variance 1. Déterminez la valeur appropriée de α et de β.

- $X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$

  $$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Ex. 2 - Réponse

Déterminez α et β.

symétrique par rapport à 0 $\Rightarrow$ $\alpha = -\beta$ où $\beta > 0$

$$1 = \sigma_X^2 = \frac{(\beta - (-\beta))^2}{12} = \frac{(2\beta)^2}{12} = \frac{\beta^2}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\sqrt{3}$$

X uniforme

symétrique par rapport à 0

variance de 1

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Ex. 3 - Énoncé

Le groupe motopropulseur d'un véhicule neuf comporte une garantie de 1 an. On estime sa durée de vie moyenne à 3 ans. Sa durée de fonctionnement avant défaillance obéit à une loi exponentielle.

a) Quel pourcentage des véhicules connaîtront une défaillance du groupe motopropulseur au cours de leurs 6 premiers mois d'utilisation ?

b) Le concessionnaire réalise un bénéfice de 1000 $ à la vente d'un véhicule neuf. Il doit cependant débourser 250 $ pour les pièces et la main-d'œuvre si une défaillance survient durant la période de garantie. Si on suppose que, pour chaque véhicule vendu, le concessionnaire honore sa garantie une seule fois, quel est son bénéfice moyen par véhicule ?

- $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

  $$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

  $$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

- Si Y discrète, alors $\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$

Ex. 3 - Réponse - a)

Calculez la probabilité de défaillance dans les premiers 6 mois.

X : durée de vie

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} = 3$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} \approx 0.1535$$

durée de vie exponentielle
moyenne de 3 ans

garantie de 1 ans
vente: 1000 $
réparation garantie: -250$

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$

Si Y discrète, alors

$$\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$$

Ex. 3 - Réponse - b)

Calculez le bénéfice moyen par véhicule.

B : bénéfice véhicule

$$R_B = \{1000 - 250, 1000\} = \{750, 1000\}$$

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}\cdot 1} \approx 0.283$$

$$\mu_B = \sum_{b \in R_B} b \cdot p_B(b) = 750 \cdot P(X \leq 1) + 1000 \cdot P(X > 1)$$

$$\approx 750 \cdot 0.283 + 1000 \cdot (1 - 0.283) = 929.25\$$$

durée de vie exponentielle
moyenne de 3 ans

garantie de 1 ans
vente: 1000 $
réparation garantie: -250$

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

Si Y discrète, alors

$$\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$$

Ex. 4 - Énoncé

Le temps de traitement d'un appel dans un certain service public suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que 90 % des appels sont traités en moins de 5 minutes.

a) Quel est le temps moyen de traitement d'un appel ?

b) Quel est le temps médian d'un appel, c'est-à-dire le temps t tel que 50 % des appels sont traités en moins de t minutes ?

c) Sachant que vous discutez avec un agent depuis 3 minutes, quelle est la probabilité que votre appel dure encore au moins 3 autres minutes ?

- $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

  $$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

  $$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

  $$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$$

Ex. 4 - Réponse - a)

Calculez le temps de traitement moyen.

$$X \text{ : temps de traitement}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$0.9 = P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - e^{-\lambda \cdot 5}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.1)}{5} \approx 0.461 \text{ min}^{-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{0.461} \approx 2.169 \text{ mins}$$

temps traitement eponentiel

90% appels traités en moins de 5 mins

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$

$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$

Ex. 4 - Réponse - b)

Calculez le temps de traitement médian.

$$0.5 = P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - e^{-0.461 \cdot x}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\ln(0.5)}{0.461} \approx 1.50 \text{ min}$$

temps traitement eponentiel

90% appels traités en moins de 5 mins

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$

$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$

Ex. 4 - Réponse - c)

Calculez la probabilité que l'appel dure encore au moins 3 mins sachant qu'il dure depuis déjà 3 mins.

$$\begin{aligned} P(X > 3 + 3 | X > 3) &= P(X > 3) \\ &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - F_X(3) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.461 \cdot 3}) \approx 0.251 \end{aligned}$$

temps traitement eponentiel

90% appels traités en moins de 5 mins

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$

$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$

Ex. 5 - Énoncé

Un informaticien utilise un logiciel pour générer des nombres aléatoires X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

a) Comment faire pour générer une variable aléatoire Y suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/3$ à l'aide du générateur X ?

b) Si la loi de Bernoulli proposée en **a)** prend la valeur 1, quelle est la fonction de répartition conditionnelle de X, $F_{X|Y=1}(x)$?

c) Combien de nombres indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devra générer le logiciel, en moyenne, pour que l'informaticien observe un premier nombre qui soit supérieur à 0,995 ?

d) Quelle est la probabilité que, parmi 15 nombres indépendants, plus de la moitié de ceux-ci soient strictement supérieurs à 0,7 ?

- $X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

- $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p) \Rightarrow p_X(1) = p$
- $X \sim \mathrm{G}(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$
- $X \sim \mathrm{B}(n, p)$
  $\Rightarrow \quad p_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

Ex. 5 - Réponse - a)

Comment générer $Y \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{3})$ à l'aide de X ?

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$Y(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

suit une loi Bernouilli de paramètre $\frac{1}{3}$.

$X \sim \text{U}(0,1)$

$X \sim \text{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

$X \sim \text{Bernoulli}(p) \Rightarrow p_X(1) = p$

$X \sim \text{G}(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$

$X \sim \text{B}(n,p)$

$\Rightarrow \; p_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

Ex. 5 - Réponse - b)

Quelle est la fonction de répartition conditionnelle $F_{X|Y=1}(x)$?

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y=1}(x) &= P(X \leq x | Y = 1) \\
&= P(X \leq x | X \leq \tfrac{1}{3}) \\
&= \frac{P((X \leq x) \cap (X \leq \frac{1}{3}))}{P(X \leq \frac{1}{3})} \\
&= \begin{cases} \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq \frac{1}{3})} & \text{si } x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{P(X \leq \frac{1}{3})}{P(X \leq \frac{1}{3})} & \text{si } x > \frac{1}{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{F_X(x)}{\frac{1}{3}} & \text{si } x \leq \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$X \sim \mathrm{U}(0,1)$

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$
$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}
$$

$X \sim \text{Bernoulli}(p) \Rightarrow p_X(1) = p$

$X \sim \mathrm{G}(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$

$X \sim \mathrm{B}(n, p)$
$\Rightarrow \; p_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

Ex. 5 - Réponse - c)

Combien de $x_1, x_2, ..., x_n$, en moyenne, pour observer un premier $x_n > 0.995$?

$$\begin{aligned} P(X > 0.995) &= 1 - P(X \leq 0.995) \\ &= 1 - F_X(0.995) \\ &= 1 - 0.995 = 0.005 \end{aligned}$$

N : nombre de x_i pour observer un premier $x_N > 0.995$

$$N \sim \mathrm{G}(0.005)$$

$$E(N) = \frac{1}{0.005} = 200$$

$X \sim \mathrm{U}(0, 1)$

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p) \Rightarrow p_X(1) = p$

$X \sim \mathrm{G}(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$

$X \sim \mathrm{B}(n, p)$

$\Rightarrow \ p_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

Ex. 5 - Réponse - d)

Quelle est la proba. que, parmi 15 x_i indép., plus de la moitié soient strictement supérieurs à 0.7?

$$P(X > 0.7) = 1 - P(X \leq 0.7) = 1 - F_X(0.7) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$Z : \text{ nombre de } x_i > 0.7 \quad \Rightarrow \quad Z \sim \mathrm{B}(15, 0.3)$$

$$\begin{aligned}
P(Z \geq 8) &= 1 - P(Z \leq 7) = 1 - F_Z(7) \\
&= 1 - \sum_{z=0}^{7} \tfrac{15!}{z!(15-z)!} 0.3^z 0.7^{15-z} \\
&= 1 - \tfrac{15!}{0!15!} 0.3^0 0.7^{15} - \tfrac{15!}{1!14!} 0.3^1 0.7^{14} - \ldots - \tfrac{15!}{7!8!} 0.3^7 0.7^8 \\
&= 1 - 0.7^{15} - 15 \cdot 0.3^1 0.7^{14} - \ldots - \tfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} 0.3^7 0.7^8 \\
&\approx 0.0500
\end{aligned}$$

$X \sim \mathrm{U}(0, 1)$

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

$X \sim \text{Bernoulli}(p) \Rightarrow p_X(1) = p$

$X \sim \mathrm{G}(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$

$X \sim \mathrm{B}(n, p)$

$\Rightarrow \; p_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$