MTH2302D - TD 8

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

À l'aide de la table IV de l'annexe, déterminez chaque valeur ci-dessous. Tracez une esquisse de la fonction de densité au préalable pour estimer la valeur cherchée.

a) $t_{0,25\,;\,10}$

b) $t_{0,25\,;\,20}$

c) La valeur de k telle que $P(T \leq k) = 0{,}95$, où $T \sim t_{10}$

d) La valeur de k telle que $P(T \leq k) = 0{,}025$, où $T \sim t_{10}$

e) $P(T > 1{,}311)$, où $T \sim t_{29}$

f) $P(T > -2{,}660)$, où $T \sim t_{60}$

- tables quantiles Student
- $P(X \leq x) = 1 - (P(X > x)$

Ex. 1 - Réponse

Déterminer chaque valeur.

$$t_{0.25;10} = 0.6998$$

$$t_{0.25;20} = 0.6870$$

$$P(T \leq k) = 0.95 \Leftrightarrow P(T > k) = 1 - 0.95$$
$$\Rightarrow k = t_{0.05;10} = 1.8125$$

tables quantiles Student

$$P(T \leq k) = 0.025 \Leftrightarrow P(T > k) = 1 - 0.025$$
$$\Rightarrow k = t_{1-0.025;10} = -t_{0.025,10} = -2.2281$$

$$P(X \leq x) = 1 - (P(X > x)$$

$$P(T > 1.311) = 0.1$$

$$P(T > -2.660) = p \Leftrightarrow t_{p;60} = -2.660 \Leftrightarrow t_{1-p;60} = 2.660$$
$$\Rightarrow p = 0.995$$

Ex. 2 - Énoncé

Soit deux échantillons indépendants provenant de populations normales, tels que :

$$X_1, X_2, \ldots, X_{10} \sim N(7, \sigma^2)$$

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20} \sim N(8, \sigma^2).$$

a) Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + X_3$?

b) Quelle est la loi de $\bar{X}$?

c) Quelle est la loi de $2\bar{X} - 3\bar{Y}$?

d) Quelle est la loi de $\frac{X_1 - 7}{\sigma}$?

e) Quelle est la loi de $\bar{X} + \bar{Y} - 15$?

f) Quelles sont l'espérance et la variance de $W = \frac{\bar{Y} - 8}{S_Y / \sqrt{20}}$?

g) Quelles sont l'espérance et la variance de $T = \frac{9 S_X^2}{\sigma^2}$?

h) Quelle est la loi de S_X^2 / S_Y^2 ?

- Si $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, alors $\sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i \mu_i, \sum_i a_i^2 \sigma_i^2\right)$
- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$
- Si $T \sim T_n$, alors $E(T) = 0$ et $Var(T) = \frac{n}{n-2}$
- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
- Si $X \sim \chi^2_n$, alors $E(X) = n$ et $Var(X) = 2n$
- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, alors $\dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n_X - 1, n_Y - 1}$

Ex. 2 - Réponse - a) - e)

Déterminer chaque loi.

$$X_i \sim \mathrm{N}(7, \sigma^2), \quad i = 1, 2, ..., 10$$

$$Y_i \sim \mathrm{N}(8, \sigma^2), \quad i = 1, 2, ..., 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathrm{N}(\mu + \mu + \mu, 1^2\sigma^2 + 1^2\sigma^2 + 1^2\sigma^2) = \mathrm{N}(3\mu, 3\sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(7, \tfrac{\sigma^2}{10})$$

$$\bar{Y} \sim \mathrm{N}(8, \tfrac{\sigma^2}{20})$$

$$2\bar{X} - 3\bar{Y} \sim \mathrm{N}(2 \cdot 7 - 3 \cdot 8, 2^2\tfrac{\sigma^2}{10} + (-3)^2\tfrac{\sigma^2}{20}) = \mathrm{N}(-10, \tfrac{17}{20}\sigma^2)$$

$$\tfrac{X_1 - 7}{\sigma} \sim \mathrm{N}(\tfrac{7}{\sigma} - \tfrac{7}{\sigma}, (\tfrac{1}{\sigma})^2\sigma^2 + (\tfrac{1}{\sigma})^2 \cdot 0) = \mathrm{N}(0, 1)$$

$$\bar{X} + \bar{Y} - 15 \sim \mathrm{N}(7 + 8 - 15, 1^2\tfrac{\sigma^2}{10} + 1^2\tfrac{\sigma^2}{20} + (-1)^2 \cdot 0) = \mathrm{N}(0, \tfrac{3}{20}\sigma^2)$$

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ldots, \; X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$$
$$\Rightarrow \textstyle\sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i\mu_i, \sum_i a_i^2\sigma_i^2\right)$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$
$$T \sim T_n \Rightarrow E(T) = 0, \; Var(T) = \tfrac{n}{n-2}$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$
$$X \sim \chi^2_n \Rightarrow E(X) = n, \; Var(X) = 2n$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2), \; Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$
$$\Rightarrow \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n_X - 1, n_Y - 1}$$

Ex. 2 - Réponse - f) - h)

$X_i \sim \mathrm{N}(7,\sigma^2), \quad i = 1,2,...,10$

$Y_i \sim \mathrm{N}(8,\sigma^2), \quad i = 1,2,...,20$

Déterminer les espérances et variances de chaque v.a.

$$W \sim T_{19} \Rightarrow E(W) = 0,\ Var(W) = \frac{19}{19-2} = \frac{19}{17}$$

$$T \sim \chi^2_9 \Rightarrow E(T) = 9,\ Var(TW) = 2 \cdot 9 = 18$$

Déterminer chaque loi.

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{S_X^2/\sigma^2}{S_Y^2/\sigma^2} \sim F_{9,19}$$

$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2),\dots,\ X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n,\sigma_n^2)$
$\Rightarrow \sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i\mu_i, \sum_i a_i^2\sigma_i^2\right)$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$
$T \sim T_n \Rightarrow E(T)=0,\ Var(T)=\frac{n}{n-2}$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
$X \sim \chi^2_n \Rightarrow E(X) = n,\ Var(X) = 2n$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_X,\sigma_X^2),\ Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_Y,\sigma_Y^2)$
$\Rightarrow \dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n_X-1,n_Y-1}$

Ex. 3 - Énoncé

Exercice n° 3 Soient les variables aléatoires indépendantes $Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ et $U_i \sim \chi_1^2$, avec $i = 1,\ldots,4$.

1. Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires suivantes ainsi que leurs paramètres.

   a) $T_1 = \sum_{i=1}^{4} Z_i$; **b)** $T_2 = \sum_{i=1}^{3} U_i$; **c)** $T_3 = \dfrac{2U_1}{U_2 + U_3}$; **d)** $T_4 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} U_i}}$; **e)** $T_5 = \dfrac{U_1 + U_2}{2}$.

2. Trouver les constantes c_1, c_2 et c_3 dans chacun des cas suivants :

   a) $P\left(\dfrac{U_1}{U_2} \geq c_1\right) = 0{,}1$; **b)** $P\left(\dfrac{U_1}{1 + U_1} \geq c_2\right) = 0{,}01$; **c)** $P\left(\dfrac{(Z_1 + Z_2)^2}{Z_3^2 + Z_4^2} \geq c_3\right) = 0{,}05$.

- Si $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$,..., $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, alors $\sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i \mu_i, \sum_i a_i^2 \sigma_i^2\right)$
- Si $X_1 \sim \chi_{k_1}^2$,...,$X_n \sim \chi_{k_n}^2$, alors $\sum_i X_i \sim \chi_k^2$ où $k = \sum_i k_i$
- Si $X_u \sim \chi_u^2$ et $X_v \sim \chi_v^2$ indép., alors $\dfrac{X_u/u}{X_v/v} \sim F_{u,v}$
- Si $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ et $X \sim \chi_k^2$ indép., alors $\frac{Z}{\sqrt{X/k}} \sim T_k$
- Si $Z_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$,..., $Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ indép., alors $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$

Ex. 3 - Réponse - 1.

$Z_i \sim \mathrm{N}(0,1), \quad U_i \sim \chi^2_1$

Déterminer la loi de chaque v.a.

$$T_1 = \sum_{i=1}^{4} Z_i \sim \mathrm{N}(4 \cdot 0, 4 \cdot 1) = \mathrm{N}(0,4)$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{3} U_i \sim \chi^2_{3 \cdot 1} = \chi^2_3$$

$$U_2 + U_3 \sim \chi^2_2 \Rightarrow T_3 = \frac{2U_1}{U_2+U_3} = \frac{U_1/1}{(U_2+U_3)/2} \sim F_{1,2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} Z_i \sim \mathrm{N}(0,4) \sim 4Z \text{ où } Z \sim \mathrm{N}(0,1), \qquad \sum_{i=1}^{4} U_i \sim \chi^2_4 \sim X$$

$$\Rightarrow T_4 = \frac{\sum_{i=1}^4 Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 U_i}} \sim \frac{4Z}{\sqrt{X}} = \frac{2Z}{\sqrt{X/4}} = 2T \text{ où } T \sim T_4$$

$$U_1 + U_2 \sim \chi^2_2 \sim X \Rightarrow T_5 = \frac{U_1+U_2}{2} \sim \frac{1}{2}X$$

$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$
$\Rightarrow \sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i \mu_i, \sum_i a_i^2 \sigma_i^2\right)$

$X_1 \sim \chi^2_{k_1}, \ldots, X_n \sim \chi^2_{k_n}$
$\Rightarrow \sum_i X_i \sim \chi^2_k$ où $k = \sum_i k_i$

$X_u \sim \chi^2_u$, $X_v \sim \chi^2_v$ indép.
$\Rightarrow \dfrac{X_u/u}{X_v/v} \sim F_{u,v}$

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X \sim \chi^2_k$ indép.
$\Rightarrow \dfrac{Z}{\sqrt{X/k}} \sim T_k$

$Z_1 \sim \mathrm{N}(0,1), \ldots, Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ indép.,
$\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_n$

Ex. 3 - Réponse - 2. - a), b)

Trouver chaque constante c_i.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1/1}{U_2/1} \sim F_{1,1}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{U_1}{U_2} \geq c_1\right) = 0.1 \Rightarrow c_1 = 39.86$$

$$P\left(\frac{U_1}{1+U_1} \geq c_2\right) = P\left(\frac{1+U_1}{U_1} \leq \frac{1}{c_2}\right) = P\left(\frac{1}{U_1} \leq \frac{1}{c_2} - 1\right)$$

$$= P\left(U_1 \geq \frac{1}{\frac{1}{c_2} - 1}\right) = 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{c_2}-1} = 6.63 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{\frac{1}{6.63} - 1} = 0.8689$$

$Z_i \sim \mathrm{N}(0,1), \quad U_i \sim \chi^2_1$

$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$
$\Rightarrow \sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i \mu_i, \sum_i a_i^2 \sigma_i^2\right)$

$X_1 \sim \chi^2_{k_1}, \ldots, X_n \sim \chi^2_{k_n}$
$\Rightarrow \sum_i X_i \sim \chi^2_k$ où $k = \sum_i k_i$

$X_u \sim \chi^2_u$, $X_v \sim \chi^2_v$ indép.
$$\Rightarrow \frac{X_u/u}{X_v/v} \sim F_{u,v}$$

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X \sim \chi^2_k$ indép.
$$\Rightarrow \frac{Z}{\sqrt{X/k}} \sim T_k$$

$Z_1 \sim \mathrm{N}(0,1), \ldots, Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ indép.,
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_n$$

Ex. 3 - Réponse - 2. - c)

$Z_i \sim \mathrm{N}(0,1), \quad U_i \sim \chi^2_1$

Trouver chaque constante c_i.

$$Z_1 + Z_2 \sim 2Z \text{ où } Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$(Z_1 + Z_2)^2 \sim 4Z^2 \sim 4X \text{ où } X \sim \chi^2_1$$

$$Z_3^2 + Z_4^2 \sim Y \text{ où } Y \sim \chi^2_2$$

$$\frac{(Z_1 + Z_2)^2}{Z_3^2 + Z_4^2} \sim \frac{4X}{Y} = 2\frac{X/1}{Y/2} \sim 2F \text{ où } F \sim F_{1,2}$$

$$P\left(\frac{(Z_1 + Z_2)^2}{Z_3^2 + Z_4^2} \geq c_3\right) = P\left(2F \geq c_3\right) = P\left(F \geq \frac{c_3}{2}\right) = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{c_3}{2} = 18.513 \Rightarrow c_3 = 37.026$$

$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$,..., $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$
$\Rightarrow \sum_i a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_i a_i \mu_i, \sum_i a_i^2 \sigma_i^2\right)$

$X_1 \sim \chi^2_{k_1}$,...,$X_n \sim \chi^2_{k_n}$
$\Rightarrow \sum_i X_i \sim \chi^2_k$ où $k = \sum_i k_i$

$X_u \sim \chi^2_u$, $X_v \sim \chi^2_v$ indép.
$\Rightarrow \dfrac{X_u/u}{X_v/v} \sim F_{u,v}$

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X \sim \chi^2_k$ indép.
$\Rightarrow \dfrac{Z}{\sqrt{X/k}} \sim T_k$

$Z_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$,...,$Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ indép.,
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_n$

Ex. 4 - Énoncé

Exercice nº 4 Une machine (i.e., un tour) sert à usiner des billes dont le diamètre est distribué selon une loi normale. Lorsque la machine est correctement ajustée, le diamètre des billes produites présente alors une moyenne et une variabilité stables. Précisément, le diamètre des billes (en *cm*) est alors distribué selon une loi normale $N(2\ ;\ 0{,}01)$.

On compte prélever au hasard 25 billes de la production de la machine et mesurer leurs diamètres. Soit $\overline{X}$ la moyenne des mesures de l'échantillon et S^2 leur variance.

a) Si on suppose que la machine est correctement ajustée, quelle est la probabilité que l'écart entre la moyenne réelle du diamètre des billes et la moyenne des mesures de l'échantillon soit supérieur à 0,05 *cm* ?

1.a) Quelle interprétation peut-on donner au résultat obtenu ?

2.a) Que peut-on dire si on observe un diamètre moyen de $1,92$ *cm* dans l'échantillon ?

b) Si on suppose que la machine est correctement ajustée, quelle est la probabilité que l'écart type de l'échantillon soit supérieur à 0,125 *cm* ? Interpréter ce résultat.

c) Évaluer la probabilité suivante en considérant que la machine est correctement ajustée

$$P\left(\frac{5|\overline{X}-2|}{S} < 2{,}492\right).$$

- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
- Si $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$

Ex. 4 - Réponse - a)

Calculer la proba. que l'écart entre $E(X)$ et $\bar{X}$ soit > 0.05.

$$X_i \sim \mathrm{N}(2, 0.01), \quad i = 1, 2, ..., 25$$

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(2, \frac{0.01}{25}) = \mathrm{N}(2, 0.0004)$$

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - 2| > 0.05) &= 2P(\bar{X} > 2.05) = 2(1 - P(\bar{X} \leq 2.05)) \\ &= 2(1 - \Phi(\tfrac{2.05-2}{\sqrt{0.004}})) = 2(1 - \Phi(2.5)) \\ &= 2(1 - 0.99379) = 0.01242 \end{aligned}$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

Comment interpréter ce résultat?

C'est extrêmement improbable si la machine est calibrée.

Alors, si on observe $\bar{X} = 1.92$?

Il est extrêmement improbable qu'elle soit calibrée.

Ex. 4 - Réponse - b)

Calculer la proba. que $S > 0.125$ et interpréter.

$$24\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$$

$$P(S > 0.125) = P\left(24\frac{S^2}{\sigma^2} > 24\frac{0.125^2}{\sigma^2}\right) = P\left(24\frac{S^2}{\sigma^2} > 37.5\right)$$
$$= 0.041$$

C'est assez improbable si la machine est calibrée.

$$X_i \sim \mathrm{N}(2, 0.01), \quad i = 1, 2, ..., 25$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

Ex. 4 - Réponse - c)

Calculer la proba. $P\left(\frac{5|\bar{X}-2|}{S} < 2.492\right)$.

$X_i \sim \mathrm{N}(2, 0.01), \quad i = 1, 2, ..., 25$

$$\frac{5(\bar{X}-2)}{S} = \frac{\bar{X}-2}{S/\sqrt{25}} \sim T_{24} \sim T$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{5|\bar{X}-2|}{S} < 2.492\right) &= P\left(|T| < 2.492\right) \\ &= 1 - P\left(|T| \geq 2.492\right) \\ &= 1 - 2P\left(T \geq 2.492\right) \\ &= 1 - 2 \cdot 0.01 = 0.98 \end{aligned}$$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$

Ex. 5 - Énoncé

Exercice n° 5 Soit $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ un échantillon aléatoire de taille 15 tiré d'une population de moyenne μ et de variance σ^2. Afin d'estimer μ, on considère les deux estimateurs $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ suivants :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2X_1 - X_6 + 4X_9 + X_{15}}{6} \qquad \text{et} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{15}.$$

a) Calculer les espérances $E(\hat{\mu}_1)$ et $E(\hat{\mu}_2)$ ainsi que les variances $Var(\hat{\mu}_1)$ et $Var(\hat{\mu}_2)$ de chacun des deux estimateurs.

b) Compte tenu des résultats obtenus en a), lequel des deux estimateurs est préférable ?

- $$E\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$
  $$Var\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

- $$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

Ex. 5 - Réponse - a), b)

Calculer $E(\hat{\mu}_1)$, $E(\hat{\mu}_2)$ et $Var(\hat{\mu}_1)$, $Var(\hat{\mu}_2)$.

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + 4X_9 + X_{15}}{6}\right) = \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{6}\mu + \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{6}\mu = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} X_i\right) = \sum_{i=1}^{15} \frac{1}{15}\mu = \mu$$

$$Var(\hat{\mu}_1) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + 4X_9 + X_{15}}{6}\right)$$
$$= (\tfrac{1}{3})^2\sigma^2 + (-\tfrac{1}{6})^2\sigma^2 + (\tfrac{2}{3})^2\sigma^2 + (\tfrac{1}{6})^2\sigma^2 = \frac{11}{18}\sigma^2$$

$$Var(\hat{\mu}_2) = Var\left(\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} X_i\right) = \sum_{i=1}^{15}(\tfrac{1}{15})^2\sigma^2 = \frac{1}{15}\sigma^2$$

Lequel est préférable?

$\hat{\mu}_2$ car il a une plus petite
$EQM(\hat{\mu}) = Var(\hat{\mu}) + (E(\hat{\mu}) - \mu)^2$.

$X_i \sim X$ i.i.d., $\quad i = 1, 2, ..., 15$
$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2$

$\hat{\mu}_1 = \frac{2X_1 - X_6 + 4X_9 + X_{15}}{6}$
$\hat{\mu}_2 = \bar{X}$

$$E\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

$$Var\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

Ex. 6 - Énoncé

Exercice n° 6 Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\theta x}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel tel que $-1 \leq \theta \leq 1$.

On dispose de $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon aléatoire de taille n de X.

a) En utilisant la méthode des moments déterminer un estimateur ponctuel de θ.

b) L'estimateur trouvé en a) est-il sans biais ? Justifier votre réponse.

c) Donner l'expression de l'erreur quadratique moyenne de cet estimateur en fonction de θ et n.

- $E(X^k) = m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2$
- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$
- $E\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$

  $Var\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$
- $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) \mathrm{d}x - (E(X))^2$
- $EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

Ex. 6 - Réponse - a), b)

Trouver $\hat{\theta}$ par la méthode des moments.

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x \frac{1+\theta x}{2} \mathrm{d}x = \left. \frac{x^2}{4} \right|_{-1}^{1} + \left. \frac{\theta x^3}{6} \right|_{-1}^{1} = \frac{\theta}{3}$$

$$E(X) = m_1' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\hat{\theta}$ est-il biaisé?

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \frac{\theta}{3} = \theta \Rightarrow \textit{non biaisé}$$

$X_i \sim X$ i.i.d., $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1+\theta x}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$E(X^k) = m_k' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2$

$E\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

$Var\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$

$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) \mathrm{d}x - (E(X))^2$

Ex. 6 - Réponse - c)

Trouver $EQM(\hat{\theta})$.

$$Var(X) = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1+\theta x}{2} \mathrm{d}x - (E(X))^2$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\theta x^4}{8}\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{9}$$

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$= Var\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2\left(\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{9}\right)$$

$$= \frac{3-\theta^2}{n}$$

$X_i \sim X$ i.i.d., $\quad i = 1, 2, ..., n$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1+\theta x}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$E(X^k) = m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2$

$E\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

$Var\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$
$\qquad + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$
$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x - (E(X))^2$

Ex. 7 - Énoncé

Exercice nº 7 Soit une population X qui suit une loi uniforme $\mathrm{U}(0, \theta)$ avec $\theta > 0$ et soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de X. On pose $M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ la valeur maximale observée dans l'échantillon.

a) Utiliser le fait que que $P(M \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t)$ pour déterminer la distribution d'échantillonnage de M.

b) Il est démontré que M est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Déterminer l'erreur quadratique moyenne de cet estimateur en fonction de θ et n.

- Si A et B indép., alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Si $X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$, alors
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$
- $EQM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2)$
- $E\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$
- $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(X \leq x)$
- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$

  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$

Ex. 7 - Réponse - a)

Déterminer la distribution de M.

$$\begin{aligned} F_M(t) &= P(M \leq t) \\ &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{t}{\theta} \\ &= \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \end{aligned}$$

$$F_M(0) = 0, \quad F_M(\theta) = 1$$

$X_i \sim \mathrm{U}(0,\theta)$ i.i.d., $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

$M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

A, B indép. $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

$EQM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2)$

$E\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(X \leq x)$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$

Ex. 7 - Réponse - b)

Déterminer $EQM(M)$.

$$EQM(M) = E((M-\theta)^2) = E(M^2 - 2\theta M + \theta^2)$$
$$= \theta^2 - 2\theta E(M) + E(M^2)$$

$$f_M(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_M(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{\theta}\right)^n = n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}$$

$$E(M) = \int_0^\theta t \cdot n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}t = \left.\frac{n}{n+1}\frac{t^{n+1}}{\theta^n}\right|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$E(M^2) = \int_0^\theta t^2 \cdot n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}t = \left.\frac{n}{n+2}\frac{t^{n+2}}{\theta^n}\right|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$EQM(M) = \theta^2 - 2\theta\frac{n}{n+1}\theta + \frac{n}{n+2}\theta^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$$

$X_i \sim \mathrm{U}(0,\theta)$ i.i.d., $\quad i = 1, 2, ..., n$

$M = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

$A,\ B$ indép. $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

$EQM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2)$

$E\left(a_0 + \sum_i a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$

$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(X \leq x)$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$