MTH2302D - TD 12

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

Exercice nº 1 Une ingénieure a relevé 10 mesures sur le rendement Y de la production d'un produit chimique en fonction de la température X de fonctionnement du procédé de fabrication. Les 10 mesures ont donné les valeurs suivantes pour la température X_i et le rendement correspondant Y_i :

Température °C	Rendement %	Température °C	Rendement %
100	44	150	69
110	52	160	76
120	54	170	78
130	59	180	84
140	68	190	91

L'ingénieure décide d'utiliser le modèle de régression linéaire simple :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \, .$$

On donne les quantités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 218\,500, \ \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 47\,619, \text{ et } \sum_{i=1}^{10} X_i Y_i = 101\,970 \, .$$

a) Calculer la valeur des estimateurs $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\sigma}^2$ de β_0, β_1 et σ^2, respectivement. Calculer aussi le pourcentage R^2 de variation expliqué par le modèle.

b) Donner le tableau d'analyse de la variance du modèle et tester si le modèle est significatif au seuil de 5%.

c) L'ingénieure veut prédire le rendement Y si la température du procédé est mise à 200°C. Donner un intervalle de confiance pour le rendement moyen à cette température ainsi qu'un intervalle de prédiction pour Y. Utiliser un niveau de confiance de 95% pour les deux intervalles.

<u>I-Calcul des estimateurs</u>

<u>Cas particulier : Régression simple</u>

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

<u>II-Test de signification</u>

<u>a-Test global</u> (loi de Fisher)

$H_0 : \beta_1 = 0 \ vs \ H_1 : \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse **H_0 : β_1 = 0** est **rejetée**, au seuil α, si **$F_0 > F_{1,n-2}$ (α)**.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

<u>Tableau d'analyse de variance – Régression simple</u>

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n\text{-}2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2) \sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2) \sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 1 - Réponse - a)

Calculer $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2$ et R^2.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

$$= \frac{101970 - 10 \cdot \frac{100+110+\ldots+190}{10} \cdot \frac{44+52+\ldots+91}{10}}{218500 - 10 \cdot \left(\frac{100+110+\ldots+190}{10}\right)^2}$$

$$= \frac{101970 - 10 \cdot 145 \cdot 67.5}{218500 - 10 \cdot 145^2} = \frac{4095}{8250} \approx 0.496$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 67.5 - 0.496 \cdot 145 \approx -4.42$$

$$\sum_i X_i^2 = 218500$$
$$\sum_i Y_i^2 = 47619$$
$$\sum_i X_i Y_i = 101970$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ est **rejetée**, au seuil α, si $F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R/1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E/n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 1 - Réponse - a)

Calculer $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2$ et R^2.

$$\sum_i X_i^2 = 218500$$
$$\sum_i Y_i^2 = 47619$$
$$\sum_i X_i Y_i = 101970$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E = \frac{S_{YY} - SS_R}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2 - \hat{\beta}_1 S_{XY}}{n-2}$$
$$= \frac{47619 - 10 \cdot 67.5^2 - 0.496 \cdot 4095}{10-2}$$
$$= \frac{2056.5 - 2031.12}{8} \approx 3.173$$

$$R^2 = \frac{SS_R}{S_{YY}} = \frac{2031.12}{2056.5} \approx 98.77\%$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse **H_0 : $\beta_1 = 0$** est **rejetée**, au seuil α, si **$F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)$**.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R/1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E/n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 1 - Réponse - b)

Donner le tableau d'analyse de variance et tester à 5%.

source	χ^2_k	k	χ^2_k/k	F_0	p-value
modèle	2031.12	1	$\frac{SS_R}{1} = 2031.12$	$\frac{MS_R}{MS_E} \approx 640.12$	< 0.01
erreur	$S_{YY} - SS_R = 25.38$	8	3.173		
totale	2056.5	9			

On rejette l'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ *car* $F_0 > F_{\alpha;1,n-2} = F_{0.05;1,8} = 5.318$.

Le modèle est globalement significatif.

Ex. 1 - Réponse - c)

Donner les intervalles de confiance à 95% du rendement moyen et de prédiction de Y pour $X = 200$.

$$\sum_i X_i^2 = 218500$$
$$\sum_i Y_i^2 = 47619$$
$$\sum_i X_i Y_i = 101970$$

$$E(Y|x_0) \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.05/2;8}} \sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}} \right)}$$

$$= -4.42 + 0.496 \cdot 200 \pm 2.3060 \sqrt{3.173 \left(\frac{1}{10} + \frac{(200 - 145)^2}{8250} \right)}$$

$$\approx 94.78 \pm 2.81 = [91.97, 97.59]$$

$$Y_0 \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.05/2;8}} \sqrt{MS_E \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}} \right)}$$

$$= 94.78 \pm 2.3060 \sqrt{3.173 \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(200 - 145)^2}{8250} \right)}$$

$$\approx 94.78 \pm 4.97 = [89.81, 99.75]$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse **$H_0 : \beta_1 = 0$** est **rejetée**, au seuil α, si **$F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)$**.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalen
global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-val
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	P(F ≥
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E$ /n-2		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \quad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right.}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2) \sqrt{MS_E (\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2) \sqrt{MS_E (1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}}}$

Ex. 2 - Énoncé

Exercice n° 2 Les données suivantes avaient été obtenues lors d'une étude portant sur l'évaluation des effets du chlorure de sodium sur des structures en acier peint. La variable X représente le taux de dépôts de l'anhydride sulfureux (SO_2) mesuré en $mg/m^2/j$, et la variable Y désigne la perte de poids de l'acier mesurée en g/m^2.

x	14	18	40	43	45	112
y	280	350	470	500	560	1200

On envisage un modèle de régression linéaire simple d'équation

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon,$$

où β_0 et β_1 sont des paramètres et ε, une erreur aléatoire. On suppose que $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

Des calculs ont permis d'obtenir les résultats préliminaires suivants :

$$S_{xx} = 6\,207{,}33\,; \quad S_{xy} = 57\,800\,; \quad \text{et } S_{yy} = 543\,800\,.$$

a) Donner l'équation de la droite des moindres carrés. Donner le tableau d'analyse de la variance et calculer R^2.

b) Tester si le modèle est significatif en utilisant un seuil critique de 5%.

c) Calculer un intervalle de confiance pour la pente de la droite au niveau de confiance 95% et interpréter le résultat.

d) Au niveau de confiance 95%, à quelle perte de poids en moyenne devrait-on s'attendre lorsque le taux de dépôts de l'anhydride sulfureux est de 100 $mg/m^2/j$?

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat\beta_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat\beta_0 = \bar Y - \hat\beta_1 \bar X$$

$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar X)^2 = \sum X_i^2 - n\bar X^2$$

$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar Y)^2 = \sum Y_i^2 - n\bar Y^2$$

$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar X)(Y_i - \bar Y) = \sum X_i Y_i - n\bar X \bar Y$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \;\; vs \;\; H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat y_i - \bar y)^2 = \hat\beta_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat y_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar y)^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat\sigma^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat\beta_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat\beta_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar x^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat y_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar X - x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat y_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar X - x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 2 - Réponse - a)

Donner l'équation de la droite des moindres carrés,
le tableau d'analyse de la variance et R^2.

$$S_{XX} = 6207.33$$
$$S_{XY} = 57800$$
$$S_{YY} = 543800$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{57800}{6207.33} \approx 9.312$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$= \frac{280 + 350 + \ldots + 1200}{6} - 9.312 \cdot \frac{14 + 18 + \ldots + 112}{6}$$
$$\approx 560 - 9.312 \cdot 45.33 \approx 137.89$$

$$Y = 137.89 + 9.312X$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \ vs \ H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 2 - Réponse - a), b)

Donner l'équation de la droite des moindres carrés,
le tableau d'analyse de la variance et R^2.

source	χ^2_k	k	χ^2_k/k	F_0	p-value
modèle	$\hat{\beta}_1 S_{XY} \approx 538234$	1	$\frac{SS_R}{1} = 538234$	$\frac{MS_R}{MS_E} \approx 386.8$	< 0.01
erreur	$S_{YY} - SS_R = 5566$	4	$\frac{SS_E}{4} = 1391.5$		
totale	543800	5			

$$R^2 = \frac{SS_R}{S_{YY}} = \frac{538234}{543800} \approx 98.98\%$$

Tester si le modèle est significatif avec un seuil de 5%.

On rejette l'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ *car* $F_0 > F_{\alpha;1,n-2} = F_{0.05;1,4} = 7.709$.
Le modèle est globalement significatif.

Ex. 2 - Réponse - c)

Donner un intervalle de confiance de la pente à 95%.

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.05/2;4}} \sqrt{\frac{MS_E}{S_{XX}}}$$

$$= 9.312 \pm 2.7765\sqrt{\frac{1391.5}{6207.33}}$$

$$\approx 9.312 \pm 1.315 = [7.997, 10.627]$$

La pente est significative puisque son intervalle de confiance ne contient pas 0.

$$S_{XX} = 6207.33$$
$$S_{XY} = 57800$$
$$S_{YY} = 543800$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R/1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E/n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \quad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 2 - Réponse - d)

$$S_{XX} = 6207.33$$
$$S_{XY} = 57800$$
$$S_{YY} = 543800$$

Donner un intervalle de confiance de $E(Y|X = 100)$ à 95%.

$$E(Y|x_0) \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.05/2;4}} \sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}}\right)}$$

$$= 137.89 + 9.312 \cdot 100 \pm 2.7765\sqrt{1391.5\left(\frac{1}{6} + \frac{(100 - 45.33)^2}{6207.33}\right)}$$

$$\approx 1069.1 \pm 83.4 = [985.7, 1152.5]$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$ et $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} -$

$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i$

$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2$

$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \ \ vs \ \ H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un
global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statisti
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = M$ MS
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$	
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1		

$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY}$ $\quad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)}{n-}$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}}$ $\quad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E}$

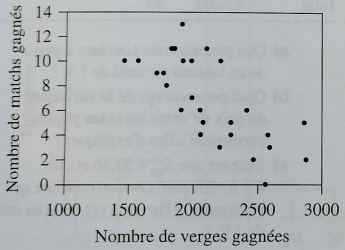
Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} +}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n}}$

Ex. 3 - Énoncé

Les données des exercices avec le symbole (i+) sont aussi disponibles en format électronique.

12.1 (i+) Montgomery, Peck et Vining (2001) présentent des données à propos de la performance de 28 équipes de la National Football League. Ils pensent que le nombre de matchs gagnés, Y, est lié au nombre de verges d'attaque au sol gagnées par les adversaires, X. Le diagramme de dispersion est présenté ci-dessous.



Voici quelques statistiques calculées à partir des données.

$\bar{x} = 2109$

$\bar{y} = 6{,}964$

$S_{XX} = 3\ 604\ 739$

$S_{YY} = 326{,}96$

$S_{XY} = -25\ 328$

a) Ajustez un modèle de régression linéaire établissant un lien entre les matchs gagnés et les verges gagnées par les adversaires. Donnez l'équation de la droite de régression.

b) Quelle est l'estimation de la variance des observations autour de la droite de régression ?

c) Trouvez un intervalle de confiance à 95 % pour la pente de la droite de régression.

d) Testez la signification du modèle de régression au seuil de 5 % à l'aide de votre réponse en c).

e) On désire prévoir le nombre de matchs qu'une équipe gagnera si elle limite l'attaque des adversaires à 1800 verges. Calculez un intervalle de prévision à 95 % pour le nombre de matchs gagnés si les adversaires gagnent 1800 verges en attaque au sol.

<u>**I-Calcul des estimateurs**</u>

<u>*Cas particulier : Régression simple*</u>

$$\hat\beta_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat\beta_0 = \bar{Y} - \hat\beta_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

<u>**II-Test de signification**</u>

<u>**a-Test global**</u> **(loi de Fisher)**

$H_0 : \beta_1 = 0 \;\; vs \;\; H_1 : \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse **H_0 : β_1 = 0** est **rejetée**, au seuil α, si **$F_0 > F_{1,n-2}$ (α)**.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

<u>**Tableau d'analyse de variance – Régression simple**</u>

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat\beta_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat\sigma^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat\beta_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat\beta_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 3 - Réponse - a)

Donner la droite de régression.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-25328}{3604739} \approx -0.007026$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 6.964 - (-0.007026) \cdot 2109 \approx 21.782$$

$$Y = 21.782 - 0.007026X$$

$$\bar{X} = 2109, \quad \bar{Y} = 6.964$$
$$S_{XX} = 3604739, \quad S_{YY} = 326.96$$
$$S_{XY} = -25328$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \ vs \ H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2-1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 3 - Réponse - b)

Estimer $\hat{\sigma}^2$.

$$\bar{X} = 2109, \quad \bar{Y} = 6.964$$
$$S_{XX} = 3604739, \quad S_{YY} = 326.96$$
$$S_{XY} = -25328$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= MS_E \\
&= \frac{S_{YY} - SS_R}{n-2} \\
&= \frac{S_{YY} - \hat{\beta}_1 S_{XY}}{n-2} \\
&= \frac{326.96 - (-0.007026)(-25328)}{10-2} \\
&\approx 5.7310
\end{aligned}
$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \;\; vs \;\; H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$\boxed{R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 3 - Réponse - c), d)

Donner un intervalle de confiance de la pente à 95%.

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.05/2;26}} \sqrt{\frac{MS_E}{S_{XX}}}$$

$$= -0.007026 \pm 2.0555 \sqrt{\frac{5.7310}{3604739}}$$

$$\approx -0.007026 \pm 0.002592 = [-0.009618, -0.004434]$$

Donner un intervalle de confiance de la pente à 95%.

La pente diffère significativement de 0 puisque son intervalle de confiance ne contient pas 0.

$\bar{X} = 2109, \quad \bar{Y} = 6.964$

$S_{XX} = 3604739, \quad S_{YY} = 326.96$

$S_{XY} = -25328$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \ vs \ H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ est **rejetée**, au seuil α, si $F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 3 - Réponse - e)

Donner un I.C. de prévision à 95% pour $X = 1800$.

$\bar{X} = 2109, \quad \bar{Y} = 6.964$

$S_{XX} = 3604739, \quad S_{YY}$

$S_{XY} = -25328$

$$Y_0 \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.05/2;26}} \sqrt{MS_E\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}}\right)}$$

$$= 21.782 - 0.007026 \cdot 1800 \pm 2.0555\sqrt{5.7310\left(1 + \frac{1}{28} + \frac{(1800 - 2109)^2}{3604739}\right)}$$

$$\approx 9.1352 \pm 5.0715 = [4.0637, 14.2067]$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \ \ vs \ \ H_1: \beta_1 \neq 0.$

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{X}}{S_{X}}$

$S_{XX} = \sum (X$

$S_{YY} = \sum (Y$

$S_{XY} = \sum (X_i -$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ **est rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H₀ est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la var
global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régr

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyen car
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	MS SS
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	MS SS_E
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1	

$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \quad R^2_{aj}$

$\hat{\sigma}^2 = MS_E$

$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha}$

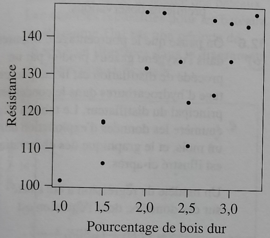
Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2$

Prévision : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)$

Ex. 4 - Énoncé

La résistance du papier utilisé pour fabriquer des boîtes de carton, Y, est liée au pourcentage de bois dur dans la pâte originale, X. Dans des conditions bien définies, une usine pilote fabrique 16 échantillons, chacun à partir d'un lot de pâte différent, et mesure la résistance à la traction. Les données et le diagramme qui les représente sont fournis ci-dessous.

y	101,4	117,4	117,1	106,2	131,9	146,9	146,8	133,9
x	1,0	1,5	1,5	1,5	2,0	2,0	2,2	2,4
y	111,3	123,0	125,1	145,2	134,3	144,5	143,7	146,9
x	2,5	2,5	2,8	2,8	3,0	3,0	3,2	3,3



La droite de régression associée à ces données est

$$\hat{y} = 93{,}34 + 15{,}65X.$$

a) Interprétez précisément la signification des nombres 93,34 et 15,65 dans l'équation ci-dessus.

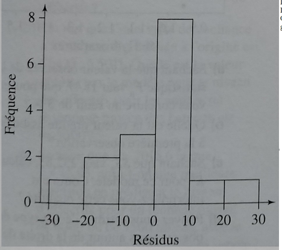
b) Remplissez la table d'analyse de la variance ci-dessous et testez si le modèle linéaire est significatif au seuil de 1 %.

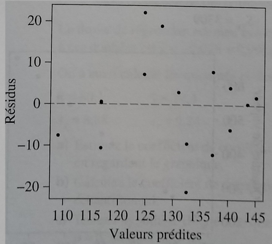
Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Moyenne des carrés	f_0	Valeur P
Régression	?	?	?	?	?
Erreur	1895,04	?	?		
Total	3650,81	?			

c) Un nouveau lot de pâte est analysé ; il contient 2,7 % de bois dur. Établissez un intervalle de prévision à 99 % pour la résistance du papier qui sera fabriqué à partir de ce lot.

d) Un autre lot de pâte est analysé ; il contient 3,1 % de bois dur. Sans faire aucun calcul, dites si l'intervalle de prévision à 99 %, relativement à la résistance du papier qui sera fabriqué à partir de ce lot, sera plus long ou plus court que l'intervalle calculé en c). La valeur prédite sera-t-elle plus petite ou plus grande ?

e) Les deux graphiques associés aux résidus du modèle sont présentés dans la figure 12.11. Dites à quoi servent ces graphiques et quelles conclusions vous pouvez en tirer.





<u>I-Calcul des estimateurs</u>

<u>Cas particulier : Régression simple</u>

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

<u>II-Test de signification</u>

<u>a-Test global</u> (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse **H_0 : $\beta_1 = 0$** est **rejetée**, au seuil α, si **$F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)$**.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

<u>Tableau d'analyse de variance – Régression simple</u>

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R/1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E/n\text{-}2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}}\right)}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{S_{XX}}\right)}$

Ex. 4 - Réponse - a)

Interpréter la signification des nombres dans
$$\hat{y} = 93.34 + 15.65X.$$

93.34: si le carton ne contient aucun bois dur, sa résistance est de 93.34.

15.65 : pour chaque pourcent de bois dur supplémentaire, la résistance gagne 15.65 de plus.

$$\hat{y} = 93.34 + 15.65X$$
$$SS_E = 1895.04$$
$$S_{YY} = 3650.81$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n\text{-}2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i - \bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2 - 1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 4 - Réponse - b)

Donner le tableau d'analyse de variance et tester à 1%.

source	χ^2_k	k	χ^2_k/k	F_0	p-value
modèle	$S_{YY} - SS_E = 1755.77$	1	$\frac{SS_R}{1} = 1755.77$	$\frac{MS_R}{MS_E} \approx 12.97$	< 0.01
erreur	1895.04	14	$\frac{SS_E}{n-2} \approx 135.36$		
totale	3650.81	15			

On rejette l'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ car $F_0 > F_{\alpha;1,n-2} = F_{0.01;1,14} = 8.862$.
Le modèle est globalement significatif.

Ex. 4 - Réponse - c)

Donner un I.C. de prévision à 99% pour $X = 2.7$.

$$\hat{y} = 93.34 + 15.65X$$
$$SS_E = 1895.04$$
$$S_{YY} = 3650.81$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1.0 + 1.5 + \ldots + 3.3}{16} \approx 2.325$$

$$S_{XX} = \frac{S_{XY}}{\hat{\beta}_1} = \frac{SS_R}{\hat{\beta}_1^2} = \frac{1755.77}{15.65^2} \approx 7.1687$$

$$Y_0 \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm \underbrace{t_{\alpha/2;n-2}}_{t_{0.01/2;14}} \sqrt{MS_E\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{XX}}\right)}$$

$$= 93.34 + 15.65 \cdot 2.7 \pm 2.9768\sqrt{135.36\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{(2.7 - 2.325)^2}{7.1687}\right)}$$

$$\approx 135.595 \pm 36.027 = [99.568, 171.622]$$

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_iY_i - n$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0 \ vs \ H_1: \beta_1 \neq 0.$

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significa**
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équi
global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R/1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	P(
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E/n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \quad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2-1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} +\right.}$$

<u>Confiance</u> : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)}{S_{XX}}}$

<u>Prévison</u> : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x}{S_{X}}}$

Ex. 4 - Réponse - d), e)

$$\hat{y} = 93.34 + 15.65X$$
$$SS_E = 1895.04$$
$$S_{YY} = 3650.81$$

Si $X = 3.1$, l'intervalle de prévision sera-t-il plus long et la valeur prédite sera-t-elle plus grande?

L'intervalle sera plus long car sa longueur augmente avec $(x_0 - \bar{x})^2$ et 3.1 est plus loin de $\bar{x} = 2.325$ que 2.7. La valeur sera plus grande car $\hat{\beta}_1 > 0$.

À quoi servent les deux graphiques présentés des résidus?

L'histogramme sert à vérifier la normalité des observations (ici une seule cloche quoi que un peu asymétrique).

Les résidus en fonction des valeurs prédites servent à vérifier l'homogénéité de la variance (ici la variance est un peu plus importante au centre).

I-Calcul des estimateurs

Cas particulier : Régression simple

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$
$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$
$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$
$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

II-Test de signification

a-Test global (loi de Fisher)

$H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$.

L'hypothèse $\mathbf{H_0 : \beta_1 = 0}$ est **rejetée**, au seuil α, si $\mathbf{F_0 > F_{1,n-2}(\alpha)}$.
Lorsque H_0 est **rejetée**, le modèle est **globalement significatif**, donc la variable X est **significative**.
On peut aussi effectuer un test de signification individuel pour la variable X. C'est un test équivalent au test global pour une régression simple.

Tableau d'analyse de variance – Régression simple

Source de variation	Somme des carrés (khi-2)	Deg liberté	Moyenne des carrés	F (statistique)	p-value
Régression (modèle)	$SS_R = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 S_{XY}$	1	$MS_R = SS_R / 1$	$F_0 = MS_R / MS_E$	$P(F \geq F_0)$
Résidus (Erreur)	$SS_E = \sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = S_{YY} - SS_R$	n-2	$MS_E = SS_E / n-2$		
Totale	$S_{YY} = SC_T = \sum(y_i-\bar{y})^2$	n-1			

$$R^2 = SS_R / S_{YY} = 1 - SS_E / S_{YY} \qquad R^2_{ajusté} = \frac{(n-1)R^2-1}{n-2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \qquad \beta_0 \in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

Confiance : $E(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Prévison : $(Y|X = x_0) \in \hat{y}_0 \mp t_{n-2}(\alpha/2)\sqrt{MS_E(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}-x_0)^2}{S_{XX}})}$

Ex. 5 - Énoncé

Exercice nº 5 On veut étudier la durée de vie T des ampoules électriques d'un certain fabricant. On suppose que T est une variable distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ inconnu. On décide de faire fonctionner n ampoules du fabricant indépendamment les unes des autres et on note $T_1, T_2, \ldots, T_n$ leurs durées de fonctionnement respectives.

a) En utilisant la méthode des moments, trouver l'estimateur $\hat{\lambda}_1$ de λ à partir des n observations $T_1, \ldots, T_n$.

b) On note $T_{\min}$ la variable aléatoire définie par $T_{\min} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} T_i$.

1.b) Trouver la distribution de $T_{\min}$. (*Suggestion : calculer d'abord* $P\left(T_{min} > t\right)$)

2.b) Calculer l'espérance et la variance de $T_{\min}$.

3.b) Déduire du calcul précédent un nouvel estimateur $\hat{\lambda}_2$ de λ en fonction de $T_{\min}$ par la méthode des moments.

- Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- Si A et B indép., alors $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Ex. 5 - Réponse - a)

Trouver l'estimateur $\hat{\lambda}_1$ de la méthode des moments.

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{\hat{\lambda}_1}$$
$$\Leftrightarrow \hat{\lambda}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow E(X) = \tfrac{1}{\lambda}$$
$$\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

A, B indép. $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Ex. 5 - Réponse - b)

Trouver la distribution, l'espérance et la variance de $T_{\min}$
et en déduire un nouvel estimateur $\hat{\lambda}_2$.

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$P(T_{\min} \leq t) = 1 - P(T_{\min} > t)$$
$$= 1 - P((T_1 > t) \cap \ldots \cap (T_n > t))$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - e^{-\lambda t}))$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-n\lambda t}$$

$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$
$\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

A, B indép. $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$$\Rightarrow T \sim \text{Exp}(n\lambda)$$

$$E(T_{\min}) = \frac{1}{n\lambda}, \qquad Var(T_{\min}) = \frac{1}{n^2\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n T_{\min}}$$

Ex. 6 - Énoncé

Exercice n° 6 Cet exercice est constitué de deux parties a) et b) indépendantes l'une de l'autre.

a) Des clients se présentent à un guichet automatique en formant une file d'attente $M/M/1$ avec $\lambda = 27$ clients par heure. On estime que 90% des clients sont présents plus de 3 minutes au total pour l'attente et le service.
Déterminer le nombre moyen de clients dans le système à l'équilibre.

b) Un système en parallèle est constitué de trois composants dont les durées de vie respectives sont modélisées par les variables aléatoires indépendantes $T_1 \sim \text{Exp}(2)$, $T_2 \sim \text{Exp}(5)$ et $T_3 \sim \text{Exp}(8)$. On suppose que ces composants sont utilisés en redondance active.
Déterminer la durée de vie moyenne du système.

- Temps total dans la file (attente + service) à l'équilibre $T \sim \text{Exp}(\mu - \lambda)$
- Nombre total (attente + service) moyen de clients en file à l'équilibre : $\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$ où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, alors $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

- Durée de vie moyenne : $\tau = E(T) = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$
- En parallèle, redondance active : $T = \max\{T_1, \ldots, T_n\}$, $R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$
- Si $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, alors $R(t) = e^{-\lambda t}$

Ex. 6 - Réponse - a)

Calculer le nombre moyen de clients dans le système à l'équilibre.

$$T \sim \text{Exp}(\mu - \lambda)$$

$$P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 1 - (1 - e^{-(\mu-\lambda)\cdot 3}) = e^{-3(\mu-\lambda)} = 0.9$$

$$\Rightarrow \mu = \lambda + \frac{\ln 0.9}{-3} = \frac{27}{60} + \frac{\ln 0.9}{-3} \approx 0.4852 \text{ min}^{-1}$$

$$\bar{N} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{27/60}{0.4852}}{1 - \frac{27/60}{0.4852}} \approx 12.78$$

$\lambda = 27$ clients/heure

$P(T > 3) = 0.9$

$T \sim \text{Exp}(\mu - \lambda)$

$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$ où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Ex. 6 - Réponse - b)

Calculer la durée de vie moyenne du système.

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t})$$
$$= 1 - (1 - e^{-2t})(1 - e^{-5t})(1 - e^{-8t})$$
$$= e^{-2t} + e^{-5t} + e^{-8t} - e^{-7t} - e^{-10t} - e^{-13t} + e^{-15t}$$

$$\tau = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{e^{-5t}}{-5} + \frac{e^{-8t}}{-8} - \frac{e^{-7t}}{-7} - \frac{e^{-10t}}{-10} - \frac{e^{-13t}}{-13} + \frac{e^{-15t}}{-15}\right)\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \approx 0.572$$

$T_1 \sim \text{Exp}(2)$
$T_2 \sim \text{Exp}(5)$
$T_3 \sim \text{Exp}(8)$

en parallèle, redondance active

$\tau = E(T) = \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$

parallèle, redondance active
$\Rightarrow T = \max\{T_1, ..., T_n\}$
$\Rightarrow R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t))$

$T \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow R(t) = e^{-\lambda t}$