Département de Mathématiques et de Génie Industriel
Polytechnique Montréal

MTH1008 – Algèbre linéaire appliquée

Contrôle périodique 2 – Automne 2023

Dimanche 19 novembre 2023, 13h00 à 15h00

Vous avez **deux heures** pour compléter ce contrôle. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP sont permises. **Une réponse sans justification est sans valeur**. Cependant restez concis et utilisez surtout le langage mathématique. Cet examen comporte 6 questions pour un total de 20 points. Un aide-mémoire est disponible à la dernière page.

Question 1 (2,5 points)

On considère l'application linéaire suivante

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} = (x, y, z) &\longmapsto T(\mathbf{x}) = (-2x - y + z, 8x + 3y - 2z, 4x + 2y - 2z) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A représentative de T.

2. Déterminer une base du noyau de A et sa dimension.

3. Déterminer une base de l'image de A et sa dimension.

4. T est-elle injective ? Surjective ?

Question 2 (2,5 points)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & k \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k & -2 \end{bmatrix}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de k, le rang de la matrice A et la dimension de l'espace des lignes de A.

2. Pour $k = 0$, déterminer une base de l'orthogonal de l'espace des lignes de A.

Question 3 (2,5 points)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

2. Déterminer les vecteurs propres associés.

Question 4 (5 points)

Soient la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et son inverse $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Soient aussi les vecteurs $\mathbf{b}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,1)$, et $\mathbf{b}_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ telle que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

3. Déterminer $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ sachant que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = (1,2,3)$.

Question 5 (4 points)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & a \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et spécifier leur multiplicité algébrique.

2. Trouver une valeur de a pour que la matrice A soit diagonalisable.

3. Pour la valeur de a trouvée à la question précédente, donner une base du sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres.

Question 6 (3,5 points)

Les sous-questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient U une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont orthonormées et $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(U\mathbf{x})^\top(U\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{y}$ et en déduire que $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

2. Soient $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,2,0)$, $\mathbf{u}_3 = (\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2})$ et $W = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Après avoir vérifié que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont orthogonaux, calculer le projeté orthogonal de $\mathbf{u}_3$ sur W.

3. Écrire $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^3$ sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$.

4. Calculer les trois racines cubiques de i et les écrire sous forme algébrique.

Aide-mémoire

1. Soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p)$ une base orthogonale d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$. Le projeté orthogonal de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W est donné par

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\mathbf{y}^\top \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i$$

2. Les racines n-ièmes de $w^n = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$, sont données par la formule

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)}{n}}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.