MTH2302D - TD 4

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

Une chaîne de production de transistors génère en moyenne 2 % d'unités défectueuses. On y prélève aux 2 heures un échantillon aléatoire de 50 unités. Si cet échantillon renferme plus de 2 unités défectueuses, il faut interrompre la production.

a) Déterminez la probabilité que ce plan d'échantillonnage engendre une interruption de la production.

b) Quelle est la probabilité de prélever trois échantillons consécutifs sans défauts ?

- $X \sim \mathrm{B}(n, p)$
- $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

Ex. 1 - Réponse - a)

Calculez la probabilité d'une interruption.

2% d'unités défectueuses

X : nb d'unités défectueuses parmi 50

échantillon de 50 et

interruption si $>$ 2 défect.

$$X \sim \mathrm{B}(50, 0.02)$$

$$\begin{aligned}
P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\
&= 1 - F_X(2) \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{50!}{x!(50-x)!} 0.02^x \cdot 0.98^{50-x} \\
&= 1 - \tfrac{50!}{0!50!} 0.02^0 \cdot 0.98^{50} - \tfrac{50!}{1!49!} 0.02^1 \cdot 0.98^{49} - \tfrac{50!}{2!48!} 0.02^2 \cdot 0.98^{48} \\
&= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.98^{50} - 50 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{49} - \frac{50 \cdot 49}{2} 0.02^2 \cdot 0.98^{48} \\
&\approx 0.0784
\end{aligned}$$

$$X \sim \mathrm{B}(n, p)$$

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ex. 1 - Réponse - b)

Calculez la probabilité d'avoir 3 échantillons de suite sans défaut.

2% d'unités défectueuses

échantillon de 50 et

interruption si $>$ 2 défect.

$$P(X=0) = \frac{50!}{0!50!} 0.02^0 \cdot 0.98^{50} = 1 \cdot 1 \cdot 0.98^{50} \approx 0.364$$

Y : nb d'échantillons sans défaut parmi 3

$$Y \sim \mathrm{B}(3, 0.364)$$

$$P(Y=3) = \frac{3!}{3!0!} 0.364^3 \cdot (1-0.364)^0 = 1 \cdot 0.364^3 \cdot 1 \approx 0.0482$$

$X \sim \mathrm{B}(n, p)$

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Z : nb d'échantillons pour en avoir un avec défaut

$$Z \sim \mathrm{G}(1-0.364) = \mathrm{G}(0.636)$$

$$P(Z > 3) = 1 - F_Z(3) = 1 - (1 - (1-0.636)^3) = 0.364^3 \approx 0.0482$$

Ex. 2 - Énoncé

Un libraire reçoit chaque semaine 4 exemplaires d'un magazine. En moyenne, 3 clients se présentent par semaine à la recherche d'un exemplaire du magazine, et ce, selon un processus de Poisson. On suppose que les exemplaires non vendus au cours d'une semaine ne peuvent être vendus la semaine suivante.

a) Quelle est la probabilité que le libraire vende tous les exemplaires reçus du magazine au cours d'une semaine donnée ?

b) Quelle est la probabilité qu'au cours d'un mois (4 semaines), il y ait au moins une semaine durant laquelle le libraire ne vend pas tous les exemplaires du magazine ?

c) Déterminez la moyenne et la variance du nombre d'exemplaires du magazine vendus en une semaine.

d) Déterminez la moyenne du nombre de clients qui n'obtiennent pas un exemplaire du magazine en une semaine.

- $X \sim \mathrm{Poi}(c)$
$$p_X(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}$$

- $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$
$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$
$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

Ex. 2 - Réponse - a)

Calculez la probabilité de vendre tous les exemplaires.

X : nb de clients par semaine

$$X \sim \mathrm{Poi}(3)$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) \\
&= 1 - F_X(3) \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-3}3^x}{x!} \\
&= 1 - e^{-3}\left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right) \\
&= 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}\right) \\
&\approx 0.353
\end{aligned}$$

4 exemplaires / semaine
non-vendus $\neq$ vendable après

3 clients / semaine (Poisson)

$$X \sim \mathrm{Poi}(c)$$

$$p_X(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}$$

$$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$$

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

Ex. 2 - Réponse - b)

Calculez la probabilité que, sur 4 semaines, il y ait au mons une semaine où pas tous les exemplaires sont vendus.

Y : nb de semaines/4 où pas tous vendus

$$Y \sim \mathrm{B}(4, 1 - 0.353) = \mathrm{B}(4, 0.647)$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y \leq 0) \\ &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - p_Y(0) \\ &= 1 - \frac{4!}{0!(4-0)!} 0.647^0 \, (1 - 0.647)^{4-0} \\ &= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.353^4 \\ &\approx 0.984 \end{aligned}$$

4 exemplaires / semaine
non-vendus $\neq$ vendable après

3 clients / semaine (Poisson)

$X \sim \mathrm{Poi}(c)$

$$p_X(x) = \frac{e^{-c} c^x}{x!}$$

$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y \, (1 - p)^{n-y}$$

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

Ex. 2 - Réponse - c)

Calculez la moyenne μ_M et la variance σ_M^2 du nb d'exemplaires vendus en une semaine M.

$$M = \min\{X, 4\}$$

$$p_M(0) = p_X(0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = e^{-3}$$

$$p_M(1) = p_X(1) = \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 3e^{-3}$$

$$p_M(2) = p_X(2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = \frac{9}{2}e^{-3}$$

$$p_M(3) = p_X(3) = \frac{e^{-3}3^3}{3!} = \frac{9}{2}e^{-3}$$

$$p_M(4) = P(X \geq 4) = 0.353$$

4 exemplaires / semaine
non-vendus $\neq$ vendable après

3 clients / semaine (Poisson)

$$X \sim \text{Poi}(c)$$

$$p_X(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}$$

$$Y \sim \text{B}(n, p)$$

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

Ex. 2 - Réponse - c)

Calculez la moyenne μ_M et la variance σ_M^2 du nb d'exemplaires vendus en une semaine M.

4 exemplaires / semaine
non-vendus $\neq$ vendable après

3 clients / semaine (Poisson)

m	0	1	2	3	4
$p_M(m)$	e^{-3}	$3e^{-3}$	$\frac{9}{2}e^{-3}$	$\frac{9}{2}e^{-3}$	0.353

$$\mu_M = \sum_{m=0}^{4} m \cdot p_M(m)$$

$$= 0 \cdot e^{-3} + 1 \cdot 3e^{-3} + 2 \cdot \frac{9}{2}e^{-3} + 3 \cdot \frac{9}{2}e^{-3} + 4 \cdot 0.353$$

$$\approx 2.682$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{m=0}^{4} m^2 \cdot p_M(m) - \mu_M^2$$

$$= 0^2 \cdot e^{-3} + 1^2 \cdot 3e^{-3} + 2^2 \cdot \tfrac{9}{2}e^{-3} + 3^2 \cdot \tfrac{9}{2}e^{-3} + 4^2 \cdot 0.353 - 2.682^2$$

$$\approx 1.517$$

$$X \sim \mathrm{Poi}(c)$$

$$p_X(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}$$

$$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$$

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

Ex. 2 - Réponse - d)

Calculez la moyenne μ_Z du nb de clients qui ne reçoivent pas d'exemplaires Z.

$$Z = X - M$$

$$\begin{aligned}\mu_Z &= E(Z)\\ &= E(X - M)\\ &= E(X) - E(M)\\ &= 3 - 2.682\\ &= 0.318\end{aligned}$$

4 exemplaires / semaine
non-vendus $\neq$ vendable après

3 clients / semaine (Poisson)

$$X \sim \mathrm{Poi}(c)$$

$$p_X(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}$$

$$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$$

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1 - p)^{n-y}$$

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$

Ex. 3 - Énoncé

Certaines pièces essentielles au bon fonctionnement d'une machine tombent en panne à raison de une pièce par cinq semaines, en moyenne et selon un processus de Poisson. Il y a deux pièces de rechange en inventaire et le nouvel approvisionnement arrivera dans neuf semaines. Quelle est la probabilité que, durant les neuf prochaines semaines, la production cesse pendant une semaine ou plus à cause d'un manque de pièces de rechange ?

- $X_t \sim \text{Poi}(c_t)$ où $c_t = \lambda t$

  Preuve par additivité indépendante:

  $$X_t = \underbrace{X_1 + X_1 + \ldots + X_1}_{t \text{ fois}} = t \cdot X_1$$

  $$\Leftrightarrow c_t = t \cdot c_1 = t \cdot \lambda$$

- $$p_{X_t}(x) = \frac{e^{-c_t} c_t^x}{x!}$$

Ex. 3 - Réponse

Quelle est la probabilité que, durant les neuf prochaines semaines, la production cesse pendant une semaine ou plus à cause d'un manque de pièces de rechange ?

1 pièce en panne / 5 semaines

X_t : nb de pièces essentielles qui tombent en panne en t semaines

2 pièces de rechange

$$X_5 \sim \text{Poi}(1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad X_t \sim \text{Poi}\left(\frac{t}{5}\right)$$

$X_t \sim \text{Poi}(c_t)$ où $c_t = \lambda t$

$$P(X_8 > 2) = 1 - P(X_8 \leq 2) = 1 - F_{X_8}(2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-\frac{8}{5}} \left(\frac{8}{5}\right)^x}{x!}$$

$$p_{X_t}(x) = \frac{e^{-c_t} c_t^x}{x!}$$

$$= 1 - e^{-\frac{8}{5}} \left(\frac{\left(\frac{8}{5}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!} \right)$$

$$= 1 - e^{-\frac{8}{5}} \left(\frac{1}{1} + \frac{\frac{8}{5}}{1} + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2} \right) \approx 0.217$$

Ex. 4 - Énoncé

Le nombre d'imperfections sur le fini extérieur d'une voiture nouvellement fabriquée est une variable de Poisson avec un taux moyen de 0,1 par m^2. On refait le fini extérieur au coût de 500$ si on décèle trois imperfections ou plus lors du contrôle final de qualité. Le profit brut est de 1000$ pour chaque voiture fabriquée et la surface totale d'une voiture est approximativement 10 m^2.

a) Calculez le profit net moyen.

b) Il serait possible de réduire à 0,05 le nombre moyen d'imperfections par m^2 mais le profit brut serait alors de $(1000 - C)$\$. Pour quelle valeur maximale de C le nouveau procédé est-il plus rentable que le premier ?

- $X_s \sim \text{Poi}(c_s)$ où $c_s = \lambda s$
- $p_{X_s}(x) = \dfrac{e^{-c_s} c_s^x}{x!}$

Ex. 4 - Réponse - a)

Calculez le profit net moyen.

I : nb d'imperfection sur le fini extérieur

$$I \sim \text{Poi}(10 \cdot 0.1) = \text{Poi}(1)$$

On refait le fini extérieur si

$$P(I \geq 3) = 1 - P(I \leq 2) = 1 - F_I(2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-1} 1^x}{x!}$$

$$= 1 - e^{-1}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) \approx 0.0803$$

N : profit net $\quad R_N = \{1000 - 500, 1000\} = \{500, 1000\}$

$$\mu_N = \sum_{n \in R_N} n \cdot p_N(n) = 500 \cdot P(I \geq 3) + 1000 \cdot P(I \leq 2)$$

$$= 500 \cdot 0.0803 + 1000 \cdot (1 - 0.0803) = 959.85$$

0.1 imperfection / m^2

refaire fini extérieur si ≥ 3 imp.

profit brut : 1000$

refaire fini : -500$

$X_s \sim \text{Poi}(c_s)$ où $c_s = \lambda s$

$$p_{X_s}(x) = \frac{e^{-c_s} c_s^x}{x!}$$

Ex. 4 - Réponse - b)

Pour quelle valeur de C un nouveau procédé à 0.05 imp/m^2 à profit brut de $1000 - C$ est-il plus rentable?

$$I^* \sim \text{Poi}(10 \cdot 0.05) = \text{Poi}(0.5)$$

On refait le fini extérieur si

$$P(I^* \geq 3) = 1 - P(I \leq 2) = 1 - F_I(2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-0.5}0.5^x}{x!}$$

$$= 1 - e^{-0.5}\left(\frac{1}{0!} + \frac{0.5}{1!} + \frac{0.5^2}{2!}\right) \approx 0.0144$$

$$R_{N^*} = \{1000 - C - 500, 1000 - C\} = \{500 - C, 1000 - C\}$$

$$\mu_{N^*} = \sum_{n^* \in R_{N^*}} n^* \cdot p_{N^*}(n^*) = (500 - C) \cdot 0.0144$$

$$+ (1000 - C) \cdot (1 - 0.0144) = 992.8 - C$$

$$\Rightarrow \mu_{N^*} > \mu_N \quad \Leftrightarrow \quad C < 32.95$$

0.1 imperfection / m^2

refaire fini extérieur si ≥ 3 imp.

profit brut : 1000\$

refaire fini : -500\$

$X_s \sim \text{Poi}(c_s)$ où $c_s = \lambda s$

$$p_{X_s}(x) = \frac{e^{-c_s} c_s^x}{x!}$$

Ex. 5 - Énoncé

Un lot de 25 appareils dont 4 sont défectueux est assujetti au plan d'échantillonnage suivant : un échantillon de 5 appareils est choisi sans remise et le lot est refusé si 3 ou plus sont défectueux; autrement le lot (diminué des appareils défectueux de l'échantillon) est accepté. Calculez

a) La probabilité que le lot soit accepté.
b) La taille moyenne des lots acceptés.
c) La probabilité que le lot soit accepté à l'aide de la loi binomiale.

- $X \sim \mathrm{H}(n, N, D)$
- $$p_X(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x}\left(\frac{D}{N}\right)^x\left(\frac{N-D}{N}\right)^{n-x}$$
- $$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ex. 5 - Réponse - a)

Calculez la probabilité que le lot soit accepté.

X : nb de défect. dans l'échantillon

$$X \sim \mathrm{H}(5, 25, 4)$$

$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = F_X(2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{4}{x}\binom{21}{5-x}}{\binom{25}{5}}$$

$$= \sum_{x=0}^{2} \frac{\frac{4!}{x!(4-x)!}\frac{21!}{(5-x)!(21-5+x)!}}{\frac{25!}{5!20!}}$$

$$= \sum_{x=0}^{2} \frac{4!}{x!(4-x)!}\frac{5!}{(5-x)!}\frac{20!}{(16+x)!}\frac{21!}{25!}$$

$$= \frac{21!}{25!}\left(\frac{4!}{0!4!}\frac{5!}{5!}\frac{20!}{16!} + \frac{4!}{1!3!}\frac{5!}{4!}\frac{20!}{17!} + \frac{4!}{2!2!}\frac{5!}{3!}\frac{20!}{18!}\right)$$

$$= \frac{1}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}\left(1 \cdot 1 \cdot (20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17) + 4 \cdot 5 \cdot (20 \cdot 19 \cdot 18) + \frac{4 \cdot 3}{2}(5 \cdot 4) \cdot (20 \cdot 19)\right)$$

$$\approx 0.984$$

lot de 25 dont 4 défectueux

5 choisis et
lot refusé si ≥ 3 défect.

si accepté
$\rightarrow$ lot moins choisis défect.

$$X \sim \mathrm{H}(n, N, D)$$

$$p_X(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x}\left(\frac{D}{N}\right)^x\left(\frac{N-D}{N}\right)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ex. 5 - Réponse - b)

Calculez la taille moyenne des lots acceptés.

$$Y = (25 - X \,|\, X \leq 2) \qquad R_Y = \{23, 24, 25\}$$

$$\mu_Y = \sum_{y=23}^{25} y \cdot P(Y = y) = \sum_{y=23}^{25} y \cdot P(25 - X = y \,|\, X \leq 2)$$

$$= \sum_{y=23}^{25} y \cdot \frac{P((X = 25 - y) \cap (X \leq 2))}{P(X \leq 2)} = \sum_{y=23}^{25} y \cdot \frac{P(X = 25 - y)}{P(X \leq 2)}$$

$$= \frac{1}{P(X \leq 2)} (23 \cdot P(X = 2) + 24 \cdot P(X = 1) + 25 \cdot P(X = 0))$$

$$= \frac{1}{0.9874(25{\cdot}24{\cdot}23{\cdot}22)} \left(23 \frac{4{\cdot}3}{2}(5{\cdot}4)(20{\cdot}19) + 24{\cdot}4{\cdot}5(20{\cdot}19{\cdot}18) + 25{\cdot}1{\cdot}1(20{\cdot}19{\cdot}18{\cdot}17)\right)$$

$$\approx 24.232$$

lot de 25 dont 4 défectueux

5 choisis et
lot refusé si ≥ 3 défect.

si accepté
$\rightarrow$ lot moins choisis défect.

$X \sim \mathrm{H}(n, N, D)$

$$p_X(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x}\left(\frac{D}{N}\right)^x \left(\frac{N-D}{N}\right)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ex. 5 - Réponse - c)

Calculez la probabilité que le lot soit accepté (binomiale).

$$
\begin{aligned}
P(X < 3) &= P(X \leq 2) \\
&= F_X(2) \\
&= \sum_{x=0}^{2} p_X(x) \\
&\approx \sum_{x=0}^{2} \frac{5!}{x!(5-x)!} \left(\frac{4}{25}\right)^x \left(\frac{21}{25}\right)^{5-x} \\
&\approx \tfrac{5!}{0!5!} \left(\tfrac{4}{25}\right)^0 \left(\tfrac{21}{25}\right)^5 + \tfrac{5!}{1!4!} \left(\tfrac{4}{25}\right)^1 \left(\tfrac{21}{25}\right)^4 + \tfrac{5!}{2!3!} \left(\tfrac{4}{25}\right)^2 \left(\tfrac{21}{25}\right)^3 \\
&\approx 1 \cdot 1 \left(\tfrac{21}{25}\right)^5 + 5 \tfrac{4}{25} \left(\tfrac{21}{25}\right)^4 + \tfrac{5 \cdot 4}{2} \left(\tfrac{4}{25}\right)^2 \left(\tfrac{21}{25}\right)^3 \\
&\approx 0.968
\end{aligned}
$$

lot de 25 dont 4 défectueux

5 choisis et
lot refusé si ≥ 3 défect.

si accepté

$\rightarrow$ lot moins choisis défect.

$X \sim \mathrm{H}(n, N, D)$

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&\approx \binom{n}{x} \left(\tfrac{D}{N}\right)^x \left(\tfrac{N-D}{N}\right)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$
\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}
$$