MTH2302D - TD 3

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

On considère la demande d'antigel pour une saison comme une variable aléatoire X de fonction de densité uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 10^{-6} & \text{si } 10^6 \leq x \leq 2 \cdot 10^6 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où X est exprimée en litres. On sait que chaque litre vendu à l'automne rapporte 50 ¢ au fabricant, et que celui-ci doit conserver tout stock excédentaire jusqu'à l'année suivante, ce qui lui coûte 25 ¢ le litre.

a) Définissez la fonction de perte $L(X, s)$ en vous inspirant de l'exemple 2.27.

b) On veut déterminer le niveau optimal des stocks pour un automne donné. Quelle fonction faudra-t-il minimiser ?

c) Déterminez le niveau optimal des stocks

- X : demande réelle (aléatoire)
  s : stocks achetés
  $L(X, s)$: perte par rapport au profit optimal (quand $s = X$)
- $L(X, s) = \begin{cases} \text{profit perdu} & \text{si } X > s, \\ \text{frais d'excédant} & \text{si } X \leq s. \end{cases}$
- $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$

Ex. 1 - Réponse

Définissez la fonction de perte $L(X,s)$.

$$L(X,s) = \begin{cases} \text{profit perdu} & \text{si } X > s, \\ \text{frais d'excédant} & \text{si } X \leq s. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.50 \cdot (X - s) & \text{si } X > s, \\ 0.25 \cdot (s - X) & \text{si } X \leq s. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 10^{-6} & \text{si } 10^6 \leq x \leq 2 \cdot 10^6 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

litre vendu : $+50¢$

litre excédant : -25 ¢

X : demande réelle (aléatoire)

s : stocks achetés

$L(X,s)$: perte par rapport au profit optimal ($s = X$)

$$L(X,s) = \begin{cases} \text{profit perdu} & \text{si } X > s, \\ \text{frais d'excédant} & \text{si } X \leq s. \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Ex. 1 - Réponse

$$L(X,s)) = \begin{cases} 0.50 \cdot (X - s) & \text{si } X > s, \\ 0.25 \cdot (s - X) & \text{si } X \leq s. \end{cases}$$

Quelle fonction à minimiser pour trouver le niveau optimal des stocks s^*?

$$\begin{aligned}
E(L(X,s)) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(x,s) f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{10^6}^{2\cdot 10^6} L(x,s) 10^{-6} \mathrm{d}x \\
&= \int_{10^6}^{s} 0.25 \cdot (s - x) 10^{-6} \mathrm{d}x + \int_{s}^{2\cdot 10^6} 0.50 \cdot (x - s) 10^{-6} \mathrm{d}x \\
&= 0.25 \cdot 10^{-6} (sx - \tfrac{x^2}{2}) \Big|_{x=10^6}^{x=s} + 0.50 \cdot 10^{-6} (\tfrac{x^2}{2} - sx) \Big|_{x=s}^{x=2\cdot 10^6} \\
&= \ldots = \frac{1}{8} \left(3 \cdot 10^{-6} s^2 - 10s + 9 \cdot 10^6\right)
\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 10^{-6} & \text{si } 10^6 \leq x \leq 2 \cdot 10^6 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

litre vendu : +50¢
litre excédant : -25 ¢

X : demande réelle (aléatoire)
s : stocks achetés
$L(X,s)$: perte par rapport au profit optimal ($s = X$)

$$L(X,s) = \begin{cases} \text{profit perdu} & \text{si } X > s, \\ \text{frais d'excédant} & \text{si } X \leq s. \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Ex. 1 - Réponse

$$E(L(X,s)) = \frac{1}{8}\left(3\cdot 10^{-6}s^2 - 10s + 9\cdot 10^6\right)$$

Déterminez le niveau optimal des stocks s^*?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(L(X,s)) = \frac{1}{8}\left(6\cdot 10^{-6}s - 10\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{5}{3}\cdot 10^6$$

$$f(x) = \begin{cases} 10^{-6} & \text{si } 10^6 \le x \le 2\cdot 10^6 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

litre vendu : $+50$¢
litre excédant : -25 ¢

X : demande réelle (aléatoire)
s : stocks achetés
$L(X,s)$: perte par rapport au profit optimal ($s = X$)

$$L(X,s) = \begin{cases} \text{profit perdu} & \text{si } X > s, \\ \text{frais d'excédant} & \text{si } X \le s. \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{d}x$$

Ex. 2 - Énoncé

Une molécule dans un gaz a une vitesse aléatoire V de densité

$$f_V(x) = \begin{cases} cxe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la constante c.

b) Déterminez la fonction de répartition de V.

c) L'énergie cinétique d'une molécule de masse m est définie par $E = mV^2/2$. Calculez la probabilité que cette énergie soit inférieure à huit fois la masse.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'$

Ex. 2 - Réponse

Déterminez la constante c.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} c\,x\,e^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-c}{2}\,e^{-x^2}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{-c}{2}(0-1) = \frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow c = 2$$

$$f_V(x) = \begin{cases} cxe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$E = mV^2/2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda\,e^{-x^2} = -2\lambda\,x\,e^{-x^2}$$
$$\Rightarrow c = -2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{-c}{2}$$

Ex. 2 - Réponse

Déterminez la fonction de répartition $F_V(x)$ de V.

$$
\begin{aligned}
F_V(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_V(x')\mathrm{d}x' \\
&= \int_0^x 2x'\, e^{-x'^2}\mathrm{d}x' \\
&= -e^{-x'^2}\Big|_{x'=0}^{x'=x} = -e^{-x^2} - (-1) = 1 - e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
f_V(x) = \begin{cases} cxe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$

$$E = mV^2/2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda\, e^{-x^2} = -2\lambda\, x\, e^{-x^2} \\
&\Rightarrow c = -2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \tfrac{-c}{2}
\end{aligned}
$$

Ex. 2 - Réponse

Calculez la probabilité que l'énergie d'une molécule de masse m soit inférieure à huit fois sa masse.

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{mV^2}{2} \leq 8m\right) &= P\left(V^2 \leq 16\right) \\
&= P\left(V \leq 4\right) \\
&= F_V\left(4\right) \\
&= 1 - e^{-4^2} \approx 0.9999999
\end{aligned}
$$

$$
f_V(x) = \begin{cases} cxe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$

$E = mV^2/2$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1
$$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda\, e^{-x^2} = -2\lambda\, x\, e^{-x^2}
$$

$$
\Rightarrow c = -2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{-c}{2}
$$

Ex. 3 - Énoncé

On dispose d'une ficelle de 1m de longueur qu'on coupe en un point déterminé au hasard. On peut montrer que la longueur de chaque morceau obtenu est une variable aléatoire X dont la fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux morceaux sont utilisés pour construire un carré et un cercle. Calculer :

a) La moyenne du côté du carré.

b) La moyenne de l'aire du carré.

c) La moyenne du périmètre du cercle.

d) La moyenne de l'aire du cercle.

e) La variance de l'aire du cercle.

- $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$
- $\mu_X = E(X)$,
- $\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Ex. 3 - Réponse

Calculez la moyenne du côté du carré.

$$E\left(\frac{X}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4} \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{4}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{8}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$$

Calculez la moyenne de l'aire du carré.

$$E\left(\left(\frac{X}{4}\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{4}\right)^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{16}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{48}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1-0}{48} = \frac{1}{48}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X : longueur d'un morceau

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu_X = E(X),$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ex. 3 - Réponse

Calculez la moyenne du périmètre du cercle.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

Calculez la moyenne de l'aire du cercle.

$$E\left(\pi r^2\right) = E\left(\pi\left(\frac{X}{2\pi}\right)^2\right) = E\left(\frac{X^2}{4\pi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{4\pi} \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{4\pi}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{12\pi}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1-0}{12\pi} = \frac{1}{12\pi}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X : longueur d'un morceau

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

$\mu_X = E(X)$,

$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Ex. 3 - Réponse

Calculez la variance de l'aire du cercle.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X : longueur d'un morceau

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$$
$$\mu_X = E(X),$$
$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\begin{aligned}
Var\left(\pi r^2\right) &= Var\left(\frac{X^2}{4\pi}\right) \\
&= E\left(\left(\frac{X^2}{4\pi}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{X^2}{4\pi}\right)\right)^2 \\
&= E\left(\frac{X^4}{16\pi^2}\right) - \left(\frac{1}{12\pi}\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{16\pi^2} \cdot f_X(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{144\pi^2} \\
&= \int_0^1 \frac{x^4}{16\pi^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{144\pi^2} \\
&= \left.\frac{x^5}{80\pi^2}\right|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{144\pi^2} = \frac{1}{80\pi^2} - \frac{1}{144\pi^2} = \frac{1}{180\pi^2}
\end{aligned}$$

Ex. 4 - Énoncé

Un guichet automatique permet de retirer avec une carte magnétique un seul billet de 20$ ou de 100$. Il se peut aussi que le client ne puisse pas retirer de l'argent si le compte n'est pas approvisionné ou si le guichet est défectueux. Le nombre X de clients qui utilisent le guichet dans un intervalle de cinq minutes est une variable aléatoire dont la fonction de masse p_X est donnée par

x_i	0	1	2
$p_X(x_i)$	0,3	0,5	0,2

Le montant total Y retiré du guichet en cinq minutes est une variable aléatoire dont la fonction de masse conditionnelle pour $X = 1$ client est

y_i	0	20	100
$p_{Y\|X=1}(y_i)$	0,1	0,7	0,2

a) Complétez le tableau suivant des probabilités conditionnelles de Y pour $X = 2$ clients :

y_i	0	20	40	100	120	200
$p_{Y\|X=2}(y_i)$	0,01					0,04

b) Déterminez la fonction de masse de Y.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Calculez le coefficient de corrélation.

- Z_1, Z_2 indép. $\Leftrightarrow p(z_1, z_1) = p_{Z_1}(z_1)p_{Z_2}(z_2)$
- $p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p(x, y)$
- $p(x, y) = p_X(x)p_{Y|X=x}(y)$
- $\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$
- $\sigma_X^2 = E(X^2) - (\mu_X)^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p_X(x) - (\mu_X)^2$
- $$Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) \cdot p(x, y)$$
- $\rho = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Ex. 4 - Réponse

Calculez les proba. cond. de Y pour $X = 2$ clients.

y	0	20	40	100	120	200	
$p_{Y\|X=2}(y)$	0.01	0.14	0.49	0.04	0.28	0.04	$=1$

x_i	0	1	2
$p_X(x_i)$	0,3	0,5	0,2

y_i	0	20	100
$p_{Y\|X=1}(y_i)$	0,1	0,7	0,2

$Y|X=2 \ = \ Y_1 + Y_2$ où Y_1, Y_2 indépendants et ont tous les deux la même distribution de probabilité que $Y|X = 1$

Z_1, Z_2 indép. $\Leftrightarrow$
$p(z_1, z_1) = p_{Z_1}(z_1) p_{Z_2}(z_2)$

$p(x, y) = p_X(x) p_{Y|X=x}(y)$

$$p_{Y|X=2}(0) = p_{Y_1}(0) \cdot p_{Y_2}(0) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$$
$$p_{Y|X=2}(20) = 2 \cdot p_{Y_1}(20) \cdot p_{Y_2}(0) = 2 \cdot 0.7 \cdot 0.1 = 0.14$$
$$p_{Y|X=2}(40) = p_{Y_1}(20) \cdot p_{Y_2}(20) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$$
$$p_{Y|X=2}(100) = 2 \cdot p_{Y_1}(100) \cdot p_{Y_2}(0) = 2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.04$$
$$p_{Y|X=2}(120) = 2 \cdot p_{Y_1}(100) \cdot p_{Y_2}(20) = 2 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.28$$
$$p_{Y|X=2}(200) = p_{Y_1}(100) \cdot p_{Y_2}(100) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

Ex. 4 - Réponse

Déterminez la fonction de masse p_Y de Y.

x	$p_X(x)$
0	0.3
1	0.5
2	0.2

y	0
$p_{Y\|X=0}(y)$	1

y	0	20	100
$p_{Y\|X=1}(y)$	0.1	0.7	0.2

y	0	20	40	100	120	200
$p_{Y\|X=2}(y)$	0.01	0.14	0.49	0.04	0.28	0.04

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{x \in R_X} p(x,y) \\ &= \sum_{x \in R_X} p_X(x) p_{Y|X=x}(y) \\ &= p_X(0) p_{Y|X=0}(y) + p_X(1) p_{Y|X=1}(y) + p_X(2) p_{Y|X=2}(y) \end{aligned}$$

y	0	20	40	100	120	200
$p_Y(y)$						

Ex. 4 - Réponse

Déterminez la fonction de masse p_Y de Y.

x	$p_X(x)$
0	0.3
1	0.5
2	0.2

y	0	20	40	100	120	200
$p_{Y\|X=0}(y)$	1					
$p_{Y\|X=1}(y)$	0.1	0.7		0.2		
$p_{Y\|X=2}(y)$	0.01	0.14	0.49	0.04	0.28	0.04
$p_Y(y)$	0.352	0.378	0.098	0.108	0.056	0.008

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= p_X(0)p_{Y|X=0}(y) + p_X(1)p_{Y|X=1}(y) + p_X(2)p_{Y|X=2}(y) \\
p_Y(0) &= 0.3 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.01 = 0.352 \\
p_Y(20) &= 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.14 = 0.378 \\
p_Y(40) &= 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 \quad + 0.2 \cdot 0.49 = 0.098 \\
p_Y(100) &= 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.108 \\
p_Y(120) &= 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 \quad + 0.2 \cdot 0.28 = 0.056 \\
p_Y(200) &= 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 \quad + 0.2 \cdot 0.04 = 0.008
\end{aligned}
$$

Ex. 4 - Réponse

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

X, Y indép. $\Leftrightarrow$

$$p(0,0) = p_X(0)p_{Y|X=0}(0) = 0.3 \cdot 1 \neq 0.3 \cdot 0.352 = p_X(0)p_Y(0) \quad p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

Non elles ne sont pas indépendantes.

Ex. 4 - Réponse

Calculez le coefficient de corrélation ρ.

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9$$

$$\mu_Y = 0 \cdot 0.352 + 20 \cdot 0.378 + 40 \cdot 0.098 + 100 \cdot 0.108 + 120 \cdot 0.056 + 200 \cdot 0.008 = 30.6$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p_X(x) - (\mu_X)^2 = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 - 0.9^2 = 0.49$$

$$\sigma_X = 0.7$$

$$\sigma_Y^2 = 0^2 \cdot 0.352 + 20^2 \cdot 0.378 + 40^2 \cdot 0.098 + 100^2 \cdot 0.108 + 120^2 \cdot 0.056 + 200^2 \cdot 0.008 - 30.6^2 = 1578.04$$

$$\sigma_Y \approx 39.725$$

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p_X(x) - (\mu_X)^2$$

$$Cov(X, Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) \cdot p(x, y)$$

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Ex. 4 - Réponse

Calculez le coefficient de corrélation ρ.

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\cdot p(x,y) \\
&= \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\cdot p_X(x)p_{Y|X=x}(y) \\
&= \sum_{x\in R_X}(x-\mu_X)\cdot p_X(x)\sum_{y\in R_Y}(y-\mu_Y)\cdot p_{Y|X=x}(y) \\
&= (0-0.9)\cdot 0.3\cdot(0-30.6)\cdot 1 \\
&\quad + (1-0.9)\cdot 0.5((0-30.6)\cdot 0.1+(20-30.6)\cdot 0.7 \\
&\qquad + (100-30.6)\cdot 0.2) \\
&\quad + (2-0.9)\cdot 0.2((0-30.6)\cdot 0.01+(20-30.6)\cdot 0.14 \\
&\qquad + (40-30.6)\cdot 0.49+(100-30.6)\cdot 0.04 \\
&\qquad + (120-30.6)\cdot 0.28+(200-30.6)\cdot 0.04) = 16.66
\end{aligned}
$$

$$\mu_X = \sum_{x\in R_X} x\cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x\in R_X} x^2\cdot p_X(x) - (\mu_X)^2$$

$$Cov(X,Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\cdot p(x,y)$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Ex. 4 - Réponse

Calculez le coefficient de corrélation ρ.

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \approx \frac{16.66}{0.7 \cdot 39.725} \approx 0.482$$

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p_X(x) - (\mu_X)^2$$

$$Cov(X,Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) \cdot p(x,y)$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Ex. 5 - Énoncé

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes deux à deux. Leurs moyennes et variances sont données par :

	X	Y	Z
μ	0	1	3
σ^2	1	2	4

.

Soient les variables aléatoires $V = X + Y$ et $W = 2X - 3Z$.

a) Calculez la moyenne et l'écart type de V.

b) Calculez la moyenne et l'écart type de W.

c) Calculez le coefficient de corrélation entre V et W.

- Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$,

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Ex. 5 - Réponse

Calculez la moyenne $\mu_V = E(V)$ et l'écart type σ_V de V.

$$
\begin{aligned}
E(V) &= 1 \cdot E(X) + 1 \cdot E(Y) \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\
Var(V) &= 1^2 \cdot Var(X) + 1^2 \cdot Var(Y) + 1 \cdot 1 \cdot Cov(X, Y) \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 3 \\
\sigma_V &= \sqrt{3} \approx 1.732
\end{aligned}
$$

	X	Y	Z
μ	0	1	3
σ^2	1	2	4

$$V = X + Y$$

$$W = 2X - 3Z$$

Calculez la moyenne $\mu_W = E(W)$ et l'écart type σ_W de W.

$$
\begin{aligned}
E(W) &= 2 \cdot E(X) - 3 \cdot E(Z) \\
&= 2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = -9 \\
Var(W) &= 2^2 \cdot Var(X) + (-3)^2 \cdot Var(Z) + 2 \cdot (-3) \cdot Cov(X, Z) \\
&= 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 40 \\
\sigma_W &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.325
\end{aligned}
$$

Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$,

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Ex. 5 - Réponse

Calculez le coefficient de corrélation ρ entre V et W.

	X	Y	Z
μ	0	1	3
σ^2	1	2	4

$$V = X + Y$$

$$W = 2X - 3Z$$

$$\begin{aligned}
Cov(V,W) &= E((V-\mu_V)(W-\mu_W)) \\
&= E((X+Y-1)(2X-3Z-(-9))) \\
&= E(2X^2 - 3XZ + 7X + 2XY - 3YZ + 9Y + 3Z - 9) \\
&= 2E(X^2) - 3E(XZ) + 7E(X) + 2E(XY) - 3E(YZ) \\
&\quad + 9E(Y) + 3E(Z) - 9E(1) \\
&= 2(\sigma_X^2 + \mu_X^2) - 3E(XZ) + 7\mu_X + 2E(XY) - 3E(YZ) \\
&\quad + 9\mu_Y + 3\mu_Z - 9 \cdot E(1)
\end{aligned}$$

$$E(1) = \sum_{u \in R_U} 1 \cdot p_U(u) = \sum_{u \in R_U} p_U(u) = 1$$

Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$,

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Ex. 5 - Réponse

Calculez le coefficient de corrélation ρ entre V et W.

	X	Y	Z
μ	0	1	3
σ^2	1	2	4

$$V = X + Y$$

$$W = 2X - 3Z$$

Soit X, Z indépendants.

$$\begin{aligned}
E(XZ) &= \sum_{x \in R_X} \sum_{z \in R_Z} x \cdot z \cdot p(x, z) \\
&= \sum_{x \in R_X} \sum_{z \in R_Z} x \cdot z \cdot p_X(x) p_Z(z) \\
&= \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x) \sum_{z \in R_Z} z \cdot p_Z(z) \\
&= \left(\sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x) \right) \left(\sum_{z \in R_Z} z \cdot p_Z(z) \right) \\
&= E(X) \cdot E(Z)
\end{aligned}$$

Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$,

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Ex. 5 - Réponse

Calculez le coefficient de corrélation ρ entre V et W.

$$\begin{aligned} Cov(V,W) &= 2(\sigma_X^2 + \mu_X^2) - 3E(XZ) + 7\mu_X + 2E(XY) - 3E(YZ) \\ &\quad + 9\mu_Y + 3\mu_Z - 9 \\ &= 2(\sigma_X^2 + \mu_X^2) - 3\mu_X\mu_Z + 7\mu_X + 2\mu_X\mu_Y - 3\mu_Y\mu_Z \\ &\quad + 9\mu_Y + 3\mu_Z - 9 \\ &= 2(1^2 + 0^2) - 3\cdot 0\cdot 3 + 7\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 3 \\ &\quad + 9\cdot 1 + 3\cdot 3 - 9 = 2 \end{aligned}$$

	X	Y	Z
μ	0	1	3
σ^2	1	2	4

$$V = X + Y$$

$$W = 2X - 3Z$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Cov(V,W)}{\sigma_V \sigma_W} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.183 \end{aligned}$$

Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$,

$$E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum\sum_{i\neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$