Question n° 1 : (3 points)

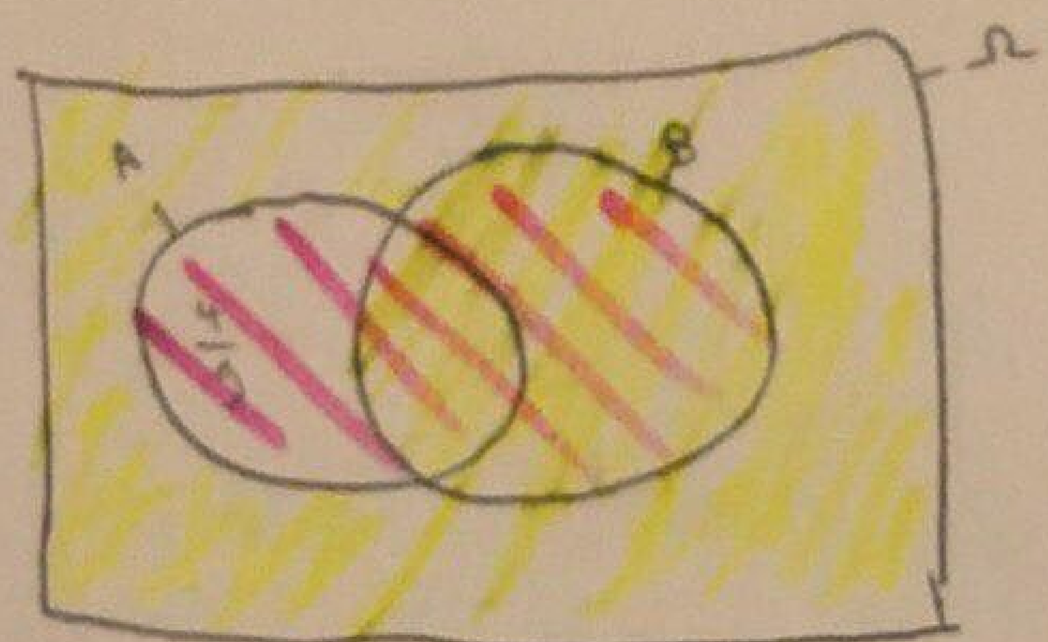
On considère deux événements A et B tels que

$$P(A \mid \overline{B}) = 2/3 \quad \text{et} \quad P(B) = 1/3.$$

a) **(1,5 point)** Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.

b) **(1,5 point)** Soit les événements F et G définis par $F = \overline{A} \cup B$ et $G = A \cup B$. Calculer la probabilité $P(F \mid G)$.

Réponse :



$p(A|\bar{B}) = \frac{2}{3}$

$p(B) = \frac{1}{3}$

a) $p(A|\bar{B}) = \dfrac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})} = \dfrac{p(A\cap\bar{B})}{1-p(B)} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3\times p(A\cap\bar{B})}{2} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow p(A\cap\bar{B}) = \frac{4}{9}$

d'où $p(A\cup B) = p(A\cap\bar{B}) + p(B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$ ✓

b) $F = \bar{A}\cup B$

$G = A\cup B$

$p(F|G) = \dfrac{p(F\cap G)}{p(G)} = \dfrac{p((\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)} = \dfrac{p(B)}{\frac{7}{9}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{9}} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$ ✓

car $p((\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B)) = p((\overline{A\cap\bar{B}})\cap(A\cup B))$

↓ représentée en jaune

La représentée en rose sur le diagramme de VENN.

Question n° 2 : (3 points)

Une boîte contient trois dés A, B, C identiques d'apparence et chaque dé a six côtés numérotés de *1* à *6*. Les dés A et B sont parfaitement équilibrés, mais pas le dé C. En effet pour chaque lancer, le dé C a une probabilité de 1/4 de présenter le côté *6*.

Un dé est choisi au hasard de la boîte et ce dé est ensuite lancé 2 fois.

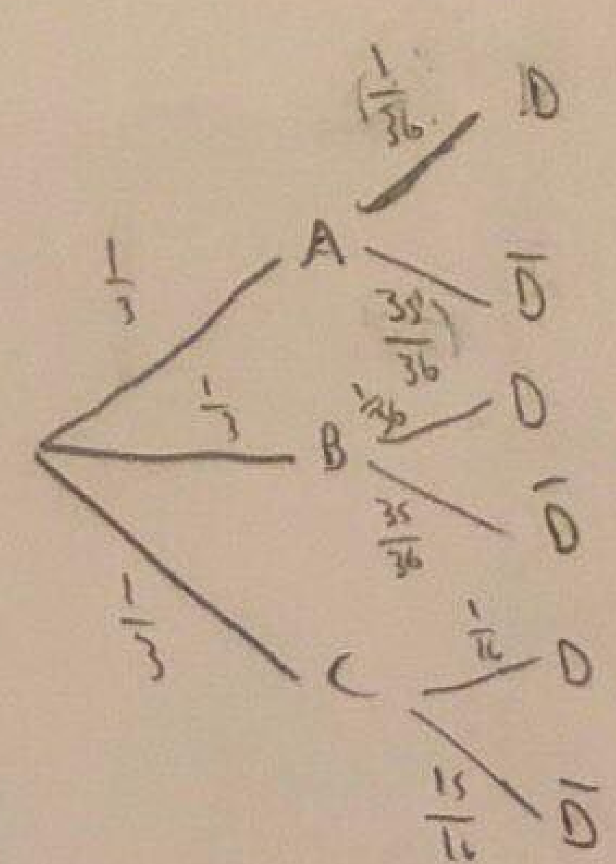
a) **(1,5 point)** Calculer la probabilité que le dé choisi présente 2 fois le côté *6*.

b) **(1,5 point)** Si le dé choisi présente 2 fois le côté *6*, quelle est la probabilité qu'il ne s'agisse pas du dé C ?

Réponse : a)

A: Le dé A est choisi.
B: Le dé B est choisi.
C: Le dé C est choisi.

D: Le dé présente 2 fois la face "6".



$$P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C)$$
$$= \frac{1}{36} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{17}{432} \approx 0{,}039$$

1,5

b) $P(\bar{C}|D) = P(A|D) + P(B|D)$

$$= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} + \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} + \frac{P(D|B) \times P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{36} \times \frac{1}{3}}{\frac{17}{432}} + \frac{\frac{1}{36} \times \frac{1}{3}}{\frac{17}{432}} = 2 \times \frac{432}{1836}$$

$$= \frac{8}{17} \approx 0{,}47$$

1,5

Question n° 3 : (4 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) **(1 point)** Déterminer la valeur de la constante k et calculer $P(X \geq 1/2)$.

b) **(3 points)** On considère une deuxième variable Y définie en fonction de X par

$$Y = 3 - 2X.$$

1.b) *(1,5 point)* Calculer la moyenne et la variance de Y, c'est-à-dire $E(Y)$ et $V(Y)$.

2.b) *(1,5 point)* Déterminer la fonction de répartition de Y, c'est-à-dire $F_Y(y)$, en précisant son domaine.

Réponse : a) Comme $f_X(x)$ est une fonction de densité, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Donc $\int_0^1 k(1-x)\,dx = 1 \iff \int_0^1 k\,dx - \int_0^1 kx\,dx = 1$

$\iff [kx]_0^1 - \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^1 = 1$

$\iff [k-0] - \left[\frac{k}{2} - 0\right] = 1$

$\iff \frac{k}{2} = 1 \implies \boxed{k=2}$

0,5 / 1

et $P(X \geq \frac{1}{2})$ ... ??

b) $Y = 3 - 2X$

1.b) $E(Y) = E(3-2X) = 3 - 2E(X)$ et $E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x(1-x)\,dx$

$= \int_0^1 2x\,dx - \int_0^1 2x^2\,dx$

$= \left[x^2\right]_0^1 - \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Donc $E(Y) = 3 - 2E(X) = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

Réponse (suite)

$V(Y) = V(3-2X) = (-2)^2 V(X) = 4V(X)$

$\frac{1}{1.5}$

et $V(X) = \int_0^1 2x^2(1-x)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx - \int_0^1 2x^3\,dx$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ $= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = E(X^2)$

Donc $V(Y) = \cancel{4V(X) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$

2.b) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3-2X \leq y) = P\left(-X \leq \frac{y-3}{2}\right)$

$= P\left(X \geq \frac{3-y}{2}\right)$

$= 1 - P\left(X \leq \frac{3-y}{2}\right)$

et $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x f_X(t)\,dt = x(2-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ ok

$\int_0^x 2-2t\,dt = \left[2t - t^2\right]_0^x = 2x - x^2 = x(2-x)$

Donc $F_Y(y) = 1 - P\left(X \leq \frac{3-y}{2}\right) = 1 - \frac{3-y}{2}\left(2 - \frac{3-y}{2}\right) = 1 - (3-y) + \frac{(3-y)^2}{4}$

$= y - 2 + \frac{9-6y+y^2}{4}$

$= \frac{y^2-2y+1}{4}$

Donc $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 1 \\ \frac{y^2-2y+1}{4} & \text{si } 1 \leq y \leq 3 \\ 1 & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$

$1/1.5$

T Bien

Question n° 4 : (4 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $Y \sim$ Binomiale(2; 0,4) et

x	0	1
$P(X = x)$	?	0,6

0,4

y	0	1	2
$P(Y = y \mid X = 0)$	0,3	0,4	?

0,3

a) **(2 points)** Déterminer la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$ sous la forme d'un tableau et calculer $P(X = 1 \mid Y = 0)$.

b) **(2 points)** Soit la variable aléatoire W définie par $W = 10 - 4X + 3Y$. Déterminer l'écart-type de W.

Réponse :

a)

y \ x	0	1	$P_Y(y)$
0	0,12 ✓	0,24 ✓	0,36
1	0,16 ✓	0,32 ✓	0,48
2	0,12 ✓	0,04 ✓	0,16
$P_X(x)$	0,4	0,6	1

$P(Y=y \mid X=0) = \frac{P(Y=y, X=0)}{P(X=0)}$

$\Rightarrow P(Y=y, X=0) = P(Y=y \mid X=0) \times P(X=0)$

Donc $P(Y=0, X=0) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

$P(Y=1, X=0) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$

$P(Y=2, X=0) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

$Y \sim B(2; 0,4) \Rightarrow P(Y=0) = C_0^2 \times 0,4^0 \times 0,6^2 = 0,36$

$P(Y=1) = C_1^2 \times 0,4^1 \times 0,6^1 = 0,48$

$P(Y=2) = C_2^2 \times 0,4^2 \times 0,6^0 = 0,16$

$P(X=1 \mid Y=0) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0,24}{0,36} = \frac{2}{3}$ ✓

b) $W = 10 - 4X + 3Y$

$V(W) = V(10 - 4X + 3Y) = 16\,V(X) + 9\,V(Y) + 2 \times (-4) \times 3 \times \mathrm{Cov}(X,Y)$

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0^2 \times 0,4 + 1^2 \times 0,6 - (0 \times 0,4 + 1 \times 0,6) = \cancel{0}$ −0.25 ; $E(X) = 0,6$ ✓ +0.25
- $V(Y) = 2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48$ ✓ ; $E(Y) = 0,8$ ✓ 0.25
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = 1 \times 1 \times 0,32 + 1 \times 2 \times 0,04 - 0,6 \times 0,8 = -0,08$ ✓

Donc $V(W) = 16\,V(X) + 9\,V(Y) + 2 \times (-4) \times 3 \times \mathrm{Cov}(X,Y) = 16 \times 0 + 9 \times 0,48 + 2 \times (-4) \times 3 \times (-0,08)$

$= \cancel{6,24}$ Donc $\sigma_W = \sqrt{6,24} \approx \cancel{2,5}$

Question nº 5 : (3 points)

On suppose que la durée fonctionnement d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle avec une moyenne de 80 heures.

a) **(1 point)** Quelle est la probabilité qu'un composant de ce type fonctionne pendant plus de 184 heures ?

b) **(1 point)** Cinq composants seront testés indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 des cinq composants fonctionnent pendant plus de 184 heures ?

c) **(1 point)** Supposons que les composants sont testés indépendamment l'un à la suite de l'autre. Quelle est la probabilité que l'on teste au moins quatre composants pour en avoir un premier qui dure plus de 184 heures ?

Réponse : X : durée de fonctionnement du composant.

a) $X \sim Exp(\lambda)$ et $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 80 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{80}$ Donc $X \sim Exp(\frac{1}{80})$

$P(X \geq 184) = e^{\frac{-184}{80}} = 0{,}1$

1

b) Y : nombre de composants parmi 5 qui fonctionnent plus de 184h.

$Y \sim B(5 ; P(X \geq 184))$

$\Rightarrow Y \sim B(5 ; 0{,}1)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$= 1 - C_0^5 \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^5 - C_1^5\, 0{,}1 \times 0{,}9^4$

$= 0{,}081$

1

c) W : nombre de composants testés jusqu'à obtenir un premier qui fonctionne plus de 184h.

$W \sim G(P(X > 184))$

$\Rightarrow W \sim G(0{,}1)$

$P(W \geq 4) = 1 - P(W=1) - P(W=2) - P(W=3)$

$= 1 - 0{,}1 - 0{,}9 \times 0{,}1 - 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}729$

1

Question n° 6 : (3 points)

Le fonctionnement d'un outil dans une production industrielle requiert l'utilisation d'un type de batterie (d'accumulateurs) dont la durée de vie utile (X) est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale de moyenne 6 heures et d'écart-type 0,5 heure.

a) **(1 point)** Quelle est la probabilité qu'une batterie de ce type dure pendant plus de 5 heures ?

b) **(2 points)** Sachant qu'une batterie de ce type est utilisée depuis 4,5 heures, quelle est alors la probabilité qu'elle dure en tout plus de 7 heures ?

Rappel : la table de la loi normale est en annexe.

Réponse : X : durée de vie utile d'un outil.

$X \sim N(6\,;\,0{,}5^2)$

a) $P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6}{0{,}5}\right)$

$= P(Z \geq -2)$

$= 1 - P(Z \leq -2)$

$= 1 - (1 - \Phi(2))$

$= \Phi(2)$

$= 0{,}977$

2

b) $P(X > 7 \mid X > 4{,}5) = \dfrac{P(X>7 \cap X>4{,}5)}{P(X>4{,}5)} = \dfrac{P(X>7)}{P(X>4{,}5)} = \dfrac{P(Z>2)}{P(Z>-3)}$

$= \dfrac{1-\Phi(2)}{\Phi(3)} = \dfrac{1-0{,}977}{0{,}998} = 0{,}023$

2