POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

[redacted]

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - AUTOMNE 2022

15

Nom : [redacted]
(lettres moulées)

Prénom : [redacted]
(lettres moulées)

No du cours : **MTH2302D** Section : [redacted]

Titre du cours : **PROBABILITÉS ET STATISTIQUE**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement le cahier.
2. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée.** La note **0** sera attribuée à toute réponse non justifiée.
3. N'utilisez que le **recto** pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon. Inscrivez votre **matricule** sur chaque page.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet. Vérifiez que le cahier compte bien **18 pages**.
6. **Documentation : 1 feuille résumée manuscrite 8,5x11 recto-verso.**
7. **Calculatrice non-programmable permise. Les appareils électroniques personnels (téléphones, tablettes, ordinateurs, etc.) sont interdits.**
8. ***Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question (données manquantes, données erronées, et.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.***

Réservé	
1.	2 /2
2.	2.75 /3
3.	3 /4
4.	3 /3
5.	1,75 /4
6.	3 /4
TOTAL	15,5 **/20**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

[redacted]

Signature de l'étudiant(e)

Date : samedi, le 22 octobre 2022

Heure : 10h00 à 12h00

Polytechnique Montréal
Département de mathématiques et de génie industriel
MTH2302D - Probabilités et statistique
Contrôle périodique - Automne 2022 [redacted]

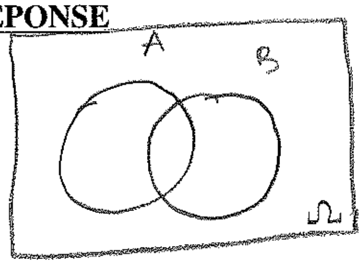
QUESTION N° 1 (2 points)

Soient A et B deux événements indépendants tels que

$$P(A) = P(B) = p \text{ et } P(A \cap B) = 2 \times P(\overline{A} \cap B).$$

Déterminer les valeurs possibles de p.

RÉPONSE



A et B sont 2 évènement indépendants

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ainsi $P(A) \cdot P(B) = 2 \times P(\bar{A} \cap B)$

$\Rightarrow p^2 = 2 \times P(\bar{A} \cap B)$

$\Rightarrow p^2 = 2 \times (P(B) - P(A \cap B))$

$\Rightarrow p^2 = 2 \times (p - p^2)$

$\Rightarrow p^2 = 2p - 2p^2$

$\Rightarrow 3p^2 - 2p = 0$

$\Rightarrow p(3p - 2) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times 0 = 4$

$p_1 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4}}{6}$

$p_1 = \dfrac{2+2}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$p_2 = \dfrac{2-2}{6} = 0$

$p = \dfrac{2}{3}$ ou $p = 0$

✓ 2

QUESTION N° 1 (suite)

QUESTION N° 2 (3 points)

Dans une certaine unité de production, plusieurs années d'observations montrent que 40% des pièces produites sont de qualité excellente, 50% sont de qualité acceptable et 10% sont de qualité inacceptable. Si une pièce est de qualité excellente, elle a une probabilité de 95% de fonctionner sans problème (durant une période donnée). Par contre, si une pièce est de qualité acceptable, elle a une probabilité de 80% de fonctionner ; si elle est de qualité inacceptable, cette probabilité est de 25%.

a) **(1 point)** Quelle est la probabilité qu'une pièce soit de qualité acceptable, étant donné qu'elle a fonctionné sans problème ?

b) **(2 points)** On choisit au hasard cinq pièces parmi celles qui ont fonctionné sans problème. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux pièces (parmi les cinq) qui sont de qualité excellente ?

RÉPONSE

40% → excellente
50% → acceptable
10% → inacceptable

E : pièce qualité excellente
A : pièce qualité acceptable
I : pièce qualité inacceptable
F : fonctionner normalement

$P(E) = 0,4 \quad P(A) = 0,5 \quad P(I) = 0,1$

$P(F|E) = 0,95 \quad P(F|A) = 0,8 \quad P(F|I) = 0,25$

a) Trouvons $P(A|F)$ → loi de Baye.

$$P(A|F) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|A)\cdot P(A)}{P(F)}$$

$$P(F) = P(F|E)\cdot P(E) + P(F|A)\cdot P(A) + P(F|I)\cdot P(I) \quad (L.P.T)$$

$P(F) = 0,95 \times 0,4 + 0,8 \times 0,5 + 0,25 \times 0,1$

$P(F) = 0,805$

$$P(A|F) = \frac{P(F|A)\cdot P(A)}{P(F)} = \frac{0,8\times 0,5}{0,805} \approx 0,497$$

1

 [redacted]

QUESTION N° 2 (suite)

f) On choisit au hasard 5 pièces parmi celle qui ont fonctionné

~~$P(F) = 0{,}805$ Posons 805 éléments qui fonctionne~~
~~On tire 5 éléments~~
~~quelle est la proba que c'est de qualité excellent~~

~~$P(E|F) = \frac{0{,}95 \times 0{,}4}{0{,}805} \approx 0{,}472$~~

Posons 805 éléments qui fonctionnent parmis lesquel $P(E|F) \approx 0{,}472$ 47,2 % soit ≈ 380 sont de classes excellentes

$X \sim H(\overset{N}{805}, \overset{n}{5}, \overset{D}{380})$

B

$P(X=1) = \frac{C_1^{380} \cdot C_4^{425}}{C_5^{805}} \approx 0{,}183$ $\boxed{P(X=0) = \frac{C_0^{380} \cdot C_5^{425}}{C_5^{805}} \approx 0{,}0405}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$
$= 1 - (0{,}183 + 0{,}0405)$
$\boxed{\approx 0{,}7765}$

-0.25

QUESTION N° 2 (suite)

[redacted]

QUESTION N° 3 (4 points)

Soit X une variable aléatoire continue, de fonction de répartition

3

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{k+1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

où k est une constante telle que $k > -1$ et $E(X) = 0{,}5$.

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = (0{,}3 - X)^2$.

1.b) (2 points) Calculer la probabilité $P(Y \geq 0{,}04)$.

2.b) (1 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) $E(X) = 0{,}5 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx = 0{,}5.$

$f_X(x) = F_X'(x)$

Pour $x < 0$ $f_X(x) = 0$

Pour $0 \leq x < 1 : f_X(x) = F_X'(x) = (k+1)x^k$

Pour $x \geq 1 : f_X(x) = F_X'(x) = 0.$

$$f_X(x) = \begin{cases} (k+1)x^k & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[redacted]

QUESTION N° 3 (suite)

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (k+1)x^k\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \left[x^{k+1}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow 1^{k+1} - 0^{k+1} = 1$$

$$E(X) = 0,5$$

$$\int_0^1 x(k+1)x^k\,dx = 0,5$$

$$\int_0^1 (k+1)x^{k+1}\,dx = 0,5$$

$$\left[\frac{k+1}{k+2}x^{k+2}\right]_0^1 = 0,5$$

$$\frac{k+1}{k+2}\cdot 1^{k+2} - 0 = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{k+1}{k+2} = 0,5$$

$$\Rightarrow k+1 = \frac{1}{2}k + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 0}$$

[redacted]

QUESTION N° 3 (suite)

$\underline{1}$ b) $Y = (0{,}3 - X)^2$

$Y = 0{,}09 - 0{,}6X + X^2$

$P(Y \geq 0{,}04) = P((0{,}3 - X)^2 \geq 0{,}04)$

$= P(0{,}3 - X \geq 0{,}02)$??

$= P(0{,}28 \geq X)$

$= 1 - P(X < 0{,}28)$

$= 1 - F_X(0{,}28)$

$= 1 - 0{,}28^{k+1}$

$= 1 - 0{,}28^1 = 0{,}72$

2b) $E(Y) = E(0{,}09 - 0{,}6X + X^2)$

$= -0{,}6E(X) + E(X^2) + 0{,}09$

$E(X) = 0{,}5$

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 (k+1) x^k \, dx = \int_0^1 (k+1) x^{k+2} \, dx$

$= \int_0^1 x^2 \, dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1}$

$= \frac{1}{3}$

$E(Y) = -0{,}6 \times 0{,}5 + \frac{1}{3} + 0{,}09 \approx 0{,}123$

[redacted]

QUESTION N° 4 (3 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \sim \texttt{Bernoulli}(0{,}4), Y \sim \texttt{Binomiale}(2;\ 0{,}6)$ et

3

y	0	1	2
$P(Y = y \mid X = 1)$	0,3	0,2	? 0,5

a) (1 point) Déterminer la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$ sous la forme d'un tableau.

b) (2 points) Soit la variable aléatoire T définie par $T = 5 - X + 2Y$. Déterminer l'écart-type de T.

RÉPONSE

a)

$x \backslash y$	0	1	2	$P_X(x)$
0	0,04	0,4	0,16	0,6
1	0,12	0,08	0,2	0,4
$P_Y(y)$	0,16	0,48	0,36	1

$X \sim \text{Bernoulli}(0,4)$

$X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$P_X(0) = 1 - 0,4 = 0,6$

$P_X(1) = 0,4$

$P(Y=0 \mid X=1) = \dfrac{P(Y=0 \cap X=1)}{P(X=1)} \Rightarrow 0,3 = \dfrac{P(Y=0 \cap X=1)}{0,4}$

$\Rightarrow P(Y=0 \cap X=1) = 0,12$

$P(Y=1 \mid X=1) = \dfrac{P(Y=1 \cap X=1)}{P(X=1)} \Rightarrow P(Y=1 \cap X=1) = P(Y=1 \mid X=1) \times P(X=1)$

$\Rightarrow P(Y=1 \cap X=1) = 0,2 \times 0,4$

$P(Y=2 \mid X=1) = \dfrac{P(Y=2 \cap X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{0,2}{0,4} = 0,5$

$P(Y=0) = C_0^2 \times 0,6^0 \times 0,4^{2-0} = 0,16$

$P(Y=1) = 0,48$

$P(Y=2) = 0,36$

[redacted]

QUESTION N° 4 (suite)

b) $T = 5 - X + 2Y$ trouvons σ_T.

Calculons d'abord la variance.

$V(T) = (-1)^2 V(X) + 2^2 V(Y) - 4\,cov(X,Y)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0,4 - (0,4)^2 = 0,24$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = [0,48 + 2^2 \times 0,36] - (2 \times 0,6)^2 = 0,48$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$= 0,48 - 0,4 \times 1,2$
$= 0$

$V(T) = 0,24 + 4 \times 0,48 - 4 \times 0 = 2,16$

$\sigma_T = \sqrt{V(T)} = \sqrt{2,16} \simeq 1,4697$

[redacted]

QUESTION N° 4 (suite)

QUESTION N° 5 (4 points)

$\frac{1,75}{4}$

Un serveur informatique est utilisé pour le traitement de certaines requêtes en réseau. Ce serveur reçoit en moyenne trois requêtes par minute et ce, selon un processus de Poisson.

a) **(1 point)** Quelle est la probabilité que le serveur reçoive au moins 2 requêtes lors des 30 prochaines secondes ?

b) **(1 point)** Quelle est la probabilité que le serveur attende plus de 20 secondes en tout pour recevoir une première requête sachant qu'aucune requête n'a été reçue durant les 5 premières secondes ?

c) **(2 points)** Sachant que le serveur a reçu exactement 3 requêtes en une minute, quelle est la probabilité qu'il ait reçu exactement une requête durant les 30 premières secondes de cette minute ?

RÉPONSE

X : nombre de requête par minute $E(X) = \lambda = 3$

$X \sim P(3)$

a) Y : nombre de requête par 30s $\frac{1}{1}$ $Y \sim P(\frac{3}{2})$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$$
$$= 1 - (P(Y=0) + P(Y=1))$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2}^0}{0!} + \frac{e^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2}^1}{1!}\right)$$
$$\approx 0,4422$$

c'est qui Z ??

b) $X \sim P(3) \Longrightarrow Z \sim Exp(3)$ $\frac{1}{4}$ de 1 minute

$$P(Z > 20 \mid Z > 5) = P(Z > 15)$$
$$= 1 - P(Z \leq \frac{3}{4})$$
$$= 1 - \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}x} \, dx$$
$$= 1 - (1 - e^{-\frac{3}{4} \cdot 3}) \approx 0,105...$$

?? $\frac{0,5}{1}$

[redacted]

QUESTION N° 5 (suite)

c) sachant 3 requête par min. 1 requête durant les 30 première secondes.

$$P(Y=1 \mid X=3) = \frac{P(Y=1 \cap X=3)}{P(X=3)}$$

?

$$= \frac{\quad}{0,224}$$

?

$\frac{0,25}{2}$

QUESTION N° 5 (suite)

[redacted]

QUESTION N° 6 (4 points)

$\frac{3}{4}$

On suppose que la durée de vie (en années) d'un certain type de composant est une variable aléatoire X distribuée selon une loi exponentielle telle que $P(X > 3) = 0{,}05$.

a) (2 points) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X > 2 \mid 1 \leq X < 3)$.

b) (2 points) Cinq composants de ce type sont mis en fonction et opèrent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que deux ans plus tard au moins deux des cinq composants fonctionnent encore ?

RÉPONSE

a) $P(X>3) = 0{,}05 \Rightarrow 1 - P(X \leq 3) = 0{,}05$

$\Rightarrow 1 - (1 - e^{-\lambda 3}) = 0{,}05$

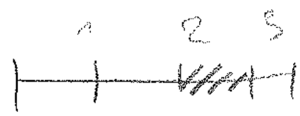
$\Rightarrow e^{-\lambda 3} = 0{,}05$

$\Rightarrow -\lambda 3 = \ln(0{,}05)$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(0{,}05)}{3} \approx +0{,}9986$ ⊙!!

$X \sim Exp(0{,}9986)$

$$P(X>2 \mid 1 \leq X < 3) = \frac{P(X > 2 \cap 1 \leq X < 3)}{P(1 \leq X < 3)}$$



$$= \frac{P(2 < X < 3)}{P(1 \leq X < 3)}$$

$\frac{1}{2}$

$$= \frac{\int_2^3 0{,}9986 \cdot e^{-0{,}9986 x}\, dx}{\int_1^3 0{,}9986 \cdot e^{-0{,}9986 x}\, dx} = \frac{\left[-e^{-0{,}9986 x}\right]_2^3}{\left[-e^{-0{,}9986 x}\right]_1^3}$$

de proba négatives!!

$$= \frac{-0{,}18571}{-0{,}41839} \approx \cancel{0{,}4439}$$

[redacted]

QUESTION N° 6 (suite)

b) $n = 5$ composantes qui fonctionne indépendamment

$$Y \sim Bin(5, p)$$

$$p = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-0,9986 \times 2})$$

$\approx 0,1357$ fonctionne après 2 ans

$Y \sim Binomiale(5; 0,1357)$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$$

$$= 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)]$$

$$= 1 - (C_0^5 \times 0,1357^0 \times 0,8643^5 + C_1^5 \times 0,1357^1 \times 0,8643^4)$$

$$= 1 - (0,4823 + 0,378623)$$

$$\approx 0,1391$$

2/2

QUESTION N° 6 (suite)

[redacted]

Page supplémentaire