

Question 1 : Systèmes de numération**(3/20 points)**

Considérez les nombres a, b, c et d exprimés en binaires sur 8 bits :

a = 0110 0110

b = 1110 0110

c = 1000 1010

d = 1110 1001

1.1) **(0.5 point)** Exprimez les nombres a et d en hexadécimal.

a = 0x66

d = 0xE9_

1.2) **(0.5 point)** Donnez la valeur décimale des nombres b et c si une représentation non-signée est utilisée.

b = 230

c = 138

1.3) **(1 point)** Donnez la valeur décimale des nombres a, b, c et d si une représentation signée (complément à 2) est utilisée.

a = +102

b = -26

c = -118

d = -23

1.4) **(1 point)** Donnez en binaire le résultat des opérations a + c et c + d si une représentation signée (complément à 2) est utilisée. Le résultat doit être sur 8 bits. Indiquez si l'opération arithmétique cause un débordement signé ou pas.

a + c = 1111 0000

Débordement? OUI

NON ✓

c + d = 0111 0011

Débordement? OUI ✓

NON

Question 2 : Algèbre de Boole**(3/20 points)**

Soient a , b , c et d des variables logiques.

Rappel : $x \oplus y = x'y + xy'$, et $x \otimes y = (x \oplus y)' = x'y' + xy$.

2.1) **(1.5 point)** En utilisant l'algèbre de Boole, démontrer l'assertion suivante :

$$ab + ac + bc = a(b \oplus c) + bc$$

$$\begin{aligned} ab + ac + bc &= a(b + c) + bc \\ &= a(b'c + bc' + bc) + bc \\ &= a(b'c + bc') + abc + bc \\ &= a(b'c + bc') + \underline{abc + bc} \\ &= a(b \oplus c) + \underline{bc} \end{aligned}$$

2.2) **(1.5 point)** En utilisant l'algèbre de Boole, démontrer l'assertion suivante.

$$a(b \oplus c) + bc = b(a \oplus c) + ac$$

$$\begin{aligned} a(b \oplus c) + bc &= a(b'c + bc') + bc \\ &= ab'c + abc' + bc \\ &= ab'c + abc' + (a' + a)bc \\ &= ab'c + abc' + a'bc + abc \\ &= \underline{ab'c} + abc' + a'bc + \underline{abc} \\ &= abc' + a'bc + \underline{ab'c} + \underline{abc} \\ &= b(ac' + a'c) + \underline{ac(b' + b)} \\ &= b(a \oplus c) + \underline{ac} \end{aligned}$$

Question 3 : Décomposition de Shannon**(3/20 points)**

Soit la fonction logique $F(a, b, c)$, décrite par la table de vérité suivante :

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3.1) **(1 point)** Donnez la forme disjonctive de la décomposition de Shannon de $F(a, b, c)$ selon a.

$$F(a, b, c) = a' (b \oplus c) + a (b \otimes c)$$

Des expressions moins compactes peuvent être acceptées si elles respectent la décomposition de Shannon.

3.2) **(1 point)** Donnez la forme disjonctive de la décomposition de Shannon de $F(a, b, c)$ selon b.

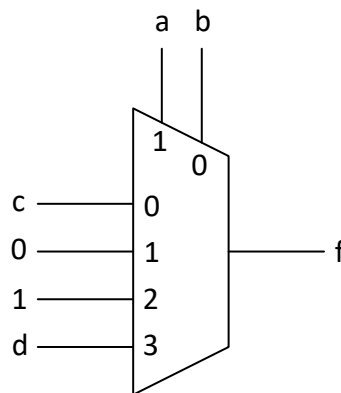
$$F(a, b, c) = b' (a \oplus c) + b (a \otimes c)$$

Des expressions moins compactes peuvent être acceptées si elles respectent la décomposition de Shannon.

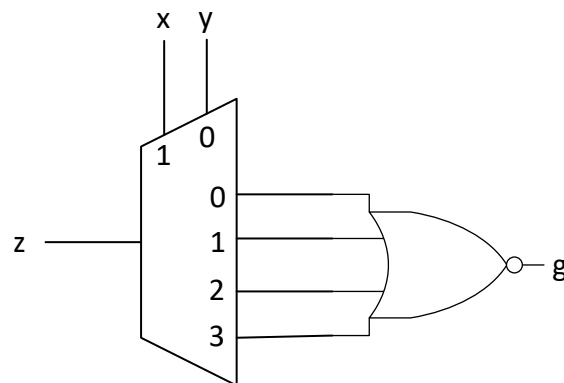
3.3) **(1 point)** Donnez la forme disjonctive de la décomposition de Shannon de $F(a, b, c)$ selon c.

$$F(a, b, c) = c' (a \oplus b) + c (a \otimes b)$$

Des expressions moins compactes peuvent être acceptées si elles respectent la décomposition de Shannon.

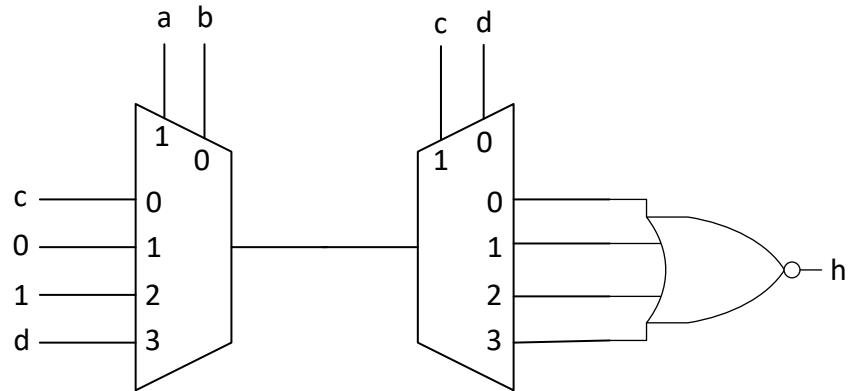
Question 4 : Circuits usuels**(3/20 points)**4.1) (1 point) Exprimez la fonction $f(a, b, c, d)$ du circuit suivant sous la forme d'un produit de *maxterms* :

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c, d) &= a'b'c + ab' + abd = 001- + 10-- + 11-1 \\
 &= \sum m(2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 15) \\
 &= \prod M(0, 1, 4, 5, 6, 7, 12, 14)
 \end{aligned}$$

4.2) (1 point) Exprimez la fonction $g(x, y, z)$ du circuit suivant sous la forme d'une somme de *minterms* :

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) &= (z(x'y') + z(x'y) + z(xy') + z(xy))' \\
 &= (zx'(y' + y) + zx(y' + y))' = (zx' + zx)' \\
 &= (z(x' + x))' = (z)' = z' = -0 \\
 &= \sum m(0, 2, 4, 6)
 \end{aligned}$$

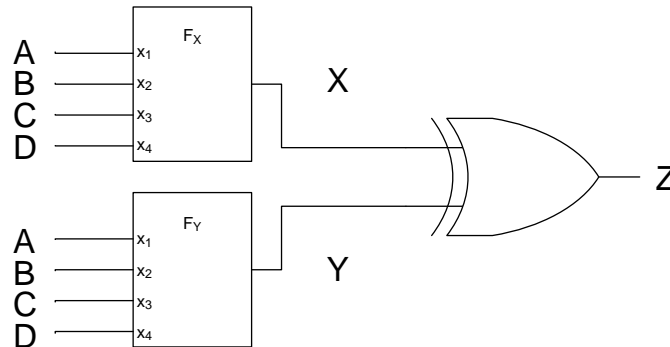
4.3) (1 point) Exprimez la fonction $f_h(a, b, c, d)$ du circuit suivant sous la forme d'un produit de *maxterms* :



$$h(a, b, c, d) = (f_h(a, b, c, d))' = \prod M(2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

Question 5 : Optimisation de circuit**(6/20 points)**

L'implantation d'une fonction logique **Z** relativement complexe repose sur la combinaison par un XOR de deux fonctions F_X et F_Y , tel qu'indiqué par le schéma suivant :



La fonction F_X est spécifiée par sa table de vérité :

A	B	C	D	F_X
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

La fonction F_Y est donnée par la table de Karnaugh suivante.

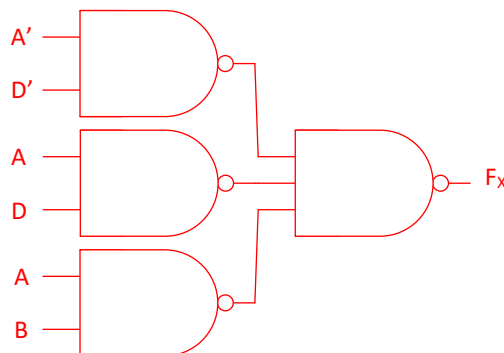
AB/CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	1
10	1	0	1	0

5.1) **(1 point)** Donnez l'expression disjonctive simplifiée de F_X en vous aidant de la table de Karnaugh ci-après.

$$F_X = A'D' + AD + AB$$

AB/CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

5.2) **(0.5 point)** Dessinez ci-après le circuit implémentant l'expression disjonctive simplifiée de F_X au moyen de portes NON-ET uniquement. Supposez que vous avez accès en entrée à toutes les variables et leur inverse.



5.3) **(0.5 point)** Donnez le coût du circuit trouvé en 5.2) 4.2). Justifiez votre résultat par un calcul.

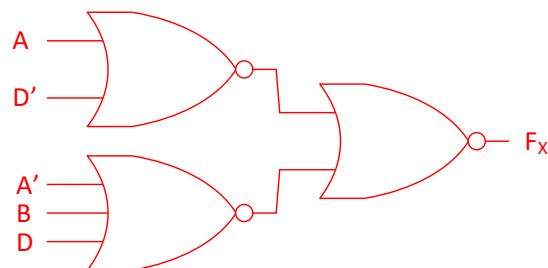
$$3(2+1) + 3 + 1 = 13$$

5.4) **(1 point)** Donnez l'expression conjonctive simplifiée de F_X en vous aidant de la table de Karnaugh ci-après.

$$F_X = (A + D')(A' + B + D)$$

AB/CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

5.5) **(0.5 point)** Dessinez ci-après le circuit implémentant l'expression conjonctive simplifiée de F_X au moyen de portes NON-OU uniquement. Supposez que vous avez accès en entrée à toutes les variables et leur inverse.



5.6) **(0.5 point)** Donnez le coût du circuit trouvé en 5.5) 4.5). Justifiez votre résultat par un calcul.

$$2(2+1) + 3 + 1 = 10$$

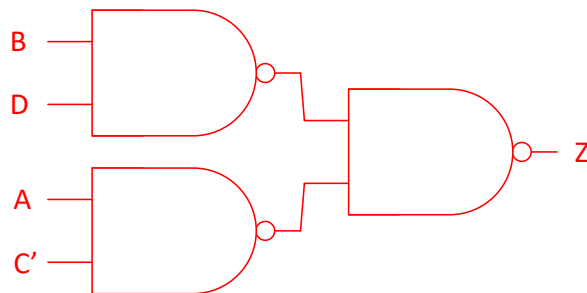
5.7) (1 point) Lequel des circuits implémentant X des NON-ET ou des NON-OU discuté en 5.3 et 5.6 devrait être préféré. Justifiez clairement votre réponse.

L'option conjonctive est préférable puisqu'elle est moins chère.

5.8) (1 point) En vous aidant de la table de Karnaugh suivante, proposez un circuit optimisé implémentant Z en utilisant uniquement des NON-ET ou des NON-OU (mais pas les deux). Supposez que vous avez accès en entrée à toutes les variables et leur inverse.

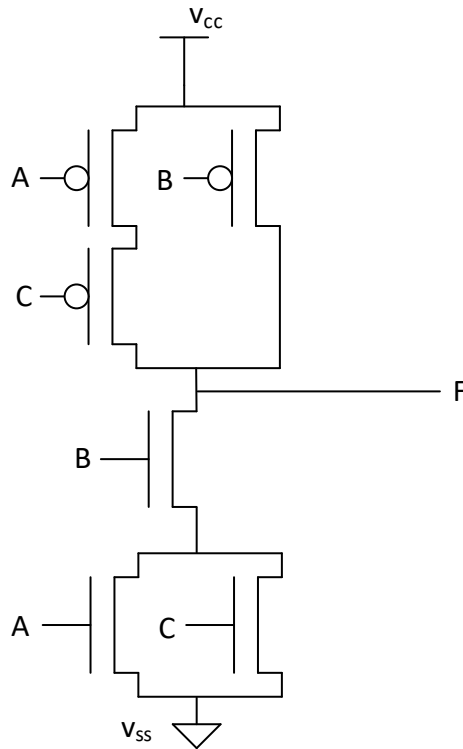
AB/CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

Dessinez le circuit optimisé.



Question 6 : Circuit CMOS**(2/20 points)**

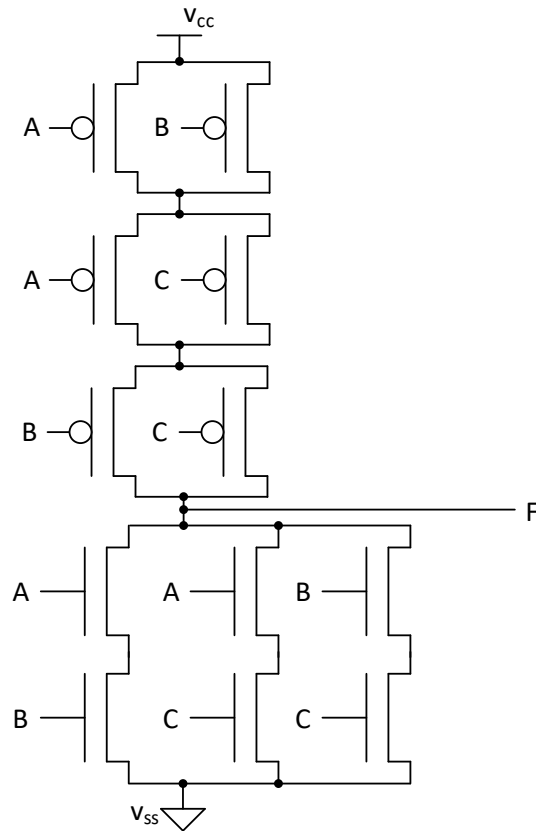
Considérez le circuit CMOS suivant :



6.1) **(1 point)** Complétez la table de vérité de la fonction F. Vous pouvez vous aider des colonnes NMOS et PMOS. Notez cependant que seule la colonne F sera évaluée.

A	B	C	NMOS	PMOS	F
0	0	0			1
0	0	1			1
0	1	0			1
0	1	1			0
1	0	0			1
1	0	1			1
1	1	0			0
1	1	1			0

Considérez le circuit CMOS suivant :



6.2) (1 point) Complétez la table de vérité de la fonction F. Vous pouvez vous aider des colonnes NMOS et PMOS. Notez cependant que seule la colonne F sera évaluée.

A	B	C	NMOS	PMOS	F
0	0	0			1
0	0	1			1
0	1	0			1
0	1	1			0
1	0	0			1
1	0	1			0
1	1	0			0
1	1	1			0