MTH2302D - TD 2

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

La demande quotidienne d'un produit peut être de -1, 0, $+1$ ou $+2$, avec des probabilités respectives de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{10}$. Une demande de -1 signifie qu'une unité du produit a été retournée.

a) Déterminez la demande quotidienne moyenne.

b) Sachant que $E(X^2) = \frac{9}{5}$, calculez l'écart-type de la demande quotidienne.

c) Tracez le graphique de la fonction de masse de la demande quotidienne.

d) Tracez le graphique de la fonction de répartition de la demande quotidienne.

- $\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$
- $$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x) \\ &= E((X - \mu_X)^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Ex. 1 - Réponse

Déterminez la demande quotidienne moyenne.

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$
$$= -1 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$$

x	-1	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

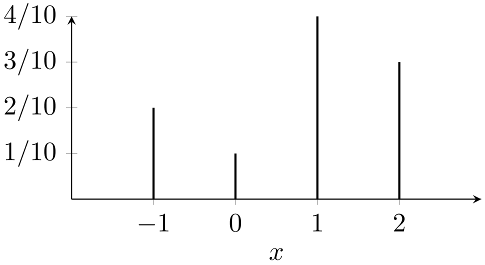
$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$
$$= E((X - \mu_X)^2)$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

Sachant que $E(X^2) = \frac{9}{5}$, calculez l'écart-type.

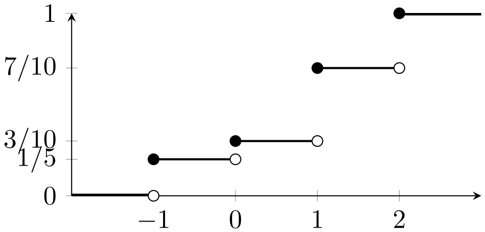
$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \frac{9}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{29}{25}$$
$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{29}{25}}$$

Ex. 1 - Réponse

Tracez la fonction de masse.



Tracez la fonction de répartition.



x	-1	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x) \\ &= E((X - \mu_X)^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Ex. 2 - Énoncé

Soit la fonction de densité définie ci-dessous.

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ k(4-x) & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la valeur de k qui fait en sorte que f soit une fonction de densité.

b) Tracez le graphique de la fonction de densité.

c) Calculez la probabilité conditionnelle que X soit inférieur à 1, sachant que X est inférieur à 2.

d) Déterminez la moyenne et la variance de X.

e) Définissez la fonction de répartition de X.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'$
- $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$
- $\sigma_X^2 = E((X-\mu_X)^2)$
  $= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Ex. 2 - Réponse

Déterminez k pour que f soit une fonction de densité.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^2 kx\,\mathrm{d}x + \int_2^4 k(4-x)\,\mathrm{d}x + 0 \\
&= \left.\frac{kx^2}{2}\right|_{x=0}^{x=2} + \left.k\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{x=2}^{x=4} \\
&= \frac{4k}{2} - 0 + k\left(16 - 8 - \frac{16-4}{2}\right) = 4k \\
\Rightarrow k &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

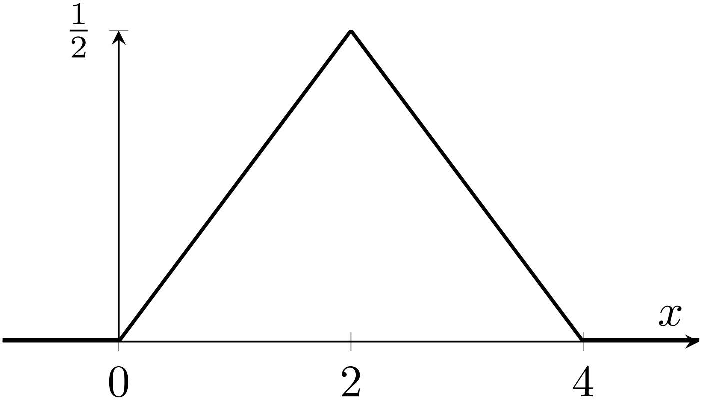
$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'
\end{aligned}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= E((X-\mu_X)^2) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

Ex. 2 - Réponse

Tracez le graphique de la fonction de densité.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x' \end{aligned}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= E((X-\mu_X)^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Ex. 2 - Réponse

Calculez $P(X \leq 1 | X \leq 2)$.

$$P(X \leq 1 | X \leq 2) = \frac{P((X \leq 1) \cap (X \leq 2))}{P(X \leq 2)}$$
$$= \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)} = \frac{F_X(1)}{F_X(2)}$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{0 + \int_0^1 \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x}{0 + \int_0^2 \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{\frac{x^2}{8}\Big|_{x=0}^{x=1}}{\frac{x^2}{8}\Big|_{x=0}^{x=2}} = \frac{\frac{1}{8} - 0}{\frac{4}{8} - 0} = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = E((X - \mu_X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ex. 2 - Réponse

Déterminez la moyenne μ_X et la variance σ_X^2 de X.

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^2 x \cdot \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 x \cdot \frac{4-x}{4}\,\mathrm{d}x + 0 \\
&= \left.\frac{x^3}{12}\right|_{x=0}^{x=2} + \frac{1}{4}\left.\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{x=2}^{x=4} \\
&= \frac{8}{12} - 0 + \frac{1}{4}\left(2(16-4) - \frac{64-8}{3}\right) = 2
\end{aligned}
$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= E((X-\mu_X)^2) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}
$$

Ex. 2 - Réponse

Déterminez la moyenne μ_X et la variance σ_x^2 de X.

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x - \mu_X^2 \\
&= 0 + \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 x^2 \cdot \frac{4-x}{4}\,\mathrm{d}x + 0 - 2^2 \\
&= \frac{x^4}{16}\bigg|_{x=0}^{x=2} + \frac{1}{4}\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\bigg|_{x=2}^{x=4} - 4 \\
&= \frac{16}{16} - 0 + \frac{1}{4}\left(\frac{4(64-8)}{3} - \frac{256-16}{4}\right) - 4 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'
\end{aligned}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= E((X - \mu_X)^2) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

Ex. 2 - Réponse

Définissez la fonction de répartition F_X de X.

$$\text{Si } x < 0,\; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}x' = 0$$

$$\text{Si } x \in [0,2],\; F_X(x) = 0 + \int_0^x \frac{x'}{4}\mathrm{d}x'$$

$$= \left.\frac{x'^2}{8}\right|_{x'=0}^{x'=x} = \frac{x^2}{8} - 0 = \frac{x^2}{8}$$

$$\text{Si } x \in [2,4],\; F_X(x) = F_X(2) + \int_2^x \frac{4-x'}{4}\mathrm{d}x'$$

$$= \frac{4}{8} + \frac{1}{4}\left.\left(4x' - \frac{x'^2}{2}\right)\right|_{x'=2}^{x'=x} = -\frac{x^2}{8} + x - 1$$

$$\text{Si } x > 4,\; F_X(x) = F_X(4) + \int_4^x 0 \,\mathrm{d}x' = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = E((X-\mu_X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ex. 2 - Réponse

Définissez la fonction de répartition F_X de X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{8} & \text{si } x \in [0,2], \\ -\dfrac{x^2}{8} + x - 1 & \text{si } x \in [2,4], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérification :

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{si } x \in [0,2], \\ -\dfrac{4-x}{4} + x - 1 & \text{si } x \in [2,4], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x'$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

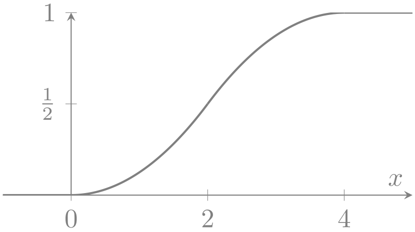
$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = E((X-\mu_X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ex. 2 - Réponse

Définissez la fonction de répartition F_X de X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{8} & \text{si } x \in [0,2], \\ -\dfrac{x^2}{8} + x - 1 & \text{si } x \in [2,4], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérification :



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,\mathrm{d}x' \end{aligned}$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= E((X - \mu_X)^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Ex. 3 - Énoncé

Une variable aléatoire X a un écart type égal à 1 et sa densité de probabilité f_X est une fonction constante sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$, avec $\theta > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la valeur de θ.
b) Calculez la moyenne de X.
c) Déterminez la fonction de répartition F_X.

- $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$
- $\mu_X = E(X), \quad \sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x') \mathrm{d}x'$

Ex. 3 - Réponse

Déterminez la valeur de θ telle que $\sigma_X = 1$.

$$\begin{aligned}
\mu_X &= E(X) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-\theta} x \cdot 0 \, \mathrm{d}x + \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta} \mathrm{d}x + \int_{\theta}^{\infty} x \cdot 0 \, \mathrm{d}x \\
&= \left. \frac{x^2}{4\theta} \right|_{x=-\theta}^{x=\theta} = \frac{\theta^2}{4\theta} - \frac{(-\theta)^2}{4\theta} = 0
\end{aligned}$$

Écart-type $\sigma_X = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \le x \le \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$$

$$\mu_X = E(X),$$

$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$$

Ex. 3 - Réponse

Déterminez la valeur de θ telle que $\sigma_X = 1$.

$$\mu_X = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E((X - \mu_X)^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta} \mathrm{d}x + 0 \\
&= \left. \frac{x^3}{6\theta} \right|_{x=-\theta}^{x=\theta} = \frac{\theta^3}{6\theta} - \frac{(-\theta)^3}{6\theta} = \frac{\theta^2}{3} = 1^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{3}$$

Écart-type $\sigma_X = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$$
$$\mu_X = E(X),$$
$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$$

Ex. 3 - Réponse

Calculez la moyenne de X. (Déjà fait!)

$$\mu_X = 0$$

Écart-type $\sigma_X = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$$

$$\mu_X = E(X),$$

$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$$

Ex. 3 - Réponse

Déterminez la fonction de répartition F_X.

Écart-type $\sigma_X = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'$$

Si $x < -\sqrt{3}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}x' = 0$$

Si $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$,

$$F_X(x) = 0 + \int_{-\sqrt{3}}^{x} \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{d}x'$$

$$= \left.\frac{x}{2\sqrt{3}}\right|_{x'=-\sqrt{3}}^{x'=x} = \frac{x}{2\sqrt{3}} - \frac{(-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

Si $x > \sqrt{3}$,

$$F_X(x) = F_X(\sqrt{3}) + \int_{\sqrt{3}}^{x} 0\,\mathrm{d}x' = 1$$

Ex. 3 - Réponse

Déterminez la fonction de répartition F_X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\sqrt{3}, \\ \dfrac{x}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Écart-type $\sigma_X = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \le x \le \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x' \end{aligned}$$

Vérification :

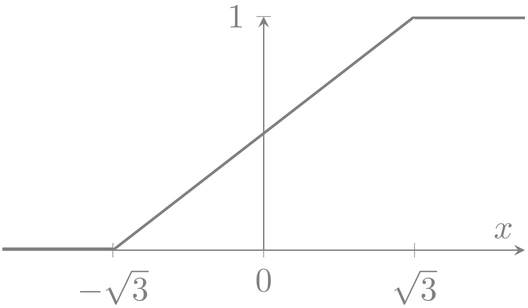
$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\sqrt{3}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}} & \text{si } x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ex. 3 - Réponse

Déterminez la fonction de répartition F_X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\sqrt{3}, \\ \dfrac{x}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérification 2 :



Écart-type $\sigma_X = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & \text{si } -\theta \le x \le \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx'$$

$0 \le F_X(x) \le 1$

$F_X(x)$ non décroissante

$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Ex. 4 - Énoncé

Un manufacturier d'appareils de télévision offre une garantie d'un an sur l'écran LCD. Il estime que la durée (année) avant la première panne est une variable T dont la densité de probabilité f_T est définie par :

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-t/4} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez le pourcentage des appareils qui seront réparés durant la période de garantie.

b) Si une vente rapporte un profit de 200\$ et que le coût de réparation est de 200\$, quel est le profit moyen réalisé ?

- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'$
- Y discrète avec $Y = H(X)$ et X continue
  $\Rightarrow p_Y(y) = \int_{\{x:H(x)=y\}} f_X(x)\mathrm{d}x$
- $\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$

Ex. 4 - Réponse

P(un appareil sera réparé durant la période de garantie)

$$P(T \leq 1) = F_T(1)$$
$$= \int_{-\infty}^{1} f_T(t)\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-t/4}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\frac{e^{-t/4}}{-\frac{1}{4}}\Bigg|_{t=0}^{t=1} = -e^{-1/4} - (-e^{-0/4})$$
$$= 1 - e^{-1/4} \approx 0.221 = 22.1\%$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-t/4} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

vente: 200\$, réparation:-200\$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'$$

Y discrète, X continue
et $Y = H(X)$
$$\Rightarrow p_Y(y) = \int_{\{x:H(x)=y\}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$$

Ex. 4 - Réponse

$$E(Y) = \mu_Y \text{ où } Y\text{: profit}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-t/4} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = H(T) = \begin{cases} 200 & \text{si } T > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

vente: 200\$, réparation:-200\$

$$p_Y(0) = P(Y = 0) = P(T \leq 1) = F_T(1) \approx 0.221$$

$$p_Y(200) = P(Y = 200) = P(T > 1) = 1 - P(T \leq 1)$$
$$\approx 1 - 0.221 = 0.779$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\mathrm{d}x'$$

Y discrète, X continue
et $Y = H(X)$

$$\Rightarrow p_Y(y) = \int_{\{x:H(x)=y\}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$$
$$= 0 \cdot p_Y(0) + 200 \cdot p_Y(200) \approx 200 \cdot 0.779 = 155.80\$$$

$$\mu_Y = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y)$$

Ex. 5 - Énoncé

Un lot de 10 articles contient 3 articles défectueux. On tire sans remise les articles un à la fois et on examine à chaque tirage si l'article est défectueux ou non. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'articles tirés afin d'obtenir un deuxième article défectueux.

a) Déterminez la fonction de masse p_X.
b) Déterminez la fonction de répartition F_X.
c) Calculez la moyenne et l'écart type de X.

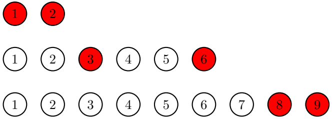
- $R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $p_X(x) = P(X = x)$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$
- $\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x), \quad \sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$

Ex. 5 - Réponse

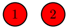
Déterminez la fonction de masse p_X.

10 articles, 3 défectueux

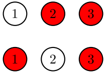
X: nb d'articles tirés pour en tirer un 2e article défectueux



$$R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



$$p_X(2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$



$$p_X(3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = 2\,\frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{60}$$

$$\begin{aligned} R_X &= \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} \\ &= \{x_1, \ldots, x_n\} \end{aligned}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

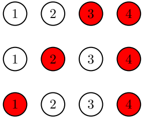
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

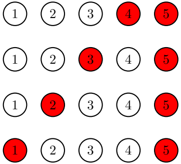
$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$

Ex. 5 - Réponse

Déterminez la fonction de masse p_X.



$$p_X(4) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7} = 3\,\frac{7\cdot 6\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{3}{20}$$



$$p_X(5) = \underbrace{4}_{\substack{\text{nb de façons de}\\ \text{placer le 1er défect.}\\ \text{parmi les } n-1 \text{ 1ers tirés}}} \underbrace{\frac{(7\cdot 6\cdot 5)\cdot(3\cdot 2)}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}}_{\frac{\substack{\text{nb de séquences}\\ \text{possibles des}\\ n-2 \text{ non-défect.}} \cdot \substack{\text{nb de séquences}\\ \text{possibles des}\\ \text{2 défect.}}}{\substack{\text{nb de séquences}\\ \text{possibles des } n \text{ tirés}}}} = \frac{1}{6}$$

10 articles, 3 défectueux

X: nb d'articles tirés pour en tirer un 2e article défectueux

$$\begin{aligned} R_X &= \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} \\ &= \{x_1, \ldots, x_n\} \end{aligned}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$

Ex. 5 - Réponse

Déterminez la fonction de masse p_X.

$$p_X(x) = \frac{(x-1)\,A^7_{x-2}\,A^3_2}{A^{10}_x}$$

$$p_X(2) = \frac{1\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9} = \frac{1}{15}$$

$$p_X(3) = \frac{2\cdot7\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8} = \frac{7}{60}$$

$$p_X(4) = \frac{3\cdot(7\cdot6)\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{3}{20}$$

$$p_X(5) = \frac{4\cdot(7\cdot6\cdot5)\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6} = \frac{1}{6}$$

$$p_X(6) = \frac{5\cdot(7\cdot6\cdot5\cdot4)\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5} = \frac{1}{6}$$

$$p_X(7) = \frac{6\cdot(7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3)\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4} = \frac{3}{20}$$

$$p_X(8) = \frac{7\cdot(7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2)\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3} = \frac{7}{60}$$

$$p_X(9) = \frac{8\cdot(7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)\cdot(3\cdot2)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{1}{15}$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_X(x)$	$\frac{4}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{4}{60}$

10 articles, 3 défectueux

X: nb d'articles tirés pour en tirer un 2e article défectueux

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p_X(x_i)$$

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma^2_X = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$

Ex. 5 - Réponse

Déterminez la fonction de répartition F_X.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_X(x)$	$\frac{4}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{4}{60}$

x	< 2	2	3	4	5	6	7	8	9	> 9
$F_X(x)$	0	$\frac{4}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{30}{60}$	$\frac{40}{60}$	$\frac{49}{60}$	$\frac{56}{60}$	$\frac{60}{60}$	1

10 articles, 3 défectueux

X: nb d'articles tirés pour en tirer un 2e article défectueux

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} = \{x_1, ..., x_n\}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

$$\mu_X = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$

Ex. 5 - Réponse

Calculez la moyenne μ_X et l'écart type σ_X de X.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_X(x)$	$\frac{4}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{4}{60}$

$$\begin{aligned}\mu_X &= \sum_{x\in R_X} x \cdot p_X(x)\\ &= 2\cdot\frac{4}{60} + 3\cdot\frac{7}{60} + 4\cdot\frac{9}{60} + 5\cdot\frac{10}{60} + 6\cdot\frac{10}{60}\\ &\quad + 7\cdot\frac{9}{60} + 8\cdot\frac{7}{60} + 9\cdot\frac{4}{60}\\ &= \frac{11}{2} = 5.5\end{aligned}$$

Visuellement, ça a du sens par symétrie de p_X!

10 articles, 3 défectueux

X: nb d'articles tirés pour en tirer un 2e article défectueux

$$\begin{aligned}R_X &= \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}\\ &= \{x_1, ..., x_n\}\end{aligned}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

$$\mu_X = \sum_{x\in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x\in R_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$

Ex. 5 - Réponse

Calculez la moyenne μ_X et l'écart type σ_X de X.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_X(x)$	$\frac{4}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{4}{60}$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sum_{x\in R_X} (x-\mu_X)^2 \cdot p_X(x)\\ &= (2-5.5)^2 \cdot \frac{4}{60} + (3-5.5)^2 \cdot \frac{7}{60} + (4-5.5)^2 \cdot \frac{9}{60}\\ &\quad + (5-5.5)^2 \cdot \frac{10}{60} + (6-5.5)^2 \cdot \frac{10}{60} + (7-5.5)^2 \cdot \frac{9}{60}\\ &\quad + (8-5.5)^2 \cdot \frac{7}{60} + (9-5.5)^2 \cdot \frac{4}{60}\\ &= \frac{231}{60} = 3.85\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{3.85} \approx 1.962$$

10 articles, 3 défectueux

X: nb d'articles tirés pour en tirer un 2e article défectueux

$$\begin{aligned}R_X &= \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}\\ &= \{x_1, \ldots, x_n\}\end{aligned}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

$$\mu_X = \sum_{x\in R_X} x \cdot p_X(x)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x\in R_X} (x-\mu_X)^2 \cdot p_X(x)$$