

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - HIVER 2021

Nom _____
(lettres modifiées)

Prénom _____
(lettres modifiées)

No du cours : **MTH2302D** Section :

Titre du cours : **PROBABILITÉS ET STATISTIQUE**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement cette page. Cette page doit être la page de présentation de votre document des réponses que vous déposerez dans la boîte de remise
2. Rédigez vos réponses de façon claire sur des feuilles blanches de votre choix avec les numéros de pages et les numéros des questions. Lors du dépôt de votre document, assurez-vous que les feuilles sont dans l'ordre des questions.
3. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée**. Autrement, la note zéro sera attribuée pour la question.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. **Documentation : Toute.**
6. **Calculatrice non-programmable permise.**
7. *Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimatez que vous ne pouvez pas répondre à une question (données manquantes, données erronées, et.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.*

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Signature de l'étudiant(e)

Date : **dimanche, le 14 mars 2021**

Heure : **10h00 à 12h00**

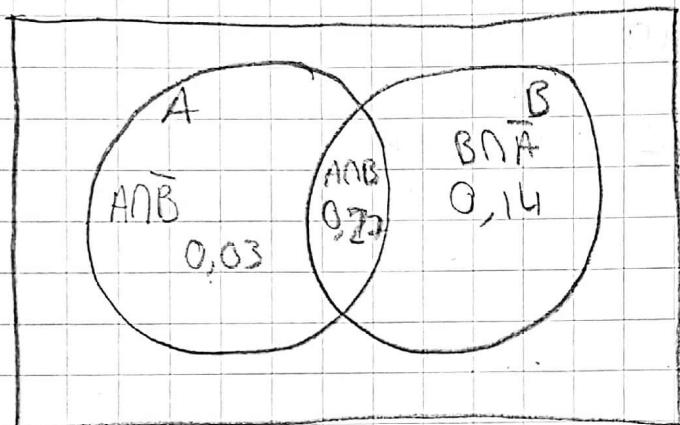
Réservé	
1.	2
2.	3
3.	3
4.	3,5
5.	2,5
6.	2,5
7.	
8.	
9.	
10.	
TOTAL	16,5 / 20

Exercice 1.

$$a) P(A) = 0,30 \quad P(\bar{A}) = 0,7$$

$$P(\bar{B} | A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \times 0,1 \\ = 0,03$$

$$P(B | \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0,7 \times 0,2 \\ = 0,14$$



$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) \\ = 0,3 - 0,03 \\ = 0,27$$

①

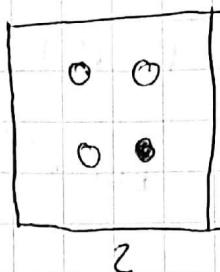
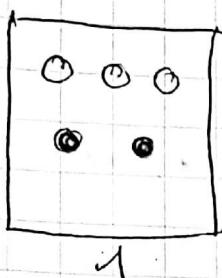
$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,27}{0,27 + 0,14} = 0,658$$

$$b) P(A \cup B) = 0,03 + 0,27 + 0,14 = 0,44$$

②

Question 2.

a)



N: normal

D: défectueux

boîte 1: possibilités après tirage

$$NN: \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$DN \text{ ou } ND: \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{10}$$

Il n'y a pas d'ordre.

$$DD: \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

boîte 2: proba de tirer 2 défectueuses (X)

si NN: $P(X)=0$ car 1 seul poele D

$$\text{si ND : } P(X) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$\text{si DD : } P(X) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

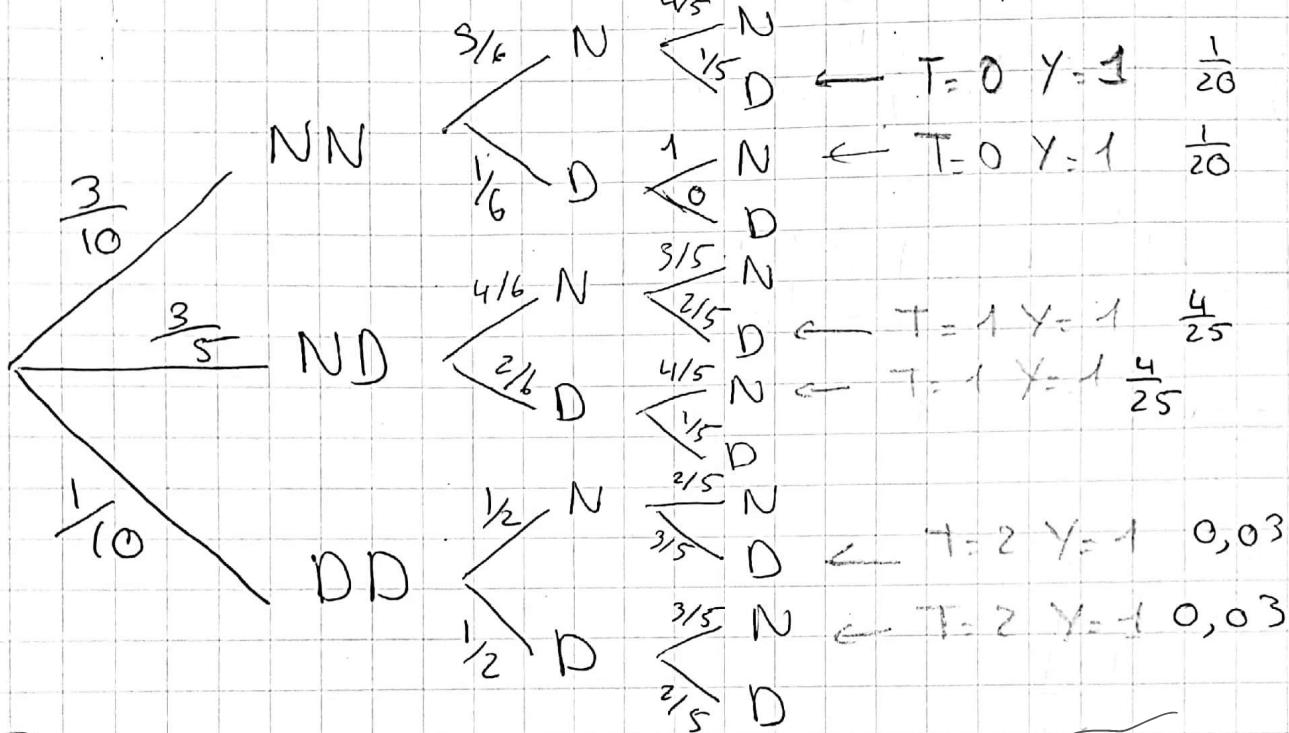
Soit Y le nbr de boules def. choisies de la 2

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \frac{3}{10} \times 0 + \frac{6}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{50} = 0,06 \end{aligned}$$

(N)

b) T_{1nb} boule def prises de 1

$$P(T \geq 1 | Y=1) = \frac{P(T \geq 1 \cap Y=1)}{P(Y=1)}$$

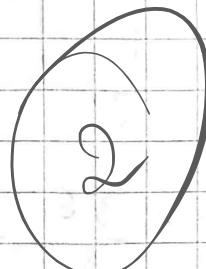


$$P(T \geq 1 \cap Y=1) = P(NDND) + P(NDDN) + P(DPND) + P(DPDN)$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + 0,03 + 0,03 = 0,38$$

$$P(Y=1) = \sum P(Y=1) = \frac{1}{20} \times 2 + \frac{4}{25} \times 2 + 0,03 \times 2 = 0,48$$

$$P(T \geq 1 | Y=1) = \frac{0,38}{0,48} = \frac{19}{24}$$



Question 3.

a) $\int_{-6}^4 f_n(x) dx = 1$

$$\int_{-6}^0 \frac{m}{3} dx + \int_0^4 mx^2 dx = 1$$

$$\frac{m}{3} [x]_{-6}^0 + m \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 1$$

$$\frac{6m}{3} + 8m = 1$$

$$\frac{10m}{10} = 1$$

$$E(X) = \int_{-6}^4 x f_X(x) dx =$$

$$= \int_{-6}^0 \frac{x}{30} dx + \int_0^4 \frac{x^2}{10} dx$$

$$= \frac{1}{30} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-6}^0 + \frac{1}{10} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$= \frac{1}{30} \times \frac{36}{2} + \frac{1}{10} \times \frac{64}{3}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{32}{15} = \frac{9}{15} + \frac{32}{15} = \frac{41}{15}$$

$$b) P(Y > 0) = P(X^2 - 2X > 0)$$

$$= P(X^2 > 2X)$$

$$= \cancel{P(-0,5 \leq X \leq 0,5)} - P(X=0)$$

$$= P(X > 0,5) + P(X < -0,5)$$

$$= \int_{-6}^{-0,5} \frac{1}{30} dx + \int_{0,5}^4 \frac{x}{10} dx$$

$$= \frac{1}{30} \times (-0,5 + 6) + \frac{1}{10} \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0,5}^4$$

$$= \frac{11}{60} + \frac{1}{10} \times \left(8 - \frac{1}{8} \right)$$

$$= 0,970$$

$$E(Y) = \int_{-6}^0 x \times \left(\frac{x^2 - 2x}{30} \right) dx + \int_0^4 x \times \frac{x}{10} \times (x^2 - 2x) dx$$

$$E(Y) = E(X^2 - 2X)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)$$

$$E(X^2) = \int_{-6}^0 x^2 \times \frac{x}{30} dx + \int_0^4 x^2 \times \frac{x}{10} dx = \frac{10}{3}$$

$$= \frac{1}{30} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-6}^0 + \frac{1}{10} \times \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4$$

$$= \frac{72}{30} + \frac{64}{10} = 8,8$$

Fragestellung 4,

a)

x	-1	0	1	$P_x(g)$
y	0,15	0,15	0,30	$\frac{3}{5}$
	0,10	0,1	0,9	$\frac{2}{5}$
$P_x(a)$	0,25	0,25	0,5	1

$$P(X=1) = 0,15 + 0,10 = 0,25$$

- $P(Y=0) + P(Y=1) = 1$

$$\frac{3}{2} \cdot P(Y=1) + P(Y=1) = 1$$

$$SP(Y=1) = 2$$

$$P(Y=1) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(Y=0) = \frac{3}{5}$$

- $V_2 = 0,15 + 0,30 = \frac{3}{5}$

$$\boxed{V_2 = 0,15}$$

- $E(X) = -1 \cdot P(X=-1) + 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0,25$

31
U

$$-0,25 + 0 + 0,25 = 0,25$$

$$P(X=1) = 0,5$$

- dort $P(X=0) = 1 - (0,5 + 0,25) = 0,25$

$$\boxed{V_3 = 0,25 - 0,15 = 0,1}$$

$$\boxed{V_1 = 0,5 - 0,3 = 0,2}$$

$$V(T) = 2^2 \times V(Y) + (-3)^2 \times V(X) + 2(2)(-3) \operatorname{cov}(X, Y)$$

$$E(X) = 0,25$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= 0,75 - 0,25^2 \\ &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0,25 + 0,5 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

$$E(Y^2) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{6}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= (-1)(-1)(0,1) + (1)(1)(0,2) \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = 0,1 - 0,25 \times \frac{2}{5} = 0$$

$$V(T) = 2^2 \times \frac{11}{16} + (-3)^2 \times \frac{6}{25}$$

$$V(T) = 4 \times \frac{6}{25} + 9 \times \frac{11}{16} = 7,1475$$

b) $U = X^2$

$$E(U) = E(X^2) = 0,75$$

$$E(UY) = (-1)^2(1)(0,1) + (1)^2(1)(0,2) \text{ for the prevent } \frac{1}{10}$$

$$= 0,3$$

$$E(U) \times E(Y) = 0,75 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10} = E(UY)$$

dort unten.

Question 5,

$$a) P(X > 4) = 0,4$$

$$1 - (1 - e^{-\lambda})^4 = 0,4$$

$$e^{-\lambda} = 0,4$$

$$-\lambda \cdot 4 = \ln(0,4)$$

$$\lambda = -\frac{\ln(0,4)}{4}$$

$$P(X < 2) = 1 - e^{-\lambda \cdot 2} = 0,367$$

Bernoulli p succès = 0,367

on répète 10 fois

$$X \sim B(10, 0,367)$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$P(X=0) = C_0^{10} \times 0,367^0 \times (1-0,367)^{10} = 0,01$$

$$P(X=1) = C_1^{10} \times 0,367 \times (1-0,367)^9 = 0,0598$$

$$P(X=2) = C_2^{10} \times 0,367^2 \times (1-0,367)^8 = 0,1562$$

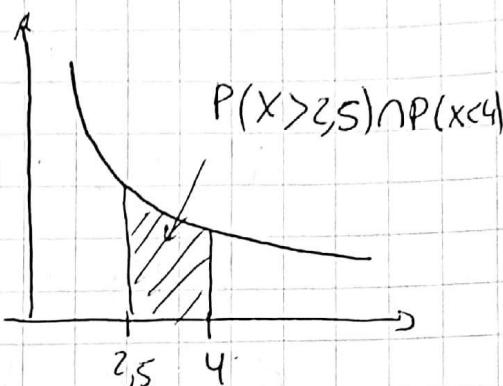
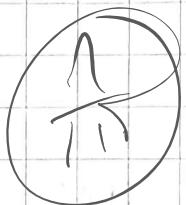
$$P(X > 2) = 1 - 0,01 - 0,0598 - 0,1562 \\ = 0,774$$

b) on cherche $\frac{P(X > 2,5 \wedge X < 4)}{P(X < 4)}$

$30 \text{ mois} = 2,5 \text{ ans}$

$$P(X > 2,5) \cap P(X < 4)$$

$$= \int_{2,5}^4 f_x dx$$



$$= \int_{2,5}^4 \lambda e^{-\lambda x} = \lambda \times \int_{2,5}^4 \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} P(X < 4) &= 1 - 0,4 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

$$= \lambda \times \left[-\lambda e^{-\lambda x} \right]_{2,5}^4$$

$$= \lambda \times \left(-\lambda e^{-4\lambda} + \lambda e^{-2,5\lambda} \right)$$

$$= 8,60 \times 10^{-3}$$

donc ~~$8,60 \times 10^{-3}$~~ $= 1,43\%$

Question 6)

a) Soit X nb de clients en 1 jour

$$X \sim \text{Poiss}(6)$$

$$P(X > 4) = ?$$

$$= 1 - P(X \leq 4)$$

d'après la table pour $\lambda = 6$ et $n = 6$ ($P(X \leq 3)$)

$$P(X \leq 3) = 0,1512$$

$$P(X > 4) = 1 - 0,1512 = 0,8488$$

(la pharmacie ne possède plus de dose de vaccin si au moins 4 clients se présentent)

b) $P(T=2)$ = 2 jours de 5 où des doses sont détruites

$$p \text{ doses détruites} = P(X \leq 3) = 0,1512$$

on peut donc faire une loi binomiale $n = 5$ ~~p = 0,1512~~

$$P(T=2) = C_2^5 \times 0,1512^2 \times 0,8488^3 = 0,1398$$

c) Soit Y nb de client vers l'hôpital

$$Y = X - 4 \quad \text{si } X > 4$$

$$Y = 0 \quad \text{sinon}$$

par facile

donc nb de client en volgume =

$$0 \times P(X \leq 4) + (X-4) \times P(X > 4)$$

Salader ainsi

en moyenne si 6 clients arrivent à la pharmacie en 1 jour
doré en moyenne 2 clients sont dirigés vers
l'hôpital régional.