MTH2302D - TD 6

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

Soit des segments de piston dont le diamètre intérieur est normalement distribué avec une moyenne de 12 centimètres et un écart-type de 0,02 centimètre.

a) Quelle proportion de ces segments a un diamètre supérieur à 12,05 centimètres ?

b) Quelle valeur *c* du diamètre intérieur est excédée par 90 % des segments ?

c) Quelle est la probabilité que le diamètre intérieur d'un segment donné se situe entre 11,95 et 12,05 centimètres ?

- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$

Ex. 1 - Réponse - a)

Quelle proportion des segments ont un diamètre > 12.05?

X : diamètre segment

$$X \sim \mathrm{N}(12, 0.02^2)$$

$$\begin{aligned} P(X > 12.05) &= 1 - P(X \leq 12.05) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{12.05 - 12}{0.02}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621 \end{aligned}$$

diamètre segment $\sim$ normale

moyenne : 12, écart-type : 0.02

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$P(a \leq X \leq b)$
$= P(X \leq b) - P(X < a)$

Ex. 1 - Réponse - b)

Quelle valeur c est excédée par 90% des segments ?

diamètre segment $\sim$ normale

moyenne : 12, écart-type : 0.02

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c-12}{0.02}\right) = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{c-12}{0.02}\right) = 0.1$$

$$\Phi\left(\frac{12-c}{0.02}\right) = 0.9$$

$$\Rightarrow \frac{c-12}{0.02} \approx 1.28$$

$$c \approx 11.97$$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \ P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$P(a \leq X \leq b)$
$= P(X \leq b) - P(X < a)$

Ex. 1 - Réponse - c)

Quelle est la probabilité que le diamètre d'un segment soit entre 11.95 et 12.05?

diamètre segment $\sim$ normale

moyenne : 12, écart-type : 0.02

$$
\begin{aligned}
P(11.95 \leq X \leq 12.05) &= P(X \leq 12.05) - P(X < 11.95) \\
&= P(X \leq 12.05) - P(X < 12 - 0.05) \\
&= P(X \leq 12.05) - P(X > 12 + 0.05) \\
&= P(X \leq 12.05) - P(X > 12.05) \\
&= P(X \leq 12.05) - (1 - P(X \leq 12.05)) \\
&= 2P(X \leq 12.05) - 1 \\
&= 2\Phi\left(\frac{12.05 - 12}{0.02}\right) - 1 \\
&\approx 2 \cdot 0.99379 - 1 = 0.98758
\end{aligned}
$$

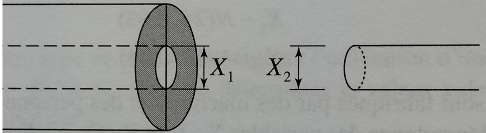
$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$P(a \leq X \leq b)$
$= P(X \leq b) - P(X < a)$

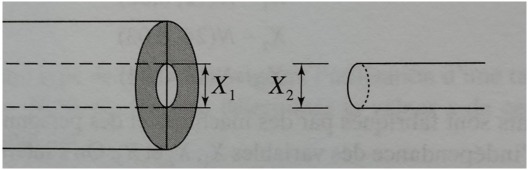
Ex. 2 - Énoncé

On doit insérer un tronc d'arbre dont le diamètre est une variable de loi $N(1{,}20\,;\,0{,}0016)$ dans un tube dont le diamètre intérieur est une variable de loi $N(1{,}25\,;\,0{,}0009)$. Déterminez la probabilité d'un serrage, c'est-à-dire qu'on ne réussisse pas l'insertion



- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(X \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- $N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$
  $\Rightarrow \; a_0 + \sum a_i N_i \sim \mathrm{N}(a_0 + \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$

Ex. 2 - Réponse



Déterminez la probabilité d'un serrage.

$$X_1 \sim \mathrm{N}(1.25, 0.0009)$$

$$X_2 \sim \mathrm{N}(1.20, 0.0016)$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

$$Y = X_1 - X_2 \sim \mathrm{N}(1.25 - 1.20, 1^2 \cdot 0.0009 + 1^2 \cdot 0.0016)$$
$$\sim \mathrm{N}(0.05, 0.0025)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$P(Y \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - 0.05}{\sqrt{0.0025}}\right)$$
$$= \Phi(-1)$$
$$= 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866$$

$$N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow$$
$$a_0 + \sum a_i N_i \sim \mathrm{N}(a_0 + \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$$

Ex. 3 - Énoncé

Toute erreur d'arrondi constitue une variable indépendante uniformément distribuée sur l'intervalle [−0,5, +0,5]. Si l'on additionne 50 nombres indépendants après les avoir arrondis, quelle est la probabilité que l'erreur d'arrondi totale (en valeur absolue) dépasse 5 ?

- $X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$
  $\Rightarrow \; E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- X_i i.i.d. $\Rightarrow \sum X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$

Ex. 3 - Réponse

Quelle est la probabilité que l'erreur totale abolue dépasse 5?

X_i : $i$ème erreur d'arrondi $\quad \Rightarrow X_i \sim U(-0.5, 0.5)$

$$\Rightarrow E(X_i) = 0, \quad Var(X_i) = \frac{1}{12}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}\left(50 \cdot 0, 50 \cdot \frac{1}{12}\right) \approx \mathrm{N}\left(0, 4.1667\right)$$

$$\begin{aligned} P(|Y| > 5) &= P((Y > 5) \cup (Y < -5)) \\ &= P(Y > 5) + P(Y < -5) = 2P(Y < -5) \\ &= 2\Phi\left(\frac{-5-0}{\sqrt{4.1667}}\right) = 2\Phi(-2.449) \\ &= 2(1 - \Phi(2.449)) \approx 2(1 - 0.99286) = 0.01428 \end{aligned}$$

erreur d'arrondi $\sim$ uniforme entre -0.5 et 0.5

on en additionne 50

$X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta) \Rightarrow$
$E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}, \ Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \ P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

X_i i.i.d., $\Rightarrow \ \sum X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$

Ex. 4 - Énoncé

La demande journalière d'électricité (en millions de KWh) est une variable X distribuée selon une loi normale de moyenne 8 et d'écart type 2. D'autre part, la capacité de production électrique (en millions de KWh) est de 12.

a) Calculer la probabilité que la demande excède la capacité dans une journée.

b) Calculer la probabilité que la demande excède la capacité deux journées consécutives.

c) Calculer la probabilité que la demande excède la capacité au plus deux journées dans une semaine.

d) Quelle devrait être la capacité de production afin de satisfaire la demande avec une probabilité de 0,99 ?

- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$
  $\Rightarrow \; p_Y(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$

Ex. 4 - Réponse - a)

Calculer la probabilité que la demande excède la capacité.

demande $\sim$ normale

moyenne : 8 écart-type : 2

capacité de production : 12

$$X : \text{demande quotidienne}$$

$$X \sim \mathrm{N}(8, 2^2) = \mathrm{N}(8, 4)$$

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= 1 - P(X \leq 12) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{12-8}{2}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.97725 = 0.02275 \end{aligned}$$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$

$\Rightarrow \; p_Y(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$

Ex. 4 - Réponse - b)

Calculer la probabilité que la demande excède la capacité 2 jours consécutifs.

demande $\sim$ normale

moyenne : 8   écart-type : 2

capacité de production : 12

Y : nombre de jours sur 2 où la demande excède

$$Y \sim \mathrm{B}(2, P(X > 12)) \approx \mathrm{B}(2, 0.02275)$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= p_Y(2) \\ &= \frac{2!}{2!0!} 0.02275^2 (1 - 0.02275)^0 \\ &= 0.02275^2 \approx 0.0005176 \end{aligned}$$

$$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$$
$$\Rightarrow \; p_Y(y) = \tfrac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$$

Ex. 4 - Réponse - c)

Calculer la probabilité que la demande excède la capacité au plus 2 jours dans une semaine.

demande $\sim$ normale

moyenne : 8 écart-type : 2

capacité de production : 12

Y : nombre de jours sur 7 où la demande excède

$$Y \sim \mathrm{B}(7, P(X > 12)) \approx \mathrm{B}(7, 0.02275)$$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$$P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \sum_{y=0}^{2} p_Y(y)$$

$$= \sum_{y=0}^{2} \frac{7!}{y!(7-y)!} 0.02275^y (1-0.02275)^{7-y}$$

$$= \frac{7!}{0!7!} 0.02275^0 0.97725^7 + \ldots + \frac{7!}{2!5!} 0.02275^2 0.97725^5$$

$$= 0.97725^7 + \ldots + \frac{7 \cdot 6}{2} 0.02275^2 0.97725^5 \approx 0.99962$$

$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$

$\Rightarrow \; p_Y(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$

Ex. 4 - Réponse - d)

Quelle devrait être la capacité de production pour satisfaire la demande avec une probabilité de 0.99 ?

$$P(X \leq c) = \Phi\left(\frac{c-8}{2}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{c-8}{2} \approx 2.33$$

$$c \approx 12.66$$

demande $\sim$ normale
moyenne : 8 écart-type : 2

capacité de production : 12

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$
$\Rightarrow \; p_Y(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y}$

Ex. 5 - Énoncé

Une ville compte 10 000 unités d'habitation et deux usines. La demande journalière en eau potable (litres) est détaillée dans le tableau suivant :

entité	variable aléatoire correspondante	loi suivie	moyenne (litres)	écart type (litres)
habitation	Q_i $i \in \{1, 2, \ldots, 10\,000\}$	normale	250	50
usine 1	U_1	normale	45 000	5 000
usine 2	U_2	normale	115 000	20 000

On suppose l'indépendance entre toutes les demandes. On note $Q_D = \sum_{i=1}^{10\,000} Q_i$ la demande domestique totale et $Q_T = Q_D + U_1 + U_2$ la demande totale.

a) Calculer la moyenne et l'écart-type de Q_D et de Q_T.

b) Soit α_p la valeur telle que $P\left(Q_D < \alpha_p\right) = p$. Calculer $\alpha_{0,95}$ et $\alpha_{0,99}$.

c) Calculer la capacité de l'usine de filtration d'eau potable si on veut satisfaire la demande totale avec une probabilité de 0,999.

- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

- $N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$
  $\Rightarrow \; a_0 + \sum a_i N_i \sim \mathrm{N}(a_0 + \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$
- X_i i.i.d. $\Rightarrow \sum X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$

Ex. 5 - Réponse - a)

Calculer la moyenne et l'écart-type de Q_D et de Q_T.

$$Q_D = \sum_{i=1}^{10000} Q_i$$

$$\begin{aligned} Q_D &\sim \mathrm{N}(10000 \cdot \mu_{Q_i}, 10000 \cdot \sigma^2_{Q_i}) \\ &\sim \mathrm{N}(10000 \cdot 250, 10000 \cdot 50^2) \\ &\sim \mathrm{N}(2500000, 25000000) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_{Q_D} = 2500000, \quad \sigma_{Q_D} = \sqrt{25000000} = 5000$$

$$Q_T = Q_D + U_1 + U2$$

$$Q_T \sim \mathrm{N}(1 \cdot \mu_{Q_D} + 1 \cdot \mu_{U_1} + 1 \cdot \mu_{U_2}, 1^2 \cdot \sigma^2_{Q_D} + 1^2 \cdot \sigma^2_{U_1} + 1^2 \cdot \sigma^2_{U_2})$$

$$\Rightarrow \mu_{Q_T} = 2500000 + 45000 + 115000 = 2660000$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{Q_T} = 5000^2 + 5000^2 + 20000^2 = 450000000$$

$$\Rightarrow \sigma_{Q_T} = \sqrt{450000000} \approx 21213$$

habitation (x10 000):
$Q_i \sim \mathrm{N}(250, 50^2)$

usine 1: $U_1 \sim \mathrm{N}(45000, 5000^2)$

usine 2: $U_2 \sim \mathrm{N}(115000, 20000^2)$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow$
$a_0 + \sum a_i N_i \sim \mathrm{N}(a_0 + \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$

X_i i.i.d. $\Rightarrow$
$\sum X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$

Ex. 5 - Réponse - b)

Soit le quantile α_p tel que $P(Q_D < \alpha_p) = p$.
Calculer $\alpha_{0.95}$ et $\alpha_{0.99}$.

$$P(Q_D < \alpha_{0.95}) = \Phi\left(\frac{\alpha_{0.95} - 2500000}{5000}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{0.95} - 2500000}{5000} \approx 1.645$$

$$\alpha_{0.95} \approx 2508225$$

$$P(Q_D < \alpha_{0.99}) = \Phi\left(\frac{\alpha_{0.99} - 2500000}{5000}\right) = 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{0.99} - 2500000}{5000} \approx 2.33$$

$$\alpha_{0.99} \approx 2511650$$

habitation (x10 000):
$Q_i \sim \mathrm{N}(250, 50^2)$

usine 1: $U_1 \sim \mathrm{N}(45000, 5000^2)$

usine 2: $U_2 \sim \mathrm{N}(115000, 20000^2)$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow$
$a_0 + \sum a_i N_i \sim \mathrm{N}(a_0 + \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$

X_i i.i.d. $\Rightarrow$
$\sum X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$

Ex. 5 - Réponse - c)

Calculer la capacité de filtration d'eau si on veut satisfaire la demande totale avec une probabilité de 0.999.

$$P(Q_T \leq c) = \Phi\left(\frac{c - 2660000}{21213}\right) = 0.999$$

$$\Rightarrow \frac{c - 2660000}{21213} \approx 3.09$$

$$c \approx 2725548$$

habitation (x10 000):
$Q_i \sim \mathrm{N}(250, 50^2)$

usine 1: $U_1 \sim \mathrm{N}(45000, 5000^2)$

usine 2: $U_2 \sim \mathrm{N}(115000, 20000^2)$

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \; P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow$
$a_0 + \sum a_i N_i \sim \mathrm{N}(a_0 + \sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$

X_i i.i.d. $\Rightarrow$

$\sum X_i \underset{approx.}{\sim} \mathrm{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$