POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire
Contrôle périodique

MTH1008

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom : XA	**Prénom :** JASON	Cote : 50
Signature :	**Matricule :** 2348245	**Groupe :**

Réservé	
1.	4 /4
2.	~~1,5~~ /2 2/2
3.	2 /2
4.	3 /3
5.	3 /3
6.	2 /3
7.	~~2,5~~ /3 3/3
TOTAL :	~~18~~ /20

19/20

Sigle et titre du cours			
MTH1008 – Algèbre linéaire appliquée			
Professeur		*Groupe*	*Trimestre*
Houda Trabelsi		**TOUS**	**Automne 2024**
Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	**5 octobre**	**2 heures**	**13h00 à 15h00**

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☒ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	Non-programmable permise (AEP)	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières

1- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**

2- **Répondez directement sur le cahier dans les sections réservées à chaque question.**

3- **3 pages supplémentaires sont disponibles à la fin du cahier.**

4- **Écrivez votre démarche et vos réponses AU RECTO SEULEMENT. Le verso ne sera ni numérisé , ni corrigé.**

Cet examen contient 7 questions sur un total de 21 pages

(Excluant cette page).

La pondération de cet examen est de **20** %

Vous devez répondre sur : ☐ le questionnaire ☒ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

4

QUESTION # 1 (4 points)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 3 & c \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -5 & 3 & c \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 4L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & c+12 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & c+2 \end{array}\right]$$

2/2

1. $c+2=0 \Rightarrow c=-2$

Pour $c=-2$

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Pour x_2:

$-x_2 - x_3 = 10$

$\Rightarrow -x_2 = 10 + x_3$

$x_2 = -10 - x_3$

Pour x_3:

$-x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$\Rightarrow -x_1 + (-10 - x_3) - x_3 = 3$

$\Rightarrow -x_1 - 10 - 2x_3 = 3$

$\Rightarrow -x_1 = 13 + 2x_3$

$x_1 = -13 - 2x_3$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2/2

1. $\boxed{\text{Réponse : } c = -2}$

2. $\boxed{\text{Réponse : } \vec{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

QUESTION # 1 (suite)

1/1

2/2

QUESTION # 2 (2 points)

1. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - 4L_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 \cdot (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + 6L_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & 0 & 1 & 24 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - 12L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] \qquad \boxed{A^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}$$

1/1

2. $(A-I)(A+I)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OK | OK

QUESTION # 2 (suite)

3. $(A-I)(A+I) = A^2 - I^2$

Preuve $A^{-1} = A$

Ceci n'était pas demandé.

$\Rightarrow A^2 = I^2$

$\Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}I$

$\Rightarrow A = A^{-1}$

$(A-I)(A+I) = 0$

Preuve A est inversible

$\frac{0.5}{0.5}$

$\Rightarrow A^2 - I^2 = 0$

$\Rightarrow A^2 = I$

$\Rightarrow AA = I$

Or A est l'inverse de A puisque $A^2 = I$, donc cela prouve l'inversibilité de A.

Correct

QUESTION # 2 (suite)

QUESTION # 3 (2 points)

$$M = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}}$$

2/2

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$x_1 I + x_3 A = I \Rightarrow x_1 I = I \Rightarrow x_1 = I$

$x_2 I + x_4 A = 0 \Rightarrow x_2 I + A = 0 \Rightarrow x_2 = -A$

$x_3 I = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_4 I = I \Rightarrow x_4 = I$

QUESTION # 3 (suite)

QUESTION # 4 (3 points) 3

1. $$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left((-2)(7) - (-2)(-2)\right) + 3\left((-2)(5) - (4)(-2)\right)$$

$$= -18 - 6$$

$$\Rightarrow \boxed{|A| = -24}$$

$\frac{0.5}{0.5}$

2. $$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 - L_1} \sim \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{L_3 \to L_3 - L_2} \sim U = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{0.75}{0.75}$

$$\boxed{A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}}$$

3. $A = LU$

$$\Rightarrow |A| = |LU|$$

$$= |L||U|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{|A| = -24}$$

$\frac{1}{1}$

Je préfère la calculer à partir de la factorisation LU, car le déterminant est le produit de trois éléments sur la diagonales. D'ailleurs, cela revient à le calculer à partir de la méthode de la matrice échelonnée, car la matrice L a toujours un déterminant de 1 (matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale).

QUESTION # 4 (suite)

4. $L\vec{y} = \vec{b}$ $\quad A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$y_1 = 1$
$y_2 = 2$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$y_1 + y_2 + y_3 = -1$

$\Rightarrow (1) + (2) + y_3 = -1$

$\Rightarrow y_3 = -4$

$U\vec{x} = \vec{y}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{array}\right]$$

$12x_3 = -4$
$\Rightarrow x_3 = -1/3$

$x_2 - 3x_3 = 2$
$x_2 = 2 + 3(-1/3)$
$= 1$

$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{1 - 4(1) + 2(-1/3)}{-2}$

$= 11/6$

0.75
/0.75

$$\boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} 11/6 \\ 1 \\ -1/3 \end{bmatrix}}$$

QUESTION # 4 (suite)

QUESTION # 4 **(suite)**

QUESTION # 5 (3 points)

3/3

1. Faux : les colonnes doivent engendrer $\mathbb{R}^3$ pour que l'image soit $\mathbb{R}^3$. Or

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ est une matrice de 3 lignes et 5 colonnes,

mais son image n'est pas $\mathbb{R}^3$. Son image est $\text{vect} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Faux : Si la matrice a plus de colonnes que de lignes, ses colonnes sont linéairement dépendantes et elles ne peuvent pas former une base de son image.

3. Vrai, car il est possible d'atteindre n'importe quel vecteur dans $\text{Vect}\{a, b, c\}$ à partir d'une combinaison linéaire unique de a, b et c.

4. Faux, si la matrice n'est pas carrée, elle n'est pas inversible.

5. Faux, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et le noyau de A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. La dimension de l'espace généré par les colonnes de A (image de A) est équivalent au nombre de ligne alors que la dimension de l'espace généré par ker(A) appartient à $\mathbb{R}^m$ pour permettre le produit $A\vec{x} = \vec{0}$.

QUESTION # 5 (suite)

6. Faux ; $\mathbb{R}^2$ a plus qu'une base : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

QUESTION # 6 (3 points) 2/3

Présence de l'élément nul

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$

$5y = 0 \Rightarrow y = 0$

$7y = 0 \Rightarrow y = 0$

$x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2(0)$

$\Rightarrow x = 0$

$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Base de E : $\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$ ✓

Fermeture de l'addition

$(x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2)$

$= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in \mathbb{R}} - 2\underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in \mathbb{R}}$

$(2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2)$

$= 2\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\mathbb{R}}$

$(4x_1 - y_1) + (4x_2 - y_2)$

$= 4\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in \mathbb{R}}$

Puisque E contient l'élément nul de $\mathbb{R}^3$, que l'addition est fermée et la multiplication par un scalaire est fermée, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ✓

Fermeture de la multiplication

$c \in \mathbb{R} \quad c(x - 2y) = (cx) - 2(cy)$

$c(2x + y) = 2(cx) + (cy)$

$c(4x - y) = 4(cx) - (cy)$

1/1

QUESTION # 6 (suite)

Inversibilité ?

2.

$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T = (B^{-1}A^{-1})^T = (A^{-1})^T(B^{-1})^T$

0,5/1

$((AB)^T)^{-1} = (B^T A^T)^{-1} = (A^T)^{-1}(B^T)^{-1} = (A^{-1})^T(B^{-1})^T = (B^{-1}A^{-1})^T = ((AB)^{-1})^T$

3. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & \cancel{a} \end{bmatrix}$ d

$a, b \in \mathbb{R}$

Élément nul : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ vérifié quand $a=0$, $b=0$

~~Fermeture~~ Fermeture addition: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$ ✓ Notons $a_1 + a_2 = k \in \mathbb{R}$
$b_1 + b_2 = z \in \mathbb{R}$

$= \begin{bmatrix} k & z \\ z & k \end{bmatrix}$

Fermeture multiplication scalaire : $c \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ cb & ca \end{bmatrix}$ Notons
$ca = \sigma \in \mathbb{R}$
$cb = \beta \in \mathbb{R}$

$= \begin{bmatrix} \sigma & \beta \\ \beta & \sigma \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ peut être représenté comme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ où $c = b$ et $d = a$, donc les matrices 2×2 symétriques appartiennent à l'ensemble des matrices de taille 2×2 et puisque les trois conditions sont respectées, l'ensemble des matrices 2×2 symétriques est un sous-espace de l'ensemble des matrices de taille 2×2.

QUESTION # 6 (suite)

Base : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ 0,5/1 car erreur sur la

$Sym_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ définition de $Sym_{2\times 2}$

QUESTION # 7 (3 points)

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

L'image de A est $\mathbb{R}^2$ puisque les colonnes de A engendront $\mathbb{R}^2$. Il existe une solution pour tout $\vec{b}$ selon $A\vec{x}$.

oui, bien!

1/1

2. $c_1 + c_3 = 2c_2 \Rightarrow c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$

Cela veut dire que $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un élément du noyau de A.

0,5/0,5

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

$x_2 + 2x_3 = 0$
$\Rightarrow x_2 = -2x_3$

$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$
$x_1 = -3x_2 - 5x_3$
$= -3(-2x_3) - 5x_3$
$= x_3$

Le noyau de A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et il s'exprime comme $\text{vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ ou $\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

0,75/0,75

4. Une infinité de solutions, car x_3 est une variable libre. x_1 et x_2 vont varier selon la valeur que prend x_3.

Il manque 1 argument ~~0,25/0,75~~ 0.75/0.75

Total: ~~2,5/3~~ 3/3

QUESTION # 7 (suite)

Page supplémentaire

Page supplémentaire

Page supplémentaire