POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

[redacted] (2)

EXAMEN FINAL – AUTOMNE 2021

Nom : [redacted]
(lettres moulées)

Prénom : [redacted]
(lettres moulées)

No du cours : **MTH2302D/DD** Section : 01

Titre du cours : **PROBABILITÉS ET STATISTIQUE**

DIRECTIVES :

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement le cahier.
2. Sauf indication contraire, donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée**. Autrement, la **note 0** sera attribuée.
3. N'utilisez que le recto pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon. Seul le recto sera numérisé et corrigé
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses. Inscrivez votre **matricule** sur le recto de chaque page.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet. Vérifiez que le cahier compte bien **22 pages.**
6. Si nécessaire, le cahier contient 2 pages supplémentaires que vous pouvez utiliser.
7. Voir les autres directives (**documentation et calculatrice**) sur le questionnaire.

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature de code de conduite.

Réservé

1.	0	**/7**
2.	2,25	**/8**
3.	P	**/6**
4.	1.5	**/9**
5.	01	**/5**
6.	3	**/10**
7.	0	**/5**

TOTAL

/50

Signature de l'étudiant

7.75

Date:	**Lundi, le 20 décembre 2021**
Heure:	**13h30 à 16h00**

QUESTION # 1 **(7 points)**

QUESTION # 1 **(suite)**

$\frac{0}{7}$

a) $P(V > c\sigma) = 0{,}025$

$P(\sum X_i > c\sigma) = 0{,}025$

$0{,}25$

b) $P(\sum x_i^2$

<u>QUESTION # 1</u> (suite)

QUESTION # 2 **(8 points)**

$2{,}25/4$

a) Soit $X \sim$ Loi $(x;\theta)$ tel que

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (2+\theta)x^{1+\theta} & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ~~le~~ les moments

$$m_1' = E(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,\theta)\,dx = \int_0^1 x(2+\theta)x^{1+\theta}\,dx$$

$$= \int_0^1 (2+\hat\theta)\,x^{2+\hat\theta}\,dx = \frac{(2+\hat\theta)}{(3+\hat\theta)}\, x^{3+\hat\theta}\Big|_0^1 = \frac{2+\hat\theta}{3+\hat\theta}$$

$$\frac{2+\hat\theta}{3+\hat\theta} = m_1' \qquad m_1' = \bar x$$

$$\Leftrightarrow 2+\hat\theta = 3m_1' + \hat\theta m_1' \Leftrightarrow \hat\theta - \hat\theta m_1' = 3m_1' - 2$$

$$\hat\theta(1-m_1') = 3m_1' - 2 \Leftrightarrow \boxed{\hat\theta_1 = \frac{3m_1'-2}{1-m_1'}}$$

$2/2$

b) Méthode du maximum de vraisemblance :

$$L(\theta) = \prod f(x_i;\hat\theta_2) = (2+\hat\theta_2)\,x_1^{1+\hat\theta_2}\cdot(2+\hat\theta_2)\,x_2^{1+\hat\theta_2}\cdot\ldots\cdot(2+\hat\theta_2)\,x_n^{1+\hat\theta_2}$$

$$= (2+\hat\theta_2)^n \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{1+\hat\theta_2} \Rightarrow \text{On pose } \ell(\theta) \text{ tel que}$$

$$\ell(\theta) = \ln(L(\theta)) \text{ on obtient } \quad n\ln(2+\hat\theta_2)\cdot(1+\hat\theta_2)\prod_{i=1}^n \ln(x)$$

$0/3$

QUESTION # 2 **(suite)**

c) $$V(\hat{\theta}_3) = E(\hat{\theta}_3^2) - E(\hat{\theta}_3)^2 = \overbrace{E(\bar{X}^2)}^{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}} - \overbrace{E(\bar{X})^2}^{\mu^2}$$

$$= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \cancel{\mu^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

or $\sigma^2 = E(\hat{\theta}_1^2) - E(\hat{\theta}_1)^2$

$\hat{\theta}_1$ étant un estimateur de $\hat{\theta}$ par la méthode des moments

$$= \frac{E(\hat{\theta}^2) - \theta^2}{n}$$

? d... d...

0,25 / 3

QUESTION # 2 (suite)

QUESTION # 3 (6 points)

• On considère $\alpha = 0{,}05$ et $n = 400$ la taille de notre échantillon. La proportion $p = 0{,}08$ est la probabilité qu'un pneu ne soit pas aux normes.

a) On pose les hypothèses suivantes :

• H_0 : Les ajustements effectués ont étés fructueux

• H_1 : Les ajustements n'ont eu aucun effet

Ce qui nous donne ce tableau :

réalité / décision	H_0 vraie	H_0 fausse
accepter H_0	$1-\alpha$	β
rejeter H_0	α	$1-\beta$

Erreur type I : $P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
$= 0{,}05$

b) Ici, on remarque que la P-Value $= 0{,}08534 > 0{,}05$ Donc on peut accepter H_0 en disant que les ajustements ont porté leurs fruits :

On a donc $0{,}06 \cdot 400 = 24$ pneux non conformes parmi ces 400.

QUESTION # 3 **(suite)**

<u>QUESTION # 3</u> (suite)

QUESTION # 4 (9 points)

Soit X_1 : la variable aléatoire qui correspond à la vitesse des voitures (en km/h) ; $X_1 \sim N(25{,}9 ; 3{,}10^2)$

X_2 : la ~~variables~~ aléatoire qui correspond à la vitesse des motocyclettes (en km/h) ; $X_2 \sim N(27{,}1 ; 2{,}75^2)$

a) X_1 et X_2 sont des échantillons

On s'intéresse à X_1 : et on a $\bar{X} = 25{,}9$ km/h qui sera l'estimateur ponctuel de X_{11}, la vitesse de la 11e voiture : On connait σ^2, en effet $S^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = n \cdot S^2 = 10 \cdot 3{,}10^2$

$\sigma^2 = 96{,}1$ km/h

Alors on pose $X_{11} = \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Non !

Ainsi $X_{11} = \bar{X} \pm z_{0{,}025} \cdot \sqrt{96{,}1\left(1+\frac{1}{10}\right)}$ $\Rightarrow \left[25{,}9 - 2{,}241\sqrt{0{,}11} ; 25{,}9+2{,}241\sqrt{0{,}11}\right]$

$X_{11} = [25{,}16 ; 26{,}64]$

+0.5

QUESTION # 4 (suite)

b) Ici, on connaît σ^2 ; $\alpha = 0,05$

$X_1 \sim N(25,9 ; 3,10^2)$ avec $\sigma^2 = 96,10$ km/h
et $\mu = 25,9$ km/h

L'intervalle de confiance à 95 % IC de la variance σ^2 est alors :

Connaissez-vous μ ?

$$IC = \left[\frac{nS_\mu^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n}} ; \frac{nS_\mu^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n}}\right]$$

Avec $S_\mu^2 = 3,10^2$; $\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n} = \chi^2_{0,025;10} = 19,02$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n} = \chi_{0,975;10} = 2,70$ et $n = 10$

Or on n'a pas trouvé les centiles pour $\chi^2_{0,025;10}$ et $\chi^2_{0,975,10}$; on a donc pris $\chi^2_{0,975;9}$ et $\chi^2_{0,025;9}$

00

$IC \simeq [5,053 ; 35,593]$ à 95 %

QUESTION # 4 (suite)

c) Nous allons comparer les moyennes de X_1 et X_2 ; pour cela nous posons :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

+1

On connait $\sigma^2_{X_1}$ et $\sigma^2_{X_2}$:
On calcule alors

$$Z_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$Z_0 = -0,290$

Le critère pour accepter ou rejeter H_0 avec ces conditions sont : $Z_0 < -z_\alpha$

or $-z_\alpha = -1,645$ or $-0,290 < -1,645$

$Z_0 < -z_\alpha$

De surcroît on accepte H_1 et on peut conclure que $\mu_2 > \mu_1$; et par conséquent dire qu'en moyenne, les motocyclettes conduisent plus vite que les voitures

QUESTION # 5 (5 points)

Vérifier si l'état des pièces dépend de la période de production revient à tester l'indépendance des variables X et Y. On veut déterminer si $X \sim Y$ (X est dépendant de Y)

On prend $\alpha = 0{,}05$

$n = 260$

On pose : H_0 : X et Y sont indépendantes

H_1 : X et Y sont dépendantes

Tableau de contingence à faire

+1

On a $\frac{O_{ij}}{n} = \hat{p}_{ij}$ $\sum_{j=1}^{n} \frac{O_{ij}}{n} = \hat{p}_{i.}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{O_{ij}}{n} = \hat{p}_{.j}$ Les valeurs doivent être > 5

On calcule

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

avec $E_{ij} =$

$E_{ij} = ??$

Si $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha;\nu}$ on rejette H_0

<u>QUESTION # 5</u> (suite)

[redacted]

QUESTION # 6 (10 points)

1/4

a)

Source variato	Σ carrés	nb ddl	Moy carré	F_0
Regression	SS_E	1	$\frac{SS_E}{1}$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Résidu	SS_R	18	$\frac{SS_R}{18}$	
Total	SS_T	19		

$$SS_E = (1-R^2)S_{yy}$$
$$= 0{,}2\,(\Sigma y_i - \bar{y})^2$$
$$= 0{,}2\left[(\Sigma y_i)^2 - 2\Sigma y_i \cdot \tfrac{1}{n}\Sigma y_i + (\tfrac{1}{n}\Sigma y_i)^2\right]$$
$$= 341$$

x

$$SS_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \frac{\left[(\Sigma x_i - \Sigma\bar{x})(\Sigma y_i - \Sigma\bar{y})\right]^2}{\Sigma x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)^2}$$
$$= \frac{\left[(26{,}25 - \frac{26{,}25}{20})(43{,}5 - \frac{43{,}5}{20})\right]^2}{76 - \frac{26{,}25^2}{20}}$$

X

$$SS_R = 25\,561$$

X

$$SST = 25\,902$$

X

$$MS_E = 341$$
$$MS_R = \frac{25\,561}{18} = 1420$$

QUESTION # 6 (suite) $S_{xy} = 557$ $S_{xx} = 41,55$

$R^2 = 0,80$ qui se rapproche relativement de 1, on peut dire que ce modèle est adéquat car supérieur à 0,70 ?

b) Pour dresser l'intervalle de confiance à 95% de β_1, on utilise la formule :

$$\beta_1 = \left[\hat{\beta}_1 - t_{0,025;18}\sqrt{\frac{MSE}{S_{xx}}} \; ; \; \beta_1 + t_{0,025;18}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}}\right]$$

Les données trouvées en a. étant questionnables, nous allons quand même poursuivre l'application ~~numérique~~ après le développement d'une expression littérale

$$\beta_1 = \left[\frac{S_{xy}}{S_{xx}} - t_{0,025;18}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}} \; ; \; \frac{S_{xy}}{S_{xx}} + t_{0,025;18}\sqrt{\frac{MS_E}{S_{xx}}}\right]$$

$t_{0,025;18} = 2,10$

$\beta_1 = [7,39 \, ; \, 19,42]$ Il s'agit de la pente de Y donc celui il influence significativement

1/3

QUESTION # 6 (suite)

c) Pour $X = 1,5$ IP :

$$Y_0 = \hat{Y}_0 \pm t_{0,025;18}\sqrt{MS_E\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x}-1,5)^2}{S_{xx}}\right]}$$

$$t_{0,025;18} = 2,10$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 1,5$$

$$= (\bar{Y} - \hat{\beta}_1) + \hat{\beta}_1 \times 1,5 \ ?$$

$$= \frac{1}{n}\sum Y_i + \hat{\beta}_1(1,5-1) = \frac{\sum Y_i}{n} + \frac{S_{xY}}{S_{xx}}(0,5)$$

$$= 2,175 + \frac{557}{41,55}\cdot 0,5 = 8,88 \ ?$$

1/3

$$Y_0 = \left[-29,9 \ ; \ 47,66\right]$$

QUESTION # 7 **(5 points)**

a)

QUESTION # 7 **(suite)**

<u>Page supplémentaire 1</u>

Page supplémentaire 2