POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Cahier d'examen

MTH1008

Sigle du cours

49

Identification de l'étudiant(e)		
Nom : XA	**Prénom :** JASON	
Signature :	**Matricule :** 2348245	**Groupe :** 06

Réservé
1. 2,75 /3
2. 2 /2
3. 3 /4
4. 2.75 /3
5. 3,5 /4
6. 3,75 /4
TOTAL:
17,75 /20

Sigle et titre du cours			
MTH1008 – Algèbre linéaire appliquée			
Professeur		***Groupe***	***Trimestre***
Houda Trabelsi		**TOUS**	**Automne 2024**
Jour	***Date***	***Durée***	***Heures***
Dimanche	**17 novembre 2024**	**2 heures**	**13h00 à 15h00**

Documentation	***Calculatrice***	***Outils électroniques***
☒ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	Non-programmable permise (AEP)	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières

1- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**

2- **Répondez directement sur le cahier dans les sections réservées à chaque question.**

3- **3 pages supplémentaires sont disponibles à la fin du cahier.**

4- **Écrivez votre démarche et vos réponses AU RECTO SEULEMENT. Le verso ne sera ni numérisé , ni corrigé.**

Cet examen contient **6** questions sur un total de 24 pages

(Excluant cette page).

La pondération de cet examen est de **20** %

Vous devez répondre sur : ☐ le questionnaire ☒ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

QUESTION # 1 **(3 points)** 2,75

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & k & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k-k^2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2-k+k^2 \end{bmatrix}$

$L_3 \to L_3 - kL_1$ $\qquad$ $L_3 \to L_3 - (k-k^2)L_2$

$-2-k+k^2 = 0$

$k_1 = -1 \quad k_2 = 2$

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{\cancel{1}{-1}, 2\}$, $rg(A) = 3$ et $\dim(Lgn(A)) = 3$
Si $k \in \{-1, 2\}$, $rg(A) = 2$ et $\dim(Lgn(A)) = 2$
$\forall k \in \mathbb{R}$

$\frac{1.5}{1.5}$

2. $k = 5 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2/5 \\ 0 & 1 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow rg(A) = 3$ et 3 colonnes
$\Rightarrow n - rg(A) = \dim(Ker(A))$
$\Rightarrow 3 - 3 = \dim(Ker(A))$
$\Rightarrow \dim(Ker(A)) = 0$
$\Rightarrow Ker(A) = \{\vec{0}\}$

$\frac{0,75}{0,75}$

3. $k = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Notons B = base de l'image de A. $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

~~Justifiez?~~

$\frac{0,5}{0,75}$

QUESTION #2 (suite)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 0,5/0,5

2. $\ker(A) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

0,5/0,5

$\Rightarrow \ker(A) = \{\vec{0}\}$

$\therefore$ Base de $\ker(A) = \emptyset$

$\Rightarrow \dim(\text{Base } \ker(A)) = 0$

3. Base $\text{Im}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\therefore \dim(\text{Base } \text{Im}(A)) = 3$

0,5/0,5

4. T est injective et surjective, donc bijective puisque sa matrice A associée canoniquement est inversible. En effet, nous pouvons vérifier cela à partir du fait que le noyau de A inclut seulement le vecteur nul et le fait que l'image de A est $\mathbb{R}^3$. Cela veut donc dire que les lignes et colonnes de A sont linéairement indépendantes; le déterminant de $A \neq 0$. L'injectivité et la surjectivité est prouvée par la solution unique pour tout $A\vec{x} = \vec{b}$ où $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, et ce pour tout $\vec{b}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$. 0,5/0,5

2/2

QUESTION #2 (suite)

QUESTION # 2 (2 points)

J'AI LAISSÉ MES DÉMARCHES POUR LA QUESTION #2 À LA PAGE 3 (PAGE POUR LA SUITE DE LA QUESTION 1).

QUESTION # 2 (suite)

QUESTION # *2* **(suite)**

QUESTION # 3 (4 points)

1/1

1. Faux, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible, mais non diagonalisable puisqu'elle admet seulement un vecteur propre : P et P^{-1} dans PDP^{-1} ne peuvent pas être formés selon une D diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale.

0,5/0,5

2. Vrai, par définition : et si $\overset{\text{matrice } A}{\text{de}}$ dimension $m \times n$: $n = rg(A) + \dim(\ker(A))$

La valeur maximale que $rg(A)$ peut prendre est n, le nombre de colonnes

$\therefore\ rg(A) \leq n$

0,25/0,5

3. Vrai : $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \implies \vec{x} = A^{-1}\lambda\vec{x}$

$\implies \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$ $\quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\implies \lambda^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$ $\quad \lambda \neq 0$?

$\implies A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$

Donc λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}

QUESTION # 3 (suite)

0,5/0,5

4. Vrai : $m \times n$ où $m=4$, $n=4$ et $n = rg(A) + \dim(Ker(A))$

$$\Rightarrow \dim(Ker(A)) = n - rg(A) = 4 - 3 = 1$$

0,5/0,5

5. Vrai, à partir de n vecteurs linéairement indépendants, les n vecteurs génèrent une base de l'espace vectoriel. Si on rajoute un autre vecteur à cet ensemble de n vecteurs, il sera possible de l'exprimer comme une combinaison linéaire des n vecteurs originaux. Cela rendrait l'ensemble linéairement dépendant.

0,25/1.

oui.

6. Vrai : puisque cela signifie qu'elles ont les mêmes valeurs propres. Les deux ~~matrices appliquent donc le même effet linéaire sous des bases différentes, ou similaires si elles sont égales.~~

Non.

QUESTION # 3 (suite)

QUESTION # 4 (3 points) $\frac{2.75}{3}$

1. $\det(A-\lambda I)=0$ $\quad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (3-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right)=0$ $\quad (2-\lambda)^2-1^2 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$

$\Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$

$\Rightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$

$\lambda_1=3 \quad \lambda_2=1$ $\quad$ où $m(\lambda)$ = multiplicité de λ

$m(\lambda_1)=2 \quad m(\lambda_2)=1$ ✓ $\quad \frac{0.75}{0.75}$

2. $\lambda=3 \Rightarrow \mathrm{Ker}(A-3I) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Notons $\left.\begin{array}{l} x_1 = t \\ x_3 = k \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$

$x_2 - x_3 = 0$
$\Rightarrow x_2 = x_3$
$= k$

$\mathrm{Ker}(A-3I) = \vec{x} = t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \forall t,k \in \mathbb{R}$

Base $\mathrm{Ker}(A-3I) = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ ✓ $1/1$

QUESTION # 4 (suite)

$\lambda = 1$ $\quad Ker(A - 1I) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Notons $x_3 = a \in \mathbb{R}$

$x_1 = 0$

$x_3 = a$

$x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = -x_3$

$= -a$

$Ker(A - 1I) : \vec{x} = a \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$Base(Ker(A - 1I)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\frac{0.5}{0.5}$

3. A est diagonalisable puisqu'on a 3 vecteurs propres, autant que la somme des multiplicités géométriques des valeurs propres.

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{0.5}{0.75}$

QUESTION # 4 (suite)

QUESTION # 4 (suite)

QUESTION # 5 **(4 points)**

1. $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow (2-\lambda)^2 + 3 = 0$

$\Rightarrow (2-\lambda)^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 0$

$\Rightarrow (2-\lambda+\sqrt{3}i)(2-\lambda-\sqrt{3}i) = 0$

$\lambda_1 = 2 - i\sqrt{3}$ ✓ $\quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 + i\sqrt{3}$ ✓ $\quad 1/1$

$\lambda(A) = \{2 - i\sqrt{3},\ 2 + i\sqrt{3}\}$

2. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{1-i^2} = \dfrac{1+2i+i^2}{2} = \dfrac{2i}{2} = i = 0 + i1$ ✓ $\quad 1/1$

3. $-16 = 16e^{i\pi}$ On cherche z pour $z^4 = -16$

$\Rightarrow z = \sqrt[4]{16e^{i(\pi+2\pi k)}}$

$= 2e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{4}}$

Pour $k=0$, $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ✓

$k=1$, $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ✓ $\quad 1/1$

$k=3$, $z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ ✓

$k=2$, $z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ ✓

QUESTION # 5 (suite)

$\curvearrowright$ module $= \sqrt{2}^5$

4. $\dfrac{(i(1+i))^5}{(3-4i)^3} = \dfrac{(i+i^2)^5}{(3-4i)^3} = \dfrac{(i-1)^5}{(3-4i)^3} = \dfrac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^5}{(5e^{-i\arctan(\frac{4}{3})})^3} = A$

$\hookrightarrow$ module $= 5^3$

$|A| = |\sqrt{2}^5 \cancel{\times} 5^3| \approx 114,3$

0,5/1

QUESTION # 5 (suite)

QUESTION # 5 (suite)

QUESTION # 6 (4 points)

1. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $|B| = -1$ => les colonnes et lignes de B sont linéairement indépendantes et forment une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elles génèrent $\mathbb{R}^3$.

↳ alors ? $-0,25$

2. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - 2L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + L_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ✓

QUESTION # 6 (suite)

3. $DQ = B$

$\Rightarrow D = BQ^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\cancel{4.\ [2]_D = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\cancel{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}}$

$\cancel{\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_B}$

$Q_{D \leftarrow B}$ $\quad [2]_D = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Q^{-1}_{B \leftarrow D}$

$$[2]_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} \; ?$$

<u>QUESTION # 6</u> (suite)

QUESTION # 6 (suite)

Page supplémentaire

Page supplémentaire

Page supplémentaire