POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

CAHIER D'EXAMEN

Matri[redacted]

11

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - HIVER 2023

Nom : [redacted]
(lettres moulées)

Prénom : [redacted]
(lettres moulées)

No du cours : **MTH2302D** Section : 01

Titre du cours : **PROBABILITÉS ET STATISTIQUE**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement le cahier.
2. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée**. La note **0** sera attribuée à toute réponse non justifiée.
3. N'utilisez que le **recto** pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon. Inscrivez votre **matricule** sur chaque page.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet. Vérifiez que le cahier compte bien **18 pages**.
6. **Documentation : 1 feuille résumée manuscrite 8,5x11 recto-verso.**
7. **Calculatrice non-programmable permise. Les appareils électroniques personnels (téléphones, tablettes, ordinateurs, etc.) sont interdits.**
8. ***Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question (données manquantes, données erronées, et.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.***

Réservé		
1.	2	**/2**
2.	2.25	**/3**
3.	4	**/4**
4.	4	**/4**
5.	1	**/4**
6.	2,5	**/3**
TOTAL		**/20**

15,75

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

[redacted]

Signature de l'étudiant(e)

Date : samedi, le 18 février 2023

Heure : 10h00 à 12h00

QUESTION N° 1 (2 points)

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

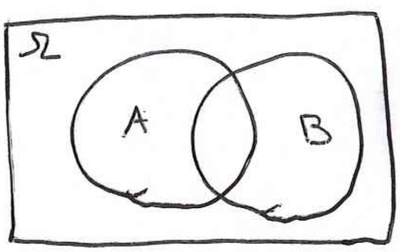
2

$$P(A) = 0{,}40; \quad P(\overline{B} \mid A) = 0{,}25; \quad P(B \mid \overline{A}) = 0{,}50.$$

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(B)$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.

RÉPONSE



$P(A) = 0{,}4 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0{,}6$

$P(\Omega) = 1$

$P(\bar{B}|A) = 0{,}25 = \dfrac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(\bar{B}\cap A) = 0{,}25 \cdot 0{,}4$

$\Rightarrow P(\bar{B}\cap A) = 0{,}1$

$P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} \Rightarrow P(B\cap\bar{A}) = 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}3$

a) $P(B) = (P(A) - P(\bar{B}\cap A)) + P(B\cap\bar{A})$

$= 0{,}3 + 0{,}3 = \boxed{0{,}6}$

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= P(A) + P(B) - (P(A) - P(\bar{B}\cap A))$

$= 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}3$

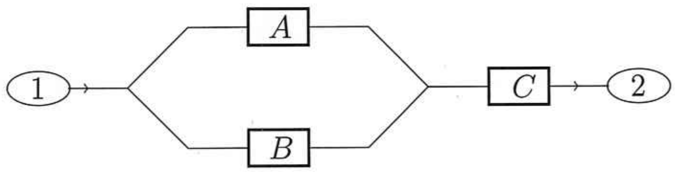
$= \boxed{0{,}7}$

QUESTION Nº 1 (suite)

2.25

QUESTION N° 2 **(3 points)**

On considère un système (voir schéma ci-dessous) constitué de trois composants A, B et C. Le système fonctionne s'il y a au moins un chemin, liant les points 1 et 2, constitué de composants qui fonctionnent. Les trois composants opèrent indépendamment les uns des autres et chacun a une fiabilité de 0,95.



Sachant que le système fonctionne, quelle est alors la probabilité que le composant B fonctionne ?

RÉPONSE

Évènement D : "Le système fonctionne"

$$P(D) = P(A \cap C) \cup P(B \cap C)$$

$$= 1-(1-0{,}95 \cdot 0{,}95) \cdot (1-0{,}95 \cdot 0{,}95)$$

Non

−0.5

$$\simeq 0{,}99$$

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{0{,}95 \cdot 0{,}95}{0{,}99}$$

Comment

−0.25

$$\simeq \boxed{0{,}91}$$

QUESTION Nº 2 (suite)

QUESTION N° 2 (suite)

4/4

QUESTION Nº 3 (4 points)

On suppose que chaque nouvelle que vous recevez provient (origine) d'une seule des trois sources suivantes : F, T, C. Les sources F et T sont des réseaux sociaux tandis que la source C est constituée des médias conventionnels (télé, radio, etc.).

On suppose que 50% des nouvelles que vous recevez proviennent de F, 30% proviennent de T et le reste provient de C. De plus, une étude montre que 60% des nouvelles de F sont fausses, cette proportion est de 40% pour les nouvelles de T et de 10% pour celles de C.

Vous venez de recevoir une nouvelle.

a) (2 points) Quelle est la probabilité que la nouvelle soit fausse ?

b) (2 points) Si la nouvelle est fausse, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne d'au moins une des sources des réseaux sociaux ?

RÉPONSE

$P(F) = 0{,}5$; $P(T) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}2$ (car $\Omega = 1$)

X : "Fausses Nouvelles"

a) $P(X) = P(F) \cdot P(X|F) + P(T) \cdot P(X|T) + P(C) \cdot P(X|C)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}1$

$= \frac{11}{25} = \boxed{0{,}44}$

2

b) $P(F \cup T | X) = \frac{P((F \cup T) \cap X)}{P(X)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}44} = \frac{21}{22}$

$\simeq \boxed{0{,}95}$

2

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION N° 4 (4 points)

4/4

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (1,5 point) Calculer la probabilité $P(Y > 3/4)$.

2.b) (1,5 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$K \int_{-1}^{1} (1+x)\,dx = 1$

$K \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

$2K = 1$

$\boxed{K = \frac{1}{2}}$

1

b) $P(Y > 3/4) = P(1 - X^2 > 3/4)$

$= P(X^2 < \frac{1}{4})$

$= P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$

$= \int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{2}(1+X)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[X + \frac{X^2}{2}\right]_{-0,5}^{0,5}$

$\boxed{P(Y > 3/4) = 0,5}$

1,5

2.b) $E(Y) = \int_{-1}^{1} (1 - X^2)\,\frac{1}{2}(1+X)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 + x - x^2 - x^3)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$

$= 2/3$

$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$

1,5

QUESTION N° 4 (suite)

QUESTION Nº 4 (suite)

QUESTION Nº 5 (4 points)

Une boîte contient 3 jetons dont les valeurs sont différentes. Un jeton a la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et un jeton a la valeur 2. On choisit au hasard et sans remise deux jetons de la boîte. équiprobable
Soit X la valeur du premier jeton obtenu, et Y la somme des valeurs des deux jetons obtenus.

a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$, en y incluant les valeurs possibles et les distributions marginales de X et de Y.

Laisser les probabilités sous forme fractionnaire (par exemple 1/4 au lieu de 0,25).

b) (2 points) Calculer l'écart-type de la variable $T = 20 + 2X - Y$.

RÉPONSE

y \ x	0	1	2	$P_Y(y)$
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$
$P_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

0

$P(0,0) = 0$
$P(1,0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(2,0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(0,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(0,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(2,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

b) $V(T) = V(20+2X-Y)$ $+V(Y)??$
$= (2)^2 (V(X)) \cancel{+} 2(2)(-1)\text{Cov}(X,Y)$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$= \left(0^2 \cdot \frac{2}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6}\right) - \left(0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6}\right)^2$
$= \frac{2}{3}$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$
$= \frac{2}{3}$ (~~Identique à V(X)~~)

$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$= \left(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}\right) - \mu_X \mu_Y$
$= \frac{2}{3} - 1 \cdot 1$
$= -\frac{1}{3}$ $\longrightarrow$

QUESTION Nº 5 (suite)

$$V(T) = 4 \cdot \frac{2}{3} + (2) \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{10}{3} \simeq 3{,}33$$

σ_T (Écart type) $= \sqrt{\sigma^2}$
$$= \sqrt{\frac{10}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{30}}{3}$$
$$\boxed{\simeq 1{,}83}$$

1

QUESTION N° 5 (suite)

QUESTION Nº 5 (suite)

QUESTION N° 6 (3 points)

On suppose que les autobus de la ville passent à un certain arrêt, durant le jour, selon un processus de Poisson de moyenne 5 autobus par heure.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'il passe à cet arrêt au moins 3 autobus durant les 25 prochaines minutes ?

b) (2 points) Étant donné qu'un usager attend l'autobus à cet arrêt depuis 5 minutes, quelle est la probabilité qu'un autobus arrive dans moins de 10 minutes à compter de maintenant ?

RÉPONSE

X : nb de bus de la ville qui passent à un certain arrêt ; $X \sim \text{Poi}(c)$

$\lambda = 5$; t : nb d'heures ; $c = \lambda t$

a) 25 min $= \frac{5}{12}$ d'heure $\Rightarrow t = \frac{5}{12} \Rightarrow c = \frac{25}{12}$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - \cancel{p_X(2)}$$
$$= 1 - \left(\cancel{\frac{e^{-\frac{25}{12}} \cdot \left(\frac{25}{12}\right)^2}{2!}}\right)$$
$$= 1 - (\simeq 0{,}27)$$
$$\boxed{= \cancel{0{,}73}}$$

0,5

b) Y : temps d'attente

$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$; $\lambda = 5$; $t = \frac{1}{6}$

$P(Y \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \mid Y > \frac{1}{12})$

$= P(Y \leq \frac{1}{6})$ (absence de mémoire)

$P(Y \leq \frac{1}{6}) = F_Y(\frac{1}{6})$

$= 1 - e^{-5 \cdot \frac{1}{6}}$

$\boxed{\simeq 0{,}56}$

2

QUESTION N° 6 (suite)

Page supplémentaire