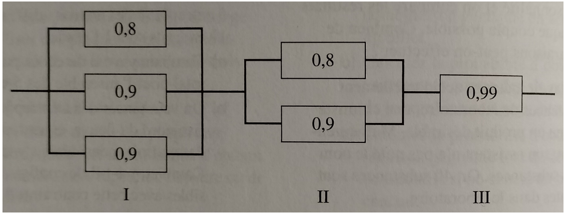
MTH2302D - TD 1

Vincent Perreault

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ex. 1 - Énoncé

Tous les composants sont indépendants. Quelle est la probabilité que le courant passe?



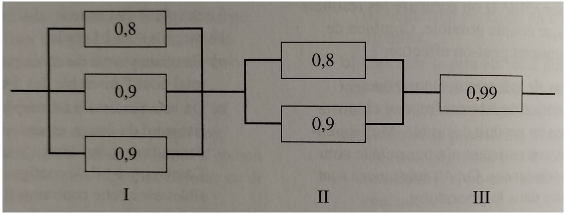
En série $\Rightarrow P(F) = P(C_1 \cap \ldots \cap C_n)$

Indép. $\Rightarrow P(F) = P(C_1) \cdot \ldots \cdot P(C_n)$

En parallèle $\Rightarrow P(F) = P(C_1 \cup \ldots \cup C_n)$

Indép. $\Rightarrow P(F) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(C_n))$

Ex. 1 - Réponse



En série $\Rightarrow P(F) = P(C_1 \cap \ldots \cap C_n)$

Indép. $\Rightarrow P(F) = P(C_1) \cdot \ldots \cdot P(C_n)$

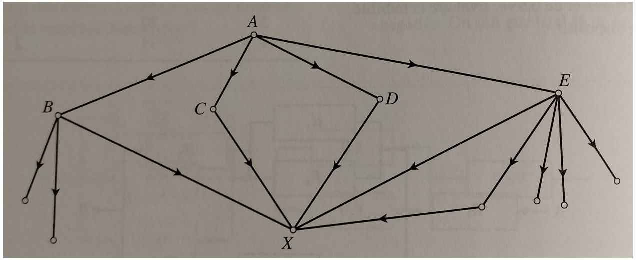
En parallèle $\Rightarrow P(F) = P(C_1 \cup \ldots \cup C_n)$

Indép. $\Rightarrow P(F) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(C_n))$

$$\begin{aligned} P(F) &= P(I)\, P(II)\, P(III) \\ &= \big(1 - (1 - P(I_1))\,(1 - P(I_2))\,(1 - P(I_3))\big)\,\big(1 - (1 - P(II_1))\,(1 - P(II_2))\big)\, P(III) \\ &= \big(1 - (1 - 0.8)\,(1 - 0.9)\,(1 - 0.9)\big)\,\big(1 - (1 - 0.8)\,(1 - 0.9)\big) \cdot 0.99 \approx 0.968 \end{aligned}$$

Ex. 2 - Énoncé

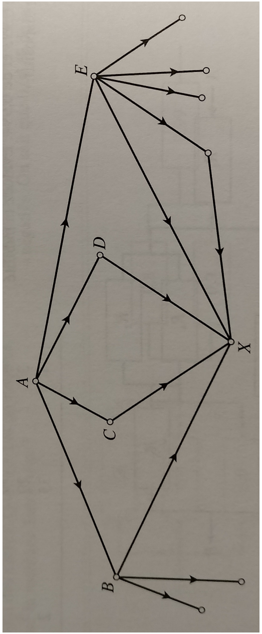
Chaque bifurcation est équiprobable.
Quelle est la prob. de partir de A et finir à X?



Ex. 2 - Réponse

Chaque bifurcation est équiprobable.
Quelle est la prob. de partir de A et finir à X?

$$
\begin{aligned}
P(A \to X) &= P((AB \cap BX) \cup (AC \cap CX) \cup (AD \cap DX) \\
&\qquad \cup (AE \cap EX) \cup (AE \cap EF \cap FX)) \\
&= P(AB \cap BX) + P(AC \cap CX) + P(AD \cap DX) \\
&\quad + P(AE \cap EX) + P(AE \cap EF \cap FX) \\
&= P(AB)\, P(BX|AB) + P(AC)\, P(CX|AC) \\
&\quad + P(AD)\, P(DX|AD) + P(AE)\, P(EX|AE) \\
&\quad + P(AE)\, P(EF|AE)\, P(FX|AE \cap EF) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{41}{60}
\end{aligned}
$$



Ex. 3 - Énoncé

Les trois options les plus populaires d'un certain type de voiture sont :

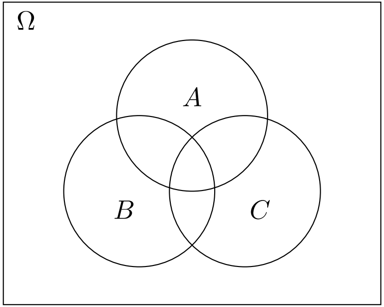
A Boîte automatique.
B Direction assistée
C Radio.

Une analyse des ventes a montré que les acheteurs choisissent les options dans les proportions suivantes :

- Option A : 70%.
- Option B : 75%.
- Option C : 80%.
- Option A ou B : 80%.
- Option A ou C : 85%.
- Option B ou C : 90%.
- Option A ou B ou C : 95%.

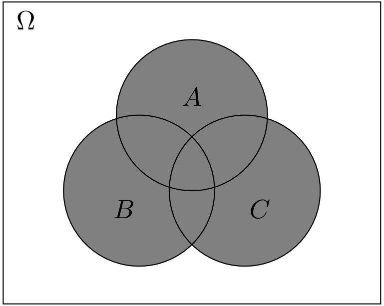
Calculez les probabilités des événements suivants :

D L'acheteur choisit une des trois options.
E L'acheteur choisit la radio seulement.
F L'acheteur ne choisit aucune des options.
G L'acheteur choisit exactement une des trois options.



Ex. 3 - Réponse

D L'acheteur choisit une des trois options.



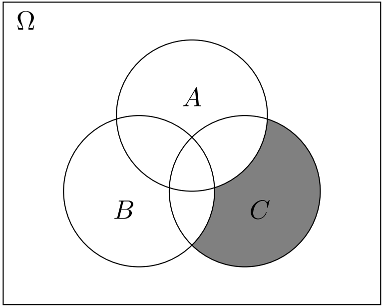
$$P(D) = P(A \cup B \cup C) = 0.95$$

A Boîte automatique.
B Direction assistée
C Radio.

- Option A : 70%.
- Option B : 75%.
- Option C : 80%.
- Option A ou B : 80%.
- Option A ou C : 85%.
- Option B ou C : 90%.
- Option A ou B ou C : 95%.

Ex. 3 - Réponse

E L'acheteur choisit la radio seulement.



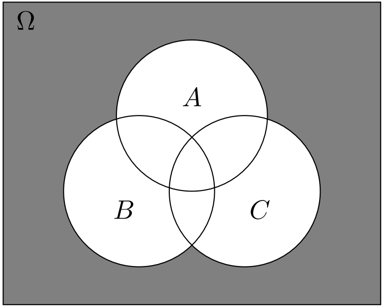
A Boîte automatique.
B Direction assistée
C Radio.

- Option A : 70%.
- Option B : 75%.
- Option C : 80%.
- Option A ou B : 80%.
- Option A ou C : 85%.
- Option B ou C : 90%.
- Option A ou B ou C : 95%.

$$P(E) = P(C \cap \overline{(A \cup B)}) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cup B)$$
$$= 0.95 - 0.80 = 0.15$$

Ex. 3 - Réponse

F L'acheteur ne choisit aucune des options.



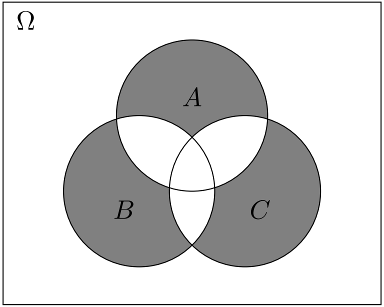
A Boîte automatique.
B Direction assistée
C Radio.

- Option A : 70%.
- Option B : 75%.
- Option C : 80%.
- Option A ou B : 80%.
- Option A ou C : 85%.
- Option B ou C : 90%.
- Option A ou B ou C : 95%.

$$P(F) = P(\overline{(A \cup B \cup C)}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$
$$= 1 - 0.95 = 0.05$$

Ex. 3 - Réponse

G L'acheteur choisit exactement une des trois options.



A Boîte automatique.
B Direction assistée
C Radio.

- Option A : 70%.
- Option B : 75%.
- Option C : 80%.
- Option A ou B : 80%.
- Option A ou C : 85%.
- Option B ou C : 90%.
- Option A ou B ou C : 95%.

$$
\begin{aligned}
P(G) &= P((A \cap \overline{(B \cup C)}) \cup (B \cap \overline{(A \cup C)}) \cup (C \cap \overline{(A \cup B)})) \\
&= 3\, P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C) - P(A \cup C) - P(A \cup B) \\
&= 3 \cdot 0.95 - 0.9 - 0.85 - 0.8 = 0.3
\end{aligned}
$$

Ex. 4 - Énoncé

Une étude de marché sur les préférences des consommateurs de trois marques de voitures A, B, et C en fonction du niveau de leur revenu (F : Faible, M : Moyen, E : Élevé) a donné lieu au tableau suivant :

marque \ revenu	F	M	E
A	0,10	0,13	0,02
B	0,20	0,12	0,08
C	0,10	0,15	0,10

Ω

On peut y voir par exemple que la probabilité qu'un consommateur à faible revenu préfère la marque A est de 10%, c'est-à-dire $P(F \cap A) = 0{,}1$.

Calculez les probabilités $P(B|E)$, $P(M|C)$, $P(A|M)$, $P(M|A)$, $P(M \cap B|C)$, et $P(F \cup M|C)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ex. 4 - Réponse

revenu / marque	F	M	E
A	0,10	0,13	0,02
B	0,20	0,12	0,08
C	0,10	0,15	0,10

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(B \cap E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)}$$
$$= \frac{0.08}{0.02 + 0.08 + 0.1} = 0.4$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(M|C) = \frac{P(C \cap M)}{P(C)} = \frac{P(C \cap M)}{P(C \cap F) + P(C \cap M) + P(C \cap E)}$$
$$= \frac{0.15}{0.1 + 0.15 + 0.1} \approx 0.429$$

Ex. 4 - Réponse

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A \cap M)}{P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M)}$$

$$= \frac{0.13}{0.13 + 0.12 + 0.15} = 0.325$$

marque \ revenu	F	M	E
A	0,10	0,13	0,02
B	0,20	0,12	0,08
C	0,10	0,15	0,10

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(M|A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{P(A \cap M)}{P(A \cap F) + P(A \cap M) + P(A \cap E)}$$

$$= \frac{0.13}{0.1 + 0.13 + 0.02} = 0.52$$

Ex. 4 - Réponse

$$P(B \cap M|C) = \frac{P(B \cap C \cap M)}{P(C)} = 0$$

marque \ revenu	F	M	E
A	0,10	0,13	0,02
B	0,20	0,12	0,08
C	0,10	0,15	0,10

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} P(F \cup M|C) &= \frac{P(C \cap (F \cup M))}{P(C)} \\ &= \frac{P(C \cap F) + P(C \cap M)}{P(C \cap F) + P(C \cap M) + P(C \cap E)} \\ &= \frac{0.1 + 0.15}{0.1 + 0.15 + 0.10} \approx 0.714 \end{aligned}$$

Ex. 5 - Énoncé

Une centrale hydroélectrique possède deux génératrices. À cause de l'entretien ou d'une panne occasionnelle, les génératrices peuvent être hors d'usage.
On définit les événements :

- A La première génératrice est hors d'usage.
- B La deuxième génératrice est hors d'usage.

Par expérience, on estime les probabilités de ces événements à $P(A) = 0{,}01$ et $P(B) = 0{,}02$.

Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$. Dans ces conditions, on observe une demande accrue de courant pour la climatisation. La capacité de la centrale à faire face à cette demande est :

- S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
- F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
- M (marginale) : dans les autres cas.

On considère que les événements A, B et T sont indépendants.

Si X, Y disjoints
$\Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hor

Si X, Y indép.
$\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$

5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

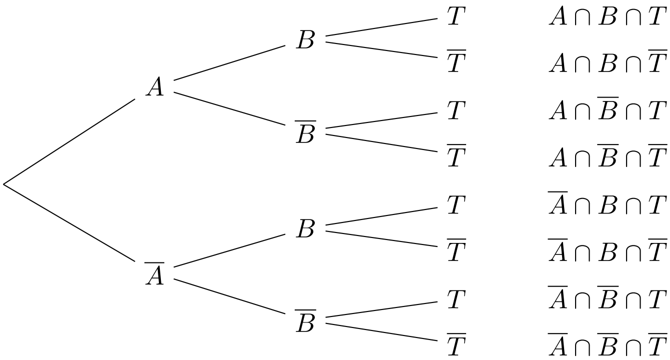
Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

$\boxed{A, B \text{ et } T \text{ sont indépendants}}$

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.



Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

$\boxed{A, B \text{ et } T \text{ sont indépendants}}$

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

$$\begin{aligned}\Omega = &(A \cap B \cap T) \cup (A \cap B \cap \overline{T}) \cup (A \cap \overline{B} \cap T) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{T}) \\ &\cup (\overline{A} \cap B \cap T) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{T}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap T) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{T})\end{aligned}$$

$$S = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{T}$$

$$\begin{aligned}F &= (A \cap \overline{B} \cap T) \cup (\overline{A} \cap B \cap T) \cup (A \cap B \cap T) \\ &= (A \cup B) \cap T\end{aligned}$$

$$M = \overline{(S \cup F)} = \Omega \setminus (S \cup F) = (A \cap B \cap \overline{T}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{T}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{T}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap T)$$

Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

$\boxed{A, B \text{ et } T \text{ sont indépendants}}$

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

Si X, Y disjoints $\Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$ Si X, Y indép. $\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$

$$\begin{aligned}
P(\text{exact. 1 gén. hors d'usage}) &= P((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \\
&= P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \\
&= P(\overline{A})\, P(B) + P(A)\, P(\overline{B}) \\
&= (1 - P(A))\, P(B) + P(A)\, (1 - P(B)) \\
&= (1 - 0.01) \cdot 0.02 + 0.01 \cdot (1 - 0.02) = 0.0296
\end{aligned}$$

Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

$\boxed{A, B \text{ et } T \text{ sont indépendants}}$

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

Si X, Y disjoints $\Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

Si X, Y indép. $\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$

$$\begin{aligned} P(S) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{T}) &= P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(\overline{T}) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(T)) \\ &= (1 - 0.01)(1 - 0.02)(1 - 0.3) \approx 0.679 \end{aligned}$$

Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

A, B et T sont indépendants

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

Si X, Y disjoints $\Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$ Si X, Y indép. $\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P((A \cap \overline{B} \cap T) \cup (\overline{A} \cap B \cap T) \cup (A \cap B \cap T)) \\
&= P(A \cap \overline{B} \cap T) + P(\overline{A} \cap B \cap T) + P(A \cap B \cap T) \\
&= P(A)\,P(\overline{B})\,P(T) + P(\overline{A})\,P(B)\,P(T) + P(A)\,P(B)\,P(T) \\
&= P(A)\,(1 - P(B))\,P(T) + (1 - P(A))\,P(B)\,P(T) + P(A)\,P(B)\,P(T) \\
&= 0.01 \cdot (1 - 0.02) \cdot 0.3 + (1 - 0.01) \cdot 0.02 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.3 = 0.00894
\end{aligned}
$$

Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

A, B et T sont indépendants

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

Si X, Y disjoints $\Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$ Si X, Y indép. $\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$

$$\begin{aligned}
P(F) &= P((A \cup B) \cap T) \\
&= P(T)\, P(A \cup B) \\
&= P(T)\, (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= P(T)\, (P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)) \\
&= 0.3 \cdot (0.01 + 0.02 - 0.01 \cdot 0.02) = 0.00894
\end{aligned}$$

Ex. 5 - Réponse

A La première génératrice est hors d'usage. $P(A) = 0{,}01$
B La deuxième génératrice est hors d'usage. $P(B) = 0{,}02$
Une température supérieure à 30°C correspond à l'événement T de probabilité $P(T) = 0{,}30$.

$\boxed{A, B \text{ et } T \text{ sont indépendants}}$

S (satisfaisante) : si les deux génératrices fonctionnent et la température est inférieure à 30°C.
F (faible) : si une des deux génératrices est hors d'usage et la température est supérieure à 30°C.
M (marginale) : dans les autres cas.

5.1. Décrivez l'espace échantillon Ω avec A, B et T.
5.2. Exprimez les événements S, F, M en fonction de A, B et T.
5.3. Calculez la probabilité qu'il y ait exactement une génératrice hors d'usage.
5.4. Calculez $P(S)$, $P(F)$ et $P(M)$.

Si X, Y disjoints $\Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

Si X, Y indép. $\Rightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$

$$\begin{aligned}
P(M) &= P(\overline{(S \cup F)}) \\
&= 1 - P(S \cup F) \\
&= 1 - (P(S) + P(F)) \\
&= 1 - (0.679 + 0.00894) \approx 0.312
\end{aligned}$$

Ex. 6 - Énoncé

La quantité d'eau emmagasinée dans un réservoir peut être représentée par trois états :

- R Rempli.
- M À moitié rempli.
- V Vide.

À cause du caractère aléatoire du débit d'eau entrant dans le réservoir ainsi que du débit sortant pour satisfaire la demande, la quantité d'eau emmagasinée peut changer d'un état à l'autre durant la saison. Les probabilités de transition (conditionnelles) d'un état à l'autre entre le début et la fin de la saison sont :

début \ fin	V_f	M_f	R_f
V_d	0,4	0,5	0,1
M_d	0,3	0,3	0,4
R_d	0,1	0,7	0,2

Par exemple, $P(M_f|V_d) = 0{,}5$.

Supposons qu'au début de la première saison, $P(V_d) = 0{,}1$, $P(M_d) = 0{,}7$ et $P(R_d) = 0{,}2$.

Calculez les probabilités que le réservoir

6.1. Soit rempli à la fin de la première saison.

6.2. Ne soit pas vide à la fin de la première saison.

6.3. Soit rempli à la fin de la deuxième saison.

6.4. Ne soit pas vide à la fin de la deuxième saison.

Et enfin

6.5. Déterminez les probabilités de chaque état après trois saisons.

$$P(A) = \sum_{i}^{n} P(B_i)\, P(A|B_i)$$

où $B_1, \ldots, B_n$: partition de Ω

Ex. 6 - Réponse

$$P(\text{rempli à la fin de la première saison})$$

$$P(R_f) = P(V_d)\,P(R_f|V_d) + P(M_d)\,P(R_f|M_d) + P(R_d)\,P(R_f|R_d)$$
$$= 0.1 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.33$$

$$P(\text{pas vide à la fin de la première saison})$$

$$P(\overline{V_f}) = 1 - P(V_f)$$

$$P(V_f) = P(V_d)\,P(V_f|V_d) + P(M_d)\,P(V_f|M_d) + P(R_d)\,P(V_f|R_d)$$
$$= 0.1 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.27$$

$$P(\overline{V_f}) = 1 - 0.27 = 0.73$$

R Rempli.
M À moitié rempli.
V Vide.

début \ fin	V_f	M_f	R_f
V_d	0,4	0,5	0,1
M_d	0,3	0,3	0,4
R_d	0,1	0,7	0,2

$P(V_d) = 0{,}1$, $P(M_d) = 0{,}7$ et $P(R_d) = 0{,}2$.

$$P(A) = \sum_i^n P(B_i)\,P(A|B_i)$$

Ex. 6 - Réponse

$$P(\text{rempli à la fin de la deuxième saison})$$

$$P(R_f^2) = P(V_d^2)\,P(R_f^2|V_d^2) + P(M_d^2)\,P(R_f^2|M_d^2) + P(R_d^2)\,P(R_f^2|R_d^2)$$
$$= 0.27 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.33 \cdot 0.2 = 0.253$$

$$P(\text{pas vide à la fin de la deuxième saison})$$

$$P(\overline{V_f^2}) = 1 - P(V_f^2)$$

$$P(V_f^2) = P(V_d^2)\,P(V_f^2|V_d^2) + P(M_d^2)\,P(V_f^2|M_d^2) + P(R_d^2)\,P(V_f^2|R_d^2)$$
$$= 0.27 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.33 \cdot 0.1 = 0.261$$

$$P(\overline{V_f^2}) = 1 - 0.27 = 0.73$$

R Rempli.
M À moitié rempli.
V Vide.

fin / début	V_f	M_f	R_f
V_d	0,4	0,5	0,1
M_d	0,3	0,3	0,4
R_d	0,1	0,7	0,2

$$P(V_d^2) = 0.27$$
$$P(M_d^2) = 0.4$$
$$P(R_d^2) = 0.33$$

$$P(A) = \sum_i^n P(B_i)\,P(A|B_i)$$

Ex. 6 - Réponse

Déterminez les prob. de chaque état après trois saisons.

R Rempli.
M À moitié rempli.
V Vide.

fin / début	V_f	M_f	R_f
V_d	0,4	0,5	0,1
M_d	0,3	0,3	0,4
R_d	0,1	0,7	0,2

$$P(R_f^3) = P(V_d^3)\,P(R_f^3|V_d^3) + P(M_d^3)\,P(R_f^3|M_d^3) + P(R_d^3)\,P(R_f^3|R_d^3)$$
$$= 0.261 \cdot 0.1 + 0.486 \cdot 0.4 + 0.253 \cdot 0.2 = 0.2711$$

$$P(V_f^3) = P(V_d^3)\,P(V_f^3|V_d^3) + P(M_d^3)\,P(V_f^3|M_d^3) + P(R_d^3)\,P(V_f^3|R_d^3)$$
$$= 0.261 \cdot 0.4 + 0.486 \cdot 0.3 + 0.253 \cdot 0.1 = 0.2755$$

$$P(V_d^3) = 0.261$$
$$P(M_d^3) = 0.486$$
$$P(R_d^3) = 0.253$$

$$P(M_f^3) = 1 - P(R_f^3) - P(V_f^3)$$
$$= 1 - 0.2711 - 0.2755 = 0.4534$$

$$P(A) = \sum_i^n P(B_i)\,P(A|B_i)$$