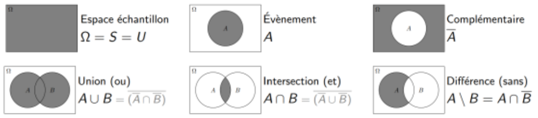
Rappels Chapitre 1 - Introduction aux Probabilités

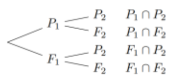


Cas général — *A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$)*

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conditionnelle (sachant) — *A et B indép.*

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$ $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$



Rappels Chapitre 3 - Probabilités Conjointes

- Loi conjointe de X, Y : $p(x,y) = P((X = x) \cap (Y = y))$
- Loi marginale de Y : $p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p(x,y)$
- Loi conditionnelle de Y sachant X : $p_{Y|X=x}(y) = \dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}$ $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Covariance : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xy \cdot p(x,y) - \mu_X \mu_Y$

  Si X et Y indép. $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
- Coefficient de corrélation : $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
- Si $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, alors $E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

  et $Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

Rappels Chapitre 5 - Lois Continues

- Uniforme : *une valeur dans un intervalle $[\alpha, \beta]$ où chacune des valeurs possibles a la même probabilité*

  $X \sim U(\alpha, \beta)$, $\quad E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\quad Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

  $R_X = [\alpha, \beta]$, $\quad f_X(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$, $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$

- Exponentielle : *temps d'attente avant le premier évènement d'un processus de Poisson de taux λ par unité de temps*

  $X \sim Exp(\lambda)$, $\quad E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

  $R_X = [0, \infty[$, $\quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

  absence de mémoire : $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$

Rappels Chapitre 1 - Introduction aux Probabilités

- $P(A) = \sum_i^n P(B_i) P(A|B_i)$ où $B_1, \ldots, B_n$: partition de Ω
- Série $\Rightarrow P(F) = P(C_1 \cap \ldots \cap C_n)$, Indép. $\Rightarrow P(F) = P(C_1) \cdot \ldots \cdot P(C_n)$
- Paral. $\Rightarrow P(F) = P(C_1 \cup \ldots \cup C_n)$, Indép. $\Rightarrow P(F) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(C_n))$
- Permutations (d'ordre) de n objets distinguables: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Arrangements (ordonnés) de r objets parmi n distinguables: $\frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$
- Combinaisons (non-ordonnées) de r objets parmi n distinguables: $\frac{n!}{r!(n-r)!} =: \binom{n}{r}$

Rappels Chapitre 4 - Lois Discrètes

- Bernouilli : *expérience binaire avec probabilité de succès p*

  $X \sim \text{Bernouilli}(p)$, $\quad E(X) = p$, $\quad Var(X) = p(1-p)$

  $R_X = \{1 \text{ (succès)}, 0 \text{ (échec)}\}$, $\quad p_X(1) = p$, $\quad p_X(0) = 1 - p$
- Binomiale : *nombre de succès après n répétitions d'une expérience binaire avec probabilité de succès p*

  $X \sim B(n,p)$, $\quad E(X) = np$, $\quad Var(X) = np(1-p)$

  $R_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $\quad p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

  $p_X(x) \approx p_{\text{Poi}(np)}(x)$ si $n \geq 100$, $p < 0.1$, $np \leq 10$
- Géométrique : *nombre de répétitions pour avoir un premier succès (de proba. p)*

  $X \sim G(p)$, $\quad E(X) = \frac{1}{p}$, $\quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

  $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\quad p_X(x) = p(1-p)^{x-1}$, $\quad F_X(x) = 1 - (1-p)^x$

  absence de mémoire : $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$

Rappels Chapitre 2 - Variables Aléatoires

Discret	Continu
$R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$	$R_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\} = [a,b]$
$p_X(x) = P(X = x)$	$f_X(x) = \frac{d}{dx} P(X \leq x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$	$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx'$
$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$	$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
$E(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) \cdot p_X(x)$	$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$
$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$	$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$
$\sigma_X^2 = E((X-\mu_X)^2) = E(X^2) - (\mu_X)^2$	$\sigma_X^2 = E((X-\mu_X)^2) = E(X^2) - (\mu_X)^2$

Y discrète avec $Y = H(X)$ et X continue $\Rightarrow p_Y(y) = \int_{\{x: H(x) = y\}} f_X(x)dx$

8

Rappels Chapitre 4 - Lois Discrètes

- Hypergéométrique : *on tire n objets d'un ensemble de N objets dont D sont particuliers, X est le nombre d'objets particuliers tirés*

  $X \sim H(n, N, D)$, $\quad E(X) = n\frac{D}{N}$, $\quad Var(X) = n\frac{D}{N}\frac{N-D}{N}\frac{N-n}{N-1}$

  $R_X = \{\max\{0, n-(N-D)\}, \ldots, \min\{n, D\}\}$, $\quad p_X(x) = \dfrac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

  $p_X(x) \approx p_{B(n, \frac{D}{N})}(x)$ si $\frac{n}{N} \leq \frac{1}{10}$
- Poisson : *nombre d'évènements réalisés sur une mesure m (de temps, de distance, de surface, etc.) avec un taux λ par unité de mesure*

  $X \sim Poi(c)$ où $c = \lambda m$, $\quad E(X) = c$, $\quad Var(X) = c$

  $R_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\quad p_X(x) = \frac{e^{-c}c^x}{x!}$

QUESTION N°1 (2 points)

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

$$P(B) = 0{,}60; \quad P(A|\bar{B}) = 0{,}75.$$

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cap \bar{B})$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

RÉPONSE

$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$P(\bar{B}) = 0{,}4$

$P(A|\bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

a) $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}75 \cdot 0{,}4$

$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0{,}3}$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap \bar{B}) - P(B)$

$= 1 - 0{,}3 - 0{,}6$

$\boxed{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}1}$

QUESTION N°2 (3 points) (3)

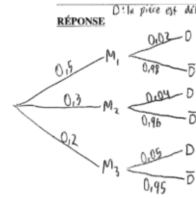
Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses produites par ces machines sont respectivement de 2%, 4% et 5%. On prend au hasard une pièce fabriquée dans cette usine.

a) (1 point) Quelle est la probabilité que cette pièce ne soit pas défectueuse ?

b) (2 points) Si on constate que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ne provienne pas de la machine M_2 ?

RÉPONSE

D: la pièce est défectueuse



a) $P(\bar{D}) = P(\bar{D}|M_1) + P(\bar{D}|M_2) + P(\bar{D}|M_3)$

$= 0{,}5(0{,}98) + 0{,}3(0{,}96) + 0{,}2(0{,}95)$

$\boxed{P(\bar{D}) = 0{,}968}$

$P(D) = 1 - 0{,}968 = 0{,}032$

b) $P(\bar{M_2}|D) = \dfrac{P(\bar{M_2} \cap D)}{P(D)}$

$P(\bar{M_2} \cap D) = P(M_1|D) + P(M_3|D)$

$= 0{,}5(0{,}02) + 0{,}2(0{,}05)$

$= 0{,}02$

$P(\bar{M_2}|D) = \dfrac{0{,}02}{0{,}032} = 0{,}625$

Réponse: La probabilité est de 0,625

QUESTION N°3 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (2 points) Déterminer la valeur de la constante k et la fonction de répartition de X, $F_X(x)$.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (2 points) Calculer la probabilité $P(Y \geq 3/4)$.

2.b) (1 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$K\int_{-1}^{1}(1+x)dx = 1$

$K\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

$2K = 1$

$\boxed{K = \frac{1}{2}}$

Si $x \leq -1$, alors $F(x) = 0$

Si $-1 < x < 1$, alors

$\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(1+t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$= x + \frac{x^2}{2}$

Si $x \geq 1$, alors $F(x) = 1$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(1)

b)

1) $P(Y \geq \frac{3}{4}) = P(1 - x^2 \geq \frac{3}{4})$

$= P(x^2 \leq \frac{1}{4})$

$= P(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$

$= \int_{-0{,}5}^{0{,}5} \frac{1}{2}(1+x)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-0{,}5}^{0{,}5}$

$\boxed{P(Y \geq \frac{3}{4}) = 0{,}5}$

b) 2) $E(Y) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{1}{2}(1+x)dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 + x - x^2 - x^3)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$

$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$

QUESTION N°4 (4 points)

La fonction de masse conjointe $p(x,y)$ d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est partiellement donnée dans le tableau suivant :

y \ x	-1	0	1	$p_Y(y)$
0	0,10	v_1 0,1	0,05	0,25
1	0,20	0,4 v_2	v_3	0,75
$p_X(x)$	0,3	0,5	0,2	1

On sait que $P(Y = 1) = 3P(Y = 0)$, c'est-à-dire $p_Y(1)$ égale trois fois $p_Y(0)$.

De plus, la fonction de répartition de la variable X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0{,}30 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0{,}80 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

a) (2 points) Compte tenu des données ci-dessus, trouver les valeurs manquantes v_1, v_2 et v_3 du tableau.

b) (2 points) Calculer la variance de la variable $W = 10 - 2X + Y$.

a)

RÉPONSE

$P_X(-1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$

$P_Y(0) + 3P_Y(0) = 1$

$4P_Y(0) = 1$

$P_Y(0) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P_Y(1) = 3(0{,}25) = 0{,}75$

$P_Y(0) = 0{,}1 + V_1 + 0{,}05$

$V_1 = 0{,}25 - 0{,}1 - 0{,}05$

$\boxed{V_1 = 0{,}1}$

$P_X(0) = F(0) - F(-1)$

$= 0{,}8 - 0{,}3$

$= 0{,}5$

$P_X(1) = F(1) - F(0)$

$= 1 - 0{,}8$

$= 0{,}2$

$V_2 = P_X(0) - V_1 = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$

$\boxed{V_2 = 0{,}4}$

$V_3 = P_Y(1) - 0{,}2 - V_2$

$= 0{,}75 - 0{,}2 - 0{,}4$

$\boxed{V_3 = 0{,}15}$

$X \in R_X = \{-1, 0, 1\}$

$Y \in R_Y = \{0, 1\}$

(2)

QUESTION N°4 (suite)

b) $E(x) = \sum_{x \in R_x} x\, p_x(x)$

$= -0{,}1$

$E(Y) = \sum_{y \in R_y} y\, p_Y(y)$

$= 0{,}75$

$E(XY) = \sum_{x \in R_x} \sum_{y \in R_y} xy\, p(x,y)$

$= -0{,}05$

$Cov(x,y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$= \cancel{-0{,}2}$

$E(x^2) = \sum_{x \in R_x} x^2 p_x(x)$

$= 0{,}5$

$E(Y^2) = \sum_{y \in R_y} y^2 p_Y(y)$

$= 0{,}75$

$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2$

$= 0{,}49$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$= 0{,}1875$

b) (suite)

$V(W) = (-2)^2 V(x) + V(Y) + 2(-2) Cov(x,y)$

$\boxed{V(W) = \cancel{4{,}9475}}$

(1,5)

QUESTION N°5 (3 points) (3/3)

Considérons un examen constitué de plusieurs questions indépendantes et dont les réponses sont à choix multiples. Pour chaque question on propose un choix de 4 réponses, dont une seule est bonne. Considérons un étudiant qui répond à toutes les questions de l'examen mais en choisissant chaque fois une réponse au hasard.

a) (1 point) Si l'étudiant n'a aucune bonne réponse dans les deux premières questions, quelle est la probabilité qu'il ait une première bonne réponse seulement après la cinquième question ?

b) (2 points) Supposons maintenant que l'examen contient 10 questions, que chaque bonne réponse donne 2 points, et qu'on soustrait 0,5 point pour chaque mauvaise réponse. Déterminer la moyenne et l'écart type de la note que l'étudiant obtiendra à cet examen

a)

RÉPONSE

X: nb de questions avant d'avoir une bonne réponse

$X \sim G(0{,}25)$

$p_X = 0{,}25(0{,}75)^{x-1}$ si $x = 1, 2, \ldots$

$P(X > 5 | X > 2) = P(X > 3)$

$= 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - (P_X(1) + P_X(2) + P_X(3))$

$= \frac{27}{64}$

Réponse: Elle est de $\frac{27}{64}$

(1)

QUESTION N°5 (suite)

W: Note de l'étudiant à l'examen

Y: nb de bonnes réponses parmi 10

$Y \sim B(10; 0{,}25)$

$W = 2Y - 0{,}5(10 - Y)$

$= 2Y - 5 + 0{,}5Y$

$W = 2{,}5Y - 5$

$E(Y) = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$

$E(W) = 2{,}5(E(Y)) - 5$

$\boxed{E(W) = 1{,}25 \text{ points}}$

$V(Y) = 10 \cdot 0{,}25(0{,}75)$

$= 1{,}875$

$\sigma_W = \sqrt{(2{,}5)^2 V(Y)}$

$\sigma_W = \frac{5\sqrt{30}}{8}$

$\boxed{\sigma_W \approx 3{,}4233 \text{ points}}$

(2)

QUESTION N° 6 (3 points)

On suppose que la durée de vie d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 5 ans.

a) (1 point) Sachant qu'un composant de ce type fonctionne depuis 3 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant au moins 2 autres années ?

b) (2 points) Quatre composants sont mis en fonction et opèrent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que deux ans plus tard, au moins deux des quatre composants ne fonctionnent plus ?

2,25/3

RÉPONSE

a)

X : durée de vie d'un composant en année

$X \sim Exp(\lambda)$

$\frac{1}{\lambda} = E(x)$

$\frac{1}{\lambda} = 5$

$\lambda = \frac{1}{5}$

$X \sim Exp(\frac{1}{5})$

a) $P(X \geq 5 \mid X \geq 3) = P(X \geq 2)$ 0,75

$= e^{\frac{-2}{5}}$

$\boxed{\text{Réponse: La probabilité est de } e^{\frac{-2}{5}}}$

= ?? 0,67

b) Y : nb de composants non fonctionnels

$Y \sim B(4, p)$

$p = P(X < 2)$

$= 1 - P(X \geq 2)$

$= 1 - e^{\frac{-2}{5}}$

$P_Y = C_y^4 (1 - e^{\frac{-2}{5}})(e^{\frac{-2}{5}})^{4-y}$ si $y = 0,1,2,3,4$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$

$= 1 - (p_Y(0) + p_Y(1))$ 1,5/2

$\approx 0,5362$

$\boxed{\text{Réponse: La probabilité est d'environ } 0,5362}$

QUESTION N° 2 (4 points)

2,25

Une boîte contient trois pièces de monnaie A, B et C d'apparence identiques. Les pièces A et C sont parfaitement équilibrées, mais pas la pièce B. En effet pour chaque lancer, la pièce B a une probabilité de 3/4 de présenter le côté *Face*. Une pièce est choisie au hasard de la boîte et cette pièce est ensuite lancée 3 fois.

tire une pièce + lance 3 fois

a) (2 point) Calculer la probabilité que la pièce présente exactement 2 fois le côté *Face*.

b) (2 points) Si la pièce présente exactement 2 fois le côté *Face*, quelle est la probabilité qu'il ne s'agisse pas de la pièce B ?

a) 2/3 * 2~B(3,1/2) + 1/3*2~B(3,3/4)

b) (2/3 * 2~B(3,1/2))/(réponse a))2

QUESTION N° 4 (4 points)

Une boîte contient six jetons ayant des valeurs réparties de la façon suivante : deux jetons ont la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et trois jetons ont la valeur 2. On pige au hasard, successivement et sans remise, deux jetons de la boîte. Soit X la valeur du premier jeton, et Y celle du deuxième jeton.

1er 2ème

a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$ en incluant les distributions marginales de X et de Y.

b) (2 points) Supposons qu'un joueur mise 2$ et pige au hasard, successivement et sans remise, deux jetons de la boîte. Il reçoit alors un montant en dollars égal à la somme des valeurs des deux jetons. Calculer l'écart type du gain net du joueur.

x+y

RÉPONSE

Boîte 6 jetons ##   2 jetons pigés

2 × "0" $x \in \{0,1,2\}$

1 × "1" $y \in \{0,1,2\}$

3 × "2"

Y \ X	0	1	2	$P_Y(y)$
0	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$
1	$\frac{2}{30}$	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$
2	$\frac{6}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{15}{30}$
$P_X(x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	1

2

voir arbre à la page suivante   ou plutôt

QUESTION N° 3 (4 points)

Une station-service a une capacité maximale de 3 500 litres de carburant. Le gérant de la station-service estime que la demande quotidienne (en milliers de litres de carburant) est une variable aléatoire X de fonction de densité

jour

$$f_X(x) = \begin{cases} mx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ m & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ m(4-x) & \text{si } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où m est une constante positive.

a) (2 points) Déterminer la valeur de la constante m et calculer la probabilité que la demande quotidienne de carburant dépasse la capacité de la station-service. $\hookrightarrow P(X > 3,5)$

b) (2 points) Déterminer la quantité moyenne de carburant vendu au cours d'une journée après que la station-service soit remplie à pleine capacité.

RÉPONSE

a)

$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_0^1 mx\,dx + \int_1^3 m\,dx + \int_3^4 m(4-x)\,dx$

$= m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + m\left[x\right]_1^3 + \int_3^4 (4m - xm)\,dx$

$= \frac{m}{2} + m(3-1) + \int_3^4 4m\,dx - m\int_3^4 x\,dx$

$= \frac{m}{2} + 3m - m + 4m\left[x\right]_3^4 - m\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4$

$= 2,5m + (16m - 12m) - m(8 - 4,5)$

$= 2,5m + 4m - 3,5m$

$= 3m$

$1 = 3m$

$\boxed{m = \frac{1}{3}}$

QUESTION N° 3 (suite)

$P(X > 3,5) = 1 - \int_0^{3,5} f_X(x)\,dx$

$P(X > 3,5) = 1 - \left(\int_0^1 mx\,dx + \int_1^3 m\,dx + \int_3^{3,5} m(4-x)\,dx\right)$ où $m = \frac{1}{3}$

$P(X > 3,5) = 1 - \left(\frac{23}{24}\right)$ ← calculatrice autorisé par l'AEP

$P(X > 3,5) = \frac{1}{24}$

$\boxed{P(X > 3,5) \approx 0,0416}$

b) $E(X) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx$

$E(X) = \int_0^1 mx^2\,dx + \int_1^3 mx\,dx + \int_3^4 mx(4-x)\,dx$ ← calculatrice autorisé par l'AEP

$\boxed{E(X) = 2}$

Exercice n°4: (20 points)

Le temps (en heures) nécessaire pour réparer une machine est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

a) (**5pts**) Quelle est la probabilité que le temps de réparation d'une machine excède deux heures?
Réponse : e^{-1}

b) (**5pts**) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins 10 heures, étant donné que sa durée de réparation a déjà dépassé neuf heures?
Réponse : $e^{-0.5}$

c) (**5pts**) On a 20 machines de ce type à réparer, quelle est la probabilité qu'au moins une de ces machines soit réparée en plus de deux heures?
Réponse : $Y \sim Bin(10, e^{-1}), 1 - P(Y = 0)$

d) (**5pts**) En moyenne, combien de machines doit-on réparer pour avoir une première dont le temps de réparation excède deux heures?
Réponse : e

Exercice n°6: (20 points)

Prince of Persia est une série de jeux vidéo de UbiSoft. Dans l'épisode de Sables du temps, le Vezir donne au Prince deux urnes, quatre boules blanches et quatre boules noires. Il demande au prince de répartir les boules dans les urnes (au moins une boulle par urne). Le prince doit choisir une de deux urnes, et ensuite en tirer une boule.

Il aura la vie sauve si la boule tirée soit blanche.

a) (**4 pts**) Quelle est la probabilité que le Prince ait la vie sauve s'il place les quatre boules blanches dans la première urne et les quatre noires dans la deuxième?
Réponse : $\frac{1}{2}$

b) (**4 pts**) Que devient cette probabilité s'il met deux blanches et deux noires dans chaque urne?
Réponse : $\frac{1}{2}$

c) (**4 pts**) Que devient cette probabilité s'il met trois blanches dans la première urne, une blanche et quatre noires dans la deuxième?
Réponse : $\frac{3}{5}$

d) (**4 pts**) Comment le prince maximise-t-il ses chances?
Réponse : 1 boule blance dans 1er urne et toutes les autres dans la 2e.

e) (**4 pts**) Si le prince dispose de 10 vies, combien de vies en moyenne perdra-t-il dans cet épisode s'il utilise le scénario maximal?
Réponse : $10 \times \frac{5}{7}$

Exercice n°3: (15 points)

Un électricien achète des composants par paquet de 10. Il pige un échantillon de trois composants sans remise du paquet. Si l'échantillon contient un composant défectueux, alors il rejette le paquet.

a) (**6 pts**) Si chaque paquet contient quatre composants défectueux quelle est la probabilité que l'électricien rejette le paquet?

$X \sim HG(N = 10, D = 4, n = 3)$
$1 - P(X = 0)$

b) (**9 pts**) Si 30% des paquets contiennent quatre composants défectueux tandis que les 70% restant n'en contiennent qu'un, quelle proportion de paquets l'électricien rejettera-t-il?

Réponse: $0.3 \times p_1 + 0.7 \times p_2$
p_1 : partie a)
$p_2 : P(Y = 1), Y \sim HG(N = 10, D = 1, n = 3)$

QUESTION N° 4 (suite)

b) commencer par calculer l'écart-type du montant brute gagné

commence par calculer la variance de ce qu'il gagne brute

$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)}$

oui, mais $V(X+Y-2)$ plus précisément !

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \left(1^2 \cdot \frac{5}{30} + 2^2 \cdot \frac{15}{30}\right) - \left(1 \cdot \frac{5}{30} + 2 \cdot \frac{15}{30}\right)^2$

$= \left(\frac{13}{6}\right) - \left(\frac{7}{6}\right)^2$

$= \frac{29}{36}$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$= \left(1^2 \cdot \frac{5}{30} + 2^2 \cdot \frac{15}{30}\right) - \left(1 \cdot \frac{5}{30} + 2 \frac{15}{30}\right)^2$

$= \left(\frac{13}{6}\right) - \left(\frac{7}{6}\right)^2$

$= \frac{29}{36}$

$V(X+Y) = \frac{29}{36} + \frac{29}{36} + 2\,cov(X,Y)$

$V(X+Y) = \frac{29}{18} + 2\left(E(XY) - E(X)E(Y)\right)$

$V(X+Y) = \frac{29}{18} + 2\left(E(XY) - 0,648919\right)$

$V(X+Y) = \frac{29}{18} + 2\left(\left(2 \cdot \frac{3}{30} + 2 \cdot \frac{3}{30} + 4 \cdot \frac{6}{30}\right) - 0,648919\right)$

(1.5)

$V(X+Y) = \frac{29}{18} + 2\left(\frac{6}{5} - 0,648919\right)$

$V(X+Y) = \frac{29}{18} + 2\left(0,55108\right)$

$V(X+Y) = \frac{29}{18} + 1,102160$

$\boxed{V(X+Y) \approx 2,71327}$

$\sqrt{V(X+Y)} = \sigma_{X+Y}$

$\sigma_{X+Y} \approx 1,647201$

L'écart-type du montant brute gagné est le même que l'écart-type du gain

Donc l'écart-type du gain est $\approx 1,647201$

−0.5

la moyenne serait différente par contre, mais on ne nous intéresse pas ici

QUESTION N° 5 (3 points)

On suppose que la durée de vie d'un certain type de composant est une variable aléatoire T distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 8 ans. $\to 8 = E(X) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{8}$

a) (1 point) Calculer $P(T \leq 8 \mid 4 \leq T < 16)$.

b) (2 points) Cinq composants de ce type sont mis en fonction et opèrent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que quatre ans plus tard, au moins deux des cinq composants ne fonctionnent plus ?

vie ≤ 4

RÉPONSE

a)

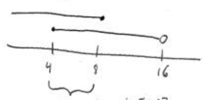
T : durée de vie du composant

$T \sim Exp(\lambda = \frac{1}{8})$

$T \in [0, \infty[$ $\hookrightarrow 8 = E(X) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{8}$

$P(T \leq 8 \mid 4 \leq T < 16)$

$= \frac{P((T \leq 8) \cap (4 \leq T < 16))}{P(4 \leq T < 16)}$



$= \frac{P(4 \leq T \leq 8)}{P(4 \leq T \leq 16)}$

$= \frac{\int_4^8 \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{8}}\,dx}{\int_4^{16} \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{8}}\,dx}$ calculatrice autorisé par l'AEP

$\approx \frac{0,23865}{0,47195}$

$\boxed{\approx 0,506480}$

QUESTION N° 5 (suite)

b) $P(\text{un composant fonctionne plus 4 ans plus tard})$

$= P(T \leq 4)$

$= 1 - e^{-\frac{x}{8}}$ $x = 4$

$\approx 0,0571984$ erreur de calculs

W : nb composant qui ne fonctionneront pas 4 ans plus tard sur les 5

$W \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$W \sim B(n = 5, p = 0,0571984)$

$P(W \geq 2) = 1 - P(W \leq 1)$

$P(W \geq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{1} C_i^5 p^i (1-p)^{5-i}$ calculatrice autorisé par l'AEP

$P(W \geq 2) \approx 1 - 0,97086798$

$\boxed{P(W \geq 2) \approx 0,029132}$