QUESTION N° 1 (7 points)

Soit $X_1, \ldots, X_{15}$, un échantillon aléatoire d'une variable aléatoire X distribuée selon une loi normale $N(0, \sigma^2)$, où σ^2 est inconnue. On considère les statistiques V, W et Y définies par :

$$V = \sum_{i=1}^{9} X_i \, ; \quad W = \sum_{i=1}^{9} X_i^2 \, ; \quad Y = \sum_{i=10}^{15} X_i^2 .$$

a) **(3 points)** Déterminer la constante c telle que $P\,(V > c\,\sigma) = 0{,}025.$ (Rappel : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$)

b) **(3 points)** Déterminer la constante d telle que $P\left(\dfrac{Y}{W} > d\right) = 0{,}05.$

c) **(1 point)** Donner la moyenne et la variance de la variable $U = \dfrac{V}{\sqrt{Y}}.$

Q1 $X_i \sim N(0,\sigma^2)$ i.i.d. $i=1\dots 15$ X_i copie X

a) $V=\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(\mu=9E[X], \sigma^2=9Var(X))$ $E[X]=0$ $Var(X)=\sigma^2$

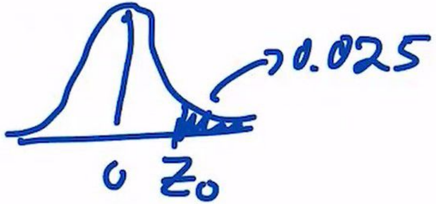
$V \sim N(\underbrace{9\cdot 0}_{0}, 9\cdot\sigma^2)$ $\to$ $E[V]=0$, $Var(V)=9\sigma^2$ $Z\sim N(0,1)$

$$P(V > \underline{c}\,\sigma)=0{,}025 \iff P\Big(\overbrace{\frac{V-E[V]}{\sqrt{Var(V)}}}^{Z} > \frac{c\sigma-0}{3\sigma}\Big)=0.025$$

$$\iff P(Z > c/3)=0.025$$

$$\iff c/3 = z_0 = 1.96 \iff c = 3\cdot 1.96 \implies c = 5.88$$

$\underline{z_0 = 1.96}$



b) $W = \sum_{i=1}^{9} X_i^2 \quad Y = \sum_{i=10}^{15} X_i^2$ On cherche d t.q. $P\left(\frac{Y}{W} > d\right) = 0.05$

$F_{6,9}$ Soit $Z_i = X_i/\sigma \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{9} Z_i^2 \sim \chi_9^2 \quad \sum_{i=10}^{15} Z_i^2 \sim \chi_6^2$

$$\frac{\left(\sum_{i=10}^{15} Z_i^2\right)/6}{\left(\sum_{i=1}^{9} Z_i^2\right)/9} = \frac{\left(\sum_{i=10}^{15} \left(X_i^2/\sigma^2\right)\right)/6}{\left(\sum_{i=1}^{9} \left(X_i^2/\sigma^2\right)\right)/9} = \frac{Y/6}{W/9} \sim F_{6,9} \iff \frac{Y}{W} \cdot \frac{9}{6} = \frac{Y}{W} \cdot \frac{3}{2} \sim F_{6,9}$$

$$P\left(\frac{Y}{W} > d\right) = 0.05 \iff P\left(\underline{\frac{Y}{W} \cdot \frac{3}{2}} > \underline{d \cdot 3/2}\right) = \underline{0.05}$$

$$F_{0.05;6,9} = 3.37 \iff d \cdot 3/2 = 3.37 \iff d = 2.25$$

c) $U = V/\sqrt{Y} \implies E[U]$ et $Var(U)$

Loi t de Student

$$\frac{Z}{\sqrt{\tilde{Y}/d}} \quad \tilde{Y} \sim \chi^2_d$$

$$V \sim N(0, 9\sigma^2) \iff Z = V/3\sigma \sim N(0,1)$$

$$\tilde{Y} = Y/\sigma^2 \sim \underset{\sim}{\chi^2_6}$$

On écrit : $\dfrac{Z}{\sqrt{\tilde{Y}/d}} \sim$ loi t de Student avec $d=6$ degrés liberté

$$U = \frac{3\sigma Z}{\sqrt{\sigma^2 Y}} = \frac{3\sigma Z}{\sigma\sqrt{Y}} = \frac{3Z}{\sqrt{\tilde{Y}}} = \frac{3Z}{\sqrt{\tilde{Y}/6 \cdot 6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \underbrace{\left(\frac{Z}{\sqrt{\tilde{Y}/6}}\right)}_{T}$$

$$E[U] = E\left[\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot T\right] = \frac{3}{\sqrt{6}} E[T] = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot 0 = 0$$

$$Var(U) = Var\left(\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot T\right) = \frac{9}{6} \cdot Var(T) = \frac{9}{6} \cdot \frac{6}{6-2} = \frac{9}{4}$$

QUESTION N° 2 (8 points)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de taille n prélevé d'une population X dont la fonction de densité est définie par

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (2+\theta)\, x^{1+\theta} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre tel que $\theta > 0$.

a) (2 points) Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_1$ de θ par la méthode des moments.

b) (3 points) Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

c) (3 points) On considère un troisième estimateur de θ défini par

$$\hat{\theta}_3 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Déterminer la variance de $\hat{\theta}_3$ en fonction de θ et de n.

Q2]

a) $E[X] = \int_0^1 x(2+\theta)x^{1+\theta}\,dx = (2+\theta)\int_0^1 x^{2+\theta}\,dx = (2+\theta)\left[\frac{x^{3+\theta}}{3+\theta}\right]_0^1 = \frac{2+\theta}{3+\theta}$

Méthode des moments: $E[X] = \bar{X}$

$$\frac{2+\hat{\theta}_1}{3+\hat{\theta}_1} = \bar{X} \iff 2+\hat{\theta}_1 = \bar{X}(3+\hat{\theta}_1) \iff 2+\hat{\theta}_1 = 3\bar{X} + \hat{\theta}_1\bar{X}$$

$$\iff \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_1\bar{X} = 3\bar{X} - 2 \iff \hat{\theta}_1(1-\bar{X}) = 3\bar{X}-2 \iff \hat{\theta}_1 = \frac{3\bar{X}-2}{1-\bar{X}}$$

b) $\ln f(X_i;\theta) = \begin{cases} \ln(2+\theta) + (1+\theta)\ln(X_i) & \text{si } \underline{0 < X_i < 1} \\ \text{indéfini} \end{cases}$

log-vraisemblance : $\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(X_i;\theta) = n\ln(2+\theta) + (1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$

$$\underline{\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2+\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)}$$

$$\frac{n}{2+\hat{\theta}_2} + \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) = \frac{-n}{2+\hat{\theta}_2}$$

$$\iff 2+\hat{\theta}_2 = \frac{-n}{\sum \ln(X_i)} \iff \hat{\theta}_2 = -n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) - 2$$

c) $\hat{\Theta}_3 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$Var(\hat{\Theta}_3) = Var(\bar{X}) = Var(X)/n$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 \qquad E[X] = \frac{\Theta+2}{3+\Theta}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \underbrace{(2+\Theta)x^{\Theta+1}}_{f(x,\Theta)} dx = (2+\Theta)\int_0^1 x^{\Theta+3} dx = (2+\Theta)\frac{x^{\Theta+4}}{\Theta+4}\Big|_0^1$$

$$= (2+\Theta)/(\Theta+4)$$

$$Var(X) = \frac{(2+\Theta)}{(\Theta+4)} - \left(\frac{\Theta+2}{3+\Theta}\right)^2 \rightarrow Var(\hat{\Theta}_3) = \left(\frac{2+\Theta}{\Theta+4} - \left(\frac{\Theta+2}{3+\Theta}\right)^2\right)\Big/ n$$

QUESTION Nº 3 (6 points)

Un fabricant de pneus avait établi que 8% de ses pneus n'étaient pas conformes (ne répondaient pas aux nouvelles normes de résistance à l'éclatement). Afin d'améliorer la qualité de ses pneus, divers ajustements furent alors effectués dans le procédé de fabrication. Le fabricant aimerait à présent vérifier si les ajustements apportés ont effectivement amélioré la qualité de ses pneus. Il compte effectuer le test statistique approprié avec un échantillon aléatoire de 400 pneus et un seuil critique de 5%.

a) **(3 points)** Si la proportion réelle de pneus non conformes est à présent de 6%, quelle est alors la probabilité que le fabricant conclue que les ajustements effectués sont sans effet ?

b) **(3 points)** Le fabricant effectue le test tel qu'envisagé et obtient une *valeur P* (ou *«p-value»*) de $0,08534$. Quel est le nombre de pneus non conformes trouvés dans l'échantillon de 400 ? Le fabricant peut-il conclure que les ajustements effectués ont un effet ?

Q3) p : proportion de pneus non-conformes

$\alpha = 0.05$

$H_0 : p_0 = 0.08$ versus $H_1 : \underbrace{p < 0.08}_{\text{test unilatéral}} = p_0$

$n = 400$

a) $p_1 = 0.06$ (proportion après ajustements)

β : P(ne pas rejeter H_0 | H_0 est fausse)

$$\beta = 1 - \Phi\left(\underbrace{\frac{\sqrt{n}\,(p_0 - p_1) - z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}}_{-0{,}1949} \right) \qquad z_{0.05} = 1645$$

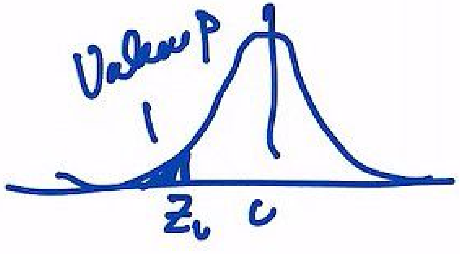
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

$$\beta = 1 - \Phi(-0{,}1949) = 0.5773 \qquad Z \sim N(0,1)$$

b) Valeur $p = 0.08534 > \alpha = 0{,}05 \Rightarrow$ on ne peut pas rejeter H_0

$\Rightarrow$ on ne peut pas conclure que les ajustements sont efficaces

$$Z_0 = (\hat{p} - p_0) \Big/ \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \overset{\text{sous } H_0}{\sim} N(0,1)$$



$$P(Z \leq Z_0) = 0{,}08534$$

$$\rightarrow Z_0 = -1{,}37$$

$$\frac{(\hat{p} - 0{,}08)}{\sqrt{\frac{0.08 \cdot 0.92}{400}}} = -1{,}37 \Leftrightarrow \hat{p} = 0{,}0614 = \frac{\#\text{ pneus non conformes}}{400}$$

$$\Leftrightarrow \#\text{ pneus non conformes} : 400 \times 0.0614 \simeq 25$$

QUESTION Nº 4 (9 points)

Le tableau suivant présente les résultats d'une analyse statistique des vitesses (en km/h) obtenues à une intersection de deux rues pour deux échantillons de véhicules indépendants : un échantillon aléatoire de 10 voitures et un échantillon aléatoire de 11 motocyclettes.

Type de véhicule	n	moyenne	écart-type
Voiture	10	25,9	3,10
Motocyclette	11	27,1	2,75

On suppose que la vitesse est distribuée selon une loi normale pour les deux types de véhicules.

a) **(2 points)** On compte mesurer la vitesse d'une onzième voiture. Donner un intervalle de prévision pour cette mesure à un niveau de confiance 95%.

b) **(3 points)** Donner un intervalle de confiance pour la variance de la vitesse des voitures à un niveau de confiance 95%.

c) **(4 points)** Au niveau critique de 5%, peut-on conclure que les motocyclettes roulent en moyenne plus vite que les voitures à cette intersection ?

Q4!

X : v.a. vitesse des voitures $\sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

Y : v.a. vitesse des motos $\sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

a) intervalle de prévision pour X_{11} avec $1-\alpha = 0.95$ $n=10$

$\hat{X}_{11} = \bar{X} = 25.9$

$\hat{X}_{11} : \bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{S^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 9} = 2.26$

$S^2 = 3.10^2$

$\hat{X}_{11} : 25.9 \pm 7.35 \Rightarrow [18.55, 33.25]$

b) I.C. pour σ_X^2 avec $1-\alpha = 0.95$

$$\left[\frac{(n-1)S_X^2}{\chi^2_{\alpha/2;\, n-1}} , \frac{(n-1)S_X^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\, n-1}} \right]$$

$\chi^2_{\alpha/2;\, n-1} = \chi^2_{0.025;\, 9} = 19.02$ $\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1} = \chi^2_{0.975,\, 9} = 2.70$

$[4.55,\ 32.03]$

c) $\alpha = 0.05$ I.C. pour $\mu_X - \mu_Y$ Variances inconnues

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$\mu_X - \mu_Y : (\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\alpha/2 ; \nu} \sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}$$

$$\nu = \left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y} \right)^2 \Big/ \left(\frac{(S_X^2/n_X)^2}{(n_X - 1)} + \frac{(S_Y^2/n_Y)^2}{(n_Y - 1)} \right) - 2 \approx 20$$

$$t_{0.025; 20} = 2.086$$

$\mu_X - \mu_Y$: $[-3.88, 1.48]$ à 95%.

Comme la valeur 0 est dans l'intervalle, on ne peut pas conclure que $\mu_X - \mu_Y \neq 0$, en particulier, $\mu_Y > \mu_X$.

Autre solution : 1ère étape : test d'hypothèses pour vérifier

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ versus $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$1-\alpha = 0.95$

→ conclusion : H_0 n'est pas rejetée

2ème étape : test d'hypothèses d'égalité des moyennes avec variances inconnues mais égales

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$ versus $H_0 : \mu_X < \mu_Y$

→ conclusion : On ne peut pas rejeter H_0.

QUESTION N° 5 **(5 points)**

Le tableau suivant présente la répartition de 260 pièces, prises au hasard dans une production, selon leur état (Mauvais, Passable, Bon) et la période (Avant-midi, Après-midi) au cours de laquelle elles ont été produites.

Période (Y)	État (X)		
	Mauvais	Passable	Bon
Avant-midi	10	30	65
Après-midi	18	55	82

On veut vérifier si l'état des pièces dépend de la période de fabrication.

Que peut-on conclure au seuil critique 5% ?

Ne rien écrire ici, veuillez répondre dans le cahier.

Q5 Test d'indépendance entre X et Y : $P(X.Y) = P(X)P(Y)$

Y \ X	M	P	B	
AM	10	30	65	105
PM	18	55	82	155
	28	85	147	260

Sous H_0, indépendance :

$$\underline{P(AM, M)} = P(AM) \cdot P(M) = \frac{105}{260} \cdot \frac{28}{260}$$

effectif attendu : $P(AM, M) \cdot n = P(AM) \cdot P(M) \cdot n = \frac{105 \cdot 28}{260} = \underline{11.307}$

Y \ X	M	P	B
AM	11.307	34.327	59.365
PM	16.692	50.673	87.635

$$P(PM, M) = P(PM)\,P(M) = \frac{155}{260} \cdot \frac{28}{260}$$

effectif attendu :

$$\frac{155 \cdot 28}{260} = 16.692$$

$P(PM, M) = P(PM)\,P(M) = \frac{155}{260} \cdot \frac{28}{260}$ | effectif attendu :

$$\frac{155 \cdot 28}{260} = 16.692$$

$$\chi_0^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(10 - 11.307)^2}{11.307} + \frac{(30 - 34.327)^2}{34.327} + \dots + \frac{(82 - 87.635)^2}{87.635} = 2.065$$

$\chi^2_{\alpha,\nu}$

$\alpha = 0{,}05$

$\nu = (r-1) \times (c-1) = 1 \times 2 = 2$

$\chi^2_{0.05;2} = 5.$

$\chi^2_{\alpha,\nu}$

$\alpha = 0{,}05$

$\nu = (r-1) \times (c-1) = 1 \times 2 = 2$

$\chi^2_{0.05;2} = 5.99$

$\chi^2_0 = 2.065 < \chi^2_{0.05;2} = 5.99 \Rightarrow$ on ne peut pas rejeter H_0 (indépendance

QUESTION Nº 7 (5 points)

Les deux parties a) et b) de cette question sont indépendantes l'une de l'autre.

a) **(3 points)** Un ingénieur utilise 5 composants indépendants pour former un système en parallèle (redondance active). La durée de fonctionnement de chaque composant est modélisée par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Quelle est la probabilité que le système fonctionne encore après 3 unités de temps, étant donné qu'au moins un composant fonctionnait encore après 1 unité de temps ?

b) **(2 points)** Des usagers se présentent à un guichet pour un service forment une file d'attente $M/M/1$ avec $\lambda = 5$ et $\mu = 7$. Déterminer le nombre moyen de clients dans le système à l'équilibre.

Rappel : $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ si $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $x \geq 0$; $\quad f(x) = 0$ pour $x < 0$.

$\boxed{Q7}$ a) 5 composants en parallèle avec redondance active

$T_i \sim Exp(\lambda_i = 1)$

T : durée de vie du système

$T = \max(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)$

$$R_k(t) = e^{-\lambda_k t} = e^{-t} = P(T_k > t)$$

$$R(t) = 1 - \prod_{k=1}^{5} (1 - e^{-t}) = 1 - (1 - e^{-t})^5$$

$$P(T>3 \mid T>1) = \frac{P(T>3 \,\&\, T>1)}{P(T>1)} = \frac{P(T>3)}{P(T>1)} = \frac{R(3)}{R(1)}$$

$$= \frac{1-(1-e^{-3})^5}{1-(1-e^{-1})^5} = \frac{0.2254}{0.8991} \approx 0.2507$$

b) M/M/1 $\lambda = 5$ $\mu = 7$ $\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{7}$

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5/7}{1-5/7} = \frac{5}{7}$$