Question #1 (6 points)

a) $X \sim N\left(\mu=1 ; \sigma^2 = \frac{1}{100}\right)$ $Z \sim N(0,1)$ où $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$

$$P(1 \leq \bar{X} \leq 1,05) = P(0 \leq Z \leq 0,5)$$
$$= \Phi(0,5) - \Phi(0)$$
$$= 0,69146 - 0,5$$
$$= 0,19146$$

b) $P(T > U) = P(T - U > 0) = P(V > 0)$ où $V = T - U \Rightarrow V \sim N(3,9)$
$$= P(Z > -1)$$
$$= 1 - \Phi(-1)$$
$$= \Phi(1)$$
$$= 0,84134$$

c) $y = \sum_{i=1}^{100} (X_i - 1)^2$

1.c) $Y \sim \chi^2_{100}$

2.c) $Y \sim N(K, 2K)$
$Y \sim N(100, 200)$

d) $G = \sum_{i=1}^{6} (X_i - 1)^2$ et $H = \sum_{i=7}^{9} (X_i - 1)^2$

Par la loi de Fisher:

$$F = \frac{G/u}{H/v} = \frac{G/6}{H/3} = \frac{G}{2H}$$

On a:

$$P(G > mH) = 0,01$$
$$= P\left(\frac{G}{2H} > \frac{m}{2}\right) = 0,01$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = F_{0,01 ; 6,3} = 27,91 \Rightarrow m = 55,82$$

Question #2 (6 points)

a) $H_0 : X \sim Poi(c)$
   $H_1 : X \nsim Poi(c)$

b) On rejette H_0 si
   $$M_0 > \chi^2_{0,05 ; K-p-1}$$

$$\hat{c} = \left(\frac{15 \cdot 0 + 45 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 15 \cdot 3}{15 + 45 + 25 + 15} \right) = 1,4$$

1)

X	O_i	$P(X=k)$	E
0	15	$\frac{1.4^0 \cdot e^{-1.4}}{0!} = 0.2466$	24,66
1	45	0,3452	34.52
2	25	0,2417	24,17
3	15	0,1128	11.28

2) $M_0 = \frac{(15-24.66)^2}{24,66} + \frac{(45-34.52)^2}{34.52} +$
   $\frac{(25-24.17)^2}{24.17} + \frac{(15-11.28)^2}{11.28}$

   $= 3,7841 + 3,1816 + 0,0285 + 1,2268$
   $= 8,22$

3) $\chi^2_{0,05 ; 2} = 5,99$

On rejette H_0, car $M_0 > \chi^2_{0,05 ; 2}$

Question #3 (8 points)

a) $n \geq \left(\dfrac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \cdot 0.5(1-0.5)$

$n \geq \left(\dfrac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{4}$

$n \geq \left(\dfrac{1.96}{0.045}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{4}$

$n \geq 474.27$

$n = 475$

b) p: proportion actuelle d'unités non-conformes d'une production.

$H_0: p = 0.10 \qquad H_1: p > 0.10$

c) • Rejetter H_0, car $0.0024 < 0.05$

• 1) $1 - 0.0024 = 0.9976 \Rightarrow \Phi(z_0) = 0.9976$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z_0 = 2.82$

2) $Z_0 = \dfrac{\hat{p} - 0.10}{\sqrt{\dfrac{0.10(1-0.10)}{400}}} = 2.82 \Rightarrow \hat{p} = 0.1423$

3) $400 \cdot 0.1423 = 56.92 \approx 57$ unités

d) $\beta = P(\text{Erreur de deuxième espace})$

$\beta = P\left(P_0 - P_1 + Z_\alpha \sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}} \mid H_1\right)$

$= P\left(Z < \dfrac{0.10 - 0.11 + 1.645 \sqrt{\dfrac{0.10 \cdot 0.90}{500}}}{\sqrt{\dfrac{0.11 \cdot 0.89}{500}}}\right)$

$= \Phi(0.86)$

$= 0.80511$

$= 80.511\%$

Question #4   (12 points)

a) On sait que $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$IDC(\mu_2) = \overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 50,3 \pm t_{0,05; 8} \cdot \frac{1,48}{3}$$

$$= 50,3 \pm 1,86 \cdot \frac{1,48}{3}$$

$$= [49,3824 ; 51,2176]$$

b) $X_{n+1} \in \overline{X} \pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \, S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

$X_{n+1} \in 50,3 \pm 1,86 \cdot 1,476 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9}}$

$X_{n+1} \in 50,3 \pm 2,89$

$X_{n+1} \in [47,41 ; 53,13]$

c) $H_0 : \sigma_1^2 = 0,5$
   $H_1 : \sigma_1^2 \neq 0,5$

Rejetter H_0 si $X_0^2 < X_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2$

1) $X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{15 \cdot 0,37}{0,5} = 11,1$

2) $X_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2}) = 27,49$ $X_0^2 < X_{15; \frac{\alpha}{2}}^2$

3) $X_{(1-\frac{\alpha}{2}); n-1}^2 = 6,27$ $X_0^2 > X_{(1-\cdots}^2$

On ne peut pas rejetter.

d) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$\quad\quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Rejetter si $F_0 < F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1}$ ou $F_0 > F_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1}$

1) $F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{0.37}{2.18} = 0.17$

2) $F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1} = \dfrac{1}{3.20} = 0.3125$ $\quad\quad F_0 < F_{1-\frac{\alpha}{2}, \dots}$ (rejetter H_0)

3) $F_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1} = 4.10$

e) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Rejetter H_0 si $T_0 > t_{\alpha; v}$

1) $N = \dfrac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$

$\quad\quad = 9.94$

$\quad\quad \approx 10$

2) $T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

$\quad\quad = 4.07673$

3) $t_{0.05; 16} = 1.81$

On rejette H_0, oui on peut affirmer qu'en moyenne les délais du protocole expérimental sont plus courts que ceux du protocole standard.

Question #5 (14 points)

a) $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$

$\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$

1) $S_{xy} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \overline{X}\,\overline{Y}$

1.1) $\overline{X} = \dfrac{1}{n} \sum x_i = \dfrac{244,10}{12} = 20,34$

1.2) $\overline{Y} = \dfrac{1}{n} \sum y_i = \dfrac{1182,20}{12} = 98,52$

Reprenons $S_{xy} = 25\,631,34 - 12(20,34)(98,52)$
$= 1\,584,58$

2) $S_{xx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}^2 = 5567,37 - 12(20,34)^2 = 602,78$

3) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = \dfrac{1\,584,58}{602,78} = 2,63$

4) $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 98,52 - 2,63 \cdot 20,34 = 45,02$

$$Y = 45,02 + 2,63X + \epsilon$$

b)

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Moyenne des carrés	F_0
Régression	$SSR = 4167,45$	1	$MSR = \frac{SSR}{1} = 4167,45$	$\frac{MSR}{MSE} = 32,69$
Erreur	$SSE = 1274,86$	$n-2 = 10$	$MSE = SSE/(n-2) \approx 127,49$	—
Totale	$5450,197$	$n-1 = 9$	—	—

1) $SS_R = \hat{\beta}_1 S_{xy} = 2,63 \cdot 1\,584,58 = 4167,45$

2) $SS_E = SST - SS_R$
$= S_{yy} - SS_R$
$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{Y}^2 - 4167,45$
$= 121\,916,60 - 12(98,52)^2 - 4167,45$
$= 1274,86$

$\longrightarrow$

$H_0 : \beta_1 = 0$ (aucun lien)

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ (lien)

On rejette H_0 si $f_0 > F_{\alpha ; 1 ; n-2}$

3) $F_{\alpha ; 1 ; n-2} = 4,67$

On rejette H_0, alors c'est possible qu'il y ait une rég. entre les 2

c) $\hat{\sigma}^2 = MSE = 128,0415$

d) 1) $\hat{Y}_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2} ; n-2} \sqrt{MSE \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{S_{xx}} \right)}$ 2) $\hat{Y}_0 = 45,02 + 2,63(20) = 97,62$

$\hat{Y}_0 \pm 2,23 \sqrt{127.49 \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{(20 - 20,31)^2}{602,78} \right)}$

$\hat{Y}_0 \pm 26,21$

$97,62 \pm 26,21 \Rightarrow [71.41 , 123,83]$

e) $R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{xx}}{S_{yy}} = 2,63^2 \cdot \frac{602,78}{12916,60 - 12198,52)^2} = 0,7661$

R^2 est proche de 1, alors il y a une certaine régression linéaire.