院試おつかれさまでした 2

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^k}{(\alpha_j-\alpha_1)\underset{\hat{j}}{\cdots}(\alpha_j-\alpha_n)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-2) \\ 1 & (k = n-1). \end{cases}$$

代数的に示す.

Lagrange の補間多項式

Prop. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$: distinct. $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

$\exists!\, P$: $n-1$ 次以下の多項式 s.t. $P(\alpha_j) = c_j \ (\forall j)$

この P は

$$P(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \frac{(z-\alpha_1)\overset{\hat{j}}{\cdots}(z-\alpha_n)}{(\alpha_j-\alpha_1)\underset{\hat{j}}{\cdots}(\alpha_j-\alpha_n)}$$

で与えられる. □

P_k を, $n-1$ 次以下の多項式で

$$P_k(\alpha_j) = \alpha_j^k \qquad (\forall j)$$

なるものを考える. Lagrange の補間法より.

$$P_k(z) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k \frac{(z-\alpha_1)\overset{\hat{j}}{\cdots}(z-\alpha_n)}{(\alpha_j-\alpha_1)\underset{\hat{j}}{\cdots}(\alpha_j-\alpha_n)}$$

$$\therefore\ P_k(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}\alpha_j^{k-1} \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n}{(\alpha_j-\alpha_1)\underset{\hat{j}}{\cdots}(\alpha_j-\alpha_n)}$$

$k \leq n-1$ の場合. 明らかに $P_k(z) = z^k$ だから

$$P_k(0) = 0.$$

$$\rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^{k-1}}{(\alpha_j-\alpha_1)\underset{\hat{j}}{\cdots}(\alpha_j-\alpha_n)} = 0 \qquad (1 \leq k \leq n-1)$$

$k = n$ とすると,

$$z^n - P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

$$\therefore \quad -P(0) = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

$$\therefore \quad P(0) = (-1)^{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

この上の式と比較すると,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^{n-1}}{(\alpha_j - \alpha_1) \underset{j}{\cdots} (\alpha_j - \alpha_n)} = 1.$$