スペクトル分解のノート

箱（@o_ccah）

2021 年 7 月 11 日

概要

Gelfand 理論を前提として，正規作用素のスペクトル分解定理を証明する．また，スペクトル分解定理のいくつかの応用にも触れる．

目次

記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．また，$\mathbb{N}_{>0} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$，$\mathbb{U} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ と書く．
- 写像 $f \colon X \to Y$ に対して，そのグラフを $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ と書く．
- 考えている空間 X の部分集合 A に対して，その特性関数を χ_A と書く．
- 線型空間などの係数体は常に $\mathbb{C}$ とし，いちいち明示しない．
- コンパクト分離空間 X に対して，X 上の複素数値連続関数の全体は，絶対値の上限をノルム，複素共役を対合として単位的 C* 代数をなす．この単位的 C* 代数を，$C(X)$ と書く．
- 可測空間 X に対して，X 上の有界な複素数値可測関数の全体は，絶対値の上限をノルム，複素共役を対合として単位的 C* 代数をなす．この単位的 C* 代数を，$B(X)$ と書く．
- $\mathbb{C}$ の部分集合上の複素数値連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を，z と書く．

- A を単位的代数とする．$x \in A$ に対して，x の A におけるスペクトルを $\mathrm{Sp}_A(x)$ あるいは単に $\mathrm{Sp}(x)$ と書く．
- 位相線型空間 E 上の恒等作用素を，I_E あるいは単に I と書く．
- 位相線型空間 E, F に対して, E から F への連続線型写像全体のなす空間を $\mathscr{L}(E;F)$ と書く．$\mathscr{L}(E;E)$ を単に $\mathscr{L}(E)$ と書く．E, F がノルム空間である場合には，$\mathscr{L}(E;F)$ を作用素ノルムによってノルム空間とみなす．
- ノルム空間 E のノルムを $\|{-}\|_E$ あるいは単に $\|{-}\|$ と書き，Hilbert 空間 E の内積を $\langle{-}|{-}\rangle_E$ あるいは単に $\langle{-}|{-}\rangle$ と書く．Hilbert 空間の内積は，左の引数に関して線型，右の引数に関して共役線型とする．
- E, F を Hilbert 空間とする．特に断らなければ，$E \times F$ には

$$\langle(\xi,\eta)|(\xi',\eta')\rangle_{E\times F} = \langle\xi|\xi'\rangle_E + \langle\eta|\eta'\rangle_F \qquad ((\xi,\eta),\ (\xi',\eta') \in E \times F)$$

で定まる内積を与え，これによって $E \times F$ を Hilbert 空間とみなす．

1 Hilbert 空間上の連続線型作用素

1.1 連続線型作用素の随伴

定義 1.1（連続準双線型形式の空間） E, F を Hilbert 空間とする．$E \times F$ 上の連続準双線型形式（すなわち，$E \times F$ から $\mathbb{C}$ への連続写像であって，左変数に関して線型かつ右変数に関して共役線型であるもの）全体のなす線型空間を，$\mathscr{S}(E,F)$ と書く．また，$\mathscr{S}(E,F)$ 上のノルムを

$$\|\Phi\|_{\mathscr{S}(E,F)} = \sup_{\|\xi\|,\|\eta\|\le 1} |\Phi(\xi,\eta)| \qquad (\Phi \in \mathscr{S}(E,F))$$

と定める．これにより，$\mathscr{S}(E,F)$ は Banach 空間をなす．

事実 1.2 E, F を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して $E \times F$ 上の連続準双線型形式 $(\xi,\eta) \mapsto \langle T\xi|\eta\rangle$ を与える対応は，$\mathscr{L}(E;F)$ から $\mathscr{S}(E,F)$ へのノルム空間の同型である．

E, F を Hilbert 空間とする．写像 $\iota\colon \mathscr{S}(E,F) \to \mathscr{S}(F,E)$ を，「左右の変数を入れ替えて共役をとる写像」と定める．すなわち，$\Phi \in \mathscr{S}(E,F)$ に対して，$\iota(\Phi) \in \mathscr{S}(F,E)$ を

$$\iota(\Phi)(\eta,\xi) = \overline{\Phi(\xi,\eta)} \qquad (\eta \in F,\ \xi \in E)$$

によって定める．すると，ι は $\mathscr{S}(E,F)$ から $\mathscr{S}(F,E)$ への等長な共役線型同型である．

定義 1.3（連続線型作用素の随伴） E, F を Hilbert 空間とする．事実 1.2 によるノルム空間の同型 $\mathscr{L}(E;F) \cong \mathscr{S}(E,F)$，$\mathscr{L}(F;E) \cong \mathscr{S}(F,E)$ によって，上記の等長な共役線型同型 $\iota\colon \mathscr{S}(E,F) \to \mathscr{S}(F,E)$ に対応する等長な共役線型同型 $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E)$ を考える．この等長な共役線型同型による $T \in \mathscr{L}(E;F)$ の像を T の随伴といい，$T^* \in \mathscr{L}(F;E)$ と書く．

定義より，$T \in \mathscr{L}(E;F)$ の随伴は，任意の $\xi \in E$，$\eta \in F$ に対して

$$\langle T\xi|\eta\rangle = \overline{\langle T^*\eta|\xi\rangle} = \langle\xi|T^*\eta\rangle$$

を満たす唯一の元 $T^* \in \mathscr{L}(F;E)$ であり，$T \mapsto T^*$ は $\mathscr{L}(E;F)$ から $\mathscr{L}(F;E)$ への等長な共役線型同型である．また，$\iota \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(E,F)}$ だから，$T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して $T^{**} = T$ である．

命題 1.4　E, F を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E; F)$ に対して，$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ である．

証明　$\eta \in F$ が $\operatorname{Ker} T^*$ に属するための必要十分条件は，任意の $\xi \in E$ に対して $\langle T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|0\rangle = 0$ が成り立つことであり，これは $\eta \perp \operatorname{Im} T$ と同値である．よって，$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ である．□

1.2　連続線型作用素の種々のクラス

Hilbert 空間 E に対して，E 上の連続線型作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}(E)$ は，作用素ノルムと随伴による対合に関して単位的 C* 代数をなす [10, 例 5.10]．$T \in \mathscr{L}(E)$ に対して，T の $\mathscr{L}(E)$ におけるスペクトルを，単に $\operatorname{Sp}(T)$ と書く．また，$\mathscr{L}(E)$ の自己随伴元，正規元，正元，ユニタリ元を，それぞれ E 上の**連続自己随伴作用素**，**連続正規作用素**，**連続正作用素**，**ユニタリ作用素**という．

なお，4 節や 6 節では，E 上の稠密に定義された線型作用素（すなわち，E の稠密部分線型空間から E への連続とは限らない線型写像）に対して自己随伴性・正規性・正性を定義する．E 上の稠密に定義された線型作用素 T について，T が連続かつ 4 節や 6 節で定義する意味で自己随伴・正規・正であることと，T が $\mathscr{L}(E)$ の自己随伴元・正規元・正元であることとは同値だから（系 4.47 に注意すればわかる），これらの用語は整合している．一方で，「E 上のユニタリ作用素」は常に $\mathscr{L}(E)$ のユニタリ元を指す．

命題 1.5　E を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) T は正規である．
(b) 任意の $\xi \in E$ に対して，$\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ である．

証明　$T^*T = TT^*$ であることは，任意の $\xi, \eta \in E$ に対して $\langle T^*T\xi|\eta\rangle = \langle TT^*\xi|\eta\rangle$ であることと同値だが，分極公式より，これは任意の $\xi \in E$ に対して $\langle T^*T\xi|\xi\rangle = \langle TT^*\xi|\xi\rangle$ であることと同値である．$\xi \in E$ に対して $\langle T^*T\xi|\xi\rangle = \|T\xi\|^2$，$\langle TT^*\xi|\xi\rangle = \|T^*\xi\|^2$ だから，主張が従う．□

系 1.6　Hilbert 空間上の連続正規作用素 T に対して，$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ が成り立つ．

証明　$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ は命題 1.5 からわかり，$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ は命題 1.4 ですでに示した．□

系 1.7　E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ である．
(b) $\lambda I - T$ は単射かつその像は E の閉部分線型空間である．
(c) $\lambda I - T$ は全射である．

証明　$\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ は $\lambda I - T$ が全単射であることと同値だが（命題 4.15），系 1.6 より $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^\perp$ だから，これは，$\lambda I - T$ が単射かつその像が閉であることや，$\lambda I - T$ が全射であることと同値である．□

1.3　弱作用素位相と強作用素位相

定義 1.8（弱作用素位相，強作用素位相）　E, F を Hilbert 空間とする．

(1) $\xi \in E$，$\eta \in F$ に対する線型写像 $\mathscr{L}(E; F) \to \mathbb{C}$; $T \mapsto \langle T\xi|\eta\rangle$ の全体が誘導する $\mathscr{L}(E; F)$ 上の始位相

を，$\mathscr{L}(E;F)$ の**弱作用素位相**という．

(2) $\xi \in E$ に対する線型写像 $\mathscr{L}(E;F) \to F;\ T \mapsto T\xi$ の全体が誘導する $\mathscr{L}(E;F)$ 上の始位相を，$\mathscr{L}(E;F)$ の**強作用素位相**という．

$\mathscr{A}$ が $\mathscr{L}(E;F)$ の部分集合であるとき，$\mathscr{L}(E;F)$ の弱作用素位相・強作用素位相が $\mathscr{A}$ 上の誘導する相対位相を，$\mathscr{A}$ の**弱作用素位相**・**強作用素位相**という．

容易にわかるように，弱作用素位相，強作用素位相，作用素ノルム位相の順に，弱い位相から強い位相である．

位相線型空間の一般論より，弱作用素位相・強作用素位相は $\mathscr{L}(E;F)$ の線型空間の構造と整合する．すなわち，加法 $(T,S) \mapsto T+S$ およびスカラー乗法 $(\lambda,T) \mapsto \lambda T$ は，弱作用素位相・強作用素位相のそれぞれに関して連続である．合成および随伴については，次が成り立つ．

命題 1.9　E, F, G を Hilbert 空間とする．

(1) $T \in \mathscr{L}(E;F)$ を固定すると，左から合成する写像 $\mathscr{L}(F;G) \to \mathscr{L}(E;G);\ S \mapsto ST$ は $\mathscr{L}(F;G)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の弱作用素位相に関して連続であり，$\mathscr{L}(F;G)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の強作用素位相に関しても連続である．

(2) $S \in \mathscr{L}(F;G)$ を固定すると，右から合成する写像 $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;G);\ T \mapsto ST$ は $\mathscr{L}(E;F)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の弱作用素位相に関して連続であり，$\mathscr{L}(E;F)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の強作用素位相に関しても連続である．

(3) 随伴をとる写像 $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E);\ T \mapsto T^*$ は，$\mathscr{L}(E;F)$, $\mathscr{L}(F;E)$ の弱作用素位相に関して連続である．

証明　(1)　任意の $\xi \in E$, $\zeta \in G$ に対して写像 $\mathscr{L}(F;G) \to \mathbb{C};\ S \mapsto \langle ST\xi|\zeta\rangle$ は $\mathscr{L}(F;G)$ の弱作用素位相に関して連続だから，$S \mapsto ST$ は $\mathscr{L}(F;G)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の弱作用素位相に関して連続である．また，任意の $\zeta \in G$ に対して写像 $\mathscr{L}(F;G) \to G;\ S \mapsto ST\zeta$ は $\mathscr{L}(F;G)$ の強作用素位相に関して連続だから，$S \mapsto ST$ は $\mathscr{L}(F;G)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の強作用素位相に関して連続である．

(2)　任意の $\xi \in E$, $\zeta \in G$ に対して写像 $\mathscr{L}(F;G) \to \mathbb{C};\ T \mapsto \langle ST\xi|\zeta\rangle = \langle T\xi|S^*\zeta\rangle$ は $\mathscr{L}(F;G)$ の弱作用素位相に関して連続だから，$T \mapsto ST$ は $\mathscr{L}(E;F)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の弱作用素位相に関して連続である．また，任意の $\zeta \in G$ に対して写像 $\mathscr{L}(F;G) \to G;\ T \mapsto ST\zeta$ は $\mathscr{L}(F;G)$ の強作用素位相に関して連続だから，$T \mapsto ST$ は $\mathscr{L}(E;G)$, $\mathscr{L}(E;G)$ の強作用素位相に関して連続である．

(3)　任意の $\eta \in F$, $\xi \in E$ に対して写像 $\mathscr{L}(E;F) \to \mathbb{C};\ T \mapsto \langle T^*\eta|\xi\rangle = \overline{\langle T\xi|\eta\rangle}$ は $\mathscr{L}(E;F)$ の弱作用素位相に関して連続だから，$T \mapsto T^*$ は $\mathscr{L}(E;F)$, $\mathscr{L}(F;E)$ の弱作用素位相に関して連続である．□

2　射影値測度と有界可測関数

2.1　射影値測度

定義 2.1（射影値測度）　X を可測空間，E を Hilbert 空間とする．X 上の E-**射影値測度**とは，可測集合 $A \subseteq X$ に対して E 上の直交射影を与える写像 $\mathit{\Pi}$ であって，次の 2 条件を満たすものをいう．

(i) $\mathit{\Pi}(X) = I$ である．

(ii) 互いに交わらない可測集合の可算族 $\{A_i\}_{i\in I}$ に対して，$A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と置くと，弱作用素位相に関する総和の等式

$$\varPi(A)=\sum_{i\in I}\varPi(A_i)$$

が成り立つ（特に，$\varPi(\emptyset)=0$ である）．

位相空間 X に対して，X の Borel 集合全体を可測集合系とした可測空間上の X 上の E-射影値測度を，X 上の E-**射影値 Borel 測度**という．

注意 2.2　定義 2.1 の条件 (ii) の「弱作用素位相」を「強作用素位相」に変えても，定義は変わらない．このことを確かめる．X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$\{A_i\}_{i\in I}$ を互いに交わらない可測集合の可算族として，$A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と置く．すると，任意の $\xi\in E$ に対して，有限部分集合 $F\subseteq I$ を大きくする極限において

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\varPi(A)-\sum_{i\in F}\varPi(A_i)\right)\xi\right\|^2 &= \left\|\varPi\left(A\setminus\bigcup_{i\in F}A_i\right)\xi\right\|^2\\
&=\left\langle\varPi\left(A\setminus\bigcup_{i\in F}A_i\right)\xi\,\middle|\,\varPi\left(A\setminus\bigcup_{i\in F}A_i\right)\xi\right\rangle\\
&=\left\langle\varPi\left(A\setminus\bigcup_{i\in F}A_i\right)\xi\,\middle|\,\xi\right\rangle\\
&=\langle\varPi(A)\xi|\xi\rangle-\sum_{i\in F}\langle\varPi(A_i)\xi|\xi\rangle\\
&\to 0
\end{aligned}$$

である．よって，強作用素位相に関しても

$$\varPi(A)=\sum_{i\in I}\varPi(A_i)$$

が成り立つ．

注意 2.3　総和可能性と可換収束性とが同値であることより，定義 2.1 の条件 (ii) を

(ii-1) $\varPi(\emptyset)=0$ である．

(ii-2) 互いに交わらない可測集合の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と置くと，弱作用素位相に関して

$$\varPi(A)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\varPi(A_n)$$

が成り立つ．

の 2 条件に置き換えても，定義は変わらない．詳しくは，「無限和のノート」[12, 4 節] を参照のこと．

命題 2.4　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．可測集合 $A,B\subseteq X$ に対して，次が成り立つ．

(1) $A\subseteq B$ ならば $\operatorname{Im}\varPi(A)\subseteq\operatorname{Im}\varPi(B)$ である．

(2) $\mathrm{Im}\,\Pi(X \setminus A)$ は $\mathrm{Im}\,\Pi(A)$ の直交補空間である．
(3) $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mathrm{Im}\,\Pi(A) \perp \mathrm{Im}\,\Pi(B)$ である．
(4) $\Pi(A \cap B) = \Pi(A)\Pi(B) = \Pi(B)\Pi(A)$ である．

証明 (1)　$A \subseteq B$ とする．$\xi \in \mathrm{Im}\,\Pi(A)$ とすると，

$$\langle \Pi(B)\xi|\xi\rangle = \langle \Pi(A)\xi|\xi\rangle + \langle \Pi(B \setminus A)\xi|\xi\rangle \geq \|\xi\|^2$$

だから，$\xi \in \mathrm{Im}\,\Pi(B)$ である．よって，$\mathrm{Im}\,\Pi(A) \subseteq \mathrm{Im}\,\Pi(B)$ である．

(2)　$\Pi(A) + \Pi(X \setminus A) = \Pi(X) = I$ から従う．

(3)　(1), (2) から従う．

(4)　(3) より，互いに交わらない可測集合 C, D に対しては $\Pi(C)\Pi(D) = 0$ だから，

$$\begin{aligned}\Pi(A)\Pi(B) &= (\Pi(A \cap B) + \Pi(A \setminus B))(\Pi(A \cap B) + \Pi(B \setminus A)) \\ &= \Pi(A \cap B)^2 + \Pi(A \cap B)\Pi(B \setminus A) + \Pi(A \setminus B)\Pi(A \cap B) + \Pi(A \setminus B)\Pi(B \setminus A) \\ &= \Pi(A \cap B)\end{aligned}$$

が成り立つ．□

定義 2.5（射影値測度の成分） X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．ξ, $\eta \in E$ に対して，X の可測集合に対して複素数を与える写像 $\Pi_{\xi,\eta}$ を

$$\Pi_{\xi,\eta}(A) = \langle \Pi(A)\xi|\eta\rangle \qquad (\text{可測集合 } A \subseteq X)$$

と定めると，$\Pi_{\xi,\eta}$ は X 上の有限複素測度である（射影値測度の定義から容易にわかる）．この有限複素測度 $\Pi_{\xi,\eta}$ を，Π の (ξ,η)-**成分**という．

以下，定義 2.5 の記号 $\Pi_{\xi,\eta}$ は断りなく用いる．明らかに，$\Pi_{\xi,\eta}$ は ξ に関して線型，η に関して共役線型である．

命題 2.6 X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．

(1) $\xi \in E$ に対して，$\Pi_{\xi,\xi}$ は X 上の正値測度である．
(2) $\xi, \eta \in E$ に対して，$\Pi_{\eta,\xi} = \overline{\Pi_{\xi,\eta}}$ である．
(3) 可測集合 $A \subseteq X$ と $\xi, \eta \in E$ に対して，$\Pi_{\Pi(A)\xi,\eta} = \Pi_{\xi,\Pi(A)\eta} = \Pi_{\xi,\eta}(- \cap A)$ である．

証明 (1)　可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\Pi_{\xi,\xi}(A) = \langle \Pi(A)\xi|\xi\rangle = \langle \Pi(A)\xi|\Pi(A)\xi\rangle = \|\Pi(A)\xi\|^2 \geq 0$$

だから，$\Pi_{\xi,\xi}$ は正値測度である．

(2)　可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\Pi_{\eta,\xi}(A) = \langle \Pi(A)\eta|\xi\rangle = \overline{\langle \xi|\Pi(A)\eta\rangle} = \overline{\langle \Pi(A)\xi|\eta\rangle} = \overline{\Pi_{\xi,\eta}(A)}$$

だから，$\Pi_{\eta,\xi} = \overline{\Pi_{\xi,\eta}}$ である．

(3)　$A \subseteq X$ を可測集合とする．可測集合 $B \subseteq X$ に対して，命題 2.4 (4) より

$$\begin{aligned}\Pi_{\Pi(A)\xi,\eta}(B) &= \langle \Pi(B)\Pi(A)\xi|\eta\rangle = \langle \Pi(B \cap A)\xi|\eta\rangle = \Pi_{\xi,\eta}(B \cap A), \\ \Pi_{\xi,\Pi(A)\eta}(B) &= \langle \Pi(B)\xi|\Pi(A)\eta\rangle = \langle \Pi(A)\Pi(B)\xi|\eta\rangle = \langle \Pi(B \cap A)\xi|\eta\rangle = \Pi_{\xi,\eta}(B \cap A)\end{aligned}$$

だから，$\mathit{\Pi}_{\mathit{\Pi}(A)\xi,\eta} = \mathit{\Pi}_{\xi,\mathit{\Pi}(A)\eta} = \mathit{\Pi}_{\xi,\eta}(-\cap A)$ である． □

命題 2.7 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．ξ, $\eta \in E$ と可測関数 f, $g\colon X \to \mathbb{C}$ に対して

$$\int_X |fg|\, d|\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}| \le \left(\int_X |f|^2\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2\, d\mathit{\Pi}_{\eta,\eta}\right)^{1/2}$$

が成り立つ．

証明 まず，可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$|\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}|(A) \le \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A)^{1/2}\mathit{\Pi}_{\eta,\eta}(A)^{1/2} \tag{$*$}$$

を示す．可測集合による A の分割 $A_0, \dots, A_{n-1}$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} |\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}(A_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \mathit{\Pi}(A_i)\xi | \eta\rangle| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} |\langle \mathit{\Pi}(A_i)\xi | \mathit{\Pi}(A_i)\eta\rangle| \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathit{\Pi}(A_i)\xi\| \|\mathit{\Pi}(A_i)\eta\| \\
&\le \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|\mathit{\Pi}(A_i)\xi\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|\mathit{\Pi}(A_i)\eta\|^2\right)^{1/2} \\
&= \|\mathit{\Pi}(A)\xi\| \|\mathit{\Pi}(A)\eta\| \\
&= \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A)^{1/2}\mathit{\Pi}_{\eta,\eta}(A)^{1/2}
\end{aligned}$$

である．これで，($*$) が示された．

次に，f, g がともに 0 以上の可測単関数の場合を考える．互いに交わらない可測集合 $A_i \subseteq X$ および a_i, $b_i \ge 0$（$0 \le i < n$）を用いて

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{A_i}, \qquad g = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \chi_{A_i}$$

と表すと，($*$) と Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}
\int_X fg\, d|\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}| &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i |\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}|(A_i) \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A_i)^{1/2}\mathit{\Pi}_{\eta,\eta}(A_i)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A_i)\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A_i)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_X |f|^2\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2\, d\mathit{\Pi}_{\eta,\eta}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{$**$}$$

である．

最後に，f, g が一般の可測関数の場合を考える．$|f|$, $|g|$ のそれぞれに収束する 0 以上の可測単関数の単調増加列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．($**$) より，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_X f_n g_n \, d|\varPi_{\xi,\eta}| \le \left(\int_X |f_n|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \left(\int_X |g_n|^2 \, d\varPi_{\eta,\eta}\right)^{1/2}$$

である．この式で $n\to\infty$ とすれば，単調収束定理より

$$\int_X |f| \, d|\varPi_{\xi,\eta}| \le \left(\int_X |f|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 \, d\varPi_{\eta,\eta}\right)^{1/2}$$

を得る． □

系 2.8　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．任意の $\xi, \eta\in E$ に対して，

$$|\varPi_{\xi,\eta}|(A) \le \varPi_{\xi,\xi}(A)^{1/2}\varPi_{\eta,\eta}(A)^{1/2} \qquad (\text{可測集合 } A\subseteq X)$$

が成り立つ．特に，$\varPi_{\xi,\eta}$ の全変動ノルムは

$$\|\varPi_{\xi,\eta}\| \le \|\xi\|\|\eta\|$$

と評価できる．

証明　前半は，命題 2.7 で $f=g=\chi_A$ とした場合である（命題 2.7 の証明の中で直接示されてもいる）．後半は，前半で $A=X$ と置けば従う． □

系 2.9　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$\xi, \eta\in E$ と $f\in L(X,\varPi)$ に対して，

$$\int_X |f| \, d|\varPi_{\xi,\eta}| \le \left(\int_X |f|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|$$

が成り立つ．

証明　命題 2.7 で $g=1$ とすれば，

$$\begin{aligned}\int_X |fg| \, d|\varPi_{\xi,\eta}| &\le \left(\int_X |f|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \varPi_{\eta,\eta}(X)^{1/2} \\ &= \left(\int_X |f|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|\end{aligned}$$

を得る． □

X, Y を可測空間，$f\colon X\to Y$ を可測写像とすると，X 上の正値，有限実または有限複素測度 μ に対して，Y 上の同種の測度 $f_*\mu$ が

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \qquad (\text{可測集合 } B\subseteq Y)$$

によって定義され，これを μ の f による像というのだった．これと同様に，射影値測度の像が定義される．

定義 2.10（射影値測度の像）　X, Y を可測空間，$f\colon X\to Y$ を可測写像，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．可測集合 $B\subseteq Y$ に対して E 上の直交射影を与える写像 $f_*\varPi$ を

$$f_*\varPi(B) = \varPi(f^{-1}(B))$$

によって定めると，容易にわかるように，$f_*\varPi$ は Y 上の E-射影値測度である．この $f_*\varPi$ を，$\varPi$ の f による**像**という．

定義 2.10 の状況で，明らかに，$\xi,\eta\in E$ に対して $(f_*\varPi)_{\xi,\eta}=f_*(\varPi_{\xi,\eta})$ が成り立つ．

2.2 射影値測度に関する積分（有界な場合）

はじめに，本小節以下で用いる記号と用語を定義しておく．

X を可測空間，$\varPi$ を X 上の射影値測度とする．通常の測度のときと同様に，$\varPi(A)=0$ であるようなある可測集合 A に含まれる集合を，**$\varPi$-零集合**という．X 上の複素数値可測関数は，ある $\varPi$-零集合上を除いて有界であるとき，**$\varPi$-本質的有界**であるという．

通常の測度空間に対して L^∞ 空間が定義されたのと同様に，「射影値測度空間」に対する L^∞ 空間 $L^\infty(X,\varPi)$ が定義される．すなわち，$L^\infty(X,\varPi)$ は $\varPi$-本質的有界な X 上の複素数値可測関数の「$\varPi$-零集合上での違いを無視する同値関係」による同値類の全体がなす空間であり，$f\in L^\infty(X,\varPi)$ のノルムは

$$\|f\|_\infty=\min\{M\in\mathbb{R}_{\geq 0}\mid \varPi\text{-零集合上を除いて } |f|\leq M\}$$

で与えられる．容易に確かめられるように，$L^\infty(X,\varPi)$ は複素共役を対合として単位的 C* 代数をなす．

X 上の複素数値可測関数 f に対して，通常の測度のときと同様に，f の **$\varPi$-本質的値域** $\operatorname{ess\,ran}_\varPi f$ が定義される．すなわち，$\operatorname{ess\,ran}_\varPi f$ は，$\varPi$-零集合上を除く $x\in X$ に対して $f(x)\in F$ となるような最小の閉集合 $F\subseteq\mathbb{C}$ である．容易に確かめられるように，$f\in L^\infty(X,\varPi)$ のスペクトルはその $\varPi$-本質的値域に等しい．

本題に入る．次の命題が，射影値測度に関する積分の定義の根拠となる．

命題 2.11　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$f\in L^\infty(X,\varPi)$ に対して，$T\in\mathscr{L}(E)$ であって，任意の $\xi,\eta\in E$ に対して

$$\langle T\xi|\eta\rangle=\int_X f\,d\varPi_{\xi,\eta}$$

を満たすようなものが一意に存在する．さらに，この T は $\|T\|\leq\|f\|_\infty$ を満たす．

証明　$f\in L^\infty(X,\varPi)$ とする．系 2.8 より，$\xi,\eta\in E$ に対して

$$\left|\int_X f\,d\varPi_{\xi,\eta}\right|\leq\int_X |f|\,d|\varPi_{\xi,\eta}|\leq\|f\|_\infty\|\xi\|\|\eta\|$$

だから，$(\xi,\eta)\mapsto\int_X f\,d\varPi_{\xi,\eta}$ はノルム $\|f\|_\infty$ 以下の $E\times E$ 上の連続準双線型形式である．よって，主張は事実 1.2 から従う． □

注意 2.12　定理 2.18 で示すように，命題 2.11 の状況で $\|T\|=\|f\|_\infty$ が成り立つ．

定義 2.13（有界可測関数の射影値測度に関する積分）　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$f\in L^\infty(X,\varPi)$ に対して，命題 2.11 の条件によって一意に定まる $T\in\mathscr{L}(E)$ を，f の $\varPi$ に関する**積分**といい，

$$\int_X f\,d\varPi$$

と書く．可測集合 $A\subseteq X$ と $f\in L^\infty(X,\varPi)$ に対して，$\int_X\chi_A f\,d\varPi$ の代わりに $\int_A f\,d\varPi$ とも書く．

射影値測度に関する積分の性質を見ていく．

命題 2.14　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$，$\xi, \eta \in E$ に対して，

$$\begin{aligned} d\mathit{\Pi}_{(\int_X f\,d\mathit{\Pi})\xi,\eta} &= f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}, \\ d\mathit{\Pi}_{\xi,(\int_X f\,d\mathit{\Pi})\eta} &= \overline{f}\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} \end{aligned}$$

である．

証明　可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mathit{\Pi}_{\xi,\mathit{\Pi}(A)\eta} = \mathit{\Pi}_{\xi,\eta}(- \cap A)$ であること（命題 2.6 (3)）より

$$\begin{aligned} \mathit{\Pi}_{(\int_X f\,d\mathit{\Pi})\xi,\eta}(A) &= \left\langle \mathit{\Pi}(A)\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi \middle| \eta \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi \middle| \mathit{\Pi}(A)\eta \right\rangle \\ &= \int_X f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\mathit{\Pi}(A)\eta} \\ &= \int_A f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} \end{aligned}$$

だから，$d\mathit{\Pi}_{(\int_X f\,d\mathit{\Pi})\xi,\eta} = f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$ である．また，この結果と命題 2.6 (2) より，

$$d\mathit{\Pi}_{\xi,(\int_X f\,d\mathit{\Pi})\eta} = d\overline{\mathit{\Pi}_{(\int_X f\,d\mathit{\Pi})\eta,\xi}} = \overline{f}\,d\overline{\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}} = \overline{f}\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$$

である．□

命題 2.15　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．f, $g \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ と ξ, $\eta \in E$ に対して，

$$\left\langle \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi \middle| \left(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\right)\eta \right\rangle = \int_X f\overline{g}\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$$

が成り立つ．特に，

$$\left\|\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi\right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$$

である．

証明　命題 2.14 より $d\mathit{\Pi}_{\xi,(\int_X g\,d\mathit{\Pi})\eta} = \overline{g}\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$ だから，

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi \middle| \left(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\right)\eta \right\rangle &= \int_X f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,(\int_X g\,d\mathit{\Pi})\eta} \\ &= \int_X f\overline{g}\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} \end{aligned}$$

である．$g = f$，$\eta = \xi$ と置けば，

$$\left\|\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi\right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$$

を得る．□

命題 2.16　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\operatorname{Ker}\left(\int_X f \, d\mathit{\Pi}\right) = \operatorname{Im} \mathit{\Pi}(f^{-1}(\{0\}))$$

が成り立つ．

証明　命題 2.15 より，$\xi \in E$ が $\operatorname{Ker}\bigl(\int_X f \, d\mathit{\Pi}\bigr)$ に属するための必要十分条件は

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = 0$$

である．$|f|^2 \geq 0$ かつ $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$ は正値測度だから（命題 2.6 (1)），これは $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$-ほとんどいたるところで $|f|^2 = 0$ であること，すなわち $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 0$ であることと同値である．$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = \|\mathit{\Pi}(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))\xi\|^2$ だから，これは $\xi \in (\operatorname{Im} \mathit{\Pi}(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})))^\perp = \operatorname{Im} \mathit{\Pi}(f^{-1}(\{0\}))$（命題 2.4 (2)）と同値である．よって，$\operatorname{Im} \mathit{\Pi}(f^{-1}(\{0\})) = \operatorname{Ker} T$ である．□

射影値測度の像と積分との関係について，次が成り立つ．

命題 2.17　X, Y を可測空間，$f \colon X \to Y$ を可測写像，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．任意の $g \in L^\infty(Y, \mathit{\Pi})$ に対して，$g \circ f \in L^\infty(X, f_*\mathit{\Pi})$ であり，

$$\int_Y g \, d(f_*\mathit{\Pi}) = \int_X g \circ f \, d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．

証明　$g \in L^\infty(Y, \mathit{\Pi})$ とすると，明らかに $g \circ f \in L^\infty(X, f_*\mathit{\Pi})$ であり，任意の $\xi, \eta \in E$ に対して

$$\int_Y g \, d(f_*\mathit{\Pi})_{\xi,\eta} = \int_Y g \, d(f_*(\mathit{\Pi}_{\xi,\eta})) = \int_X g \circ f \, d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$$

である．よって，

$$\int_Y g \, d(f_*\mathit{\Pi}) = \int_X g \circ f \, d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．□

2.3　射影値測度に関する積分の準同型性（有界な場合）

射影値測度に関する積分の最も基本的かつ重要な性質は，次の定理が述べる準同型性である．

定理 2.18　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ から $\mathscr{L}(E)$ への写像

$$f \mapsto \int_X f \, d\mathit{\Pi}$$

は，単位的 C* 代数の埋め込み（ノルムを保つ単位的対合準同型）である．

証明　$L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ から $\mathscr{L}(E)$ への写像 $f \mapsto \int_X f \, d\mathit{\Pi}$ を ϕ と書く．単位的 C* の間の単射な単位的対合準同型は常に単位的 C* 代数の埋め込みだから [10, 定理 6.8]，ϕ が単射な単位的対合準同型であることを示せば十分

である．ϕ が線型かつ乗法単位元を保つことは明らかだから，あとは，ϕ が対合と積を保つことと単射であることを示せばよい．

ϕ が対合を保つことを示す．$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ とすると，命題 2.6 (2) より，任意の $\xi, \eta \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)^* \xi \middle| \eta \right\rangle &= \overline{\left\langle \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right) \eta \middle| \xi \right\rangle} \\ &= \overline{\int_X f\,d\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}} \\ &= \int_X \overline{f}\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} \\ &= \left\langle \left(\int_X \overline{f}\,d\mathit{\Pi}\right) \xi \middle| \eta \right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)^* = \int_X \overline{f}\,d\mathit{\Pi}$$

である．

ϕ が積を保つことを示す．$f, g \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ とすると，命題 2.14 より，任意の $\xi, \eta \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\right) \xi \middle| \eta \right\rangle &= \int_X f\,d\mathit{\Pi}_{(\int_X g\,d\mathit{\Pi})\xi,\eta} \\ &= \int_X fg\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} \\ &= \left\langle \left(\int_X fg\,d\mathit{\Pi}\right) \xi \middle| \eta \right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\right) = \left(\int_X fg\,d\mathit{\Pi}\right)$$

である．

ϕ が単射であることを示す．$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi}) \setminus \{0\}$ とすると，ある $r > 0$ が存在して，$A = \{x \in X \mid |f(x)| \geq r\}$ は $\mathit{\Pi}$-零集合でない．そこで，$\xi \in \operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A) \setminus \{0\}$ をとると，$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A) = \langle \mathit{\Pi}(A)\xi | \xi \rangle = \|\xi\|^2 > 0$ であり，したがって命題 2.15 より

$$\left\| \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right) \xi \right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \geq r^2 \|\xi\|^2 > 0$$

となる．よって，ϕ は単射である．□

系 2.19　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)^* \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right) = \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)^* = \int_X |f|^2\,d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．したがって，$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ は E 上の連続正規作用素である．

証明　定理 2.18 からただちに従う．□

系 2.20　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \Pi)$ に対して，

$$\overline{\mathrm{Im}\left(\int_X f\,d\Pi\right)} = \mathrm{Im}\,\Pi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))$$

が成り立つ．

証明　系 2.19 より $\int_X f\,d\Pi$ は正規だから，系 1.6，命題 2.16 および命題 2.4 (2) より

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Im}\left(\int_X f\,d\Pi\right)} &= \left(\mathrm{Ker}\left(\int_X f\,d\Pi\right)\right)^\perp \\ &= (\mathrm{Im}\,\Pi(f^{-1}(\{0\})))^\perp \\ &= \mathrm{Im}\,\Pi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))\end{aligned}$$

である．□

系 2.21　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \Pi)$ に対して，

$$\mathrm{Sp}\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \mathrm{ess\,ran}_\Pi\, f$$

が成り立つ．

証明　単位的 C* 代数の埋め込みはスペクトルを保つから [10, 系 5.19]，定理 2.18 より

$$\mathrm{Sp}\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \mathrm{Sp}_{L^\infty(X,\Pi)}(f) = \mathrm{ess\,ran}_\Pi\, f$$

が成り立つ．□

2.4　射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（有界な場合）

有界可測関数の射影値測度に関する積分について，次の意味で「Lebesgue の収束定理」が成り立つ．

定理 2.22（射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理）　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$L^\infty(X, \Pi)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in L^\infty(X, \Pi)$ に Π-概収束するとする．このとき，$\mathscr{L}(E)$ 上の点列 $\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は，強作用素位相に関して $\int_X f\,d\Pi$ に収束する．

証明　$\xi \in E$ を任意にとる．任意の $\eta \in E$ に対して，系 2.9 より

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)\xi - \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \,\middle|\, \eta\right\rangle\right| &= \left|\left\langle\left(\int_X (f_n - f)\,d\Pi\right)\xi \,\middle|\, \eta\right\rangle\right| \\ &= \left|\int_X (f_n - f)\,d\Pi_{\xi,\eta}\right| \\ &\le \left(\int_X |f_n - f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|\end{aligned}$$

だから，

$$\left\|\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)\xi - \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi\right\| \le \left(\int_X |f_n - f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2}$$

である．ここで，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に $\mathit{\Pi}$-概収束するから，特に $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$-概収束する．また，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^\infty(X,\mathit{\Pi})$ において有界だから，特に $L^\infty(X,\mathit{\Pi}_{\xi,\xi})$ においても有界である．したがって，Lebesgue の収束定理より，上式の右辺は 0 に収束するから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}\right)\xi = \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi$$

である．よって，$\left(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ は強作用素位相に関して $\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ に収束する． □

命題 2.23　X を可測空間，E, F を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}_E$, $\mathit{\Pi}_F$ をそれぞれ X 上の E-射影値測度，F-射影値測度とし，$S\in\mathscr{L}(E;F)$ とする．次の 2 条件は同値である．

(a) 任意の可測集合 $A\subseteq X$ に対して，$S\mathit{\Pi}_E(A)=\mathit{\Pi}_F(A)S$ である．
(b) 任意の $f\in B(X)$ に対して，$S\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\right)=\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_F\right)S$ である．

証明　(b) $\Longrightarrow$ (a)　可測集合 $A\subseteq X$ に対して $\mathit{\Pi}_E(A)=\int_X \chi_A\,d\mathit{\Pi}_E$，$\mathit{\Pi}_F(A)=\int_X\chi_A\,d\mathit{\Pi}_F$ であることから明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　(a) が成り立つとして，$f\in B(X)$ を任意にとる．f に各点収束する可測単関数の有界列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．仮定より，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$S\left(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_E\right)=\left(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_F\right)S$$

である．射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.22）より，点列 $\left(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_E\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_F\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ強作用素位相に関して $\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E$, $\int_X f\,d\mathit{\Pi}_F$ に収束するから，上式で $n\to\infty$ とすることで

$$S\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\right)=\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_F\right)S$$

を得る（命題 1.9 (1), (2)）．よって，(b) が成り立つ． □

2.5　射影値測度と準同型との対応

前 2 つの小節では，射影値測度に関する積分が単位的対合準同型を与え，さらに「Lebesgue の収束定理」が成り立つことを見た．本小節では逆に，「Lebesgue の収束定理」が成り立つ単位的対合準同型には，それに対応する射影値測度が一意に存在することを示す．

定義 2.24 (Lebesgue の収束条件)　X を可測空間，E を Hilbert 空間とする．単位的対合準同型 $\phi\colon B(X)\to\mathscr{L}(E)$ が **Lebesgue の収束条件を満たす**[*1] とは，

> $B(X)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に各点収束するならば，$(\phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は弱作用素位相に関して 0 に収束する

ことをいう．

[*1] 「Lebesgue の収束条件を満たす」は，本稿だけの用語である．Arveson [1, Def. 2.6.1] では，このような単位的対合準同型を「σ-representation」と呼んでいる．

注意 2.25　定義 2.24 の条件の「弱作用素位相」を「強作用素位相」に変えても，定義は変わらない．このことを確かめる．X を可測空間，E を Hilbert 空間とし，単位的対合準同型 $\phi\colon B(X) \to \mathscr{L}(E)$ が Lebesgue の収束条件を満たすとする．$B(X)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，0 に各点収束するものを任意にとる．すると，$(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ も $B(X)$ 上の有界な点列であって 0 に各点収束するから，任意の $\xi \in E$ に対して，$n\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned}\|\phi(f_n)\xi\|^2 &= \langle \phi(f_n)\xi | \phi(f_n)\xi\rangle \\ &= \langle \phi(f_n)^*\phi(f_n)\xi | \xi\rangle \\ &= \langle \phi(|f_n|^2)\xi|\xi\rangle \\ &\to 0\end{aligned}$$

である．よって，$(\phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は強作用素位相に関しても 0 に収束する．

定理 2.26　X を可測空間，E を Hilbert 空間とする．

(1) X 上の E-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ に対して，$B(X)$ から $\mathscr{L}(E)$ への写像 $f \mapsto \int_X f\,d\mathit{\Pi}$ は，Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型である．

(2) Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型 $\phi\colon B(X) \to \mathscr{L}(E)$ に対して，写像 $A \mapsto \phi(\chi_A)$ は，X 上の E-射影値測度である．

(3) (1) と (2) の対応は，互いに他の逆であり，X 上の E-射影値測度と Lebesgue の収束条件を満たす $B(X)$ から $\mathscr{L}(E)$ への単位的対合準同型との間の一対一対応を与える．

証明　(1)　単位的対合準同型であることは定理 2.18 で，Lebesgue の収束条件を満たすことは射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.22）で示した．

(2)　$\phi\colon B(X) \to \mathscr{L}(E)$ を Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型とする．可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\phi(\chi_A)^* = \phi(\overline{\chi_A}) = \phi(\chi_A)$ かつ $\phi(\chi_A)^2 = \phi(\chi_A^2) = \phi(\chi_A)$ だから，$\phi(\chi_A)$ は E 上の直交射影である．また，ϕ は乗法単位元を保つから，$\phi(\chi_X) = \phi(1) = I$ である．さらに，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を互いに交わらない可測集合の列として $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と置くと，ϕ が Lebesgue の収束条件を満たすことより，$\sum_{n=0}^{N-1}\phi(\chi_{A_n}) = \phi(\chi_{A_0\cup\cdots\cup A_{N-1}})$ は弱作用素位相に関して $\phi(\chi_A)$ に収束する．よって，写像 $A \mapsto \phi(\chi_A)$ は，X 上の E-射影値測度である（注意 2.3 を参照のこと）．

(3)　まず，(2) の対応が単射であることを示す．$\phi, \psi\colon B(X) \to \mathscr{L}(E)$ を Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型とし，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して $\phi(\chi_A) = \psi(\chi_A)$ が成り立つとする．このとき，ϕ, ψ の線型性より，可測単関数に対する ϕ と ψ の値は等しい．そこで，任意の $f \in B(X)$ に対して，f に各点収束する可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとると，ϕ, ψ が Lebesgue の収束条件を満たすことより

$$\phi(f) = \lim_{n\to\infty}\phi(f_n) = \lim_{n\to\infty}\psi(f_n) = \psi(f)$$

が成り立つ（ここで，極限は弱作用素位相に関するものである．弱作用素位相は分離だから，極限の一意性が成り立つことに注意せよ）．よって，$\phi = \psi$ である．これで，(2) の対応が単射であることが示された．

次に，X 上の E-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ に対して，(1) によって $\mathit{\Pi}$ に対応する準同型を ϕ とすると，(2) によって ϕ に対応する射影値測度は $\mathit{\Pi}$ であることを示す．示すべきことは，可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\int_X \chi_A\,d\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}(A)$$

が成り立つことである．これは，射影値測度に関する積分の定義より，任意の $\xi, \eta \in E$ に対して

$$\left\langle \left(\int_X \chi_A \, d\Pi \right) \xi \middle| \eta \right\rangle = \int_X \chi_A \, d\Pi_{\xi,\eta} = \Pi_{\xi,\eta}(A) = \langle \Pi(A)\xi|\eta\rangle$$

であることから従う．これで，射影値測度と Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型との間の一対一対応が示された． □

3　連続正規作用素のスペクトル分解

3.1　正則な射影値 Borel 測度

定義 3.1（正則な射影値 Borel 測度）　X を局所コンパクト分離空間，E を Hilbert 空間とする．X 上の E-射影値 Borel 測度 Π が**正則**であるとは，任意の $\xi, \eta \in E$ に対して，Π の成分 $\Pi_{\xi,\eta}$ が（X 上の有限複素 Borel 測度として）正則であることをいう．

命題 3.2　X を第二可算局所コンパクト分離空間，E を Hilbert 空間とする．X 上の E-射影値 Borel 測度は，すべて正則である．

証明　第二可算局所コンパクト分離空間上の有限複素 Borel 測度がすべて正則であること [2, Prop. 7.2.3] から従う． □

X を局所コンパクト分離空間，μ を X 上の正則な正値，有限実または有限複素測度とする．このとき，$\mu|_U = 0$ を満たす最大の開集合 $U \subseteq X$ が存在し，その補集合 $X \setminus U$ を μ の台といい，$\operatorname{supp} \mu$ と書くのだった．

前段に加えて，E を Hilbert 空間，Π を X 上の正則な E-射影値 Borel 測度とする．Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して，$\Pi(A) = 0$ は任意の $\xi, \eta \in E$ に対して $\Pi_{\xi,\eta}(A) = 0$ であることと同値である．また，$A, A' \subseteq X$ が Borel 集合であって $A' \subseteq A$ であるとき，$\Pi(A) = 0$ ならば $\Pi(A') = 0$ である（命題 2.4 (1)）．よって，Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して，

$$\Pi(A) = 0 \iff \text{任意の } \xi, \eta \in E \text{ に対して } \Pi_{\xi,\eta}|_A = 0$$

が成り立つ．特に，$\Pi(U) = 0$ を満たす最大の開集合 $U \subseteq X$ が存在し，その補集合 $X \setminus U$ はすべての ξ, $\eta \in E$ に対する $\operatorname{supp} \Pi_{\xi,\eta}$ の交叉に等しい．

定義 3.3（正則な射影値測度の台）　X を局所コンパクト分離空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の正則な E-射影値 Borel 測度とする．$\Pi(U) = 0$ を満たす X の最大の開集合 U の補集合 $X \setminus U$ を，Π の**台**といい，$\operatorname{supp} \Pi$ と書く．

局所コンパクト分離空間 X 上の正則な射影値測度 Π の台は，$\Pi(F) = I$ を満たす最大の閉集合 $F \subseteq X$ ともいえる．上の議論より，

$$\operatorname{supp} \Pi = \bigcap_{\xi,\eta \in E} \operatorname{supp} \Pi_{\xi,\eta}$$

である．

3.2　射影値測度による表現定理

本小節では，コンパクト分離空間 X に対して，X 上の正則な有限複素 Borel 測度の全体が全変動ノルムに関してなす Banach 空間を $\mathscr{M}(X)$ と書く．また，$C(X)$ 上の連続線形形式の全体が作用素ノルムに関してなす Banach 空間を $C(X)'$ と書く．

次の事実の証明は，たとえば Cohn [2, Thm. 7.3.6] を参照のこと．

事実 3.4（Riesz–Markov–角谷の定理）　X をコンパクト分離空間とする．$\mu \in \mathscr{M}(X)$ に対して，$C(X)$ 上の線型形式 I_μ を

$$I_\mu(f) = \int_X f \, d\mu \qquad (f \in C(X))$$

と定めると，$I_\mu \in C(X)'$ であり，対応 $\mu \mapsto I_\mu$ は $\mathscr{M}(X)$ から $C(X)'$ へのノルム空間の同型（すなわち，ノルムを保つ線型同型）を与える．

定理 3.5　X をコンパクト分離空間，E を Hilbert 空間とする．単位的対合準同型 $\phi\colon C(X) \to \mathscr{L}(E)$ に対して，X 上の正則な E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ であって，任意の $f \in C(X)$ に対して

$$\phi(f) = \int_X f \, d\varPi$$

であるようなものが一意に存在する．

証明　$\phi\colon C(X) \to \mathscr{L}(E)$ を単位的対合準同型とする．

まず，一意性を示す．X 上の正則な E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ が条件を満たすとすると，任意の $\xi, \eta \in E$ および $f \in C(X)$ に対して

$$\int_X f \, d\varPi_{\xi,\eta} = \left\langle \left(\int_X f \, d\varPi \right) \xi \middle| \eta \right\rangle = \langle \phi(f)\xi | \eta \rangle$$

が成り立つ．Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$\varPi_{\xi,\eta} \in \mathscr{M}(X)$ は上式によって一意に定まるから，条件を満たす $\varPi$ はたかだか一意である．

次に，存在を示す．ϕ はノルム減少だから [10, 定理 5.12]，ξ, $\eta \in E$ に対して，$C(X)$ 上の線型形式 $f \mapsto \langle \phi(f)\xi|\eta\rangle$ は連続かつその作用素ノルムは $\|\xi\|\|\eta\|$ 以下である．したがって，Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$\mu_{\xi,\eta} \in \mathscr{M}(X)$ であって，任意の $f \in C(X)$ に対して

$$\langle \phi(f)\xi|\eta\rangle = \int_X f \, d\mu_{\xi,\eta}$$

であるようなものが一意に存在し，この $\mu_{\xi,\eta}$ は $\|\mu_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$ を満たす．さらに，$\mu_{\xi,\eta}$ は ξ に関して線型であり，η に関して共役線型である．

$\|\mu_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$ だから，$f \in B(X)$ を固定すると，$E \times E$ 上の準双線型形式 $(\xi, \eta) \mapsto \int_X f \, d\mu_{\xi,\eta}$ は連続かつその作用素ノルムは $\|f\|_{B(X)}$ 以下である．よって，事実 1.2 より，$\widetilde{\phi}(f) \in \mathscr{L}(E)$ であって，任意の ξ, $\eta \in E$ に対して

$$\langle \widetilde{\phi}(f)\xi|\eta\rangle = \int_X f \, d\mu_{\xi,\eta}$$

であるようなものが一意に存在する．これによって，写像 $\widetilde{\phi}\colon B(X) \to \mathscr{L}(E)$ を定める．定義より，$\widetilde{\phi}$ は ϕ の拡張である．

以下，$\widetilde{\phi}$ が Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型であることを示す．$\widetilde{\phi}$ が線型であることは明らかであり，また $\widetilde{\phi}(1) = \phi(1) = I$ である．あとは，$\widetilde{\phi}$ が対合と積を保つことと，Lebesgue の収束条件を満たすことを示せばよい[*2]．

$\widetilde{\phi}$ が対合を保つことを示す．ϕ は対合を保つから，$\xi,\ \eta \in E$ とすると，任意の $f \in C(X)$ に対して $\langle \phi(f)^*\xi|\eta\rangle = \langle \phi(\overline{f})\xi|\eta\rangle$ である．この両辺をそれぞれ計算すると

$$\langle \phi(f)^*\xi|\eta\rangle = \overline{\langle \phi(f)\eta|\xi\rangle} = \overline{\int_X f\, d\mu_{\xi,\eta}} = \int_X \overline{f}\, d\overline{\mu_{\xi,\eta}}, \qquad \langle \phi(\overline{f})\xi|\eta\rangle = \int_X \overline{f}\, d\mu_{\xi,\eta}$$

となるから，

$$\int_X \overline{f}\, d\overline{\mu_{\xi,\eta}} = \int_X \overline{f}\, d\mu_{\xi,\eta}$$

である．したがって，Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$\overline{\mu_{\xi,\eta}} = \mu_{\eta,\xi}$ である．よって，$f \in B(X)$ とすると，任意の $\xi,\eta \in E$ に対して

$$\langle \widetilde{\phi}(f)^*\xi|\eta\rangle = \overline{\langle \widetilde{\phi}(f)\eta|\xi\rangle} = \overline{\int_X f\, d\mu_{\eta,\xi}} = \int_X \overline{f}\, d\mu_{\xi,\eta} = \langle \widetilde{\phi}(\overline{f})\xi|\eta\rangle$$

が成り立つから，$\widetilde{\phi}(f)^* = \widetilde{\phi}(\overline{f})$ である．

ϕ が積を保つことを示す．ϕ は積を保つから，$\xi,\eta \in E$，$g \in C(X)$ とすると，任意の $f \in C(X)$ に対して $\langle \phi(f)\phi(g)\xi|\eta\rangle = \langle \phi(fg)\xi|\eta\rangle$ である．この両辺をそれぞれ計算すると

$$\langle \phi(f)\phi(g)\xi|\eta\rangle = \int_X f\, d\mu_{\phi(g)\xi,\eta}, \qquad \langle \phi(fg)\xi|\eta\rangle = \int_X fg\, d\mu_{\xi,\eta}$$

となるから，

$$\int_X f\, d\mu_{\phi(g)\xi,\eta} = \int_X fg\, d\mu_{\xi,\eta}$$

である．したがって，Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$d\mu_{\phi(g)\xi,\eta} = g\, d\mu_{\xi,\eta}$ である．これより，$f \in B(X)$ とすると，任意の $g \in C(X)$ に対して

$$\int_X fg\, d\mu_{\xi,\eta} = \int_X f\, d\mu_{\phi(g)\xi,\eta} = \langle \widetilde{\phi}(f)\phi(g)\xi|\eta\rangle = \langle \phi(g)\xi|\widetilde{\phi}(f)^*\eta\rangle = \int_X g\, d\mu_{\xi,\widetilde{\phi}(f)^*\eta}$$

である．したがって，Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$d\mu_{\xi,\widetilde{\phi}(f)^*\eta} = f\, d\mu_{\xi,\eta}$ である．よって，f，$g \in B(X)$ とすると，任意の $\xi,\eta \in E$ に対して

$$\langle \widetilde{\phi}(f)\widetilde{\phi}(g)\xi|\eta\rangle = \langle \widetilde{\phi}(g)\xi|\widetilde{\phi}(f)^*\eta\rangle = \int_X g\, d\mu_{\xi,\widetilde{\phi}(f)^*\eta} = \int_X fg\, d\mu_{\xi,\eta} = \langle \widetilde{\phi}(fg)\xi|\eta\rangle$$

が成り立つから，$\widetilde{\phi}(f)\widetilde{\phi}(g) = \widetilde{\phi}(fg)$ である．

$\widetilde{\phi}$ が Lebesgue の収束条件を満たすことを示す．$B(X)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に各点収束するとすると，Lebesgue の収束定理より，任意の $\xi,\eta \in E$ に対して

$$\langle \widetilde{\phi}(f_n)\xi|\eta\rangle = \int_X f_n\, d\mu_{\xi,\eta} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

[*2] 以下の議論は，定理 2.26 (1) の証明の議論と類似している．定理 2.26 (1) の証明では射影値測度の性質である命題 2.6 (2) および命題 2.14 を用いたが，本証明では，ϕ が対合および積を保つことからこれらに対応する性質を導く必要がある．

である．すなわち，$\mathscr{L}(E)$ 上の点列 $(\widetilde{\phi}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は弱作用素位相に関して 0 に収束する．よって，$\widetilde{\phi}$ は Lebesgue の収束条件を満たす．

以上で，$\widetilde{\phi}$ が Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型であることが示された．そこで，定理 2.26 によって $\widetilde{\phi}$ と対応する X 上の E-射影値測度 Π をとる．すると，任意の $f\in C(X)$ に対して

$$\int_X f\,d\Pi = \widetilde{\phi}(f) = \phi(f)$$

が成り立つ．また，$\xi, \eta\in E$ とすると，任意の Borel 集合 $A\subseteq X$ に対して

$$\Pi_{\xi,\eta}(A) = \langle\widetilde{\phi}(\chi_A)\xi|\eta\rangle = \int_X \chi_A\,d\mu_{\xi,\eta} = \mu_{\xi,\eta}(A)$$

だから，$\Pi_{\xi,\eta} = \mu_{\xi,\eta}\in\mathscr{M}(X)$ である．よって，Π は正則である．これで，条件を満たす Π の存在が示された． □

系 3.6 X を第二可算コンパクト分離空間，E を Hilbert 空間とし，$\phi\colon C(X)\to\mathscr{L}(E)$ を単位的対合準同型とする．

(1) X 上の E-射影値 Borel 測度 Π であって，任意の $f\in C(X)$ に対して

$$\phi(f) = \int_X f\,dE$$

であるようなものが一意に存在する．

(2) Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型 $\widetilde{\phi}\colon B(X)\to\mathscr{L}(E)$ であって，ϕ の拡張であるようなものが一意に存在する．

証明 (1) 第二可算コンパクト分離空間 X 上の射影値 Borel 測度は必ず正則だから（命題 3.2），定理 3.5 から主張が従う．

(2) 射影値測度と Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型との間の一対一対応（定理 2.26）に注意すれば，(1) から従う． □

3.3 連続正規作用素のスペクトル分解

$\mathbb{C}$ 上のコンパクト台をもつ E-射影値 Borel 測度 Π に対して，$z\in L^\infty(\mathbb{C},\Pi)$ であり，z の Π-本質的値域が $\operatorname{supp}\Pi$ であることに注意する．

定理 3.7（連続正規作用素のスペクトル分解定理） E を Hilbert 空間とする．E 上の連続正規作用素 T に対して，$\mathbb{C}$ 上のコンパクト台をもつ E-射影値 Borel 測度 Π であって，

$$T = \int_{\mathbb{C}} z\,d\Pi$$

を満たすものが一意に存在する．さらに，この Π は，$\operatorname{supp}\Pi = \operatorname{Sp}(T)$ を満たす．

証明 T を E 上の連続正規作用素とする．$\mathbb{C}$ 上のコンパクト台をもつ E-射影値 Borel 測度 Π が $T = \int_{\mathbb{C}} z\,d\Pi$ を満たすとすると，系 2.21 より

$$\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{ess\,ran}_\Pi z = \operatorname{supp}\Pi$$

である．そこで，$\mathrm{Sp}(T)$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ であって

$$T = \int_{\mathrm{Sp}(T)} z \, d\varPi \tag{$*$}$$

を満たすものが一意に存在することを示せばよい．

定理 2.26 より，$\mathrm{Sp}(T)$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ であって $(*)$ を満たすものを与えることは，Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合準同型 $\phi\colon B(\mathrm{Sp}(T)) \to \mathscr{L}(E)$ であって $\phi(z) = T$ を満たすものを与えることと等価である．ところで，連続関数算 $C(\mathrm{Sp}(T)) \to \mathscr{L}(E)$ は z を T にうつす唯一の単位的対合準同型であり [10, 命題 6.3]，系 3.6 (2) より連続関数算 $C(\mathrm{Sp}(T)) \to \mathscr{L}(E)$ は Lebesgue の収束条件を満たす $B(\mathrm{Sp}(T))$ から $\mathscr{L}(E)$ への単位的対合準同型に一意に拡張される．よって，条件を満たす ϕ は一意に存在し，したがって条件を満たす $\varPi$ も一意に存在する． □

定義 3.8（連続正規作用素のスペクトル測度） E を Hilbert 空間とする．E 上の連続正規作用素 T に対して，連続正規作用素のスペクトル分解定理（定理 3.7）によって一意に定まる $\mathbb{C}$ 上のコンパクト台をもつ E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ を，T の**スペクトル測度**という．

連続正規作用素 T のスペクトル測度 $\varPi$ は $\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，$\varPi$ は $\mathrm{Sp}(T)$ 上の射影値 Borel 測度ともみなせる．

スペクトル測度の簡単な性質を述べておく．

命題 3.9 E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とし，$\varPi$ を T のスペクトル測度とする．

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\operatorname{Im} \varPi(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ である．特に，$\operatorname{Im} \varPi(\{0\}) = \operatorname{Ker} T$ である．
(2) $\operatorname{Im} \varPi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \overline{\operatorname{Im} T}$ である．

証明 (1) 命題 2.16 より，

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \operatorname{Ker}\left(\int_X (\lambda - z) \, d\varPi\right) = \operatorname{Im} \varPi(\{\lambda\})$$

である．

(2) 系 2.20 より，

$$\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im}\left(\int_X z \, d\varPi\right)} = \operatorname{Im} \varPi(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

である． □

系 3.10 E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とする．$\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点は，T の固有値である．

証明 T のスペクトル測度を $\varPi$ とする．λ が $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点ならば，$\{\lambda\}$ は $\mathrm{Sp}(T)$ の開集合だから，$\operatorname{supp} \varPi = \mathrm{Sp}(T)$ より $\varPi(\{\lambda\}) \neq 0$ である．$\varPi(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ だから（命題 3.9 (1)），これは λ が T の固有値であることを意味する． □

注意 3.11 系 3.10 の逆は成り立たない．すなわち，Hilbert 空間 E 上の連続正規作用素 T について，$\lambda \in \mathbb{C}$ が T の固有値であっても，λ が $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点であるとは限らない．たとえば，Hilbert 空間 E を

$$E = l^2([0,1]) = \left\{ \xi\colon [0,1] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{t \in [0,1]} |\xi(t)|^2 < \infty \right\}$$

と定め，$T \in \mathscr{L}(E)$ を

$$(T\xi)(t) = t\xi(t) \qquad (t \in [0,1])$$

と定めると，T は自己随伴であり，$[0,1]$ の任意の点は T の固有値だが，それらはどれも $\mathrm{Sp}(T) = [0,1]$ の孤立点ではない．

注意 3.12 T が正規とは限らない場合，系 3.10 の結論は成り立たない．すなわち，Hilbert 空間 E 上の連続線型作用素 T について，$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点であっても，λ が T の固有値であるとは限らない．これを見るために，Hilbert 空間 E とその上の連続線型作用素 T であって，$\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$ だが T が固有値をもたない例を構成する．

Hilbert 空間 E を

$$E = l^2(\mathbb{N}_{>0}) = \left\{ \xi \colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

と定め，$T \in \mathscr{L}(E)$ を

$$(T\xi)(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ \xi(n-1)/(n-1) & (n \geq 2) \end{cases}$$

と定める．容易にわかるように，T は固有値をもたない．$\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$ を示す．T は全射ではないから，$0 \in \mathrm{Sp}(T)$ である．次に，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を任意にとり，$\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ であることを示す．閉グラフ定理より，そのためには，$\lambda I - T$ が E から自身への全単射であることを示せばよい．$\xi, \eta \in E$ とする．$(\lambda I - T)\xi = \eta$，すなわち

$$\lambda\xi(1) = \eta(1), \qquad \lambda\xi(n) - \frac{\xi(n-1)}{n-1} = \eta(n) \qquad (n \geq 2)$$

を ξ について解くと，

$$\begin{aligned} &\xi(1) = \lambda^{-1}\eta(1), \\ &\xi(n) = \lambda^{-1}\left(\frac{\lambda^{-(n-1)}}{(n-1)!}\eta(1) + \frac{\lambda^{-(n-2)}}{2 \cdots (n-1)}\eta(2) + \cdots + \frac{\lambda^{-1}}{n-1}\eta(n-1) + \eta(n) \right) \qquad (n \geq 2) \end{aligned}$$

となる．したがって，$\lambda I - T$ が E から自身への全単射であることを示すためには，任意の $\eta = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \in E$ に対して，上式で定まる $\xi \colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$ が E に属することをいえばよい．$n \geq 3$ に対して

$$\begin{aligned} \xi'(n) &= \lambda\xi(n) - \frac{\lambda^{-1}}{n-1}\eta(n-1) - \eta(n) \\ &= \frac{\lambda^{-(n-1)}}{(n-1)!}\eta(1) + \frac{\lambda^{-(n-2)}}{2 \cdots (n-1)}\eta(2) + \cdots + \frac{\lambda^{-1}}{(n-2)(n-1)}\eta(n-2) \end{aligned}$$

と置く．$\lambda \neq 0$ かつ $\eta \in E$ だから，$\sum_{n \geq 3} |\xi'(n)|^2 < \infty$ を示せば十分である．$n \geq 3$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} |\xi'(n)|^2 &= \left| \frac{\lambda^{-(n-1)}}{(n-1)!}\eta(1) + \frac{\lambda^{-(n-2)}}{2 \cdots (n-1)}\eta(2) + \cdots + \frac{\lambda^{-1}}{(n-2)(n-1)}\eta(n-2) \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{\lambda^{-(n-k)}}{k(k+1) \cdots (n-2)(n-1)} \right|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n-2} |\eta(k)|^2 \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{\lambda^{-(n-k)}}{k(k+1) \cdots (n-2)(n-1)} \right|^2 \right) \|\eta\|^2 \end{aligned}$$

である．ここで，$m|\lambda| < 1$ を満たす最大の $m \in \mathbb{N}$ をとると，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-2}\left|\frac{\lambda^{-(n-k)}}{k(k+1)\cdots(n-2)(n-1)}\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{k|\lambda|\cdot(k+1)|\lambda|\cdots(n-2)|\lambda|\cdot(n-1)|\lambda|}\right)^2 \\
&\leq (n-2)\left(\frac{1}{|\lambda|\cdot 2|\lambda|\cdots m|\lambda|\cdot(n-2)|\lambda|\cdot(n-1)|\lambda|}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(m!)^2|\lambda|^{2m+4}(n-2)(n-1)^2}
\end{aligned}$$

だから，上式と合わせて

$$|\xi'(n)|^2 \leq \frac{\|\eta\|^2}{(m!)^2|\lambda|^{2m+4}(n-2)(n-1)^2}$$

を得る．よって，

$$\sum_{n\geq 3}|\xi'(n)|^2 \leq \frac{\|\eta\|^2}{(m!)^2|\lambda|^{2m+4}}\sum_{n\geq 3}\frac{1}{(n-2)(n-1)^2} < \infty$$

である．これで，主張が示された．

3.4 有界 Borel 可測関数算

定義 3.13（有界 Borel 可測関数算） E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．$f \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，E 上の正規作用素 $f(T)$ を

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f\, d\mathit{\Pi}$$

と定める．

T のスペクトル測度 $\mathit{\Pi}$ は $\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，$L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ は自然に $L^\infty(\mathrm{Sp}(T), \mathit{\Pi})$ と同一視される．よって，$f \in L^\infty(\mathrm{Sp}(T), \mathit{\Pi})$ に対しても $f(T)$ が矛盾なく定まる．

定理 3.14 E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．有界 Borel 可測関数算 $L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi}) \to \mathscr{L}(E)$; $f \mapsto f(T)$ は，単位的 C* 代数の埋め込み（ノルムを保つ単位的対合準同型）である．

証明 定理 2.18 の特別な場合である． □

定理 3.15 E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．$L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に $\mathit{\Pi}$-概収束するとする．このとき，$\mathscr{L}(E)$ 上の点列 $(f_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ は，強作用素位相に関して $f(T)$ に収束する．

証明 射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.22）の特別な場合である． □

命題 3.16 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ に対して，E 上の連続正規作用素 $\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ のスペクトル測度は $f_*\mathit{\Pi}$ に等しい．さらに，任意の $g \in L^\infty(\mathbb{C}, f_*\mathit{\Pi})$ に対して

$$g\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right) = \int_X g \circ f\, d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．

証明　$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ より $f_*\mathit{\Pi}$ は $\mathbb{C}$ 上のコンパクト台をもつ E-射影値測度であり，命題 2.17 より

$$\int_X f\, d\mathit{\Pi} = \int_{\mathbb{C}} z\, d(f_*\mathit{\Pi})$$

だから，$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ のスペクトル測度は $f_*\mathit{\Pi}$ に等しい．さらに，ふたたび命題 2.17 より，任意の $g \in L^\infty(\mathbb{C}, f_*\mathit{\Pi})$ に対して

$$g\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right) = \int_{\mathbb{C}} g\, d(f_*\mathit{\Pi}) = \int_X g \circ f\, d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．　□

系 3.17　E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．$f \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，E 上の連続正規作用素 $f(T)$ のスペクトル測度は $f_*\mathit{\Pi}$ に等しい．さらに，任意の $g \in L^\infty(\mathbb{C}, f_*\mathit{\Pi})$ に対して

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T)$$

が成り立つ．

証明　命題 3.16 で，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とした場合である．　□

3.5　連続正規作用素の可換性とスペクトル測度

本節では，連続線型作用素が連続正規作用素と可換になるための条件を，その連続正規作用素のスペクトル測度を用いて記述する．この定理は，スペクトル分解の応用にあたっては基本的である．

補題 3.18（Fuglede–Putnam の定理）　E, F を Hilbert 空間，T_E, T_F をそれぞれ E, F 上の連続正規作用素，$S \in \mathscr{L}(E; F)$ とする．このとき，$ST_E = T_F S$ ならば $ST_E^* = T_F^* S$ である．

証明　任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，コンパクト一様収束位相に関して

$$\exp(i\bar{\lambda}z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\bar{\lambda}z)^n}{n!}$$

だから，連続関数算の連続性より，作用素ノルム位相に関して

$$\exp(i\bar{\lambda}T_E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\bar{\lambda}T_E)^n}{n!}, \qquad \exp(i\bar{\lambda}T_F) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\bar{\lambda}T_F)^n}{n!}$$

である．$ST_E = T_F S$ とすると，上式と合わせて

$$S \exp(i\bar{\lambda}T_E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S(i\bar{\lambda}T_E)^n}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\bar{\lambda}T_F)^n S}{n!} = \exp(i\bar{\lambda}T_F)S \tag{$*$}$$

を得る．

Banach 空間 $\mathscr{L}(E; F)$ に値をとる $\mathbb{C}$ 上の正則写像 f を，

$$f(\lambda) = \exp(-i\lambda T_F^*) S \exp(i\lambda T_E^*) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

と定める．($*$) と連続関数算の準同型性より

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \exp(-i\lambda T_F^*)\exp(-i\overline{\lambda}T_F)S\exp(i\overline{\lambda}T_E)\exp(i\lambda T_E^*) \\ &= \exp(-i(\lambda T_F^* + \overline{\lambda}T_F))S\exp(i(\overline{\lambda}T_E + \lambda T_E^*)) \end{aligned}$$

であり，$|\exp(\pm i(\lambda\overline{z} + \overline{\lambda}z))| = 1$ より $\exp(-i(\lambda T_F^* + \overline{\lambda}T_E))$ と $\exp(i(\lambda T_F^* + \overline{\lambda}T_F))$ はユニタリだから，

$$\|f(\lambda)\| \le \|\exp(-i(\lambda T_F^* + \overline{\lambda}T_F))\|\|S\|\|\exp(-i(\lambda T_F^* + \overline{\lambda}T_E))\| = \|S\|$$

が成り立ち，F は有界である．したがって，Liouville の定理より，f は定数である．よって，

$$0 = f'(\lambda) = -iT_F^*\exp(-i\lambda T_F^*)S\exp(i\lambda T_E^*) + i\exp(-i\lambda T_F^*)ST_E^*\exp(i\lambda T_E^*)$$

である．$\lambda = 0$ と置けば，$0 = -iT_F^*S + iST_E^*$，すなわち $ST_E^* = T_E^*S$ を得る． □

定理 3.19 E, F を Hilbert 空間，T_E, T_F をそれぞれ E, F 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}_E$, $\mathit{\Pi}_F$ をそれぞれ T_E, T_F のスペクトル測度とする．また，$S \in \mathscr{L}(E;F)$ とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(a) $ST_E = T_FS$ である．
(b) 任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S$ である．
(c) 任意の $f \in B(\mathbb{C})$ に対して，$Sf(T_E) = f(T_F)S$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) (a) が成り立つとする．まず，任意の $f \in C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F))$ に対して $Sf(T_E) = f(T_F)S$ であることを示す．

$$\mathscr{F} = \{f \in C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F)) \mid Sf(T_E) = f(T_F)S\}$$

と置くと，$\mathscr{F}$ は $C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F))$ の閉部分単位的代数であり，さらに Fuglede–Putnam の定理（補題 3.18）より $\mathscr{F}$ は複素共役をとる操作で閉じているから，$\mathscr{F}$ は $C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F))$ の部分単位的 C* 代数である．いま仮定より $z \in \mathscr{F}$ であり，$C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F))$ は単位的 C* 代数として z によって生成されるから，$\mathscr{F} = C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F))$ である．すなわち，任意の $f \in C(\mathrm{Sp}(T_E) \cup \mathrm{Sp}(T_F))$ に対して $Sf(T_E) = f(T_F)S$ である．

次に，任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して $S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S$ であることを示す．

$$\mathfrak{A} = \{A \subseteq \mathbb{C} \mid A \text{ は Borel 集合で } S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S\}$$

と置く．すると，

- Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\mathit{\Pi}_E(\mathbb{C} \setminus A) = I_E - \mathit{\Pi}_E(A)$，$\mathit{\Pi}_F(\mathbb{C} \setminus A) = I_F - \mathit{\Pi}_F(A)$ だから，$A \in \mathfrak{A}$ ならば $\mathbb{C} \setminus A \in \mathfrak{A}$ である．
- 互いに交わらない $\mathrm{Sp}(T)$ の Borel 集合の可算族 $\{A_i\}_{i \in I}$ について，$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ と置くと，弱作用素位相に関して $\mathit{\Pi}(A) = \sum_{i \in I} \mathit{\Pi}(A_i)$ だから，すべての $i \in I$ に対して $A_i \in \mathfrak{A}$ ならば $A \in \mathfrak{A}$ である（命題 1.9 (1), (2)）．

よって，$\mathfrak{A}$ は $\mathbb{C}$ 上の σ-代数である．U を $\mathbb{C}$ の開集合とする．すると，U は σ-コンパクトだから，U のコンパクト集合の増大列 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ であるようなものがとれる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，Urysohn の補題より，連続関数 $f_n \colon \mathbb{C} \to [0,1]$ であって $f_n(K_n) \subseteq \{1\}$ かつ $f_n(\mathbb{C} \setminus U) \subseteq \{0\}$ を満たすもの

がとれる．このとき，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は χ_A に各点収束する $B(\mathbb{C})$ 上の有界列だから，$(f_n(T_E))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n(T_F))_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ弱作用素位相に関して $\chi_U(T_E)=\mathit{\Pi}_E(U)$，$\chi_U(T_F)=\mathit{\Pi}_F(U)$ に収束する（定理 3.14）．いま前段の結果より任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $Sf_n(T_E)=f_n(T_F)S$ だから，$n\to\infty$ とすれば $S\mathit{\Pi}_E(U)=\mathit{\Pi}_F(U)S$ を得る（命題 1.9 (1), (2)）．よって，$\mathfrak{A}$ は $\mathbb{C}$ の開集合をすべて含むから，$\mathbb{C}$ の Borel 集合全体となる．すなわち，任意の Borel 集合 $A\subseteq\mathbb{C}$ に対して $S\mathit{\Pi}_E(A)=\mathit{\Pi}_F(A)S$ である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　命題 2.23 の特別な場合である．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである． □

3.6　コンパクト正規作用素のスペクトル分解

本小節では，コンパクト作用素に関する基本的な事実は既知として（たとえば「コンパクト作用素のノート」 [11] を参照のこと），コンパクト正規作用素のスペクトル分解定理を証明する．なお，本小節では，$0\in\mathbb{C}$ を中心とする半径 $r\geq 0$ の閉円板を $B(r)$ と書く．

正規作用素のコンパクト性は，スペクトル測度には次のように反映される．

定理 3.20　E を Hilbert 空間，T を E 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．次の 2 条件は同値である．

(a) T はコンパクトである．

(b) 任意の $r>0$ に対して，$\mathit{\Pi}(\mathbb{C}\setminus B(r))$ は有限階数である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$r>0$ とする．$\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)}=z\cdot\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)}z^{-1}$ だから，有界 Borel 可測関数算の準同型性（定理 3.14）より

$$\mathit{\Pi}(\mathbb{C}\setminus B(r))=\left(\int_{\mathbb{C}}z\,d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_{\mathbb{C}}\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)}z^{-1}\,dP\right)=T\left(\int_{\mathbb{C}}\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)}z^{-1}\,dP\right)$$

であり，したがって T がコンパクトならば $\mathit{\Pi}(\mathbb{C}\setminus B(r))$ もコンパクトである [11, 命題 1.3]．ところが，$\mathit{\Pi}(\mathbb{C}\setminus B(r))$ は直交射影だから，これがコンパクトであることと有限階数であることとは同値である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$r\to+0$ のとき，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)}z$ は z に一様収束するから，有界 Borel 可測関数算の準同型性と連続性（定理 3.14）より，作用素ノルム位相に関して

$$E(\mathbb{C}\setminus B(r))T=\int_{\mathbb{C}}\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)}z\,d\mathit{\Pi}\to\int_{\mathbb{C}}z\,d\mathit{\Pi}=T$$

である．よって，任意の $r>0$ に対して $\mathit{\Pi}(\mathbb{C}\setminus B(r))$ が有限階数ならば，T は有限階数の作用素によって近似でき，したがってコンパクトである [11, 命題 1.6]． □

補題 3.21　X を（集合として）無限な分離空間とすると，X の空でない開集合の無限族であって，どの 2 つの元も交わらないようなものがとれる．

証明　無限な分離空間 X に対して，その 2 つの空でない開集合 U, V であって，互いに交わらず，どちらかは無限であるものがとれることを示せばよい．実際，これが示されたとすると，再帰によって X の空でない開集合の無限列であってどの 2 つも交わらないようなものが構成できる．

点 $x\in X$ を固定する．x が X の孤立点ならば，$U=\{x\}$，$V=X\setminus\{x\}$ と置けばよい．x が X の孤立点でなければ，X が分離であることより，x の任意の近傍は無限個の点をもつ．そこで，x とは別の点 $y\in X$

を固定し，x と y を分離する開集合 U, V をとれば，これらが条件を満たす．これで示された． $\square$

系 3.22 E を Hilbert 空間, T を E 上のコンパクト正規作用素とする．任意の $r > 0$ に対して，$\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ は有限集合である．特に，$\mathrm{Sp}(T)$ は可算集合であり，$\mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ の点はすべて $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点である．

証明 T のスペクトル測度を Π とする．$r > 0$ として，$\mathfrak{U}$ を $\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ の空でない開集合の族であって，どの 2 つの元も交わらないようなものとする．すると，

- 任意の $U \in \mathfrak{U}$ に対して，$U \subseteq \mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ だから，$\mathrm{Im}\,\Pi(U) \subseteq \mathrm{Im}\,\Pi(\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r))$ である（命題 2.4 (1)）．
- 任意の $U \in \mathfrak{U}$ に対して，U が $\mathrm{Sp}(T)$ の開集合であることと $\mathrm{supp}\,\Pi = \mathrm{Sp}(T)$ より，$\Pi(U) \neq 0$ である．
- どの異なる 2 つの U, $V \in \mathfrak{U}$ に対しても，$U \cap V = \emptyset$ だから，$\mathrm{Im}\,\Pi(U) \perp \mathrm{Im}\,\Pi(V)$ である（命題 2.4 (3)）．

ところが，いま T はコンパクトだから，定理 3.20 より $\Pi(\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r))$ は有限階数である．これより，$\mathfrak{U}$ は有限でなければならない．よって，補題 3.21 の対偶より，$\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ は有限集合である．

後半の主張は，前半の主張から容易にわかる． $\square$

定理 3.23（コンパクト正規作用素のスペクトル分解定理） E を Hilbert 空間，T を E 上のコンパクト正規作用素とする．

(1) 任意の $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ に対して，λ は T の固有値であり，その固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元である．

(2) $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ に対して $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ の上への直交射影を P_λ と書くと，作用素ノルム位相に関する総和の等式

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

が成り立つ．

証明 T のスペクトル測度を Π とする．

(1) $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ とする．λ は $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点であり（系 3.22），$\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点は T の固有値だから（系 3.10），λ は T の固有値である．また，$\Pi(\{\lambda\})$ は $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ の上への直交射影だが（命題 3.9），命題 3.9 より $\Pi(\{\lambda\})$ は有限階数だから，固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元である．

(2) 有限部分集合 $F \subseteq \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ に対して $f_F = \chi_F z \in B(\mathrm{Sp}(T))$ と置くと，系 3.22 で述べた $\mathrm{Sp}(T)$ の形から，F を大きくする極限において f_F は z に一様収束する．したがって，有界 Borel 可測関数算の連続性（定理 3.14）より，同極限において $f_F(T)$ は T に作用素ノルム位相に関して収束する．ここで

$$f_F(T) = \int_{\mathrm{Sp}(T)} \chi_F z \, d\Pi = \sum_{\lambda \in F} \lambda \Pi(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda \in F} \lambda P_\lambda$$

だから，作用素ノルムに関する総和の等式

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

が成り立つ． $\square$

注意 3.24 系 3.22 と定理 3.23 (1) は，Banach 空間上の任意のコンパクト作用素に対して成立する．詳しくは，「コンパクト作用素のノート」 [11, 定理 2.8, 系 2.6] を参照のこと．

3.7 応用：連続線型作用素のなす群の弧状連結性

定理 3.25 E を Hilbert 空間とする．$A \in \mathscr{L}(E)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) A は正かつ可逆である．
(b) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ が存在して，$A = \exp H$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) A が正かつ可逆であるとすると，$\mathrm{Sp}(A)$ は $\mathbb{R}_{>0}$ のコンパクト集合である．そこで，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の実数値連続関数 $\log$ に A を代入したものを $H \in \mathscr{L}(E)$ と置けば，H は自己随伴であり，連続関数算と関数の合成との整合性（「Gelfand 理論のノート」 [10, 命題 6.6 (2)] を参照のこと．あるいは，系 3.17 から従う，としてもよい）より $\exp H = \exp\log A = A$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ に対して，$\mathrm{Sp}(\exp H) = \exp(\mathrm{Sp}(H)) \subseteq \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ だから $\exp H$ は正かつ可逆である． □

系 3.26 E を Hilbert 空間とする．E 上の可逆な連続正作用素のなす集合は，作用素ノルム位相に関して弧状連結である．

証明 可逆な連続正作用素 $A \in \mathscr{L}(E)$ を任意にとると，定理 3.25 より，連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ が存在して $A = \exp H$ となる．$t \in [0, 1]$ に対して $f_t \in C(\mathrm{Sp}(H))$ を $f_t(\lambda) = e^{t\lambda}$ と定めると，$[0, 1] \to C(\mathrm{Sp}(H))$; $t \mapsto f_t$ は連続だから，$[0, 1] \to \mathscr{L}(E)$; $t \mapsto f_t(H) = \exp tH$ も作用素ノルム位相に関して連続である．さらに，$f_0(H) = I$，$f_1(H) = \exp H = A$ であり，定理 3.25 より任意の $t \in [0, 1]$ に対して $f_t(H)$ は正かつ可逆である．よって，E 上の可逆な連続正作用素のなす集合は，作用素ノルム位相に関して弧状連結である． □

定理 3.27 E を Hilbert 空間とする．$U \in \mathscr{L}(E)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) U はユニタリである．
(b) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ が存在して，$U = \exp iH$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) U がユニタリであるとすると，$\mathrm{Sp}(A)$ は $\mathbb{U}$ のコンパクト集合である．そこで，$\log$ の枝を 1 つとり， $\mathbb{U}$ 上の実数値有界 Borel 可測関数 $-i\log$ に A を代入したものを $H \in \mathscr{L}(E)$ と置けば，H は自己随伴であり，有界 Borel 可測関数算と関数の合成との整合性（系 3.17）より $\exp iH = \exp i(-i\log A) = A$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ に対して，$\mathrm{Sp}(\exp iH) = \exp(i\,\mathrm{Sp}(H)) \subseteq \exp(i\mathbb{R}) = \mathbb{U}$ だから，$\exp iH$ はユニタリである [10, 系 5.20]． □

系 3.28 E を Hilbert 空間とする．E 上のユニタリ作用素全体のなす群は，作用素ノルム位相に関して弧状連結である．

証明 ユニタリ作用素 $U \in \mathscr{L}(E)$ を任意にとると，定理 3.27 より，連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ が存在して $A = \exp iH$ となる．$t \in [0, 1]$ に対して $g_t \in C(\mathrm{Sp}(H))$ を $g_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ と定めると，$[0, 1] \to C(\mathrm{Sp}(H))$; $t \mapsto g_t$ は連続だから，$[0, 1] \to \mathscr{L}(E)$; $t \mapsto g_t(H) = \exp itH$ も作用素ノルム位相に関して連続である．さら

に，$g_0(H) = I$，$g_1(H) = \exp iH = U$ であり，定理 3.27 より任意の $t \in [0,1]$ に対して $g_t(H)$ はユニタリである．よって，E 上のユニタリ作用素全体のなす群は，作用素ノルム位相に関して弧状連結である． □

注意 3.29 定理 3.25 および系 3.26 の証明では連続関数算しか使っていないから，これらは証明まで含めて一般の単位的 C* 代数に対しても成り立つ．一方で，定理 3.27 の証明では有界 Borel 可測関数算を使っており，定理 3.27 および系 3.28 は一般の単位的 C* 代数に対しては成り立たない．たとえば，$\mathbb{U}$ 上の連続関数 $z\colon \lambda \mapsto \lambda$ は $C(\mathbb{U})$ のユニタリ元だが，どんな自己随伴元（すなわち，実数値連続関数）$f \in C(\mathbb{U})$ を用いても $z = \exp if$ とは表せない．また，$C(\mathbb{U})$ のユニタリ元全体のなす群を $\mathscr{U}$ と書くと，1 と z が $\mathscr{U}$ の異なる弧状連結成分に属することが，回転数を用いた議論でわかる．

E を Hilbert 空間，$T \in \mathscr{L}(E)$ とする．T の極分解 (A, U) をとると，A は E 上の連続線型作用素，U は T と同じ始空間・終空間をもつ E 上の部分等長作用素であり，$T = UA$ が成り立つ（連続線型作用素の極分解について詳しくは，「Gelfand 理論のノート」 [10, 7.3 節] を参照のこと）．ここで，もし T が可逆ならば，U が T と同じ始空間・終空間をもつことより U はユニタリであり，したがって $A = U^{-1}T$ は可逆となる．このことに注意すると，系 3.26 と系 3.28 から次の定理を得る．

定理 3.30 E を Hilbert 空間とする．E 上の可逆な連続線型作用素全体のなす群 $\mathscr{L}(E)^\times$ は，作用素ノルム位相に関して弧状連結である．

証明 E 上の可逆な連続正作用素のなす集合を $\mathscr{A}$，E 上のユニタリ作用素全体のなす群を $\mathscr{U}$ と書くと，上の注意より，合成 $(A, U) \mapsto UA$ による $\mathscr{A} \times \mathscr{U}$ の像が $\mathscr{L}(E)^\times$ となる．$\mathscr{A}$ と $\mathscr{U}$ は作用素ノルム位相に関して弧状連結であり（系 3.26，系 3.28），合成は作用素ノルム位相に関して連続だから，$\mathscr{L}(E)^\times$ は作用素ノルム位相に関して弧状連結である． □

3.8 応用：ユニタリ表現に関する Schur の補題

本小節では，定理 3.19 を用いて，ユニタリ表現に関する Schur の補題を証明する．本小節では，Hilbert 空間 E に対して，E 上のユニタリ作用素全体のなす群を $\mathscr{U}(E)$ と書く．

定義 3.31（ユニタリ表現） G を群とする．Hilbert 空間 E と群準同型 $\pi\colon G \to \mathscr{U}(E)$ との組 (π, E) を，G の**ユニタリ表現**という．

定義 3.32（安定部分線型空間，既約ユニタリ表現） G を群，(π, E) を G のユニタリ表現とする．

(1) E の部分線型空間 M が **G-安定**であるとは，任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)(M) \subseteq M$ であることをいう．
(2) $E \neq \{0\}$ であり，かつ E が $\{0\}$, E 以外の G-安定な閉部分線型空間をもたないとき，(π, E) は**既約**であるという．

定義 3.33（同変性，ユニタリ同値） G を群，(π, E), (π', E') を G のユニタリ表現とする．

(1) 連続線型作用素 $T \in \mathscr{L}(E; E')$ は，任意の $g \in G$ に対して $T\pi(g) = \pi'(g)T$ を満たすとき，**G-同変**であるという．
(2) G-同変なユニタリ作用素を，**ユニタリ同値**という．(π, E) から (π', E') へのユニタリ同値が存在するとき，(π, E) と (π', E') は**ユニタリ同値**であるという．

容易にわかるように，同変な連続線型作用素の合成および随伴は，ふたたび同変である．

定理 3.34（Schur の補題） G を群，(π, E), (π', E') を G の既約ユニタリ表現とする．このとき，次の 2 条件のうちただ 1 つが成り立つ．

(i) (π, E) から (π', E') への G-同変な連続線型作用素は，0 以外に存在しない．

(ii) (π, E) から (π', E') へのユニタリ同値 U が存在する．さらに，ユニタリ同値 U を 1 つ固定すると，(π, E) から (π', E') への任意の G-同変な連続線型作用素は，U のスカラー倍として書ける．

証明 まず，$T \neq 0$ が (π, E) から (π', E') への G-同変な連続線型作用素であるとして，T があるユニタリ同値のスカラー倍として書けることを示す．

連続自己随伴作用素 $T^*T \in \mathscr{L}(E)$ のスペクトル測度 $\varPi$ をとる．T は (π, E) から (π', E') への G-同変な連続線型作用素だから，T^*T は (π, E) から自身への G-同変な連続線型作用素である．すなわち，任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)$ は T^*T と可換である．したがって，$A \subseteq \mathrm{Sp}(T^*T)$ を Borel 集合とすると，定理 3.19 より $\pi(g)$ は $\varPi(A)$ とも可換だから

$$\pi(g)(\mathrm{Im}\,\varPi(A)) = \pi(g)\varPi(A)(E) = \varPi(A)\pi(g)(E) \subseteq \mathrm{Im}\,\varPi(A)$$

となり，$\mathrm{Im}\,\varPi(A)$ は G-安定である．ここで，$\mathrm{Sp}(T^*T)$ が 2 点以上をもつとすると，互いに交わらない $\mathrm{Sp}(T)$ の空でない 2 つの開集合 A, B がとれるが，このとき $\varPi(A), \varPi(B) \neq 0$（定理 3.7 より $\mathrm{supp}\,\varPi = \mathrm{Sp}(T^*T)$ であることによる）かつ $\mathrm{Im}\,\varPi(A) \perp \mathrm{Im}\,\varPi(B)$（命題 2.4 (3)）だから，$\mathrm{Im}\,\varPi(A)$ は $\{0\}$ でも E でもない．ところがこれは (π, E) の既約性に反するから，$\mathrm{Sp}(T^*T)$ はただ 1 点からなる．$\mathrm{Sp}(T^*T) = \{\lambda\}$ とすれば，$\mathrm{Ker}(\lambda I_E - T^*T) = \mathrm{Im}\,\varPi(\{\lambda\}) = E$ だから（命題 3.9 (1)），$T^*T = \lambda I_E$ である．同様に，$TT^* \in \mathscr{L}(E')$ をスペクトル分解して定理 3.19 と (π', E') の既約性を用いることで，$TT^* = \lambda' I_{E'}$（$\lambda' \in \mathbb{C}$）と書けることがわかる．

$T^*T = \lambda I$，$TT^* = \lambda' I$ より

$$\lambda T = T(T^*T) = (TT^*)T = \lambda' T$$

だが，いま $T \neq 0$ だから，$\lambda = \lambda'$ である．さらに，$T\xi \neq 0$ なる $\xi \in E$ をとると

$$0 < \|T\xi\|^2 = \langle T^*T\xi|\xi\rangle = \lambda\|\xi\|^2$$

だから，$\lambda > 0$ である．そこで，$U = \lambda^{-1/2}T$ と置けば，U は (π, E) から (π', E') へのユニタリ同値である．以上で，(π, E) から (π', E') への任意の 0 でない G-同変な連続線型作用素がユニタリ同値のスカラー倍として書けることが示された．

次に，U, U' がともに (π, E) から (π', E') へのユニタリ同値であるとする．すると，先の議論と同様に，ユニタリ作用素 $U'^{-1}U \in \mathscr{L}(E)$ をスペクトル分解して定理 3.19 と (π', E') の既約性を用いることで，$U'^{-1}U$ が I_E のスカラー倍であることがわかる．よって，(π, E) から (π', E') へのユニタリ同値は，スカラー倍を除いて一意である．これで，(i) が成り立たないときに (ii) が成り立つことが示された． □

系 3.35 G を群，(π, E) を G の既約ユニタリ表現とする．(π, E) から自身への G-同変な連続線型作用素は，スカラー倍のみである．

証明 Schur の補題（定理 3.34）で $(\pi', E') = (\pi, E)$ と置けばよい． □

4 Hilbert 空間上の線型作用素

4.1 線型作用素

定義 4.1（線型作用素） E, F を線型空間とする．E から F への**線型作用素**（あるいは単に**作用素**）とは，E の部分線型空間から F への線型写像のことをいう．E から E への線型作用素を，E 上の線型作用素という．線型作用素 T に対して，その定義域を $\operatorname{Dom} T$ と書く．$\operatorname{Dom} T = E$ ならば，線型作用素 T は**全域で定義されている**という．

T, S を E から F への線型作用素とする．T と S が**等しい**（$T = S$ と書く）とは，$\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} S$ かつ任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} S$ に対して $T\xi = S\xi$ であることをいう．また，S が T の**拡張**である（$T \subseteq S$ あるいは $S \supseteq T$ と書く）とは，$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} S$ かつ任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $T\xi = S\xi$ であることをいう．

線型空間 E から F への線型作用素 T は，特に断らない限り，$\operatorname{Dom} T$ から F への写像と考える．T が全射，単射，あるいは全単射であるなどの言明は，$\operatorname{Dom} T$ から F への写像としての性質を述べたものである．また，T の $\operatorname{Dom} T$ から F への線型写像としての核・像を，単に T の核・像といい，それぞれ $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ と書く．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T &= \{\xi \in \operatorname{Dom} T \mid T\xi = 0\}, \\
\operatorname{Im} T &= \{T\xi \mid \xi \in \operatorname{Dom} T\}
\end{aligned}
$$

である．

定義 4.2（線型作用素の演算） E, F, G を線型空間とする．

(1) E から F への線型作用素 T, S に対して，T と S の**和**と呼ばれる E から F への線型作用素 $T + S$ を，次のように定める．
   - $\operatorname{Dom}(T+S) = \operatorname{Dom} T \cap \operatorname{Dom} S$,
   - $\xi \in \operatorname{Dom}(T+S)$ に対して $(T+S)\xi = T\xi + S\xi$.

(2) $\lambda \in \mathbb{C}$ と E から F への線型作用素 T に対して，λ による T の**スカラー倍**と呼ばれる E から F への線型作用素 λT を，次のように定める．
   - $\operatorname{Dom}(\lambda T) = \operatorname{Dom} T$,
   - $\xi \in \operatorname{Dom}(\lambda T)$ に対して $(\lambda T)\xi = \lambda(T\xi)$.

(3) E から F への線型作用素 T と F から G への線型作用素 S に対して，T と S の**合成**と呼ばれる E から G への線型作用素 ST を，次のように定める．
   - $\operatorname{Dom} ST = \{\xi \in \operatorname{Dom} T \mid T\xi \in \operatorname{Dom} S\}$,
   - $\xi \in \operatorname{Dom} ST$ に対して $(ST)\xi = S(T\xi)$.

(4) E から F への単射な線型作用素 T に対して，T の**逆**と呼ばれる F から E への線型作用素 T^{-1} を，次のように定める．
   - $\operatorname{Dom} T^{-1} = \operatorname{Im} T$,
   - $\xi \in \operatorname{Dom} T^{-1}$ に対して，$T\eta = \xi$ を満たす唯一の元 $\eta \in \operatorname{Dom} T$ を $T^{-1}\xi$ とする．

命題 4.3 E, F, G を線型空間とする．E から F への単射な線型作用素 T と F から G への単射な線型作用素 S に対して，$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ が成り立つ．

証明　$\zeta \in G,\ \xi \in E$ とする．$(\zeta, \xi) \in \mathrm{gr}((ST)^{-1})$ と $(\zeta, \xi) \in \mathrm{gr}(T^{-1}S^{-1})$ はともに，ある $\eta \in F$ が存在して $(\xi, \eta) \in \mathrm{gr}(T)$ かつ $(\eta, \zeta) \in \mathrm{gr}(S)$ となることと同値だから，$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ である．□

4.2　閉作用素

以下では，分離位相線型空間（主に Hilbert 空間）の間の線型作用素を考える．連続とは限らないが比較的扱いやすい線型作用素のクラスとして，閉作用素を定義する．

定義 4.4（閉作用素）　E, F を分離位相線型空間とする．E から F への線型作用素 T が**閉**であるとは，そのグラフ $\mathrm{gr}(T) = \{(\xi, T\xi) \mid \xi \in \mathrm{Dom}\, T\}$ が $E \times F$ の閉集合であることをいう．

分離位相線型空間 E, F について，$\mathscr{L}(E; F)$ の元はすべて E から F への閉作用素である[*3]．

命題 4.5　E, F, G を分離位相線型空間とする．

(1) T が E から F への閉作用素であり，$S \in \mathscr{L}(E; F)$ ならば，$T + S$ は E から F への閉作用素である．
(2) T が E から F への閉作用素であり，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ならば，λT は E から F への閉作用素である．
(3) $T \in \mathscr{L}(E; F)$ であり，S が F から G への閉作用素ならば，ST は E から G への閉作用素である．
(4) T が E から F への単射な閉作用素ならば，T^{-1} は F から E への閉作用素である．

証明　T を E から F への線型作用素とする．

(1)　$S \in \mathscr{L}(E; F)$ に対して，同相写像 $E \times F \to E \times F;\ (\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta + S\xi)$ による $\mathrm{gr}(T)$ の像が $\mathrm{gr}(T + S)$ になるから，T が閉ならば $T + S$ も閉である．

(2)　$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，同相写像 $E \times F \to E \times F;\ (\xi, \eta) \mapsto (\xi, \lambda\eta)$ による $\mathrm{gr}(T)$ の像が $\mathrm{gr}(\lambda T)$ になるから，T が閉ならば λT も閉である．

(3)　$T \in \mathscr{L}(E; F)$ に対して，連続写像 $E \times G \to F \times G;\ (\xi, \zeta) \mapsto (T\xi, \zeta)$ による $\mathrm{gr}(S)$ の逆像が $\mathrm{gr}(ST)$ になるから，S が閉ならば ST も閉である．

(4)　T が単射であるとする．同相写像 $E \times F \to F \times E;\ (\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi)$ による $\mathrm{gr}(T)$ の像が $\mathrm{gr}(T^{-1})$ になるから，T が閉ならば T^{-1} も閉である．□

命題 4.6　E, F を分離位相線型空間とする．E から F への閉作用素 T に対して，$\mathrm{Ker}\, T$ は E の閉部分線型空間である．

証明　T を E から F への閉作用素とすると，$\mathrm{gr}(T)$ は $E \times F$ の閉集合だから，$\mathrm{Ker}\, T \times \{0\} = \mathrm{gr}(T) \cap (E \times \{0\})$ は $E \times \{0\}$ の閉集合である．よって，$\mathrm{Ker}\, T$ は E の閉部分線型空間である．□

事実 4.7（閉グラフ定理）　E, F を完備かつ距離化可能な位相線型空間とする．このとき，E から F への全域で定義された閉作用素は，連続である．

命題 4.8　E を Banach 空間，F をノルム空間，T を E から F への閉作用素とする．ある $c \geq 0$ が存在して，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\|\xi\| \leq c\|T\xi\|$ であるとする．このとき，T は単射かつ $\mathrm{Im}\, T$ は F の閉部分線型空間である．

[*3] $\mathscr{L}(E; F)$ の元が閉作用素になるように，位相線型空間に分離性を課している．

証明　T の単射性は，仮定から明らかである．$\operatorname{Im} T$ が F において閉であることを示す．$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\operatorname{Dom} T$ 上の点列とし，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\eta \in F$ に収束するとする．すると，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，仮定より任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $\|\xi_m - \xi_n\| \leq c\|T\xi_m - T\xi_n\|$ だから，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．E は Banach 空間だから，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は極限点 $\xi \in E$ をもつ．いま T は閉だから，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれ ξ, η に収束することより，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ かつ $\eta = T\xi \in \operatorname{Im} T$ である．よって，$\operatorname{Im} T$ は F において閉である．　□

次に，可閉作用素を定義する．

定義 4.9（可閉作用素）　E, F を分離位相線型空間，T を E から F への線型作用素とする．E から F への閉作用素であって T の拡張であるものを，T の**閉拡張**という．T が閉拡張をもつとき，T は**可閉**であるという．

命題 4.10　E, F を分離位相線型空間とする．E から F への線型作用素 T に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) T は可閉である．
(b) T のグラフの $E \times F$ における閉包 $\overline{\operatorname{gr}(T)}$ は，E から F へのある線型作用素のグラフと一致する．
(c) T のグラフの $E \times F$ における閉包 $\overline{\operatorname{gr}(T)}$ は，E の部分集合から F へのある写像のグラフと一致する．
(d) $\eta \in F$ について，$(0, \eta) \in \overline{\operatorname{gr}(T)}$ ならば $\eta = 0$ である．

さらに，これらの条件の下で，グラフが $\overline{\operatorname{gr}(T)}$ で与えられるような E から F への線型作用素は，T の（拡張関係に関して）最小の閉拡張である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (c)　T が閉拡張 $\widetilde{T}$ をもてば，$\overline{\operatorname{gr}(T)} \subseteq \operatorname{gr}(\widetilde{T})$ だから，$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ は $\widetilde{T}$ のある制限のグラフと一致する．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ は $E \times F$ の部分線型空間だから，$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ が E の部分集合から F への写像 $\widetilde{T}$ のグラフと一致するならば，$\widetilde{T}$ は E から F への線型作用素である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) および最後の主張　E から F への線型作用素 $\widetilde{T}$ が $\overline{\operatorname{gr}(T)}$ をグラフにもつとすると，$\widetilde{T}$ は T の閉拡張である．さらに，T の任意の閉拡張のグラフは $\operatorname{gr}(\widetilde{T}) = \overline{\operatorname{gr}(T)}$ を含むから，この $\widetilde{T}$ は T の最小の閉拡張である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$(0,0) \in \operatorname{gr}(T) \subseteq \overline{\operatorname{gr}(T)}$ だから，$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ が E の部分集合から F へのある写像のグラフと一致するならば，$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ の元のうち $(0, \eta)$ の形のものは $(0,0)$ のみである．

(d) $\Longrightarrow$ (c)　$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ は $E \times F$ の部分線型空間だから，$(\xi, \eta), (\xi, \eta') \in \overline{\operatorname{gr}(T)}$ ならば $(0, \eta - \eta') = (\xi, \eta) - (\xi, \eta') \in \overline{\operatorname{gr}(T)}$ である．よって，(d) が成り立てば，各 $\xi \in E$ に対して $(\xi, \eta) \in \overline{\operatorname{gr}(T)}$ となるような $\eta \in F$ はたかだか一意に定まる．これは，$\overline{\operatorname{gr}(T)}$ が E の部分集合から F へのある写像のグラフと一致することを意味する．　□

定義 4.11（可閉作用素の閉包）　E, F を分離位相線型空間とする．E から F への可閉作用素 T に対して，その最小の閉拡張を T の**閉包**といい，$\overline{T}$ と書く．

命題 4.10 より，可閉作用素 T に対して $\operatorname{gr}(\overline{T}) = \overline{\operatorname{gr}(T)}$ である．明らかに，T が閉作用素ならば $\overline{T} = T$ である．

注意 4.12　Hilbert 空間上の稠密に定義された線型作用素であって，可閉でないものが存在する．このような例を構成しよう．

Hilbert 空間 E を

$$E = l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \xi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

と定め，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，n-成分だけが 1 で他の成分が 0 である E の元を e_n と書く．また，E 上の稠密に定義された線型作用素 T を，

$$\operatorname{Dom} T = \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}} = \{\xi \in l^2(\mathbb{N}) \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } \xi(n) = 0\}$$

かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Te_n = e_0$$

となるように定める（これにより，T は一意に定まる）．E 上の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ を

$$\xi_n = \frac{e_0 + \cdots + e_{n-1}}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}_{>0})$$

と定めると，$n \to \infty$ のとき $\xi_n \to 0$ かつ $T\xi_n = e_0 \to e_0$ だから，$(0, e_0) \in \overline{\operatorname{gr}(T)}$ である．よって，命題 4.10 より，T は可閉ではない．

4.3 閉作用素のスペクトル

定義 4.13（連続可逆性） E を分離位相線型空間とする．E 上の線型作用素 T が**連続可逆**であるとは，T が $\operatorname{Dom} T$ から E への全単射であり，かつ $T^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ であることをいう．

T が連続可逆ならば，T^{-1} は $\mathscr{L}(E)$ に属し，したがって閉作用素だから，$T = (T^{-1})^{-1}$ も閉作用素である（命題 4.5 (4)）．

定義 4.14（閉作用素のスペクトル） E を分離位相線型空間とする．E 上の閉作用素 T の**スペクトル**を，

$$\operatorname{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ は連続可逆でない}\}$$

と定める[*4]．

E を線型空間，T を E 上の線型作用素とする．全域で定義された線型作用素の場合と同様に，$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ を満たすとき，λ は T の**固有値**であるという．E が分離位相線型空間の場合，T のすべての固有値は $\operatorname{Sp}(T)$ に属する．

命題 4.15 E を完備かつ距離化可能な位相線型空間，T を E 上の閉作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ であるための必要十分条件は，$\lambda I - T$ が $\operatorname{Dom} T$ から E への全単射であることである．

証明 $\lambda I - T$ が $\operatorname{Dom} T$ から E への全単射ならば，$(\lambda I - T)^{-1}$ は E 上の全域で定義された閉作用素だから（命題 4.5 (1), (4)），閉グラフ定理（事実 4.7）より $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ である．よって，$\lambda I - T$ は連続可逆である．逆に，$\lambda I - T$ が連続可逆ならば，定義から明らかに，$\lambda I - T$ は $\operatorname{Dom} T$ から E への全単射である．これで，同値性が示された． □

*4 閉でない線型作用素 T に対しては，どんな $\lambda \in \mathbb{C}$ に対しても $\lambda I - T$ は閉でなく（命題 4.5 (1)），したがって連続可逆でないから，T のスペクトルを定義する意味はほとんどない．

命題 4.16　Banach 空間上の閉作用素のスペクトルは，$\mathbb{C}$ の閉集合である．

証明　E を Banach 空間，T を E 上の閉作用素とする．$\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(T)$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることを示せばよい．$\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(T)$ とすると，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}) \tag{$*$}$$

である．ここで，$I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ であり，$\lambda_0 I - T$ は $\mathrm{Dom}(T)$ から E への全単射である．さらに，$\mathrm{Im}(\lambda_0 I - T)^{-1} = \mathrm{Dom}\, T$ より，$\xi \in E$ に対して

$$\xi \in \mathrm{Dom}\, T \iff (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})\xi \in \mathrm{Dom}\, T$$

だから，

$$(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})(\mathrm{Dom}\, T) = \mathrm{Im}(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}) \cap \mathrm{Dom}\, T$$

である．

さて，$\lambda \in \mathbb{C}$ が λ_0 に十分近く，$\|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}\| < 1$ が成り立つとすると，$I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$ は $\mathscr{L}(E)$ において可逆であり [10, 命題 1.8]，したがって $(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})(\mathrm{Dom}\, T) = \mathrm{Dom}\, T$ である．よって，($*$) より，$\lambda I - T$ は $\mathrm{Dom}\, T$ から E への全単射であり

$$(\lambda I - T)^{-1} = (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})^{-1}(\lambda_0 I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$$

だから，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(T)$ である．これで，$\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(T)$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることが示された．　$\square$

4.4　稠密に定義された線型作用素の随伴

位相線型空間 E から線型空間 F への線型作用素 T は，定義域 $\mathrm{Dom}\, T$ が E において稠密であるとき，**稠密に定義されている**という．

定義 4.17（稠密に定義された線型作用素の随伴）　E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された線型作用素とする．F から E への線型作用素 S であって，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ と $\eta \in \mathrm{Dom}\, S$ に対して

$$\langle T\xi | \eta \rangle = \langle \xi | S\eta \rangle$$

を満たすもののうち（拡張関係に関して）最大のものを，T の**随伴**といい，T^* と書く．

T の随伴 T^* は，明示的には

- $\mathrm{Dom}\, T^*$ は，$\eta \in F$ のうち，ある $\zeta \in E$ が存在して任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\langle T\xi | \eta \rangle = \langle \xi | \zeta \rangle$ が成り立つ（Riesz の表現定理より，これは $\xi \mapsto \langle T\xi | \eta \rangle$ が $\mathrm{Dom}\, T$ 上連続であることと同値である）ものの全体,
- $\eta \in \mathrm{Dom}\, T^*$ に対して，上の条件を満たす $\zeta \in E$（$\mathrm{Dom}\, T$ は E において稠密だから，これは一意に定まる）を $T^*\eta$ とする

によって与えられる．

E, F を Hilbert 空間，T, S を E から F への線型作用素とする．T が稠密に定義されていて $T \subseteq S$ ならば，明らかに，$S^* \subseteq T^*$ である．

命題 4.18 E, F, G を Hilbert 空間とする．

(1) T, S を E から F への稠密に定義された線形作用素とし，$T+S$ も稠密に定義されているとする．このとき，$(T+S)^* \supseteq T^*+S^*$ が成り立つ．さらに，T または S が $\mathscr{L}(E;F)$ に属するならば，$(T+S)^* = T^*+S^*$ が成り立つ．

(2) T を E から F への稠密に定義された線型作用素とし，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．このとき，$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ が成り立つ．

(3) T を E から F への稠密に定義された線型作用素，S を F から G への稠密に定義された線型作用素とし，ST も稠密に定義されているとする．このとき，$(ST)^* \supseteq T^*S^*$ が成り立つ．さらに，$S \in \mathscr{L}(E;F)$ ならば，$(ST)^* = T^*S^*$ が成り立つ．

証明 (1) $\eta \in \mathrm{Dom}(T^*+S^*)$ ならば，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}(T+S)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle (T+S)\xi | \eta \rangle &= \langle T\xi|\eta\rangle + \langle S\xi|\eta\rangle \\ &= \langle \xi | T^*\eta\rangle + \langle \xi|S^*\eta\rangle \\ &= \langle \xi | (T^*+S^*)\eta\rangle \end{aligned}$$

だから，$\eta \in \mathrm{Dom}(T+S)^*$ かつ $(T+S)^*\eta = (T^*+S^*)\eta$ である．よって，$(T+S)^* \supseteq T^*+S^*$ が成り立つ．

さらに，$S \in \mathscr{L}(E;F)$ と仮定する．このとき，$\eta \in \mathrm{Dom}(T+S)^*$ とすると，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ に対して

$$\begin{aligned} \langle T\xi|\eta\rangle &= \langle (T+S)\xi|\eta\rangle - \langle S\xi|\eta\rangle \\ &= \langle \xi|(T+S)^*\eta\rangle - \langle \xi|S^*\eta\rangle \\ &= \langle \xi|((T+S)^* - S^*)\eta\rangle \end{aligned}$$

だから，$\eta \in \mathrm{Dom}\,T^* = \mathrm{Dom}(T^*+S^*)$ である．よって，$\mathrm{Dom}(T+S)^* \subseteq \mathrm{Dom}(T^*+S^*)$ であり，前半の結果と合わせて $(T+S)^* = T^*+S^*$ を得る．

(2) $(\eta,\zeta) \in F\times E$ が $\mathrm{gr}((\lambda T)^*)$ に属するための必要十分条件は，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}(\lambda T) = \mathrm{Dom}\,T$ に対して $\langle \lambda T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|\zeta\rangle$，すなわち $\langle T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|\zeta/\overline{\lambda}\rangle$ が成り立つことである．これは，$(\eta, \zeta/\overline{\lambda}) \in \mathrm{gr}(T^*)$，すなわち $(\eta,\zeta) \in \mathrm{gr}(\overline{\lambda}T^*)$ と同値である．よって，$(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$ が成り立つ．

(3) $\zeta \in \mathrm{Dom}\,T^*S^*$ ならば，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,ST$ に対して

$$\langle ST\xi|\zeta\rangle = \langle T\xi|S^*\zeta\rangle = \langle \xi|T^*S^*\zeta\rangle$$

だから，$\zeta \in \mathrm{Dom}(ST)^*$ かつ $(ST)^*\zeta = T^*S^*\zeta$ である．よって，$(ST)^* \supseteq T^*S^*$ が成り立つ．

さらに，$S \in \mathscr{L}(F;G)$ と仮定する．このとき，$\zeta \in \mathrm{Dom}(ST)^*$ とすると，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ に対して

$$\langle T\xi|S^*\zeta\rangle = \langle ST\xi|\zeta\rangle = \langle \xi|(ST)^*\zeta\rangle$$

だから，$S^*\zeta \in \mathrm{Dom}\,T^*$，すなわち $\zeta \in \mathrm{Dom}\,T^*S^*$ である．よって，$\mathrm{Dom}(ST)^* \subseteq \mathrm{Dom}\,T^*S^*$ であり，前半の結果と合わせて $(ST)^* = T^*S^*$ を得る． □

命題 4.19 E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された線型作用素 T に対して，$\mathrm{Ker}\,T^* = (\mathrm{Im}\,T)^\perp$ である．

証明 $\eta \in F$ が $\mathrm{Ker}\,T^*$ に属するための必要十分条件は，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ に対して $\langle T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|0\rangle = 0$ が成り立つことであり，これは $\eta \perp \mathrm{Im}\,T$ と同値である．よって，$\mathrm{Ker}\,T^* = (\mathrm{Im}\,T)^\perp$ である． □

随伴作用素のグラフは，次のように与えられる．

定理 4.20 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された線型作用素とする．ユニタリ作用素 $J\colon E\times F\to F\times E$ を $J(\xi,\eta)=(\eta,-\xi)$（$\xi\in E$，$\eta\in F$）と定めると，

$$\mathrm{gr}(T^*)=J(\mathrm{gr}(T))^{\perp}$$

である．

証明 $\eta\in F$ と $\zeta\in E$ に対して，$(\eta,\zeta)\perp J(\mathrm{gr}(T))$ であることは，任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\,T$ に対して $(\eta,\zeta)\perp(T\xi,-\xi)$，すなわち $\langle T\xi|\eta\rangle=\langle\xi|\zeta\rangle$ であることと同値である．これは，$(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}(T^*)$ であるということに他ならない． □

系 4.21 E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された線型作用素 T に対して，その随伴 T^* は F から E への閉作用素である．

証明 一般に，Hilbert 空間において部分線型空間の直交補空間は閉だから，主張は定理 4.20 から従う． □

随伴作用素 T^* に対して，さらにその随伴をとることを考える．T^* の随伴が定義されるためには，T^* が稠密に定義されていなければならないが，そのための条件は次のように記述される．

命題 4.22 E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された線型作用素 T に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) T^* は稠密に定義されている．
(b) T は可閉である．

さらに，これらの条件の下で，$T^{**}=\overline{T}$ が成り立つ．

証明 $J\colon E\times F\to F\times E$ と $J'\colon F\times E\to E\times F$ を

$$J(\xi,\eta)=(\eta,-\xi),\qquad J'(\eta,\xi)=(\xi,-\eta)\qquad(\xi\in E,\,\eta\in F)$$

と定める．J, J' はユニタリ作用素であり，$J'J=-I$ を満たすことに注意する．

(a) $\Longrightarrow$ (b) および最後の主張 T^* が稠密に定義されているとすると，T^* の随伴 T^{**} が考えられる．定理 4.20 より，T^{**} のグラフは

$$\mathrm{gr}(T^{**})=J'(J(\mathrm{gr}(T))^{\perp})^{\perp}=J'(J(\mathrm{gr}(T)))^{\perp\perp}=\overline{\mathrm{gr}(T)}$$

で与えられる．よって，T は可閉であり，$T^{**}=\overline{T}$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) T が可閉であるとして，$\eta\in(\mathrm{Dom}\,T^*)^{\perp}$ を任意にとる．すると，任意の $\eta'\in\mathrm{Dom}\,T^*$ に対して $\langle(\eta,0)|(\eta',T^*\eta')\rangle=\langle\eta|\eta'\rangle+\langle 0|T^*\eta'\rangle=0$ であることと定理 4.20 より

$$(\eta,0)\in\mathrm{gr}(T^*)^{\perp}=J(\mathrm{gr}(T))^{\perp\perp}=\overline{J(\mathrm{gr}(T))}=J(\overline{\mathrm{gr}(T)}),$$

であり，したがって $(0,-\eta)\in\overline{\mathrm{gr}(T)}$ である．いま T は可閉だから，これより $\eta=0$ である（命題 4.10）．よって，$(\mathrm{Dom}\,T^*)^{\perp}=\{0\}$ だから，T^* は稠密に定義されている． □

系 4.23 E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された閉作用素 T に対して，T^* は F から E への稠密に定義された閉作用素であり，$T^{**}=T$ が成り立つ．

証明 T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．系 4.21 より，T^* は F から E への閉作用素である．また，命題 4.22 より，T^* は稠密に定義されており，$T^{**} = \overline{T} = T$ が成り立つ． □

注意 4.24 注意 4.12 で見たように，Hilbert 空間 E 上の稠密に定義された線型作用素 T であって可閉でないものが存在する．命題 4.22 より，このような T について，$\mathrm{Dom}\, T^*$ は E において稠密でない．より強く，Hilbert 空間 E 上の稠密に定義された線型作用素 T であって，$\mathrm{Dom}\, T^* = \{0\}$ であるものが存在する．このような例を構成しよう．

Hilbert 空間 E を

$$E = l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \xi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

と定め，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，n-成分だけが 1 で他の成分が 0 である E の元を e_n と書く．また，写像 $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\phi(n) = m$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限個存在するようにとり，E 上の稠密に定義された線型作用素 T を，

$$\mathrm{Dom}\, T = \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}} = \{\xi \in l^2(\mathbb{N}) \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } \xi(n) = 0\}$$

かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Te_n = e_{\phi(n)}$$

となるように定める（これにより，T は一意に定まる）．$\eta \in \mathrm{Dom}\, T^*$ ならば，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T = \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}}$ に対して $\langle T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|T^*\eta\rangle$ が成り立つ．特に，$\xi = e_n$ として

$$\eta(\phi(n)) = (T^*\eta)(n)$$

を得る．上式より，各 $m \in \mathbb{N}$ について，$\phi(n) = m$ となる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(T^*\eta)(n) = \eta(m)$ となるが，ϕ のとり方よりこのような n は無限個存在するから，$T^*\eta \in E$ より $\eta(m) = 0$ でなければならない．よって，$\eta = 0$ である．これで，$\mathrm{Dom}\, T^* = \{0\}$ が示された．

随伴作用素と逆作用素は，次の関係にある．

命題 4.25 E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された単射な線型作用素 T に対して，T^* が単射であることと T^{-1} が稠密に定義されていることとは同値であり，これらの条件の下で，$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ が成り立つ．

証明 $J \colon E \times F \to F \times E$ と $J' \colon F \times E \to E \times F$ を

$$J(\xi, \eta) = (\eta, -\xi), \qquad J'(\eta, \xi) = (\xi, -\eta) \qquad (\xi \in E,\ \eta \in F)$$

定め，$\iota \colon E \times F \to F \times E$ と $\iota' \colon F \times E \to E \times F$ を

$$\iota(\xi, \eta) = (\eta, \xi), \qquad \iota'(\eta, \xi) = (\xi, \eta) \qquad (\xi \in E,\ \eta \in F)$$

と定める．J, J', ι, ι' はユニタリ作用素であり，$J'\iota = -\iota' J$ を満たすことに注意する．

$\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ だから（命題 4.19），T^* が単射であることと T^{-1} が稠密に定義されていることとは同

値である．さらに，これらの条件の下で，定理 4.20 より

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}((T^{-1})^*) &= J'(\mathrm{gr}(T^{-1}))^\perp \\
&= J'(\iota(\mathrm{gr}(T)))^\perp \\
&= \iota'(J(\mathrm{gr}(T)))^\perp \\
&= \iota'(J(\mathrm{gr}(T))^\perp) \\
&= \iota'(\mathrm{gr}(T^*)) \\
&= \mathrm{gr}((T^*)^{-1})
\end{aligned}$$

が成り立つから，$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ である． □

最後に，随伴作用素のスペクトルを調べておく．

命題 4.26 E を Hilbert 空間とする．E 上の稠密に定義された閉作用素 T に対して，

$$\mathrm{Sp}(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$$

が成り立つ．

証明 $\lambda \in \mathbb{C}$ について，$\lambda I - T$ が連続可逆ならば，命題 4.25 より $(\lambda I - T)^*$ は単射かつ $((\lambda I - T)^*)^{-1} = ((\lambda I - T)^{-1})^* \in \mathscr{L}(E)$ である．命題 4.18 (1), (2) より $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$ だから，$\overline{\lambda} I - T$ は連続可逆である．よって，$\mathrm{Sp}(T^*) \subseteq \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$ である．さらに，系 4.23 より $T^{**} = T$ だから，T を T^* に置き換えれば $\mathrm{Sp}(T^*) \supseteq \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$ を得る．これで示された． □

4.5 対称作用素

定義 4.27（対称作用素） E を Hilbert 空間とする．E 上の線型作用素 T が**対称**であるとは，任意の ξ, $\eta \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して

$$\langle T\xi | \eta \rangle = \langle \xi | T\eta \rangle$$

であることをいう[*5]．

命題 4.28 E を Hilbert 空間とする．E 上の線型作用素 T に対して，次の 2 条件 (a), (b) は同値である．さらに，T が稠密に定義されていれば，これらは条件 (c) とも同値である．

(a) T は対称である．
(b) 任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して，$\langle T\xi | \xi \rangle \in \mathbb{R}$ である．
(c) $T \subseteq T^*$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) T が対称であるとする．このとき，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して

$$\langle T\xi | \xi \rangle = \langle \xi | T\xi \rangle = \overline{\langle T\xi | \xi \rangle}$$

である．すなわち，$\langle T\xi | \xi \rangle$ は実数である．

*5 本稿では，Rudin [4, 13.3] の定義を採用した．Conway [3, X.2.2] のように，稠密に定義されていることを対称作用素の定義に含めることもある．また，新井 [6, p. 131] のように，稠密に定義されていることを課さないものを Hermite，課すものを対称といって区別することもある．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．このとき，分極公式より，任意の $\xi, \eta \in \operatorname{Dom} T$ に対して

$$\begin{aligned}\langle T\xi|\eta\rangle &= \frac{1}{4}(\langle T(\xi+\eta)|\xi+\eta\rangle - \langle T(\xi-\eta)|\xi-\eta\rangle + i\langle T(\xi+i\eta)|\xi+i\eta\rangle - i\langle T(\xi-i\eta)|\xi-i\eta\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle \xi+\eta|T(\xi+\eta)\rangle - \langle \xi-\eta|T(\xi-\eta)\rangle + i\langle \xi+i\eta|T(\xi+i\eta)\rangle - i\langle \xi-i\eta|T(\xi-i\eta)\rangle)\\ &= \langle \xi|T\eta\rangle\end{aligned}$$

である．すなわち，T は対称である．

(a) $\Longleftrightarrow$ (c)（T が稠密に定義されている場合）　随伴作用素の定義から明らかである．　□

系 4.29　Hilbert 空間 E 上の対称作用素 T の固有値は，すべて実数である．

証明　$\lambda \in \mathbb{C}$ を T の固有値として，固有ベクトル $\xi \in \operatorname{Dom} T \setminus \{0\}$ をとる．命題 4.28 より $\lambda\|\xi\|^2 = \langle T\xi|\xi\rangle \in \mathbb{R}$ だから，λ は実数である．　□

命題 4.30　E を Hilbert 空間とする．E 上の稠密に定義された対称作用素 T は可閉であり，その閉包 $\overline{T}$ は稠密に定義された閉対称作用素である．

証明　T は閉拡張 T^* をもつから（命題 4.28，系 4.21），可閉である．さらに，E の内積は $\operatorname{gr}(T)$ 上で常に実数値をとるから（命題 4.28），$\operatorname{gr}(\overline{T}) = \overline{\operatorname{gr}(T)}$ 上でも常に実数値をとる．すなわち，$\overline{T}$ は対称である．　□

命題 4.31　E を Hilbert 空間とする．T, S が E 上の対称作用素であり，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ならば，$\lambda T + \mu S$ は E 上の対称作用素である．

証明　T, S が E 上の対称作用素であり，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ならば，任意の $\xi, \eta \in \operatorname{Dom}(\lambda T + \mu S) = \operatorname{Dom} T \cap \operatorname{Dom} S$ に対して

$$\begin{aligned}\langle(\lambda T + \mu S)\xi|\eta\rangle &= \lambda\langle T\xi|\eta\rangle + \mu\langle T\xi|\eta\rangle\\ &= \lambda\langle \xi|T\eta\rangle + \mu\langle \xi|T\eta\rangle\\ &= \langle \xi|(\lambda T + \mu S)\eta\rangle\end{aligned}$$

だから，$\lambda T + \mu S$ は対称である．　□

命題 4.32　E を Hilbert 空間，T を E 上の対称作用素，$\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$（$a, b \in \mathbb{R}$）とする．

(1) $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して，$\|(\lambda I - T)\xi\|^2 = \|(aI - T)\xi\|^2 + b^2\|\xi\|^2$ である．特に，$|b|\|\xi\| \leq \|(\lambda I - T)\xi\|$ である．
(2) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ならば，$\lambda I - T$ は単射である．
(3) T が閉かつ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ならば，$\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ は E の閉部分線型空間である．

証明　(1)　$\xi \in \operatorname{Dom} T$ とする．$aI - T$ は対称だから $\langle(aI - T)\xi|\xi\rangle \in \mathbb{R}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - T)\xi\|^2 &= \|(aI - T)\xi + ib\xi\|^2\\ &= \|(aI - T)\xi\|^2 + b^2\|\xi\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle(aI - T)\xi|ib\xi\rangle\\ &= \|(aI - T)\xi\|^2 + b^2\|\xi\|^2 - 2\operatorname{Re} ib\langle(aI - T)\xi|\xi\rangle\\ &= \|(aI - T)\xi\|^2 + b^2\|\xi\|^2\end{aligned}$$

を得る．また，これより $\|(\lambda I - T)\xi\|^2 \geq b^2\|\xi\|^2$ であり，したがって $|b|\|\xi\| \leq \|(\lambda I - T)\xi\|$ である．

(2)　$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ならば $b \neq 0$ だから，(1) の不等式 $b\|\xi\| \leq \|(\lambda I - T)\xi\|$（$\xi \in \operatorname{Dom} T$）より $\lambda I - T$ の単射性を得る．

(3)　T が閉かつ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ であるとすると，(1) の不等式と命題 4.8 より，$\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ は E の閉部分線型空間である．　□

系 4.33　E を Hilbert 空間，T を E 上の稠密に定義された閉対称作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ である．
(b) $\lambda I - T$ は全射である．
(c) $\overline{\lambda} I - T^*$ は単射である．

証明　$\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ は $\lambda I - T$ が全単射であることと同値だが（命題 4.15），命題 4.32 (2), (3) より $\lambda I - T$ は常に単射かつその像は閉だから，これは $\lambda I - T$ が全射であることや，$\lambda I - T$ の像が E において稠密であることと同値である．さらに，命題 4.18 (1) と命題 4.19 より $\operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T^*) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^* = (\operatorname{Im}(\lambda I - T))^{\perp}$ だから，$\lambda I - T$ の像が E において稠密であることは $\overline{\lambda} I - T^*$ が単射であることと同値である．これで，3 条件の同値性が示された．　□

次に，稠密に定義された閉対称作用素のスペクトルについて調べる．本小節の以下の部分では，

$$\begin{aligned} \varOmega_+ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda > 0\}, \\ \varOmega_- &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda < 0\} \end{aligned}$$

とし，$\dim M$ で M の（Hilbert 空間としてではなく）線型空間としての次元を表す．

補題 4.34　E を Hilbert 空間, M, N を E の閉部分線型空間とする．$M \cap N^{\perp} = \{0\}$ ならば, $\dim M \leq \dim N$ である．

証明　$M \cap N^{\perp} = \{0\}$ ならば，N の上への直交射影の M への制限が M から N への単射線型写像となるから，$\dim M \leq \dim N$ である．　□

定理 4.35　E を Hilbert 空間，T を E 上の稠密に定義された閉対称作用素とする．このとき，$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - A^*)$ は，$\lambda \in \varOmega_+$ のときと $\lambda \in \varOmega_-$ のときとでそれぞれ一定である．

証明　まず，$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について，

$$|\mu - \lambda| < |\operatorname{Im} \lambda| \quad \text{ならば} \quad \operatorname{Ker}(\mu I - T^*) \cap (\operatorname{Ker}(\lambda I - T^*))^{\perp} = \{0\} \tag{$*$}$$

であることを示す．対偶を示すために，$\xi \in (\operatorname{Ker}(\mu I - T^*) \cap (\operatorname{Ker}(\lambda I - T^*))^{\perp}) \setminus \{0\}$ がとれたと仮定する．命題 4.19 と $\operatorname{Im}(\overline{\lambda} I - T)$ が閉であること（命題 4.32 (3)）より

$$\xi \in (\operatorname{Ker}(\lambda I - T^*))^{\perp} = (\operatorname{Im}(\overline{\lambda} I - T))^{\perp\perp} = \operatorname{Im}(\overline{\lambda} I - T)$$

だから，$\eta \in \mathrm{Dom}\, T$ を用いて $\xi = (\overline{\lambda} I - T)\eta$ と書ける．さらに，$\xi \in \mathrm{Ker}(\mu I - T^*)$ だから

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\mu I - T^*)\xi | \eta \rangle \\ &= \langle \xi | (\overline{\mu} I - T)\eta \rangle \\ &= \langle \xi | (\overline{\lambda} I - T)\eta \rangle + \langle \xi | (\overline{\mu} - \overline{\lambda})\eta \rangle \\ &= \|\xi\|^2 + (\mu - \lambda)\langle \xi | \eta \rangle \end{aligned}$$

であり，したがって Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\|\xi\|^2 = -(\mu - \lambda)\langle \xi | \eta \rangle \leq |\mu - \lambda| \|\xi\| \|\eta\|$$

である．$\xi \neq 0$ だから，

$$\|\xi\| \leq |\mu - \lambda| \|\eta\|$$

が成り立つ．一方で，命題 4.32 (1) より

$$\|\xi\| = \|(\overline{\lambda} I - T)\eta\| \geq |\mathrm{Im}\, \lambda| \|\eta\|$$

が成り立つ．$(\overline{\lambda} I - T)\eta = \xi \neq 0$ より $\eta \neq 0$ だから，これら 2 式より $|\mu - \lambda| \geq |\mathrm{Im}\, \lambda|$ を得る．これで，$(*)$ が示された．

$(*)$ と補題 4.34 より，$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について，

$$|\mu - \lambda| < |\mathrm{Im}\, \lambda| \quad \text{ならば} \quad \dim \mathrm{Ker}(\mu I - T^*) \leq \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - T^*)$$

である．さらに，λ と μ を入れ替えてもこれが成り立つことに注意すると，

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\, \lambda| \quad \text{ならば} \quad \dim \mathrm{Ker}(\mu I - T^*) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - T^*)$$

あることがわかる．よって，$\dim \mathrm{Ker}(\lambda I - A^*)$ は，$\lambda \in \Omega_+$ のときと $\lambda \in \Omega_-$ のときとでそれぞれ一定である． □

系 4.36 E を Hilbert 空間，T を E 上の稠密に定義された閉対称作用素とする．T のスペクトル $\mathrm{Sp}(T)$ について，次の 4 条件のうちただ 1 つが成り立つ．

(i) $\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である．
(ii) $\mathrm{Sp}(T) = \overline{\Omega_+}$ である．
(iii) $\mathrm{Sp}(T) = \overline{\Omega_-}$ である．
(iv) $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}$ である．

証明 4 条件の中のどの 2 つも同時に成り立たないことは明らかである．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とすると，$\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ であるための必要十分条件は $\overline{\lambda} I - T^*$ が単射であることである（系 4.33）．このことと定理 4.35 より，Ω_+, Ω_- はそれぞれ $\mathrm{Sp}(T)$ に含まれるかまったく交わらないかのいずれかである．$\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合だから（命題 4.16），

- $\Omega_+ \cap \mathrm{Sp}(T) = \emptyset$ かつ $\Omega_- \cap \mathrm{Sp}(T) = \emptyset$ の場合，$\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であり，
- $\Omega_+ \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ かつ $\Omega_- \cap \mathrm{Sp}(T) = \emptyset$ の場合，$\mathrm{Sp}(T) = \overline{\Omega_+}$ であり，
- $\Omega_+ \cap \mathrm{Sp}(T) = \emptyset$ かつ $\Omega_- \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ の場合，$\mathrm{Sp}(T) = \overline{\Omega_-}$ であり，
- $\Omega_+ \subseteq \Omega_+$ かつ $\Omega_- \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ の場合，$\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}$ である．

これで，主張が示された． □

4.6 自己随伴作用素

定義 4.37（自己随伴作用素） E を Hilbert 空間，T を E 上の線型作用素とする．

(1) T が**自己随伴**であるとは，T が稠密に定義されており，かつ $T^* = T$（定義域が一致することを含む）であることをいう．
(2) T が**本質的自己随伴**であるとは，T が可閉であり，かつその閉包 $\overline{T}$ が自己随伴であることをいう．

Hilbert 空間上の稠密に定義された線型作用素の随伴は閉だから（系 4.21），自己随伴作用素は閉である．

命題 4.38 E を Hilbert 空間とする．

(1) T, S が E 上の自己随伴作用素であり，$S \in \mathscr{L}(E)$ ならば，$T + S$ は E 上の自己随伴作用素である．
(2) T が E 上の自己随伴作用素であり，$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ならば，λT は E 上の自己随伴作用素である．
(3) T を E 上の自己随伴作用素とする．T が単射であることと $\operatorname{Im} T$ が E において稠密であることとは同値であり，これらの条件の下で，T^{-1} は E 上の自己随伴作用素である．

証明 (1) 命題 4.18 (1) より $(T + S)^* = T^* + S^* = T + S$ だから，$T + S$ は自己随伴である．

(2) 命題 4.18 (2) より $(\lambda T)^* = \lambda T^* = \lambda T$ だから，λT は自己随伴である．

(3) 命題 4.19 より $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ だから，T が単射であることと $\operatorname{Im} T$ が E において稠密であることとは同値である．さらに，これらの条件の下で，命題 4.25 より $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$ だから，T^{-1} は自己随伴である． □

命題 4.39 E を Hilbert 空間とする．E 上の自己随伴作用素 T は，対称作用素の中で極大である．すなわち，E 上の対称作用素であって T の拡張であるものは，T 自身のみである．

証明 E 上の対称作用素 S が T の拡張であるとすると，$S \subseteq S^* \subseteq T^* = T \subseteq S$ だから，$S = T$ である． □

次に，自己随伴作用素のスペクトルを調べる．

定理 4.40 E を Hilbert 空間とする．E 上の稠密に定義された閉対称作用素 T に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) T は自己随伴である．
(b) $\operatorname{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ である．
(c) $iI - T$, $-iI - T$ はともに全射である．
(d) $iI - T^*$, $-iI - T^*$ はともに単射である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) T が自己随伴であるとする．すると，任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，命題 4.32 より $\overline{\lambda} I - T^* = \overline{\lambda} I - T$ は単射だから，系 4.33 より $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ である．よって，$\operatorname{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) 系 4.33 より (c) と (d) はともに $\pm i \notin \operatorname{Sp}(T)$ と同値だから，主張は明らかである．

(c) かつ (d) $\Longrightarrow$ (a) $iI - T$ が全射かつ $iI - T^*$ が単射であるとして，$\operatorname{Dom} T^* \subseteq \operatorname{Dom} T$ を示す．$\xi \in \operatorname{Dom} T^*$ を任意にとる．$iI - T$ の全射性より，$\xi' \in \operatorname{Dom} T$ を $(iI - T^*)\xi = (iI - T)\xi'$ となるようにとれる．ここで，$T \subseteq T^*$ だから，$(iI - T)\xi' = (iI - T^*)\xi'$ である．これら 2 式より $(iI - T^*)\xi = (iI - T^*)\xi'$ を

得るが，いま $iI - T^*$ は単射だから，$\xi = \xi' \in \operatorname{Dom} T$ となる．よって，$\operatorname{Dom} T^* \subseteq \operatorname{Dom} T$ である． □

系 4.41　E を Hilbert 空間とする．E 上の稠密に定義された対称作用素 T に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) T は本質的自己随伴である．
(b) $iI - T$, $-iI - T$ の像はともに E において稠密である．
(c) $iI - T^*$, $-iI - T^*$ はともに単射である．

証明　T は稠密に定義された対称作用素だから，可閉であり，その閉包 $\overline{T}$ は稠密に定義された閉対称作用素である（命題 4.30）．

(a) $\iff$ (b)　$\xi \in \operatorname{Dom} \overline{T}$ に対して $\|(\pm iI - \overline{T})\xi\|^2 = \|\overline{T}\xi\|^2 + \|\xi\|^2$ だから（命題 4.32），

$$U_\pm(\xi, \eta) = \pm i\xi - \eta \qquad ((\xi, \eta) \in \operatorname{gr}(\overline{T}))$$

によって定まる線型写像 $U_\pm \colon \operatorname{gr}(\overline{T}) \to E$ はともに等長である．したがって，

$$\operatorname{Im}(\pm iI - \overline{T}) = U_\pm(\operatorname{gr}(\overline{T})) = \overline{U_\pm(\operatorname{gr}(T))} = \overline{\operatorname{Im}(\pm iI - T)}$$

が成り立つ．これと定理 4.40 より，(a) と (b) は同値である．

(b) $\iff$ (c)　一般に $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，命題 4.18 (1) と命題 4.19 より $\operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T^*) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)^* = (\operatorname{Im}(\lambda I - T))^\perp$ だから，$\lambda I - T$ の像が E において 稠密であることは $\overline{\lambda} I - T^*$ が単射であることと同値である．特に，$\lambda = \pm i$ として，(b) と (c) の同値性を得る． □

次の技術的な命題は，次小節の定理 4.46，正規作用素のスペクトル分解定理（定理 6.2），および稠密に定義された閉作用素の極分解に必要な命題 6.34 の証明に必要である．

命題 4.42　E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．

(1) $I + T^*T$ は $\operatorname{Dom} T^*T$ から E への全単射である．
(2) $B = (I + T^*T)^{-1}$ は E 上の連続正作用素であり，$\|B\| \leq 1$ を満たす．
(3) $C = T(I + T^*T)^{-1}$ は E から F への連続線型作用素であり，$\|C\| \leq 1$ を満たす．
(4) $\operatorname{gr}(T|_{\operatorname{Dom} T^*T})$ は $\operatorname{gr}(T)$ において稠密である．

証明　(1), (2), (3)　まず，$I + T^*T$ が単射であることを示す．$\xi \in \operatorname{Dom} T^*T$ とすると，

$$\|\xi\|^2 + \|T\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle + \langle T^*T\xi | \xi \rangle = \langle (I + T^*T)\xi | \xi \rangle$$

だから，

$$\|\xi\|^2 \leq |\langle (I + T^*T)\xi | \xi \rangle| \leq \|(I + T^*T)\xi\| \|\xi\|$$

が成り立つ．よって，$I + T^*T$ は単射である．

次に，$B = (I+T^*T)^{-1}, C = T(I+T^*T)^{-1}$ を別の方法で構成する．$J \colon E \times F \to F \times E$ を $J(\xi, \eta) = (\eta, -\xi)$ と定める（$\xi \in E$，$\eta \in F$）．定理 4.20 より，Hilbert 空間 $F \times E$ は $J(\operatorname{gr}(T))$ と $\operatorname{gr}(T^*)$ とに直交分解されるから，任意の $\xi \in E$ に対して，$B'\xi \in \operatorname{Dom} T$ と $C'\xi \in \operatorname{Dom} T^*$ であって

$$(0, \xi) = (-TB'\xi, B'\xi) + (C'\xi, T^*C'\xi), \tag{$*$}$$

を満たすものが一意に定まる．これにより，E 上の全域で定義された線型作用素 B' と E から F への全域で定義された線型作用素 C' が定まる．($*$) の右辺の 2 項は直交するから，任意の $\xi \in E$ に対して

$$\|\xi\|^2 = \|TB'\xi\|^2 + \|B'\xi\|^2 + \|C'\xi\|^2 + \|T^*C'\xi\|^2 \geq \|B'\xi\|^2 + \|C'\xi\|^2$$

であり，したがって $B' \in \mathscr{L}(E)$ かつ $\|B'\| \leq 1$，$C' \in \mathscr{L}(E;F)$ かつ $\|C'\| \leq 1$ が成り立つ．($*$) の左成分を見れば，$TB' = C'$ がわかる．$\operatorname{Im} C' \subseteq \operatorname{Dom} T^*$ だから，これより特に $\operatorname{Im} B' \subseteq \operatorname{Dom} T^*T$ である．また，($*$) の右成分を見れば，任意の $\xi \in E$ に対して

$$\xi = B'\xi + T^*C'\xi = B'\xi + T^*TB'\xi = (I + T^*T)B'\xi$$

が成り立つことがわかる．B' は E 上の全域で定義された線型作用素であり，$I + T^*T$ は E 上の単射な線型作用素だったから，これより，$I + T^*T$ は $\operatorname{Dom} T^*T$ から E への全単射を与え，かつ $B' = (I + T^*T)^{-1}$ である．よって，$B' = B$，$C' = TB' = TB = C$ である．

最後に，$I + T^*T$ が全射であることと，任意の $\xi \in \operatorname{Dom}(T^*T)$ に対して

$$\langle B(I + T^*T)\xi | (I + T^*T)\xi \rangle = \langle \xi | (I + T^*T)\xi \rangle = \|\xi\|^2 + \|T\xi\|^2 \geq 0$$

であることから，B は E 上の連続正作用素である．これで，(1), (2), (3) のすべての主張が示された．

(4) $\zeta \in \operatorname{Dom} T$ とし，$(\zeta, T\zeta) \in \operatorname{gr}(T)$ が $\operatorname{gr}(T|_{\operatorname{Dom} T^*T})$ に直交するとする．このとき，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T^*T$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (\zeta, T\zeta) | (\xi, T\xi) \rangle \\
&= \langle \zeta | \xi \rangle + \langle T\zeta | T\xi \rangle \\
&= \langle \zeta | \xi \rangle + \langle \zeta | T^*T\xi \rangle \\
&= \langle \zeta | (I + T^*T)\xi \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つが，(1) より $I + T^*T$ は全射だから，これより $\zeta = 0$ である．よって，$\operatorname{gr}(T|_{\operatorname{Dom} T^*T})$ は $\operatorname{gr}(T)$ において稠密である． □

系 4.43 E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された閉作用素 T に対して，T^*T は E 上の自己随伴作用素である．

証明 命題 4.42 (2) より $B = (I + T^*T)^{-1}$ は E 上の単射な連続自己随伴作用素だから，命題 4.38 (1), (3) より $T^*T = B^{-1} - I$ は E 上の自己随伴作用素である． □

4.7 正規作用素

定義 4.44（正規作用素） E を Hilbert 空間とする．E 上の線型作用素 T が**正規**であるとは，T が E 上の稠密に定義された閉作用素であり，かつ $T^*T = TT^*$（定義域が一致することを含む）であることをいう．

命題 4.45 E を Hilbert 空間とする．

(1) T, S が E 上の正規作用素であり，$S \in \mathscr{L}(E)$ であり，$T^*S = ST^*$ かつ $TS^* = S^*T$ ならば，$T + S$ は E 上の正規作用素である．特に，E 上の正規作用素 T と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$T + \lambda I$ は E 上の正規作用素である．

(2) T が E 上の正規作用素であり，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ならば，λT は E 上の正規作用素である．

証明　(1)　命題 4.5 (1) より $T+S$ は稠密に定義された閉作用素であり，命題 4.18 (1) より

$$\begin{aligned}(T+S)^*(T+S) &= (T^*+S^*)(T+S)\\ &= T^*T + T^*S + S^*T + S^*S\\ &= TT^* + ST^* + TS^* + SS^*\\ &= (T+S)(T^*+S^*)\\ &= (T+S)(T+S)^*\end{aligned}$$

だから，$T+S$ は正規である．

(2)　命題 4.5 (2) より λT は稠密に定義された閉作用素であり，命題 4.18 (2) より

$$(\lambda T)^*(\lambda T) = \overline{\lambda}\lambda T^*T = \overline{\lambda}\lambda TT^* = (\lambda T)(\lambda T)^*$$

だから，λT は正規である．　□

定理 4.46　E を Hilbert 空間とする．E 上の稠密に定義された線型作用素 T に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) T は正規である．
(b) $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$ であり，かつ任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$ に対して $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　T が正規であるとする．まず，$\xi \in \operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom} TT^*$ に対しては，

$$\begin{aligned}\|T\xi\|^2 &= \langle T\xi | T\xi\rangle\\ &= \langle \xi | T^*T\xi\rangle\\ &= \langle \xi | TT^*\xi\rangle\\ &= \langle T^*\xi | T^*\xi\rangle\\ &= \|T^*\xi\|^2\end{aligned}$$

であり，したがって

$$\|T\xi\| = \|T^*\xi\| \tag{$*$}$$

である．次に，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ とする．$\operatorname{gr}(T|_{\operatorname{Dom} T^*T})$ は $\operatorname{gr}(T)$ において稠密だから（命題 4.42 (4)），$\operatorname{Dom} T^*T$ 上の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$((\xi_n, T\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\xi, T\xi)$ に収束するようなものがとれる．すると，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，($*$) より任意の m, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|T\xi_m - T\xi_n\| = \|T^*\xi_m - T^*\xi_n\|$ が成り立つから，$(T^*\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．したがって，$(T^*\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は極限点 $\eta \in E$ をもつ．いま，T^* は閉であり（系 4.21），$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T^*\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ ξ, η に収束するから，$\xi \in \operatorname{Dom} T^*$ かつ $T^*\xi = \eta$ である．さらに，($*$) より

$$\|T^*\xi\| = \|\eta\| = \lim_{n\to\infty} \|T^*\xi_n\| = \lim_{n\to\infty} \|T\xi_n\| = \|T\xi\|$$

が成り立つ．これで，$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} T^*$ かつ任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ が成り立つことが示された．T が E 上の稠密に定義された閉作用素であることより $T^{**} = T$ だから（系 4.23），T を T^* に置き換えれば，$\operatorname{Dom} T^* \subseteq \operatorname{Dom} T$ もわかる．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．まず，T が閉であることを示す．$E \times E$ を 2 つの Hilbert 空間の直和としての Hilbert 空間とみなすと，仮定より，対応 $(\xi, T\xi) \mapsto (\xi, T^*\xi)$ は $\operatorname{gr}(T)$ から $\operatorname{gr}(T^*)$ への等長線型同

型を与える．一般に，Hilbert 空間上の線型作用素が閉であることと，そのグラフが完備であることとは同値だから，T^* が閉であることより（系 4.21），T も閉である．

次に，$T^*T = TT^*$ を示す．$\xi, \eta \in E$ とする．$(\xi, \eta) \in \mathrm{gr}(T^*T)$ であることは，$\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ かつ任意の $\zeta \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\langle T\zeta | T\xi \rangle = \langle \zeta | \eta \rangle$ が成り立つことと同値である．また，T が E 上の稠密に定義された閉作用素であることより $T^{**} = T$ だから（系 4.23）．したがって，$(\xi, \eta) \in \mathrm{gr}(TT^*) = \mathrm{gr}(T^{**}T^*)$ であることは，$\xi \in \mathrm{Dom}\, T^*$ かつ任意の $\zeta \in \mathrm{Dom}\, T^*$ に対して $\langle T^*\zeta | T^*\xi \rangle = \langle \zeta | \eta \rangle$ が成り立つことと同値である．いま，仮定と分極公式より，任意の $\zeta, \xi \in \mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Dom}\, T^*$ に対して $\langle T\zeta | T\xi \rangle = \langle T^*\zeta | T^*\xi \rangle$ が成り立つから，$\mathrm{gr}(T^*T) = \mathrm{gr}(TT^*)$ である．よって，$T^*T = TT^*$ が成り立つ．$\square$

系 4.47　E を Hilbert 空間とする．Hilbert 空間上の正規作用素 T は，正規作用素の中で極大である．すなわち，E 上の正規作用素であって T の拡張であるものは，T 自身のみである．

証明　E 上の正規作用素 S が T の拡張であるとすると，定理 4.46 より $\mathrm{Dom}\, S = \mathrm{Dom}\, S^* \subseteq \mathrm{Dom}\, T^* = \mathrm{Dom}\, T \subseteq \mathrm{Dom}\, S$ だから，$S = T$ である．$\square$

系 4.48　Hilbert 空間上の正規作用素は，対称ならば自己随伴である．

証明　Hilbert 空間上の正規作用素 T は，稠密に定義されており，定理 4.46 より $\mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Dom}\, T^*$ を満たすから，対称ならば自動的に自己随伴となる．$\square$

系 4.49　Hilbert 空間上の正規作用素 T に対して，$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ が成り立つ．

証明　$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^*$ は定理 4.46 からわかり，$\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ は命題 4.19 ですでに示した．$\square$

系 4.50　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ である．
(b) $\lambda I - T$ は単射かつその像は E の閉部分線型空間である．
(c) $\lambda I - T$ は全射である．

証明　$\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ は $\lambda I - T$ が全単射であることと同値だが（命題 4.15），系 4.49 より $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) = (\mathrm{Im}(\lambda I - T))^\perp$ だから，これは，$\lambda I - T$ が単射かつその像が閉であることや，$\lambda I - T$ が全射であることと同値である．$\square$

注意 4.51　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とする．正規作用素の定義より $\mathrm{Dom}\, T^*T = \mathrm{Dom}\, TT^*$ であり，定理 4.46 より $\mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Dom}\, T^*$ だが，$\mathrm{Dom}\, T^*T = \mathrm{Dom}\, T$ は一般には成り立たない．

命題 4.52　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とする．T が単射であることと $\mathrm{Im}\, T$ が E において稠密であることとは同値であり，これらの条件の下で，T^{-1} は E 上の正規作用素である．

証明　系 4.49 より $\mathrm{Ker}\, T = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ だから，T が単射であることと $\mathrm{Im}\, T$ が E において稠密であることと

は同値である．さらに，これらの条件の下で，命題 4.3 と命題 4.25 より

$$\begin{aligned}(T^{-1})^*T^{-1} &= (T^*)^{-1}T^{-1}\\ &= (TT^*)^{-1}\\ &= (T^*T)^{-1}\\ &= T^{-1}(T^*)^{-1}\\ &= T^{-1}(T^{-1})^*\end{aligned}$$

だから，T^{-1} は正規である． □

4.8 線型作用素の Hilbert 直和

Hilbert 空間の族 $\{E_i\}_{i\in I}$ に対して，その Hilbert 直和を $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ と書く．すなわち，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ は

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}} E_i = \left\{ (\xi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \;\middle|\; \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 < \infty \right\}$$

に内積

$$\langle (\xi_i)_{i\in I} | (\eta_i)_{i\in I} \rangle = \sum_{i\in I} \langle \xi_i | \eta_i \rangle_{E_i}$$

を与えて得られる Hilbert 空間である．$\{E_i\}_{i\in I}$ が Hilbert 空間 E の閉部分線型空間の完全直交族ならば，自然に $E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ とみなせる．

定義 4.53（線型作用素の Hilbert 直和） $\{E_i\}_{i\in I}$, $\{F_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i から F_i への線型作用素とする．$\{T_i\}_{i\in I}$ の **Hilbert 直和**と呼ばれる $E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ から $F = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} F_i$ への線型作用素 $T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ を，次のように定める．

- $\operatorname{Dom} T = \{(\xi_i)_{i\in I} \in E \mid (T_i\xi_i)_{i\in I} \in F\}$,
- $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Dom} T$ に対して，$T\xi = (T_i\xi_i)_{i\in I}$.

容易にわかるように，任意の $i \in I$ に対して T_i が E_i から F_i への稠密に定義された線型作用素ならば，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ は $E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ から $F = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} F_i$ への稠密に定義された線型作用素となる．

命題 4.54 $\{E_i\}_{i\in I}$, $\{F_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$，$F = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} F_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i から F_i への線型作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く．このとき，T が閉であるための必要十分条件は，すべての T_i が閉であることである．さらに，これらの条件の下で，

$$\operatorname{gr}(T) = \overline{\sum_{i\in I} \operatorname{gr}(T_i)}$$

が成り立つ（ここで，各 $E_i \times F_i$ を自然に $E \times F$ の閉部分線型空間とみなしている）．

証明 各 $i \in I$ に対して $\operatorname{gr}(T_i) = \operatorname{gr}(T) \cap (E_i \times F_i)$ だから，T が閉ならば T_i も閉である．逆に，すべての T_i が閉であるとする．すると，$\{\operatorname{gr}(T_i)\}_{i\in I}$ は $E \times F$ の閉部分線型空間の直交族である．したがって，Hilbert

空間の一般論より，これら全体が張る $E\times F$ の閉部分線型空間は

$$\begin{aligned}\overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)}&=\left\{\sum_{i\in I}(\xi_i,\eta_i)\in E\times F\;\middle|\;\text{各 } i\in I \text{ に対して } (\xi_i,\eta_i)\in\mathrm{gr}(T_i),\ \sum_{i\in I}\|(\xi_i,\eta_i)\|_{E_i\times F_i}^2<\infty\right\}\\&=\{((\xi_i)_{i\in I},(\eta_i)_{i\in I})\in E\times F\mid \text{各 } i\in I \text{ に対して } (\xi_i,\eta_i)\in\mathrm{gr}(T_i)\}\\&=\mathrm{gr}(T)\end{aligned}$$

となる．よって，$\mathrm{gr}(T)=\overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)}$ であり，特に T は閉である．これで，すべての主張が示された． □

命題 4.55 $\{E_i\}_{i\in I}$, $\{F_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}E_i$，$F=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}F_i$ と置く．また，各 $i\in I$ に対して T_i を E_i から F_i への稠密に定義された線型作用素とし，$T=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ と置く．このとき，$T^*=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ である．

証明 $\eta=(\eta_i)_{i\in I}\in F$, $\zeta=(\zeta_i)_{i\in I}\in E$ とする．$(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}(T^*)$ であることは, 任意の $\xi=(\xi_i)_{i\in I}\in\mathrm{Dom}\,T$ に対して $\langle T\xi|\eta\rangle=\langle\xi|\zeta\rangle$，すなわち

$$\sum_{i\in I}\langle T_i\xi_i|\eta_i\rangle=\sum_{i\in I}\langle\xi_i|\zeta_i\rangle \tag{$*$}$$

が成り立つことと同値である．一方で，$(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}\Bigl(\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*\Bigr)$ であることは，任意の $i\in I$ と $\xi_i\in\mathrm{Dom}\,T_i$ に対して

$$\langle T_i\xi_i|\eta_i\rangle=\langle\xi_i|\zeta_i\rangle \tag{$**$}$$

が成り立つことと同値である．任意の $i\in I$ と $\xi_i\in\mathrm{Dom}\,T_i$ に対して $(**)$ が成り立つならば，明らかに，任意の $\xi=(\xi_i)_{i\in I}\in\mathrm{Dom}\,T$ に対して $(*)$ が成り立つ．逆に，任意の $\xi=(\xi_i)_{i\in I}\in\mathrm{Dom}\,T$ に対して $(*)$ が成り立つならば，各 $i\in I$ について，$j\in I\setminus\{i\}$ に対しては $\xi_j=0$ と置くことで，任意の $\xi_i\in\mathrm{Dom}\,T_i$ に対して $(**)$ が成り立つことがわかる．よって，$(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}(T^*)$ と $(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}\Bigl(\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*\Bigr)$ とは同値である．すなわち，$T^*=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ である． □

命題 4.56 $\{E_i\}_{i\in I}$, $\{F_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}E_i$，$F=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}F_i$ と置く．また，各 $i\in I$ に対して T_i を E_i から F_i への稠密に定義された線型作用素とし，$T=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ と置く．

(1) T が自己随伴であるための必要十分条件は，すべての T_i が自己随伴であることである．

(2) T が正規であるための必要十分条件は，すべての T_i が正規であることである．

証明 命題 4.55 で示したように，$T^*=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ であることに注意する．

(1) $T=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$，$T^*=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ であることからただちに従う．

(2) 命題 4.54 で示したように，T が閉であることとすべての T_i が閉であることとは同値である．正規作用素の定義には閉であることが含まれているから，本主張の証明においては，T およびすべての T_i が閉である場合のみを考えればよい．以下，そのように仮定する．

T^*T を $E_i\cap\mathrm{Dom}\,T^*T$ に制限すると $T_i^*T_i$ となり，TT^* を $E_i\cap\mathrm{Dom}\,TT^*$ に制限すると $T_iT_i^*$ となるから，T が正規ならばすべての T_i は正規である．逆に，すべての T_i が正規であるとする．$\xi=(\xi_i)_{i\in I}\in E$ とすると，$\xi\in\mathrm{Dom}\,T^*T$ は

任意の $i\in I$ に対して $\xi_i\in\mathrm{Dom}\,T_i^*T_i$ であり，$\sum_{i\in I}\|T_i\xi_i\|^2<\infty$ かつ $\sum_{i\in I}\|T_i^*T_i\xi_i\|^2<\infty$ である

ことと同値であり，$\xi\in\mathrm{Dom}\,TT^*$ は

任意の $i \in I$ に対して $\xi_i \in \operatorname{Dom} T_i T_i^*$ であり，$\sum_{i \in I} \|T_i^* \xi_i\|^2 < \infty$ かつ $\sum_{i \in I} \|T_i T_i^* \xi_i\|^2 < \infty$ である

ことと同値である．ところがいま各 T_i は正規だから，$T_i^* T_i = T_i T_i^*$ かつ任意の $\xi_i \in \operatorname{Dom} T_i = \operatorname{Dom} T_i^*$ に対して $\|T_i \xi_i\| = \|T_i^* \xi_i\|$ が成り立ち（定理 4.46），したがってこれらの 2 条件は同値である．よって，$\operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom} TT^*$ である．さらに，$\xi \in \operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom} TT^*$ ならば

$$T^*T\xi = (T_i^* T_i \xi_i)_{i \in I} = (T_i T_i^* \xi_i)_{i \in I} = TT^*\xi$$

だから，T は正規である．これで，主張が示された． $\square$

最後に，閉作用素の Hilbert 直和のスペクトルを調べておく．

命題 4.57 $\{E_i\}_{i \in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} E_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i 上の閉作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} T_i$ と置く（命題 4.54 より，T は E 上の閉作用素である）．

(1) $\overline{\bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i)} \subseteq \operatorname{Sp}(T)$ である．
(2) I が有限ならば，$\operatorname{Sp}(T) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i)$ である．

証明 (1) $\lambda \in \mathbb{C}$ について，$\lambda I_E - T = \widehat{\bigoplus}_{i \in I}(\lambda I_{E_i} - T_i)$ が連続可逆ならば，任意の $i \in I$ に対して $\lambda I_{E_i} - T_i$ は連続可逆である．よって，$\bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i) \subseteq \operatorname{Sp}(T)$ である．さらに，$\operatorname{Sp}(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合だから（命題 4.16），$\overline{\bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i)} \subseteq \operatorname{Sp}(T)$ が成り立つ．

(2) I が有限ならば，$\lambda \in \mathbb{C}$ について，$\lambda I_E - T = \widehat{\bigoplus}_{i \in I}(\lambda I_{E_i} - T_i)$ が連続可逆であることは，任意の $i \in I$ に対して $\lambda I_{E_i} - T_i$ が連続可逆であることと同値である．よって，$\operatorname{Sp}(T) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i)$ である． $\square$

注意 4.58 後に系 6.18 で示すように，命題 4.57 の状況でさらに各 T_i が正規ならば，$\operatorname{Sp}(T) = \overline{\bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i)}$ が成り立つ．しかし，各 T_i が連続線型作用素であっても，$\operatorname{Sp}(T) = \overline{\bigcup_{i \in I} \operatorname{Sp}(T_i)}$ が成り立つとは限らない．たとえば，$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $T_n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ と定め，$E = \widehat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{C}^2$ 上の閉作用素 $T = \widehat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{N}_{>0}} T_n$ を考える．すると，任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $\operatorname{Sp}(T_n) = \{1\}$ である．一方で，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda I - T$ は全射ではないから（たとえば，$((0, 1/n))_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \in E$ は $\lambda I - T$ の像に属さない），$\operatorname{Sp}(T) = \mathbb{C}$ である．

4.9 線型作用素の簡約

定義 4.59（線型作用素を簡約する閉部分線型空間） E, F を Hilbert 空間，T を E から F への線型作用素とする．

(1) M, N をそれぞれ E, F の閉部分線型空間とし，M, N の上への直交射影をそれぞれ P, Q と書く．$QT \subseteq TP$ であるとき，(M, N) は T を**簡約する**という．$E = F$ かつ $M = N$ の場合は，このことを単に M は T を簡約するという．
(2) $\{E_i\}_{i \in I}$, $\{F_i\}_{i \in I}$ をそれぞれ E, F の閉部分線型空間の完全直交族とする．任意の $i \in I$ に対して (M_i, N_i) が T を簡約するとき，$(\{E_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I})$ が T を**簡約する**という．$E = F$ かつ任意の $i \in I$ に対して $E_i = F_i$ の場合は，このことを単に $\{E_i\}_{i \in I}$ は T を簡約するという．[*6]

[*6] (1) の $E = F$ かつ $M = N$ の場合の「M は T を簡約する」という用語は標準的なものであり，たとえば新井 [6, p. 179] で用いられているが，それ以外は本稿だけの用語である．

定義 4.59 (1) の状況で，(M,N) が T を簡約するならば，$\xi\in\operatorname{Dom}T\cap M$ に対して $T\xi=TP_M\xi=P_NT\xi\in N$ だから，$T(\operatorname{Dom}T\cap M)\subseteq N$ である．これを踏まえて，次のように定義する．

定義 4.60（線型作用素の簡約） E, F を Hilbert 空間，T を E から F への線型作用素とする．また，E, F の閉部分線型空間の組 (M,N) は T を簡約するとする．このとき，T の定義域を $\operatorname{Dom}T\cap M$ に制限して M から N への線型作用素とみなしたものを，T の (M,N) による**簡約**という．$E=F$ かつ $M=N$ の場合は，これを単に T の M による簡約という．

命題 4.61 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への線型作用素とする．M, N をそれぞれ E, F の閉部分線型空間とするとき，(M,N) が T を簡約することと $(M^\perp,N^\perp)$ が T を簡約することとは同値である．

証明 M, N の上への直交射影をそれぞれ P, Q と書く．$M^\perp$, $N^\perp$ の上への直交射影はそれぞれ I_E-P, I_F-Q だから，$QT\subseteq TP$ ならば $(I_F-Q)T\subseteq T(I_E-P)$ であることを示せばよい．$QT\subseteq TP$ であるとすると，任意の $\xi\in\operatorname{Dom}T$ に対して，$P\xi\in\operatorname{Dom}T$ かつ $QT\xi=TP\xi$ だから，$(I_E-P)\xi=\xi-P\xi\in\operatorname{Dom}T$ かつ

$$(I_F-Q)T\xi=\xi-QT\xi=\xi-TP\xi=T(I_E-P)\xi$$

である．よって，$(I_F-Q)T\subseteq T(I_E-P)$ が成り立つ．これで，主張が示された． □

命題 4.62 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への線型作用素とする．また，E, F の閉部分線型空間の組 (M,N) は T を簡約するとし，T の (M,N) による簡約を T_0 と書く．

- T が E から F への稠密に定義された線型作用素ならば，T_0 は M から N への稠密に定義された線型作用素である．
- T が E から F への閉作用素ならば，T_0 は M から N への閉作用素である．

証明 (1) M, N の上への直交射影をそれぞれ P, Q と書くと，$QT\subseteq TP$ だから，特に $P(\operatorname{Dom}T)\subseteq\operatorname{Dom}T\cap M=\operatorname{Dom}T_0$ である．よって，$\operatorname{Dom}T$ が E において稠密ならば，$\operatorname{Dom}T_0$ は M において稠密である．

(2) $\operatorname{gr}(T_0)=\operatorname{gr}(T)\cap(M\times N)$ から従う． □

$\{E_i\}_{i\in I}$, $\{F_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族，各 $i\in I$ に対して T_i を E_i から F_i への線型作用素とし，$E=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}E_i$ から $F=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}F_i$ への線型作用素 $T=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ を考えると，明らかに，$(\{E_i\}_{i\in I},\{F_i\}_{i\in I})$ は T を簡約し，T の (E_i,F_i) による簡約は T_i に等しい．逆に，次が成り立つ．

命題 4.63 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への線型作用素とする．また，E, F の閉部分線型空間の完全直交族の組 $(\{E_i\}_{i\in I},\{F_i\}_{i\in I})$ は T を簡約するとし，各 $i\in I$ に対して，T の (E_i,F_i) による簡約を T_i と書く．I が有限であるか，または T が閉ならば，

$$T=\widehat{\bigoplus_{i\in I}}T_i$$

が成り立つ（ここで，自然に $E=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}E_i$，$F=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}F_i$ とみなしている）．

証明 まず，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\subseteq T$ を示す．任意の $i\in I$ に対して $\operatorname{gr}(T_i)\subseteq\operatorname{gr}(T)$ だから，

$$\sum_{i\in I}\operatorname{gr}(T_i)\subseteq\operatorname{gr}(T)$$

である．I が有限ならば，$\mathrm{gr}\left(\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\right)=\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)$ だから，上式より $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\subseteq T$ である．また，T が閉ならば，各簡約 T_i も閉だから（命題 4.62 (2)），命題 4.54 と上式より

$$\mathrm{gr}\left(\widehat{\bigoplus_{i\in I}}T_i\right)=\overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)}\subseteq\mathrm{gr}(T)$$

である．よって，やはり $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\subseteq T$ である．

次に，$\mathrm{Dom}\,T\subseteq\mathrm{Dom}\left(\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\right)$ を示す．$\xi\in\mathrm{Dom}\,T$ とする．各 $i\in I$ に対して E_i, F_i の上への直交射影をそれぞれ P_i, Q_i と書くと，ξ は自然に $(P_i\xi)_{i\in I}\in\widehat{\bigoplus}_{i\in I}E_i$ と同一視され，任意の $i\in I$ に対して $P_i\xi\in\mathrm{Dom}\,T\cap E_i$ かつ $T_iP_i\xi=TP_i\xi=Q_iT\xi$ である．$(Q_iT\xi)_{i\in I}$ は $T\xi\in F$ と自然に同一視される $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}F_i$ の元だから，これより $\xi\in\mathrm{Dom}\left(\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\right)$ である．よって，$\mathrm{Dom}\,T\subseteq\mathrm{Dom}\left(\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i\right)$ である．これで，$T=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ が示された． □

系 4.64 E を Hilbert 空間，T を E 上の稠密に定義された線型作用素とする．また，E の閉部分線型空間 M は T を簡約するとし，T の M による簡約を T_0 と書く（命題 4.62 (1) より，T_0 は M 上の稠密に定義された線型作用素である）．

(1) M は T^* を簡約し，T^* の (M,N) による簡約は T_0^* に等しい．
(2) T が E 上の自己随伴作用素ならば，T_0 は M 上の自己随伴作用素である．
(3) T が E 上の正規作用素ならば，T_0 は M 上の正規作用素である．

証明 命題 4.61 より，$M^\perp$ も T を簡約する．T の $M^\perp$ による簡約を T_1 と書くと，T_1 は $M^\perp$ 上の稠密に定義された線型作用素であり（命題 4.62 (1)），$T=T_0\oplus T_1$ が成り立つ（命題 4.63）．

(1) 命題 4.55 より $T^*=T_0^*\oplus T_1^*$ だから，M は T^* を簡約し，T^* の (M,N) による簡約は T_0^* に等しい．

(2), (3) 命題 4.56 から従う（(2) は，(1) からも従う）． □

5 射影値測度と可測関数

本節では，可測空間 X とその上の射影値測度 $\mathit{\Pi}$ に対して，X 上の複素数値可測関数の「$\mathit{\Pi}$-零集合上での違いを無視する同値関係」による同値類の全体がなす単位的対合代数を，$L(X,\mathit{\Pi})$ と書く（この空間にノルムは考えない）．$L(X,\mathit{\Pi})$ は，$L^\infty(X,\mathit{\Pi})$ を部分単位的対合代数として含む．

5.1 射影値測度に関する積分（有界とは限らない場合）

定義 5.1（可測関数の射影値測度に関する積分） X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f\in L(X,\mathit{\Pi})$ に対して，E 上の線型作用素 T であって，条件「任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\,T$ と $\eta\in E$ に対して，f は $\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$-可積分であり，

$$\langle T\xi|\eta\rangle=\int_X f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$$

が成り立つ」を満たすもののうち（拡張関係に関して）最大のものを，f の $\mathit{\Pi}$ に関する**積分**といい，

$$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$$

と書く．可測集合 $A\subseteq X$ と $f\in L(X,\mathit{\Pi})$ に対して，$\int_X\chi_Af\,d\mathit{\Pi}$ の代わりに $\int_A f\,d\mathit{\Pi}$ とも書く．

f の $\varPi$ に関する積分 $\int_X f\,d\varPi$ は，明示的には

- $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ は，$\xi \in E$ のうち，ある $\zeta \in E$ が存在して任意の $\eta \in E$ に対して $\langle \zeta | \eta \rangle = \int_X f\,d\varPi_{\xi,\eta}$ が成り立つ（Riesz の表現定理より，これは $\eta \mapsto \int_X f\,d\varPi_{\xi,\eta}$ が E 上連続であることと同値である）ものの全体，
- $\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ に対して，上の条件を満たす $\zeta \in E$（これは一意に定まる）を $\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)\xi$ とする

によって与えられる．$f \in L^\infty(X, \varPi)$ に対しては，定義 2.13 と定義 5.1 とは一致する．

有界可測関数の場合（命題 2.14，命題 2.15）と同様に，射影値測度に関する積分について次が成り立つ．ほとんど重複になるが，証明も付けておく．

命題 5.2 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とし，$f \in L(X, \varPi)$ を可測関数とする．$\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$，$\eta \in E$ に対して，

$$d\varPi_{(\int_X f\,d\varPi)\xi,\eta} = f\,d\varPi_{\xi,\eta}$$

である．また，$\xi \in E$，$\eta \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ に対して，

$$d\varPi_{\xi,(\int_X f\,d\varPi)\eta} = \overline{f}\,d\varPi_{\xi,\eta}$$

である．

証明 $\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$，$\eta \in E$ とする．可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\varPi_{\xi,\varPi(A)\eta} = \varPi_{\xi,\eta}(-\cap A)$ であること（命題 2.6 (3)）より

$$\begin{aligned}
\varPi_{(\int_X f\,d\varPi)\xi,\eta}(A) &= \left\langle \varPi(A)\left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi \middle| \varPi(A)\eta \right\rangle \\
&= \int_X f\,d\varPi_{\xi,\varPi(A)\eta} \\
&= \int_A f\,d\varPi_{\xi,\eta}
\end{aligned}$$

だから，$d\varPi_{(\int_X f\,d\varPi)\xi,\eta} = f\,d\varPi_{\xi,\eta}$ である．また，$\xi \in E$，$\eta \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ ならば，上の結果と命題 2.6 (2) より，

$$d\varPi_{\xi,(\int_X f\,d\varPi)\eta} = \overline{d\varPi_{(\int_X f\,d\varPi)\eta,\xi}} = \overline{f}\,d\overline{\varPi_{\eta,\xi}} = \overline{f}\,d\varPi_{\xi,\eta}$$

である．□

命題 5.3 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．f，$g \in L(X, \varPi)$ と $\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$，$\eta \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X g\,d\varPi\bigr)$ に対して，$f\overline{g}$ は $\varPi_{\xi,\eta}$-可積分であり，

$$\left\langle \left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi \middle| \left(\int_X g\,d\varPi\right)\eta \right\rangle = \int_X f\overline{g}\,d\varPi_{\xi,\eta}$$

が成り立つ．特に，

$$\left\| \left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi \right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\varPi_{\xi,\xi}$$

である．

証明　命題 5.2 より $d\Pi_{\xi,\left(\int_X g\,d\Pi\right)\eta} = \overline{g}\,d\Pi_{\xi,\eta}$ であり，$\eta \in \mathrm{Dom}\left(\int_X g\,d\Pi\right)$ より g は $\Pi_{\xi,\left(\int_X g\,d\Pi\right)\eta}$-可積分だから，$f\overline{g}$ は $\Pi_{\xi,\eta}$-可積分である．そして，

$$\left\langle \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \middle| \left(\int_X g\,d\Pi\right)\eta \right\rangle = \int_X f\,d\Pi_{\xi,\left(\int_X g\,d\Pi\right)\eta} = \int_X f\overline{g}\,d\Pi_{\xi,\eta}$$

である．$g = f$，$\eta = \xi$ と置けば，

$$\left\|\left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi\right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}$$

を得る． □

次の命題より，可測関数を射影値測度に関して積分した結果は，稠密に定義された線型作用素になる．

命題 5.4　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X,\Pi)$ に対して

$$\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \left\{\xi \in E \;\middle|\; \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty\right\}$$

であり，これは E の稠密部分空間である．

証明　$f\colon X \to \mathbb{C}$ を可測関数とする．$\xi \in \mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)$ とすると，命題 5.3 より $\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ である．逆に，$\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ であるとする．$\eta \in E$ を任意にとると，系 2.9 より

$$\int_X |f|\,d|\Pi_{\xi,\eta}| \le \left(\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|$$

だから，f は $\Pi_{\xi,\eta}$-可積分であり

$$\left|\int_X f\,d\Pi_{\xi,\eta}\right| \le \left(\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|$$

を満たす．よって，$\xi \in \mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)$ である．これで，

$$\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \left\{\xi \in E \;\middle|\; \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty\right\}$$

が示された．

$\left\{\xi \in E \;\middle|\; \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty\right\}$ が E において稠密であることを示す．$\xi \in E$ を任意にとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \le n\}$$

と置くと，命題 2.6 (3) より $\Pi_{\Pi(A_n)\xi,\Pi(A_n)\xi} = \Pi_{\xi,\xi}(- \cap A_n)$ だから，

$$\begin{aligned}\int_X |f|^2\,d\Pi_{\Pi(A_n)\xi,\Pi(A_n)\xi} &= \int_{A_n} |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\\ &\le n^2\Pi_{\xi,\xi}(A_n)\\ &< \infty\end{aligned}$$

である．さらに，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は増大列で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ だから，$n \to \infty$ のとき $\Pi(A_n)\xi \to \xi$ である（注意 2.2）．よって，$\left\{\xi \in E \;\middle|\; \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty\right\}$ は E において稠密である． □

有界可測関数の場合（命題 2.16）と同様に，射影値測度に関する積分によって得られる線型作用素の核は次のように表される．ほとんど重複になるが，証明も付けておく．

命題 5.5 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\operatorname{Ker}\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right) = \operatorname{Im}\mathit{\Pi}(f^{-1}(\{0\}))$$

が成り立つ．

証明 命題 5.3 と命題 5.4 より，$\xi \in E$ が $\operatorname{Ker}\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\bigr)$ に属するための必要十分条件は

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = 0$$

である．$|f|^2 \geq 0$ かつ $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$ は正値測度だから（命題 2.6 (1)），これは $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$-ほとんどいたるところで $|f|^2 = 0$ であること，すなわち $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})) = 0$ であることと同値である．$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})) = \|\mathit{\Pi}(f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}))\xi\|^2$ だから，これは $\xi \in (\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})))^{\perp} = \operatorname{Im}\mathit{\Pi}(f^{-1}(\{0\}))$（命題 2.4 (2)）と同値である．よって，$\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(f^{-1}(\{0\})) = \operatorname{Ker}T$ である． □

有界可測関数の場合（命題 2.17）と同様に，射影値測度の像と積分について次が成り立つ．ほとんど重複になるが，証明も付けておく．

命題 5.6 X, Y を可測空間，$f\colon X \to Y$ を可測写像，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．任意の $g \in L(X, f_*\mathit{\Pi})$ に対して，

$$\int_Y g\,d(f_*\mathit{\Pi}) = \int_X g \circ f\,d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．

証明 $g \in L(X, f_*\mathit{\Pi})$ とする．任意の $\xi, \eta \in E$ に対して，g が $(f_*\mathit{\Pi})_{\xi,\eta} = f_*(\mathit{\Pi}_{\xi,\eta})$ に関して可積分であることと $g \circ f$ が $\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$ に関して可積分であることとは同値であり，これらの条件が成り立てば

$$\int_Y g\,d(f_*\mathit{\Pi})_{\xi,\eta} = \int_Y g\,d(f_*(\mathit{\Pi}_{\xi,\eta})) = \int_X g \circ f\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}$$

である．よって，

$$\int_Y g\,d(f_*\mathit{\Pi}) = \int_X g \circ f\,d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ． □

5.2 射影値測度に関する積分の準同型性（有界とは限らない場合）

有界可測関数の場合（定理 2.18）と同様に，射影値測度に関する積分は準同型性を満たす．証明も同様だが，ここでは線型作用素の定義域の問題があるため，多少手間が増える．

定理 5.7 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$D_f = \operatorname{Dom}\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\bigr)$ と書くことにする．

(1) $f,\, g \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\mathit{\Pi} + \int_X g\, d\mathit{\Pi} &= \left(\int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}\right)\Big|_{D_f \cap D_g} \\ &= \left(\int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}\right)\Big|_{D_f \cap D_{f+g}} \\ &= \left(\int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}\right)\Big|_{D_g \cap D_{f+g}}\end{aligned}$$

である．特に，f または g が $\mathit{\Pi}$-本質的有界ならば，

$$\int_X f\, d\mathit{\Pi} + \int_X g\, d\mathit{\Pi} = \int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}$$

である．

(2) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\lambda \int_X f\, d\mathit{\Pi} = \int_X \lambda f\, d\mathit{\Pi}$$

である．

(3) $1 \in L(X, \mathit{\Pi})$ について，

$$\int_X 1\, d\mathit{\Pi} = I$$

である．

(4) $f,\, g \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\right) = \left(\int_X fg\, d\mathit{\Pi}\right)\Big|_{D_g \cap D_{fg}}$$

である．特に，g が $\mathit{\Pi}$-本質的有界ならば，

$$\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\right) = \int_X fg\, d\mathit{\Pi}$$

である．

(5) $f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)^* = \int_X \overline{f}\, d\mathit{\Pi}$$

である．

(6) $f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ が単射であることと f が $L(X, \mathit{\Pi})$ において可逆であることとは同値であり，これらの条件の下で

$$\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)^{-1} = \int_X \frac{1}{f}\, d\mathit{\Pi}$$

である（$1/f$ は f の $L(X, \mathit{\Pi})$ における乗法逆元を表す）．

証明 (1) 線型作用素の和の定義より，$\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi + \int_X g\,d\Pi\bigr) = D_f \cap D_g$ である．$\xi \in D_f \cap D_g$ とすると，任意の $\eta \in E$ に対して f, g は $\Pi_{\xi,\eta}$-可積分だから $f+g$ も $\Pi_{\xi,\eta}$-可積分であり，したがって $\xi \in D_{f+g}$ である．さらに，任意の $\eta \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\int_X f\,d\Pi + \int_X g\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle &= \left\langle \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle + \left\langle \left(\int_X g\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle \\ &= \int_X f\,d\Pi_{\xi,\eta} + \int_X g\,d\Pi_{\xi,\eta} \\ &= \int_X (f+g)\,d\Pi_{\xi,\eta} \\ &= \left\langle \left(\int_X (f+g)\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle\end{aligned}$$

だから，

$$\int_X f\,d\Pi + \int_X g\,d\Pi = \left(\int_X (f+g)\,d\Pi\right)\Big|_{D_f \cap D_g}$$

である．また，上の議論より特に $D_{f+g} \subseteq D_f \cap D_g$ だが，ここで f, g をそれぞれ $f+g$, $-g$ で置き換えることにより $D_f \subseteq D_{f+g} \cap D_{-g} = D_{f+g} \cap D_g$ がわかり，同様に $D_g \subseteq D_{f+g} \cap D_f$ もわかる．したがって，D_f, D_g, D_{f+g} のうち 2 つの交叉はすべて等しいから，上式で $D_f \cap D_g$ を $D_{f+g} \cap D_f$ や $D_{f+g} \cap D_g$ に変えたものも成り立つ．

f が Π-本質的有界ならば，$D_f = E$ だから，

$$\int_X f\,d\Pi + \int_X g\,d\Pi = \int_X (f+g)\,d\Pi$$

となる．g が Π-本質的有界である場合も同様である．

(2) 線型作用素のスカラー倍の定義より，$\mathrm{Dom}\bigl(\lambda \int_X f\,d\Pi\bigr) = D_f$ である．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ より f の可積分性と λf の可積分性とは同値だから，$D_f = D_{\lambda f}$ である．さらに，$\xi \in D_f \cap D_{\lambda f}$ とすると，任意の $\eta \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\lambda \int_X f\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle &= \lambda \left\langle \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle \\ &= \lambda \int_X f\,d\Pi_{\xi,\eta} \\ &= \int_X \lambda f\,d\Pi_{\xi,\eta} \\ &= \left\langle \left(\int_X \lambda f\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle\end{aligned}$$

だから，

$$\lambda \int_X f\,d\Pi = \int_X \lambda f\,d\Pi$$

である．

(3) 定理 2.18 に含まれる．

(4) 線型作用素の合成の定義より，$\xi \in E$ が $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)\bigl(\int_X g\,d\Pi\bigr)$ に属するための必要十分条件は，$\xi \in D_g$ かつ $\bigl(\int_X g\,d\Pi\bigr)\xi \in D_f$ である．$\xi \in D_g$ とすると，命題 5.4 より $\bigl(\int_X g\,d\Pi\bigr)\xi \in D_f$ は

$$\int_X |f|^2\,d\Pi_{(\int_X g\,d\Pi)\xi,(\int_X g\,d\Pi)\xi} < \infty \tag{$*$}$$

と同値だが，命題 5.2 より

$$\int_X |f|^2 \, d\Pi_{(\int_X g\,d\Pi)\xi,(\int_X g\,d\Pi)\xi} = \int_X |fg|^2 \, d\Pi_{\xi,\xi}$$

だから，ふたたび命題 5.4 より $(*)$ は $\xi \in D_{fg}$ と同値である．よって，

$$\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X g\,d\Pi\right) = D_g \cap D_{fg}$$

である．さらに，$\xi \in D_g \cap D_{fg}$ とすると，任意の $\eta \in E$ に対して，命題 5.2 より

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X g\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle &= \int_X f\,d\Pi_{(\int_X g\,d\Pi)\xi,\eta} \\ &= \int_X fg\,d\Pi_{\xi,\eta} \\ &= \left\langle \left(\int_X fg\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle\end{aligned}$$

だから，

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X g\,d\Pi\right) = \left(\int_X fg\,d\Pi\right)\Big|_{D_g \cap D_{fg}}$$

である．

g が Π-本質的有界ならば，$D_g = E$ だから，

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X g\,d\Pi\right) = \int_X fg\,d\Pi$$

となる．

(5)　$\eta \in D_{\overline{f}}$ とすると，任意の $\xi \in D_f$ に対して，命題 2.6 (1) より

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \middle| \eta \right\rangle &= \int_X f\,d\Pi_{\xi,\eta} \\ &= \overline{\int_X \overline{f}\,d\Pi_{\eta,\xi}} \\ &= \overline{\left\langle \left(\int_X \overline{f}\,d\Pi\right)\eta \middle| \xi \right\rangle} \\ &= \left\langle \xi \middle| \left(\int_X \overline{f}\,d\Pi\right)\eta \right\rangle\end{aligned}$$

だから，$\eta \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^*$ かつ $\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^*\eta = \bigl(\int_X \overline{f}\,d\Pi\bigr)\eta$ である．よって，

$$\int_X \overline{f}\,d\Pi \subseteq \left(\int_X f\,d\Pi\right)^*$$

である．

$\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^* \subseteq D_{\overline{f}}$ を示す．$\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^*$ を任意にとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x \in X \mid |f(x)| \leq n\}$ の特性関数を χ_n と置くと，χ_n，$\chi_n f$ は有界だから，これらに対しては有界可測関数の射影値測度に関す

る積分の準同型性（定理 2.18）が適用できる．これと本定理の (4)，命題 4.18 (3) より

$$\begin{aligned}
\int_X \chi_n \overline{f}\,d\Pi &= \left(\int_X \chi_n f\,d\Pi\right)^* \\
&= \left(\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X \chi_n\,d\Pi\right)\right)^* \\
&\supseteq \left(\int_X \chi_n\,d\Pi\right)^*\left(\int_X f\,d\Pi\right)^* \\
&= \left(\int_X \chi_n\,d\Pi\right)\left(\int_X f\,d\Pi\right)^* \\
&= \Pi(\{x \in X \mid |f(x)| \le n\})\left(\int_X f\,d\Pi\right)^*
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\int_X |\chi_n \overline{f}|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} &= \left\|\left(\int_X \chi_n \overline{f}\,d\Pi\right)\xi\right\|^2 \\
&= \left\|\Pi(\{x \in X \mid |f(x)| \le n\})\left(\int_X f\,d\Pi\right)^*\xi\right\|^2 \\
&\le \left\|\left(\int_X f\,d\Pi\right)^*\xi\right\|^2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

である．したがって，単調収束定理より $\int_X |\overline{f}|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ であり，これは $\xi \in D_{\overline{f}}$ を意味する（命題 5.4）．よって，$\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^* \subseteq D_{\overline{f}}$ である．

(6)　$\mathrm{Ker}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr) = \mathrm{Im}\,\Pi(f^{-1}(\{0\}))$ だから（命題 5.5），$\int_X f\,d\Pi$ が単射であるための必要十分条件は $\Pi(f^{-1}(\{0\})) = 0$ であり，これは f が $L(X,\Pi)$ において可逆であることと同値である．この条件が成り立つとして，f の $L(X,\Pi)$ における乗法逆元 $1/f$ をとると，定理 5.7 (3), (4) より

$$\begin{aligned}
\left(\int_X \frac{1}{f}\,d\Pi\right)\left(\int_X f\,d\Pi\right) &= I|_{D_f \cap D_1} = I|_{D_f}, \\
\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X \frac{1}{f}\,d\Pi\right) &= I|_{D_{1/f} \cap D_1} = I|_{D_{1/f}}
\end{aligned}$$

である．これは，

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)^{-1} = \int_X \frac{1}{f}\,d\Pi$$

を意味する．　□

系 5.8　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．m, $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\int_X f^m \overline{f}^n\,d\Pi$ は m 個の $\int_X f\,d\Pi$ と n 個の $\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^*$ を任意の順序で合成したもの（$m = n = 0$ の場合は I とする）に等しい．

証明　$m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X f^m \overline{f}^n\,d\Pi\right) = \left(\int_X f^{m+1}\overline{f}^n\,d\Pi\right) \tag{$*$}$$

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)^*\left(\int_X f^m \overline{f}^n\,d\Pi\right) = \left(\int_X f^m\overline{f}^{n+1}\,d\Pi\right) \tag{$**$}$$

を示せば，これらを繰り返し用いることにより，主張が得られる．以下，($*$) と ($**$) を示す．

定理 5.7 (4) より

$$\left(\int_X f\,d\varPi\right)\left(\int_X f^m\overline{f}^n\,d\varPi\right)=\left(\int_X f^{m+1}\overline{f}^n\,d\varPi\right)\Big|_{D_{f^m\overline{f}^n}\cap D_{f^{m+1}\overline{f}^n}} \tag{$***$}$$

であり（$D_{f^m\overline{f}^n}$ などの記号は定理 5.7 で定義したものとする），命題 5.4 より

$$\begin{aligned}D_{f^m\overline{f}^n}&=\left\{\xi\in E\;\middle|\;\int_X|f|^{2(m+n)}\,d\varPi_{\xi,\xi}<\infty\right\},\\ D_{f^{m+1}\overline{f}^n}&=\left\{\xi\in E\;\middle|\;\int_X|f|^{2(m+n+1)}\,d\varPi_{\xi,\xi}<\infty\right\}\end{aligned}$$

である．$\xi\in E$ とし，一般に $\gamma\geq 0$ に対して条件

$$\int_X|f|^{2\gamma}\,d\varPi_{\xi,\xi}<\infty \tag{$****$}$$

を考えよう．$A=\{x\in X\mid |f(x)|\leq 1\}$ と置いて

$$\int_X|f|^{2\gamma}\,d\varPi_{\xi,\xi}=\int_A|f|^{2\gamma}\,d\varPi_{\xi,\xi}+\int_{X\setminus A}|f|^{2\gamma}\,d\varPi_{\xi,\xi}$$

と分割すると，第 1 項は常に有限だから，第 2 項が有限になるかどうかを考えればよい．ところが $\mathbb{C}\setminus A$ 上では $|f|^{2\gamma}$ は γ に関して単調増加だから，γ が大きいほど ($****$) は強い条件になる．よって，$D_{f^{m+1}\overline{f}^n}\subseteq D_{f^m\overline{f}^n}$ だから，($***$) より ($*$) を得る．また，($*$) で f を $\overline{f}$ に置き換え，m と n を入れ替え，定理 5.7 (5) に注意すれば，($**$) を得る．これで，主張が示された．□

系 5.9　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$f\in L(X,\varPi)$ に対して，$\int_X f\,d\varPi$ は E 上の稠密に定義された閉作用素であり，

$$\left(\int_X f\,d\varPi\right)^*\left(\int_X f\,d\varPi\right)=\left(\int_X f\,d\varPi\right)\left(\int_X f\,d\varPi\right)^*=\int_X|f|^2\,d\varPi$$

が成り立つ．したがって，$\int_X f\,d\varPi$ は E 上の正規作用素である．

証明　$f\in L(X,\varPi)$ とする．$\int_X f\,d\varPi$ が E 上の稠密に定義された線型作用素であることは，命題 5.4 ですでに述べた．定理 5.7 (5) より $\int_X f\,d\varPi=\left(\int_X\overline{f}\,d\varPi\right)^*$ であり，稠密に定義された線型作用素の随伴は常に閉作用素だから（系 4.21），$\int_X f\,d\varPi$ は閉作用素である．主張の等式は，系 5.8 で $m=n=1$ と置いたものである．□

系 5.10　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$f\in L(X,\varPi)$ に対して，

$$\overline{\operatorname{Im}\left(\int_X f\,d\varPi\right)}=\operatorname{Im}\varPi(f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}))$$

が成り立つ．

証明　系 5.9 より $\int_X f\,d\Pi$ は正規だから，系 4.49，命題 5.5 および命題 2.4 (2) より

$$
\begin{aligned}
\overline{\operatorname{Im}\Bigl(\int_X f\,d\Pi\Bigr)} &= \Bigl(\operatorname{Ker}\Bigl(\int_X f\,d\Pi\Bigr)\Bigr)^{\perp} \\
&= (\operatorname{Im}\Pi(f^{-1}(\{0\})))^{\perp} \\
&= \operatorname{Im}\Pi(f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}))
\end{aligned}
$$

である． □

命題 5.11　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X,\Pi)$ に対して，

$$
\operatorname{Sp}\Bigl(\int_X f\,d\Pi\Bigr) = \operatorname{ess\,ran}_{\Pi} f
$$

が成り立つ．

証明　示すべきことは，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda \in \operatorname{Sp}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr) \iff \lambda \in \operatorname{ess\,ran}_{\Pi} f$ であることだが，f を $f-\lambda$ に置き換えることにより，$\lambda = 0$ の場合だけを考えればよい．

$0 \notin \operatorname{ess\,ran}_{\Pi} f$ とすると，f は $L(X,\Pi)$ において可逆であり，乗法逆元 $1/f$ は Π-本質的有界である．したがって定理 5.7 (6) より，$\int_X f\,d\Pi$ は単射であり，$\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)^{-1} = \int_X 1/f\,d\Pi \in \mathscr{L}(E)$ である．よって，$0 \notin \operatorname{Sp}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)$ である．

逆に，$0 \in \operatorname{ess\,ran}_{\Pi} f$ とする．$\epsilon > 0$ に対して $A_\epsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \le \epsilon\}$ と置くと，$\Pi(A_\epsilon) \ne 0$ である．そこで $\xi \in \operatorname{Im}\Pi(A_\epsilon)\setminus\{0\}$ をとると，$\Pi_{\xi,\xi} = \Pi_{\Pi(A_\epsilon)\xi,\xi} = \Pi_{\xi,\xi}(-\cap A_\epsilon)$（命題 2.6 (3)）より $\Pi_{\xi,\xi}$ は A_ϵ の外では消える．したがって，

$$
\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} = \int_{A_\epsilon} |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \le \epsilon^2\|\xi\|^2 < \infty
$$

だから命題 5.4 より $\xi \in \operatorname{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)$ であり，さらに命題 5.3 より

$$
\Bigl\|\Bigl(\int_X f\,d\Pi\Bigr)\xi\Bigr\|^2 = \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \le \epsilon^2\|\xi\|^2
$$

が成り立つ．任意の $\epsilon > 0$ に対してこのような $\xi \in E\setminus\{0\}$ が存在するから，$\int_X f\,d\Pi$ は連続可逆ではない．すなわち，$0 \in \operatorname{Sp}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr)$ である． □

命題 5.12　X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X,\Pi)$ に対して，$\int_X f\,d\Pi$ が全域で定義されているための必要十分条件は，f が Π-本質的有界であることである．さらに，この条件の下で，$\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(E)$ かつ $\|\int_X f\,d\Pi\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ（$\|-\|_\infty$ は $L^\infty(X,\Pi)$ のノルムを表す）．

証明　$f \in L^\infty(X,\Pi)$ に対しては $\int_X f\,d\Pi$ は定義 2.13 で $\mathscr{L}(E)$ の元として定義されており，定理 2.18 で示したように $\|\int_X f\,d\Pi\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ．すでに言及したように，定義 5.1 はこの定義と整合している．

逆に，$\operatorname{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi\bigr) = E$ として，f が Π-本質的有界であることを示す．$\int_X f\,d\Pi$ は閉だから（系 5.9），閉グラフ定理（事実 4.7）より $\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(E)$ である．$n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x \in X \mid |f(x)| \le n\}$ の特性関数を χ_n と書くと，$\chi_n f$ は有界であり，定理 2.18 より

$$
\|\chi_n f\|_\infty = \Bigl\|\int_X \chi_n f\,d\Pi\Bigr\|
$$

である．また，$\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(E)$ に注意すると，定理 5.7 (4) より

$$\begin{aligned}\left\|\int_X \chi_n f\,d\Pi\right\| &= \left\|\left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X \chi_n\,d\Pi\right)\right\| \\ &\leq \left\|\int_X f\,d\Pi\right\|\left\|\int_X \chi_n\,d\Pi\right\| \\ &= \left\|\int_X f\,d\Pi\right\|\|\Pi(\{x\in X \mid |f(x)|\leq n\})\| \\ &\leq \left\|\int_X f\,d\Pi\right\| \\ &< \infty\end{aligned}$$

である．よって，$\|\chi_n f\|_\infty$ は n によらない有限値 $\left\|\int_X f\,d\Pi\right\|$ で上から抑えられるから，f は Π-本質的有界である． □

有界可測関数に対してその射影値測度に関する積分を与える写像は，単射だった（定理 2.18）．この性質の一般化として，次が成り立つ．

命題 5.13 X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f,\,g \in L(X,\Pi)$ に対して，$\int_X f\,d\Pi$ と $\int_X g\,d\Pi$ が定義域の共通部分で一致するならば，$L(X,\Pi)$ の元として $f=g$ である．

証明 対偶を示す．$L(X,\Pi)$ の元として $f\neq g$ とすると，

$$A = \{x\in X \mid |f(x)-g(x)|\geq \epsilon\}$$

が Π-零集合でないような $\epsilon>0$ が存在する．さらに，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$A_n = \{x\in A \mid |f(x)|\leq n \text{ かつ } |g(x)|\leq n\}$$

と置くと，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は増大列で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ だから，$\Pi(A_n)$ は弱作用素位相に関して $\Pi(A)\neq 0$ に収束する．したがって，A_n が Π-零集合でないような $n\in\mathbb{N}$ がとれる．このような ϵ, n をとり，$\xi\in \operatorname{Im}\Pi(A_n)\setminus\{0\}$ を 1 つ固定する．すると，$\Pi_{\xi,\xi} = \Pi_{\Pi(A_n)\xi,\xi} = \Pi_{\xi,\xi}(-\cap A_n)$（命題 2.6 (3)）より $\Pi_{\xi,\xi}$ は A_n の外では消えるから，

$$\begin{aligned}\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} &= \int_{A_n} |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \leq n^2\|\xi\|^2 < \infty, \\ \int_X |g|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} &= \int_{A_n} |g|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \leq n^2\|\xi\|^2 < \infty\end{aligned}$$

であり，したがって命題 5.4 より $\xi\in\operatorname{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)\cap\operatorname{Dom}\left(\int_X g\,d\Pi\right)$ である．さらに，定理 5.7 (1), (2) と命題 5.3 より

$$\begin{aligned}\left\|\left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi - \left(\int_X g\,d\Pi\right)\xi\right\|^2 &= \left\|\left(\int_X (f-g)\,d\Pi\right)\xi\right\|^2 \\ &= \int_X |f-g|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \\ &= \int_{A_n} |f-g|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \\ &\geq \epsilon^2\|\xi\|^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

だから，$\left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \neq \left(\int_X g\,d\Pi\right)\xi$ である．よって，$\int_X f\,d\Pi$ と $\int_X g\,d\Pi$ は定義域の共通部分で一致しない．これで，対偶が示された． □

系 5.14 X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とし，$f \in L(X, \Pi)$ とする．

(1) $\int_X f\,d\Pi$ が自己随伴であるための必要十分条件は，f が $L(X, \Pi)$ の元として自己随伴である（あるいは同値だが，Π-ほとんどいたるところで f が実数値である）ことである．

(2) $\int_X f\,d\Pi$ がユニタリであるための必要十分条件は，f が $L(X, \Pi)$ の元としてユニタリである（あるいは同値だが，Π-ほとんどいたるところで $|f| = 1$ である）ことである．

証明 (1) 定理 5.7 (5) と命題 5.13 からただちに従う．

(2) 定義よりユニタリ作用素は全域で定義されているから，命題 5.12 より f が Π-本質的有界な場合だけを考えればよく，主張は定理 2.18 に帰着される． □

5.3 射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（有界とは限らない場合）

有界可測関数の射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.22）の一般化として，次が成り立つ．

定理 5.15（射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理） X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．また，f_n, f, $g \in L(X, \Pi)$（$n \in \mathbb{N}$）とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Π-概収束し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して Π-ほとんどいたるところで $|f_n| \leq |g|$ であるとする．このとき，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\left(\int_X g\,d\Pi\right)$ に対して，ξ は $\mathrm{Dom}\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)$ に属し，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\,d\Pi\right)\xi = \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi$$

が成り立つ．

証明 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して Π-ほとんどいたるところで $|f_n| \leq |g|$ であり，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Π-概収束するから，Π-ほとんどいたるところで $|f| \leq |g|$ である．よって，命題 5.4 より，$\mathrm{Dom}\left(\int_X g\,d\Pi\right)$ は $\mathrm{Dom}\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)$ に含まれる．

$\xi \in \mathrm{Dom}\left(\int_X g\,d\Pi\right)$ とする．前段の結果より，ξ は $\mathrm{Dom}\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right)$ に属する．任意の $\eta \in E$ に対して，定理 5.7 (1) と系 2.9 より

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \left(\int_X f_n\,d\Pi\right)\xi - \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \,\middle|\, \eta \right\rangle\right| &= \left|\left\langle \left(\int_X (f_n - f)\,d\Pi\right)\xi \,\middle|\, \eta \right\rangle\right| \\
&= \left|\int_X (f_n - f)\,d\Pi_{\xi,\eta}\right| \\
&\leq \left(\int_X |f_n - f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|
\end{aligned}$$

だから，

$$\left\|\left(\int_X f_n\,d\Pi\right)\xi - \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi\right\| \leq \left(\int_X |f_n - f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2}$$

である．ここで，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Π-概収束するから，特に $\Pi_{\xi,\xi}$-概収束する．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

て $\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで（したがって特に $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$-ほとんどいたるところで）$|f_n - f|^2 \leq 4|g|^2$ であり，$\xi \in \operatorname{Dom}\bigl(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\bigr)$ と命題 5.4 より $|g|^2$ は $\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$-可積分である．したがって，Lebesgue の収束定理より，上式の右辺は 0 に収束するから，

$$\lim_{n\to\infty}\biggl(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}\biggr)\xi = \biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\biggr)\xi$$

である． □

命題 2.23 の一般化として，次が成り立つ．

命題 5.16 X を可測空間，E, F を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}_E$, $\mathit{\Pi}_F$ をそれぞれ X 上の E-射影値測度，F-射影値測度とし，$S \in \mathscr{L}(E)$ とする．次の 2 条件は同値である．

(a) 任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S$ である．
(b) 任意の可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ に対して，$S\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\bigr) \subseteq \bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_F\bigr)S$ である．

証明 (b) $\Longrightarrow$ (a) 可測集合 $A \subseteq X$ に対して $\mathit{\Pi}_E(A) = \int_X \chi_A\,d\mathit{\Pi}_E$，$\mathit{\Pi}_F(A) = \int_X \chi_A\,d\mathit{\Pi}_F$ であることから明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b) (a) が成り立つとして，可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ を任意にとる．まず，

$$S\biggl(\operatorname{Dom}\biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\biggr)\biggr) \subseteq \operatorname{Dom}\biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_F\biggr) \tag{$*$}$$

を示す．$\xi \in E$ とすると，仮定より

$$\begin{aligned}(\mathit{\Pi}_F)_{S\xi,S\xi} &= \|\mathit{\Pi}_F(-)S\xi\|^2\\ &= \|S\mathit{\Pi}_E(-)\xi\|^2\\ &\leq \|S\|^2\|\mathit{\Pi}_E(-)\xi\|^2\\ &= \|S\|^2(\mathit{\Pi}_E)_{\xi,\xi}\end{aligned}$$

である．したがって，$\int_X |f|^2\,d(\mathit{\Pi}_E)_{\xi,\xi} < \infty$ ならば $\int_X |f|^2\,d(\mathit{\Pi}_F)_{S\xi,S\xi} < \infty$ である．命題 5.4 より，これは $(*)$ を意味する．

次に，

$$S\biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\biggr) \subseteq \biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_F\biggr)S$$

を示す．f に各点収束する可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n| \leq |f|$ であるようにとる．仮定より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S\biggl(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_E\biggr) = \biggl(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_F\biggr)S \tag{$**$}$$

である．$\xi \in \operatorname{Dom}\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\bigr)$ を任意にとる．射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 5.15）より，ξ は $\operatorname{Dom}\bigl(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_E\bigr)$（$n \in \mathbb{N}$）に属し，

$$\lim_{n\to\infty}\biggl(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_E\biggr)\xi = \biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\biggr)\xi$$

である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} S\biggl(\int_X f_n\,d\mathit{\Pi}_E\biggr)\xi = S\biggl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_E\biggr)\xi \tag{$*{*}*$}$$

である．また，(*) より $S\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi_F\bigr)$ だから，射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 5.15）より，$S\xi$ は $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f_n\,d\varPi_F\bigr)$（$n \in \mathbb{N}$）に属し，

$$\lim_{n\to\infty}\biggl(\int_X f_n\,d\varPi_F\biggr)S\xi = \biggl(\int_X f\,d\varPi_F\biggr)S\xi \tag{****}$$

である．以上 (**), (***), (****) より，

$$S\biggl(\int_X f\,d\varPi_E\biggr)\xi = \biggl(\int_X f\,d\varPi_F\biggr)S\xi$$

が成り立つ．これで，主張が示された． □

5.4 可測関数の射影値測度に関する積分と作用素の閉包

命題 5.17 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X,\varPi)$ に対して，$D_f = \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ と書くことにする．任意の f，g_0，...，$g_{k-1} \in L(X,\varPi)$ に対して，$D = D_f \cap D_{g_0} \cap \cdots \cap D_{g_{k-1}}$ と置くと，$\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)\big|_D$ は可閉であり，その閉包は

$$\overline{\biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)\bigg|_D} = \biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)$$

である．

証明 $\xi \in D_f$ を任意にとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n = \{x \in X \mid \text{任意の } 0 \le i < k \text{ に対して } |g_i(x)| \le n\}$$

と置くと，命題 2.6 (3) より $\varPi_{\varPi(A_n)\xi,\varPi(A_n)\xi} = \varPi(- \cap A_n)$ だから，任意の $0 \le i < k$ に対して

$$\begin{aligned}\int_X |g_i|^2\,d\varPi_{\varPi(A_n)\xi,\varPi(A_n)\xi} &= \int_{A_n} |g_i|^2\,d\varPi_{\xi,\xi}\\ &\le n^2\varPi_{\xi,\xi}(A_n)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

すなわち $\xi \in D_{g_i}$ である（命題 5.4）．さらに，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は増大列で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ だから，$n \to \infty$ のとき強作用素位相に関して $\varPi(A_n) \to I$ である（注意 2.2）．したがって，$\varPi(A_n)\xi \to \xi$ である．また，$\varPi(A_n) = \int_X \chi_{A_n}\,d\varPi$ と定理 5.7 (4) より

$$\biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)\varPi(A_n) \subseteq \varPi(A_n)\biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)$$

だから，$\varPi(A_n)\xi \in D_f$ かつ

$$\biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)\varPi(A_n)\xi = \varPi(A_n)\biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)\xi \to \biggl(\int_X f\,d\varPi\biggr)\xi$$

である．以上より，$\mathrm{gr}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)\big|_D$ は $\mathrm{gr}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ において稠密である．$\int_X f\,d\varPi$ は閉作用素だから（系 5.9），これより，$\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)\big|_D$ は可閉でその閉包は $\int_X f\,d\varPi$ に等しい． □

系 5.18　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．

(1) $f,\, g \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，線型作用素の和 $\int_X f\, d\mathit{\Pi} + \int_X g\, d\mathit{\Pi}$ は可閉であり，その閉包は

$$\overline{\int_X f\, d\mathit{\Pi} + \int_X g\, d\mathit{\Pi}} = \int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}$$

である．

(2) $f,\, g \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，線型作用素の合成 $\bigl(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\bigr)\bigl(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\bigr)$ は可閉であり，その閉包は

$$\overline{\biggl(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\biggr)\biggl(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\biggr)} = \int_X fg\, d\mathit{\Pi}$$

である．

証明　$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$D_f = \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\bigr)$ と書くことにする．

(1)　定理 5.7 (1) と命題 5.17 より，$\int_X f\, d\mathit{\Pi} + \int_X g\, d\mathit{\Pi}$ は可閉かつ

$$\overline{\int_X f\, d\mathit{\Pi} + \int_X g\, d\mathit{\Pi}} = \overline{\biggl(\int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}\biggr)\bigg|_{D_f \cap D_{f+g}}} = \int_X (f+g)\, d\mathit{\Pi}$$

である．

(2)　定理 5.7 (4) と命題 5.17 より，$\bigl(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\bigr)\bigl(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\bigr)$ は可閉かつ

$$\overline{\biggl(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\biggr)\biggl(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\biggr)} = \overline{\biggl(\int_X fg\, d\mathit{\Pi}\biggr)\bigg|_{D_g \cap D_{fg}}} = \int_X fg\, d\mathit{\Pi}$$

である．　□

5.5　射影値測度の Hilbert 直和

定義 5.19（射影値測度の Hilbert 直和）　X を可測空間，$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を X 上の E_i-射影値測度とする．可測集合 $A \subseteq X$ に対して，E における直交射影 $\mathit{\Pi}(A)$ を

$$\mathrm{Im}\, \mathit{\Pi}(A) = \overline{\sum_{i\in I} \mathrm{Im}\, \mathit{\Pi}_i(A)}$$

によって定めると，容易にわかるように，$\mathit{\Pi}$ は X 上の E-射影値測度である．この $\mathit{\Pi}$ を，$\{\mathit{\Pi}_i\}_{i\in I}$ の Hilbert 直和といい，$\mathit{\Pi} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathit{\Pi}_i$ と書く．

命題 5.20　X を可測空間，$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を X 上の E_i-射影値測度とし，$\mathit{\Pi} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathit{\Pi}_i$ と置く．このとき，任意の可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ に対して

$$\int_X f\, d\mathit{\Pi} = \widehat{\bigoplus_{i\in I}}\biggl(\int_X f\, d\mathit{\Pi}_i\biggr)$$

が成り立つ（右辺は正規作用素の族 $\bigl\{\int_X f\, d\mathit{\Pi}_i\bigr\}_{i\in I}$ の Hilbert 直和を表す）．

証明 $i \in I$ を固定して，自然に $E_i \subseteq E$ とみなす．$\xi_i \in E_i$ と $\eta = (\eta_j)_{j\in I} \in E$ に対して，

$$\varPi_{\xi_i,\eta} = \langle \varPi(-)\xi_i|\eta\rangle_E = \sum_{j\in I}\langle \varPi_j(-)\xi_i|\eta_j\rangle_{E_j} = \langle \varPi_i(-)\xi_i|\eta_i\rangle_{E_i} = (\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i}$$

である．したがって，$\xi_i \in E$ について，任意の $\eta_i \in E_i$ に対して f が $\varPi_{\xi_i,\eta_i}$-可積分ならば，任意の $\eta \in E$ に対して f は $\varPi_{\xi_i,\eta}$-可積分である．すなわち，$\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi_i\bigr) \subseteq \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ である．さらに，$\xi_i \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi_i\bigr)$ とすると，任意の $\eta = (\eta_j)_{j\in I} \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi_i\middle|\eta\right\rangle_E &= \int_X f\,d\varPi_{\xi_i,\eta}\\ &= \int_X f\,d(\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i}\\ &= \left\langle\left(\int_X f\,d\varPi_i\right)\xi_i\middle|\eta_i\right\rangle_{E_i}\\ &= \left\langle\left(\int_X f\,d\varPi_i\right)\xi_i\middle|\eta\right\rangle_E\end{aligned}$$

だから，

$$\left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi_i = \left(\int_X f\,d\varPi_i\right)\xi_i$$

である．よって，

$$\int_X f\,d\varPi_i \subseteq \int_X f\,d\varPi$$

である．これが任意の $i \in I$ に対して成り立つから，命題 4.54 と $\int_X f\,d\varPi$ が閉であること（系 5.9）より

$$\mathrm{gr}\left(\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\left(\int_X f\,d\varPi_i\right)\right) = \overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}\left(\int_X f\,d\varPi_i\right)} \subseteq \mathrm{gr}\left(\int_X f\,d\varPi\right),$$

すなわち

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\left(\int_X f\,d\varPi_i\right) \subseteq \int_X f\,d\varPi$$

である．系 5.9 と命題 4.56 より上式の両辺はともに正規だから，正規作用素の極大性（系 4.47）より，上式では等号が成り立つ．これで，主張が示された． □

次に，局所コンパクト分離空間上の射影値 Borel 測度の Hilbert 直和を考える．

命題 5.21 X を局所コンパクト分離空間，$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して $\varPi_i$ を X 上の E_i-射影値 Borel 測度とし，$\varPi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\varPi_i$ と置く．次の 2 条件は同値である．

(a) $\varPi$ は正則である．
(b) 任意の $i \in I$ に対して，$\varPi_i$ は正則である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $i \in I$ を固定して $E_i \subseteq E$ とみなすと，任意の $\xi_i, \eta_i \in E_i$ に対して $(\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i} = \varPi_{\xi_i,\eta_i}$ だから，$\varPi$ が正則ならば $\varPi_i$ も正則である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) (b) が成り立つとして，E の 2 元 $\xi = (\xi_i)_{i\in I}$，$\eta = (\eta_i)_{i\in I}$ を任意にとる．すると，任意の Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\varPi_{\xi,\eta}(A) = \langle \varPi(A)\xi|\eta\rangle_E = \sum_{i\in I}\langle \varPi_i(A)\xi_i|\eta_i\rangle_{E_i} = \sum_{i\in I}(\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i}(A)$$

である．一方で，全変動ノルム $\|(\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i}\|$ の和は，系 2.8 と Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\|(\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i}\| &\le \sum_{i\in I}\|\xi_i\|_{E_i}\|\eta_i\|_{E_i}\\ &\le \left(\sum_{i\in I}\|\xi_i\|_{E_i}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}\|\eta_i\|_{E_i}^2\right)^{1/2}\\ &= \|\xi\|_E\|\eta\|_E\\ &< \infty\end{aligned}$$

と評価できる．よって，X 上の有限複素 Borel 測度全体が全変動ノルムに関してなす Banach 空間 $\mathscr{M}^1(X)$ において $\{(\varPi_i)_{\xi_i,\eta_i}\}_{i\in I}$ は絶対総和可能であり，その総和は $\varPi_{\xi,\eta}$ に等しい．特に，$\varPi_{\xi,\eta}\in\mathscr{M}^1(X)$ だから，$\varPi_{\xi,\eta}$ は正則である．よって，$\varPi$ は正則である． □

命題 5.22　X を局所コンパクト分離空間，$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}E_i$ と置く．また，各 $i\in I$ に対して $\varPi_i$ を X 上の正則な E_i-射影値 Borel 測度とし，$\varPi=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\varPi_i$ と置く．このとき，（命題 5.21 より $\varPi$ も正則であり，）

$$\operatorname{supp}\varPi=\overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{supp}\varPi_i}$$

である．

証明　射影値測度の Hilbert 直和の定義より，Borel 集合 $A\subseteq X$ に対して，$\varPi(A)=0$ は任意の $i\in I$ に対して $\varPi_i(A)=0$ であることと同値である．特に，開集合 $U\subseteq X$ に対して，$\varPi(U)=0$ は任意の $i\in I$ に対して $U\cap\operatorname{supp}\varPi_i=\emptyset$ であることと同値である．よって，$\varPi(U)=0$ を満たす最大の開集合 $U\subseteq X$ は $\mathbb{C}\setminus\overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{supp}\varPi_i}$ だから，$\operatorname{supp}\varPi=\overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{supp}\varPi_i}$ である． □

5.6 射影値測度の簡約

定義 5.23（射影値測度を簡約する閉部分線型空間）　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．また，M を E の閉部分線型空間とし，M の上への直交射影を P と書く．任意の可測集合 $A\subseteq X$ に対して $P\varPi(A)=\varPi(A)P$ であるとき，M は $\varPi$ を**簡約する**[*7] という．

定義 5.23 の状況で，$M^\perp$ の上への直交射影は $I-P$ だから，M が $\varPi$ を簡約するならば，$M^\perp$ も $\varPi$ を簡約する．

定義 5.23 の状況で，M が $\varPi$ を簡約するならば，可測集合 $A\subseteq X$ に対して $\varPi_0(A)\in\mathscr{L}(M)$ を

$$\varPi_0(A)\xi=P\varPi(A)\xi=\varPi(A)P\xi\qquad(\xi\in M)$$

と定めると，$\varPi_0$ は X 上の M-射影値測度である．これを踏まえて，次のように定義する．

定義 5.24（射影値測度の簡約）　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\varPi$ を X 上の E-射影値測度とする．また，E の閉部分線型空間 M は $\varPi$ を簡約するとする．このとき，上のように定まる X 上の M-射影値測度 $\varPi_0$ を，$\varPi$ の M による**簡約**[*8] という．

[*7] 本稿だけの用語である．
[*8] 本稿だけの用語である．

命題 5.25 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．また，E の閉部分線型空間 M は $\mathit{\Pi}$ を簡約するとし，$\mathit{\Pi}$ の M による簡約を $\mathit{\Pi}_0$ と書く．このとき，任意の可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ に対して，M は $\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ を簡約し，$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ の M による簡約は $\int_X f\,d\mathit{\Pi}_0$ に等しい．

証明 すでに注意したように，このとき，$M^\perp$ も $\mathit{\Pi}$ を簡約する．$\mathit{\Pi}$ の $M^\perp$ による簡約を $\mathit{\Pi}_1$ と書くと，$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}_0 \oplus \mathit{\Pi}_1$ だから，命題 5.20 より，任意の可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ に対して

$$\int_X f\,d\mathit{\Pi} = \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_0\right) \oplus \left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}_0\right)$$

である．よって，M は $\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ を簡約し，$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ の M による簡約は $\int_X f\,d\mathit{\Pi}_0$ に等しい． □

系 5.26 X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値 Borel 測度とする．また，$A \subseteq X$ を可測集合とし，X 上の $\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$-射影値測度 $\mathit{\Pi}_0$ を

$$\operatorname{Im}\mathit{\Pi}_0(B) = \operatorname{Im}\mathit{\Pi}(B \cap A) \qquad (\text{可測集合 } B \subseteq X)$$

によって定める（これが射影値測度を定めることは容易にわかる）．このとき，任意の可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ に対して，$\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$ は $\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ を簡約し，$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ の $\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$ による簡約は $\int_X f\,d\mathit{\Pi}_0$ に等しい．

証明 任意の可測集合 $B \subseteq X$ に対して $\mathit{\Pi}(A)\mathit{\Pi}(B) = \mathit{\Pi}(A \cap B) = \mathit{\Pi}(B)\mathit{\Pi}(A)$ だから（命題 2.4 (4)），$\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$ は $\mathit{\Pi}$ を簡約し，$\mathit{\Pi}$ の $\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$ による簡約は $\mathit{\Pi}_0$ に等しい．よって，主張は命題 5.25 から従う． □

6 正規作用素のスペクトル分解

前節から引き続いて，可測空間 X とその上の射影値測度 $\mathit{\Pi}$ に対して，X 上の複素数値可測関数の「$\mathit{\Pi}$-零集合上での違いを無視する同値関係」による同値類の全体がなす単位的対合代数を，$L(X, \mathit{\Pi})$ と書く（この空間にノルムは考えない）．$L(X, \mathit{\Pi})$ は，$L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ を部分単位的対合代数として含む．

6.1 正規作用素のスペクトル分解

E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．すると，命題 4.42 で示したように，$I + T^*T$ は $\operatorname{Dom} T^*T$ から E への全単射であり，$B = (I + T^*T)^{-1}$ は $\|B\| \leq 1$ を満たす E 上の連続正作用素であり，$C = T(I + T^*T)^{-1}$ は $\|C\| \leq 1$ を満たす E から F への連続線型作用素である．さらに，$E = F$ かつ T が E 上の正規作用素である場合には，次が成り立つ．

補題 6.1 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とする．$B = (I + T^*T)^{-1}$，$C = T(I + T^*T)^{-1}$ と置くと，$BT \subseteq C$ および $BC = CB$ が成り立つ．

証明 T は正規だから $T(I + T^*T) = (I + T^*T)T$ であり，したがって

$$\begin{aligned}
BT &= (I + T^*T)^{-1}T \\
&= (I + T^*T)^{-1}T(I + T^*T)(I + T^*T)^{-1} \\
&= (I + T^*T)^{-1}(I + T^*T)T(I + T^*T)^{-1} \\
&\subseteq T(I + T^*T)^{-1} \\
&= C
\end{aligned}$$

となる．また，これより

$$BC = BTB \subseteq CB$$

を得るが，BC は全域で定義されているから，$BC = CB$ が成り立つ． □

定理 6.2（正規作用素のスペクトル分解定理） E を Hilbert 空間とする．E 上の正規作用素 T に対して，$\mathbb{C}$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ であって，

$$T = \int_{\mathbb{C}} z \, d\varPi$$

を満たすものが一意に存在する．さらに，この $\varPi$ は，$\operatorname{supp} \varPi = \operatorname{Sp}(T)$ を満たす．

証明 T を E 上の正規作用素とする．$\mathbb{C}$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ が $T = \int_{\mathbb{C}} z \, d\varPi$ を満たすとすると，命題 5.11 より

$$\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{ess\,ran}_{\varPi} z = \operatorname{supp} \varPi$$

である．あとは，条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ が一意に存在することを示せばよい．まず存在を示し，次に一意性を示す．

■存在 $B = (I + T^*T)^{-1}$，$C = T(I + T^*T)^{-1}$ と置く．B は E 上の連続正作用素であり，$\|B\| \leq 1$ を満たす（命題 4.42 (2)）．連続正規作用素に対するスペクトル分解定理（定理 3.7）を用いて B のスペクトル測度 $\varPi_B$ をとると，$\operatorname{supp} \varPi_B = \operatorname{Sp}(B) \subseteq [0, 1]$ であり，また B が単射であることより $\varPi_B(\{0\}) = 0$ だから（命題 2.16），$\varPi_B((0, 1]) = I$ である．単調減少実数列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって $t_0 = 1$ かつ $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ を満たすものを 1 つ固定し，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_n = \varPi_B((t_{n+1}, t_n]), \qquad E_n = \operatorname{Im} P_n$$

と置く．弱作用素位相に関して

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varPi_B((t_{n+1}, t_n]) = \varPi_B((0, 1]) = I$$

であることと命題 2.4 (3) より，$\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は E の閉部分線型空間の完全直交族である．したがって，

$$E = \widehat{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}} E_n$$

とみなせる．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(0, 1]$ 上の有界 Borel 可測関数 f_n を

$$f_n(t) = \frac{\chi_{(t_{n+1}, t_n]}(t)}{t} \qquad (t \in (0, 1])$$

と定めると，$\chi_{(t_{n+1}, t_n]} = z f_n$ だから，$P_n = B f_n(B) = f_n(B) B$ である（定理 3.14）．$P_n = B f_n(B)$ より

$$TP_n = TBf_n(B) = Cf_n(B) \in \mathscr{L}(E)$$

である．また，$P_n = f_n(B)B$ と $BT \subseteq C$（補題 6.1）より

$$P_n T = f_n(B)BT \subseteq f_n(B)C$$

である．さらに，補題 6.1 より $BC = CB$ だから，C は B の任意の有界 Borel 可測関数算と可換である（定理 3.19）．特に，

$$Cf_n(B) = f_n(B)C$$

である．これら 3 式より，$P_nT \subseteq TP_n \in \mathscr{L}(E)$ が成り立つ．したがって，$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は T を簡約する．そこで，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して T の E_n による簡約を T_n と書くと，T が（正規だから特に）閉であることと命題 4.63 より

$$T = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} T_n$$

とみなせる．$TP_n \in \mathscr{L}(E)$ より $T_n \in \mathscr{L}(E_n)$ であり，T が正規であることより T_n も正規だから（命題 4.56 (2)），T_n は E_n 上の連続正規作用素である．

連続正規作用素に対するスペクトル分解定理（定理 3.7）より，各 T_n に対してそのスペクトル測度 $\mathit{\Pi}_n$ がとれる．$\mathit{\Pi}_n$ は $\mathbb{C}$ 上の E_n-射影値測度であり，

$$T_n = \int_{\mathbb{C}} z\, d\mathit{\Pi}_n$$

を満たす．そこで，射影値測度の Hilbert 直和 $\mathit{\Pi} = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} \mathit{\Pi}_n$ を考えると，$\mathit{\Pi}$ は $\mathbb{C}$ 上の E-射影値測度であり，命題 5.20 より

$$T = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} T_n = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} \left(\int_{\mathbb{C}} z\, d\mathit{\Pi}_n \right) = \int_{\mathbb{C}} z\, d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．これで，存在が示された．

■一意性　3 段に分けて示す．まず，T が自己随伴である場合を考える．このとき $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ だから（定理 4.40），証明の最初に述べたことより，$\mathbb{R}$ 上の E-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ であって

$$T = \int_{\mathbb{R}} z\, d\mathit{\Pi} \tag{$*$}$$

を満たすものが一意であることを示せばよい．上式が成り立つとする．関数 $1/(z+i)$ が $\mathbb{R}$ 上有界であることに注意すると，上式と定理 5.7 (1), (4), (6) より

$$(T - iI)(T + iI)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{z - i}{z + i}\, d\mathit{\Pi}$$

を得る．$\mathbb{R}$ 上の関数 $(z - i)/(z + i)$ の値域は $\mathbb{U}$ に含まれるから，$(T - iI)(T + iI)^{-1}$ はユニタリ作用素である（系 5.14 (2)）[*9]．また，$(z - i)/(z + i)$ は同相写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U} \setminus \{1\}$ を与えるが，この ϕ による $\mathit{\Pi}$ の像 $\phi_*\mathit{\Pi}$ を考えると，上式と命題 5.6 より

$$U = \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\, d(\phi_*\mathit{\Pi})$$

が成り立つ．すなわち，$\phi_*\mathit{\Pi}$ はユニタリ作用素 $(T - iI)(T + iI)^{-1}$ のスペクトル測度である．よって，連続正規作用素のスペクトル測度の一意性（定理 3.7）より，$\phi_*\mathit{\Pi}$ は一意に定まる．$\mathit{\Pi} = \phi_*^{-1}\phi_*\mathit{\Pi}$ だから，$\mathit{\Pi}$ も一意に定まる．これで，自己随伴作用素 T に対する一意性が示された．

[*9] $(T - iI)(T + iI)^{-1}$ を T の Cayley 変換という．詳しくは，付録 A を参照のこと．

次に，$\mathbb{C}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π, Π' と正値 Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi = \int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi' \quad \text{ならば} \quad \int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\, d\Pi = \int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\, d\Pi' \tag{$*$}$$

であることを示す．$T = \int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi = \int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi'$ と置くと，f は実数値だから T は E 上の自己随伴作用素であり（系 5.14 (1)），また命題 5.6 より

$$T = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} z\, d(f_*\Pi) = \int_{\mathbb{C}} z\, d(f_*\Pi')$$

である．したがって，前段の結果より $f_*\Pi = f_*\Pi'$ が成り立つ．この両辺の関数 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$; $t \mapsto t^{1/2}$ による像をとれば，$f_*^{1/2}\Pi = f_*^{1/2}\Pi'$ を得る．これと命題 5.6 より，

$$\int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\, d\Pi = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} z\, d(f_*^{1/2}\Pi) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} z\, d(f_*^{1/2}\Pi') = \int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\, d\Pi'$$

である．これで，($*$) が成り立つことが示された．

最後に，正規作用素 T に対する一意性を示す．$\mathbb{R}$ 上の E-射影値測度 Π が

$$T = \int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi$$

を満たすとする．すると，系 5.9 より

$$T^*T = \int_{\mathbb{C}} |z|^2\, d\Pi$$

である．ここで，線型作用素 $|T|$ を

$$|T| = \int_{\mathbb{C}} |z|\, d\Pi$$

と定めると，前段の結果より，これは Π のとり方によらない[*10]．関数 $1/(1+|z|)$ が $\mathbb{C}$ 上有界であることに注意すると，上式と定理 5.7 (1), (4), (6) より

$$T(I+|T|)^{-1} = \int_{\mathbb{C}} \frac{z}{1+|z|}\, d\Pi$$

を得る．関数 $z/(1+|z|)$ は $\mathbb{C}$ 上有界だから，$T(I+|T|)^{-1}$ は連続正規作用素である．また，$z/(1+|z|)$ は同相写像 $\psi\colon \mathbb{C} \to \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ を与えるが，この ψ による Π の像 $\psi_*\Pi$ を考えると，上式と命題 5.6 より

$$T(I+|T|)^{-1} = \int_{\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|\leq 1\}} z\, d(\psi_*\Pi)$$

が成り立つ．すなわち，$\psi_*\Pi$ は連続正規作用素 $T(I+|T|)^{-1}$ のスペクトル測度である．よって，連続正規作用素のスペクトル測度の一意性（定理 3.7）より，$\psi_*\Pi$ は一意に定まる．$\Pi = \psi_*^{-1}\psi_*\Pi$ だから，Π も一意に定まる．これで，正規作用素 T に対する一意性が示された．　□

定義 6.3（正規作用素のスペクトル測度）　E を Hilbert 空間とする．E 上の正規作用素 T に対して，正規作用素のスペクトル分解定理（定理 6.2）によって一意に定まる $\mathbb{C}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π を，T の**スペクトル測度**という．

[*10] ここで定義した $|T|$ は，絶対値をとる関数 $|z|$ に T を代入した Borel 可測関数算（定義 6.6）の結果に一致する．Borel 可測関数算はいままさに証明している正規作用素のスペクトル分解定理（定理 6.2）に立脚して定義されるから，ここでは Borel 可測関数算の言葉を使うことができず，回りくどい言い方になっている．

連続正規作用素 T のスペクトル測度 Π は $\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，Π は $\mathrm{Sp}(T)$ 上の射影値 Borel 測度ともみなせる．

連続正規作用素の場合（命題 3.9，系 3.10）と同様に，スペクトル測度は次の性質をもつ．ほとんど重複になるが，証明も付けておく．

命題 6.4 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，Π を T のスペクトル測度とする．

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\operatorname{Im} \Pi(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ である．特に，$\operatorname{Im} \Pi(\{0\}) = \operatorname{Ker} T$ である．
(2) $\operatorname{Im} \Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \overline{\operatorname{Im} T}$ である．

証明 (1) 命題 5.5 より，

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \operatorname{Ker}\left(\int_X (\lambda - z)\, d\Pi\right) = \operatorname{Im} \Pi(\{\lambda\})$$

である．

(2) 系 5.10 より，

$$\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im}\left(\int_X z\, d\Pi\right)} = \operatorname{Im} \Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

である． □

系 6.5 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とする．$\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点は，T の固有値である．

証明 T のスペクトル測度を Π とする．λ が $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点ならば，$\{\lambda\}$ は $\mathrm{Sp}(T)$ の開集合だから，$\operatorname{supp} \Pi = \mathrm{Sp}(T)$ より $\Pi(\{\lambda\}) \neq 0$ である．$\Pi(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ だから（命題 6.4 (1)），これは λ が T の固有値であることを意味する． □

6.2 Borel 可測関数算

定義 6.6（Borel 可測関数算） E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，Π を T のスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ に対して，E 上の正規作用素 $f(T)$ を

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi$$

と定める．

T のスペクトル測度 Π は $\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，$L(\mathbb{C}, \Pi)$ は自然に $L(\mathrm{Sp}(T), \Pi)$ と同一視される．よって，$f \in L(\mathrm{Sp}(T), \Pi)$ に対しても $f(T)$ が矛盾なく定まる．

命題 6.7 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，Π を T のスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\operatorname{Dom} f(T) = \left\{\xi \in E \;\middle|\; \int_{\mathbb{C}} |f|^2\, d\Pi_{\xi,\xi} < \infty\right\}$ である．
(2) $f(T)$ が全域で定義されているための必要十分条件は，f が Π-本質的有界であることである．さらに，この条件の下で，$f(T) \in \mathscr{L}(E)$ かつ $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ（$\|-\|$ は $L^\infty(X, \Pi)$ のノルムを表す）．特に，f が $\mathrm{Sp}(T)$ 上の有界連続関数ならば，$\|f(T)\| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} |f(\lambda)|$ である．

証明　(1) は命題 5.4 の，(2) のいちばん最後の主張以外は命題 5.12 の特別な場合である．$\operatorname{supp}\mathit{\Pi} = \mathrm{Sp}(T)$（定理 6.2）より $\mathrm{Sp}(T)$ 上の有界連続関数 f に対して $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(T)}|f(\lambda)|$ だから，最後の主張も従う．　□

系 6.8　Hilbert 空間 E 上の正規作用素 T が全域で定義されているための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}(T)$ が有界であることである．さらに，この条件の下で，$T \in \mathscr{L}(E)$ かつ $\|T\| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(T)}|\lambda|$ が成り立つ．

証明　命題 6.7 (2) で $f = z$ と置けば従う．[*11]　□

連続正規作用素 T の有界 Borel 可測関数算 $f \mapsto f(T)$ は，Lebesgue の収束条件を満たす単位的 C* 代数の埋め込みだった（定理 3.14）．この性質の一般化として，次の定理 6.9，命題 6.10，命題 6.11，命題 6.12，命題 6.13 が成り立つ．

定理 6.9　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$D_f = \operatorname{Dom} f(T)$ と書くことにする．

(1) $f,\ g \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$f(T) + g(T) = (f+g)(T)|_{D_f\cap D_g} = (f+g)(T)|_{D_f\cap D_{f+g}} = (f+g)(T)|_{D_g\cap D_{f+g}}$$

である．特に，f または g が $\mathit{\Pi}$-本質的有界ならば，$f(T) + g(T) = (f+g)(T)$ である．

(2) $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ と $f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$\lambda(f(T)) = (\lambda f)(T)$ である．

(3) $1 \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ について，$1(T) = I$ である．

(4) $f,\ g \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$f(T)g(T) = (fg)(T)|_{D_g\cap D_{fg}}$ である．特に，g が $\mathit{\Pi}$-本質的有界ならば，$f(T)g(T) = (fg)(T)$ である．

(5) $f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$f(T)^* = \overline{f}(T)$ である．

(6) $f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ と $m,\ n \in \mathbb{N}$ に対して，$(f^m\overline{f}^n)(T)$ は m 個の $f(T)$ と n 個の $f(T)^*$ を任意の順序で合成したもの（$m = n = 0$ の場合は I とする）に等しい．特に，$f(T)^*f(T) = f(T)f(T)^* = |f|^2(T)$ である．

(7) $f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$f(T)$ が単射であることと f が $L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ において可逆であることとは同値であり，これらの条件の下で $f(T)^{-1} = (1/f)(T)$ である（$1/f$ は f の $L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ における乗法逆元を表す）．

証明　(1), (2), (3), (4), (5), (7) は定理 5.7 の，(6) は系 5.8 と系 5.9 の特別な場合である．　□

命題 6.10　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．

(1) $f,\ g \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，線型作用素の和 $f(T) + g(T)$ は可閉であり，その閉包は $\overline{f(T) + g(T)} = (f+g)(T)$ である．

(2) $f,\ g \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，線型作用素の合成 $f(T)g(T)$ は可閉であり，その閉包は $\overline{f(T)g(T)} = (fg)(T)$ である．

証明　系 5.18 の特別な場合である．　□

命題 6.11（スペクトル写像定理）　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測

[*11] ノルムに関する主張は，C* 代数の一般論 [10, 定理 5.11] からも従う．

度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ に対して，$\mathrm{Sp}(f(T)) = \operatorname{ess\,ran}_{\Pi} f$ が成り立つ．特に，f が $\mathrm{Sp}(T)$ 上の連続関数ならば，$\mathrm{Sp}(f(T)) = \overline{f(\mathrm{Sp}(T))}$ である．

証明 前半は，命題 5.11 の特別な場合である．後半は，前半と $\mathrm{Sp}(T)$ 上の連続関数 f に対して $\operatorname{ess\,ran}_{\Pi} f = \overline{f(\mathrm{Sp}(T))}$ であることから従う． □

命題 6.12 E を Hilbert 空間, T を E 上の正規作用素とし, Π を T のスペクトル測度とする．$f, g \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ に対して，$f(T)$ と $g(T)$ が定義域の共通部分で一致するならば，$L(\mathbb{C}, \Pi)$ の元として $f = g$ である．

証明 命題 5.13 の特別な場合である． □

命題 6.13 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，Π を T のスペクトル測度とする．また，$f \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ とする．

(1) $f(T)$ が自己随伴であるための必要十分条件は，f が $L(\mathbb{C}, \Pi)$ の元として自己随伴である（あるいは同値だが，Π-ほとんどいたるところで f が実数値である）ことである．特に，T が自己随伴であるための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ であることである．
(2) $f(T)$ がユニタリであるための必要十分条件は，f が $L(\mathbb{C}, \Pi)$ の元としてユニタリである（あるいは同値だが，Π-ほとんどいたるところで $|f| = 1$ である）ことである．特に，T がユニタリであるための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{U}$ であることである．

証明 (1), (2) のそれぞれの前半は，系 5.14 の特別な場合である．後半は，前半で $f = z$ と置き，$\operatorname{supp} \Pi = \mathrm{Sp}(T)$（定理 6.2）に注意すればわかる． □

連続正規作用素の有界 Borel 可測関数算に関する定理 3.15 の一般化として，次が成り立つ．

定理 6.14 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素，Π を T のスペクトル測度とする．また，f_n，f，$g \in L(X, \Pi)$（$n \in \mathbb{N}$）とし，$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は f に Π-概収束し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して Π-ほとんどいたるところで $|f_n| \le |g|$ であるとする．このとき，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} g(T)$ に対して，ξ は $\operatorname{Dom} f_n(T)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\operatorname{Dom} f(T)$ に属し，

$$\lim_{n \to \infty} f_n(T)\xi = f(T)\xi$$

が成り立つ．

証明 射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 5.15）の特別な場合である． □

連続正規作用素の有界 Borel 可測関数算に関する命題 3.16 と系 3.17 の一般化として，次の命題と系が成り立つ．ほとんど重複になるが，証明も付けておく．

命題 6.15 X を可測空間，E を Hilbert 空間，Π を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X, \Pi)$ に対して，E 上の正規作用素 $\int_X f \, d\Pi$ のスペクトル測度は $f_* \Pi$ に等しい．さらに，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_* \Pi)$ に対して

$$g\left(\int_X f \, d\Pi\right) = \int_X g \circ f \, d\Pi$$

が成り立つ．

証明　命題 5.6 より

$$\int_X f\,d\Pi = \int_{\mathbb{C}} z\,d(f_*\Pi)$$

だから，$\int_X f\,d\Pi$ のスペクトル測度は $f_*\Pi$ に等しい．さらに，ふたたび命題 5.6 より，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\Pi)$ に対して

$$g\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \int_{\mathbb{C}} g\,d(f_*\Pi) = \int_X g \circ f\,d\Pi$$

が成り立つ．□

系 6.16　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，Π を T のスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ に対して，E 上の正規作用素 $f(T)$ のスペクトル測度は $f_*\Pi$ に等しい．さらに，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\Pi)$ に対して

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T)$$

が成り立つ．

証明　命題 6.15 で，Π を T のスペクトル測度とした場合である．□

6.3　正規作用素の Hilbert 直和とスペクトル測度

$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i 上の正規作用素とするとき，命題 4.56 (2) より，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ 上の線型作用素 $T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ も正規であることに注意する．

命題 6.17　$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ と書く．また，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i 上の正規作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と書く．各 $i \in I$ に対して Π_i を T_i のスペクトル測度とすると，それらの Hilbert 直和 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \Pi_i$ は T のスペクトル測度である．

証明　各 $i \in I$ に対して

$$T_i = \int_{\mathbb{C}} z\,d\Pi_i$$

だから，命題 5.20 より

$$T = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} T_i = \widehat{\bigoplus_{i\in I}}\left(\int_{\mathbb{C}} z\,d\Pi_i\right) = \int_{\mathbb{C}} z\,d\Pi$$

である．スペクトル測度の一意性（定理 6.2）より，Π は T のスペクトル測度である．□

系 6.18　$\{E_i\}_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} E_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i 上の正規作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く．このとき，

$$\mathrm{Sp}(T) = \overline{\bigcup_{i\in I} \mathrm{Sp}(T_i)}$$

である．

証明　各 $i \in I$ に対して Π_i を T_i のスペクトル測度とすると，それらの Hilbert 直和 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \Pi_i$ は T のスペクトル測度である（命題 6.17）．よって，正規作用素のスペクトル測度の台がその正規作用素のスペクト

ルであること（定理 6.2）と命題 5.22 より，

$$\mathrm{Sp}(T) = \operatorname{supp} T = \overline{\bigcup_{i \in I} \operatorname{supp} T_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} \mathrm{Sp}(T_i)}$$

である． □

命題 6.19 $\{E_i\}_{i \in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$E = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} E_i$ と置く．また，各 $i \in I$ に対して T_i を E_i 上の正規作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} T_i$ と置く．このとき，任意の Borel 可測関数 $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$f(T) = \widehat{\bigoplus_{i \in I}} f(T_i)$$

である．

証明 各 $i \in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を T_i のスペクトル測度とすると，それらの Hilbert 直和 $\mathit{\Pi} = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} \mathit{\Pi}_i$ は T のスペクトル測度である（命題 6.17）．よって，命題 5.20 より，

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f \, d\mathit{\Pi} = \widehat{\bigoplus_{i \in I}} \int_{\mathbb{C}} f \, d\mathit{\Pi}_i = \widehat{\bigoplus_{i \in I}} f(T_i)$$

が成り立つ． □

6.4 正規作用素の簡約とスペクトル測度

命題 6.20 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．また，E の閉部分線型空間 M は $\mathit{\Pi}$ を簡約するとし，$\mathit{\Pi}$ の M による簡約を $\mathit{\Pi}_0$ と書く．

(1) M は T を簡約し[*12]，T の M による簡約 T_0 のスペクトル測度は $\mathit{\Pi}_0$ に等しい．

(2) 任意の可測関数 $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，M は $f(T)$ を簡約し，$f(T)$ の M による簡約は $f(T_0)$ に等しい．

証明 命題 5.25 より，任意の可測関数 $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，M は $f(T)$ を簡約し，$f(T)$ の M による簡約は $\int_{\mathbb{C}} f \, d\mathit{\Pi}_0$ に等しい．特に，T の M による簡約 T_0 は $\int_{\mathbb{C}} z \, d\mathit{\Pi}_0$ に等しいから，スペクトル測度の一意性（定理 6.2）より T_0 のスペクトル測度は $\mathit{\Pi}_0$ に等しい．また，これより $f(T_0) = \int_{\mathbb{C}} f \, d\mathit{\Pi}_0$ だから，$f(T)$ の M による簡約は $f(T_0)$ に等しい． □

系 6.21 E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．また，$A \subseteq \mathbb{C}$ を Borel 集合とし，$\mathbb{C}$ 上の $\operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A)$-射影値測度 $\mathit{\Pi}_0$ を

$$\operatorname{Im} \mathit{\Pi}_0(B) = \operatorname{Im} \mathit{\Pi}(B \cap A) \qquad (\text{Borel 集合 } B \subseteq \mathbb{C})$$

によって定める（これが射影値測度を定めることは容易にわかる）．

(1) $\operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A)$ は T を簡約し，T の $\operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A)$ による簡約 T_0 のスペクトル測度は $\mathit{\Pi}_0$ に等しい．

(2) $\mathrm{Sp}(T_0) = \mathrm{Sp}(T) \cap A$ である．特に，$\mathrm{Sp}(T) \cap A$ が有界ならば，T_0 は $\operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A)$ 上の（全域で定義された）連続正規作用素である．

[*12] この主張の逆を，系 6.23 で示す．

証明　(1)　任意の Borel 集合 $B \subseteq X$ に対して $\mathit{\Pi}(A)\mathit{\Pi}(B) = \mathit{\Pi}(A\cap B) = \mathit{\Pi}(B)\mathit{\Pi}(A)$ だから（命題 2.4 (4)），$\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$ は $\mathit{\Pi}$ を簡約し，$\mathit{\Pi}$ の $\operatorname{Im}\mathit{\Pi}(A)$ による簡約は $\mathit{\Pi}_0$ に等しい．よって，主張は命題 6.20 (1) から従う．

(2)　(1) と定理 6.2 より，$\operatorname{Sp}(T_0) = \operatorname{supp}\mathit{\Pi}_0 = \operatorname{supp}\mathit{\Pi} \cap A = \operatorname{Sp}(T) \cap A$ である．後半は，前半と系 6.8 から従う．□

6.5　正規作用素の可換性とスペクトル測度

連続正規作用素の場合（定理 3.19）の一般化として，正規作用素の可換性とスペクトル測度について次が成り立つ．証明の主要な部分は，連続正規作用素の場合に帰着させることによって行う．

定理 6.22　E, F を Hilbert 空間，T_E, T_F をそれぞれ E, F 上の正規作用素，$\mathit{\Pi}_E$, $\mathit{\Pi}_F$ をそれぞれ T_E, T_F のスペクトル測度とする．また，$S \in \mathscr{L}(E; F)$ とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(a) $ST_E \subseteq T_F S$ である．
(b) 任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S$ である．
(c) 任意の可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$Sf(T_E) \subseteq f(T_F)S$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \geq 0$ の閉円板を $B(r)$ と書き，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_n = \mathit{\Pi}_E(B(n)), \qquad E_n = \operatorname{Im} P_n, \qquad Q_n = \mathit{\Pi}_F(B(n)), \qquad F_n = \operatorname{Im} Q_n$$

と置く．系 6.21 より，E_n, F_n はそれぞれ T_E, T_F を簡約し，対応する簡約 T_{E_n}, T_{F_n} はそれぞれ E_n, F_n 上の連続線型作用素であり，そのスペクトル測度 $\mathit{\Pi}_{E_n}$, $\mathit{\Pi}_{F_n}$ はそれぞれ

$$\operatorname{Im}\mathit{\Pi}_{E_n}(A) = \operatorname{Im}\mathit{\Pi}_E(A \cap B(n)), \qquad \operatorname{Im}\mathit{\Pi}_{F_n}(A) = \operatorname{Im}\mathit{\Pi}_F(A \cap B(n)) \qquad (\text{Borel 集合 } A \subseteq \mathbb{C})$$

によって与えられる．

包含写像 $E_n \to E$, S, 直交射影 $F \to F_n$ をこの順に合成したものを $S_n \in \mathscr{L}(E_n; F_n)$ と置く．$ST_E \subseteq T_F S$ ならば，任意の $\xi \in E_n$ に対して

$$S_n T_{E_n}\xi = Q_n S T_E \xi = Q_n T_F S \xi = T_{F_n} S_n \xi$$

だから，$S_n T_{E_n} = T_{F_n} S_n$ である．したがって，定理 3.19 より，任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して

$$S_n \mathit{\Pi}_{E_n}(A) \subseteq \mathit{\Pi}_{F_n} S_n,$$

すなわち

$$Q_n S \mathit{\Pi}_E(A \cap B(n)) = \mathit{\Pi}_F(A \cap B(n)) S P_n$$

が成り立つ．有界 Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ を固定して上式で $n \to \infty$ とすると，P_n, Q_n はそれぞれ弱作用素位相に関して I_E, I_F に収束し，十分大きい任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap B(n) = A$ だから，

$$S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S$$

を得る（命題 1.9 (1)）．次に，$A \subseteq \mathbb{C}$ を一般の Borel 集合とすると，上式より $S\mathit{\Pi}_E(A \cap B(n)) = \mathit{\Pi}_F(A \cap B(n))S$ であり，$n \to \infty$ のとき $\mathit{\Pi}_E(A \cap B(n))$, $\mathit{\Pi}_F(A \cap B(n))$ はそれぞれ弱作用素位相に関して $\mathit{\Pi}_E(A)$, $\mathit{\Pi}_F(A)$ に収束するから，やはり

$$S\mathit{\Pi}_E(A) = \mathit{\Pi}_F(A)S$$

を得る（命題 1.9 (1)）．よって，(b) が成り立つ．

(b) $\iff$ (c)　命題 5.16 の特別な場合である．

(c) $\implies$ (a)　明らかである．　$\square$

E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，E の閉部分線型空間 M が T を簡約するとき，系 4.64 (3) より，T の M による簡約は M 上の正規作用素であることに注意する．

系 6.23　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，$\varPi$ を T のスペクトル測度とする．E の閉部分線型空間 M に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) M は T を簡約する．
(b) M は $\varPi$ を簡約する．

証明　M の上への直交射影を P と書くと，M が T を簡約するとは $PT \subseteq TP$ であるということであり，M が $\varPi$ を簡約するとは任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して $P\varPi(A) = \varPi(A)P$ であるということである．よって，定理 6.22 より，(a) と (b) は同値である．　$\square$

次に，スペクトル測度を用いて，正規作用素どうしの「可換性」を定義する．

定義 6.24（正規作用素の強可換性）　E を Hilbert 空間，T, S を E 上の正規作用素，$\varPi_T$, $\varPi_S$ をそれぞれ T, S のスペクトル測度とする．T と S が**強可換**であるとは，任意の Borel 集合 A, $B \subseteq \mathbb{C}$ に対して $\varPi_T(A)$ と $\varPi_S(B)$ が可換であることをいう．

命題 6.25　E を Hilbert 空間，T, S を E 上の正規作用素とし，$\varPi_T$, $\varPi_S$ をそれぞれ T, S のスペクトル測度とする．次の 6 条件は同値である．

(a) 任意の Borel 集合 $B \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\varPi_S(B)T \subseteq T\varPi_S(B)$ である．
(b) T と S は強可換である．
(c) 任意の $f \in L(\mathbb{C}, \varPi_T)$ と Borel 集合 $B \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\varPi_S(B)f(T) \subseteq f(T)\varPi_S(B)$ である．
(d) 任意の $g \in L^\infty(\mathbb{C}, \varPi_S)$ に対して，$g(S)T \subseteq Tg(S)$ である．
(e) 任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ と $g \in L^\infty(\mathbb{C}, \varPi_S)$ に対して，$g(S)\varPi_T(A) = \varPi_T(A)g(S)$ である．
(f) 任意の $f \in L(\mathbb{C}, \varPi_T)$ と $g \in L^\infty(\mathbb{C}, \varPi_S)$ に対して，$g(S)f(T) \subseteq f(T)g(S)$ である．

証明　定理 6.22 から (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c)，(d) $\iff$ (e) $\iff$ (f)，(b) $\iff$ (e) がわかるから，6 条件はすべて同値である．　$\square$

6.6 正作用素

定義 6.26（正作用素）　E を Hilbert 空間とする．E 上の線型作用素 T が**正**であるとは，T が自己随伴であり，かつ $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ であることをいう．

正作用素は自己随伴であり，したがって稠密に定義された閉作用素である．また，正規作用素 T が $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ を満たすならば自動的に T は自己随伴となるから（命題 6.13 (1)），線型作用素 T が正であることは，「T が正規であり，かつ $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ であること」とも同値である．

定理 6.27　E を Hilbert 空間とする．E 上の稠密に定義された線型作用素 T に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) T は正である．
(b) E 上の自己随伴作用素 S が存在して，$T = S^2$ となる．
(c) Hilbert 空間 F と，E から F への稠密に定義された閉作用素 S が存在して，$T = S^*S$ となる．
(d) T は正規であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\langle T\xi|\xi\rangle \geq 0$ が成り立つ．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　T が正であるとすると，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ だから，連続関数 $f\colon \mathrm{Sp}(T) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ と定義できる．$S = f(T)$ と置くと，f は実数値だから S は自己随伴であり（命題 6.13 (1)），また $f^2 = z$ より $S^2 = T$ である（定理 6.9 (6)）．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　F を Hilbert 空間，S を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．すると，系 4.43 より S^*S は E 上の自己随伴作用素であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} S^*S$ に対して

$$\langle S^*S\xi|\xi\rangle = \langle S\xi|S\xi\rangle = \|S\xi\|^2 \geq 0$$

が成り立つ．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　(d) が成り立つとする．すると，T は対称な正規作用素だから，自己随伴である（系 4.48）．自己随伴作用素のスペクトルは $\mathbb{R}$ に含まれるから（定理 4.40），あとは，$\mathrm{Sp}(T)$ が負の実数を含まないことを示せばよい．$a > 0$ を任意にとると，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して

$$\begin{aligned}\|(-aI - T)\xi\|^2 &= \|T\xi\|^2 + a^2\|\xi\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle T\xi|a\xi\rangle \\ &= \|T\xi\|^2 + a^2\|\xi\|^2 + 2a\langle T\xi|\xi\rangle \\ &\geq a^2\|\xi\|^2\end{aligned}$$

であり，したがって $a\|\xi\| \leq \|(-aI - T)\xi\|$ が成り立つ．よって，命題 4.8 より，$-aI - T$ は単射かつその像は閉である．T は正規だから，系 4.50 より，$-a \notin \mathrm{Sp}(T)$ である．これで，$\mathrm{Sp}(T)$ が負の実数を含まないことが示された．□

命題 6.28　X を可測空間，E を Hilbert 空間，$\mathit{\Pi}$ を X 上の E-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ が正であるための必要十分条件は，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $f \geq 0$ であることである．

証明　$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ は常に正規であり（系 5.9），$\mathrm{Sp}\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\bigr) = \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} f$ を満たす（命題 5.11）．これらから主張を得る．□

系 6.29　E を Hilbert 空間，T を E 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$f(T)$ が正であるための必要十分条件は，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $f \geq 0$ であることである．

証明　命題 6.28 で，$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とした場合である．□

正作用素の実数による冪を定義する．

定義 6.30（正作用素の実数による冪）　E を Hilbert 空間とする．

(1) T を E 上の正作用素とし，$\alpha \geq 0$ とする．$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の連続関数 $t \mapsto t^\alpha$ に T を代入した Borel 可測関数算の結果を，T^α と書く．

(2) T を E 上の単射な正作用素とし，$\alpha < 0$ とする．このとき，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ かつ T のスペクトル測度 Π について $\Pi(\{0\}) = 0$ だから（命題 6.4 (1)），連続関数 $t \mapsto t^\alpha$ は $L(X, \Pi)$ の元を定める．これに T を代入した Borel 可測関数算の結果を，T^α と書く．

関数 $t \mapsto t^\alpha$ は正値だから，T^α は正作用素である（系 6.29）．また，T^α は，$\alpha \in \mathbb{N}$ のときは T を α 個合成したもの（$\alpha = 0$ の場合は I とする）と一致し（定理 6.9 (6)），$\alpha = -1$ のときは T の逆作用素と一致する（定理 6.9 (7)）．

命題 6.31　E を Hilbert 空間，T を E 上の正作用素とする．$0 \leq \alpha \leq \beta$ ならば $\mathrm{Dom}\, T^\beta \subseteq \mathrm{Dom}\, T^\alpha$ である．

証明　$\gamma \geq 0$ とする．命題 6.7 (1) より，$\xi \in E$ が $\mathrm{Dom}\, T^\gamma$ に属するための必要十分条件は $\int_{\mathbb{C}} |z|^{2\gamma}\, d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ である．ここで，$A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ と置いて

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{2\gamma}\, d\Pi_{\xi,\xi} = \int_A |z|^{2\gamma}\, d\Pi_{\xi,\xi} + \int_{\mathbb{C}\setminus A} |z|^{2\gamma}\, d\Pi_{\xi,\xi}$$

と分割すると，第 1 項は常に有限だから，第 2 項が有限になるかどうかを考えればよい．ところが $\mathbb{C} \setminus A$ 上では $|z|^{2\gamma}$ は γ に関して単調増加だから，$0 \leq \alpha \leq \beta$ ならば

$$\int_{\mathbb{C}\setminus A} |z|^{2\alpha}\, d\Pi_{\xi,\xi} \leq \int_{\mathbb{C}\setminus A} |z|^{2\beta}\, d\Pi_{\xi,\xi}$$

である．よって，$\mathrm{Dom}\, T^\beta \subseteq \mathrm{Dom}\, T^\alpha$ である．□

命題 6.32　E を Hilbert 空間とする．

(1) T を E 上の正作用素, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし, $\alpha, \beta \geq 0$ または T は単射であるとする．このとき, $(T^\alpha)^\beta = T^{\alpha\beta}$ が成り立つ．

(2) T を E 上の正作用素，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし，$\alpha, \beta \geq 0$ または「$\alpha, \beta \leq 0$ かつ T は単射」であるとする．このとき，$T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}$ が成り立つ．

証明　(1)　系 6.16 の特別な場合である．

(2)　(1) より $T^{-\alpha} = (T^{-1})^\alpha$ などが成り立つから，「$\alpha, \beta \leq 0$ かつ T は単射」の場合は T の代わりに T^{-1} を考えることで $\alpha, \beta \geq 0$ の場合に帰着される．そこで，$\alpha, \beta \geq 0$ の場合を考える．定理 6.9 (4) より $T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}|_{\mathrm{Dom}\, T^\beta \cap \mathrm{Dom}\, T^{\alpha+\beta}}$ だが，命題 6.31 より $\mathrm{Dom}\, T^{\alpha+\beta} \subseteq \mathrm{Dom}\, T^\beta$ だから，$T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}$ である．これで，主張が示された．□

6.7　応用：稠密に定義された閉作用素の極分解

定理 6.27 より，Hilbert 空間 E から F への稠密に定義された閉作用素 T に対して，T^*T が E 上の正作用素であることに注意する．

定義 6.33（絶対値）　E, F を Hilbert 空間とする．E から F への稠密に定義された閉作用素 T に対して，$(T^*T)^{1/2}$ を T の絶対値といい，$|T|$ と書く．

E から F への稠密に定義された閉作用素 T に対して，$|T|$ は E 上の正作用素である．$E = F$ かつ T が E 上の正規作用素ならば，$|T|$ は $\mathrm{Sp}(T)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto |\lambda|$ に T を代入した結果に一致する（定理 6.9 (6),

系 6.16).

命題 6.34 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．

(1) $\mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}|T|$ であり，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}|T|$ に対して $\|T\xi\| = \||T|\xi\|$ である．
(2) $\mathrm{Ker}|T| = \mathrm{Ker}\,T$, $\overline{\mathrm{Im}|T|} = (\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$ である．

証明 (1) $D = \mathrm{Dom}\,T^*T = \mathrm{Dom}|T|^2$ と置くと，命題 4.42 (4) より，$\mathrm{gr}(T|_D)$ は $\mathrm{gr}(T)$ において稠密であり，$\mathrm{gr}(|T||_D)$ は $\mathrm{gr}(|T|)$ において稠密である．まず，$\xi \in D$ に対しては，

$$\||T|\xi\|^2 = \langle |T|\xi | |T|\xi\rangle = \langle |T|^2\xi|\xi\rangle = \langle T^*T\xi|\xi\rangle = \langle T\xi|T\xi\rangle = |T\xi|^2$$

であり，したがって

$$\||T|\xi\| = \|T\xi\| \tag{$*$}$$

である．次に，$\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ とする．$\mathrm{gr}(T|_D)$ は $\mathrm{gr}(T)$ において稠密だから，D 上の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$((\xi_n, T\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\xi, T\xi)$ に収束するようなものがとれる．すると，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，($*$) より任意の m, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|T\xi_m - T\xi_n\| = \||T|\xi_m - |T|\xi_n\|$ が成り立つから，$(|T|\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．したがって，$(|T|\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は極限点 $\eta \in E$ をもつ．いま，$|T|$ は閉であり，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(|T|\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ ξ, η に収束するから，$\xi \in \mathrm{Dom}|T|$ かつ $|T|\xi = \eta$ である．さらに，($*$) より

$$\||T|\xi\| = \|\eta\| = \lim_{n\to\infty}\||T|\xi_n\| = \lim_{n\to\infty}\|T\xi_n\| = \|T\xi\|$$

が成り立つ．これで，$\mathrm{Dom}\,T \subseteq \mathrm{Dom}|T|$ かつ任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ に対して $\|T\xi\| = \||T|\xi\|$ が成り立つことが示された．$\mathrm{Dom}\,T \subseteq \mathrm{Dom}|T|$ を示したのと同じ方法で，$\mathrm{Dom}|T| \subseteq \mathrm{Dom}\,T$ も示せる．[*13]

(2) $\mathrm{Ker}|T| = \mathrm{Ker}\,T$ は (1) からただちに従う．$|T|$ が自己随伴であることと命題 4.19 より $\overline{\mathrm{Im}|T|} = (\mathrm{Ker}|T|)^{\perp}$ だから，$\overline{\mathrm{Im}|T|} = (\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$ もわかる． □

Hilbert 空間 E から F への閉作用素 T に対して，$(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$ を T の**始空間**といい，$\overline{\mathrm{Im}\,T}$ を T の**終空間**という．$T \in \mathscr{L}(E;F)$ のとき，T は制限によって T の始空間から T の終空間への連続線型作用素を誘導するが，これがユニタリであるとき，T は**部分等長**であるという．

定理 6.35 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．$U \in \mathscr{L}(E;F)$ であって，$T = U|T|$ かつ $\mathrm{Ker}\,U = \mathrm{Ker}\,T$ を満たすものが一意に存在する．さらに，この条件を満たす U は部分等長であり，T と同じ始空間・終空間をもつ．

証明 $\mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}|T|$ かつ任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}|T|$ に対して $\||T|\xi\| = |T\xi|$ だから（命題 6.34 (1)），等長線型同型 $V_0\colon \mathrm{Im}|T| \to \mathrm{Im}\,T$ であって，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}|T|$ に対して $V_0|T|\xi = T\xi$ を満たすものが一意に存在する．完備化の一意性より，V_0 はユニタリ作用素 $V\colon \overline{\mathrm{Im}|T|} \to \overline{\mathrm{Im}\,T}$ に一意に延長される．

$U \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$T = U|T|$ は $U|_{\mathrm{Im}|T|} = V$ といいかえられる．また，命題 6.34 (2) より，$\mathrm{Im}|T|$ の直交補空間は $\mathrm{Ker}\,T$ である．よって，$T = U|T|$ かつ $\mathrm{Ker}\,U = \mathrm{Ker}\,T$ を満たす $U \in \mathscr{L}(E;F)$ は一意に存在し，その U は $(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$ を始空間，$\overline{\mathrm{Im}\,T}$ を終空間とする部分等長作用素である． □

定義 6.36（極分解） E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．定理 6.35 の記号において，$(|T|, U)$ を T の**極分解**という．

[*13] この証明は，定理 4.46 の証明と類似している．

極分解は，次のようにも特徴付けられる．

命題 6.37 E, F を Hilbert 空間，T を E から F への稠密に定義された閉作用素とする．E 上の正作用素 A と部分等長作用素 $U \in \mathscr{L}(E;F)$ が $T = UA$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$ を満たすならば，(A, U) は T の極分解である．

証明 E 上の正作用素 A と部分等長作用素 $U \in \mathscr{L}(E;F)$ が，$T = UA$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$ を満たすとする．部分等長作用素の定義から容易にわかるように，U^*U は $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ の上への直交射影である．いま，仮定より $(\operatorname{Ker} U)^\perp = (\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A}$ だから（A が自己随伴であることと命題 4.19 を用いた），$T^*T = AU^*UA = A^2$ であり（命題 4.18 (3)），したがって $|T| = (T^*T)^{1/2} = (A^2)^{1/2} = A$ である（命題 6.32 (1)）．これより，$U \in \mathscr{L}(E;F)$ は $T = U|T|$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$ を満たすから（命題 6.34），極分解の一意性（定理 6.35）より，$(A, U) = (|T|, U)$ は T の極分解である． □

6.8 応用：Stone の定理

本小節では，Hilbert 空間 E に対して，E 上のユニタリ作用素全体のなす群を $\mathscr{U}(E)$ と書く．

定義 6.38（強連続 1-径数ユニタリ群） E を Hilbert 空間とする．群準同型 $U\colon \mathbb{R} \to \mathscr{U}(E)$ を，E 上の **1-径数ユニタリ群**という．E 上の 1-径数ユニタリ群 U は，$\mathscr{U}(E)$ の強作用素位相に関して連続であるとき，**強連続**であるという．

命題 6.39 E を Hilbert 空間，U を E 上の 1-径数ユニタリ群とし，E 上の線型作用素 H を

- $\operatorname{Dom} H$ は極限値 $\lim_{t\to 0}(U(t)\xi - \xi)/t \in E$ が存在するような $\xi \in E$ の全体,
- $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対して $H\xi = (1/i)\lim_{t\to 0}(U(t)\xi - \xi)/t$

と定める．

(1) H は対称である．
(2) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(t)(\operatorname{Dom} H) = \operatorname{Dom} H$ である．
(3) 任意の $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対して，$\mathbb{R}$ から E への写像 $t \mapsto U(t)\xi$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi = iU(t)H\xi = iHU(t)\xi \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．

証明 (1) 任意の $\xi, \eta \in \operatorname{Dom} H$ に対して

$$\begin{aligned}\langle H\xi|\eta\rangle &= \lim_{t\to 0}\left\langle \frac{1}{i}\cdot\frac{U(t)\xi - \xi}{t}\middle|\eta\right\rangle \\ &= \lim_{t\to 0}\left\langle \xi\middle|-\frac{1}{i}\cdot\frac{U(-t)\eta - \eta}{t}\right\rangle \\ &= \lim_{t\to 0}\left\langle \xi\middle|\frac{1}{i}\cdot\frac{U(-t)\eta - \eta}{-t}\right\rangle \\ &= \langle \xi|H\eta\rangle\end{aligned}$$

だから，H は対称である．

(2)　$t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \operatorname{Dom} H$ とすると，

$$\frac{U(t+s)\xi - U(t)\xi}{s} = U(t)\left(\frac{U(s)\xi - \xi}{s}\right) \to iU(t)H\xi \qquad (s \to 0) \tag{$*$}$$

だから $U(t)\xi \in \operatorname{Dom} H$ である．よって，$U(t)(\operatorname{Dom} H) \subseteq \operatorname{Dom} H$ である．t を $-t$ に置き換えれば $U(-t)(\operatorname{Dom} H) \subseteq \operatorname{Dom} H$，すなわち $\operatorname{Dom} H \subseteq U(t)(\operatorname{Dom} H)$ もわかるから，$U(t)(\operatorname{Dom} H) = \operatorname{Dom} H$ を得る．

(3)　$\xi \in \operatorname{Dom} H$ とする．($*$) より，$\mathbb{R}$ から E への写像 $t \mapsto U(t)\xi$ は微分可能で

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi = iU(t)H\xi \qquad (t \in \mathbb{R})$$

を満たす．また，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t)\xi &= \lim_{s\to 0}\frac{U(t+s)\xi - U(t)\xi}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{U(s)U(t)\xi - U(t)\xi}{s} \\ &= iHU(t)\xi \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

も成り立つ．□

定理 6.40（Stone の定理）　E を Hilbert 空間とする．

(1) H を E 上の自己随伴作用素とする．$t \in \mathbb{R}$ に対して $U(t) = \exp(itH)$（Borel 可測関数算）と定めると，U は E 上の強連続 1-径数ユニタリ群である．

(2) E 上の強連続 1-径数ユニタリ群 U に対して，E 上の線型作用素 H を
- $\operatorname{Dom} H$ は極限値 $\lim_{t\to 0}(U(t)\xi - \xi)/t \in E$ が存在するような $\xi \in E$ の全体,
- $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対して $H\xi = (1/i)\lim_{t\to 0}(U(t)\xi - \xi)/t$

と定めると，H は E 上の自己随伴作用素である．

(3) (1) と (2) の対応は，互いに他の逆であり，E 上の自己随伴作用素と E 上の強連続 1-径数ユニタリ群との間の一対一対応を与える．

証明　(1)　t, $t' \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数として $\exp(itz)$, $\exp(it'z)$ は有界かつ $\exp(itz)\exp(it'z) = \exp(i(t+t')z)$ だから，定理 6.9 (4) より $U(t)U(t') = U(t+t')$ である．また，$\mathbb{R}$ において $t \to t_0$ のとき，$\mathbb{R}$ 上の関数 $\exp(itz)$ は t に関して一様に有界かつ $\exp(it_0z)$ に各点収束するから，定理 6.14 より強作用素位相に関して $U(t) \to U(t_0)$ である．よって，U は E 上の強連続 1-径数ユニタリ群である．

((3) の一部)　H を E 上の自己随伴作用素とし，H から (1) の方法で定まる E 上の強連続 1-径数ユニタリ群を U，U から (2) の方法で定まる E 上の線型作用素を H' とするとき，$H' = H$ であることを示す．$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して関数 $f_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$f_t(\lambda) = \frac{1}{i}\cdot\frac{\exp(it\lambda) - 1}{t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

と定めると，任意の $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $|f_t| \le |z|$ であり，$t \to 0$ のとき f_t は z に各点収束する．したがって，定理 6.14 より任意の $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対して

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{U(t)\xi - \xi}{t} = f_t(H)\xi \to H\xi \qquad (t \to 0),$$

だから，$H \subseteq H'$ である．ところが，H は自己随伴であり H' は対称だから（命題 6.39 (1)），自己随伴作用素の極大性（命題 4.39）より $H' = H$ である．

(残りの主張)　あとは，E 上の任意の強連続 1-径数ユニタリ群 U が E 上のある自己随伴作用素から (1) の方法によって得られることを示せばよい．E 上の線型作用素 H を，U から (2) の方法で定める．命題 6.39 (1) より，H は対称である．

まず，$\operatorname{Dom} H$ が E において稠密であることを示す．そのために，$\mathbb{R}$ 上のコンパクト台をもつ滑らかな複素数値関数の全体を $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ と書き，$f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ と $\xi \in E$ に対して

$$T_f \xi = \int_{\mathbb{R}} f(t) U(t) \xi \, dt \in E$$

と置く（Hilbert 空間 E に値をとる積分．たとえば，宮島 [13, 3.4.1 節] を参照のこと）．すると，$s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{U(s) T_f \xi - T_f \xi}{s} &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \frac{U(s+t)\xi - U(t)\xi}{s} \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t-s) - f(t)}{s} \cdot U(t) \xi \, dt \end{aligned} \tag{$**$}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t-s) - f(t)}{s} + f'(t) \right| &= \left| \frac{1}{s} \int_{t-s}^{t} (-f'(u) + f'(t)) \, du \right| \\ &\leq \sup_{|u-u'| \leq s} |f'(u) - f'(u')| \end{aligned}$$

であり，上式の最左辺は t によらず $s \to 0$ のとき 0 に収束するから，関数関数 $t \mapsto (f(t-s) - f(t))/s$ は $-f'$ に一様収束する．したがって，($**$) より

$$\frac{U(s) T_f \xi - T_f \xi}{s} \to -\int_{\mathbb{R}} f'(t) U(t) \xi \, dt \qquad (s \to 0)$$

となり，$T_f \xi \in \operatorname{Dom} H$ を得る．さて，$\epsilon > 0$ に対して $f_\epsilon \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ を $f_\epsilon \geq 0$，$\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t) \, dt = 1$ かつ $\operatorname{supp} f_\epsilon \subseteq [-\epsilon, \epsilon]$ となるようにとると，任意の $\xi \in E$ に対して

$$\begin{aligned} \|T_{f_\epsilon} \xi - \xi\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}} f(t)(U(t)\xi - \xi) \, dt \right\| \\ &\leq \sup_{|t| \leq \epsilon} \|U(t)\xi - \xi\| \\ &\to 0 \qquad\qquad (\epsilon \to 0) \end{aligned}$$

である．よって，$\operatorname{Dom} H$ は E において稠密である．

ここまでで，H が稠密に定義された対称作用素であることがわかった．次に，H が本質的自己随伴であることを示す．系 4.41 より，そのためには，$\pm iI - H^*$ が単射であることを示せばよい．$\eta \in \operatorname{Dom} H^*$ が $H^* \eta = \pm i \eta$ を満たすとして，$\xi \in \operatorname{Dom} H$ を任意にとる．命題 6.39 (3) より，関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}; t \mapsto \langle U(t)\xi | \eta \rangle$ は微分可能で

$$\frac{d}{dt} \langle U(t)\xi | \eta \rangle = i \langle H U(t) \xi | \eta \rangle = i \langle U(t)\xi | H^* \eta \rangle = \pm \langle U(t)\xi | \eta \rangle$$

を満たすから，

$$\langle U(t)\xi | \eta \rangle = e^{\pm t} \langle \xi | \eta \rangle \qquad (t \in \mathbb{R})$$

となる．一方で，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(t)$ はユニタリだから $|\langle U(t)\xi|\eta\rangle| \le \|\xi\|\|\eta\|$ である．よって，$\langle \xi|\eta\rangle = 0$ でなければならない．$\xi \in \operatorname{Dom} H$ は任意であり $\operatorname{Dom} H$ は E において稠密だったから，$\eta = 0$ を得る．これで，H が本質的自己随伴であることが示された．

最後に，自己随伴作用素 $\overline{H}$ から (1) の方法で定まる強連続 1-径数ユニタリ群 V が U に等しいことを示す．[*14]．$\xi \in \operatorname{Dom} H$ を任意にとる．命題 6.39 (3) より，

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi = iHU(t)\xi = i\overline{H}U(t)\xi \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．一方で，すでに「(3) の一部」で示したことより V から (2) の方法で定まる E 上の線型作用素は $\overline{H}$ だから，ふたたび命題 6.39 (3) より

$$\frac{d}{dt}V(t)\xi = i\overline{H}V(t)\xi$$

である．したがって，

$$X(t) = U(t)\xi - V(t)\xi \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と置くと，

$$\begin{aligned} X'(t) &= \frac{d}{dt}(U(t)\xi - V(t)\xi) \\ &= i\overline{H}U(t)\xi - i\overline{H}V(t)\xi \\ &= i\overline{H}X(t) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 &= \langle X'(t)|X(t)\rangle + \langle X(t)|X'(t)\rangle \\ &= \langle i\overline{H}X(t)|X(t)\rangle + \langle X(t)|i\overline{H}X(t)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．よって，$\|X(t)\|$ は t によらない定数だが，$X(0) = U(0)\xi - V(0)\xi = 0$ だから $X = 0$ である．すなわち，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $U(t)\xi = V(t)\xi$ である．$\xi \in \operatorname{Dom} H$ は任意であり $\operatorname{Dom} H$ は E において稠密だったから，これより $U = V$ を得る．

これで，E 上の任意の強連続 1-径数ユニタリ群 U が E 上のある自己随伴作用素から (1) の方法によって得られることが示された． □

定義 6.41（強連続 1-径数ユニタリ群の生成，無限小生成作用素） E を Hilbert 空間とする．

(1) E 上の自己随伴作用素 H に対して，定理 6.40 (1) で定まる E 上の強連続 1-径数ユニタリ群を，H が**生成する強連続 1-径数ユニタリ群**という．

(2) E 上の強連続 1-径数ユニタリ群 U に対して，定理 6.40 (2) で定まる E 上の自己随伴作用素を，U の**無限小生成作用素**という．

命題 6.42 E を Hilbert 空間，U を E 上の強連続 1-径数ユニタリ群，H を U の無限小生成作用素とする．次の 2 条件は同値である．

[*14] 定理の結論より実は $\overline{H} = H$ だが，そのことはここでは必要ない．

(a) $U\colon \mathbb{R}\to \mathscr{U}(E)$ は $\mathscr{U}(E)$ の作用素ノルム位相に関して連続である．
(b) H は E 上の（全域で定義された）連続自己随伴作用素である．

証明 (b) $\Longrightarrow$ (a) H が E 上の連続自己随伴作用素ならば，$\mathrm{Sp}(H)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合だから，$\mathbb{R}$ において $t\to t_0$ のとき，$\mathrm{Sp}(H)$ 上の関数 $\exp(itz)$ は $\exp(it_0z)$ に一様収束する．よって，作用素ノルム位相に関して $U(t)=\exp(itH)$ は $U(t_0)=\exp(it_0H)$ に収束する（定理 3.14）．すなわち，U は作用素ノルムに関して連続である．

(a) $\Longrightarrow$ (b) U が作用素ノルム位相に関して連続であるとすると，ある $t_0>0$ が存在して，任意の $|t|\leq t_0$ に対して

$$\sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(H)}|\exp(it\lambda)-1| = \|\exp(itH)-I_E\| = \|U(t)-I_E\|\leq 1$$

となる（命題 6.7 (2)）．このとき，任意の $|t|\leq t_0$ と $\lambda\in\mathrm{Sp}(H)$ に対して

$$t\lambda\in\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[2\pi n-\frac{\pi}{3}, 2\pi n+\frac{\pi}{3}\right]$$

だが，これは $\mathrm{Sp}(H)$ が有界でなければありえない．よって，H は E 上の連続自己随伴作用素である（系 6.8）．

□

付録 A　Cayley 変換と自己随伴作用素のスペクトル分解

本付録では，対称作用素の Cayley 変換について解説し，それを用いて自己随伴作用素のスペクトル分解定理を定理 6.2 とは異なる方法で証明する．本付録を理解するのに，正規作用素や Hilbert 直和に関する知識は必要ない．

A.1　Cayley 変換

ノルム空間 E 上の**等長作用素**とは，E 上の線型作用素 U であって，任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\,U$ に対して $\|U\xi\|=\|\xi\|$ を満たすものをいう．E が Hilbert 空間ならば，E 上の線型作用素 U が等長であるための必要十分条件は，任意の $\xi,\eta\in\mathrm{Dom}\,U$ に対して $\langle U\xi|U\eta\rangle=\langle\xi|\eta\rangle$ が成り立つことである（分極公式からわかる）．

定義 A.1（Cayley 変換・逆変換） E を Hilbert 空間とする．

(1) E 上の対称作用素 T に対して，$(T-iI)(T+iI)^{-1}$ を T の **Cayley 変換**という（命題 4.32 (2) より $T+iI$ が単射であることに注意する）．
(2) E 上の等長作用素 U であって $I-U$ が単射であるものに対して，$i(I+U)(I-U)^{-1}$ を U の **Cayley 逆変換**という．

定理 A.2 E を Hilbert 空間とする．

(1) E 上の対称作用素 T に対して，T の Cayley 変換 $U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$ は E 上の等長作用素であり，$I-U$ は単射である．さらに，$\mathrm{Dom}\,U=\mathrm{Im}(T+iI)$，$\mathrm{Im}\,U=\mathrm{Im}(T-iI)$ である．
(2) E 上の等長作用素 U であって $I-U$ が単射であるものに対して，U の Cayley 逆変換 $T=i(I+U)(I-U)^{-1}$ は E 上の対称作用素である．さらに，$\mathrm{Dom}\,T=\mathrm{Im}(I-U)$，$\mathrm{Im}\,T=\mathrm{Im}(I+U)$ である．

(3) (1) と (2) の対応は，互いに他の逆であり，E 上の対称作用素 T と E 上の等長作用素 U であって $I-U$ が単射であるものとの一対一対応を与える．さらに，この一対一対応は，線型作用素の拡張関係を保つ．

証明 ((1) および (3) の一部) 命題 4.32 (1), (2) より，$T+iI$ は $\operatorname{Dom} T$ から $\operatorname{Im}(T+iI)$ への全単射，$T-iI$ は $\operatorname{Dom} T$ から $\operatorname{Im}(T-iI)$ への全単射であり，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して

$$\|(T+iI)\xi\| = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|(T-iI)\xi\|^2$$

である．よって，U は等長作用素であり，$\operatorname{Dom} U = \operatorname{Im}(T+iI)$ かつ $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im}(T-iI)$ が成り立つ．

次に，$I-U$ が単射であることを示す．$\eta \in \operatorname{Dom} U = \operatorname{Im}(T+iI)$ とすると，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ が一意に存在して $\eta = (T+iI)\xi$ と書け，このとき $U\eta = (T-iI)\xi$ である．これより $(I-U)\eta = 2i\xi$ だから，$(I-U)\eta = 0$ ならば $\xi = 0$ であり，したがって $\eta = 0$ となる．よって，$I-U$ は単射である．

(2) $I-U$ は $\operatorname{Dom} U$ から $\operatorname{Im}(I-U)$ への全単射，$I+U$ は $\operatorname{Dom} U$ から $\operatorname{Im}(I+U)$ への全射だから，$\operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(I-U)$ かつ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(I+U)$ である．次に，T が対称であることを示す．$\eta, \eta' \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(I-U)$ とすると，ある $\xi, \xi' \in \operatorname{Dom} U$ を用いて $\eta = (I-U)\xi$，$\eta' = (I-U)\xi'$ と書け，このとき $T\eta = i(I+U)\xi$，$T\eta' = i(I+U)\xi'$ である．$\langle U\xi | U\xi' \rangle = \langle \xi | \xi' \rangle$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\langle T\eta | \eta' \rangle &= \langle i(I+U)\xi | (I-U)\xi' \rangle \\
&= \langle (I-U)\xi | i(I+U)\xi' \rangle \\
&= \langle \eta | T\eta' \rangle
\end{aligned}$$

が得られるから，T は対称である．

(3) T を E 上の対称作用素とし，U を T の Cayley 変換とする．U の Cayley 逆変換が T に一致することを示す．$\eta \in \operatorname{Dom} U = \operatorname{Im}(T+iI)$ とすると，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ が一意に存在して $\eta = (T+iI)\xi$ と書け，このとき $U\eta = (T-iI)\xi$ である．これより

$$(I-U)\eta = 2i\xi, \qquad (I+U)\eta = 2T\xi$$

である．η が $\operatorname{Dom} U$ 全体を動くとき ξ は $\operatorname{Dom} T$ 全体を動くから，$\operatorname{Im}(I-U) = \operatorname{Dom} T$ であり，

$$\begin{aligned}
T\xi &= \frac{1}{2}(I+U)\eta \\
&= \frac{1}{2}(I+U)(I-U)^{-1}(2i\xi) \\
&= i(I+U)(I-U)^{-1}\xi
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，U の Cayley 逆変換は T に一致する．

U を E 上の等長作用素であって $I-U$ が単射であるものとし，T を U の Cayley 変換とする．T の Cayley 変換が U に一致することを示す．$\eta \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(I-U)$ とすると，$\xi \in \operatorname{Dom} U$ が一意に存在して $\eta = (I-U)\xi$ と書け，このとき $T\eta = i(I+U)\xi$ である．これより

$$(T+iI)\eta = 2i\xi, \qquad (T-iI)\eta = 2iU\xi$$

である．η が $\operatorname{Dom} T$ 全体を動くとき ξ は $\operatorname{Dom} U$ 全体を動くから，$\operatorname{Im}(T+iI) = \operatorname{Dom} U$ であり，

$$\begin{aligned}
U\xi &= \frac{1}{2i}(T-iI)\eta \\
&= \frac{1}{2i}(T-iI)(T+iI)^{-1}(2i\xi) \\
&= (T-iI)(T+iI)^{-1}\xi
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，T の Cayley 変換は U に一致する．

Cayley 変換・逆変換が線型作用素の拡張関係を保つことは明らかである．これで，すべての主張が示された． □

命題 A.3 E を Hilbert 空間，T を E 上の対称作用素とし，U を T の Cayley 変換とする．

(1) T が閉であること，$\mathrm{Im}(T+iI)$ が E において閉であること，$\mathrm{Im}(T-iI)$ が E において閉であること，U が閉であることの 4 条件は同値である．
(2) T が稠密に定義されていることと，$\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密であることとは同値である．
(3) T が自己随伴であることと，U がユニタリであることとは同値である．

証明 (1) 命題 4.32 (1) より $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\|(T\pm iI)\xi\|^2 = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|(\xi, T\xi)\|^2$ だから，$\mathrm{gr}(T)$, $\mathrm{Im}(T+iI)$, $\mathrm{Im}(T-iI)$ はすべて等長線型同型である．また，U は $\mathrm{Im}(T+iI)$ を定義域，$\mathrm{Im}(T-iI)$ を値域とする等長作用素だから，$\mathrm{Im}(T+iI)$, $\mathrm{Im}(T-iI)$, $\mathrm{gr}(U)$ はすべて位相線型空間として同型である．よって，$\mathrm{gr}(T)$, $\mathrm{Im}(T+iI)$, $\mathrm{Im}(T-iI)$, $\mathrm{gr}(U)$ が完備であるかどうかは常に一致する．これは，T が閉であること，$\mathrm{Im}(T+iI)$ が E において閉であること，$\mathrm{Im}(T-iI)$ が E において閉であること，U が閉であることの 4 条件が同値であることを示す．

(2) $\mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Im}(I-U)$（定理 A.2 (2)）から従う．

(3) 定理 4.40 より，T が自己随伴であることは，$\mathrm{Im}(T+iI) = \mathrm{Im}(T-iI) = E$ であることと同値である．これは $\mathrm{Dom}\, U = \mathrm{Im}\, U = E$，すなわち U がユニタリであることを意味する． □

命題 A.4 E を Hilbert 空間，U を E 上の等長作用素とする．

(1) $\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密ならば，$I-U$ は単射である．
(2) U がユニタリ作用素であるとする．このとき，$\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密であることと，$I-U$ が単射であることとは同値である．

証明 (1) $\xi \in \mathrm{Ker}(I-U)$ とすると，任意の $\eta \in \mathrm{Dom}(I-U)$ に対して $\langle \xi | (I-U)\eta \rangle = \langle \xi|\eta\rangle - \langle \xi | U\eta\rangle = \langle \xi|\eta\rangle - \langle U\xi | U\eta\rangle = 0$ である．よって，$\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密ならば，$I-U$ は単射である．

(2) U がユニタリならば $\mathrm{Ker}(I-U) = (\mathrm{Im}(I-U))^{\perp}$ であり（系 1.6），したがって $\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密であることと $I-U$ が単射であることとは同値である． □

定理 A.2，命題 A.3，命題 A.4 より，Cayley 変換・逆変換は，

- E 上の対称作用素 T と，E 上の等長作用素 U であって $I-U$ が単射であるものとの一対一対応，
- E 上の稠密に定義された対称作用素 T と，E 上の等長作用素 U であって $\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密である（このとき自動的に $I-U$ は単射である）ものとの一対一対応，
- E 上の自己随伴作用素 T と，E 上のユニタリ作用素 U であって $\mathrm{Im}(I-U)$ が E において稠密である（あるいは同値だが，$I-U$ が単射である）ものとの一対一対応

を与える．

Cayley 変換を利用して，対称作用素の拡張問題を考えることができる．

定理 A.5 E を Hilbert 空間，T を E 上の稠密に定義された閉対称作用素とする．

(1) T が自己随伴作用素に拡張できるための必要十分条件は，$(\mathrm{Im}(T+iI))^{\perp}$ と $(\mathrm{Im}(T-iI))^{\perp}$ の Hilbert 次元が一致することである．

(2) T が対称作用素の中で（線型作用素の拡張関係に関して）極大であるための必要十分条件は，$(\mathrm{Im}(T+iI))^{\perp}$ または $(\mathrm{Im}(T-iI))^{\perp}$ が $\{0\}$ であることである．

証明　T の Cayley 変換を U とする．U は E 上の等長作用素であり，$\mathrm{Im}(I-U)$ は E において稠密である（命題 A.3 (2)）．また，$\mathrm{Dom}\,U=\mathrm{Im}(T+iI)$，$\mathrm{Im}\,U=\mathrm{Im}(T-iI)$ であり，これらはともに E において閉である（命題 A.3 (1)）．E 上の等長作用素 V が U の拡張ならば，自動的に $\mathrm{Im}(I-V)$ は E において稠密であり，したがって命題 A.4 より $I-V$ は単射であることに注意する．

(1)　定理 A.2 と命題 A.3 (3) より，T が自己随伴作用素に拡張できることは U がユニタリ作用素に拡張できることと同値であり，さらにこれは $(\mathrm{Im}(T+iI))^{\perp}$ と $(\mathrm{Im}(T-iI))^{\perp}$ の Hilbert 次元が一致することと同値である．

(2)　定理 A.2 より，T が対称作用素の中で極大であることは U が等長作用素の中で極大であることと同値であり，さらにこれは $(\mathrm{Im}(T+iI))^{\perp}$ または $(\mathrm{Im}(T-iI))^{\perp}$ が $\{0\}$ であることと同値である．　□

A.2　自己随伴作用素のスペクトル分解

定理 A.6（自己随伴作用素のスペクトル分解定理）　E を Hilbert 空間とする．E 上の自己随伴作用素 T に対して，$\mathbb{R}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π であって，

$$T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\Pi$$

を満たすものが一意に存在する．さらに，この Π は，$\mathrm{supp}\,\Pi=\mathrm{Sp}(T)$ を満たす．

証明　T を E 上の自己随伴作用素とする．$\mathbb{R}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π が $T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\Pi$ を満たすとすると，命題 5.11 より

$$\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{ess\,ran}_{\Pi}\,z=\mathrm{supp}\,\Pi$$

である．あとは，条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π が一意に存在することを示せばよい．

T の Cayley 変換を $U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$ とする．関数 $(z-i)/(z+i)$ が与える同相写像を $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{U}\setminus\{1\}$ と書く．$\mathbb{R}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π が $T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\Pi$ を満たすならば，定理 5.7 (1), (4), (6) および命題 5.6 より

$$\begin{aligned}U&=(T-iI)(T+iI)^{-1}\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{z-i}{z+i}\,d\Pi\\&=\int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\,d(\phi_*\Pi)\end{aligned}$$

である．次に，$U\setminus\{1\}$ 上の E-射影値 Borel 測度 Π' が $U=\int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\,d\Pi'$ を満たすとする．T は U の Cayley 逆変換 $i(I+U)(I-U)^{-1}$ に等しく，ϕ の逆写像 $\phi^{-1}\colon\mathbb{U}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ は $i(1+z)/(1-z)$ だから，定理 5.7 (1),

(4), (6) および命題 5.6 より

$$\begin{aligned} T &= i(I+U)(I-U)^{-1} \\ &\subseteq \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} \frac{i(1+z)}{1-z}\, d\varPi' \\ &= \int_{\mathbb{R}} z\, d(\phi_*^{-1}\varPi') \end{aligned}$$

である．T と $\int_{\mathbb{R}} z\, d(\phi_*^{-1}\varPi')$ はともに自己随伴だから（系 5.14 (1)），自己随伴作用素の極大性（命題 4.39）より，

$$T = \int_{\mathbb{R}} z\, d(\phi_*^{-1}\varPi')$$

を得る．よって，$T = \int_{\mathbb{R}} z\, d\varPi$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi$ と $U = \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\, d\varPi'$ を満たす $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi'$ とは，同相写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}\setminus\{1\}$ を経由して一対一に対応する．

U はユニタリ作用素だから，連続正規作用素のスペクトル分解定理（定理 3.7）より，$U = \int_{\mathbb{U}} z\, d\varPi'$ を満たす $\mathbb{U}$ 上の E-射影値 Borel 測度 $\varPi'$ が一意に存在する．$I-U$ は単射だから，この $\varPi'$ について $\varPi'(\{1\}) = \operatorname{Ker}(I-U) = \{0\}$（命題 3.9）であり，したがって $\varPi'$ は $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ 上の E-射影値 Borel 測度とみなせる．上に述べた一対一対応と合わせて，主張を得る． $\square$

参考文献

連続正規作用素のスペクトル分解については Arveson [1] を，連続とは限らない正規作用素のスペクトル分解については Rudin [4] と Conway [3] を参考にした．ユニタリ表現に関する Schur の補題（定理 3.34）の証明は，Tao [5] による．稠密に定義された閉作用素の極分解については，片岡 [9] を参考にした．本稿で前提とした Gelfand 理論の結果は，「Gelfand 理論のノート」 [10] で解説している．

[1] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[2] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Springer, 2013.

[3] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd edition, Springer, 2007.

[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1991.

[5] T. Tao, What's New 'The Peter-Weyl theorem, and non-abelian Fourier analysis on compact groups', 2011.（2020 年 9 月 29 日アクセス）
https://terrytao.wordpress.com/2011/01/23/
the-peter-weyl-theorem-and-non-abelian-fourier-analysis-on-compact-groups/

[6] 新井朝雄，『量子力学の数学的構造 I』，朝倉書店，1999.

[7] 新井朝雄，『量子力学の数学的構造 II』，朝倉書店，1999.

[8] 新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[9] 片岡祐太，「mathematical analysis」，2019 年 3 月 24 日版．（現在非公開）

[10] 箱，「Gelfand 理論のノート」，2020 年 9 月 18 日版.
https://o-ccah.github.io

[11] 箱，「コンパクト作用素のノート」，2021 年 6 月 2 日版.
https://o-ccah.github.io

[12] 箱,「無限和のノート」, 2020 年 9 月 29 日版.
https://o-ccah.github.io
[13] 宮島静雄,『関数解析』, 横浜図書, 2005.