組合せゲーム理論入門：不偏ゲームと Grundy 数

箱（@o_ccah）

2017 年 11 月 12 日

（最終更新日：2019 年 2 月 16 日）

概要

組合せゲーム理論（combinatorial game theory）とは，組合せ論的な（すなわち，偶然に左右されない）ゲームを研究する分野である．本発表では，組合せゲーム理論の基礎と，その簡単な応用を紹介する．

前半では，組合せゲーム理論における基本的な概念を導入し，組合せゲームの集合が Abel 群の構造をもつことを示す．後半では，不偏ゲームと呼ばれるクラスに注目し，Sprague–Grundy の定理を証明する．この定理によって，不偏ゲームに対して Grundy 数と呼ばれる値が定義できる．最後に，Grundy 数の応用として 8 進ゲームの周期性定理を示し，系として Dawson's Kayles と呼ばれるゲームの先手必勝・後手必勝が完全に決定できることを見る．

1　組合せゲームとその代数構造

1.1　組合せゲームの定義

「組合せゲーム」の最も基本的な形は，2 人のプレイヤ（それぞれ**左**・**右**と呼ぶ）が交互に手を打っていき，最後に手を打ったほうを勝ちとするものである（ゲームは必ず有限手で終了するとする）[*1]．数学的には，次のように定式化される．

定義 1.1（組合せゲーム）　集合 $\tilde{\mathbb{G}}_n$（$n \in \mathbb{N}$）を，次のように再帰的に定める[*2]．

$$\tilde{\mathbb{G}}_0 = \Big\{\{\emptyset \mid \emptyset\}\Big\},$$
$$\tilde{\mathbb{G}}_{n+1} = \Big\{\{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\} : \mathcal{G}^L, \mathcal{G}^R \subseteq \tilde{\mathbb{G}}_n\Big\}.$$

組合せゲームあるいは単に**ゲーム**とは，集合

$$\tilde{\mathbb{G}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{G}}_n$$

の元をいう．集合論的に等しいゲームは互いに**同型**であるといい，G と H が同型であることを $G \cong H$ と表す．ゲーム $G \cong \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ に対して，$\mathcal{G}^L$ の元を G の**左選択肢**，$\mathcal{G}^R$ の元を G の**右選択肢**という．

$\mathcal{G}^L = \{G^L_1, \ldots, G^L_m\}$，$\mathcal{G}^R = \{G^R_1, \ldots, G^R_n\}$ のとき，ゲーム $G = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ を単に $G = \{G^L_1, \ldots, G^L_m \mid G^R_1, \ldots, G^R_n\}$ と書く．空ゲーム $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ は $\{\mid\}$ あるいは単に 0 と書かれる．

[*1] 3 人以上で行うゲームや最後に手を打った方を負けとするゲーム，ループなどの無限性をもつゲームなども研究されているが，本発表ではそれらには触れない．

[*2] 集合論的には，$\{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ は順序対 $(\mathcal{G}^L, \mathcal{G}^R)$ とみなせばよい．

定義 1.2（ゲームの帰結類） 各ゲームは，4 つの帰結類 $\mathscr{N}$（next，先手必勝），$\mathscr{P}$（previous，後手必勝），$\mathscr{L}$（left，左手必勝），$\mathscr{R}$（right，右手必勝）のいずれかただ 1 つに属する．$G \cong \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ が属する帰結類を，次のように再帰的に定める（$\forall G^R \in \ldots$ は $\forall G^R \in \mathcal{G}^R$, $G^R \in \ldots$ の略記とする．他も同様）．

$$\begin{aligned}
&\forall G^R \in \mathscr{N} \cup \mathscr{L} \quad \text{ならば} \quad G \in \mathscr{P} \cup \mathscr{L},\\
&\exists G^R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{R} \quad \text{ならば} \quad G \in \mathscr{N} \cup \mathscr{R},\\
&\forall G^L \in \mathscr{N} \cup \mathscr{R} \quad \text{ならば} \quad G \in \mathscr{P} \cup \mathscr{R},\\
&\exists G^L \in \mathscr{P} \cup \mathscr{L} \quad \text{ならば} \quad G \in \mathscr{N} \cup \mathscr{L}.
\end{aligned}$$

ゲーム G の帰結類を $o(G)$ と書く．

1.2 組合せゲームの代数

定義 1.3（ゲームの直和） ゲーム $G \cong \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ と $H \cong \{\mathcal{H}^L \mid \mathcal{H}^R\}$ の直和 $G+H$ を，次のように再帰的に定める．

$$G + H \cong \{\mathcal{G}^L + H,\ G + \mathcal{H}^L \mid \mathcal{G}^R + H,\ G + \mathcal{H}^R\}.$$

ただし，$\mathcal{G}^L + H = \{G^L + H : G^L \in \mathcal{G}^L\}$ などとする．

定義 1.4（ゲームの逆） ゲーム $G \cong \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ の逆 $-G$ を，次のように再帰的に定める．

$$-G \cong \{-\mathcal{G}^R \mid -\mathcal{G}^L\}.$$

ただし，$-\mathcal{G}^R = \{-G^R : G^R \in \mathcal{G}^R\}$ などとする．ゲーム $G + (-H)$ を $G - H$ と書く．

定理 1.5 (1) ゲームの直和は結合律および交換律を満たす．
(2) 任意のゲーム G に対して，$0 + G \cong G + 0 \cong G$ である．
(3) 任意のゲーム G に対して，$-(-G) \cong G$ である． □

定義 1.6（ゲームの同値） $G, H \in \tilde{\mathbb{G}}$ に対して，関係 $=$ を

$$G = H \iff \forall X \in \tilde{\mathbb{G}},\ o(G+X) = o(H+X)$$

と定める．$G = H$ であるとき，G と H は**同値**であるという．この関係 $=$ は同値関係となる．$\tilde{\mathbb{G}}$ を関係 $=$ で割った商集合を，$\mathbb{G}$ と書く．

「帰結類」は $\mathbb{G}$ 上 well-defined，すなわち $G = G'$ ならば $o(G) = o(G')$ である．実際，$G = G'$ ならば任意の $X \in \tilde{\mathbb{G}}$ に対して $o(G+X) = o(G'+X)$ だから，$X \cong 0$ とすることで $o(G) = o(G')$ を得る．

定理 1.7 $G = 0$ であるための必要十分条件は，$o(G) = \mathscr{P}$ である．

証明 $G = 0$ ならば $o(G) = o(0) = \mathscr{P}$ である．逆に，$o(G) = \mathscr{P}$ とする．このとき，任意の $X \in \tilde{\mathbb{G}}$ に対して $o(G+X) = o(X)$ であることを示したい．対称性より，X において左が先手・後手で勝てるならば $G+X$ においても左が先手・後手で勝てることを示せば十分である．

X で左が先手で勝てるとし，$G+X$ の左が先手での対局を考える．まず左は X に先手必勝戦略の初手を打つ．その後は，右が G に手を打てば G の後手必勝戦略で応じ，右が X に手を打てば X の先手必勝戦略で応

じることで，左は勝てる．同様に，X において左が後手で勝てるならば，$G+X$ においても左が後手で勝てることがわかる．以上より，$o(G)=\mathscr{P}$ ならば $G=0$ となる．□

定理 1.8 $\mathbb{G}$ はゲームの直和によって Abel 群をなす．

証明 まず，$G=G'$ かつ $H=H'$ ならば，任意の $X\in\tilde{\mathbb{G}}$ に対して

$$\begin{aligned} o((G+H)+X) &= o(G+(H+X)) = o(G'+(H+X)) \\ &= o(H+(G'+X)) = o(H'+(G'+X)) = o((G'+H')+X) \end{aligned}$$

が成り立つから $G+H=G'+H'$ である．すなわち，ゲームの直和は $\mathbb{G}$ 上 well-defined である．

定理 1.5 (1) より直和は $\mathbb{G}$ 上結合律と交換律を満たし，また定理 1.5 (2) より 0（の同値類）が直和の単位元であることがわかる．

最後に，$-G$（の同値類）が G（の同値類）の直和に関する逆元を与えていること，すなわち $G-G=0$ を示す．$G-G$ において後手は，物真似戦略によって勝つことができる．すなわち，先手の $\pm G$ への手に対し，後手はそれに対応する $\mp G$ への手で応じることで勝つことができる．よって $o(G-G)=\mathscr{P}$ だから，定理 1.7 より $G-G=0$ である．□

1.3 組合せゲームの順序

定義 1.9（ゲームの順序） 4 つの帰結類 $\mathscr{N},\mathscr{P},\mathscr{L},\mathscr{R}$ の間の順序 $\le$ を，$\mathscr{R}\le\mathscr{N}\le\mathscr{L}$，$\mathscr{R}\le\mathscr{P}\le\mathscr{L}$，$\mathscr{N}$ と $\mathscr{P}$ は比較不能，によって定める．

$G,H\in\tilde{\mathbb{G}}$ に対して，関係 $\le$ を

$$G\le H \iff \forall X\in\tilde{\mathbb{G}},\ o(G+X)\le o(H+X)$$

で定義する．この関係 $\le$ は $\mathbb{G}$ 上の順序を定める*3．

必要に応じて記号 $\ge,<,>$ も用いる．また，$G\le H$ でも $G\ge H$ でもないこと（すなわち，G と H が比較不能であること）を $G\gtrless H$ と表す．

定理 1.10 $G,H,J\in\tilde{\mathbb{G}}$ に対して，$G\le H$ ならば $G+J\le H+J$ が成り立つ．

証明 $G\le H$ ならば，任意の $X\in\tilde{\mathbb{G}}$ に対して

$$o((G+J)+X)=o(G+(J+X))\le o(H+(J+X))=o((H+J)+X)$$

だから $G+J\le H+J$ である．□

定理 1.11 $G\in\tilde{\mathbb{G}}$ に対して，次の同値関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} G\gtrless 0 &\iff o(G)=\mathscr{N}, \\ G=0 &\iff o(G)=\mathscr{P}, \\ G>0 &\iff o(G)=\mathscr{L}, \\ G<0 &\iff o(G)=\mathscr{R}. \end{aligned}$$

証明 $G\ge 0\Leftrightarrow o(G)\ge\mathscr{P}$，$G\le 0\Leftrightarrow o(G)\le\mathscr{P}$ をいえばよいが，これは定理 1.7 と同様に示される．□

*3 関係 $\le$ は，$\tilde{\mathbb{G}}$ 上では順序にならない．

2　不偏ゲームと Grundy 数

定義 2.1（不偏ゲーム）　$G \cong \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ が不偏ゲーム（impartial game）であるとは，$\mathcal{G}^L = \mathcal{G}^R$ であり，かつ任意の $G' \in \mathcal{G}^L = \mathcal{G}^R$ が不偏ゲームであることをいう（再帰的に定める）[*4]．すなわち，不偏ゲームとは，その全局面において左選択肢と右選択肢が等しいゲームを指す．不偏ゲームの左・右選択肢は単に選択肢と呼ばれ，不偏ゲーム $\{\mathcal{G} \mid \mathcal{G}\}$ を単に $\{\mathcal{G}\}$ と書く．

不偏ゲームの帰結類は $\mathscr{N}$（先手必勝）または $\mathscr{P}$（後手必勝）のいずれかである．また，不偏ゲーム G, H の直和 $G + H$ はまた不偏ゲームであり，$-G \cong G$ である．

不偏ゲームの典型的な例として，ニムがある．

定義 2.2（ニム）　$n \in \mathbb{N}$ に対して，ニム $*n$ を次のように再帰的に定める．

$$*n \cong \{*0, *1, \ldots, *(n-1)\}$$

定理 2.3　$m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \neq n$ ならば $*m \neq *n$ である．

証明　$m > n$ とすると，$*m - *n$ において先手は，初手で $*m$ を $*n$ にすることで局面を $*n - *n = 0$ として勝つことができる．よって $o(*m - *n) = \mathscr{N}$ だから $*m \neq *n$ である．□

次の定理はニムどうしの直和の計算方法を与える．ここで，$m \oplus n$ はビットごとの排他的論理和を表す．

定理 2.4　$m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$*m + *n = *(m \oplus n)$ が成り立つ．

証明　$m \oplus n \oplus p = 0$ ならば $*m + *n + *p = 0$ であることを帰納法で示す．先手が初手で $*m$ を $*m'$（$m' < m$）にしたとする．$N = m' \oplus n \oplus p \neq 0$ のビット表示が 1 である位のうち最高位のものを考える．すると，m', n, p のいずれかは，その位が 1 でなければならない．n がそうだとすると，$n \oplus N < n$ となるから，後手は $*n$ を $*(n \oplus N)$ にする手を打って局面を $*m' + *(n \oplus N) + *p$ にできる．$m' \oplus (n \oplus N) \oplus p = 0$ だから帰納法よりこの局面は後手必勝であり，$o(*m + *n + *p) = \mathscr{P}$，すなわち $*m + *n + *p = 0$ となる．

さて，$m \oplus n \oplus (m \oplus n) = 0$ だから $*m + *n + *(m \oplus n) = 0$，よって $*m + *n = *(m \oplus n)$ である．□

定理 2.5（Sprague–Grundy の定理）　任意の不偏ゲーム G に対して $G = *n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が一意に存在する．この n を G の Grundy 数あるいは**ニム数**といい，$\mathscr{G}(G)$ で表す．

有限集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ に対してその最小除外値 $\operatorname{mex} S$ とは，S に属さない自然数のうち最小のものを指す．

証明　一意性は定理 2.3 から従うから，存在を示す．帰納法より $G = \{*a_1, \ldots, *a_k\}$ と置いてよい．このとき，$n = \operatorname{mex}\{a_1, \ldots, a_k\}$ と定めれば $G = *n$ であることを示そう．$G - *n$ において先手が G に手を打って局面を $*a_i - *n$ にしたとすると，mex の定義より $a_i > n$，したがって $o(*a_i - *n) = \mathscr{N}$ だから，後手の勝ちとなる．一方，$G - *n$ において先手が $*n$ に手を打って局面を $G - *n'$（$n' < n$）にしたとすると，mex の定義より G は選択肢 $*n'$ をもつので，後手は局面を $*n' - *n' = 0$ にすることができ，やはり後手の勝ちとなる．よって $o(G - *n) = \mathscr{P}$ だから，$G = *n$ である．□

[*4] 「不偏ゲーム」は $\mathbb{G}$ 上では well-defined にならない．たとえば，0 は不偏ゲームだが，それと同値な $\{-1 \mid 1\} \cong \{\{\mid 0\} \mid \{0 \mid\}\}$ は不偏ゲームではない．

3　8 進ゲームの周期性

定義 3.1（8 進ゲーム） $\mathbb{N}_{>0}$ の部分集合の組 (A, B, C) に対して，不偏ゲームの列 $\{G_n\}$ を次のように定める．

(i) $k \in A$ ならば，G_k は選択肢として G_0 をもつ．
(ii) $k \in B$ ならば，G_n（$n \geq k+1$）は選択肢として G_{n-k} をもつ．
(iii) $k \in C$ ならば，G_n（$n \geq k+2$）は選択肢として $G_i + G_{n-k-i}$（$i = 1, 2, \ldots, n-k-1$）をもつ．
(iv) $\{G_n\}$ の選択肢は (i)，(ii)，(iii) のものですべてである．

このようなゲームの列 $\{G_n\}$ を，ルール (A, B, C) から定まる **8 進ゲーム**（octal game）という[*5]．A, B, C が有限集合であれば，これを有限 8 進ゲームという．

8 進ゲーム $\{G_n\}$ について，$G_0 \cong 0$ であることが定義から容易にわかる．

たとえば，「n 個の石を交互に取っていき，最後に石を取った方の勝ち．一度に取る石の数は $S \subseteq \mathbb{N}_{>0}$ の元から選ぶ」というゲームは，ルール $(S, S, \emptyset)$ から定まる 8 進ゲームである．また，「横一列に並んだ n 個のマスがあり，交互に隣接した 2 マスを消していき，最後にマスを消した方の勝ち」というゲーム（Dawson's Kayles と呼ばれる）は，ルール $(\{2\}, \{2\}, \{2\})$ から定まる 8 進ゲームである．

ゲームの列 $\{G_n\}$ が $n = n_0$ から**周期** p をもつとは，任意の $n \geq n_0$ に対して $\mathscr{G}(G_{n+p}) = \mathscr{G}(G_n)$ が成り立つことをいう．次の定理は，有限 8 進ゲームに周期性が存在すれば，その周期性はたかだか有限の計算で確かめられることを主張している．

定理 3.2（8 進ゲームの周期性定理） $\{G_n\}$ を $(A, B, C) \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ から定まる有限 8 進ゲームとする．$\max(A \cup B \cup C) = k$ と置くとき，ある自然数 $n_0 \geq 1$ と $p \geq 1$ が存在して

$$\mathscr{G}(G_{n+p}) = \mathscr{G}(G_n) \quad (n_0 \leq n < 2n_0 + p + k)$$

が成り立つならば，$\{G_n\}$ は $n = n_0$ から周期 p をもつ．

補題 8 進ゲーム $\{G_n\}$ と自然数 $a \geq 1$，$b \geq 0$，$p \geq 0$ に対して，$G_a + G_b$ が G_n の選択肢にあることと $G_{a+p} + G_b$ が G_{n+p} の選択肢にあることは同値である．□

証明 $\mathscr{G}(G_{n+p}) = \mathscr{G}(G_n)$（$n \geq 2n_0 + p + k$）を n に関する帰納法で示す．G_n の選択肢はすべて

$$G_a + G_b \quad (a, b \in \mathbb{N},\ n - k \leq a + b < n)$$

という形をしている．$a + b \geq n - k = 2n_0 + p > 2n_0$ だから，a か b のどちらかは n_0 以上である．また，G_{n+p} の選択肢はすべて

$$G_{a'} + G_{b'} \quad (a, b \in \mathbb{N},\ n + p - k \leq a' + b' < n + p)$$

という形をしている．$a' + b' \geq n + p - k = 2n_0 + 2p$ だから，a' か b' のどちらかは $n_0 + p$ 以上である．これらのことと補題より，G_n, G_{n+p} は自然数 $a_i \geq n_0$ および $b_i \geq 0$ を用いて

$$G_n = \{G_{a_1} + G_{b_1},\ G_{a_2} + G_{b_2},\ \ldots\},$$
$$G_{n+p} = \{G_{a_1+p} + G_{b_1},\ G_{a_2+p} + G_{b_2},\ \ldots\}$$

[*5] k が A, B, C に属しているかどうかによって d_k に 0 から 7 までの数字を割り当てれば，(A, B, C) に対応する 8 進小数 $0.d_1 d_2 d_3 \ldots$ が定まる（数学的な意味は特にないが）．これが「8 進ゲーム」という名称の由来である．

表 1　$0 \leq n < 204$ における $\mathscr{G}(DK_n)$ の値．周期の例外を下線で示した．

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
0+	$\underline{0}$	$\underline{0}$	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	$\underline{0}$	5	$\underline{2}$	$\underline{2}$	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	$\underline{2}$	7
34+	4	$\underline{0}$	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	$\underline{2}$	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
68+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
102+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
136+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
170+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7

と表せることがわかる（$n_0 \geq 1$ を用いた）．ここで，$a_i \geq n_0$ だから帰納法の仮定より $\mathscr{G}(G_{a_i+p}) = \mathscr{G}(G_{a_i})$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(G_{n+p}) &= \operatorname*{mex}_i\bigl(\mathscr{G}(G_{a_i+p}) \oplus \mathscr{G}(G_{b_i})\bigr)\\ &= \operatorname*{mex}_i\bigl(\mathscr{G}(G_{a_i}) \oplus \mathscr{G}(G_{b_i})\bigr) = \mathscr{G}(G_n)\end{aligned}$$

が従う．□

定理 3.3（Guy–Smith）　Dawson's Kayles DK_n は，$n = 53$ から周期 34 をもつ．また，DK_n は $n = 0, 1, 15, 35$ または $n \equiv 5, 9, 21, 25, 29 \pmod{34}$ のとき後手必勝であり，それ以外のとき先手必勝である．

証明　計算により，$53 \leq n < 2 \cdot 53 + 34 + 2 = 142$ に対して $\mathscr{G}(DK_n) = \mathscr{G}(DK_{n+34})$ が成り立つことがわかる（表 1）から，8 進ゲームの周期性定理より DK_n は $n = 53$ から周期 34 をもつ．定理の後半は，$o(G_n) = \mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{G}(G_n) = 0$ に注意すれば定理の前半と表 1 からわかる．□

参考文献

本発表は，主に Siegel [3] の II.1 節および IV.1–IV.2 節による．Siegel [3] は組合せゲーム理論の話題を網羅的に解説しており，この分野のバイブル的な存在である．不偏とは限らない一般のゲームの研究のパイオニアである Berlekamp, Conway, Guy による本 *Winning Ways* [2] は，たくさんの具体的なゲームを通して理論を紹介している．組合せゲーム理論の手軽な入門書としては，Albert, Nowakowski, Wolfe [1] をおすすめする．

[1] M. H. Albert, R. H. Nowakowski, D. Wolfe, *Lessons in Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory*, A K Peters / CRC Press, 2007.
川辺 治之（訳），『組合せゲーム理論入門 勝利の方程式』，共立出版，2011.

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays Volume 1–4*, 2nd ed., A K Peters / CRC Press, 2001–2004.
小林 欣吾，佐藤 創（監訳），『数学ゲーム必勝法 1–2』，共立出版，2016.（第 3 巻，第 4 巻は現在邦訳なし）

[3] A. N. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 146, American Mathematical Society, 2013.