一様空間概説

箱（@o_ccah）

2019 年 5 月 12 日

概要

本稿では，位相空間論の基本的な知識をもった読者を想定して，一様空間という概念を紹介します．最後の節では，一様空間の有用性を示す例として，距離空間に関するよく知られた定理が，実は一様空間に対しても成り立つことを見ます．

記号と用語

- 集合 X 上のフィルタとは，X の部分集合族 $\mathfrak{F}$ であって，2 条件
  - $F \in \mathfrak{F}$ かつ $F \subseteq F' \subseteq X$ ならば $F' \in \mathfrak{F}$ である．
  - $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}$ ならば $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathfrak{F}$ である．

  を満たすもののことをいう．
- 位相空間 X の部分集合 A に対して，$\overline{A}$ で A の閉包を，A° で A の内部を表す．
- 位相空間の正則性に，1 点集合が閉であることは課さない．
- X を集合，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を $X \times X$ の部分集合族とする．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の合成を，

  $$\boldsymbol{BA} = \{(x, z) \in X \times X \mid \text{ある } y \in X \text{ が存在して，} (x, y) \in \boldsymbol{A} \text{ かつ } (y, z) \in \boldsymbol{B}\}$$

  と定める．$\boldsymbol{A}$ の n 項の合成 $\boldsymbol{A} \cdots \boldsymbol{A}$ を，$\boldsymbol{A}^n$ と書く．また，$\boldsymbol{A}$ の逆を，

  $$\boldsymbol{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in \boldsymbol{A}\}$$

  と定める．$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$ であるとき，$\boldsymbol{A}$ は対称であるという．
- X を集合，$\boldsymbol{A}$ を $X \times X$ の部分集合族とする．$x \in X$ に対して，

  $$\boldsymbol{A}[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in \boldsymbol{A}\}$$

  と定める．
- X, Y を集合とする．写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$X \times X$ から $Y \times Y$ への写像 $(x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$ を，$f^\times\colon X \times X \to Y \times Y$ と書く．

1　まえせつ

位相空間は，極限や連続性などの概念を扱うことのできる空間のクラスでした．これに対して，一様空間は，

極限や連続性などの概念を「一様に」扱うことのできる空間のクラス

であると言えます．

「一様に」というのがどういうことなのかを見るために，位相空間の範疇では扱えない概念に注目してみます．たとえば，完備性がその例です．完備性を定義するためには，Cauchy 列を定義する必要がありますが，それは距離空間 (X,d) においては次のように定義されるものでした．

> X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは，任意の $\epsilon>0$ に対して，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $m,n\geq n_0$ に対して $d(x_m,x_n)<\epsilon$ が成り立つことをいう．

上の文中の「$d(x_m,x_n)<\epsilon$」という部分で，点 x_m と x_n がともに「動く」点であることがポイントです．「動かない」点と「動く」点との組み合わせであれば，動かない方の点の近傍フィルタを考えることで，位相空間の範疇でも扱うことができます．たとえば「点列の収束」は，「『動かない』点に『動く』点列が収束する」という形で述べられるため，位相空間の範疇で定式化できたのでした．ところが，どちらも「動く」点である場合には，こうは行きません．

別の例として，Lebesgue の被覆補題を考えてみます．これは，距離空間に関しては，次のように述べられます．

> (X,d) をコンパクト距離空間，$\mathfrak{U}$ をその開被覆とすると，ある $\delta>0$ が存在して，任意の $x\in X$ に対して，x を中心とする半径 δ の開球は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる．

ここでは，δ を x によらずに「一様に」とれるということが肝要です．位相空間の範疇では，空間の 2 点の近傍フィルタの間に明示的な関係はありませんから，このような「一様性」を表現することはできません．

このような「一様性」のからむ概念は，距離空間の範疇で定式化されることが多いと思います．距離空間は，距離という一様な「近さの基準」を備えているため，この種の概念を扱うことができるのです．

ところが，距離空間の構造は，「一様性」をあつかうには「過剰」であると言わざるをえません．実際，完備距離空間に関する議論，あるいは距離空間に対する Lebesgue の被覆補題の証明を思い出してみれば，それらは定量的というよりはむしろ定性的で，実数の特性の使われ方は，せいぜいが「$\epsilon/3$ をとる」程度のものであったことがわかると思います．概念の定式化にあたってこのような「過剰」な構造を課すことは，一般性の観点から言って望ましくありませんし，本質の理解を妨げうることでもあります．

そこで，「一様性」を扱うための適切な空間の範疇として，一様空間が登場します．ここまでに述べたことからも察せられると思いますが，一様空間は，位相空間と距離空間の中間に位置する概念です．すなわち，距離空間は自然に一様空間とみなすことができ，一様空間は自然に位相空間とみなすことができます．

次節から，一様空間について数学的に説明していきます．2 節では，一様空間の定義を述べます．3 節では，一様空間の 2 つの重要な例として，距離空間と位相群を見ます．4 節では，一様空間が自然に位相を定めることを説明します．5 節では，一様空間の間の射にあたる一様連続写像を定義します．最後に 6 節では，距離空間に関するよく知られた定理が，実は一様空間に対しても成り立つことを見ます．紙数の関係で，一様空間の完備性については説明できませんが，一様空間に対する Lebesgue の被覆補題については，この節で証明します．

2　一様空間の定義

一様空間の定義は，次のとおりです．

定義 2.1（一様空間） X を集合とする．$X \times X$ の部分集合族 $\mathscr{U}$ が次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$ は X 上の**一様構造**あるいは**近縁系**であるといい，$(X, \mathscr{U})$ を**一様空間**という．

(U1) $\mathscr{U}$ は $X \times X$ 上のフィルタである．
(U2) 任意の $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ は対角集合 $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ を含む．
(U3) 任意の $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ に対してある $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在し，$\boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす．
(U4) $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ ならば $\boldsymbol{U}^{-1} \in \mathscr{U}$ である．

$\mathscr{U}$ を一様空間 $(X, \mathscr{U})$ の**一様構造**あるいは**近縁系**といい，$\mathscr{U}$ の元を一様空間 $(X, \mathscr{U})$ 上の**近縁**という．

一様構造 $\mathscr{U}$ を特に明示する必要がないときには，単に「X は一様空間である」などともいいます．

直観的には，一様空間 X の 2 点 x, y は，よりたくさんの近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $(x, y) \in \boldsymbol{U}$ となっているほど「近い」といえます．そのように考えれば，一様構造の条件 (U2)，(U4) は，「近さ」の基準が（ある意味で）反射的かつ対称的になっている，という条件だと捉えられます．また，(U3) は，「近さ」の基準を「刻む」ことができる，という条件だと捉えられます．このあたりの感覚は，距離空間を念頭に置くと把握しやすいと思います（次節で，一様空間の例として距離空間を見ます）．

位相空間に対して開基という概念が存在したように，一様空間に対して一様基という概念が存在します．

定義 2.2（一様基） $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\mathscr{B}$ を $X \times X$ の部分集合族とする．

$$\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \text{ある } \boldsymbol{B} \in \mathscr{B} \text{ が存在して } \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{U}\}$$

であるとき，$\mathscr{B}$ は一様空間 $(X, \mathscr{U})$（あるいは一様構造 $\mathscr{U}$）の**一様基**であるという．$\mathscr{B}$ が集合 X 上のある一様構造の一様基であることを，単に $\mathscr{B}$ は X 上の**一様基**であるという．

3　一様空間の例

この節では，距離空間と位相群が一様空間の例になる（より正確にいえば，距離空間・位相群の構造が自然に一様空間の構造を定める）ことを見ます．

■距離空間　(X, d) を距離空間とします．すなわち，d は $X \times X$ から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への関数であって，

- 任意の $x, y \in X$ に対して，$d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 任意の $x, y \in X$ に対して $d(y, x) = d(x, y)$
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

を満たすとします．$r > 0$ に対して

$$\boldsymbol{B}_d(r) = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < r\}$$

と定めると，$\{\boldsymbol{B}_d(r) \mid r > 0\}$ は X 上の一様基となります．すなわち，

$$\mathscr{U}_d = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \text{ある } r > 0 \text{ が存在して } \boldsymbol{B}_d(r) \subseteq \boldsymbol{U}\}$$

は X 上の一様構造をなします（確かめてみてください）．この一様構造 $\mathscr{U}_d$ を，**距離 d が定める一様構造**といいます．

■位相群　G を位相群とします．すなわち，G は位相構造をもつ群であって，その演算 $G \times G \to G; (x, y) \mapsto xy$ および $G \to G; x \mapsto x^{-1}$ は連続であるとします．単位元 $e \in G$ の各近傍 U に対して

$$[U]_{\mathrm{L}} = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in U\},$$
$$[U]_{\mathrm{R}} = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in U\}$$

と定めると，このような $[U]_{\mathrm{L}}$ の全体および $[U]_{\mathrm{R}}$ の全体は，それぞれ X 上の一様基となります．すなわち，

$$\mathscr{U}_{\mathrm{L}} = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \text{ある単位元近傍 } U \text{ が存在して } [U]_{\mathrm{L}} \subseteq \boldsymbol{U}\},$$
$$\mathscr{U}_{\mathrm{R}} = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \text{ある単位元近傍 } U \text{ が存在して } [U]_{\mathrm{R}} \subseteq \boldsymbol{U}\}$$

はともに X 上の一様構造をなします（確かめてみてください）．これらの一様構造 $\mathscr{U}_{\mathrm{L}}, \mathscr{U}_{\mathrm{R}}$ を，それぞれ，**位相群 G の左一様構造・右一様構造**といいます．

4　一様構造が定める位相

一様空間には，次のように自然に位相が定まります．

定義 4.1（一様構造が定める位相）　$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．X 上の位相 $\mathfrak{O}_{\mathscr{U}}$ であって，各点 $x \in X$ が

$$\mathscr{U}[x] = \{\boldsymbol{U}[x] \mid \boldsymbol{U} \in \mathscr{U}\}$$

を近傍フィルタとするようなものを，**一様構造 $\mathscr{U}$ が定める位相**という．

一様構造 $\mathscr{U}$ に対して，上の定義のような位相 $\mathfrak{O}_{\mathscr{U}}$ が一意に存在することを確かめましょう．そのためには，対応 $x \mapsto \mathscr{U}[x]$ が近傍写像の条件

(N1) 各点 $x \in X$ に対して，$\mathscr{U}[x]$ は X 上のフィルタである．
(N2) $N \in \mathscr{U}[x]$ ならば $x \in N$ である．
(N3) 任意の $N \in \mathscr{U}[x]$ に対して，ある $M \in \mathscr{U}[x]$ が存在して，任意の $y \in M$ に対して $N \in \mathscr{U}[y]$ となる．

を満たすことを示せばよいです[*1]．(N1)，(N2) はそれぞれ一様構造の条件 (U1)，(U2) からすぐにわかるので，(N3) を示します．定義より，示すべき命題は

任意の $x \in X$，$\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ に対してある $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在し，任意の $y \in \boldsymbol{V}[x]$ に対して $\boldsymbol{U}[x] \in \mathscr{U}[y]$ となる

です．$x \in X$ と $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ を任意にとります．(U3) より，$\boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ がとれます．すると，任意の点 $y \in \boldsymbol{V}[x]$ に対して $\boldsymbol{V}[y] \subseteq \boldsymbol{U}[x]$ です．実際，任意に点 $z \in \boldsymbol{V}[y]$ をとると，$y \in \boldsymbol{V}[x]$ と合わせて $z \in \boldsymbol{V}^2[x] \subseteq \boldsymbol{U}[x]$ がわかります．よって $\boldsymbol{V}[y] \subseteq \boldsymbol{U}[x]$ かつ $\boldsymbol{V}[y] \in \mathscr{U}[y]$ だから $\boldsymbol{U}[x] \in \mathscr{U}[y]$ であり，これで (N3) が示されました．

以下では，特に断らなくても，一様空間には常に上のように定まる位相を考えるものとします．

命題 4.2　X を一様空間とする．

(1) X 上の近縁の内部全体は，X の一様基をなす．特に，開近縁の全体は一様基をなす．

[*1] 内田 [4, p. 74–75] を参照してください．

(2) X 上の近縁の閉包全体は，X の一様基をなす．特に，閉近縁の全体は一様基をなす．

ここで，内部や閉包は，「X の一様構造から定まる X 上の位相」から定まる $X \times X$ 上の積位相に関してのものです．

補題　一様空間 X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ と任意の $\boldsymbol{A} \subseteq X \times X$ に対して，$\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1})^{\circ}$，$\overline{\boldsymbol{A}} \subseteq \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ が成り立つ．

補題の証明　任意の点 $(x, y) \in \boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y] \subseteq \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1}$ が成り立つ．実際，$(u, v) \in \boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ ならば $(u, x) \in \boldsymbol{U}^{-1}$，$(y, v) \in \boldsymbol{U}$ であり，$(x, y) \in \boldsymbol{A}$ と合わせて $(u, v) \in \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1}$ を得る．$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ は $X \times X$ における (x, y) の近傍だから，ここから $(x, y) \in (\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1})^{\circ}$ が従う．よって，$\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1})^{\circ}$ である．

点 $(x, y) \in \overline{\boldsymbol{A}}$ を任意にとる．すると，$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ は (x, y) の近傍だから，$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ は $\boldsymbol{A}$ と交わる．すなわち，点 $(u, v) \in (\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]) \cap \boldsymbol{A}$ がとれる．このとき $(x, u) \in \boldsymbol{U}$，$(u, v) \in \boldsymbol{A}$，$(v, y) \in \boldsymbol{U}^{-1}$ だから，$(x, y) \in \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ となる．よって，$\overline{\boldsymbol{A}} \subseteq \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ である．□

命題 4.2 の証明　(1)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $\boldsymbol{U}^{\circ}$ も近縁であることをいえばよい．一様構造の性質より，$\boldsymbol{V}^3 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす対称近縁 $\boldsymbol{V}$ がとれる．このとき補題より $\boldsymbol{V} \subseteq (\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-1})^{\circ} = (\boldsymbol{V}^3)^{\circ} \subseteq \boldsymbol{U}^{\circ}$ だから，$\boldsymbol{U}^{\circ}$ は近縁である．

(2)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，閉包が $\boldsymbol{U}$ に含まれるような近縁が存在することをいえばよい．一様構造の性質より，$\boldsymbol{V}^3 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす対称近縁 $\boldsymbol{V}$ がとれる．このとき補題より $\overline{\boldsymbol{V}} \subseteq \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^3 \subseteq \boldsymbol{U}$ だから，この $\boldsymbol{V}$ が求めるものである．□

一様空間（が定める位相）の分離性について，次のことがわかります．

命題 4.3　任意の一様空間は正則である．

証明　X を一様空間とする．X 上の閉近縁全体を $\mathscr{F}$ と置くと，$\mathscr{F}$ は一様基をなすので（命題 4.2 (2)），各点 $x \in X$ において $\mathscr{F}[x] = \{\boldsymbol{F}[x] \mid \boldsymbol{F} \in \mathscr{F}\}$ は x の近傍基をなす．特に，X の各点は閉集合のみからなる近傍基をもつ．よって，X は正則である．□

5　一様連続写像

位相空間の間の射にあたるものは連続写像でした．一様空間の間の射にあたる一様連続写像は，次のように定義されます．

定義 5.1（一様連続写像）　一様空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ が一様連続であるとは，Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して $f^{\times -1}(\boldsymbol{V}) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid (f(x_1), f(x_2)) \in \boldsymbol{V}\}$ が X 上の近縁となることをいう．

X と Y が距離空間の場合には，この定義は，いわゆるイプシロン・デルタ論法によるものと一致します．

容易にわかるように，一様連続写像の合成は一様連続です．また，連続性と一様連続性との間には，（期待されるとおり）次の命題が成り立ちます．

命題 5.2　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が（一様空間の間の写像として）一様連続ならば，f は（位相空間の間の写像として）連続である．

証明　$x \in X$ とする．点 $f(x)$ の任意の近傍は，Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を用いて $\boldsymbol{V}[f(x)]$ と表せる．f が一様連続ならば $f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は X 上の近縁となり，したがって $f^{-1}(\boldsymbol{V}[f(x)]) = f^{\times -1}(\boldsymbol{V})[x]$ は x の近傍である．よって，f は連続である． □

さて，一様空間の「同型」は，次のように定義されます．

定義 5.3（一様同型）　X, Y を一様空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であり，f と f^{-1} がともに一様連続であるとき，f は X から Y への**一様同型写像**であるという．一様空間 X, Y の間に一様同型写像が存在するとき，X と Y は**一様同型**であるという．

命題 5.2 より，一様同型写像は同相写像です．しかし，逆は一般には成り立ちません．たとえば，$(0, 1)$ から $\mathbb{R}$ への写像 $x \mapsto -1/x - 1/(x-1)$ は，同相写像ですが一様同型写像ではありません[*2]．したがって，「一様空間」は「位相空間」よりも精密な構造をもっているといえます．

6　コンパクト一様空間

この節では，いままで見てきたことを用いて，コンパクトな一様空間に関する定理を示します．

定理 6.1　コンパクト一様空間 X の一様構造は，$\Delta(X)$ の近傍全体，すなわち

$$\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq \boldsymbol{U}^{\circ}\}$$

である．

補題　X を一様空間，$\boldsymbol{U}$ を $\Delta(X)$ の近傍とする．X 上のすべての近縁の交叉は，$\boldsymbol{U}$ に含まれる．

補題の証明　$(x, y) \notin \boldsymbol{U}$ とする．$\boldsymbol{U}$ は $\Delta(X)$ の近傍だから，$\boldsymbol{U}[x]$ は x の近傍である．したがって，一様構造が定める位相の定義より，X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在して $\boldsymbol{V}[x] = \boldsymbol{U}[x]$ となる．このとき $(x, y) \notin \boldsymbol{V}$ である．よって，すべての近縁の交叉は $\boldsymbol{U}$ に含まれる． □

定理 6.1 の証明　X 上の近縁が $\Delta(X)$ の近傍であることは，命題 4.2 (1) からわかる．逆に，$\Delta(X)$ の任意の開近傍 $\boldsymbol{U}$ が X 上の近縁であることを示す．閉近縁の全体は一様基をなす（命題 4.2 (2)）から，補題より，X 上のすべての閉近縁の交叉は $\boldsymbol{U}$ に含まれる．すなわち，X 上の閉近縁の全体を $\mathscr{F}$ と置くと，$\{\boldsymbol{U}\} \cup \{\boldsymbol{F}^c\}_{\boldsymbol{F} \in \mathscr{F}}$ は $X \times X$ の開被覆である．$X \times X$ はコンパクトだから（Tychonoff の定理），有限部分被覆 $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}_1^c, \dots, \boldsymbol{F}_n^c\}$ が存在する．このとき $\boldsymbol{F}_1 \cap \cdots \cap \boldsymbol{F}_n \subseteq \boldsymbol{U}$ だから，$\boldsymbol{U}$ は X 上の近縁である． □

定理 6.1 は，コンパクト空間上の一様構造が（存在すれば）位相構造だけで決定されてしまうことを示しています．ここから，次のことがわかります．

定理 6.2　コンパクト一様空間 X から一様空間 Y への写像は，連続ならば一様連続である．

証明　$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．すると，$\Delta(Y)$ の近傍 $\boldsymbol{V}$ に対して，$f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は $\Delta(X)$ の近傍になる．このことと定理 6.1 より，f の一様連続性がわかる． □

[*2] より強く，$(0, 1)$ と $\mathbb{R}$ は一様同型ではありません．すなわち，$(0, 1)$ から $\mathbb{R}$ へのどんな写像も一様同型ではありません．これは，$\mathbb{R}$ は（一様空間として）完備だが $(0, 1)$ はそうではない，ということからわかります．

次に，一様空間に対する Lebesgue の被覆補題を示します．

定理 6.3（Lebesgue の被覆補題） X をコンパクト一様空間，$\mathfrak{U}$ をその開被覆とする．このとき，ある X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ が存在して，条件「任意の $x \in X$ に対して，$\boldsymbol{U}[x]$ は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる」を満たす．

証明 $\mathfrak{U}$ が開被覆であることと，一様構造が定める位相の定義より，各点 $x \in X$ に対して，$\boldsymbol{V}_x[x]$ が $\mathfrak{U}$ のある元に含まれるような近縁 $\boldsymbol{V}_x$ がとれる．これに対して，$\boldsymbol{W}_x^2 \subseteq \boldsymbol{V}_x$ を満たす開近縁 $\boldsymbol{W}_x$ をとる．すると，$\{\boldsymbol{W}_x[x]\}_{x \in X}$ はコンパクト空間 X の開被覆だから，有限部分被覆 $\{\boldsymbol{W}_{x_1}[x_1], \ldots, \boldsymbol{W}_{x_n}[x_n]\}$ がとれる．そこで

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}_{x_1} \cap \cdots \cap \boldsymbol{W}_{x_n}$$

と置く．この $\boldsymbol{U}$ が条件を満たすことを示す．点 $x \in X$ を任意にとる．$x \in \boldsymbol{W}_{x_i}[x_i]$ なる $1 \leq i \leq n$ がとれ，この i について

$$\boldsymbol{U}[x] \subseteq \boldsymbol{W}_{x_i}[x] \subseteq \boldsymbol{W}_{x_i}^2[x_i] \subseteq \boldsymbol{V}_{x_i}[x_i]$$

が成り立つ．ここで，第一の包含は $\boldsymbol{U}$ の定義から，第二の包含は $x \in \boldsymbol{W}_{x_i}[x_i]$ であることから，第三の包含は $\boldsymbol{W}_{x_i}^2 \subseteq \boldsymbol{V}_{x_i}$ であることから従う．さて，$\boldsymbol{V}_{x_i}$ の定義より，$\boldsymbol{V}_{x_i}[x_i]$ を含む $\mathfrak{U}$ の元が存在する．上の包含より，この $\mathfrak{U}$ の元は $\boldsymbol{U}[x]$ も含む．よって，$\boldsymbol{U}$ は条件を満たす． □

距離が定める一様構造の定義を思い出せば，上の定理が「距離空間に対する Lebesgue の被覆補題」の一般化になっていることがわかります．

定理 6.2 と定理 6.3 は，どちらも距離空間に関してはよく知られたものですが，実は一様空間に対しても成り立つのです．1 節で述べたことの繰り返しになりますが，むしろ，これらの定理を述べるにあたっては，距離空間の構造は「過剰」であり，一様空間の構造こそが適切なのです．

このように，一様空間という概念は，「一様性」が関係する議論の土台として適切な構造を，私たちに与えてくれます．

参考文献

本稿では，Bourbaki [1] に従って近縁系を用いて一様空間を定義しましたが，一様被覆系を用いる（等価な）アプローチも知られています．たとえば Willard [3] は，これら 2 つのアプローチをともに扱っています．また，本稿では触れられなかった話題，一様空間の完備性，位相空間の一様化可能性と一様空間の距離化可能性については，Bourbaki [1, 2] や Willard [3] を参照してください．

[1] N. Bourbaki（著），森 毅（編・訳），清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 1』，東京図書，1968.

[2] N. Bourbaki（著），森 毅（編），山崎 泰郎（訳），清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 4』，東京図書，1969.

[3] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.

[4] 内田 伏一，『集合と位相』，数学シリーズ，裳華房，1986.