

解析関数のノート

箱 (@o_ccah)

2019 年 5 月 3 日

記号と用語

- 体とは、可換とは限らない単位的環であって、零環ではなく、0 以外の元がすべて乗法に関する逆元をもつものをいう。体 K 上の絶対値とは、 K から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像であって、非退化、乗法的、かつ三角不等式を満たすものをいう。体にその上の絶対値を 1 つ固定して考えたものを、付値体という。
- 体 K に対して、左 K -線型空間を単に K -線型空間という。
- \mathbb{K} は \mathbb{R} または \mathbb{C} を表す。
- 「 n 変数」、「 K^n 」などと言ったら、特に断らない限り、 $n \in \mathbb{N}$ であるものとする。
- K^n , \mathbb{N}^n などの元 x に対して、特に断らなくても、 x の i -成分 ($i \in \{0, \dots, n-1\}$) を x_i と書く。
- $x \in K^n$ と $k \in \mathbb{N}^n$ に対して、 $x^k = x_0^{k_0} \cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}$ と書く。
- $k \in \mathbb{N}^n$ に対して、 $|k| = k_0 + \cdots + k_{n-1}$, $k! = k_0! \cdots k_{n-1}!$ と定める。
- $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ に対して、 $r \leq s$ とは $i = 0, \dots, n-1$ に対して $r_i \leq s_i$ であることをいい、 $r < s$ とは $i = 0, \dots, n-1$ に対して $r_i < s_i$ であることをいう。
- $x \in K^n$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ に対して、 K^n における中心 x , 半径 r の多重球・閉多重球をそれぞれ

$$B(x; r) = B_{K^n}(x; r) = \{y \in K^n \mid (|y_0 - x_0|, \dots, |y_{n-1} - x_{n-1}|) < r\},$$
$$B^\bullet(x; r) = B_{K^n}^\bullet(x; r) = \{y \in K^n \mid (|y_0 - x_0|, \dots, |y_{n-1} - x_{n-1}|) \leq r\}$$

と定める。

1 形式的冪級数

定義 1.1 (形式的冪級数) K を体, E を K -線型空間とする。 E を係数とする n 変数の (あるいは、 K^n から E への) 形式的冪級数とは、 \mathbb{N}^n から E への写像のことをいう。 $k = (k_0, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ に $a_k \in E$ が対応するような形式的冪級数 A を、しばしば

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k = \sum_{k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} a_{k_0, \dots, k_{n-1}} X_0^{k_0} \cdots X_{n-1}^{k_{n-1}}$$

のように表す。 E を係数とする n 変数の形式的冪級数全体は、成分ごとの加法とスカラー倍によって K -線型空間をなす。

形式的冪級数 $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ に対して、 a_0 を A の定数項という。

定義 1.2 (形式的冪級数の積) K を体, E_0, \dots, E_{n-1}, F を K -線型空間, $u: E_0 \times \dots \times E_{n-1} \rightarrow F$ を多重線型写像, A_i を K^m から E_i への形式的冪級数とし,

$$A_i = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_{i,k} X^k \quad (a_{i,k} \in E_i)$$

と表されているとする ($i = 0, \dots, n-1$). A_0, \dots, A_{n-1} の u による積 $u(A_0, \dots, A_{n-1})$ を, 次のように定める. $u(A_0, \dots, A_{n-1})$ は K^m から F への形式的冪級数であり,

$$u(A_0, \dots, A_{n-1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{k^{(0)} + \dots + k^{(n-1)} = k} u(a_{0,k^{(0)}}, \dots, a_{n-1,k^{(n-1)}}) \right) X^k.$$

定義 1.3 (形式的冪級数の合成) K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, A を K^m から K^n への形式的冪級数, B を K^n から E への形式的冪級数とし,

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k X^k \quad (a_k \in K^n),$$

$$B = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l Y^l \quad (b_l \in E)$$

と表されているとする. 各 $k \in \mathbb{N}^m$ に対して E の元の族

$$\left\{ b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1,l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right\}_{l \in \mathbb{N}^n}$$

が絶対総和可能である場合に限り, A と B の合成 $B \circ A$ を次のように定める. $B \circ A$ は K^m から E への形式的冪級数であり,

$$B \circ A = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1,l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) X^k.$$

ただし, $(a_{k^{(i,j)}})_i$ は $a_{k^{(i,j)}}$ の i -成分を表す.

$B \circ A$ は, B の不定元に形式的に A を代入・展開し, それを A の不定元について整理したものである. A が定数項をもたない場合には, $B \circ A$ の係数には有限和しか現れないため, $B \circ A$ は必ず定義される.

定義 1.4 (形式偏微分) K を体, E を K -線型空間, A を K^n から E への形式的冪級数とする. $i = 0, \dots, n-1$ に対して, A の i -成分に関する形式偏微分を,

$$\partial_i A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_i \geq 1} a_k k_i X_0^{k_0} \dots X_i^{k_i-1} \dots X_{n-1}^{k_{n-1}}$$

と定める. また, $k \in \mathbb{N}^n$ に対して,

$$\partial^k A = \partial_0^{k_0} \dots \partial_{n-1}^{k_{n-1}} A$$

と書く.

容易にわかるように, 形式偏微分どうしは交換可能である.

2 収束形式的冪級数

定義 2.1 (収束形式的冪級数) K を離散でない付値体, E を K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を K^n から E への形式的冪級数とする. $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ に対して, $\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が E において絶対総和可能であるとき, A は半径 r において絶対総和可能であるという.

$$J(A) = \{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid A \text{ は半径 } r \text{ において絶対総和可能}\},$$

$$I(A) = \{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \text{ある } r' > r \text{ が存在して, } r' \in J(A)\}$$

と置き, $I(A)$ を A の収束指標という. また,

$$C(A) = \{x \in K^n \mid (|x_0|, \dots, |x_{n-1}|) \in I(A)\}$$

と置き, $C(A)$ を A の収束域という. 収束域が空でないような形式的冪級数を, 収束形式的冪級数という.

$n = 1$ のときは, $\rho \in [0, \infty]$ を用いて $I(A) = [0, \rho)$, $C(A) = \{x \in K \mid |x| < \rho\}$ と書ける. この ρ を, A の収束半径という.

命題 2.2 K を離散でない付値体, E を K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を K^n から E への形式的冪級数とする.

- (1) $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ について, $\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が E において有界ならば, 任意の $r' < r$ に対して $r' \in I(A)$ である.
- (2) A の収束指標 $I(A)$ は, $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ の開集合である.
- (3) $J(A)$ と $I(A)$ は, 対数凸である. すなわち, $r, s \in J(A)$ (あるいは $\in I(A)$) ならば, $t \in [0, 1]$ に対して $(r_0^{1-t} s_0^t, \dots, r_{n-1}^{1-t} s_{n-1}^t) \in J(A)$ (あるいは $\in I(A)$) である.

証明 (1) 任意の $k \in \mathbb{N}^n$ に対して $\|a_k\| r^k \leq M$ であるとして, $r' < r$ を任意にとる. $r' < r'' < r$ を満たす $r'' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ がとれる. 各 $i = 0, \dots, n-1$ に対して $r_i''/r_i < 1$ だから $\{(r_i''/r_i)^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は総和可能であり, よってその積 $\{(r_0''/r_0)^{k_0} \cdots (r_{n-1}''/r_{n-1})^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も総和可能である. さて, 任意の $k \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\|a_k\| r''^k = \|a_k\| r^k \left(\frac{r_0''}{r_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{r_{n-1}''}{r_{n-1}}\right)^{k_{n-1}} \leq M \left(\frac{r_0''}{r_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{r_{n-1}''}{r_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}$$

が成り立つから, $\{a_k r''^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能である. すなわち, $r'' \in J(A)$ であり, よって $r' \in I(A)$ である.

- (2) $I(A) = \bigcup_{r \in J(A)} \{r' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid r' < r\}$ だから, $I(A)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ の開集合である.
- (3) $\{\|a_k\| r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$, $\{\|a_k\| s^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が絶対総和可能であるとする. 重み付き相加相乗平均の不等式より, $k \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned} \|a_k\| (r_0^t s_0^{1-t})^{k_0} \cdots (r_{n-1}^t s_{n-1}^{1-t})^{k_{n-1}} &= \|a_k\| (r^k)^{1-t} (s^k)^t \\ &\leq \|a_k\| ((1-t)r^k + ts^k) \\ &= (1-t)\|a_k\| r^k + t\|a_k\| s^k \end{aligned}$$

が成り立つから, このとき $\{\|a_k\| (r_0^t s_0^{1-t})^{k_0} \cdots (r_{n-1}^t s_{n-1}^{1-t})^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能である. すなわち, $J(A)$ は対数凸である. $I(A)$ が対数凸であることは, $J(A)$ が対数凸であることから容易にわかる. \square

命題 2.3 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を K^n から E への形式的冪級数とする.

- (1) A の収束域 $C(A)$ は, K^n の開集合である.
- (2) 任意の $r \in J(A)$ に対して, 関数族 $\{x \mapsto a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は, 閉多重球 $B^\bullet(x; r)$ 上の一様ノルムに関して絶対総和可能である. したがって特に, 任意の $x \in C(A)$ に対して $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能であり, その和として得られる $C(A)$ 上の関数は連続である.

証明 (1) $I(A)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ の開集合であり (命題 2.2 (2)), $C(A)$ は連続写像 $K^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^n; x \mapsto (|x_0|, \dots, |x_{n-1}|)$ による $I(A)$ の逆像だから, $C(A)$ は K^n の開集合である.

- (2) $r \in J(A)$ を任意にとる. $B^\bullet(0; r)$ 上の一様ノルム $\|\cdot\|_{B^\bullet(0; r)}$ に関して

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \|a_k x^k\|_{B^\bullet(0; r)} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \|a_k\| r^k < \infty,$$

すなわち, $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は $B^\bullet(0; r)$ 上の一様ノルムに関して絶対総和可能である. したがって特に, $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は $B(0; r)$ 上の一様ノルムに関しても絶対総和可能である. 連続関数の一様収束極限は連続であり, $B(x; r)$ ($r \in J(A)$) の全体は $C(A)$ の開被覆をなすから, $\{x \mapsto a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ の和として得られる $C(A)$ 上の関数は連続である. \square

3 冪級数関数

本節では, 無限和の一般論を用いる. 無限和の一般論については, 「無限和のノート」を参照のこと.

定義 3.1 (収束形式的冪級数が定める冪級数関数) K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を K^n から E への収束形式的冪級数とする. $C(A)$ 上の関数族 $\{x \mapsto a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ の和を, A が定める冪級数関数といい, $f_A: C(A) \rightarrow E$ と書く.

命題 3.2 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間とする.

- (1) A, B を K^n から E への収束形式的冪級数とする. すると, $C(A) \cap C(B) \subseteq C(A+B)$ (特に $A+B$ も収束形式的冪級数) であり, $C(A) \cap C(B)$ において $f_{A+B} = f_A + f_B$ が成り立つ.
- (2) $\lambda \in K$, A を K^n から E への形式的冪級数とする. すると, $C(A) \subseteq C(\lambda A)$ (特に λA も収束形式的冪級数) であり, $C(A)$ において $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ が成り立つ.

証明 $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$, $B = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k X^k$ と置く.

- (1) $x \in K^n$ とする. $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ と $\{b_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ がともに絶対総和可能ならば, その和 $\{(a_k + b_k)x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能であり,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} (a_k + b_k)x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k x^k + \sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k x^k$$

が成り立つ. ここまでの議論より, 絶対総和可能性については $J(A) \cap J(B) \subseteq J(A+B)$ であり, ここから $I(A) \cap I(B) \subseteq I(A+B)$, $C(A) \cap C(B) \subseteq C(A+B)$ がわかる. また, 上式より, $C(A) \cap C(B)$ において $f_{A+B} = f_A + f_B$ が成り立つ.

- (2) $x \in K^n$ とする. $\{\lambda a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が絶対総和可能ならば, そのスカラー倍 $\{\lambda a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能で

あり,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \lambda a_k x^k = \lambda \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k x^k$$

が成り立つ. ここまでの議論より, 絶対総和可能性については $J(A) \subseteq J(\lambda A)$ であり, ここから $I(A) \subseteq I(\lambda A)$, $C(A) \subseteq C(\lambda A)$ がわかる. また, 上式より, $C(A)$ において $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ が成り立つ. \square

命題 3.3 K を離散でない付値体, E_0, \dots, E_{n-1}, F を完備 K -ノルム空間, $u: E_0 \times \dots \times E_{n-1} \rightarrow F$ を連続多重線型写像とする. $i = 0, \dots, n-1$ に対して A_i が K^m から E_i への収束形式的冪級数ならば, $C(A_0) \cap \dots \cap C(A_{n-1}) \subseteq C(u(A_0, \dots, A_{n-1}))$ であり, $C(A_0) \cap \dots \cap C(A_{n-1})$ において $f_{u(A_0, \dots, A_{n-1})} = u(f_{A_0}, \dots, f_{A_{n-1}})$ が成り立つ.

証明 $A_i = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_{i,k} X^k$ と置く. $x \in K^n$ とする. u は連続多重線型写像だから, $i = 0, \dots, n-1$ に対して $\{a_{i,k} x^k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ が E において絶対総和可能ならば, $\{u(a_{0,k^{(0)}}, \dots, a_{n-1,k^{(n-1)}}) x^{k^{(0)} + \dots + k^{(n-1)}}\}_{k^{(0)}, \dots, k^{(n-1)} \in \mathbb{N}^m}$ も絶対総和可能であり,

$$\sum_{k^{(0)}, \dots, k^{(n-1)} \in \mathbb{N}^m} u(a_{0,k^{(0)}}, \dots, a_{n-1,k^{(n-1)}}) x^{k^{(0)} + \dots + k^{(n-1)}} = \left(\sum_{k^{(0)} \in \mathbb{N}^m} a_{0,k^{(0)}} x^{k^{(0)}} \right) \cdots \left(\sum_{k^{(n-1)} \in \mathbb{N}^m} a_{n-1,k^{(n-1)}} x^{k^{(n-1)}} \right)$$

が成り立つ. よって, $\{(\sum_{k^{(0)} + \dots + k^{(n-1)} = k} u(a_{0,k^{(0)}}, \dots, a_{n-1,k^{(n-1)}})) x^k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ も絶対総和可能であり,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{k^{(0)} + \dots + k^{(n-1)} = k} u(a_{0,k^{(0)}}, \dots, a_{n-1,k^{(n-1)}}) \right) x^k = \left(\sum_{k^{(0)} \in \mathbb{N}^m} a_{0,k^{(0)}} x^{k^{(0)}} \right) \cdots \left(\sum_{k^{(n-1)} \in \mathbb{N}^m} a_{n-1,k^{(n-1)}} x^{k^{(n-1)}} \right)$$

が成り立つ (無限和の結合性). ここまでの議論より, 絶対総和可能性については $J(A_0) \cap \dots \cap J(A_{n-1}) \subseteq J(u(A_0, \dots, A_{n-1}))$ であり, ここから $I(A_0) \cap \dots \cap I(A_{n-1}) \subseteq I(u(A_0, \dots, A_{n-1}))$, $C(A_0) \cap \dots \cap C(A_{n-1}) \subseteq C(u(A_0, \dots, A_{n-1}))$ がわかる. また, 上式より, $C(A_0) \cap \dots \cap C(A_{n-1})$ において $f_{u(A_0, \dots, A_{n-1})} = u(f_{A_0}, \dots, f_{A_{n-1}})$ が成り立つ. \square

次の命題, およびその証明では, K^m から K^n への射影 $x \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1})$ を π と書く. また, $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ から $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ への射影も同じ記号で表す.

命題 3.4 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k X^k$ を K^m から E への収束形式的冪級数, $n \leq m$ とする. $k'' \in \mathbb{N}^{m-n}$ に対して, K^n から E への冪級数 $B_{k''}$ を

$$B_{k''} = \sum_{k' \in \mathbb{N}^n} a_{(k', k'')} X'^{k'}$$

と定めると, $\pi(C(A)) \subseteq C(B_{k''})$ (特に $B_{k''}$ も収束形式的冪級数) である. さらに, $x = (x', x'') \in C(A)$ ($x' = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $x'' = (x_n, \dots, x_{m-1})$) に対して, $\{f_{B_{k''}}(x') x''^{k''}\}_{k'' \in \mathbb{N}^{m-n}}$ は絶対総和可能であり,

$$\sum_{k'' \in \mathbb{N}^{m-n}} f_{B_{k''}}(x') x''^{k''} = f_A(x)$$

が成り立つ.

証明 $x = (x', x'') \in K^m$ ($x' = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $x'' = (x_n, \dots, x_{m-1})$) とする. $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ が絶対総和可能ならば, 各 $k'' \in \mathbb{N}^{m-n}$ に対して $\{a_{(k', k'')} x'^{k'} x''^{k''}\}_{k' \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能であり, したがって $x''^{k''} \neq 0$ ならば $\{a_{(k', k'')} x'^{k'}\}_{k' \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能である. さらに, $(x''^{k''} \neq 0$ ならば, 各 $k'' \in \mathbb{N}^n$ に対して $\sum_{k' \in \mathbb{N}^n} a_{(k', k'')} x'^{k'}$

が定義され), $\{(\sum_{k' \in \mathbb{N}^n} a_{(k', k'')} x'^{k'}) x''^{k''}\}_{k'' \in \mathbb{N}^{m-n}}$ は絶対総和可能であり,

$$\sum_{k'' \in \mathbb{N}^{m-n}} \left(\sum_{k' \in \mathbb{N}^n} a_{(k', k'')} x'^{k'} \right) x''^{k''} = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k x^k$$

が成り立つ (無限和の結合性). ここまでの議論より, 絶対総和可能性については, 任意の $k'' \in \mathbb{N}^n$ に対して $\pi(J(A)) \cap \mathbb{R}_{>0}^n \subseteq J(B_{k''})$ であり, ここから $\pi(I(A)) \subseteq I(B_{k''})$, $\pi(C(A)) \subseteq C(B_{k''})$ がわかる. また, 上式より, $x = (x', x'') \in C(A)$ に対して

$$\sum_{k'' \in \mathbb{N}^{m-n}} f_{B_{k''}}(x') x''^{k''} = f_A(x)$$

が成り立つ. □

定理 3.5 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, A を K^m から K^n への収束形式的冪級数, B を K^n から E への収束形式的冪級数とする. A の定数項 $a_0 \in K^n$ が $C(B)$ に属するならば, $B \circ A$ が定義され, これは K^m から E への収束形式的冪級数であり, 0 のある近傍において $f_{B \circ A} = f_B \circ f_A$ が成り立つ.

証明 $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k X^k$, $B = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l Y_l$ と置く. また, $a_k \in K^n$ の i -成分を $(a_k)_i$ と表す. $a_0 \in C(B)$ とすると, ある $s \in J(B)$ が存在して $(|(a_0)_0|, \dots, |(a_0)_{n-1}|) < s$ となる. また, A は収束形式的冪級数だから $0 \in I(A)$ であり, $i = 0, \dots, n-1$ に対して関数 $r \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k$ は $I(A)$ 上で連続だから (命題 2.3 (2) の証明と同様にしてわかる), 十分 0 に近い任意の $r \in I(A)$ に対して $\sum_{k \in \mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k \leq s_i$ ($i = 0, \dots, n-1$) が成り立つ.

さて, $r \in \mathbb{R}_{>0}^m$ を 0 の十分近くにとり, $r \in I(A)$ かつ $i = 0, \dots, n-1$ に対して $\sum_{k \in \mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k \leq s_i$ を満たすようにする. B の不定元に形式的に A を代入・展開して生じる項の族

$$\left\{ b_l \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i r^{k^{(i,j)}} \right\}_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m, l \in \mathbb{N}^n} \quad (*)$$

について考える. まず, $l \in \mathbb{N}^n$ を固定すると, $r \in I(A)$ より $i = 0, \dots, n-1$ に対して $\{(a_k)_i r^k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ は絶対総和可能だから, それらの積 $\{\prod_{0 \leq i < n, 0 \leq j < l_i} (a_{k^{(i,j)}})_i r^{k^{(i,j)}}\}_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m}$ も絶対総和可能であり,

$$\begin{aligned} \sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} |(a_k)_i| r^k &= \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} \sum_{k \in \mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k \\ &\leq \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} s_i \\ &= s^l, \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m} \|b_l\| \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} |(a_{k^{(i,j)}})_i| r^{k^{(i,j)}} \leq \|b_l\| s^l, \quad (**)$$

が成り立つ. 次に, $l \in \mathbb{N}^n$ を動かすことを考える. l が \mathbb{N}^n の中を動くとき, $s \in J(B)$ より, $(**)$ の右辺は総和可能だから, $(**)$ の左辺も総和可能である. よって, E の元の族 $(*)$ は絶対総和可能である. $k \in \mathbb{N}^m$ を固定すると, 無限和の結合性より

$$\left\{ b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i r^{k^{(i,j)}} \right\}_{l \in \mathbb{N}^n}$$

も絶対総和可能だから、 $r > 0$ に注意して

$$\left\{ b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right\}_{l \in \mathbb{N}^n}$$

も絶対総和可能であることがわかる。すなわち、 $B \circ A$ が定義される。

$x \in K^m$ を 0 の十分近くにとる。具体的には、 $r \in \mathbb{R}_{>0}^m$ を前段でとったものとして、 $(|x_0|, \dots, |x_{m-1}|) \leq r$ が成り立つようにとる。すると、

$$\left\{ b_l \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \right\}_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m, l \in \mathbb{N}^n}$$

は絶対総和可能であり、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m, \\ l \in \mathbb{N}^n}} b_l \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} &= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} \sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m} b_l \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} \sum_{k \in \mathbb{N}^m} (a_k)_i x^k \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k x^k \right)^l \end{aligned} \quad (***)$$

が成り立つ。(ここで、

- 第一の式変形では、無限和の結合性を、
- 第二の式変形では、「 $\{\prod_{0 \leq i < n, 0 \leq j < l_i} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}}\}_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m}$ は絶対総和可能だから、 b_l を外に出せる」ことを、
- 第三の式変形では、「 $i = 0, \dots, n-1$ に対して $\{(a_k)_i x^k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ は絶対総和可能だから、無限和と積が交換できる」ことを

用いた。) また、無限和の結合性より、

$$\left\{ \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) x^k \right\}_{k \in \mathbb{N}^m}$$

は絶対総和可能であり、

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) x^k = \sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m, l \in \mathbb{N}^n} b_l \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \quad (***)$$

が成り立つ. (***) と (****) より,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ 0 \leq j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) x^k = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k x^k \right)^l$$

が成り立つ. すなわち, $B \circ A$ は x において絶対総和可能であり, $f_{B \circ A}(x) = f_B(f_A(x))$ が成り立つ. x は $0 \in K^m$ のある近傍から任意にとれるから, これで主張は示された. \square

系 3.6 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, A を K^m から K^n への定数項をもたない収束形式的冪級数, B を K^n から E への収束形式的冪級数とする. このとき, $B \circ A$ が定義され, これは K^m から E への収束形式的冪級数であり, 0 のある近傍において $f_{B \circ A} = f_B \circ f_A$ が成り立つ.

証明 定理 3.5 で, A が定数項をもたないとした場合である. \square

系 3.7 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を K^n から E への収束形式的冪級数, $c \in C(A)$ とする. 任意の $l \in \mathbb{N}^n$ に対して, $\{a_{l+p} c^p\}_{p \in \mathbb{N}^n}$ は E において絶対総和可能である. さらに,

$$B = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^n} a_{l+p} c^p \right) Y^l$$

と置くと, B は収束形式的冪級数であり, c のある近傍において $f_B(x - c) = f_A(x)$ (x は固定された c の近傍の元) が成り立つ.

証明 定理 3.5 で, $m = n$ とし, A, B にそれぞれ $X + c, A$ を割り当てた場合である. \square

4 冪級数関数の係数の一意性

定理 4.1 (零点孤立定理) K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ を K から E への収束形式的冪級数とする. $A \neq 0$ ならば (すなわち, a_k がすべて 0 でなければ), $\delta > 0$ をとって, 任意の $x \in K$, $0 < |x| < \delta$ に対して ($x \in C(A)$ かつ) $f_A(x) \neq 0$ となるようにできる.

証明 $A = 0$ とする. $a_k \neq 0$ なる最小の $k \in \mathbb{N}$ を $k^{(0)}$ とすると, $A = X^{k^{(0)}} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k^{(0)}+k} X^k$ と書ける. A が収束形式的冪級数であることから, $A' = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k^{(0)}+k} X^k$ も収束形式的冪級数である. よって, 冪級数関数 $f_{A'}$ が考えられる. $f_{A'}$ は $f_{A'}(0) = a_{k^{(0)}} \neq 0$ なる連続関数だから (命題 2.3), $\delta > 0$ をとって, 任意の $|x| < \delta$ に対して $x \in C(A')$ かつ $f_{A'}(x) \neq 0$ となるようにできる. $f_A(x) = x^{k^{(0)}} f_{A'}(x)$ ($x \in C(A)$) だから (命題 3.3), この δ について, 任意の $0 < |x| < \delta$ に対して $x \in C(A)$ かつ $f_A(x) \neq 0$ が成り立つ. \square

定理 4.2 (冪級数関数の係数の一意性) K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$, $B = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k X^k$ を K^n から E への収束形式的冪級数とする. 0 のある近傍上で $f_A = f_B$ ならば, $A = B$ (すなわち, すべての $k \in \mathbb{N}^n$ に対して $a_k = b_k$) である.

証明 $B = 0$ の場合に示せば十分である (命題 3.2). すなわち, 0 のある近傍上で $f_A = 0$ であると仮定して, $A = 0$ を示す.

n についての帰納法で示す. $n = 0$ のときは明らかである. n のときに示せたとして, $n + 1$ のときを考える. $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^{n+1}} a_k X^k$ を (形式的に) X_n について整理したときに X_n^l の係数として現れる形式的冪級数を, A_l と

書く ($l \in \mathbb{N}$). すると, 各 $l \in \mathbb{N}$ に対して A_l は収束形式的冪級数であり, ある多重球 $B_{K^{n+1}}(0; r)$ ($r \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$) の上で

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} f_{A_l}(x_0, \dots, x_{n-1}) x_n^l = f_A(x) = 0 \quad (*)$$

が成り立つ (命題 3.4). さて, $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in B_{K^n}(0; r_0, \dots, r_{n-1})$ を任意に固定すると, 任意の $x_n \in B_K(0; r_n)$ に対して $(*)$ が成り立つ. したがって, 零点孤立定理 (定理 4.1) より, すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して $f_{A_l}(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$ でなければならない. よって, 帰納法の仮定より, すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して $A_l = 0$ である. これは, $A = 0$ を意味する. \square

5 冪級数関数の微分

定理 5.1 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, A を K^n から E への収束形式的冪級数とする. A が定める冪級数関数 $f_A: C(A) \rightarrow E$ は, 任意階数の偏微分が可能である. さらに, 任意の $k \in \mathbb{N}^n$ に対して, $C(\partial^k A) = C(A)$ (したがって $\partial^k A$ も収束形式的冪級数) であり, $C(A)$ において $\partial^k f_A = f_{\partial^k A}$ が成り立つ.

証明 $k = (1, 0, \dots, 0)$ の場合に示せば十分である.

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k, \quad \partial_0 A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1} k_0 a_k X_0^{k_0-1} X_1^{k_1} \dots X_{n-1}^{k_{n-1}}$$

と置く.

まず, $C(\partial_0 A) = C(A)$ を示す. そのためには, $I(\partial_0 A) = I(A)$ を示せばよい. $r \in J(\partial_0 A)$ とすると, $\{k_0 a_k r_0^{k_0-1} r_1^{k_1} \dots r_{n-1}^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1}$ は絶対総和可能だから, その r_0 倍である $\{k_0 a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1}$ も絶対総和可能である. $k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1$ に対しては $\|a_k\| r^k \leq k_0 \|a_k\| r^k$ だから, $\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能, すなわち $r \in J(A)$ となる. よって $J(\partial_0 A) \subseteq J(A)$ であり, ここから $I(\partial_0 A) \subseteq I(A)$ がわかる. 逆に, $r \in I(A)$ とすると, ある $r' > r$ が存在して $\{a_k r'^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能となる. $r_0 < s < r'_0$ なる $s \in \mathbb{R}_{>0}$ をとると, $k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1$ に対して

$$k_0 \|a_k\| s^{k_0-1} r_1^{k_1} \dots r_{n-1}^{k_{n-1}} \leq \frac{k_0}{s} \left(\frac{s}{r'_0} \right)^{k_0} \|a_k\| r'^k$$

である. $k_0 \in \mathbb{N}$ が動くとき $(k_0/s) \cdot (s/r'_0)^{k_0}$ は有界なので, $\{k_0 a_k s^{k_0-1} r_1^{k_1} \dots r_{n-1}^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1}$ も絶対総和可能, すなわち $(s, r'_1, \dots, r'_{n-1}) \in J(\partial_0 A)$, したがって $r \in I(\partial_0 A)$ となる. よって, $I(A) \subseteq I(\partial_0 A)$ である. これで, $I(\partial_0 A) = I(A)$ が示された.

次に, $C(A)$ において $\partial^k f_A = f_{\partial^k A}$ が成り立つことを示す. $x \in C(A)$ を任意に固定する. A の不定元 $X = (X_0, \dots, X_{n-1})$ に $(x_0 + H, x_1, \dots, x_{n-1})$ (H は新しい不定元) を形式的に代入・展開して得られる形式的冪級数を, B_x とする. すなわち,

$$B_x = \sum_{l \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0-l} x_1^{k_1} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}} \right) H^l$$

とする. 定理 3.5 より, B_x は矛盾なく定義される収束形式的冪級数であり, 0 に十分近い任意の $h \in K \setminus \{0\}$ に対して

$$f_A(x_0 + h, x_1, \dots, x_{n-1}) = f_{B_x}(h) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0-l} x_1^{k_1} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}} \right) h^l$$

が成り立つ。よって、0 に十分近い任意の $h \in K \setminus \{0\}$ に対して、

$$\frac{f_A(x_0 + h, x_1, \dots, x_{n-1}) - f_A(x_0, \dots, x_{n-1})}{h} = \sum_{l \geq 1} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0-l} x_1^{k_1} \cdots x_{n-1}^{k_{n-1}} \right) h^{l-1}$$

が成り立つ。 B_x が収束形式的冪級数であることより、 $B'_x = \sum_{l \geq 1} (\sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq l} a_k \binom{k_0}{l} x_0^{k_0-l} x_1^{k_1} \cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}) h^{l-1}$ も収束形式的冪級数だから、 B'_x は $0 \in \mathbb{K}$ の近傍で連続関数を定める (命題 2.3 (2))。よって、上式は $h \rightarrow 0$ において極限値をもち、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_A(x_0 + h, x_1, \dots, x_{n-1}) - f_A(x_0, \dots, x_{n-1})}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{l \geq 1} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0-l} x_1^{k_1} \cdots x_{n-1}^{k_{n-1}} \right) h^{l-1} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n, k_0 \geq 1} k_0 a_k x_0^{k_0-1} x_1^{k_1} \cdots x_{n-1}^{k_{n-1}} \\ &= f_{\partial_0 A}(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、 f_A は x において微分可能であり、 $\partial_0 f_A(x) = f_{\partial_0 A}(x)$ である。 x は $C(A)$ の中から任意にとれたから、 f_A は 0-成分に関して偏微分可能であり、 $\partial_0 f_A = f_{\partial_0 A}$ が成り立つ。これで主張は示された。 \square

系 5.2 E を完備 \mathbb{K} -ノルム空間、 $A = \sum_{n \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を \mathbb{K}^n から E への収束形式的冪級数とする。

$$a_k = \frac{\partial^k f_A(0)}{k!}$$

が成り立つ。

証明 定理 5.1 を用いて、 $\partial^k f_A(0) = f_{\partial^k A}(0) = k! a_k$ を得る。 \square

系 5.2 は、冪級数関数の係数の一意性 (定理 4.2) の別証明を与えている。

6 解析関数

定義 6.1 (解析関数) K を離散でない付値体、 U を K^n の開集合、 E を完備 K -ノルム空間とする。関数 $f: U \rightarrow E$ が解析的である、あるいは解析関数であるとは、「任意の $c \in U$ に対して、 c の近傍 $V \subseteq U$ と K^n から E への形式的冪級数 A が存在し、関数 $x \mapsto f_A(x - c)$ が V で定義され (すなわち、 $V \subseteq c + C(A)$ であり)、 $x \in V$ に対して $f(x) = f_A(x - c)$ が成り立つ」ことをいう。

$f: U \rightarrow E$ を解析関数とする。冪級数関数の係数の一意性 (定理 4.2) より、各 $c \in U$ に対して、上の条件を満たすような K^n から E への形式的冪級数 A は一意に定まる。この A を、 f の c における冪級数展開という。

$K = \mathbb{R}$ に対する解析関数を実解析関数、 $K = \mathbb{C}$ に対する解析関数を複素解析関数という。 \mathbb{C}^n の開集合から完備 \mathbb{C} -ノルム空間への複素解析関数は、 \mathbb{R}^{2n} の開集合から完備 \mathbb{R} -ノルム空間への関数とみなせば、実解析関数である。

命題 6.2 K を離散でない付値体、 U を K^n の開集合、 E を完備 K -ノルム空間とする。

- (1) $f, g: U \rightarrow E$ が解析関数ならば、 $f + g$ も解析関数である。
- (2) $\lambda \in K$ 、 $f: U \rightarrow E$ が解析関数ならば、 λf も解析関数である。

証明 命題 3.2 から従う。 \square

命題 6.3 K を離散でない付値体, U を K^m の開集合, E_0, \dots, E_{n-1}, F を完備 K -ノルム空間, $u: E_0 \times \dots \times E_{n-1} \rightarrow F$ を連続多重線型写像とする. $i = 0, \dots, n-1$ に対して $f_i: U \rightarrow E_i$ が解析関数ならば, $u(f_0, \dots, f_{n-1}): U \rightarrow F$ も解析関数である.

証明 命題 3.3 から従う. □

命題 6.4 K を離散でない付値体, U を K^m の開集合, V を K^n の開集合, E を完備 K -ノルム空間とする. $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow E$ が解析関数ならば, $g \circ f: U \rightarrow E$ も解析関数である.

証明 系 3.6 から従う. □

命題 6.5 K を離散でない付値体, E を完備 K -ノルム空間, A を K^n から E への収束形式的冪級数とする. A が定める冪級数関数 $f_A: C(A) \rightarrow E$ は, 解析関数である.

証明 系 3.7 から従う. □

定理 6.6 K を離散でない付値体, U を K^n の開集合, E を完備 K -ノルム空間, $f: U \rightarrow E$ を解析関数とする. f は任意階数の偏微分が可能で, その任意の偏微分はまた解析関数である. 特に, 解析関数は C^∞ 級である.

証明 定理 5.1 から従う. □

定理 6.7 K を離散でない付値体, U を K^n の開集合, E を完備 K -ノルム空間, $f: U \rightarrow E$ を解析関数とする. $c \in U$ における f の冪級数展開は,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial^k f(c)}{k!} X^k$$

で与えられる.

証明 系 5.2 から従う. □

係数体が \mathbb{K} (\mathbb{R} または \mathbb{C}) の場合は, 次のことが成り立つ.

定理 6.8 (一致の定理) U を \mathbb{K}^n の連結開集合, E を完備 \mathbb{K} -ノルム空間, $f, g: U \rightarrow E$ を解析関数とする.

- (1) $\{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ が内点をもつならば, U 上で常に $f = g$ である.
- (2) $n = 1$ とする. $\{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ が U において集積点をもつならば, U 上で常に $f = g$ である.

証明 $g = 0$ の場合に示せば十分である (命題 6.2).

(1) まず, U が凸である場合に示す. $\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ が内点 $c \in U$ をもつとする. $x \in U$ を任意にとる. $h(t) = f((1-t)c + tx)$ と置くと, h は $[0, 1]$ を含む開区間上で定義された実解析関数であり (命題 6.4), 0 のある近傍において 0 に等しい. もし $f(x) = h(1) \neq 0$ であるとする, 「 $[0, t]$ において常に $h = 0$ 」であるような $t \in [0, 1)$ の上限 t_0 がとれる. ところが, t_0 における h の冪級数展開を考えると, 零点孤立定理 (定理 4.1) より, h は t_0 のある近傍で 0 でなければならず, これは t_0 の上限性に矛盾する. よって, 背理法より $f(x) = 0$ である. $x \in U$ は任意だったから, これで U が凸である場合には示された.

次に, 一般の場合に示す. $\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ の内部を V とし, V が空でないとする. $x \in \bar{V} \cap U$ を任意にとり, x を中心とする多重球 $B(x; r)$ を U に収まるようにとる. すると, $B(x; r) \cap V$ は空でない開集合であり, この上で $f = 0$ が成り立つ. $B(x; r)$ は凸だから, 前段の結果を $f|_{B(x; r)}$ に適用して, $B(x; r)$ 上で $f = 0$ であ

ることを得る。したがって、 $x \in V$ である。よって、 V は U の閉集合であるから、 U の連結性より $V = U$ であり、 U 上で常に $f = 0$ である。これで、 U が一般の場合についても示された。

(2) $\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ が集積点 $c \in U$ をもつとする。 c における f の冪級数展開を A とすると、 A が定める冪級数関数が0になる点の全体は0を集積点にもつから、零点孤立定理 (定理 4.1) より、 $A = 0$ である。したがって、 c のある近傍において $f = 0$ である。よって、(1) より $f = g$ である。 \square

参考文献

- [1] N. Bourbaki (著), 齋藤 正彦 (編・訳), 『ブルバキ数学原論 多様体 要約』, 東京図書, 1970.
- [2] J. Dieudonné (著), 森 毅 (訳), 『現代解析の基礎 2』, 東京図書, 1971.