L^1 空間の双対について

箱（@o_ccah）

2020 年 2 月 15 日

概要

測度空間について，それが局所化可能であることと，L^1 空間の双対が自然に L^∞ 空間になることとの同値性を証明する．

目次

記号と用語

- $\mathbb{K}$ は，実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ を表す．また，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$，$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, \infty]$ と書く．
- (X, μ) を測度空間とする．$A \subseteq X$ が μ-零あるいは単に零であるとは，A を含む測度 0 の可測集合が存在することをいう．可測集合 $A \subseteq X$ に対しては，A が零であることと，$\mu(A) = 0$ であることとは同値である．
- (X, μ) を測度空間とする．$A \subseteq X$ が μ-局所零あるいは単に局所零であるとは，任意の測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ に対して $A \cap F$ が零であることをいう．$A \in \mathfrak{A}$ に対しては，A が局所零であることと，任意の測度有限な可測集合 $F \subseteq A$ に対して $\mu(F) = 0$ であることとは同値である．
- (X, μ) を測度空間とする．点 $x \in X$ に関する命題 P が μ-ほとんどいたるところで成り立つあるいは単にほとんどいたるところで成り立つとは，P が成り立たない点全体の集合が零であることをいう．
- 測度空間 (X, μ) と $1 \leq p \leq \infty$ に対して，(X, μ) 上の $\mathbb{K}$ 値 p 乗可積分関数全体のなす線型空間を「ほとんどいたるところで一致する関数を同一視する同値関係」で割って得られる線型空間を，$L^p(X, \mu; \mathbb{K})$ と書く．$L^p(X, \mu; \mathbb{K})$ は，L^p ノルムによって Banach 空間をなす．ただし，$L^\infty(X, \mu; \mathbb{K})$ は，$\mathbb{K}$ 値の本質的有界な可測関数全体のなす線型空間を上記の同値関係で割って得られる線型空間であり，L^∞ ノルムは関数（の同値類）の絶対値の本質的上限を与えるノルムである．$L^p(X, \mu; \mathbb{K})$ の元 f について，f の代表元のとり方によらない性質や操作を考える場合には，しばしば f を X 上で定義された関数であるかのように扱う．

1　半有限な測度空間

定義 1.1（半有限な測度空間）　測度空間 (X,μ) あるいは単に測度 μ が半有限（semifinite）であるとは，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mu(A) > 0$ ならば，測度有限な可測集合 $F \subseteq A$ であって $\mu(F) > 0$ なるものが存在することをいう．

容易にわかるように，半有限な測度空間の部分測度空間は，半有限である．

命題 1.2　測度空間 (X,μ) に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) (X,μ) は半有限である．
(b) X の局所零な可測集合は零である．
(c) 可測集合 $A \subseteq X$ に対して，

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A \text{ は測度有限な可測集合}\}$$

が成り立つ．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　可測集合 $A \subseteq X$ について，「$\mu(A) > 0$ ならば，測度有限な可測集合 $F \subseteq A$ であって $\mu(F) > 0$ なるものが存在する」ことと「A が局所零ならば A は零である」ことは互いに他と対偶の関係にあるから，同値である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　(b) が成り立つとする．可測集合 $A \subseteq X$ を任意にとり，

$$\mathfrak{F} = \{F \mid F \subseteq A \text{ は測度有限な可測集合}\}, \qquad \gamma = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

と置く．$\mu(A) = \gamma$ を示したい．$\gamma = \infty$ ならば明らかだから，$\gamma < \infty$ とする．集合の増大列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{F}$ を，$\mu(F_n) \to \gamma$ となるようにとる．$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ と置くと，$F \subseteq A$ かつ $\mu(F) = \gamma$ である．ここで，測度有限な可測集合 $F' \subseteq A \setminus F$ を任意にとる．すると，$F \cup F' \in \mathfrak{F}$ だから $\mu(F \cup F') \leq \gamma = \mu(F)$ であり，したがって F' は零である．これより $A \setminus F$ は局所零だから，仮定より $A \setminus F$ は零である．よって，$\mu(A) = \mu(F) = \gamma$ である．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．□

定義 1.3（半有限化）　(X,μ) を測度空間とする．μ の**半有限化** μ_{sf} を，

$$\mu_{\mathrm{sf}}(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A \text{ は可測集合}\} \qquad (\text{可測集合 } A \subseteq X)$$

と定める．

容易にわかるように，測度空間 (X,μ) に対して，μ_{sf} は半有限測度である．一般に $\mu_{\mathrm{sf}} \leq \mu$ であり，$\mu(F) < \infty$ なる可測集合 $F \subseteq X$ に対しては $\mu_{\mathrm{sf}}(F) = \mu(F)$ である．命題 1.2 によれば，μ が半有限であるための必要十分条件は，$\mu = \mu_{\mathrm{sf}}$ が成り立つことである．

補題 1.4　(X,μ) を測度空間とする．可積分関数 $f\colon X \to \mathbb{K}$ に対して，σ-有限な可測集合であって，その外で f が消えるものが存在する．

証明　$n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 2^{-n}\}$ と置くと，f の可積分性より $\mu(A_n) < \infty$ であり，f は $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の外で消える．□

補題 1.5　(X,μ) を測度空間とする．$\mu_{\mathrm{sf}}(A)<\infty$ を満たす可測集合 $A\subseteq X$ に対して，可測集合 $F\subseteq A$ であって，$\mu(F)=\mu_{\mathrm{sf}}(A)<\infty$ かつ $\mu_{\mathrm{sf}}(A\setminus F)=0$ を満たすものが存在する．

証明　可測集合 $A\subseteq X$ が $\mu_{\mathrm{sf}}(A)<\infty$ を満たすとする．

$$\sup\{\mu(F)\mid F\subseteq A \text{ は } \mu \text{ に関して測度有限な可測集合}\}=\mu_{\mathrm{sf}}(A)<\infty$$

だから，A に含まれ μ に関して測度有限な可測集合の列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，$\mu(F_n)\to\mu_{\mathrm{sf}}(A)$ となるようにとれる．$F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ と置くと，$F\subseteq A$ かつ $\mu(F)=\mu_{\mathrm{sf}}(A)<\infty$ である．さらに，$\mu(F)<\infty$ より $\mu_{\mathrm{sf}}(F)=\mu(F)=\mu_{\mathrm{sf}}(A)$ だから，$\mu_{\mathrm{sf}}(A\setminus F)=0$ である．□

命題 1.6　(X,μ) を測度空間，$f\colon X\to\mathbb{K}$ を可測関数とする．

(1) f が μ-可積分ならば，μ_{sf}-可積分でもあり，このとき

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f\,d\mu_{\mathrm{sf}}$$

が成り立つ．

(2) f が μ_{sf}-可積分ならば，μ_{sf}-ほとんどいたるところで f と等しい μ-可積分関数 $f_0\colon X\to\mathbb{K}$ が存在する．

証明　(1)　f が μ-可積分であるとする．$\mu_{\mathrm{sf}}\le\mu$ だから，f は μ_{sf}-可積分でもある．また，補題 1.4 より，μ に関して σ-有限な可測集合 $A\subseteq X$ が存在して，f は A の外では消える．A を，μ に関して測度有限な可測集合の可算非交和として $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と表す．すると，各 A_i 上では μ と μ_{sf} は一致するから，

$$\int_X f\,d\mu_{\mathrm{sf}}=\sum_{i\in I}\int_{A_i}f\,d\mu_{\mathrm{sf}}=\sum_{i\in I}\int_{A_i}f\,d\mu=\int_X f\,d\mu$$

と計算できる．よって，2 つの積分は等しい．

(2)　f が μ_{sf}-可積分であるとする．すると，補題 1.4 より，μ_{sf} に関して σ-有限な可測集合 $A\subseteq X$ が存在して，f は A の外では消える．A を，μ_{sf} に関して有限な可測集合の可算非交和として $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と表す．補題 1.5 より，各 $i\in I$ に対して可測集合 $F_i\subseteq A_i$ が存在して，$\mu(F_i)=\mu_{\mathrm{sf}}(A_i)<\infty$ かつ $\mu_{\mathrm{sf}}(A_i\setminus F_i)=0$ が成り立つ．したがって，$A\setminus\bigcup_{i\in I}F_i=\bigcup_{i\in I}(A_i\setminus F_i)$ は μ_{sf}-零である．そこで，可測関数 $f_0\colon X\to\mathbb{K}$ を

$$f_0=\begin{cases} f & (\text{on } \bigcup_{i\in I}F_i)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

と定めると，f と f_0 は μ_{sf} に関してほとんどいたるところで等しい．さらに，各 F_i 上では μ と μ_{sf} は一致するから，

$$\int_X|f_0|\,d\mu=\sum_{i\in I}\int_{F_i}|f_0|\,d\mu=\sum_{i\in I}\int_{F_i}|f|\,d\mu_{\mathrm{sf}}=\sum_{i\in I}\int_{A_i}|f|\,d\mu_{\mathrm{sf}}=\int_X|f|\,d\mu_{\mathrm{sf}}$$

と計算できる．よって，f_0 は μ-可積分である．□

測度空間 (X,μ) に対して，「μ-ほとんどいたるところで一致する関数を同一視する同値関係」による関数 f の同値類を，$[f]_\mu$ と書くことにする．

系 1.7　(X,μ) を測度空間とする．$L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ と $L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ は，矛盾なく定まる写像 $[f]_\mu\mapsto[f]_{\mu_{\mathrm{sf}}}$ によって，ノルム空間として同型である．

証明　$\mu_{\mathrm{sf}} \le \mu$ だから，μ-ほとんどいたるところで等しい 2 つの関数は，μ_{sf}-ほとんどいたるところで等しい．また，命題 1.6 (1) より，μ-可積分関数は，μ_{sf}-可積分でもある．よって，$[f]_\mu \mapsto [f]_{\mu_{\mathrm{sf}}}$ は $L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ から $L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ への写像として矛盾なく定まる．この写像は，明らかに線型であり，命題 1.6 (1) より等長であり，命題 1.6 (2) より全射である．これで示された． □

命題 1.8　(X,μ) を測度空間とする．$L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})$ から $L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ への写像 $[f]_\mu \mapsto [f]_{\mu_{\mathrm{sf}}}$ は矛盾なく定まり，これはノルム減少な全射線型写像である．

証明　$\mu_{\mathrm{sf}} \le \mu$ だから，μ-ほとんどいたるところで等しい 2 つの関数は μ_{sf}-ほとんどいたるところで等しく，また μ_{sf} に関する本質的上限は μ に関する本質的上限で押さえられる．よって，$[f]_\mu \mapsto [f]_{\mu_{\mathrm{sf}}}$ は $L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})$ から $L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ へのノルム減少な写像として矛盾なく定まる．この写像は，明らかに線型である．また，$L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ の各元の代表元として有界な可測関数が選べることから，この写像の全射性がわかる． □

2　Dedekind 完備，局所化可能な測度空間

定義 2.1（本質的包含）　(X,μ) を測度空間とする．可測集合 $A, B \subseteq X$ に対して，$B \setminus A$ が零であることを，B は A を**本質的に含む**あるいは A は B に**本質的に含まれる**といい，$A \subseteq_{\text{a.e.}} B$ あるいは $B \supseteq_{\text{a.e.}} A$ と書く．

定義 2.2（本質的上限）　(X,μ) を測度空間とし，$\mathfrak{A}$ を X の可測集合の族，$B \subseteq X$ を可測集合とする．

(1) B が $\mathfrak{A}$ の**本質的上界**であるとは，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $A \subseteq_{\text{a.e.}} B$ であることをいう．
(2) B が $\mathfrak{A}$ の**本質的上限**であるとは，B が $\mathfrak{A}$ の本質的上界であり，かつ $\mathfrak{A}$ の任意の本質的上界 B' に対して $B \subseteq_{\text{a.e.}} B'$ であることをいう．

定義 2.3（Dedekind 完備，弱 Dedekind 完備な測度空間）　(X,μ) を測度空間とする．

(1) (X,μ) あるいは単に μ が **Dedekind 完備**（— complete）であるとは，X の可測集合の任意の族が本質的上限をもつことをいう．
(2) (X,μ) あるいは単に μ が**弱 Dedekind 完備**[*1] であるとは，X の測度有限な可測集合の任意の族が（測度有限でなくてもよい）本質的上限をもつことをいう．

容易にわかるように，Dedekind 完備・弱 Dedekind 完備な測度空間の部分測度空間は，それぞれ Dedekind 完備・弱 Dedekind 完備である．

定理 2.4　(X,μ) を Dedekind 完備な測度空間とし，$\{A_i\}_{i\in I}$ を X の可測集合の族，$\{f_i\colon A_i \to \mathbb{K}\}_{i\in I}$ を可測関数の族とする．任意の $i, j \in I$ に対して，f_i と f_j が $A_i \cap A_j$ 上ほとんどいたるところで一致するとする．このとき，可測関数 $f\colon X \to \mathbb{K}$ であって，任意の $i \in I$ に対して f と f_i が A_i 上ほとんどいたるところで一致するようなものが存在する．

証明　実部と虚部を分けて考えることにより，はじめから $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ と仮定してよい．$t \in \mathbb{Q}$ と $i \in I$ に対して，

$$B_{t,i} = \{x \in A_i \mid f(x) \ge t\}$$

と置く．(X,μ) は Dedekind 完備だから，各 $t \in \mathbb{Q}$ に対して，$\{B_{t,i}\}_{i\in I}$ の本質的上限 $B_t \subseteq X$ がとれる．これを

[*1] 「弱 Dedekind 完備」は，本稿だけの用語である．

用いて，関数 $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ を

$$g(x) = \sup\{t \in \mathbb{Q} \mid x \in B_t\} \qquad (x \in X)$$

と定める（ただし．$\sup \emptyset = -\infty$ と約束する）．任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$g^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{t \in \mathbb{Q},\, q > a} B_t$$

だから，g は可測である．

任意の $i \in I$ に対して，g と f_i が A_i 上ほとんどいたるところで一致することを示す．$t \in \mathbb{Q}$ を任意にとる．まず，B_t は $\{B_{t,j}\}_{j \in I}$ の本質的上限だから，$B_{t,i} \subseteq_{\text{a.e.}} B_t$ である．すなわち，$B_{t,i} \setminus B_t$ は零である．次に，任意の $j \in I$ に対して

$$B_{t,j} \cap (A_i \setminus B_{t,i}) \subseteq \{x \in A_i \cap A_j \mid f_i(x) \neq f_j(x)\},$$

したがって仮定より

$$\mu(B_{t,j} \cap (A_i \setminus B_{t,i})) \leq \mu(\{x \in A_i \cap A_j \mid f_i(x) \neq f_j(x)\}) = 0,$$

すなわち $B_{t,j} \subseteq_{\text{a.e.}} X \setminus (A_i \setminus B_{t,i})$ である．B_t は $\{B_{t,j}\}_{j \in I}$ の本質的上限だったから，これより $B_t \subseteq_{\text{a.e.}} X \setminus (A_i \setminus B_{t,i})$ である．すなわち，$(B_t \setminus B_{t,i}) \cap A_i$ は零である．以上 2 つのことより，$(B_t \triangle B_{t,i}) \cap A_i$ は零である．そこで，

$$N_i = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} ((B_t \triangle B_{t,i}) \cap A_i)$$

と置くと，これも零である．さて，N_i の定義より，$x \in A_i \setminus N_i$ とすると，任意の $t \in \mathbb{Q}$ に対して $x \in A_t \iff x \in A_{t,i}$ だから，$g(x) = f_i(x)$ である．これで，g と f_i が A_i 上ほとんどいたるところで一致することが示された．

$f\colon X \to \mathbb{R}$ を，$g(x) \in \mathbb{R}$ なる点 $x \in X$ では $f(x) = g(x)$，それ以外の点では $f(x) = 0$ として定める．すると，f は可測関数であり，任意の $i \in I$ に対して f と f_i は A_i 上ほとんどいたるところで一致する．これで，主張は示された．□

定義 2.5（局所化可能な測度空間） 測度空間 (X, μ) あるいは単に測度 μ が**局所化可能**（localizable）であるとは，(X, μ) が半有限かつ Dedekind 完備であることをいう．[*2]

命題 2.6 半有限かつ弱 Dedekind 完備な測度空間は，Dedekind 完備（したがって局所化可能）である．

証明 測度空間 (X, μ) が，半有限かつ弱 Dedekind 完備であるとする．X の可測集合の族 $\mathfrak{A}$ を任意にとる．ある $A \in \mathfrak{A}$ に含まれるような測度有限な可測集合の全体を，$\mathfrak{F}$ と書く．(X, μ) は弱 Dedekind 完備だから，$\mathfrak{F}$ の本質的上限 $B \subseteq X$ がとれる．この B が，$\mathfrak{A}$ の本質的上限でもあることを示す．まず，B' が $\mathfrak{A}$ の本質的上界であるとすると，B' は $\mathfrak{F}$ の本質的上界でもあるから，本質的上限の最小性より，$B \subseteq_{\text{a.e.}} B'$ である．次に，$A \in \mathfrak{A}$ を任意にとり，$A \setminus B$ について考える．F を $A \setminus B$ に含まれる測度有限な可測集合とする．すると，$F \in \mathfrak{F}$ より $F \subseteq_{\text{a.e.}} A$ であり，一方で $F \cap A = \emptyset$ だから，F は零となる．したがって，$A \setminus B$ は局所零である．いま (X, μ) は半有限だから，これより $A \setminus B$ は零である（命題 1.2）．すなわち，$A \subseteq_{\text{a.e.}} B$ である．以上より，B は $\mathfrak{A}$ の本質的上限である．これで，(X, μ) が Dedekind 完備であることが示された．□

[*2] 局所化可能性の定義には，いくつかの流儀があるようである [3]．本稿では，Fremlin [2, 211G] の定義に合わせた．

3　真性連続測度に対する Radon–Nikodým の定理

定義 3.1（絶対連続測度，真性連続測度） (X, μ) を測度空間，ν を可測空間 X 上の有限 $\mathbb{K}$ 値測度とする．

(1) ν が μ-絶対連続（absolutely continuous）であるとは，「任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mu(A) \leq \delta$ ならば $|\nu(A)| \leq \epsilon$ が成り立つ」ことをいう．

(2) ν が μ-真性連続（truly continuous）であるとは，「任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ と μ に関して測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ が存在し，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mu(A \cap F) \leq \delta$ ならば $|\nu(A)| \leq \epsilon$ が成り立つ」ことをいう．[*3]

明らかに，μ-真性連続な有限 $\mathbb{K}$ 値測度は μ-絶対連続である．容易にわかるように，μ-絶対連続・真性連続な有限 $\mathbb{K}$ 値測度の全体は，それぞれ線型空間をなす．また，有限 $\mathbb{R}$ 値測度 ν について，ν が μ-絶対連続・真性連続であることと，ν の正の部分と負の部分がともに μ-絶対連続・真性連続であることとは，それぞれ同値である．有限 $\mathbb{C}$ 値測度 ν については，ν が μ-絶対連続・真性連続であることと，ν の実部と虚部がともに μ-絶対連続・真性連続であることとは，それぞれ同値である．

命題 3.2 (X, μ) を測度空間とする．可測空間 X 上の有限 $\mathbb{K}$ 値測度 ν に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) ν は μ-絶対連続である．

(b) 任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mu(A) = 0$ ならば $\nu(A) = 0$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b)　ν が μ-絶対連続であるとする．$\epsilon > 0$ を任意にとると，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mu(A) \leq \delta$ ならば $|\nu(A)| \leq \epsilon$ が成り立つ．ここで，可測集合 $A \subseteq X$ について $\mu(A) = 0$ とすると，どんな $\delta > 0$ に対しても $\mu(A) \leq \delta$ だから，任意の $\epsilon > 0$ に対して $|\nu(A)| \leq \epsilon$ が成り立つことになる．よって，$\nu(A) = 0$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　ν を実部・虚部や正の部分・負の部分に分けることで，はじめから ν は有限正測度であると仮定してよい．有限正測度 ν が μ-絶対連続でないとする．すると，ある $\epsilon > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，可測集合 $A_n \subseteq X$ であって $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ かつ $\nu(A_n) \geq \epsilon$ を満たすものが存在する．

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} F_k$$

と置く．すると，

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k \geq n} F_k\right) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq n} \mu(F_n) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq n} 2^{-k} = 0$$

であり，一方で

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \nu\left(\bigcup_{k \geq n} F_k\right) \geq \liminf_{n \to \infty} \nu(F_k) \geq \epsilon > 0$$

である．よって，(b) は成り立たない．　□

補題 3.3 (X, μ) を測度空間とする．可測空間 X 上の μ-真性連続な有限正測度 $\nu > 0$ に対して，X 上の可積分関数 $g > 0$（ここで，$g > 0$ は $L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ の元としての不等式である）が存在して，任意の可測集合 $A \subseteq X$

[*3] Truly continuity の定義は，Fremlin [2, 232A] による．確定した和訳はないと思われるが，本稿では「真性連続性」とした．

に対して

$$\int_A g\,d\mu \le \nu(A)$$

が成り立つ．

証明　$\nu > 0$ を，X 上の μ-真性連続な有限正測度とする．まず，μ に関して測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ であって，$\nu(F) > 0$ を満たすものが存在することを示す．$\nu > 0$ だから，$\nu(B) > 0$ なる可測集合 $B \subseteq X$ が存在する．ここで，ν は μ-真性連続だから，ある $\delta > 0$ と μ に関して測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ が存在して，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\mu(A \cap F) \le \delta \implies \nu(A) \le \frac{1}{2}\nu(B)$$

が成り立つ．特に，$A = B \setminus F$ と置くと $\mu(A \cap F) = 0 \le \delta$ だから，$\nu(B \setminus F) \le \nu(B)/2$ であり，したがって

$$\nu(F) \ge \nu(B \cap F) \ge \nu(B)/2 > 0$$

が成り立つ．よって，$F \subseteq X$ は μ に関して測度有限な可測集合であり，$\nu(F) > 0$ を満たす．

さて，X 上の有限実測度 ν' を

$$\nu'(A) = \nu(A) - c\mu(A \cap F) \qquad (\text{可測集合 } A \subseteq X)$$

と定める．ただし，$c > 0$ は $\nu'(F) > 0$ となるようにとる（$\nu(F) > 0$ かつ $\mu(F) < \infty$ だから，これは可能である）．ν' に伴う Hahn 分解の正の部分を $P \subseteq X$ と置く．すると，$\nu'(F) > 0$ より $\nu'(F \cap P) > 0$ であり，したがって $\mu(F \cap P) > 0$ である（命題 3.2）．

以上を踏まえて，

$$g = c\chi_{F \cap P}$$

と置く．すると，$c > 0$ および $\mu(F \cap P) > 0$ より，$g > 0$ である．さらに，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\nu'(A \cap P) \ge 0$ より

$$\nu(A) \ge \nu(A \cap P) \ge c\mu(A \cap P \cap F) = \int_A g\,d\mu$$

が成り立つ．よって，この g は条件を満たす．□

定理 3.4（真性連続測度に対する Radon–Nikodým の定理）　(X, μ) を測度空間とする．可測空間 X 上の有限 $\mathbb{K}$ 値測度 ν に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) ν は μ-真性連続である．

(b) ある $f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ が存在して，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$$

が成り立つ．

これらが成り立つとき，(b) の $f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ は ν に対して（$L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ の元として）一意に定まる．

証明　(b) における $f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ の一意性は，容易にわかる．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ について，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$$

が成り立つとする．$\epsilon > 0$ を任意にとる．f は可積分だから，可積分単関数 $g\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，$0 \leq g \leq |f|$ かつ $\int_X g\,d\mu \geq \int_X |f|\,d\mu - \epsilon$ となるようにとれる．さらに，g は可積分単関数だから，$c > 0$ と測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ を，$g \leq c\chi_F$ となるようにとれる．すると，可測集合 $A \subseteq X$ について，$\mu(A \cap F) \leq \epsilon/c$ ならば

$$|\nu(A)| = \left|\int_A f\,d\mu\right| \leq \int_A |f|\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu + \epsilon \leq c\mu(A \cap F) + \epsilon \leq 2\epsilon$$

が成り立つ．よって，ν は μ-真性連続である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　ν を実部・虚部や正の部分・負の部分に分けることで，はじめから ν は有限正測度であると仮定してよい．

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in L^1(X,\mu;\mathbb{K}) \,\middle|\, f \geq 0 \text{ であり，任意の可測集合 } A \subseteq X \text{ に対して } \textstyle\int_A f\,d\mu \leq \nu(A) \text{ である} \right\}$$

と置く．$0 \in \mathscr{F}$ であり，また $f, g \in \mathscr{F}$ ならば $\max\{f,g\} \in \mathscr{F}$ である．実際，$f, g \in \mathscr{F}$ とすると，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A \max\{f,g\}\,d\mu &= \int_{\{x \in A \mid f(x) \geq g(x)\}} f\,d\mu + \int_{\{x \in A \mid f(x) < g(x)\}} g\,d\mu \\
&\leq \nu(\{x \in A \mid f(x) \geq g(x)\}) + \nu(\{x \in A \mid f(x) < g(x)\}) \\
&= \nu(A)
\end{aligned}$$

だから，$\max\{f,g\} \in \mathscr{F}$ となる．

$$\gamma = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X f\,d\mu$$

と置き（$\gamma \leq \nu(X) < \infty$ である），関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ を $\int_X f_n\,d\mu \to \gamma$ となるようにとる．前述のとおり，$\mathscr{F}$ は有限個の元の最大値をとる操作で閉じているから，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加であるとしてよい．すると，各点収束極限 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ が（ほとんどいたるところで）存在し，単調収束定理より，この f は再び $\mathscr{F}$ に属し，$\int_X f\,d\mu = \gamma$ を満たす．

上で定めた $f \in L^1(X, mu; \mathbb{K})$ について，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu \tag{$*$}$$

が成り立つことを示す．ν_1 を

$$\nu_1(A) = \nu(A) - \int_A f\,d\mu \qquad (\text{可測集合 } A \subseteq X)$$

と定めると，$f \in \mathscr{F}$ より ν_1 は有限正測度であり，すでに示した (b) $\Longrightarrow$ (a) より ν_1 は μ-真性連続である．ここで，$\nu_1 > 0$ であると仮定すると，補題 3.3 より，X 上の可積分関数 $g > 0$ が存在して，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\nu_1(A) \geq \int_A g\,d\mu$$

が成り立つ．これより，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\int_A (f+g)\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu + \nu_1(A) = \nu(A)$$

だから，$f + g \in \mathscr{F}$ となる．ところが一方で，$g > 0$ だから

$$\int_X (f+g)\,d\mu > \int_X f\,d\mu = \gamma$$

である．これは，γ の定義に反する．よって，背理法より $\nu_1 = 0$ である．これで，($*$) が示された．　□

4　L^1 空間の双対

命題 4.1　(X,μ) を測度空間とする．$\phi \in L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})$ に対して，$L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ 上の線型形式 $J\phi$ を

$$J\phi(f) = \int_X \phi f\, d\mu \qquad (f \in L^1(X,\mu;\mathbb{K}))$$

と定める．すると，各線型形式 $J\phi$ は連続であり，$J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ はノルム減少な線型写像である．

証明　J の線型性は明らかである．また，$\phi \in L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})$ とすると，任意の $f \in L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ に対して

$$|J\phi(f)| = \left|\int_X \phi f\, d\mu\right| \leq \int_X |\phi f|\, d\mu \leq \|\phi\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}$$

だから，$J\phi$ は連続であり，$\|J\phi\|_{L^{1\prime}} \leq \|\phi\|_{L^\infty}$ が成り立つ．　□

以下，測度空間 (X,μ) に対して，命題 4.1 の自然な写像 $J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ について考える．特に断らなくても，J はこの自然な写像を表すものとする．

定理 4.2　測度空間 (X,μ) に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) (X,μ) は半有限である．
(b) $J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ は等長である．
(c) $J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ は単射である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　(X,μ) が半有限であるとする．J がノルム減少であることは一般に成り立つから（命題 4.1），J がノルム増加であることを示せばよい．$\phi \in L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})$ とする．$0 < a < \|\phi\|_{L^\infty}$ なる実数 a を任意にとる．

$$A = \{x \in X \mid |\phi(x)| \geq a\}$$

と置くと，$\mu(A) > 0$ だから，μ の半有限性より，測度有限な可測集合 $F \subseteq A$ であって $\mu(F) > 0$ なるものがとれる．可測関数 $f\colon X \to \mathbb{K}$ を

$$f(x) = \begin{cases} |\phi(x)|/\phi(x) & (x \in F) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，$0 < \mu(F) < \infty$ より $f \in L^1(X,\mu;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ であり，

$$J\phi(f) = \int_X \phi f\, d\mu = \int_X \phi \cdot \frac{|\phi|}{\phi}\, d\mu \geq a\mu(F) = a\|f\|_{L^1}$$

が成り立つ．よって，$\|J\phi\|_{L^{1\prime}} \geq a$ である．$0 < a < \|\phi\|_{L^\infty}$ は任意にとれたから，これより $\|J\phi\|_{L^{1\prime}} \geq \|\phi\|_{L^\infty}$ を得る．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　J が単射であるとする．$\mu(A) > 0$ なる可測集合 $A \subseteq X$ を任意にとる．すると，$\chi_A \in L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ だから，J の単射性より，$J\chi_A \neq 0$ である．したがって，$f \in L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ であって

$$\int_A f\, d\mu = \int_X \chi_A f\, d\mu \neq 0$$

を満たすものがとれる．すると，$\int_A |f|\, d\mu > 0$ だから，可測単関数 $g\colon A \to \mathbb{K}$ であって，$0 \le g \le |f|$ かつ

$$\int_X g\, d\mu > 0 \tag{$*$}$$

を満たすものがとれる．f は可積分で $0 \le g \le |f|$ だから，g も可積分である．したがって，$a_i > 0$ と測度有限な可測集合 $F_i \subseteq A$ を用いて $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{F_i}$ と表せる．また，($*$) は

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mu(F_i) > 0$$

となるから，ある i について $\mu(F_i) > 0$ である．これで，μ の半有限性が示された． □

定理 4.3 測度空間 (X, μ) に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) (X, μ) は局所化可能である．
(b) $J\colon L^\infty(X, \mu; \mathbb{K}) \to L^1(X, \mu; \mathbb{K})'$ はノルム空間の同型である．
(c) $J\colon L^\infty(X, \mu; \mathbb{K}) \to L^1(X, \mu; \mathbb{K})'$ は全単射である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) (X, μ) が局所化可能であるとする．すると，定理 4.2 より J は等長である．あとは，J が全射であることを示せばよい．

$\Phi \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})'$，$\|\Phi\|_{L^{1\prime}} = 1$ を任意にとる．測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ に対して，関数 ν_F を

$$\nu_F(A) = \Phi(\chi_{A \cap F}) \qquad (\text{可測集合 } A \subseteq X)$$

と定める．容易にわかるように，ν_F は X 上の有限 $\mathbb{K}$ 値測度である．さらに，可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$|\nu_F(A)| = |\Phi(\chi_{A \cap F})| \le \|\Phi\|_{L^{1\prime}} \|\chi_{A \cap F}\| = \mu(A \cap F)$$

が成り立つから，ν_F は μ-真性連続である．よって，真性連続測度に対する Radon–Nikodým の定理（定理 3.4）より，$\phi_F \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ が存在して

$$\nu_F(A) = \int_A \phi_F\, d\mu \qquad (\text{可測集合 } A \subseteq X)$$

が成り立つ．

上でとった ϕ_F について，$\theta \in \mathbb{R}$ を任意にとって $B_\theta = \{x \in X \mid \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\phi_F(x)) > 1\}$ と置くと，

$$\int_{B_\theta} \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\phi_F(x))\, d\mu = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\nu_F(B_\theta)) \le \mu(B_\theta \cap F) \le \mu(B_\theta)$$

となる．したがって，B_θ は零である．これが任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことより，ほとんどすべての $x \in X$ に対して，任意の $\theta \in \mathbb{Q}$ に対して $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\phi_F(x)) \le 1$ であることがわかる．これは，ほとんどすべての $x \in X$ に対して $|\phi_F(x)| \le 1$ であることを意味する．

$F, G \subseteq X$ を測度有限な可測集合とする．すると，任意の可測集合 $A \subseteq F \cap G$ に対して

$$\int_A \phi_F\, d\mu = \nu_F(A) = \Phi(\chi_{A \cap F}) = \Phi(\chi_A) = \Phi(\chi_{A \cap G}) = \nu_G(A) = \int_A \phi_G\, d\mu$$

が成り立つから，ϕ_F と ϕ_G は $F \cap G$ 上ほとんどいたるところで一致する．よって，(X, μ) の Dedekind 完備性と定理 2.4 より，可測関数 $\phi\colon X \to \mathbb{K}$ であって，任意の測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ に対して ϕ と ϕ_F が F 上

ほとんどいたるところで一致するようなものがとれる．任意の測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ に対して，ϕ_F はほとんどいたるところで絶対値が 1 以下だったから，ϕ は F 上ほとんどいたるところで絶対値が 1 以下となる．したがって，$\{x \in X \mid |\phi(x)| > 1\}$ は局所零であり，いま (X, μ) は半有限だから，$\{x \in X \mid |\phi(x)| > 1\}$ は零である．よって，$\phi \in L^\infty(X, \mu; \mathbb{K})$ である．

$J\phi = \Phi$ であることを示そう．$J\phi, \Phi$ はともに $L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ 上の連続線型形式であり，$L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ は位相線型空間として χ_F（$F \subseteq X$ は測度有限な可測集合）の全体で生成されるから，測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ に対して $J\phi(\chi_F) = \Phi(\chi_F)$ であることを示せばよい．これは，

$$J\phi(\chi_F) = \int_X \phi\chi_F \, d\mu = \int_F \phi \, d\mu = \int_F \phi_F \, d\mu = \nu_F(F) = \Phi(\chi_F)$$

より成り立つ．よって，$J\phi = \Phi$ である．これで，J の全射性が示された．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　J が全単射であるとする．すると，定理 4.2 より (X, μ) は半有限である．あとは，(X, μ) が Dedekind 完備であることを示せばよい．X の可測集合の族 $\mathfrak{A}$ を任意にとる．$\mathfrak{A}$ が本質的上限をもつことを示したい．$\mathfrak{A}$ の代わりに $\mathfrak{A}$ の元の有限合併全体を考えても本質的上限の存在は変わらないから，$\mathfrak{A}$ ははじめから有限合併に関して閉じているとしてよい．このとき，$\mathfrak{A}$ は包含関係に関して有向集合をなす．

$f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ に対して，有限な極限値

$$\Phi(f) = \lim_{A \in \mathfrak{A}} \int_A f \, d\mu$$

が存在する．実際，$f \geq 0$ の場合は $\lim_{A \in \mathfrak{A}} \int_A f \, d\mu$ が $A \in \mathfrak{A}$ に関して単調増加であることから有限な極限値の存在がわかり，f が一般の場合は f を実部・虚部や正の部分・負の部分に分けることで $f \geq 0$ の場合に帰着する．したがって，上式によって $\Phi\colon L^1(X, \mu; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ が矛盾なく定まる．Φ は，明らかに $L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ 上の線型形式である．また，$f \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})$ に対して，

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d\mu \leq \|f\|_{L^1} \qquad (A \in \mathfrak{A})$$

より $|\Phi(f)| \leq \|f\|_{L^1}$ である．よって，$\Phi \in L^1(X, \mu; \mathbb{K})'$ である．いま J は全射だから，$J\phi = \Phi$ なる $\phi \in L^\infty(X, \mu; \mathbb{K})$ がとれる．この ϕ について，任意の測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ に対して

$$\int_F \phi \, d\mu = \int_X \phi\chi_F \, d\mu = \Phi(\chi_F) = \lim_{A \in \mathfrak{A}} \int_A \chi_F \, d\mu = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \mu(A \cap F)$$

であり，したがって実部をとることにより

$$\int_F \operatorname{Re} \phi \, d\mu = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \mu(A \cap F) \tag{$*$}$$

が成り立つことに注意する．

さて，$B = \{x \in X \mid \operatorname{Re} \phi(x) > 0\}$ が $\mathfrak{A}$ の本質的上限であることを示す．まず，B が $\mathfrak{A}$ の本質的上界であることを示す．$A \in \mathfrak{A}$ を任意にとる．いま (X, μ) は半有限だから，$A \setminus B$ が局所零であることを示せば十分である（命題 1.2）．これは，任意の測度有限な可測集合 $F \subseteq A \setminus B$ に対して，($*$) と $F \subseteq \{x \in X \mid \operatorname{Re} \phi(x) \leq 0\}$ より

$$\mu(F) = \mu(A \cap F) \leq \int_F \operatorname{Re} \phi \, d\mu \leq 0$$

だから，確かに成り立つ．これで，B が $\mathfrak{A}$ の本質的上界であることが示された．次に，$B' \subseteq X$ が $\mathfrak{A}$ の本質的上界であるとして，$B \subseteq_{\text{a.e.}} B'$ を示す．いま (X,μ) は半有限だから，$B \setminus B'$ が局所零であることを示せば十分である（命題 1.2）．測度有限な可測集合 $F \subseteq B \setminus B'$ を任意にとる．すると，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$A \subseteq_{\text{a.e.}} B'$ より $\mu(A \cap F) \leq \mu(B' \cap F) = 0$ である．これと $(*)$ より，

$$\int_F \operatorname{Re}\phi \, d\mu = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \mu(A \cap F) = 0$$

である．ところで，$F \subseteq B$ 上では $\operatorname{Re}\phi > 0$ だから，これが成り立つためには F が零でなければならない．したがって，$B \setminus B'$ は局所零である．これで，$B \subseteq_{\text{a.e.}} B'$ が示された．以上より，B は $\mathfrak{A}$ の本質的上限である．□

測度空間 (X,μ) と可測集合 $A \subseteq X$ に対して，測度 μ を A 上に制限して得られる測度を，ν_A と書くことにする．

補題 4.4　(X,μ) を弱 Dedekind 完備な測度空間とし，X の測度有限な可測集合の全体からなる族の本質的上限を 1 つとって $X_0 \subseteq X$ とする．

(1) (X_0, μ_{X_0}) は局所化可能である．

(2) 測度空間 $(X \setminus X_0, \mu_{X \setminus X_0})$ について，$\mu_{X \setminus X_0}$ の値域は $\{0, \infty\}$ に含まれる．

証明　(1)　(X,μ) は弱 Dedekind 完備だから，その部分測度空間 (X_0, μ_{X_0}) も弱 Dedekind 完備である．命題 2.6 より，あとは (X_0, μ_{X_0}) が半有限であることを示せばよい．可測集合 $A \subseteq X_0$ を任意にとる．すると，X_0 が X の測度有限な可測集合の全体からなる族の本質的上限であることから容易にわかるように，$A = X_0 \cap A$ は $\{F \cap A \mid F \subseteq X \text{ は測度有限な可測集合}\}$ の本質的上限である．したがって，$\mu(A) > 0$ ならば，ある測度有限な可測集合 $F \subseteq X$ が存在して $\mu(F \cap A) > 0$ となる．これで，半有限性が示された．

(2)　可測集合 $F \subseteq X \setminus X_0$ について，$\mu(F) < \infty$ とすると，X_0 の定義より，$F \subseteq_{\text{a.e.}} X_0$ である．一方で $F \cap X_0 = \emptyset$ だから，$\mu(X_0) = 0$ でなければならない．□

定理 4.5　弱 Dedekind 完備な測度空間 (X,μ) に対して，$J \colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ は全射である．

証明　測度空間 (X,μ) が弱 Dedekind 完備であるとする．X の測度有限な可測集合の全体からなる族の本質的上限を 1 つとって $X_0 \subseteq X$ とする．明らかに，写像 $L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^\infty(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K})$; $f \mapsto f|_{X_0}$ は全射である．また，$\mu_{X \setminus X_0}$ の値域は $\{0,\infty\}$ に含まれるから（補題 4.4 (2)），X 上の任意の可積分関数は，$X \setminus X_0$ 上ほとんどいたるところで 0 に等しい．これより，$L^1(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K})$; $f \mapsto f|_{X_0}$ はノルム空間の同型であり，したがって双対空間の同型 $L^1(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K})' \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ を誘導する．さらに，(X_0,μ_{X_0}) は局所化可能だから（補題 4.4 (1)），定理 4.3 より，自然な写像 $L^\infty(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K}) \to L^1(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K})'$ はノルム空間の同型である．さて，以上 3 つの写像の合成

$$L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^\infty(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K}) \to L^1(X_0,\mu_{X_0};\mathbb{K})' \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$$

は全射であり，これが $J \colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ に等しいことは容易に確かめられる．よって，J は全射である．□

系 4.6　半有限な測度空間 (X,μ) に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) (X,μ) は Dedekind 完備（したがって局所化可能）である．

(b) (X,μ) は弱 Dedekind 完備である．

(c) $J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ は全射である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 定理 4.5 で示した．

(c) $\Longrightarrow$ (a) 半有限な測度空間 (X,μ) に対して $J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ は単射だから（定理 4.2），(c) と合わせると，$J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ が全単射であることを得る．このとき，定理 4.3 より，(X,μ) は局所化可能である． □

(X,μ) を測度空間として，μ の半有限化 μ_{sf} を考える．系 1.7 より，ノルム空間として自然に $L^1(X,\mu;\mathbb{K}) \cong L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ だから，双対をとれば $L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})' \cong L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ を得る．これと自然な写像 $L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})'$ との合成を，$J_{\mathrm{sf}}\colon L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})$ と書く．

定理 4.7 (X,μ) を測度空間とする．

(1) $J_{\mathrm{sf}}\colon L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ は等長である．[*4]

(2) $J_{\mathrm{sf}}\colon L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ の像は，$J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ の像に等しい．

証明 (1) (X,μ_{sf}) は半有限だから，定理 4.2 より，自然な写像 $L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})'$ は等長である．この自然な写像とノルム空間の同型 $L^1(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})' \cong L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ との合成が J_{sf} だから，J_{sf} も等長である．

(2) 容易にわかるように，命題 1.8 の自然な写像 $L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ と $J_{\mathrm{sf}}\colon L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ との合成は，$J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ に等しい．よって，主張は自然な写像 $L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ の全射性（命題 1.8）から従う． □

系 4.8 弱 Dedekind 完備な測度空間 (X,μ) に対して，$J_{\mathrm{sf}}\colon L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ はノルム空間の同型である．

証明 弱 Dedekind 完備な測度空間 (X,μ) に対して $J\colon L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}) \to L^1(X,\mu;\mathbb{K})'$ が全射であることと（定理 4.5），定理 4.7 の結果である． □

参考文献

本稿の大筋は，Okada–Ricker [3] による．主要な定理の証明は，Fremlin [2] による．

[1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Springer, 2013.

[2] D. H. Fremlin, *Measure Theory, Volume 2*, 2016.

[3] S. Okada, W. J. Ricker, “Classes of Localizable Measure Spaces”, *Positivity and Noncommutative Analysis* pp. 425–469, 2019.

[*4] この性質のため，Cohn [1, p. 92] では，L^∞ 空間を本稿の記号でいう $L^\infty(X,\mu_{\mathrm{sf}};\mathbb{K})$ と同型になるように定義している．