

付値体のノート

箱 (@o_ccah)

2019 年 11 月 17 日

概要

付値体の定義からはじめ、 \mathbb{Q} 上の絶対値の分類や、複素係数と実係数それぞれの場合の Gelfand–Mazur の定理の経由して、Ostrowski の定理を証明する。Ostrowski の定理は、Archimedes 的な完備付値体が \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} のいずれかに同値であることを主張する。

目次

1	付値体	2
1.1	絶対値と付値体	2
1.2	擬絶対値	4
1.3	Archimedes 性	5
2	\mathbb{Q} 上の絶対値の分類	6
3	四元数体に関する準備	8
4	Gelfand–Mazur の定理	10
4.1	単位的代数の元のスペクトル	10
4.2	ノルム代数, Banach 代数	11
4.3	Gelfand–Mazur の定理 (複素係数の場合)	12
4.4	Gelfand–Mazur の定理 (実係数の場合)	14
5	Ostrowski の定理	15
付録 A	Frobenius の定理	16

記号と用語

- 自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数, 四元数全体の集合を, それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ と書く。0 は自然数に含める。また, 0 以上の実数全体の集合を, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と書く。
- 体とは, 可換とは限らない単位的環であって, 零環ではなく, 0 以外の元がすべて乗法に関する逆元をもつものをいう。
- 可換とは限らない単位的環 R に対して, R の元であって R のすべての元と可換であるもの全体の集合

を, R の中心という.

1 付値体

1.1 絶対値と付値体

定義 1.1 (絶対値, 付値体) 体 K 上の絶対値とは, 写像 $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって, 次の 3 条件を満たすものをいう.

(V1) 任意の $x \in K$ に対して, $x = 0$ と $|x| = 0$ とは同値である (非退化性).

(V2) 任意の $x, y \in K$ に対して, $|xy| = |x||y|$ である (乗法性).

(V3) 任意の $x, y \in K$ に対して, $|x + y| \leq |x| + |y|$ である (三角不等式).

体とその上の絶対値との組を, 付値体という.

K を体とする. $|0| = 0$ かつ任意の $x \in K \setminus \{0\}$ に対して $|x| = 1$ と定めると, これは K 上の絶対値である. これを, K 上の自明な絶対値という.

K を体, K' を K の部分体とする. K 上の絶対値を K' に制限したものは, K' 上の絶対値となる. これにより, 付値体の部分体は自然に付値体とみなせる.

K を体, $|\cdot|$ を K 上の絶対値とする. $|1| = |1^2| = |1|^2$ であり, 非退化性より $|1| \neq 0$ だから, $|1| = 1$ である. また, $|-1|^2 = |(-1)^2| = |1| = 1$ だから, $|-1| = 1$ である. したがって, $x \in K$ に対して $|-x| = |-1||x| = |x|$ であり, $|x||x^{-1}| = |xx^{-1}||1| = 1$ より $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ である.

命題 1.2 K を体, $|\cdot|$ を K 上の絶対値とする. このとき, $(x, y) \mapsto |x - y|$ は K 上の距離であり, この距離が定める位相によって K は位相体となる (すなわち, K 上の加法, 加法逆元をとる演算, 乗法および乗法逆元をとる演算は, この距離が定める位相に関して連続である).

証明 $(x, y) \mapsto |x - y|$ が K 上の距離であることは, 絶対値の非退化性と三角不等式, および上で見たように $x \in K$ に対して $|-x| = |x|$ であることからわかる. 以下, K にはこの距離が定める位相を考える.

加法の連続性は, $x_0, y_0, x, y \in K$ に対して

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0|$$

であることからわかる. 加法逆元をとる演算の連続性は, $x_0, x \in K$ に対して

$$|(-x) - (-x_0)| = |x - x_0|$$

であることからわかる. 乗法の連続性は, $x_0, y_0, x, y \in K$ に対して

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)(y - y_0) + (x - x_0)y_0 + x_0(y - y_0),$$

したがって

$$|xy - x_0y_0| \leq |x - x_0||y - y_0| + |x - x_0||y_0| + |x_0||y - y_0|$$

であることからわかる. 乗法逆元をとる演算の連続性は, $x_0, x \in K^\times$ に対して

$$x^{-1} - x_0^{-1} = -x^{-1}(x - x_0)x_0^{-1},$$

したがって

$$|x^{-1} - x_0^{-1}| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}$$

であることからわかる.

□

体上の絶対値から命題 1.2 のようにして定まる位相を, その絶対値が定める位相という. 以下, 付値体は常に, その絶対値が定める位相を備えているものとする.

体 K 上の絶対値 $|\cdot|$ について, $|\cdot|$ が定める位相が離散であることと, $|\cdot|$ が自明な絶対値であることは同値である. このことを見ておく. 自明な絶対値が離散位相を定めることは明らかである. 逆に, $|\cdot|$ が自明でなければ, $|x| \neq 1$ なる $x \in K \setminus \{0\}$ がとれ, $|x| < 1$ であるか $|x| > 1$ であるかに応じて $y = x$ あるいは $y = x^{-1}$ と置くことで, $|y| < 1$ なる $y \in K \setminus \{0\}$ がとれる. このとき, 点列 $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 を含まないが, $|\cdot|$ が定める位相に関して 0 に収束する. よって, $|\cdot|$ が定める位相は離散ではない.

定義 1.3 (同値な絶対値) 体 K 上の 2 つの絶対値 $|\cdot|_0, |\cdot|_1$ は, それらが K 上に同じ位相を定めるとき, 同値であるという.

命題 1.4 体 K 上の自明でない絶対値 $|\cdot|_0, |\cdot|_1$ に対して, 次の 4 条件は同値である.

- (a) 2 つの絶対値 $|\cdot|_0$ と $|\cdot|_1$ は同値である.
- (b) 任意の $x \in K$ に対して, $|x|_0 < 1$ と $|x|_1 < 1$ とは同値である.
- (c) 任意の $x \in K$ に対して, $|x|_0 < 1$ ならば $|x|_1 < 1$ である.
- (d) ある $s > 0$ が存在して, 任意の $x \in K$ に対して $|x|_1 = |x|_0^s$ が成り立つ.

証明 (a) \implies (b) K 上の絶対値 $|\cdot|$ について, $x \in K$ が $|x| < 1$ を満たすことは, 点列 $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $|\cdot|$ の定める位相に関して 0 に収束することと同値である. よって, $|\cdot|_0$ と $|\cdot|_1$ が同値ならば, $x \in K$ に対して $|x|_0 < 1$ と $|x|_1 < 1$ とは同値となる.

(b) \implies (c) 明らかである.

(c) \implies (d) 任意の $x \in K$ に対して, $|x|_0 < 1$ ならば $|x|_1 < 1$ であるとする. このとき, 任意の $x \in K$ に対して, $|x|_0 > 1$ ならば $|x|_1 > 1$ である. 実際, $|x|_0 > 1$ ならば $|x^{-1}|_0 = |x|_0^{-1} < 1$ だから仮定より $|x^{-1}|_1 < 1$ であり, したがって $|x|_1 = |x^{-1}|_1^{-1} > 1$ である.

$|\cdot|_0$ は自明な絶対値ではないから, $|x_0|_0 > 1$ なる $x_0 \in K$ がとれる. このとき $|x_0|_0 > 1$ でもある. そこで, $s = \log|x_0|_1 / \log|x_0|_0 > 0$ と置く. この s について, 任意の $x \in K$ に対して $|x|_1 = |x|_0^s$ が成り立つことを示そう.

$x \in K$ を任意にとる. $x = 0$ ならば $|x|_1 = 0 = |x|_0^s$ だから, $x \neq 0$ とする. $\gamma \in \mathbb{R}$ を $|x|_0 = |x_0|_0^\gamma$ となるようにとる. 任意の有理数 $m/n > \gamma$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$) に対して, $|x|_0 < |x_0|_0^{m/n}$, したがって $|x^n x_0^{-m}|_0 < 1$ だから, 仮定より $|x^n x_0^{-m}|_1 < 1$, したがって $|x|_1 < |x_0|_1^{m/n}$ を得る. 同様に, 任意の有理数 $m/n < \gamma$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$) に対して $|x|_1 > |x_0|_1^{m/n}$ が成り立つ. よって, m/n を γ に近づけることにより, $|x|_1 = |x_0|_1^\gamma$ を得る. よって,

$$|x|_1 = |x_0|_1^\gamma = (|x_0|_0^\gamma)^s = (|x_0|_0^\gamma)^s = |x|_0^s$$

が成り立つ. これで, (d) が示された.

(d) \implies (a) 明らかである.

□

命題 1.5 K を体, $|\cdot|$ を K 上の絶対値とする. 任意の $0 < s \leq 1$ に対して, $|\cdot|^s$ は $|\cdot|$ と同値な K 上の絶対値である.

証明 $0 < s \leq 1$ とする. $|\cdot|^s$ が非退化かつ乗法的であることは明らかである. $|\cdot|^s$ が三角不等式を満たすことを示す. $x, y \in K$ を任意にとる. $x = y = 0$ なら明らかだから, そうではないとする. このとき, $0 < s \leq 1$ より

$$\left(\frac{|x|}{|x|+|y|}\right)^s + \left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)^s \geq \frac{|x|}{|x|+|y|} + \frac{|y|}{|x|+|y|} = 1$$

だから, 両辺に $(|x|+|y|)^s$ を掛け, $|\cdot|$ に対する三角不等式を使うことで

$$|x|^s + |y|^s \geq (|x|+|y|)^s \geq |x+y|^s$$

を得る. よって, $|\cdot|^s$ は K 上の絶対値である. $|\cdot|^s$ が $|\cdot|$ と同値であることは, (命題 1.4 の証明にも書いたとおり) 明らかである. \square

1.2 擬絶対値

定義 1.6 (擬絶対値) 体 K 上の擬絶対値^{*1}とは, 写像 $f: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって, 次の 3 条件を満たすものをいう.

(PV1) 任意の $x \in K$ に対して, $x = 0$ と $f(x) = 0$ とは同値である.

(PV2) 任意の $x, y \in K$ に対して, $f(xy) = f(x)f(y)$ である.

(PV3) ある定数 $A \geq 0$ が存在して, 任意の $x, y \in K$ に対して $f(x+y) \leq A \max\{f(x), f(y)\}$ である.

命題 1.7 体 K 上の絶対値 $|\cdot|$ と任意の $s > 0$ に対して, $|\cdot|^s$ は K 上の擬絶対値である.

証明 $|\cdot|$ が非退化かつ乗法的であることから, $|\cdot|^s$ が (PV1), (PV2) を満たすことは明らかである. (PV3) については, 任意の $x, y \in K$ に対して

$$|x+y|^s \leq (|x|+|y|)^s \leq (2 \max\{|x|, |y|\})^s = 2^s \max\{|x|^s, |y|^s\}$$

だから, $A = 2^s$ と置けばよい. \square

命題 1.8 体 K 上の擬絶対値 f に対して, 次の 3 条件は同値である.

(a) f は K 上の絶対値である.

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(n) \leq n$ が成り立つ.

(c) ある定数 $C \geq 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) \leq Cn$ が成り立つ.

証明 (a) \implies (b) f が K 上の絶対値であるとする. すると, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ である. また, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|n| \leq n$ ならば三角不等式より $f(n+1) \leq f(n) + f(1) \leq n+1$ となる. よって, 帰納法より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n| \leq n$ が成り立つ.

(b) \implies (c) 明らかである.

(c) \implies (a) f は擬絶対値だから, 定数 $A \geq 0$ であって, 任意の $x, y \in K$ に対して

$$f(x+y) \leq A \max\{f(x), f(y)\}$$

^{*1} この概念は, たとえば Bourbaki [3, p. 108] で定義されている. ただし, Bourbaki [3, p. 108] では特に名前は付けられていない. 「擬絶対値」は, 本稿だけの用語である.

が成り立つようなものがとれる．ここから帰納法により，任意の $r \in \mathbb{N}$ と $x_0, \dots, x_{2^r-1} \in K$ に対して

$$f(x_0 + \dots + x_{2^r-1}) \leq A^r \max\{f(x_0), \dots, f(x_{2^r-1})\} \quad (*)$$

が成り立つことがわかる．

(c) が成り立つとする． $x, y \in K$ を任意にとる． $r \in \mathbb{N}$, $n = 2^r - 1$ とする．(*) と (c) より，

$$\begin{aligned} f(x+y)^n &= f((x+y)^n) \\ &= f\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\ &\leq A^r \max_{0 \leq k \leq n} f\left(\binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\ &\leq A^r \max_{0 \leq k \leq n} C \binom{n}{k} f(x)^{n-k} f(y)^k \\ &\leq A^r \sum_{k=0}^n C \binom{n}{k} f(x)^{n-k} f(y)^k \\ &= A^r C (f(x) + f(y))^n, \end{aligned}$$

したがって

$$f(x+y) \leq A^{r/n} C^{1/n} (f(x) + f(y))$$

が成り立つ． $r \rightarrow \infty$ とすることで，三角不等式

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

を得る．よって， f は K 上の絶対値である． □

系 1.9 K を体， $|\cdot|$ を K 上の絶対値とし， $s > 0$ とする．ある定数 $C \geq 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n|^s \leq Cn$ が成り立てば， $|\cdot|^s$ は $|\cdot|$ と同値な K 上の絶対値である．

証明 命題 1.7 と命題 1.8 より，与えられた仮定の下で， $|\cdot|^s$ は K 上の絶対値である． $|\cdot|^s$ が $|\cdot|$ と同値であることは，(命題 1.4 の証明にも書いたとおり) 明らかである． □

1.3 Archimedes 性

定義 1.10 (Archimedes 性) 体 K 上の絶対値 $|\cdot|$ は，条件

(U) 任意の $x, y \in K$ に対して， $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ である (超距離不等式)．

を満たすとき，非 Archimedes 的あるいは超距離的であるという．非 Archimedes 的でない絶対値は，Archimedes 的であるという．付値体は，その絶対値が非 Archimedes 的・Archimedes 的であるに応じて，非 Archimedes 的・Archimedes 的であるという．

明らかに，自明な絶対値は非 Archimedes 的である．また，命題 1.4 の条件 (d) より，Archimedes 性は同値な絶対値の間では変わらないことがわかる．すなわち，Archimedes 的な絶対値と同値な絶対値は Archimedes 的であり，非 Archimedes 的な絶対値と同値な絶対値は非 Archimedes 的である．

命題 1.11 体 K 上の絶対値 $|\cdot|$ に対して、次の 3 条件は同値である.

- (a) $|\cdot|$ は非 Archimedes 的である.
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $|n| \leq 1$ である.
- (c) 任意の $s > 0$ に対して、 $|\cdot|^s$ は K 上の絶対値である.

証明 (a) \implies (b) $|\cdot|$ が非 Archimedes 的であるとする. $|0| = 0$, $|1| = 1$ は一般に成り立つのだった. また, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|n| \leq 1$ ならば超距離不等式より $|n+1| \leq \max\{|n|, |1|\} \leq 1$ となる. よって, 帰納法より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n| \leq 1$ が成り立つ.

(b) \implies (c) (b) が成り立つとすると, 任意の $s > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n|^s \leq 1$ である. よって, 系 1.9 より, 任意の $s > 0$ に対して $|\cdot|^s$ は K 上の絶対値である.

(c) \implies (a) (c) が成り立つとする. 任意の $s > 0$ に対して, $|\cdot|^s$ が絶対値であることより, 任意の $x, y \in K$ に対して

$$|x+y|^s \leq |x|^s + |y|^s \leq 2 \max\{|x|^s, |y|^s\},$$

したがって

$$|x+y| \leq 2^{1/s} \max\{|x|, |y|\}$$

である. $s \rightarrow \infty$ とすることで, $|\cdot|$ が超距離不等式を満たすことがわかる. □

系 1.12 K を体, K' を K の部分体, $|\cdot|$ を K 上の絶対値とする. $|\cdot|$ が (K 上の絶対値として) 非 Archimedes 的であることと, $|\cdot|$ の K' への制限が (K' 上の絶対値として) 非 Archimedes 的であることは同値である.

証明 命題 1.11 の条件 (b) からわかる. □

系 1.13 正標数の体上の絶対値は, すべて非 Archimedes 的である.

証明 K を標数 $p > 0$ の体, $|\cdot|$ を K 上の絶対値とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, K の元としての n は素部分体 \mathbb{F}_p に属する. したがって, K の元として $n \neq 0$ ならば $n^{p-1} = 1$ であり, したがって $|n| = 1$ となる. よって, 命題 1.11 より, $|\cdot|$ は非 Archimedes 的である. □

2 \mathbb{Q} 上の絶対値の分類

定義 2.1 (実絶対値・ p 進絶対値)

- (1) \mathbb{Q} 上の実絶対値 $|\cdot|_\infty$ を, $x \in \mathbb{Q}$ に対して

$$|x|_\infty = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

と定める.

- (2) 素数 p に対して, \mathbb{Q} 上の p 進絶対値 $|\cdot|_p$ を, 次のように定める. $x = 0$ に対しては, $|x|_p = 0$ とする. $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対しては, $n \in \mathbb{Z}$ および p と互いに素な $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_{>0}$ を用いて $x = p^n \cdot a/b$ と表し, この n を用いて

$$|x|_p = p^{-n}$$

と定める.

実絶対値および素数 p に対する p 進絶対値が実際に \mathbb{Q} 上の絶対値であることは、簡単に確かめられる。実絶対値は Archimedes 的であり、 p 進絶対値は非 Archimedes 的である。

定理 2.2 (\mathbb{Q} 上の絶対値の分類定理) \mathbb{Q} 上の絶対値 $|\cdot|$ に対して、次の 3 条件のうちただ 1 つが成り立つ。

- (i) $|\cdot|$ は自明な絶対値である。
- (ii) $0 < s \leq 1$ が存在して、任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $|x| = |x|_\infty^s$ が成り立つ。
- (iii) 素数 p および $s > 0$ が存在して、任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $|x| = |x|_p^s$ が成り立つ。

さらに、(ii) の場合、 $0 < s \leq 1$ の選び方は $|\cdot|$ に対して一意的であり、(iii) の場合、素数 p および $s > 0$ の選び方は $|\cdot|$ に対して一意的である。逆に、(i), (ii), (iii) それぞれによって定まる $|\cdot|$ はいずれも \mathbb{Q} 上の絶対値である。^{*2}

証明 (i), (ii), (iii) によって定まる $|\cdot|$ が \mathbb{Q} 上の絶対値であることは、 $|\cdot|_\infty$ が \mathbb{Q} 上の絶対値であることと命題 1.5, $|\cdot|_p$ (p は素数) が \mathbb{Q} 上の非 Archimedes 的な絶対値であることと命題 1.11 の条件 (d) からわかる。また、容易にわかるように、(i), (ii), (iii) (および s や p の選択) によって定まる絶対値はすべて異なる。あとは、 \mathbb{Q} 上の任意の絶対値が (i), (ii), (iii) のいずれかの形であることを示せばよい。証明を 2 つの場合にわけ。

(I) まず、 \mathbb{Q} 上の非 Archimedes 的な絶対値 $|\cdot|$ について考える。このとき命題 1.11 より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (したがって $n \in \mathbb{Z}$ に対しても) $|n| \leq 1$ である。もし任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $|n| = 1$ ならば、絶対値の乗法性から $|\cdot|$ が自明な絶対値であることがわかる。それ以外の場合を考えよう。このとき、 $|n| < 1$ なる $n \in \mathbb{N}_{>0}$ の中で最小のもの n_0 がとれる。この n_0 は素数でなければならない。実際、 n_0 が約数 $1 < d < n_0$ をもったとすると、 $|d||n_0/d| = |n_0| < 1$ より $|d| < 1$ または $|n_0/d| < 1$ だが、これは n_0 の最小性に反する。そこで、改めて $p = n_0$ と置く。

p と互いに素な $a \in \mathbb{Z}$ に対して $|a| = 1$ であることを示そう。 $a = kp + l$ ($k \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, \dots, p-1\}$) と表す。 $|p| < 1$ であり、また p の最小性より $|l| = 1$ だから、

$$|a - l| = |kp| = |k||p| < 1 = |l|$$

である。一方で、超距離不等式より

$$|l| \leq \max\{|a|, |a - l|\}$$

である。これら 2 式より、 $1 = |l| \leq |a|$ 、したがって $|a| = 1$ を得る。これで示された。

さて、 $p^{-s} = |p| < 1$ なる $s > 0$ をとる。 $|\cdot|$ が $|\cdot|_p^s$ に等しいことを示そう。 $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ を任意にとり、 $n \in \mathbb{Z}$ および p と互いに素な $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_{>0}$ を用いて $x = p^n \cdot a/b$ と表す。すると、

$$|x| = |p|^n \cdot \frac{|a|}{|b|} = |p|^n = (p^{-s})^n = |x|_p^s$$

である。よって、絶対値 $|\cdot|$ は $|\cdot|_p^s$ に等しい。これで、 \mathbb{Q} 上の任意の非 Archimedes 的な絶対値が (i) または (iii) の形であることが示された。

(II) 次に、 \mathbb{Q} 上の Archimedes 的な絶対値 $|\cdot|$ について考える。このとき命題 1.11 より、ある整数 $h \geq 2$ が存在して $|h| > 1$ である。

$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0, \pm 1\}$ に対して

$$f(x) = \frac{\log|x|}{\log|x|_\infty}$$

^{*2} 定理 2.2 を Ostrowski の定理と呼ぶこともある。

と置く．整数 $a, b \geq 2$ を任意にとる． $n \in \mathbb{N}$ に対して， a^n の b 進法展開を

$$a^n = c_0 + c_1 b + \cdots + c_{q(n)} b^{q(n)}$$

とする．ここで $q(n)$ は， a^n の b 進法展開の b^m の位が 0 でないような最大の自然数であり， $\lfloor n \cdot \log a / \log b \rfloor$ に等しい．また， $c_0, \dots, c_{q(n)} \in \{0, \dots, b-1\}$ である． a^n の b 進法展開の表式より，

$$\begin{aligned} |a|^n &\leq |c_0| + |c_1| |b| + \cdots + |c_{q(n)}| |b|^{q(n)} \\ &\leq c_0 + c_1 |b| + \cdots + c_{q(n)} |b|^{q(n)} \\ &\leq b(1 + |b| + \cdots + |b|^{q(n)}) \\ &\leq b(q(n) + 1) \max\{1, |b|\}^{q(n)} \end{aligned}$$

である．上式の両辺の対数をとって

$$n \log |a| \leq \log b + \log(q(n) + 1) + q(n) \max\{0, \log |b|\},$$

さらに両辺を $n \log a$ で割って

$$f(a) \leq \frac{\log b}{n \log a} + \frac{\log(q(n) + 1)}{n \log a} + \frac{\max\{0, \log |b|\}}{\log a} \cdot \frac{q(n)}{n}$$

を得る． $n \rightarrow \infty$ のとき $q(n)/n \rightarrow \log a / \log b$ だから，上式で $n \rightarrow \infty$ として

$$f(a) \leq \frac{\max\{0, \log |b|\}}{\log b} = \max\{0, f(b)\} \quad (*)$$

を得る．ところで， $|h| > 1$ なる整数 $h \geq 2$ がとれるのだった．このような h をとる． $|h| > 1$ より $f(h) > 0$ だから，(*)において a を h に置き換えることで $f(b) > 0$ を得る．したがって，(*)は $f(a) \leq f(b)$ となる． a と b の役割を交換することで $f(b) \leq f(a)$ もわかるから， $f(a) = f(b)$ である．結局， f は 2 以上の整数に対して一定の値 $s > 0$ をとる．すなわち，任意の整数 $a \geq 2$ に対して

$$|a| = |a|_\infty^s$$

が成り立つ．絶対値の乗法性より，この式が任意の有理数に対しても成り立つことがわかる．よって，絶対値 $|\cdot|$ は $|\cdot|_\infty$ に等しい．さらに，三角不等式より $|2| \leq |1| + |1|$ ，すなわち $2^s \leq 2$ だから， $s \leq 1$ でなければならない．これで， \mathbb{Q} 上の任意の Archimedes 的な絶対値が (ii) の形であることが示された． \square

3 四元数体に関する準備

定理 3.1 D は標数が 2 でない非可換体であって， D の中心 Z を含む D の可換な部分体はすべて Z 上 2 次元以下であるとする．このとき， $u, v, w \in D$ と $\alpha, \beta \in Z$ であって， $(1, u, v, w)$ が D の Z 上の基底をなし，かつ

$$\begin{aligned} u^2 &= \alpha, & v^2 &= \beta, & w^2 &= -\alpha\beta \\ uv &= -vu = w, & vw &= -wv = -\beta u, & wu &= -uw = -\alpha v \end{aligned}$$

を満たすものが存在する．

証明 D は非可換だから、 $a \in D \setminus Z$ がとれる。 $Z(a)$ は Z を含む D の可換な部分体だから 2 次元以下であり、したがって $(1, a)$ が $Z(a)$ の Z 上の基底となるから、 $a^2 = \lambda a + \mu$ ($\lambda, \mu \in Z$) と書ける。 $u = a - 2^{-1}\lambda$ と置くと、 $u \in D \setminus Z$ であって

$$u^2 = (a - 2^{-1}\lambda)^2 = a^2 - \lambda a + 2^{-2}\lambda^2 = \mu + 2^{-2}\lambda^2 \in Z$$

を満たす。

単位的 Z -代数の自己同型 $\sigma: D \rightarrow D; x \mapsto uxu^{-1}$ を考え、

$$D_+ = \{x \in D \mid \sigma(x) = x\},$$

$$D_- = \{x \in D \mid \sigma(x) = -x\}$$

と置く。

まず、 D が Z -線型空間として D_+ と D_- に直和分解されることを示す。 D_+ と D_- が D の部分 Z -線型空間であることはよい。 また、 $x \in D_+ \cap D_-$ とすると $x = \sigma(x) = -x$ であり、 D の標数は 2 でないから $x = 0$ である。 よって、 $D_+ \cap D_- = \{0\}$ である。 さらに、 $\sigma^2 = \text{id}_D$ に注意すると、任意の $x \in D$ に対して

$$x = 2^{-1}(x + \sigma(x)) + 2^{-1}(x - \sigma(x)) \in D_+ + D_-$$

であることがわかる。 よって、 D は Z -線型空間として D_+ と D_- に直和分解される。

次に、 $D_+ = Z(u)$ であることを示す。 容易にわかるように、 D_+ は Z と u を含む D の部分体だから、 $Z(u) \subseteq D_+$ である。 あとは、 $D_+ \subseteq Z(u)$ を示せばよい。 $x \in D_+$ を任意にとると、 D_+ の定義より u と x は可換だから、 $Z(u, x)$ は D の可換な部分体となる。 したがって仮定より、 $Z(u, x)$ は Z 上 2 次元以下であり、 $(1, u)$ が $Z(u, x)$ の Z 上の基底となる。 よって、 $x \in Z(u)$ である。 これで、 $D_+ \subseteq Z(u)$ が示された。

次に、 D_- が自然に 1 次元左 D_+ -線型空間とみなせることを見る。 容易にわかるように、 $x \in D_+$ と $y \in D_-$ に対して $xy \in D_-$ だから、これをスカラー乗法として D_- は左 D_+ -線型空間とみなせる。 D_- が左 D_+ -線型空間として 1 次元であることを示そう。 $y, z \in D_-$ に対して、 $y \neq 0$ とすると、 $y = (zy^{-1})y$ であり、

$$\sigma(zy^{-1}) = \sigma(z)\sigma(y)^{-1} = (-z)(-y)^{-1} = zy^{-1}$$

より $zy^{-1} \in D_+$ だから、 D_- は左 D_+ -線型空間としてたかだか 1 次元である。 また、 D は Z -線型空間として D_+ と D_- に直和分解されるのだったから、もし $D_- = \{0\}$ だとすると $D = D_+$ となるが、これは $a \in D \setminus Z$ に反するから、ありえない。 よって、 D_- は左 D_+ -線型空間として 1 次元である。

さて、 $v \in D_- \setminus \{0\}$ を 1 つ固定し、 $w = uv$ と置く。 $(1, u)$ は D_+ の Z 上の基底であり、 D_- は 1 次元左 D_+ -線型空間だったから、 (v, w) は D_- の Z 上の基底である。 さらに、 D は Z -線型空間として D_+ と D_- に直和分解されるのだったから、 $(1, u, v, w)$ は D の Z 上の基底である。 $v, w \in D_-$ だから、 D_- の定義より、

$$uv = -vu, \quad vw = vuv = -uvv = -wv, \quad wu = -uw$$

である。 $u^2 = \alpha$ 、 $v^2 = \beta$ と置こう。 すると、

$$w^2 = uvuv = -uuvv = -\alpha\beta$$

となる。 u のとり方より、 $\alpha \in Z$ である。 また、容易にわかるように D_- の 2 つの元の積は D_+ に属するから $\beta = v^2 \in D_+$ であり、一方で $\beta = v^2 \in Z(v)$ だから、 $\beta = D_+ \cap Z(v)$ である。 $v \notin D_+$ より $D_+ \cap Z(v)$ は Z を含む D_+ の真部分体だが、 D_+ は Z 上 2 次元だから、これは Z しかありえない。 よって、 $\beta \in Z$ である。 さらに、以上のことより

$$wv = uvv = u\beta = \beta u, \quad uw = uuv = \alpha v$$

もわかる。これで、 u, v, w および α, β が主張の性質を満たすことが確かめられた。 \square

系 3.2 D は非可換な単位的 \mathbb{R} -代数であって、 D の中心は (D の部分体とみなした) \mathbb{R} に等しく、 \mathbb{R} を含む D の可換な部分体はすべて \mathbb{R} 上 2 次元以下であるとする。このとき、 D は単位的 \mathbb{R} -代数として四元数体 \mathbb{H} に同型である。

証明 D の標数は 0 だから、定理 3.1 より、 $u, v, w \in D$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ であって、 $(1, u, v, w)$ が D の \mathbb{R} 上の基底をなし、かつ

$$\begin{aligned} u^2 &= \alpha, & v^2 &= \beta, & w^2 &= -\alpha\beta \\ uv &= -vu = w, & vw &= -wv = -\beta u, & wu &= -uw = -\alpha v \end{aligned} \quad (*)$$

を満たすものが存在する。

$u \neq 0$ だから $\alpha \neq 0$ である。また、 $\alpha > 0$ とすると、可換体 $Z(\alpha)$ において 2 次の多項式 $T^2 - \alpha$ が 3 つの根 $\pm\sqrt{\alpha}, u$ をもつことになり矛盾する。したがって $\alpha < 0$ だから、 u を $1/\sqrt{-\alpha}$ 倍することにより、はじめから $\alpha = -1$ であるとしてよい。同様に、 $\beta = -1$ であるとしてよい。このとき、(*) は

$$\begin{aligned} u^2 &= -1, & v^2 &= -1, & w^2 &= -1 \\ uv &= -vu = w, & vw &= -wv = u, & wu &= -uw = v \end{aligned}$$

となる。よって、 D は単位的 \mathbb{R} -代数として四元数体 \mathbb{H} に同型である。 \square

4 Gelfand–Mazur の定理

4.1 単位的代数の元のスペクトル

定義 4.1 (単位的代数の元のスペクトル) K を可換体、 A を単位的 K -代数とする。 $x \in A$ の (A における) スペクトルを、

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in K \mid \lambda - x \text{ は } A \text{ において可逆でない}\}$$

と定める。 $\mathrm{Sp}_A(x)$ を単に $\mathrm{Sp}(x)$ と書く。

B が A の部分単位的 K -代数であるとき、 $x \in B$ に対して $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$ が成り立つ。

命題 4.2 K を可換体、 A を単位的 K -代数、 $x \in A$ とする。 $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_A(x)$ に対して、

$$(\mu - x)^{-1} - (\lambda - x)^{-1} = -(\mu - \lambda)(\mu - x)^{-1}(\lambda - x)^{-1}$$

が成り立つ。

証明 $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_A(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} (\mu - x)^{-1} - (\lambda - x)^{-1} &= (\mu - x)^{-1}(\lambda - x)(\lambda - x)^{-1} - (\mu - x)^{-1}(\mu - x)(\lambda - x)^{-1} \\ &= (\mu - x)^{-1}(\lambda - \mu)(\lambda - x)^{-1} \\ &= -(\mu - \lambda)(\mu - x)^{-1}(\lambda - x)^{-1} \end{aligned}$$

である。 \square

4.2 ノルム代数, Banach 代数

定義 4.3 (ノルム代数, Banach 代数) K を可換付値体とする. K -代数 A にその K -線型空間の構造と整合するノルム $\|\cdot\|$ が定まっており, かつそのノルムが

(NA) 任意の $x, y \in A$ に対して, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ である.

を満たすとき, このノルム $\|\cdot\|$ は A の K -代数の構造と整合するといひ, A と $\|\cdot\|$ との組を K -ノルム代数という. 完備な K -ノルム代数を, K -Banach 代数という.

K -ノルム代数 A が単位的であるとする. 条件 (NA) より $\|1\| = \|1 \cdot 1\| \leq \|1\|\|1\|$ だから, $A \neq \{0\}$ ならば $\|1\| \geq 1$ である. 本稿では, $\{0\}$ でない単位的 K -代数が $\|1\| = 1$ を満たすことは仮定しない. なお, (本稿の意味での) $\{0\}$ でない単位的 K -ノルム代数 A に対し, そのノルムを適切にとりかえれば, A の位相を変えずに A を $\|1\| = 1$ なる単位的 K -ノルム代数に修正することができる. これについては, たとえば Arveson [1, pp. 12–13] を参照のこと.

A を K -ノルム代数とすると, 条件 (NA) より, A の乗法 $(x, y) \mapsto xy$ は連続である. 逆に, K -代数 A 上に (K -線型空間の構造と整合する) ノルム $\|\cdot\|$ が与えられていて, そのノルムが定める位相に関して A の乗法が連続であれば, ある定数 $C \geq 0$ が存在して任意の $x, y \in A$ に対して $\|xy\| \leq C\|x\|\|y\|$ が成り立つから, ノルム $\|\cdot\|$ を適当に定数倍することによって, A を K -ノルム代数にすることができる.

命題 4.4 K を可換付値体, A を単位的 K -Banach 代数とする. 任意の $x \in A$, $\|x\| < 1$ に対して, $1 - x$ は可逆かつ $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は絶対総和可能であり,

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$$

が成り立つ. さらにこのとき,

$$\|(1 - x)^{-1}\| \leq \|1\| + \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}, \quad \|(1 - x)^{-1} - 1\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$$

が成り立つ^{*3}.

証明 $x \in A$, $\|x\| < 1$ を任意にとる. $n \geq 1$ に対して $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ だから, $\|x\| < 1$ より $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は絶対総和可能である. また, $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1 - x)(1 + x + \cdots + x^{N-1}) = (1 + x + \cdots + x^{N-1})(1 - x) = 1 - x^N$$

だから, $N \rightarrow \infty$ として

$$(1 - x) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \right) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \right) (1 - x) = 1$$

を得る. よって, $1 - x$ は可逆であり, その逆元は $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ で与えられる. さらに,

$$\|(1 - x)^{-1}\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \right\| \leq \|1\| + \sum_{n \geq 1} \|x\|^n = \|1\| + \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$$

^{*3} $\|1\| = 1$ ならば, 第一の式は $\|(1 - x)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|x\|)$ となる.

および

$$\|(1-x)^{-1} - 1\| = \left\| \sum_{n \geq 1} x^n \right\| \leq \sum_{n \geq 1} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$$

が成り立つ. \square

系 4.5 K を可換付値体, A を単位的 K -ノルム代数とし, A の可逆元全体を A^\times と書く. 乗法逆元をとる写像 $A^\times \rightarrow A^\times; x \mapsto x^{-1}$ は連続である.

証明 A の完備化 \hat{A} を考えると, $A^\times \subseteq (\hat{A})^\times$ であり, A における乗法逆元をとる写像 $A^\times \rightarrow A^\times$ は \hat{A} における乗法逆元をとる写像 $(\hat{A})^\times \rightarrow (\hat{A})^\times$ の制限だから, \hat{A} に対する主張を示せば, A に対する主張も示される. そこで, はじめから A は単位的 K -Banach 代数であるとしてよい. 以下, そのように仮定する.

$x_0, x \in A^\times$ に対して

$$x^{-1} - x_0^{-1} = x_0^{-1}((xx_0^{-1})^{-1} - 1) = x_0^{-1}((1 + (x - x_0)x_0^{-1})^{-1} - 1)$$

だから, x が x_0 に十分近く $\|(x - x_0)x_0^{-1}\| < 1$ であるとき, 命題 4.4 より

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\| \|(1 + (x - x_0)x_0^{-1})^{-1} - 1\| \leq \|x_0^{-1}\| \frac{\|(x - x_0)x_0^{-1}\|}{1 - \|(x - x_0)x_0^{-1}\|}$$

が成り立つ. 上式の最右辺は, $x \rightarrow x_0$ のとき 0 に収束する. これで, 乗法逆元をとる写像の連続性が示された. \square

系 4.6 A を単位的 \mathbb{C} -ノルム代数とする. 任意の $x \in A$ に対して, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}_A(x)$ が無限遠に近づくとき, $(\lambda - x)^{-1}$ は $0 \in A$ に収束する^{*4}.

証明 A の完備化 \hat{A} を考えると, $x \in A$ に対して $\text{Sp}_{\hat{A}}(x) \subseteq \text{Sp}_A(x)$, したがって $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{C} \setminus \text{Sp}_{\hat{A}}(x)$ だから, \hat{A} に対する主張を示せば, A に対する主張も示される. そこで, はじめから A は \mathbb{R} -Banach 代数をなすとしてよい. 以下, そのように仮定する.

$x \in A$ を任意にとる. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}_A(x)$ が無限遠点に十分近く $\|\lambda^{-1}x\| < 1$ であるとき, 命題 4.4 より, $\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ は可逆であって

$$\|(\lambda - x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \|(1 - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1} \left(\|1\| + \frac{\|\lambda^{-1}x\|}{1 - \|\lambda^{-1}x\|} \right)$$

が成り立つ. 上式の最右辺は, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. これで, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $(\lambda - x)^{-1} \rightarrow 0$ となることが示された. \square

4.3 Gelfand–Mazur の定理 (複素係数の場合)

複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理の証明の鍵となるのは, 次の定理である.

定理 4.7 A を $\{0\}$ でない単位的 \mathbb{C} -ノルム代数とする. 任意の $x \in A$ に対して, $\text{Sp}_A(x)$ は空でない.

^{*4} ある $R \geq 0$ が存在して $\text{Sp}_A(x)$ が $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq R\}$ を含む場合, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}_A(x)$ は無限遠には近づけないが, このとき主張は自明に成立するとみなす.

証明 $\text{Sp}_A(x)$ が空であると仮定する. すると, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda - x$ は可逆だから, 写像 $\mathbb{C} \rightarrow A$; $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ が考えられる. \mathbb{C} -ノルム空間 A 上の連続線型形式 ξ ごとに, 関数 $f_\xi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f_\xi(\lambda) = \langle (\lambda - x)^{-1}, \xi \rangle$$

によって定める. すると, f_ξ は正則関数である. 実際, $\lambda_0, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{f_\xi(\lambda) - f_\xi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{\langle (\lambda - x)^{-1}, \xi \rangle - \langle (\lambda_0 - x)^{-1}, \xi \rangle}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \left\langle \frac{(\lambda - x)^{-1} - (\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}, \xi \right\rangle \\ &= \langle -(\lambda - x)^{-1}(\lambda_0 - x)^{-1}, \xi \rangle \end{aligned}$$

だから (命題 4.2 を用いた), $\lambda \rightarrow \lambda_0$ として, 乗法逆元をとる写像の連続性 (系 4.5) より

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\xi(\lambda) - f_\xi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \langle -(\lambda_0 - x)^{-2}, \xi \rangle$$

を得る. また, 系 4.6 より, f_ξ は無限遠方において 0 に収束する. よって, f_ξ は \mathbb{C} 全体で定義された無限遠方において 0 に収束する正則関数だから, Liouville の定理より, $f_\xi = 0$ である.

以上より, $\lambda \in \mathbb{C}$ を 1 つ固定すると, A 上の任意の連続線型形式 ξ に対して $\langle (\lambda - x)^{-1}, \xi \rangle = 0$ だから, Hahn–Banach の定理より $(\lambda - x)^{-1} = 0$ となる. これは, A が $\{0\}$ でないことに矛盾する. よって, 背理法より, $\text{Sp}_A(x)$ は空でない. \square

定理 4.8 (複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理) (可換とは限らない) 体をなす単位的 \mathbb{C} -ノルム代数は, 単位的 \mathbb{C} -代数として \mathbb{C} に同型である.

証明 A が体をなす単位的 \mathbb{C} -ノルム代数であるとする. 写像 $\mathbb{C} \rightarrow A$; $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ が全単射であることを示せばよい. $A \neq \{0\}$ だから, この写像は単射である. 全射性を示す. $x \in A$ を任意にとる. 定理 4.7 より, $\lambda \in \text{Sp}_A(x)$ がとれる. スペクトルの定義より $\lambda 1_A - x$ は A において可逆でないが, いま A は体をなすから, そのためには $x = \lambda 1_A$ でなければならない. これで, 全射性が示された. \square

次小節で実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理 (定理 4.12) を証明するときに必要になるので, 複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理 (定理 4.8) を少し拡張しておく.

補題 4.9 E を \mathbb{C} -線型空間, $\|\cdot\|$ を E の \mathbb{R} -線型空間の構造と整合するノルムとし, $\|\cdot\|$ が定める位相は E の \mathbb{C} -線型空間の構造と整合する (すなわち, 複素数によるスカラー倍 $\mathbb{C} \times E \rightarrow E$; $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ はこの位相に関して連続である) とする. このとき, E の \mathbb{C} -線型空間の構造と整合するノルム $\|\cdot\|'$ であって, $\|\cdot\|$ と同じ位相を定めるものが存在する.

証明 複素数によるスカラー倍は $\|\cdot\|$ が定める位相に関して連続だから, 各 $x \in E$ に対して関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$; $\theta \mapsto \|e^{\sqrt{-1}\theta} x\|$ は連続である. そこで, $\|\cdot\|': E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\|x\|' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|e^{\sqrt{-1}\theta} x\| d\theta$$

と定める．すると、 $\|\cdot\|'$ は三角不等式を満たし、任意の複素数 $\lambda = re^{\sqrt{-1}\phi}$ ($r \geq 0, \phi \in \mathbb{R}$) と $x \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot \lambda x\| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|re^{\sqrt{-1}(\theta+\phi)} x\| d\theta \\ &= r\|x\|' \\ &= |\lambda|\|x\|'\end{aligned}$$

だから、 $\|\cdot\|'$ は E の \mathbb{C} -線型空間の構造と整合するノルムである．

$\|\cdot\|'$ が $\|\cdot\|$ と同じ位相を定めることを示そう． E を $\|\cdot\|$ によって \mathbb{R} -ノルム空間とみなすと、複素数によるスカラー倍 $\mathbb{C} \times E \rightarrow E; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ は連続双線型写像だから、ノルム空間の一般論より、ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $\lambda \in \mathbb{C}, x \in E$ に対して $\|\lambda x\| \leq C|\lambda|\|x\|$ が成り立つ．特に、 $\lambda = e^{\sqrt{-1}\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と置いて

$$\|e^{\sqrt{-1}\theta} x\| \leq C\|x\|$$

を得る．また、上式で x を $e^{\sqrt{-1}(-\theta)}x$ に置き換えてから θ を $-\theta$ に置き換えることで、

$$\|x\| \leq C\|e^{\sqrt{-1}\theta} x\|$$

を得る．よって、

$$C^{-1}\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$$

が成り立ち、 $\|\cdot\|'$ が $\|\cdot\|$ と同じ位相を定めることがわかる． □

系 4.10 E を単位的 \mathbb{C} -代数とする． E の \mathbb{R} -代数の構造と整合するノルムが存在するならば、 E の \mathbb{C} -代数の構造と整合するノルムも存在する．

証明 E の \mathbb{R} -代数の構造と整合するノルム $\|\cdot\|$ が存在するとする． E の乗法はこのノルム $\|\cdot\|$ が定める位相に関して連続だから、特に複素数によるスカラー倍 $\mathbb{C} \times E \rightarrow E; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ も連続である．よって補題 4.9 より、 E の \mathbb{C} -線型空間の構造と整合するノルム $\|\cdot\|'$ であって、 $\|\cdot\|$ と同じ位相を定めるものが存在する． E の乗法はノルム $\|\cdot\|'$ が定める位相に関して連続だから、定義 4.3 の直後に注意したように、ノルム $\|\cdot\|'$ を適当に定数倍することによって、 E の \mathbb{C} -代数の構造と整合するノルムが得られる．これで示された． □

定理 4.11 (複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理・拡張版) A は (可換とは限らない) 体をなす単位的 \mathbb{C} -代数であって、その \mathbb{R} -代数の構造と整合するノルムが存在するとする．このとき、 A は単位的 \mathbb{C} -代数として \mathbb{C} に同型である．

証明 複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理 (定理 4.8) と系 4.10 からただちに従う． □

4.4 Gelfand–Mazur の定理 (実係数の場合)

定理 4.12 (実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理) (可換とは限らない) 体をなす単位的 \mathbb{R} -ノルム代数は、単位的 \mathbb{R} -代数として $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかに同型である．

証明 A が体をなす単位的 \mathbb{R} -ノルム代数であるとする．証明を 3 つの場合に分ける．

(I) まず, A が可換であり, $j^2 = -1$ を満たす $j \in A$ が存在する場合を考える. このとき, $\alpha + \beta\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) と $x \in A$ に対して

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})x = \alpha x + \beta jx$$

と定めると, A の可換性と $j^2 = -1$ より, これをスカラー乗法として (A 上にもともと定まっていた加法・乗法とともに) A が単位的 \mathbb{C} -代数をなし, この単位的 \mathbb{C} -代数の構造を忘却して得られる単位的 \mathbb{R} -代数の構造が A のもとの単位的 \mathbb{R} -代数の構造と一致することが容易に確かめられる. よって, 複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理・拡張版 (定理 4.11) より, A は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{C} に同型である.

(II) 次に, A が可換であり, $j^2 = -1$ を満たす $j \in A$ が存在しない場合を考える. このとき, $T^2 + 1$ は A 上の既約多項式だから, $B = A[T]/(T^2 + 1)$ は可換体をなす. $j = T + (T^2 + 1)$ と置くと, $(1, j)$ は B の A 上の基底である. $x + yj \in B$ ($x, y \in A$) に対して,

$$\|x + yj\|_B = \|x\|_A + \|y\|_A$$

と定めよう. すると, $\|\cdot\|_A$ が A の \mathbb{R} -線型空間の構造と整合するノルムであることからただちに, $\|\cdot\|_B$ が B の \mathbb{R} -線型空間の構造と整合するノルムであることがわかる. さらに, B の元 $z = x + yj$, $z' = x' + y'j$ ($x, y, x', y' \in A$) に対して

$$\begin{aligned} \|zz'\|_B &= \|xx' - yy'\|_A + \|xy' + x'y\|_A \\ &\leq \|xx'\|_A + \|yy'\|_A + \|xy'\|_A + \|x'y\|_A \\ &\leq \|x\|_A\|x'\|_A + \|y\|_A\|y'\|_A + \|x\|_A\|y'\|_A + \|x'\|_A\|y\|_A \\ &\leq (\|x\|_A + \|y\|_A)(\|x'\|_A + \|y'\|_A) \\ &= \|z\|_B\|z'\|_B \end{aligned}$$

である. したがって, このノルム $\|\cdot\|_B$ によって B は単位的 \mathbb{R} -ノルム代数をなす. B は可換体であり, $j \in B$ は $j^2 = -1$ を満たすのだったから, (I) より, B は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{C} に同型である. A は B の真部分単位的 \mathbb{R} -代数だが, \mathbb{C} 真部分単位的 \mathbb{R} -代数は \mathbb{R} しかないので, A は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{R} に同型である.

(III) 最後に, A が非可換である場合を考える. Z を A の中心とすると, Z は A の可換な部分体であり, さらに A の部分単位的 \mathbb{R} -ノルム代数でもある. また, A は非可換だから $a \in A \setminus Z$ を 1 つ固定できるが, このとき $Z(a)$ も A の可換な部分体であり, A の部分単位的 \mathbb{R} -ノルム代数である. よって, (I), (II) より, Z と $Z(a)$ はそれぞれ単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{R} または \mathbb{C} に同型だが, Z は $Z(a)$ の真部分単位的 \mathbb{R} -代数だから, Z は \mathbb{R} に, $Z(a)$ は \mathbb{C} にそれぞれ同型でなければならない. よって, 系 3.2 より, A は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{H} に同型である. \square

5 Ostrowski の定理

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ を, その標準的な絶対値によって付値体とみなす.

定理 5.1 (Ostrowski の定理) $(K, |\cdot|_K)$ を (可換とは限らない) Archimedes 的な完備付値体とする. このとき, 次の 3 条件のうちただ 1 つが成り立つ.

- (i) 体の同型 $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}$ と $0 < s \leq 1$ が存在して, 任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つ.
- (ii) 体の同型 $\phi: K \rightarrow \mathbb{C}$ と $0 < s \leq 1$ が存在して, 任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つ.

(iii) 体の同型 $\phi: K \rightarrow \mathbb{H}$ と $0 < s \leq 1$ が存在して、任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つ。

さらに、(i), (ii), (iii) のそれぞれの場合、 $0 < s \leq 1$ の選び方は K に対して (ϕ のとり方によらず) 一意である。逆に、体 K と K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの体の同型 ϕ があるとき、(i), (ii), (iii) にある式によって $|\cdot|_K$ を定めると、 $(K, |\cdot|_K)$ は Archimedes 的な完備付値体となる。

証明 体 K と K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの体の同型 ϕ があるとして、(i), (ii), (iii) にある式によって定まる $|\cdot|_K$ を考える。すると、命題 1.5 と命題 1.11 より $|\cdot|_K$ は K 上の Archimedes 的な絶対値であり、命題 1.4 より $|\cdot|_K$ と $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の標準的な絶対値の ϕ による引き戻しとは同値だから、 $(K, |\cdot|_K)$ は Archimedes 的な完備付値体となる。

$(K, |\cdot|_K)$ を Archimedes 的な完備付値体とする。 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ はどの 2 つも体として同型ではないから、(i), (ii), (iii) のどの 2 つも同時には成り立たない。また、 K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの体の同型 ϕ と $0 < s \leq 1$ について、任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つとすると、 $|2|_K = |2|^s = 2^s$ でなければならないから、 $0 < s \leq 1$ の選び方は K に対してただか一意に定まる。あとは、このような ϕ と s の存在を示せばよい。

$|\cdot|_K$ は Archimedes 的だから、 K は標数 0 であり (系 1.13)、したがって K は素部分体 \mathbb{Q} を含む。 $|\cdot|_K$ の \mathbb{Q} への制限は \mathbb{Q} 上の Archimedes 的な絶対値だから (系 1.12)、 \mathbb{Q} 上の絶対値の分類定理 (定理 2.2) より、ある $0 < s \leq 1$ が存在して、任意の $\lambda \in \mathbb{Q}$ に対して $|\lambda|_K = |\lambda|_\infty^s$ が成り立つ。特に、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n|_K^{1/s} = n$ だから、系 1.9 より、 $|\cdot|_K^{1/s}$ は $|\cdot|_K$ と同値な K 上の絶対値である。付値体 $(K, |\cdot|)$ は完備だから、付値体 $(K, |\cdot|_K^{1/s})$ も完備である。さらに、任意の $\lambda \in \mathbb{Q}$ と $x \in K$ に対して

$$|\lambda x|_K^{1/s} = |\lambda|_\infty |\lambda|_\infty^{1/s} |x|_K^{1/s}$$

だから、絶対値 $|\cdot|_K^{1/s}$ の乗法性や三角不等式と合わせて、 $|\cdot|_K^{1/s}$ が K の単位的 \mathbb{Q} -代数の構造と整合する K 上の完備なノルムであることがわかる (ここで、 \mathbb{Q} は実絶対値 $|\cdot|_\infty$ を備えた付値体とみなす)。すなわち、 $(K, |\cdot|_K^{1/s})$ は単位的 \mathbb{Q} -Banach 代数である。完備化によって、 $(K, |\cdot|_K^{1/s})$ は単位的 \mathbb{R} -Banach 代数となる。すると、実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理 (定理 4.12) より、 K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの単位的 \mathbb{R} -代数の同型 ϕ がとれる。

$|\cdot|_K^{1/s}$ と $|\phi(\cdot)|$ はともに K 上の絶対値であり、 K の \mathbb{R} -線型空間の構造と整合するノルムでもある。 K は \mathbb{R} 上有限次元だから、ノルム空間の一般論より、これら 2 つのノルム $|\cdot|_K^{1/s}$ と $|\phi(\cdot)|$ は K 上に同じ位相を定める。すなわち、絶対値 $|\cdot|_K^{1/s}$ と $|\phi(\cdot)|$ は同値である。したがって命題 1.4 より、ある $t > 0$ が存在して $|\cdot|_K^{t/s} = |\phi(\cdot)|$ となるが、一方で $|\cdot|_K^{1/s}$ と $|\phi(\cdot)|$ は K の部分体 \mathbb{R} 上で一致するので、 $t = 1$ でなければならない。よって、 $|\cdot|_K^{1/s} = |\phi(\cdot)|$ 、すなわち $|\cdot| = |\phi(\cdot)|^s$ である。これで示された。 \square

付録 A Frobenius の定理

系 3.2 から、有限次元単位的 \mathbb{R} -代数を決定する Frobenius の定理が証明できる。証明は、実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理 (定理 4.12) のそれと並行している。

定理 A.1 (Frobenius の定理) (可換とは限らない) 体をなす有限次元単位的 \mathbb{R} -代数は、単位的 \mathbb{R} -代数として $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかに同型である。

証明 A が体をなす有限次元単位的 \mathbb{R} -ノルム代数であるとする。証明を 3 つの場合に分ける。

(I) まず、 A が可換であり、 $j^2 = -1$ を満たす $j \in A$ が存在する場合を考える。このとき、

$$A' = \{\alpha + \beta j \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

は A の部分体であって、 \mathbb{R} 代数として \mathbb{C} に同型である。 A は A' の（可換な）有限次拡大と考えられるが、 $A' \cong \mathbb{C}$ は代数閉体だから、 $A = A'$ でなければならない。よって、 A は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{C} に同型である。

(II) 次に、 A が可換であり、 $j^2 = -1$ を満たす $j \in A$ が存在しない場合を考える。このとき、 $T^2 + 1$ は A 上の既約多項式だから、 $B = A[T]/(T^2 + 1)$ は可換体をなす。また、 B は A 上 2 次元だから、 B も有限次元単位的 \mathbb{R} -代数である。さらに、 $j = T + (T^2 + 1) \in B$ は $j^2 = -1$ を満たす。したがって、(I) より、 B は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{C} に同型である。 A は B の真部分単位的 \mathbb{R} -代数だが、 \mathbb{C} 真部分単位的 \mathbb{R} -代数は \mathbb{R} しかないので、 A は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{R} に同型である。

(III) 最後に、 A が非可換である場合を考える。 Z を A の中心（ A のすべての元と可換な A の元全体の集合）とすると、 Z は A の可換な部分体であり、さらに A の有限次元単位的 \mathbb{R} -代数でもある。また、 A は非可換だから $a \in A \setminus Z$ を 1 つ固定できるが、このとき $Z(a)$ も A の可換な部分体であり、 A の有限次元単位的 \mathbb{R} -代数である。よって、(I), (II) より、 Z と $Z(a)$ はそれぞれ単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{R} または \mathbb{C} に同型だが、 Z は $Z(a)$ の真部分単位的 \mathbb{R} -代数だから、 Z は \mathbb{R} に、 $Z(a)$ は \mathbb{C} にそれぞれ同型でなければならない。よって、系 3.2 より、 A は単位的 \mathbb{R} -代数として \mathbb{H} に同型である。□

参考文献

本稿の内容は、主に Bourbaki [3] の第 6 章 6 節による。定理 3.1 については、Palais [6] およびそれをもとにしたと思われる Bourbaki [3] の第 6 章 6 節の演習問題 2 を参考にした。複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.8）については、Arveson [1] の 1.6 節を参考にした。Ostrowski [5] は、Ostrowski の定理の原論文である。

- [1] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.
- [2] N. Bourbaki (著), 山崎 泰郎, 清水 達雄 (訳), 『ブルバキ数学原論 位相 4』, 東京図書, 1969.
- [3] N. Bourbaki (著), 中沢 英昭 (訳), 『ブルバキ数学原論 可換代数 3』, 東京図書, 1971.
- [4] S. Katok, *p-adic Analysis Compared with Real*, American Mathematical Society, 2007.
- [5] A. Ostrowski, “Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\psi(x) \cdot \psi(y) = \psi(xy)$ ”, *Acta Mathematica* **41** (1916): 271–284.
- [6] R. S. Palais, “The classification of real division algebras”, *The American Mathematical Monthly*, **75.4** (1968): 366–368.