解析関数のノート

箱（@o_ccah）

2019 年 2 月 24 日

記号と用語

- $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．
- 「n 変数」，「$\mathbb{K}^n$」などと書いたら，特に断らない限り，$n \in \mathbb{N}$ であるものとする．
- $\mathbb{K}^n$，$\mathbb{N}^n$ などの元 x に対して，特に断らなくても，x の i-成分（$i \in \{0, \ldots, n-1\}$）を x_i と書く．
- $x \in \mathbb{K}^n$ と $k \in \mathbb{N}^n$ に対して，$x^k = x_0^{k_0} \cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}$ と書く．
- $k \in \mathbb{N}^n$ に対して，$|k| = k_0 + \cdots + k_{n-1}$，$k! = k_0! \cdots k_{n-1}!$ と定める．
- $r, s \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ に対して，$r \leq s$ とは $i = 0, \ldots, n-1$ に対して $r_i \leq s_i$ であることをいい，$r < s$ とは $i = 0, \ldots, n-1$ に対して $r_i < s_i$ であることをいう．
- $x \in \mathbb{K}^n$，$r \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ に対して，$\mathbb{K}^n$ における中心 x，半径 r の多重球・閉多重球をそれぞれ
$$B(x; r) = B_{\mathbb{K}^n}(x; r) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid (|y_0 - x_0|, \ldots, |y_{n-1} - x_{n-1}|) < r\}$$
$$\overline{B}(x; r) = \overline{B}_{\mathbb{K}^n}(x; r) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid (|y_0 - x_0|, \ldots, |y_{n-1} - x_{n-1}|) \leq r\}$$
と定める．

1　形式的冪級数

定義 1.1（形式的冪級数）　E を $\mathbb{K}$-線型空間とする．E を係数とする n 変数の（あるいは，$\mathbb{K}^n$ から E への）形式的冪級数とは，$\mathbb{N}^n$ から E への写像のことをいう．$k = (k_0, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ に $a_k \in E$ が対応するような形式的冪級数 A を，しばしば
$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k = \sum_{k_0, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} a_{k_0, \ldots, k_{n-1}} X_0^{k_0} \cdots X_{n-1}^{k_{n-1}}$$
のように表す．E を係数とする n 変数の形式的冪級数全体は，成分ごとの加法とスカラー倍によって $\mathbb{K}$-線型空間をなす．

形式的冪級数 $A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ に対して，a_0 を A の定数項という．

定義 1.2（形式的冪級数の積）　$E_0, \ldots, E_{n-1}, F$ を $\mathbb{K}$-線型空間，$u \colon E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \to F$ を多重線型写像，A_i を $\mathbb{K}^m$ から E_i への形式的冪級数とし，
$$A_i = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_{i,k} X^k \quad (a_{i,k} \in E_i)$$

と表されているとする（$i = 0, \ldots, n-1$）．$A_0, \ldots, A_{n-1}$ の u による積 $u(A_0, \ldots, A_{n-1})$ を，次のように定める．$u(A_0, \ldots, A_{n-1})$ は $\mathbb{K}^m$ から F への形式的冪級数であり，

$$u(A_0, \ldots, A_{n-1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{k^{(0)} + \cdots + k^{(n-1)} = k} u(a_{0,k^{(0)}}, \ldots, a_{n-1,k^{(n-1)}}) \right) X^k.$$

定義 1.3（形式的冪級数の合成）　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，A を $\mathbb{K}^m$ から $\mathbb{K}^n$ への形式的冪級数，B を $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数とし，

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k X^k \quad (a_k \in \mathbb{K}^n),$$
$$B = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l Y^l \qquad (b_l \in E)$$

と表されているとする．各 $k \in \mathbb{N}^m$ に対して E の元の族

$$\left\{ b_l \sum_{k^{(0,0)} + \cdots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right\}_{l \in \mathbb{N}^n}$$

が絶対総和可能である場合に限り，A と B の合成 $B \circ A$ を次のように定める．$B \circ A$ は $\mathbb{K}^m$ から E への形式的冪級数であり，

$$B \circ A = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \cdots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) X^k.$$

ただし，$(a_{k^{(i,j)}})_i$ は $a_{k^{(i,j)}}$ の i-成分を表す．

$B \circ A$ は，B の不定元に形式的に A を代入・展開し，それを A の不定元について整理したものである．A が定数項をもたない場合には，$B \circ A$ の係数には有限和しか現れないため，$B \circ A$ は必ず定義される．

定義 1.4（形式偏微分）　E を $\mathbb{K}$-線型空間，A を $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数とする．$i = 0, \ldots, n-1$ に対して，A の i-成分に関する形式偏微分を，

$$\partial_i A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_i \ge 1} a_k k_i X_0^{k_0} \cdots X_i^{k_i - 1} \cdots X_{n-1}^{k_{n-1}}$$

と定める．また，$k \in \mathbb{N}^n$ に対して，

$$\partial^k A = \partial_0^{k_0} \cdots \partial_{n-1}^{k_{n-1}} A$$

と書く．

容易にわかるように，形式偏微分どうしは交換可能である．

2　収束形式的冪級数

定義 2.1（収束形式的冪級数）　E を $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数とする．$r \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ に対して，$\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が E において絶対総和可能であるとき，A は半径 r において絶対総和可能で

あるという．

$$J(A) = \{r \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid A \text{ は半径 } r \text{ において絶対総和可能}\},$$
$$I(A) = \{r \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid \text{ある } r' > r \text{ が存在して，} r' \in J(A)\}$$

と置き，$I(A)$ を A の収束指標という．また，

$$C(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid (|x_0|, \dots, |x_{n-1}|) \in I(A)\}$$

と置き，$C(A)$ を A の収束域という．収束域が空でないような形式的冪級数を，収束形式的冪級数という．

$n = 1$ のときは，$\rho \in [0, \infty]$ を用いて $I(A) = [0, \rho)$，$C(A) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < \rho\}$ と書ける．この ρ を，A の収束半径という．

命題 2.2　E を $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数とする．

(1) $r \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ について，$\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が E において有界ならば，任意の $r' < r$ に対して $r' \in I(A)$ である．
(2) A の収束指標 $I(A)$ は，$\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ の開集合である．
(3) $J(A)$ と $I(A)$ は，対数凸である．すなわち，$r, s \in J(A)$（あるいは $\in I(A)$）ならば，$t \in [0, 1]$ に対して $(r_0^{1-t} s_0^t, \dots, r_{n-1}^{1-t} s_{n-1}^t) \in J(A)$（あるいは $\in I(A)$）である．

証明　(1)　任意の $k \in \mathbb{N}^n$ に対して $\|a_k\| r^k \leq M$ であるとして，$r' < r$ を任意にとる．$r' < r'' < r$ を満たす $r'' \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ がとれる．各 $i = 0, \dots, n-1$ に対して $r''_i / r_i < 1$ だから $\{(r''_i / r_i)^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は総和可能であり，よってその積 $\{(r''_0 / r_0)^{k_0} \cdots (r''_{n-1} / r_{n-1})^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も総和可能である．さて，任意の $k \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\|a_k\| r''^k = \|a_k\| r^k \left(\frac{r''_0}{r_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{r''_{n-1}}{r_{n-1}}\right)^{n-1} \leq M \left(\frac{r''_0}{r_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{r''_{n-1}}{r_{n-1}}\right)^{n-1}$$

が成り立つから，$\{a_k r''^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能である．すなわち，$r'' \in J(A)$ であり，よって $r' \in I(A)$ である．

(2)　$I(A) = \bigcup_{r \in J(A)} \{r' \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid r' < r\}$ だから，$I(A)$ は $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ の開集合である．

(3)　$\{\|a_k\| r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$，$\{\|a_k\| s^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ が絶対総和可能であるとする．重み付き相加相乗平均の不等式より，$k \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
\|a_k\| (r_0^t s_0^{1-t})^{k_0} \cdots (r_{n-1}^t s_{n-1}^t)^{k_{n-1}} &= \|a_k\| (r^k)^{1-t} (s^k)^t \\
&\leq \|a_k\| ((1-t) r^k + t s^k) \\
&= (1-t) \|a_k\| r^k + t \|a_k\| s^k
\end{aligned}$$

が成り立つから，このとき $\{\|a_k\| (r_0^t s_0^{1-t})^{k_0} \cdots (r_{n-1}^t s_{n-1}^t)^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能である．すなわち，$J(A)$ は対数凸である．$I(A)$ が対数凸であることは，$J(A)$ が対数凸であることから容易にわかる．　□

命題 2.3　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数とする．

(1) A の収束域 $C(A)$ は，$\mathbb{K}^n$ の開集合である．
(2) 任意の $r \in J(A)$ に対して，関数族 $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は，閉多重球 $\overline{B}(x; r)$ 上の一様ノルムに関して絶対総和可能である．したがって特に，任意の $x \in C(A)$ に対して $\{a_k x^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能であり，その和として得られる $C(A)$ 上の関数は連続である．

証明　(1)　$I(A)$ は $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ の開集合であり（命題 2.2 (2)），$C(A)$ は連続写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}; x \mapsto (|x_0|, \ldots, |x_{n-1}|)$ による $I(A)$ の逆像だから，$C(A)$ は $\mathbb{K}^n$ の開集合である．

(2)　$r \in J(A)$ を任意にとる．$\overline{B}(0;r)$ 上の一様ノルム $\|-\|_{\overline{B}(0;r)}$ に関して

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n} \|a_k x^k\|_{\overline{B}(0;r)} = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} \|a_k\| r^k < \infty,$$

すなわち，$\{a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ は $\overline{B}(0;r)$ 上の一様ノルムに関して絶対総和可能である．したがって特に，$\{a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ は $B(0;r)$ 上の一様ノルムに関しても絶対総和可能である．連続関数の一様収束極限は連続であり，$B(x;r)$（$r \in J(A)$）の全体は $C(A)$ の開被覆をなすから，$\{a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ の和として得られる $C(A)$ 上の関数は連続である． □

3　冪級数関数

本節では，無限和の一般論を用いる．無限和の一般論については，「無限和のノート」を参照のこと．

定義 3.1（収束形式的冪級数が定める冪級数関数）　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．$C(A)$ 上の関数族 $\{x \mapsto a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ の和を，A が定める冪級数関数といい，$f_A \colon C(A) \to E$ と書く．

命題 3.2　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．

(1) A, B を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．すると，$C(A) \cap C(B) \subseteq C(A+B)$（特に $A+B$ も収束形式的冪級数）であり，$C(A) \cap C(B)$ において $f_{A+B} = f_A + f_B$ が成り立つ．

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$，A を $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数とする．すると，$C(A) \subseteq C(\lambda A)$（特に λA も収束形式的冪級数）であり，$C(A)$ において $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ が成り立つ．

証明　$A = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k X^k$，$B = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} b_k X^k$ と置く．

(1)　$x \in \mathbb{K}^n$ とする．$\{a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ と $\{b_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ がともに絶対総和可能ならば，その和 $\{(a_k + b_k)x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能であり，

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n} (a_k + b_k)x^k = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k x^k + \sum_{k\in\mathbb{N}^n} b_k x^k$$

が成り立つ．ここまでの議論より，絶対総和可能性については $J(A) \cap J(B) \subseteq J(A+B)$ であり，ここから $I(A) \cap I(B) \subseteq I(A+B)$，$C(A) \cap C(B) \subseteq C(A+B)$ がわかる．また，上式より，$C(A) \cap C(B)$ において $f_{A+B} = f_A + f_B$ が成り立つ．

(2)　$x \in \mathbb{K}^n$ とする．$\{\lambda a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ が絶対総和可能ならば，そのスカラー倍 $\{\lambda a_k x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能であり，

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n} \lambda a_k x^k = \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k x^k$$

が成り立つ．ここまでの議論より，絶対総和可能性については $J(A) \subseteq J(\lambda A)$ であり，ここから $I(A) \subseteq I(\lambda A)$，$C(A) \subseteq C(\lambda A)$ がわかる．また，上式より，$C(A)$ において $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ が成り立つ． □

命題 3.3　$E_0, \ldots, E_{n-1}, F$ を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$u \colon E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \to F$ を連続多重線型写像とする．$i = 0, \ldots, n-1$ に対して A_i が $\mathbb{K}^m$ から E_i への収束形式的冪級数ならば，$C(A_0) \cap \cdots \cap C(A_{n-1}) \subseteq C(u(A_0, \ldots, A_{n-1}))$ であり，$C(A_0) \cap \cdots \cap C(A_{n-1})$ において $f_{u(A_0,\ldots,A_{n-1})} = u(f_{A_0}, \ldots, f_{A_{n-1}})$ が成り立つ．

証明　$A_i = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} a_{i,k}X^k$ と置く．$x \in \mathbb{K}^n$ とする．u は連続多重線型写像だから，$i = 0,\dots,n-1$ に対して $\{a_{i,k}x^k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ が E において絶対総和可能ならば，$\{u(a_{0,k^{(0)}},\dots,a_{n-1,k^{(n-1)}})x^{k^{(0)}+\dots+k^{(n-1)}}\}_{k^{(0)},\dots,k^{(n-1)}\in\mathbb{N}^m}$ も絶対総和可能であり，

$$\sum_{k^{(0)},\dots,k^{(n-1)}\in\mathbb{N}^m} u(a_{0,k^{(0)}},\dots,a_{n-1,k^{(n-1)}})x^{k^{(0)}+\dots+k^{(n-1)}} = \left(\sum_{k^{(0)}\in\mathbb{N}^m} a_{0,k^{(0)}}x^{k^{(0)}}\right)\cdots\left(\sum_{k^{(n-1)}\in\mathbb{N}^m} a_{n-1,k^{(n-1)}}x^{k^{(n-1)}}\right)$$

が成り立つ．よって，$\{(\sum_{k^{(0)}+\dots+k^{(n-1)}=k} u(a_{0,k^{(0)}},\dots,a_{n-1,k^{(n-1)}}))x^k\}_{k\in\mathbb{N}^m}$ も絶対総和可能であり，

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^m}\left(\sum_{k^{(0)}+\dots+k^{(n-1)}=k} u(a_{0,k^{(0)}},\dots,a_{n-1,k^{(n-1)}})\right)x^k = \left(\sum_{k^{(0)}\in\mathbb{N}^m} a_{0,k^{(0)}}x^{k^{(0)}}\right)\cdots\left(\sum_{k^{(n-1)}\in\mathbb{N}^m} a_{n-1,k^{(n-1)}}x^{k^{(n-1)}}\right)$$

が成り立つ（無限和の結合性）．ここまでの議論より，絶対総和可能性については $J(A_0)\cap\dots\cap J(A_{n-1}) \subseteq J(u(A_0,\dots,A_{n-1}))$ であり，ここから $I(A_0)\cap\dots\cap I(A_{n-1}) \subseteq I(u(A_0,\dots,A_{n-1}))$，$C(A_0)\cap\dots\cap C(A_{n-1}) \subseteq C(u(A_0,\dots,A_{n-1}))$ がわかる．また，上式より，$C(A_0)\cap\dots\cap C(A_{n-1})$ において $f_{u(A_0,\dots,A_{n-1})} = u(f_{A_0},\dots,f_{A_{n-1}})$ が成り立つ． □

次の命題，およびその証明では，$\mathbb{K}^m$ から $\mathbb{K}^n$ への射影 $x \mapsto (x_0,\dots,x_{n-1})$ を π と書く．また，$\mathbb{R}^m_{\geq 0}$ から $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ への射影も同じ記号で表す．

命題 3.4　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} a_kX^k$ を $\mathbb{K}^m$ から E への収束形式的冪級数，$n \leq m$ とする．$k'' \in \mathbb{N}^{m-n}$ に対して，$\mathbb{K}^n$ から E への冪級数 $B_{k''}$ を

$$B_{k''} = \sum_{k'\in\mathbb{N}^n} a_{(k',k'')}X'^{k'}$$

と定めると，$\pi(C(A)) \subseteq C(B_{k''})$（特に $B_{k''}$ も収束形式的冪級数）である．さらに，$x = (x', x'') \in C(A)$（$x' = (x_0,\dots,x_{n-1})$，$x'' = (x_n,\dots,x_{m-1})$）に対して，$\{f_{B_{k''}}(x')x''^{k''}\}_{k''\in\mathbb{K}^{m-n}}$ は絶対総和可能であり，

$$\sum_{k''\in\mathbb{N}^{m-n}} f_{B_{k''}}(x')x''^{k''} = f_A(x)$$

が成り立つ．

証明　$x = (x', x'') \in \mathbb{K}^m$（$x' = (x_0,\dots,x_{n-1})$，$x'' = (x_n,\dots,x_{m-1})$）とする．$\{a_kx^k\}_{k\in\mathbb{N}^m}$ が絶対総和可能ならば，各 $k'' \in \mathbb{N}^{m-n}$ に対して $\{a_{(k',k'')}x'^{k'}x''^{k''}\}_{k'\in\mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能であり，したがって $x''^{k''} \neq 0$ ならば $\{a_{(k',k'')}x'^{k'}\}_{k'\in\mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能である．さらに，（$x''^{k''} \neq 0$ ならば，各 $k'' \in \mathbb{N}^n$ に対して $\sum_{k'\in\mathbb{N}^n} a_{(k',k'')}x'^{k'}$ が定義され），$\{(\sum_{k'\in\mathbb{N}^n} a_{(k',k'')}x'^{k'})x''^{k''}\}_{k''\in\mathbb{N}^{m-n}}$ は絶対総和可能であり，

$$\sum_{k''\in\mathbb{N}^{m-n}}\left(\sum_{k'\in\mathbb{N}^n} a_{(k',k'')}x'^{k'}\right)x''^{k''} = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} a_kx^k$$

が成り立つ（無限和の結合性）．ここまでの議論より，絶対総和可能性については，任意の $k'' \in \mathbb{N}^n$ に対して $\pi(J(A))\cap\mathbb{R}^n_{>0} \subseteq J(B_{k''})$ であり，ここから $\pi(I(A)) \subseteq I(B_{k''})$，$\pi(C(A)) \subseteq C(B_{k''})$ がわかる．また，上式より，$x = (x', x'') \in C(A)$ に対して

$$\sum_{k''\in\mathbb{N}^{m-n}} f_{B_{k''}}(x')x''^{k''} = f_A(x)$$

が成り立つ． □

定理 3.5 E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，A を $\mathbb{K}^m$ から $\mathbb{K}^n$ への収束形式的冪級数，B を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．A の定数項 $a_0 \in \mathbb{K}^n$ が $C(B)$ に属するならば，$B \circ A$ が定義され，これは $\mathbb{K}^m$ から E への収束形式的冪級数であり，0 のある近傍において $f_{B\circ A} = f_B \circ f_A$ が成り立つ．

証明 $A = \sum_{k\in\mathbb{N}^m} a_k X^k$，$B = \sum_{l\in\mathbb{N}^n} b_l Y_l$ と置く．また，$a_k \in \mathbb{K}^n$ の i-成分を $(a_k)_i$ と表す．$a_0 \in C(B)$ とすると，ある $s \in J(B)$ が存在して $(|(a_0)_0|, \dots, |(a_0)_{n-1}|) < s$ となる．また，A は収束形式的冪級数だから $0 \in I(A)$ であり，$i = 0, \dots, n-1$ に対して関数 $r \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k$ は $I(A)$ 上で連続だから（命題 2.3 (2) の証明と同様にしてわかる），十分 0 に近い任意の $r \in I(A)$ に対して $\sum_{k\in\mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k \leq s_i$（$i = 0, \dots, n-1$）が成り立つ．

さて，$r \in \mathbb{R}^m_{>0}$ を 0 の十分近くにとり，$r \in I(A)$ かつ $i = 0, \dots, n-1$ に対して $\sum_{k\in\mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k \leq s_i$ を満たすようにする．B の不定元に形式的に A を代入・展開して生じる項の族

$$\left\{ b_l \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i r^{k^{(i,j)}} \right\}_{k^{(0,0)},\dots,k^{(n-1,l_{n-1}-1)}\in\mathbb{N}^m,\ l\in\mathbb{N}^n} \tag{$*$}$$

について考える．まず，$l \in \mathbb{N}^n$ を固定すると，$r \in I(A)$ より $i = 0, \dots, n-1$ に対して $\{(a_k)_i r^k\}_{k\in\mathbb{N}^m}$ は絶対総和可能だから，それらの積 $\{\prod_{0\leq i<n,\ 0\leq j<l_i} (a_{k^{(i,j)}})_i r^{k^{(i,j)}}\}_{k^{(0,0)},\dots,k^{(n-1,l_{n-1}-1)}\in\mathbb{N}^m}$ も絶対総和可能であり，

$$\begin{aligned}
\sum_{k^{(0,0)},\dots,k^{(n-1,l_{n-1}-1)}\in\mathbb{N}^m} \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} |(a_k)_i| r^k &= \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} \sum_{k\in\mathbb{N}^m} |(a_k)_i| r^k \\
&\leq \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} s_i \\
&= s^l,
\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k^{(0,0)},\dots,k^{(n-1,l_{n-1}-1)}\in\mathbb{N}^m} \|b_l\| \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} |(a_{k^{(i,j)}})_i| r^{k^{(i,j)}} \leq \|b_l\| s^l, \tag{$**$}$$

が成り立つ．次に，$l \in \mathbb{N}^n$ を動かすことを考える．l が $\mathbb{N}^n$ の中を動くとき，$s \in J(B)$ より，($**$) の右辺は総和可能だから，($**$) の左辺も総和可能である．よって，E の元の族 ($*$) は絶対総和可能である．$k \in \mathbb{N}^m$ を固定すると，無限和の結合性より

$$\left\{ b_l \sum_{k^{(0,0)}+\dots+k^{(n-1,l_{n-1}-1)}=k} \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i r^{k^{(i,j)}} \right\}_{l\in\mathbb{N}^n}$$

も絶対総和可能だから，$r > 0$ に注意して

$$\left\{ b_l \sum_{k^{(0,0)}+\dots+k^{(n-1,l_{n-1}-1)}=k} \prod_{\substack{0\leq i<n,\\ 0\leq j<l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right\}_{l\in\mathbb{N}^n}$$

も絶対総和可能であることがわかる．すなわち，$B \circ A$ が定義される．

$x \in \mathbb{K}^m$ を 0 の十分近くにとる．具体的には，$r \in \mathbb{R}^m_{>0}$ を前段でとったものとして，$(|x_0|, \dots, |x_{m-1}|) \le r$ が成り立つようにとる．すると，

$$\left\{ b_l \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \right\}_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m,\ l \in \mathbb{N}^n}$$

は絶対総和可能であり，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m, \\ l \in \mathbb{N}^n}} b_l \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} &= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} \sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m} b_l \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m} \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} \sum_{k \in \mathbb{N}^m} (a_k)_i x^k \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k x^k \right)^l \qquad (***)
\end{aligned}$$

が成り立つ．（ここで，

- 第一の式変形では，無限和の結合性を，
- 第二の式変形では，「$\{\prod_{0 \le i < n,\ 0 \le j < l_i} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}}\}_{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m}$ は絶対総和可能だから，b_l を外に出せる」ことを，
- 第三の式変形では，「$i = 0, \dots, n-1$ に対して $\{(a_k)_i x^k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ は絶対総和可能だから，無限和と積が交換できる」ことを

用いた．）また，無限和の結合性より，

$$\left\{ \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) x^k \right\}_{k \in \mathbb{N}^m}$$

は絶対総和可能であり，

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) x^k = \sum_{\substack{k^{(0,0)}, \dots, k^{(n-1, l_{n-1}-1)} \in \mathbb{N}^m, \\ l \in \mathbb{N}^n}} b_l \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i x^{k^{(i,j)}} \qquad (****)$$

が成り立つ．(***) と (****) より，

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \sum_{k^{(0,0)} + \dots + k^{(n-1, l_{n-1}-1)} = k} \prod_{\substack{0 \le i < n, \\ 0 \le j < l_i}} (a_{k^{(i,j)}})_i \right) x^k = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} b_l \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^m} a_k x^k \right)^l$$

が成り立つ．すなわち，$B \circ A$ は x において絶対総和可能であり，$f_{B \circ A}(x) = f_B(f_A(x))$ が成り立つ．x は $0 \in \mathbb{K}^m$ のある近傍から任意にとれるから，これで主張は示された． □

系 3.6　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，A を $\mathbb{K}^m$ から $\mathbb{K}^n$ への定数項をもたない収束形式的冪級数，B を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．このとき，$B \circ A$ が定義され，これは $\mathbb{K}^m$ から E への収束形式的冪級数であり，0 のある近傍において $f_{B \circ A} = f_B \circ f_A$ が成り立つ．

証明　定理 3.5 で，A が定数項をもたないとした場合である．□

系 3.7　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数，$c \in C(A)$ とする．任意の $l \in \mathbb{N}^n$ に対して，$\{a_{l+p} c^p\}_{p \in \mathbb{N}^n}$ は E において絶対総和可能である．さらに，

$$B = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^n} a_{l+p} c^p \right) Y^l$$

と置くと，B は収束形式的冪級数であり，c のある近傍において $f_B(x - c) = f_A(x)$（x は固定された c の近傍の元）が成り立つ．

証明　定理 3.5 で，$m = n$ とし，A，B にそれぞれ $X + c$，A を割り当てた場合である．□

4　冪級数関数の係数の一意性

定理 4.1（零点孤立定理）　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ を $\mathbb{K}$ から E への収束形式的冪級数とする．$A \neq 0$ ならば（すなわち，a_k がすべて 0 でなければ），$\delta > 0$ をとって，任意の $x \in \mathbb{K}$，$0 < |x| < \delta$ に対して（$x \in C(A)$ かつ）$f_A(x) \neq 0$ となるようにできる．

証明　$A = 0$ とする．$a_k \neq 0$ なる最小の $k \in \mathbb{N}$ を $k^{(0)}$ とすると，$A = X^{k^{(0)}} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k^{(0)}+k} X^k$ と書ける．容易にわかるように，$A' = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k^{(0)}+k} X^k$ も収束形式的冪級数である．よって，冪級数関数 $f_{A'}$ が考えられる．$f_{A'}$ は $f_{A'}(0) = a_{k^{(0)}} \neq 0$ なる連続関数だから（命題 2.3），$\delta > 0$ をとって，任意の $|x| < \delta$ に対して $x \in C(A')$ かつ $f_{A'}(x) \neq 0$ となるようにできる．$f_A(x) = x^{k^{(0)}} f_{A'}(x)$（$x \in C(A)$）だから（命題 3.2 (3)），この δ について，任意の $0 < |x| < \delta$ に対して $x \in C(A)$ かつ $f_A(x) \neq 0$ が成り立つ．□

定理 4.2（冪級数関数の係数の一意性）　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$，$B = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．0 のある近傍上で $f_A = f_B$ ならば，$A = B$（すなわち，すべての $k \in \mathbb{N}^n$ に対して $a_k = b_k$）である．

証明　$B = 0$ の場合に示せば十分である（命題 3.2）．すなわち，0 のある近傍上で $f_A = 0$ であると仮定して，$A = 0$ を示す．

n についての帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らかである．n のときに示せたとして，$n + 1$ のときを考える．$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^{n+1}} a_k X^k$ を（形式的に）X_n について整理したときに X_n^l の係数として現れる形式的冪級数を，A_l と書く（$l \in \mathbb{N}$）．すると，各 $l \in \mathbb{N}$ に対して A_l は収束形式的冪級数であり，ある多重球 $B_{\mathbb{K}^{n+1}}(0; r)$（$r \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$）の上で

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} f_{A_l}(x_0, \ldots, x_{n-1}) x_n^l = f_A(x) = 0 \tag{$*$}$$

が成り立つ（命題 3.4）．さて，$(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in B_{\mathbb{K}^n}(0; r_0, \ldots, r_{n-1})$ を任意に固定すると，任意の $x_n \in B_{\mathbb{K}}(0; r_n)$ に対して ($*$) が成り立つ．したがって，零点孤立定理（定理 4.1）より，すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して $f_{A_l}(x_0, \ldots, x_{n-1}) =$

0 でなければならない．よって，帰納法の仮定より，すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して $A_l = 0$ である．これは，$A = 0$ を意味する． □

5　冪級数関数の微分

定理 5.1　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，A を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．A が定める冪級数関数 $f_A\colon C(A) \to E$ は，任意階数の偏微分が可能である．さらに，任意の $k \in \mathbb{N}^n$ に対して，$C(\partial^k A) = C(A)$（したがって $\partial^k A$ も収束形式的冪級数）であり，$C(A)$ において $\partial^k f_A = f_{\partial^k A}$ が成り立つ．

証明　$k = (1, 0, \ldots, 0)$ の場合に示せば十分である．

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k, \qquad \partial_0 A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq 1} k_0 a_k X_0^{k_0 - 1} X_1^{k_1} \cdots X_{n-1}^{k_{n-1}}$$

と置く．

まず，$C(\partial_0 A) = C(A)$ を示す．そのためには，$I(\partial_0 A) = I(A)$ を示せばよい．$r \in J(\partial_0 A)$ とすると，$\{k_0 a_k r_0^{k_0-1} r_1^{k_1} \cdots r_{n-1}^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq 1}$ は絶対総和可能だから，その r_0 倍である $\{k_0 a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq 1}$ も絶対総和可能である．$k \in \mathbb{N}^n$，$k_0 \geq 1$ に対しては $\|a_k\| r^k \leq k_0 \|a_k\| r^k$ だから，$\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ も絶対総和可能，すなわち $r \in J(A)$ となる．よって $J(\partial_0 A) \subseteq J(A)$ であり，ここから $I(\partial_0 A) \subseteq I(A)$ がわかる．逆に，$r \in I(A)$ とすると，ある $r' > r$ が存在して $\{a_k r'^k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ は絶対総和可能となる．$r_0 < s < r'_0$ なる $s \in \mathbb{R}_{>0}$ をとると，$k \in \mathbb{N}^n$，$k_0 \geq 1$ に対して

$$k_0 \|a_k\| s^{k_0 - 1} r_1'^{k_1} \cdots r_{n-1}'^{k_{n-1}} \leq \frac{k_0}{s} \left(\frac{s}{r'_0} \right)^{k_0} \|a_k\| r'^k$$

である．$k_0 \in \mathbb{N}$ が動くとき $(k_0/s) \cdot (s/r'_0)^{k_0}$ は有界なので，$\{k_0 a_k s^{k_0-1} r_1'^{k_1} \cdots r_{n-1}'^{k_{n-1}}\}_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq 1}$ も絶対総和可能，すなわち $(s, r'_1, \ldots, r'_{n-1}) \in J(\partial_0 A)$，したがって $r \in I(\partial_0 A)$ となる．よって，$I(A) \subseteq I(\partial_0 A)$ である．これで，$I(\partial_0 A) = I(A)$ が示された．

次に，$C(A)$ において $\partial^k f_A = f_{\partial^k A}$ が成り立つことを示す．$x \in C(A)$ を任意に固定する．A の不定元 $X = (X_0, \ldots, X_{n-1})$ に $(x_0 + H, x_1 \ldots, x_{n-1})$（$H$ は新しい不定元）を形式的に代入・展開して得られる形式的冪級数を，B_x とする．すなわち，

$$B_x = \sum_{l \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0 - l} x_1^{k_1} \cdots x_{k_{n-1}}^{n-1} \right) H^l$$

とする．定理 3.5 より，B_x は矛盾なく定義される収束形式的冪級数であり，0 に十分近い任意の $h \in \mathbb{K}$ に対して

$$f_A(x_0 + h, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_{B_x}(h) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0 - l} x_1^{k_1} \cdots x_{k_{n-1}}^{n-1} \right) h^l$$

が成り立つ．よって，0 に十分近い任意の $h \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ に対して，

$$\frac{f_A(x_0 + h, x_1, \ldots, x_{n-1}) - f(x_0, \ldots, x_{n-1})}{h} = \sum_{l \geq 1} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n,\ k_0 \geq l} \binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0 - l} x_1^{k_1} \cdots x_{k_{n-1}}^{n-1} \right) h^{l-1}$$

が成り立つ．容易にわかるように，$B'_x = \sum_{l\geq 1}(\sum_{k\in\mathbb{N}^n,\, k_0\geq l} a_k \binom{k_0}{l} x_0^{k_0-l} x_1^{k_1}\cdots x_{k_{n-1}}^{n-1})H^{l-1}$ も収束形式的冪級数だから，B'_x は $0\in\mathbb{K}$ の近傍で連続関数を定める（命題 2.3 (2)）．よって，上式は $h\to 0$ において極限値をもち，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f_A(x_0+h, x_1, \dots, x_{n-1}) - f_A(x_0, \dots, x_{n-1})}{h} &= \lim_{h\to 0}\sum_{l\geq 1}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^n,\, k_0\geq l}\binom{k_0}{l} a_k x_0^{k_0-l} x_1^{k_1}\cdots x_{k_{n-1}}^{n-1}\right) h^{l-1} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^n,\, k_0\geq 1} k_0 a_k x_0^{k_0-1} x_1^{k_1}\cdots x_{k_{n-1}}^{n-1} \\ &= f_{\partial_0 A}(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，f_A は x において微分可能であり，$\partial_0 f_A(x) = f_{\partial_0 A}(x)$ である．x は $C(A)$ の中から任意にとれたから，f_A は 0-成分に関して偏微分可能であり，$\partial_0 f_A = f_{\partial_0 A}$ が成り立つ．これで主張は示された． □

系 5.2　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$A = \sum_{n\in\mathbb{N}^n} a_k X^k$ を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．

$$a_k = \frac{\partial^k f_A(0)}{k!}$$

が成り立つ．

証明　定理 5.1 を用いて，$\partial^k f_A(0) = f_{\partial^k A}(0) = k!a_k$ を得る． □

系 5.2 は，冪級数関数の係数の一意性（定理 4.2）の別証明を与えている．

6　解析関数

定義 6.1（解析関数）　U を $\mathbb{K}^n$ の開集合，E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．関数 $f\colon U\to E$ が解析的である，あるいは解析関数であるとは，「任意の $c\in U$ に対して，c の近傍 $V\subseteq U$ と $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数 A が存在し，関数 $x\mapsto f_A(x-c)$ が V で定義され（すなわち，$V\subseteq c+C(A)$ であり），$x\in V$ に対して $f(x) = f_A(x-c)$ が成り立つ」ことをいう．

$f\colon U\to E$ を解析関数とする．冪級数関数の係数の一意性（定理 4.2）より，各 $c\in U$ に対して，上の条件を満たすような $\mathbb{K}^n$ から E への形式的冪級数 A は一意に定まる．この A を，f の c における**冪級数展開**という．

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ に対する解析関数を**実解析関数**，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ に対する解析関数を**複素解析関数**という．$\mathbb{C}^n$ の開集合から完備 $\mathbb{C}$-ノルム空間への複素解析関数は，$\mathbb{R}^{2n}$ の開集合から完備 $\mathbb{R}$-ノルム空間への関数とみなせば，実解析関数である．

命題 6.2　U を $\mathbb{K}^m$ の開集合，E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．

(1) $f, g\colon U\to E$ が解析関数ならば，$f+g$ も解析関数である．
(2) $\lambda\in\mathbb{K}$，$f\colon U\to E$ が解析関数ならば，λf も解析関数である．

証明　命題 3.2 から従う． □

命題 6.3　U を $\mathbb{K}^m$ の開集合，$E_0, \dots, E_{n-1}, F$ を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$u\colon E_0\times\cdots\times E_{n-1}\to F$ を連続多重線型写像とする．$i = 0, \dots, n-1$ に対して $f_i\colon U\to E_i$ が解析関数ならば，$u(f_0, \dots, f_{n-1})\colon U\to F$ も解析関数である．

証明　命題 3.3 から従う． □

命題 6.4　U を $\mathbb{K}^m$ の開集合，V を $\mathbb{K}^n$ の開集合，E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．$f\colon U \to V$，$g\colon V \to E$ が解析関数ならば，$g \circ f\colon U \to E$ も解析関数である．

証明　系 3.6 から従う．$\square$

命題 6.5　E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，A を $\mathbb{K}^n$ から E への収束形式的冪級数とする．A が定める冪級数関数 $f_A\colon C(A) \to E$ は，解析関数である．

証明　系 3.7 から従う．$\square$

定理 6.6（一致の定理）　U を $\mathbb{K}^m$ の連結開集合，E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$f, g\colon U \to E$ を解析関数とする．

(1) $\{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ が内点をもつならば，U 上で常に $f = g$ である．
(2) $n = 1$ とする．$\{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ が U において集積点をもつならば，U 上で常に $f = g$ である．

証明　$g = 0$ の場合に示せば十分である（命題 6.2）．

(1)　まず，U が凸である場合に示す．$\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ が内点 $c \in U$ をもつとする．$x \in U$ を任意にとる．$h(t) = f((1-t)c + tx)$ と置くと，h は $[0,1]$ を含む開区間上で定義された実解析関数であり（命題 6.4），0 のある近傍において 0 に等しい．もし $f(x) = h(1) \neq 0$ であるとすると，「$[0,t]$ において常に $h = 0$」であるような $t \in [0,1)$ の上限 t_0 がとれる．ところが，t_0 における h の冪級数展開を考えると，零点孤立定理（定理 4.1）より，h は t_0 のある近傍で 0 でなければならず，これは t_0 の上限性に矛盾する．よって，背理法より $f(x) = 0$ である．$x \in U$ は任意だったから，これで U が凸である場合には示された．

次に，一般の場合に示す．$\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ の内部を V とし，V が空でないとする．$x \in \overline{V} \cap U$ を任意にとり，x を中心とする多重球 $B(x; r)$ を U に収まるようにとる．すると，$B(x; r) \cap V$ は空でない開集合であり，この上で $f = 0$ が成り立つ．$B(x; r)$ は凸だから，前段の結果を $f|_{B(x;r)}$ に適用して，$B(x; r)$ 上で $f = 0$ であることを得る．したがって，$x \in V$ である．よって，V は U の閉集合であるから，U の連結性より $V = U$ であり，U 上で常に $f = 0$ である．これで，U が一般の場合についても示された．

(2)　$\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ が内点 $c \in U$ をもつとする．c における f の冪級数展開をそれぞれ A とすると，A が定める冪級数関数が 0 になる点の全体は 0 を集積点にもつから，零点孤立定理（定理 4.1）より，$A = 0$ である．したがって，c のある近傍において $f = 0$ である．よって，(1) より $f = g$ である．$\square$

定理 6.7　U を $\mathbb{K}$ の開集合，E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$f\colon U \to E$ を解析関数とする．f は任意階数の偏微分が可能で，その任意の偏微分はまた解析関数である．特に，解析関数は C^∞ 級である．

証明　定理 5.1 から従う．$\square$

定理 6.8　U を $\mathbb{K}$ の開集合，E を完備 $\mathbb{K}$-ノルム空間，$f\colon U \to E$ を解析関数とする．$c \in U$ における f の冪級数展開は，

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial^k f(c)}{k!} X^k$$

で与えられる．

証明　系 5.2 から従う．$\square$

参考文献

[1] N. Bourbaki（著），齋藤 正彦（編・訳），『ブルバキ数学原論 多様体 要約』，東京図書，1970.

[2] J. Dieudonné（著），森 毅（訳），『現代解析の基礎 2』，東京図書，1971.