Lie 代数

箱

2025 年 1 月 20 日

概要

Lie 代数やそれに関連する基本的な概念を定義する．その後，冪零 Lie 代数，可解 Lie 代数，半単純 Lie 代数に対する基本的な定理を証明する．

目次

記号と用語

- 本稿を通して，特に断らない限り，$\mathbb{K}$ を可換体とし，線型空間などの係数体は $\mathbb{K}$ であるとする．
- n 次単位行列を，I_n と書く．添字の組 (i, j) に対応する行列単位を，E_{ij} と書く．
- 線型空間 A が，$A \times A$ から A への双線型写像を備えているとき，A を結合的とは限らない代数という．結合的とは限らない代数 A に定まっている双線型写像を，この結合的とは限らない代数の乗法といい，特に断らなければ $(x, y) \mapsto xy$ と書く．
- 結合的とは限らない代数 A であって，その乗法が結合的である（すなわち，任意の x, y, $z \in A$ に対して $(xy)z = x(yz)$ である）ものを，結合代数という．
- 結合的とは限らない代数 A 上の導分とは，線型写像 $D\colon A \to A$ であって，任意の x, $y \in A$ に対して $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ を満たすものをいう．A 上の導分全体のなす空間を，$\mathrm{Der}(A)$ と書く．
- 線型空間 V のテンソル代数を $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{T}^n(V)$ と書き，対称代数を $\mathbf{S}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{S}^n(V)$ と書く．

1 Lie 代数

1.1 Lie 代数

定義 1.1（Lie 代数） 結合的とは限らない $\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{g}$ であって，その乗法（$(x, y) \mapsto [x, y]$ と書く）が次のすべての条件を満たすものを，**$\mathbb{K}$ 上の Lie 代数**（Lie algebra over $\mathbb{K}$），**$\mathbb{K}$-Lie 代数**，あるいは単に **Lie 代数**という．

(LIE1) 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$[x, x] = 0$ である．

(LIE2) 任意の x, y, $z \in \mathfrak{g}$ に対して，$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ である（この等式を，**Jacobi の恒等式**という）．

注意 1.2 A を結合的とは限らない代数とする．任意の $x \in A$ に対して $xx = 0$ ならば，任意の x, $y \in A$ に対して，

$$0 = (x + y)(x + y) = xx + xy + yx + yy = xy + yx$$

だから，$yx = -xy$ である．逆に，係数体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 でなく，任意の $x, y \in A$ に対して $yx = -xy$ ならば，任意の $x \in A$ に対して，$xx = -xx$ より $xx = 0$ を得る．

前段に述べたことより，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は次の条件 (LIE1$'$) を満たし，係数体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 でなければ，Lie 代数の定義（定義 1.1）において (LIE1) を (LIE1$'$) に置き換えてもよい．

(LIE1$'$) 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して，$[y,x] = -[x,y]$ である．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ は，ふたたび Lie 代数である．このようにして得られる Lie 代数を，$\mathfrak{g}$ の**部分 Lie 代数**（Lie subalgebra）という．

(LIE1$'$) より，Lie 代数において左イデアル，右イデアル，両側イデアルは同じものだから，これらを単にイデアルという．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ から定まる商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は，ふたたび Lie 代数である．このようにして得られる Lie 代数を，$\mathfrak{g}$ の**商 Lie 代数**（quotient Lie algebra）という．

Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に対して，その直和代数 $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と積代数 $\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ は，ふたたび Lie 代数をなす．これらをそれぞれ，$(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の**直和 Lie 代数**（direct sum Lie algebra），**積 Lie 代数**（product Lie algebra）という．

Lie 代数の間の代数の準同型・同型を，それぞれ **Lie 代数の準同型・同型**という．Lie 代数の構造を考えていることが明らかである場合には，単に準同型・同型ともいう．$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を Lie 代数とし，$f \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を Lie 代数の準同型とする．$\operatorname{Ker} f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル，$\operatorname{Im} f$ は $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数であり，f は $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f$ から $\operatorname{Im} f$ への Lie 代数の同型を誘導する．$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数・イデアルならば，それぞれの場合，$f(\mathfrak{a})$ は $\operatorname{Im} f$ の部分 Lie 代数・イデアルである．$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数・イデアルならば，それぞれの場合，$f^{-1}(\mathfrak{b})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数・イデアルである．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ をその部分 Lie 代数の族とする．包含準同型の全体が誘導する直和 Lie 代数 $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ から $\mathfrak{g}$ への線型写像が Lie 代数の同型であるとき，$\mathfrak{g}$ は Lie 代数として $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に直和分解されるといい，しばしば $\mathfrak{g}$ と $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ を Lie 代数として同一視する．容易に確かめられるように，$\mathfrak{g}$ が Lie 代数として $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に直和分解されるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}$ が線型空間として $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に直和分解され，すべての $\mathfrak{g}_i$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることである．

$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とする．$\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ は，$\mathbb{K}'$-Lie 代数である．$\mathbb{K}'$-Lie 代数の係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ は，$\mathbb{K}$-Lie 代数である．

定義 1.3（可換 Lie 代数） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$x, y \in \mathfrak{g}$ が $[x,y] = 0$ を満たすとき，x と y は**可換**である（commute）という．$\mathfrak{g}$ が**可換**（commutative）であるとは，$\mathfrak{g}$ の任意の 2 元が可換であることをいう．

例 1.4 A を結合代数とする．$x, y \in A$ に対して，$[x,y] = xy - yx$ を x と y の**交換子**（commutator）といい，容易に確かめられるように，A はこれを乗法として Lie 代数をなす．x と y が結合代数 A の乗法に関して可換であることと，A を交換子によって Lie 代数とみなすときに定義 1.3 の意味で可換であることとは同値である．

例 1.5 V を線型空間とする．

(1) V 上の線型変換全体のなす結合代数 $\operatorname{End}(V)$ を交換子によって Lie 代数とみなしたものを，$\mathfrak{gl}(V)$ と書く．これを，**一般線型 Lie 代数**（general linear Lie algebra）という．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathfrak{gl}(\mathbb{K}^n)$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ とも書く．

(2) V が有限次元であるとする．このとき，容易に確かめられるように，

$$\mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \operatorname{tr} x = 0\}$$

は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である．これを，**特殊線型 Lie 代数**（special linear Lie algebra）という．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathfrak{sl}(\mathbb{K}^n)$ を $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ とも書く．

例 1.6　V を線型空間とし，$\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を双線型形式とする．このとき，容易に確かめられるように，

$$\mathfrak{g}_\Phi = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{任意の } v,\, w \in V \text{ に対して } \Phi(x(v), w) + \Phi(v, x(w)) = 0\}$$

は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である．

(1) V が有限次元線型空間であり，$\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が非退化対称双線型形式であるとする．このとき，上記の $\mathfrak{g}_\Phi$ を，**直交 Lie 代数**（orthogonal Lie algebra）といい，$\mathfrak{o}(V, \Phi)$ と書く．Φ を $\mathbb{K}^n$（$n \in \mathbb{N}$）上の標準的な非退化対称双線型形式（すなわち，$v = (v_1, \ldots, v_n)$ と $w = (w_1, \ldots, w_n)$ に対して $\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ として定まるもの）とするときの直交 Lie 代数 $\mathfrak{o}(\mathbb{K}^n, \Phi)$ を，$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ とも書く．行列のなす Lie 代数として表示すれば，

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^{\mathrm{T}} = 0\}$$

となる．

(2) V が有限次元線型空間であり，$\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が非退化交代双線型形式であるとする．このとき，上記の $\mathfrak{g}_\Phi$ を，**シンプレクティック Lie 代数**（symplectic Lie algebra）といい，$\mathfrak{sp}(V, \Phi)$ と書く．Φ を $\mathbb{K}^{2n}$（$n \in \mathbb{N}$）上の標準的な非退化交代双線型形式（すなわち，$v = (v_1, \ldots, v_{2n})$ と $w = (w_1, \ldots, w_{2n})$ に対して $\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_{n+i} - \sum_{i=1}^n v_{n+i} w_i$ として定まるもの）とするときのシンプレクティック Lie 代数 $\mathfrak{sp}(\mathbb{K}^{2n}, \Phi)$ を，$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ とも書く．行列のなす Lie 代数として表示すれば，

$$\begin{aligned}\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid J_n X + X^{\mathrm{T}} J_n = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}),\, B,\, C \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K}) \right\}\end{aligned}$$

（$J_n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ であり，$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の n 次対称行列全体のなす空間を表す）となる．

例 1.7　A を結合的とは限らない代数とするとき，容易に確かめられるように，A 上の導分全体のなす空間 $\mathrm{Der}(A)$ は，$\mathfrak{gl}(A)$ の部分 Lie 代数である．

1.2　随伴表現

定義 1.8（随伴表現）　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 x に対して，$\mathfrak{g}$ から自身への線型写像 $y \mapsto [x, y]$ を，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ あるいは単に $\mathrm{ad}(x)$ と書く．

命題 1.9　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ 上の導分全体のなす空間 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数として Lie 代数とみなす（例 1.7）．

(1) $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルである．さらに，$x \in \mathfrak{g}$ と $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ に対して，$\mathrm{ad}(D(x)) = [D, \mathrm{ad}(x)]$ である．

(2) 写像 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ は準同型である．

証明 (1) $x \in \mathfrak{g}$ とすると，任意の $y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{ad}(x)[y,z] = [x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] = [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z]$$

が成り立つから，$\mathrm{ad}(x)$ は $\mathfrak{g}$ 上の導分である．さらに，$x \in \mathfrak{g}$ とし，D を $\mathfrak{g}$ 上の導分とすると，任意の $y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{ad}(D(x))y = [D(x), y] = D([x,y]) - [x, D(y)] = D(\mathrm{ad}(x)y) - \mathrm{ad}(x)D(y)$$

が成り立つから，$\mathrm{ad}(D(x)) = [D, \mathrm{ad}(x)]$ である．よって，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルである．

(2) $x, y \in \mathfrak{g}$ とすると，任意の $z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{ad}([x,y])z = [[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = \mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)z - \mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(x)z$$

が成り立つから，$\mathrm{ad}([x,y]) = [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)]$ である．よって，ad は準同型である．□

定義 1.10（内部導分） Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の元を，$\mathfrak{g}$ 上の**内部導分**（inner derivation）という．

命題 1.9 (1) より，Lie 代数上の内部導分は，導分である．

1.3 イデアルと特性イデアル

Lie 代数のイデアルとは，任意の内部導分で安定な部分線型空間のことにほかならない．これを踏まえて，次のように定義する．

定義 1.11（特性イデアル） Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分線型空間であって，$\mathfrak{g}$ 上の任意の導分で安定であるものを，$\mathfrak{g}$ の**特性イデアル**（characteristic ideal）という．

命題 1.12 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分線型空間，$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}$ の部分線型空間とする．

(1) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の特性イデアルならば，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．
(2) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルであり，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の特性イデアルならば，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明 (1) D を $\mathfrak{g}$ 上の内部導分とすると，$\mathfrak{a}$ は D-安定であり，$D|_{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ 上の導分だから，$\mathfrak{b}$ も D-安定である．よって，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) (1) の証明において「内部導分」を「導分」に置き換えれば，(2) の証明となる．□

命題 1.13 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ をその部分線型空間とする．

(1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである．
(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ 上の導分 D で安定ならば，

$$D([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) \subseteq [D(\mathfrak{a}), \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, D(\mathfrak{b})] \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$$

だから，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も D-安定である．よって，主張が成り立つ．□

1.4 中心化子と正規化子

定義 1.14（中心化子，中心） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分線型空間，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合とするとき，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{h}$ における**中心化子**（centralizer）を，

$$\mathbf{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{h} \mid \text{任意の } y \in \mathfrak{a} \text{ に対して } [x, y] = 0\}$$

と定める．$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ における中心化子を，$\mathfrak{g}$ の**中心**（center）といい，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ と書く．

定義 1.15（正規化子） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分線型空間とするとき，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{h}$ における**正規化子**（normalizer）を，

$$\mathbf{N}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{h} \mid [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}$$

と定める．

命題 1.16 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の部分線型空間とし，$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{b}\}$ と置く．

(1) $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ならば，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．
(2) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば，$\mathfrak{h}$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである．
(3) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば，$\mathfrak{h}$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明 (1) x, $y \in \mathfrak{h}$ とすると，命題 1.9 (2) より

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}([x, y])\mathfrak{a} &\subseteq \operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)\mathfrak{a} + \operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(x)\mathfrak{a} \\ &\subseteq \operatorname{ad}(x)\mathfrak{b} + \operatorname{ad}(y)\mathfrak{b} \\ &\subseteq \operatorname{ad}(x)\mathfrak{a} + \operatorname{ad}(y)\mathfrak{a} \\ &\subseteq \mathfrak{b}\end{aligned}$$

だから，$[x, y] \in \mathfrak{h}$ である．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．

(2) $x \in \mathfrak{h}$ とし，D を $\mathfrak{g}$ 上の内部導分とすると，命題 1.9 (1) より

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}(D(x))\mathfrak{a} &\subseteq D(\operatorname{ad}(x)\mathfrak{a}) + \operatorname{ad}(x)D(\mathfrak{a}) \\ &\subseteq D(\mathfrak{b}) + \operatorname{ad}(x)\mathfrak{a} \\ &\subseteq \mathfrak{b}\end{aligned}$$

だから，$D(x) \in \mathfrak{h}$ である．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(3) (2) の証明において「内部導分」を「導分」に置き換えれば，(3) の証明となる． □

系 1.17 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をその部分線型空間とする．

(1) $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．
(2) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば，$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである．
(3) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば，$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明 命題 1.16 の特別な場合である． □

系 1.18 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ に対して，その正規化子 $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は，$\mathfrak{a}$ をイデアルとして含む $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の中で最大のものである．

証明　$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることより $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ を含み，系 1.17 (1) より $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．$\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ が $\mathfrak{a}$ をイデアルとして含むこと，および同じ性質を満たす $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数が $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ に含まれることは，正規化子の定義から明らかである． □

2　包絡代数

2.1　包絡代数

定義 2.1（包絡代数）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．テンソル代数 $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ を「$x,\ y \in \mathfrak{g}$ に対する $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ の全体が生成するイデアル」で割って得られる単位的結合代数を，$\mathfrak{g}$ の**包絡代数**（enveloping algebra）といい，$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするとき，$\mathfrak{g}$ から $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ への自然な写像と $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ から $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ への等化準同型とを合成して得られる写像 $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を，包絡代数への**自然な写像**という．

命題 2.2（包絡代数の普遍性）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，その包絡代数への自然な写像を $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く．単位的結合代数 A と（A を交換子によって Lie 代数とみなすときの）Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \to A$ に対して，単位的代数の準同型 $\widetilde{f}\colon \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \to A$ であって，$\widetilde{f} \circ \iota = f$ を満たすものが一意に存在する．

証明　テンソル代数の普遍性より，単位的代数の準同型 $\widehat{f}\colon \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \to A$ であって，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\widehat{f}(x) = f(x)$ を満たすものが一意に存在する．f は Lie 代数の準同型だから，任意の $x,\ y \in \mathfrak{g}$ に対して $\widehat{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x, y]) = 0$ が成り立つ．したがって，$\widehat{f}$ は単位的代数の準同型 $\widetilde{f}\colon \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \to A$ を誘導する．これが，主張の条件を満たす一意な単位的代数の準同型である． □

系 2.3　$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を Lie 代数とし，それらの包絡代数への自然な写像を $\iota_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$，$\iota_{\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{h} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く．Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ に対して，単位的代数の準同型 $\widetilde{f}\colon \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ であって，$\widetilde{f} \circ \iota_{\mathfrak{g}} = \iota_{\mathfrak{h}} \circ f$ を満たすものが一意に存在する．

証明　包絡代数の普遍性（命題 2.2）から従う． □

命題 2.2 または系 2.3 の状況で，$\widetilde{f}$ を，**f が誘導する単位的代数の準同型**という．

2.2　Poincaré–Birkhoff–Witt の定理

単位的結合代数 A 上の**フィルトレーション**（filtration）とは，A の部分線型空間の族 $(A^{\leq n})_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$1 \in A^{\leq 0}$ かつ任意の $m,\ n \in \mathbb{N}$ に対して $A^{\leq m}A^{\leq n} \subseteq A^{\leq m+n}$ を満たすものをいう．単位的結合代数とその上のフィルトレーションの組を，**フィルトレーション付き単位的結合代数**（filtered unital associative algebra）という．$(A, (A^{\leq n})_{n\in\mathbb{N}})$ をフィルトレーション付き結合代数とするとき，

$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A^{\leq n}/A^{\leq n-1}$$

（$A^{\leq -1} = 0$ とみなす）と定めると，A の乗法は $\operatorname{gr} A \times \operatorname{gr} A$ から $\operatorname{gr} A$ への双線型写像を誘導し，これを乗法として，$\operatorname{gr} A$ は次数付き単位的結合代数をなす．これを，**フィルトレーション付き結合代数 A に伴う次数付き単位的結合代数**という．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．テンソル代数から包絡代数への等化準同型を $\pi\colon \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書き，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) = \pi(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbf{T}^i(\mathfrak{g}))$ と置くと，$(\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上のフィルトレーションである．次の定理では，これに対応するフィルトレーション付き単位的結合代数に伴う次数付き単位的結合代数

$$\mathrm{gr}\,\mathbf{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$$

を考える．

定理 2.4（Poincaré–Birkhoff–Witt の定理） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，テンソル代数から包絡代数への等化準同型を $\pi\colon \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く．線型写像 $\widetilde{\Phi} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\Phi}_n\colon \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\,\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を

$$\widetilde{\Phi}_n\colon \mathbf{T}^n(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g}), \quad \widetilde{\Phi}_n(t) = \pi(t) + \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$$

と定めると，Φ は次数付き単位的代数の準同型であり，次数付き単位的代数の同型

$$\Phi\colon \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\,\mathbf{U}(\mathfrak{g})$$

を誘導する．

証明 Bourbaki [1, §I.2.7, Théorème 1] を参照のこと． □

系 2.5 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，その包絡代数への自然な写像を $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く．$(x_i)_{i\in I}$ を全順序集合 I で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底とするとき，$n \in \mathbb{N}$ と $i_1, \ldots, i_n \in I$ が $i_1 \leq \cdots \leq i_n$ を満たす範囲を動くときの $\iota(x_{i_1})\cdots\iota(x_{i_n})$ の全体は，包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底をなす．

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_{i_1}\cdots x_{i_n}$（$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_1 \leq \cdots \leq i_n$）の全体は $\mathbf{S}^n(\mathfrak{g})$ の基底をなすから，Poincaré–Birkhoff–Witt の定理（定理 2.4）より，$\iota(x_{i_1})\cdots\iota(x_{i_n}) + \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$ $(i_1, \ldots, i_n \in I,\ i_1 \leq \cdots \leq i_n)$ の全体は $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$ の基底をなす．よって，$\iota(x_{i_1})\cdots\iota(x_{i_n})$ $(n \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_n \in I,\ i_1 \leq \cdots \leq i_n)$ の全体は，包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底をなす． □

系 2.6 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ からその包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ への自然な写像 $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ は，単射である．

証明 $(x_i)_{i\in I}$ を全順序集合 I で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底とすると，系 2.5 より，$(\iota(x_i))_{i\in I}$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ において線型独立である．よって，自然な写像 $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ は，単射である． □

系 2.6 を踏まえて，$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするとき，包絡代数への自然な写像による $x \in \mathfrak{g}$ の像を，しばしばそのまま x と書く．

系 2.7 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の間の単射準同型 $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が誘導する包絡代数の間の単位的代数の準同型 $\widetilde{f}\colon \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ は，単射である．

証明 $(x_i)_{i\in I}$ を全順序集合 I で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底とし，$(y_j)_{j\in J}$ を全順序集合 J で添字付けられた $\mathfrak{h}$ の基底であって $(f(x_i))_{i\in I}$ を部分族として含むものとする．このとき，系 2.6 より，$x_{i_1}\cdots x_{i_n}$（$n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_1 \leq \cdots \leq i_n$）の全体は $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底をなし，$y_{j_1}\cdots y_{j_n}$（$n \in \mathbb{N}$，$j_1, \ldots, j_n \in J$，$j_1 \leq \cdots \leq j_n$）の全体は $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ の基底をなす．後者のことより，$\widetilde{f}(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = f(x_{i_1})\cdots f(x_{i_n})$（$n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_1 \leq \cdots \leq i_n$）の全体は，$\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ において線型独立である．よって，$\widetilde{f}$ は単射である． □

3　表現

3.1　表現

定義 3.1（表現）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．V が線型空間であり，$\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ が準同型であるとき，ρ は $\mathfrak{g}$ の V 上の**表現**（representation）である，あるいは (ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の**表現**であるという．$\mathfrak{g}$ の V 上の表現が一つ固定されているとき，V を $\mathfrak{g}$ **上の加群**（module over $\mathfrak{g}$）あるいは $\mathfrak{g}$**-加群**という．

(ρ, V) を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．V の線型空間としての次元を，ρ の**次元**という．ρ が**忠実**（faithful）であるとは，$\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ が単射であることをいう．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現と $\mathfrak{g}$-加群は，実質的には同じものである．「V を $\mathfrak{g}$-加群とする」というときは，表現を表す記号 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を明示せずに，$\rho(x)v$ を xv と書くことが多い．以下，いちいち明示しないが，Lie 代数の表現に関する用語は，Lie 代数上の加群に対しても用いる．

注意 3.2　包絡代数の普遍性（命題 2.2）より，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の線型空間 V 上の表現を考えることは，その包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の V 上の表現（すなわち，$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ から V への代数の準同型）を考えることと等価である．本稿では，ρ を Lie 代数の表現とするとき，これに対応する包絡代数の表現も，同じ記号 ρ で表す．

注意 3.3　$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$-Lie 代数とする．$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とし，V' を $\mathbb{K}'$-線型空間とするとき，$\mathbb{K}$-Lie 代数の準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V')$ を，$\mathfrak{g}$ の V' 上の $\mathbb{K}'$**-表現**という．係数拡大の普遍性より，$\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の V' 上の $\mathbb{K}'$-表現を考えることは，$\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の V' 上の表現を考えることと等価である．

例 3.4　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．

(1) V を線型空間とし，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x) = 0 \in \mathfrak{gl}(V)$ と定めると，ρ は $\mathfrak{g}$ の V 上の表現である．これを，$\mathfrak{g}$ の V 上の**自明表現**（trivial representation）という．

(2) $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}(V)$（V は線型空間）の部分 Lie 代数であるとすると，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への包含準同型は，$\mathfrak{g}$ の V 上の忠実な表現である．これを，$\mathfrak{g}$ の**自然表現**（natural represetatation）という．

(3) 命題 1.9 (2) より，$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現である．これを，$\mathfrak{g}$ の**随伴表現**（adjoint representation）という．

定義 3.5（不変元）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，(ρ, V) をその表現とする．$v \in V$ が ρ に関して**不変**（invariant）であるとは，$\rho(\mathfrak{g})v = 0$ であることをいう．

定義 3.6（表現の間の準同型）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，(ρ, V), (σ, W) をその表現とする．線型写像 $\phi\colon V \to W$ であって，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi \circ \rho(x) = \sigma(x) \circ \phi$ を満たすものを，ρ から σ への**準同型**，あるいは V から W への $\mathfrak{g}$**-準同型**という．さらに，ϕ が線型同型であるとき，これを，ρ から σ への**同型**，あるいは V から W への $\mathfrak{g}$**-同型**という．ρ から σ への同型が存在するとき，これらの表現は**同型**であるという．

3.2　表現に対する演算

定義 3.7（部分表現，商表現）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の表現とし，W を V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間とするとき，ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の W, V/W 上の表現を，それぞれ ρ の**部分表現**（subrepresentation），

商表現（quotient representation）と呼ぶ．$\mathfrak{g}$-加群に対しては，対応して，**部分加群**（submodule），**商加群**（quotient module）という用語を用いる．

定義 3.8（反傾表現） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，$x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho^\vee(x) = -\rho(x)^* \in \mathfrak{gl}(V^*)$$

と定めると，容易に確かめられるように，$(\rho^\vee, V^*)$ は $\mathfrak{g}$ の表現である．この表現 $\rho^\vee$ を，ρ の**反傾表現**（contragradient representation）という．$\mathfrak{g}$-加群に対しては，対応して，**反傾加群**（contragradient module）という用語を用いる．

定義 3.9（直和表現） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$((\rho_i, V_i))_{i\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の表現の族とするとき，$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ と置き，$x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho(x) = \bigoplus_{i\in I} \rho_i(x) \in \mathfrak{gl}(V)$$

と定めると，容易に確かめられるように，(ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の表現である．この表現 ρ を，$(\rho_i)_{i\in I}$ の**直和表現**（direct sum representation）という．$\mathfrak{g}$-加群に対しては，対応して，**直和加群**（direct sum module）という用語を用いる．

定義 3.10（テンソル積表現） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．(ρ_1, V_1), ..., (ρ_n, V_n) を $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，$V = \bigotimes_{i=1}^n V_i$ と置き，$x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{id}_{V_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{V_{i-1}} \otimes \rho_i(x) \otimes \mathrm{id}_{V_{i+1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{V_n} \in \mathfrak{gl}(V)$$

と定めると，容易に確かめられるように，(ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の表現である．この表現 ρ を，ρ_1, ..., ρ_n の**テンソル積表現**（tensor product representation）という．$\mathfrak{g}$-加群に対しては，対応して，**テンソル積加群**（tensor product module）という用語を用いる．

次の定義では，線型空間 V_1, ..., V_n, W に対して，$V_1 \times \cdots \times V_n$ から W への多重線型写像全体のなす線型空間を，$\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$ と書く．

定義 3.11（多重線型写像の空間上に定まる表現） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．(ρ_1, V_1), ..., (ρ_n, V_n), (σ, W) を $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，$V_1 \times \cdots \times V_n$ から W への多重線型写像全体のなす線型空間を M と置き，$x \in \mathfrak{g}$ と $\phi \in \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$ に対して $\tau(x)\phi \in \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$ を

$$\tau(x)\phi(v_1, \ldots, v_n) = -\sigma(x)\left(\sum_{i=1}^n \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, \rho_i(x)v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)\right) \qquad (v_i \in V_i)$$

と定めると，容易に確かめられるように，$(\tau, \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W))$ は $\mathfrak{g}$ の表現である．この表現 τ を，**ρ_1, ..., ρ_n, σ が定める $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$ 上の表現**という．

(ρ, V) を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，ρ の反傾表現は，ρ と 1 次元自明表現が定める $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ 上の表現にほかならない．

3.3 既約表現

定義 3.12（既約表現） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，(ρ, V) をその表現とする．ρ が**既約**（irreducible）であるとは，$V \neq 0$ であり，V が 0 と V 以外の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間をもたないことをいう．ρ が**可約**（reducible）であるとは，$V \neq 0$ であり，ρ が既約でないことをいう．

定義 3.13（組成列） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，(ρ, V) をその表現とする．ρ の**組成列**（composition series）とは，V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間の列 $(V_0, \dots, V_n)$（$n \in \mathbb{N}$）であって，$V = V_0 \supseteq \cdots \supseteq V_n = V$ を満たし，任意の $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の表現が既約であるものをいう．

命題 3.14 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) は，組成列をもつ．[*1]

証明 V の次元に関する帰納法で示す．$V = 0$ の場合は明らかである．$V \neq 0$ とし，次元がより小さい場合には主張は正しいとする．V は有限次元だから，V の 0 でない $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間の中で極小なもの W がとれる．極小性より，ρ の W 上の部分表現は既約である．等化線型写像を $\phi\colon V \to V/W$ と書き，ρ の V/W 上の商表現を $\overline{\rho}$ と書く．すると，帰納法の仮定より，$\overline{\rho}$ の組成列 $(\overline{V_0}, \dots, \overline{V_n})$ がとれる．このとき，$(\phi^{-1}(\overline{V_0}), \dots, \phi^{-1}(\overline{V_n}), 0)$ は ρ の組成列である．これで，帰納法が完成した． □

定義 3.15（完全可約表現） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，(ρ, V) をその表現とする．ρ が**完全可約**（completely reducible）であるとは，V の任意の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間が $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間をもつことをいう．

命題 3.16 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) が完全可約ならば，その任意の部分表現と商表現も完全可約である．

証明 ρ が完全可約であるとする．完全可約表現 ρ の任意の商表現は ρ のある部分表現に同型だから，部分表現に関する主張だけを示せば十分である．(ρ', V') を (ρ, V) の部分表現とし，V' の V における $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間 V'' をとる．W' を V' の $\rho'(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間とすると，$W' \oplus V''$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間だから，ρ の完全可約性より，$W' \oplus V''$ の V における $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間 M がとれる．ここで，直和分解 $V = V' \oplus V''$ に関する V' の上への射影を $p\colon V \to V'$ と書くと，容易に確かめられるように，$p(M)$ は W' の V' における $\rho'(\mathfrak{g})$-安定な補空間となる．よって，ρ' は完全可約である． □

命題 3.17 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，(ρ, V) をその表現とする．次の条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，V が有限次元ならば，これらの条件は同値である．

(a) ρ は既約表現の族に直和分解できる．
(b) ρ は完全可約である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) (ρ, V) が既約表現の族 $((\rho_i, V_i))_{i \in I}$ に直和分解されるとする．W を V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間とする．すると，Zorn の補題より，$I' \subseteq I$ であって $W \cap \bigoplus_{i \in I'} V_i = 0$ を満たすものの中で極大なものがとれる．このような I' をとると，$W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i = V$ となることを示す．そうでないと仮定すると，ある $j \in I \setminus I'$ が存在して，V_j は $W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i$ に含まれない．ρ_j は既約だから，$V_j \cap (W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i) = 0$ となり，したがって，$W \cap \bigoplus_{i \in I' \cup \{j\}} V_i = 0$ となる．ところが，これは，I' の極大性に反する．よって，$W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i = V$ が成り立つ．これで，ρ が完全可約であることが示された．

[*1] 命題 3.14 は，Jordan–Hölder の定理の一部である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)（V が有限次元である場合）　V の次元に関する帰納法で示す．$V=0$ の場合は明らかである．$V \neq 0$ とし，次元がより小さい場合には主張は正しいとする．V は有限次元だから，V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間 $W \neq 0$ の中で極小なものがとれる．極小性より，ρ の W 上の部分表現は既約である．また，ρ は完全可約だから，W の V における $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間 V' がとれる．ρ の V' 上の部分表現はまた完全可約だから（命題 3.16），帰納法の仮定より，それは既約表現の族に直和分解できる．よって，ρ も既約表現の族に直和分解できる．これで，帰納法が完成した．□

3.4 不変双線型形式

定義 3.18（不変双線型形式） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$B\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ を双線型形式とする．

(1) B が**不変**（invariant）であるとは，任意の x, y, $z\in\mathfrak{g}$ に対して

$$B([x,y],z)+B(x,[y,z])=0$$

が成り立つことをいう．

(2) B が**完全不変**（completely invariant）であるとは，$\mathfrak{g}$ 上の任意の導分 D と x, $y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$B(D(x),y)+B(x,D(y))=0$$

が成り立つことをいう．

注意 3.19 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の双線型形式 $B\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ が不変であるための必要十分条件は，任意の x, y, $z\in\mathfrak{g}$ に対して

$$B(\mathrm{ad}(z)x,y)+B(x,\mathrm{ad}(z)y)=0$$

が成り立つことである．これは，$\mathfrak{g}$ の随伴表現と 1 次元自明表現が定める $\mathrm{Mult}(\mathfrak{g},\mathfrak{g};\mathbb{K})$ 上の表現に関して B が（定義 3.5 の意味で）不変であるということにほかならない．また，この条件は，$\mathfrak{g}$ 上の任意の内部導分 D と x, $y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$B(D(x),y)+B(x,D(y))=0$$

が成り立つこととも いいかえられる．特に，Lie 代数上の双線型形式は，完全不変ならば不変である．

命題 3.20 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$B\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ を双線型形式とする．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分線型空間とし，

$$\mathfrak{a}'=\{y\in\mathfrak{g}\mid B(\mathfrak{a},y)=0\},$$
$$\mathfrak{a}''=\{x\in\mathfrak{g}\mid B(x,\mathfrak{a})=0\}$$

と置く．

(1) B が不変であり，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば，$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) B が完全不変であり，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば，$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ は $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明 (1)　D を $\mathfrak{g}$ 上の内部導分とする．$\mathfrak{a}$ が D-安定であることより $B(D(\mathfrak{a}),\mathfrak{a}')\subseteq B(\mathfrak{a},\mathfrak{a}')=0$ だから，$B(\mathfrak{a},D(\mathfrak{a}'))=B(\mathfrak{a},\mathfrak{a}')=0$ である．すなわち，$\mathfrak{a}'$ は D-安定である．よって，$\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．同様に，$\mathfrak{a}''$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2)　(1) の証明において「内部導分」を「導分」に置き換えれば，(2) の証明となる．□

3.5　トレース形式，Killing 形式

定義 3.21（トレース形式，Killing 形式）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．

(1) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) に対して，

$$B_\rho(x, y) = \operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y)) \qquad (x,\ y \in \mathfrak{g})$$

によって定まる双線型形式 $B_\rho\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ を，ρ が定める**トレース形式**（trace form）という．

(2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の随伴表現のトレース形式を，$\mathfrak{g}$ の **Killing 形式**（Killing form）という．

命題 3.22　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．

(1) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) のトレース形式は，$\mathfrak{g}$ 上の不変な対称双線型形式である．
(2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式は，$\mathfrak{g}$ 上の完全不変な対称双線型形式である．

証明　(1)　ρ のトレース形式を B_ρ と書く．トレースの性質より，B_ρ は対称である．また，任意の $x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
B_\rho([x, y], z) &= \operatorname{tr}(\rho([x, y])\rho(z)) \\
&= \operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\
&= \operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(x)\rho(z)\rho(y)) \\
&= \operatorname{tr}(\rho(x)\rho([y, z])) \\
&= B_\rho(x, [y, z])
\end{aligned}$$

だから，B_ρ は不変である．

(2)　$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_\mathfrak{g}$ と書く．$B_\mathfrak{g}$ が対称であることは，(1) の主張に含まれる．また，$\mathfrak{g}$ 上の任意の導分 D と任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，命題 1.9 (1) より

$$\begin{aligned}
B_\mathfrak{g}(D(x), y) &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(D(x)) \operatorname{ad}(y)) \\
&= \operatorname{tr}(D \operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(y) - \operatorname{ad}(x) D \operatorname{ad}(y)) \\
&= -\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x) D \operatorname{ad}(y) - \operatorname{ad}(y) \operatorname{ad}(x) D) \\
&= -\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(D(y))) \\
&= -B_\mathfrak{g}(x, D(y))
\end{aligned}$$

だから，$B_\mathfrak{g}$ は完全不変である．　□

系 3.23　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．

(1) (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとすると，ρ のトレース形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間は，$\mathfrak{g}$ のイデアルである．
(2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする．このとき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の特性イデアルとすると，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間は，$\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明　命題 3.22 と命題 3.20 から従う．　□

命題 3.24　$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a}$ の Killing 形式は，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式の $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ への制限に等しい．

証明　一般に，V を有限次元線型空間，W をその部分線型空間，u を V 上の線型変換であって W を安定にするものとし，u が誘導する W, V/W 上の線型変換をそれぞれ u', u'' と書くと，$\mathrm{tr}_V\, u = \mathrm{tr}_W\, u' + \mathrm{tr}_{V/W}\, u''$ が成り立つ．さらに，$u(V)\subseteq W$ ならば，$u''=0$ だから，$\mathrm{tr}_V\, u = \mathrm{tr}_W\, u'$ が成り立つ．そこで，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ の Killing 形式をそれぞれ $B_{\mathfrak{g}}$, $B_{\mathfrak{a}}$ と書くと，任意の x, $y\in\mathfrak{a}$ に対して，

$$B_{\mathfrak{a}}(x,y) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(x)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(y)) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x,y)$$

である．□

命題 3.25　$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とし，$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$-Lie 代数とする．

(1) (ρ,V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする．ρ の係数拡大 $\rho_{(\mathbb{K}')}$ のトレース形式は，ρ のトレース形式の $\mathbb{K}'$ への係数拡大に等しい．
(2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Killing 形式は，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式の $\mathbb{K}'$ への係数拡大に等しい．

証明　(1)　ρ, $\rho_{(\mathbb{K}')}$ のトレース形式を，それぞれ B_ρ, $B_{\rho_{(\mathbb{K}')}}$ と書く．任意の x, $y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} B_{\rho_{(\mathbb{K}')}}(x\otimes 1, y\otimes 1) &= \mathrm{tr}_{V_{(\mathbb{K}')}}(\rho_{(\mathbb{K}')}(x\otimes 1)\rho_{(\mathbb{K}')}(x\otimes 1)) \\ &= \mathrm{tr}_{V_{(\mathbb{K}')}}(\rho(x)_{(\mathbb{K}')}\rho(y)_{(\mathbb{K}')}) \\ &= \mathrm{tr}_V(\rho(x)\rho(y)) \\ &= B_\rho(x,y) \end{aligned}$$

だから，$B_{\rho_{(\mathbb{K}')}}$ は B_ρ の $\mathbb{K}'$ への係数拡大に等しい．
(2)　(1) の特別な場合である．□

3.6　Casimir 元

命題 3.26　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をその有限次元イデアルとし，$B\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ を不変な双線型形式であって $B|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ が非退化であるものとする．$(e_1,\dots,e_n)$ を $\mathfrak{a}$ の基底，$(e_1^*,\dots,e_n^*)$ を $\mathfrak{a}$ の基底であって $B(e_i,e_j^*)=\delta_{ij}$（δ_{ij} は Kronecker のデルタ）を満たすものとし，

$$c = \sum_{i=1}^n e_i e_i^* \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$$

と置く．この c は，包絡代数の中心 $\mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ の元であり，$\mathfrak{a}$ の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ のとり方によらない．

証明　$\phi\colon \mathrm{End}(\mathfrak{a})\to\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}^*$ を自然な線型同型，$\psi\colon\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}^*$ を B が定める線型同型 $y\mapsto B(-,y)$，$\iota\colon\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}\to\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ を包含線型写像，$\pi\colon\mathbf{T}(\mathfrak{g})\to\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を等化準同型とする．すると，$c\in\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ は，線型写像

$$\mathrm{End}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\otimes\psi^{-1}} \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{U}(\mathfrak{g})$$

による $\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\in\mathrm{End}(\mathfrak{a})$ の像にほかならないから，$\mathfrak{a}$ の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ のとり方によらない．さらに，$\mathfrak{a}$ の随伴表現から定まる $\mathrm{End}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ 上の表現と，$\mathfrak{g}$ の随伴表現の $\mathfrak{a}$ への制限から定まる $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上の

表現を考えると，容易に確かめられるように，上記の線型写像はすべて $\mathfrak{g}$-準同型である．これらの表現に関して，$\mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{a})$ は不変だから，$c \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ も不変である．これは，c が包絡代数の中心 $\mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ に属することを意味する．□

定義 3.27（Casimir 元） 命題 3.26 の状況で，$c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ を，B と $\mathfrak{a}$ に伴う **Casimir 元**（Casimir element）という．B が $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 ρ のトレース形式である場合には，これを，ρ と $\mathfrak{a}$ に伴う Casimir 元という．$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ である（したがって，$\mathfrak{g}$ は有限次元であり，B は非退化である）場合には，これを単に，B（あるいは ρ）に伴う Casimir 元という．

命題 3.28 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をその有限次元イデアルとし，(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現であってそのトレース形式 B_ρ が $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ 上で非退化であるものとする．ρ と $\mathfrak{a}$ に伴う Casimir 元を，$c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ と書く．

(1) $\rho(c)$ は，V の $\mathfrak{g}$-自己準同型である．
(2) $\mathrm{tr}\,\rho(c) = \dim \mathfrak{a}$ である．
(3) ρ は既約であり，$\dim \mathfrak{a}$ は係数体 $\mathbb{K}$ の標数の倍数ではないとする．このとき，$\rho(c)$ は，V の $\mathfrak{g}$-自己同型である．

証明 (1) $c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ だから，$\rho(c)$ は任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対する $\rho(x)$ と可換である．すなわち，$\rho(c)$ は V の $\mathfrak{g}$-自己準同型である．

(2) ρ のトレース形式を B_ρ と書く．$\mathfrak{a}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ を一つとり，$(e_1^*, \dots, e_n^*)$ を $\mathfrak{a}$ の基底であって $B(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$ を満たすものとする．すると，$c = \sum_{i=1}^n e_i e_i^*$ だから，

$$\mathrm{tr}\,\rho(c) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(\rho(e_i)\rho(e_i^*)) = \sum_{i=1}^n B_\rho(e_i, e_i^*) = \dim \mathfrak{a}$$

である．

(3) $\dim \mathfrak{a}$ が $\mathbb{K}$ の標数の倍数ではないことと (2) より，$\rho(c) \neq 0$ である．(1) より $\mathrm{Ker}\,\rho(c)$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間だから，ρ が既約であることと $\rho(c) \neq 0$ であることより，$\mathrm{Ker}\,\rho(c) = 0$ である．また，(1) より $\mathrm{Im}\,\rho(c)$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間だから，ρ が既約であることと $\rho(c) \neq 0$ であることより，$\mathrm{Im}\,\rho(c) = V$ である．よって，$\rho(c)$ は V の $\mathfrak{g}$-自己同型である．□

4 冪零 Lie 代数

4.1 冪零 Lie 代数

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするとき，$p \in \mathbb{N}$ に対する $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g})$ を，

$$\mathscr{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathscr{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})] \qquad (p \in \mathbb{N})$$

によって再帰的に定める．すなわち，$\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^p\mathfrak{g}$ とする．列 $(\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}))_{p\in\mathbb{N}}$ を，$\mathfrak{g}$ の**降中心列**（lower central sequence）という．

定義 4.1（冪零 Lie 代数） Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**冪零**（nilpotent）であるとは，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}) = 0$ となることをいう．

明らかに，可換 Lie 代数は冪零である．

命題 4.2　$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とする．

(1) $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零であることと，その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が冪零であることとは同値である．
(2) $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が冪零であることと，その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が冪零であることとは同値である．

証明　(1)　帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ だから，主張が成り立つ．

(2)　明らかである．　□

命題 4.3

(1) 冪零 Lie 代数の部分 Lie 代数は，冪零である．
(2) 冪零 Lie 代数の商 Lie 代数は，冪零である．
(3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が冪零であり，$\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ であるならば，$\mathfrak{g}$ は冪零である．
(4) $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ を Lie 代数の族とし，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{g}_i$ と置く．このとき，すべての $\mathfrak{g}_i$ が冪零であることと，$\mathfrak{g}$ が冪零であることとは同値である．

証明　(1)　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とする．帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{C}^p(\mathfrak{h}) \subseteq \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})$ だから，$\mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathfrak{h}$ も冪零である．

(2), (3)　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとし，等化準同型を $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と書く．帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $f(\mathscr{C}^p(\mathfrak{g})) = \mathscr{C}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから，$\mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も冪零である．一方で，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が冪零ならば，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $f(\mathscr{C}^p(\mathfrak{g})) = \mathscr{C}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$ となる．すなわち，$\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ となる．さらに，$\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ ならば，$\mathscr{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$ となるから，$\mathfrak{g}$ は冪零である．

(4)　帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{C}^p(\mathfrak{g}_i)$ だから，すべての $\mathfrak{g}_i$ が冪零であることと $\mathfrak{g}$ が冪零であることとは同値である．　□

命題 4.4　有限次元冪零 Lie 代数の Killing 形式は，0 である．

証明　$\mathfrak{g}$ を有限次元冪零 Lie 代数とし，その Killing 形式を $B_\mathfrak{g}$ と書く．任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して，$\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)$ は冪零だから，$B_\mathfrak{g}(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)) = 0$ である．　□

注意 4.5　命題 4.4 の逆は成り立たない．すなわち，有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が 0 であっても，$\mathfrak{g}$ が冪零であるとは限らない．たとえば，$\mathfrak{g} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$ 上の交代的な乗法 $(x, y) \mapsto [x, y]$ を

$$[e_1, e_2] = e_2, \qquad [e_1, e_3] = ie_3, \qquad [e_2, e_3] = 0$$

によって定めると，容易に確かめられるように，$\mathfrak{g}$ は Lie 代数をなす．基底 (e_1, e_2, e_3) に関する $\operatorname{ad}(e_1)$, $\operatorname{ad}(e_2)$, $\operatorname{ad}(e_3)$ の行列表示はそれぞれ

$$\operatorname{ad}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{ad}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{ad}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，これらから確かめられるように，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式は 0 である．一方で，任意の $p \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$ だから，$\mathfrak{g}$ は冪零ではない．

4.2 Engel の定理

補題 4.6 A を結合代数とし，$\mathfrak{g}$ を A（を交換子によって Lie 代数とみなしたもの）の部分 Lie 代数とする．$x \in \mathfrak{g}$ が（A の乗法に関して）冪零ならば，$\mathfrak{g}$ 上の線型変換 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は冪零である．

証明 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は $\mathrm{ad}_A(x)$ の制限だから，$\mathfrak{g} = A$ である場合に主張を示せば十分である．$x \in A$ として，A 上の線型変換 $y \mapsto xy$, $y \mapsto yx$ をそれぞれ L_x, R_x と書く．すると，L_x と R_x は可換だから，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{ad}_A(x)^n = (L_x - R_x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} L_x^{n-k} R_x^k$$

が成り立つ．ここで，$x^p = 0\,(p \in \mathbb{N})$ であるとすると，$L_x^p = R_x^p = 0$ だから，上式より $\mathrm{ad}_A(x)^{\max\{2p-1,0\}} = 0$ を得る．よって，x が冪零ならば，$\mathrm{ad}_A(x)$ は冪零である． □

定理 4.7 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし，(ρ, V) をその表現とする．次の条件は同値である．

(a) $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である．

(b) ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して，$\rho(\mathfrak{g})^p = 0$（すなわち，任意の $x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x_1) \cdots \rho(x_p) = 0$）となる．

証明 (b) $\Longrightarrow$ (a) 明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 必要ならば $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\rho$ を改めて $\mathfrak{g}$ と置き直すことで，ρ が忠実であると仮定しても一般性を失わない．このとき，ρ が条件 (a) を満たすならば，補題 4.6 より，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である．そこで，以下では，$\mathfrak{g}$ は有限次元 Lie 代数であって $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元が冪零であるものとし，この $\mathfrak{g}$ に対して主張を示す．

有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の任意の表現 (ρ, V) に対して (a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つとき，$\mathfrak{h}$ は条件 (E) を満たすということにする．$\mathfrak{g}$ は有限次元だから，$\mathfrak{g}$ の条件 (E) を満たす部分 Lie 代数の中で極大なもの $\mathfrak{h}$ がとれる．以下，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ であることを示す．

$\mathfrak{h}$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$-安定だから，随伴表現 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ から，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上の表現 σ が誘導される．仮定より，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零だから，$\sigma(\mathfrak{h})$ の任意の元も冪零である．したがって，$\mathfrak{h}$ が条件 (E) を満たすことより，$\sigma(\mathfrak{h})$ の十分大きい冪は 0 となる．ここで，$\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ であるとすると，$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \neq 0$ だから，$\sigma(\mathfrak{h})^p \neq 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ の中で最小のものがとれる．これに対して，$\overline{x} \in \sigma(\mathfrak{h})^p \setminus \{0\}$ がとれ，この $\overline{x}$ は $\sigma(\mathfrak{h})\overline{x} = 0$ を満たす．$\overline{x} = x + \mathfrak{h}$ と表すと，$x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ かつ $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ である．そこで，$\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}x$ と置くと，$\widetilde{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり，$\mathfrak{h}$ は $\widetilde{\mathfrak{h}}$ のイデアルである．

(τ, W) を $\widetilde{\mathfrak{h}}$ の表現とし，$\tau(\widetilde{\mathfrak{h}})$ の任意の元が冪零であるとする．このとき，$\mathfrak{h}$ が条件 (E) を満たすことより，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau(\mathfrak{h})^p = 0$ となる．また，$\tau(x)$ は冪零だから，ある $q \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau(x)^q = 0$ となる．この状況の下で，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $y_1, \dots, y_N \in \widetilde{\mathfrak{h}}$ に対して

$$\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) = 0 \tag{$*$}$$

が成り立つことを示したい．$\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}x$ だから，各 y_i は $\mathfrak{h}$ の元または x であると仮定してよい．$y_1, \dots, y_N$ の中に，$\mathfrak{h}$ に属するものが n 個，x であるものが $N - n$ 個あるとする．$[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ だから，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対

して，包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ において

$$\begin{aligned} x\mathfrak{h}^k &\subseteq \mathfrak{h}^k x + [x, \mathfrak{h}^k] \\ &\subseteq \mathfrak{h}^k x + \sum_{i=0}^{k-1} \mathfrak{h}^i [x, \mathfrak{h}] \mathfrak{h}^{k-1-i} \\ &\subseteq \mathfrak{h}^k x + \mathfrak{h}^k \end{aligned}$$

が成り立つ．これを繰り返し用いることで，

$$\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) \in \tau(\mathfrak{h})^n \tau(x)^{N-n} + \tau(\mathfrak{h})^n$$

を得る．$n \geq p$ ならば，上式より，$\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) = 0$ である．一方で，$N > p(q-1) + p - 1 = pq - 1$ ならば，$n < p$ であるとき，y_1, ..., y_N の中に x が q 個以上連続する部分が必ず存在するので，やはり $\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) = 0$ となる．よって，$N \geq pq$ とすれば，($*$) が常に成り立つ．これで，主張が示された． □

系 4.8　$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数，(ρ, V) をその表現であって $V \neq 0$ であるものとし，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零であるとする．このとき，$v \in V \setminus \{0\}$ であって $\rho(\mathfrak{g})v = 0$ を満たすものが存在する．

証明　仮定と定理 4.7 より，$\sigma(\mathfrak{g})$ の十分大きい冪は 0 となる．$V \neq 0$ だから，$\sigma(\mathfrak{g})^p \neq 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ の中で最小のものがとれる．これに対して，$v \in \sigma(\mathfrak{g})^p \setminus \{0\}$ をとると，この v は $\rho(\mathfrak{g})v = 0$ を満たす． □

系 4.9（Engel の定理）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，(ρ, V) をその有限次元表現とし，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零であるとする．このとき，V の基底を適当にとれば，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の対応する行列表示が狭義上三角行列となる．

証明　ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり（命題 3.14），各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く．すると，仮定より $\rho_i(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零だから，系 4.8 より $\overline{v_i} \in V_i/V_{i+1} \setminus \{0\}$ であって $\rho_i(\mathfrak{g})\overline{v_i} = 0$ を満たすものが存在する．ρ_i は既約だから，$V_i/V_{i+1} = \mathbb{K}\overline{v_i}$ が成り立つ．そこで，各 $\overline{v_i}$ を $v_i + V_{i+1}$ と表すと，$(v_{n-1}, \dots, v_0)$ は V の基底である．さらに，各 i に対して，$\rho(\mathfrak{g})v_i \in V_{i+1} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i+1}, \dots, v_{n-1}\}$ が成り立つ．すなわち，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の基底 $(v_{n-1}, \dots, v_0)$ に関する行列表示は，狭義上三角行列である． □

系 4.10　有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は冪零である．
(b) $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である．

証明　$\mathfrak{g}$ が冪零であるとは，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})^p = 0$ となるということだから，主張は定理 4.7 の特別な場合である． □

系 4.11　$\mathfrak{g}$ は有限次元 Lie 代数であり，その忠実な表現 (ρ, V) であって，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元が冪零であるものが存在するとする．このとき，$\mathfrak{g}$ は冪零である．

証明　仮定と補題 4.6 より，$\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である．よって，系 4.10 より，$\mathfrak{g}$ は冪零である． □

5　可解 Lie 代数

5.1　可解 Lie 代数

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするとき，$p \in \mathbb{N}$ に対する $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g})$ を，

$$\mathscr{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \qquad \mathscr{D}^{p+1}(\mathfrak{g}) = [\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}), \mathscr{D}^p(\mathfrak{g})] \qquad (p \in \mathbb{N})$$

によって再帰的に定める．列 $(\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}))_{p\in\mathbb{N}}$ を，$\mathfrak{g}$ の**導来列**（derived sequence）という．

定義 5.1（可解 Lie 代数）　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**可解**（solvable）であるとは，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}) = 0$ となることをいう．

帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})$ だから，冪零 Lie 代数は可解である．

命題 5.2　$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とする．

(1) $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可解であることと，その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が可解であることとは同値である．
(2) $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が可解であることと，その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が可解であることとは同値である．

証明　(1)　帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = \mathscr{D}^p(\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ だから，主張が成り立つ．

(2)　明らかである．　□

命題 5.3

(1) 可解 Lie 代数の部分 Lie 代数は，可解である．
(2) 可解 Lie 代数の商 Lie 代数は，可解である．
(3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．
(4) $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ を Lie 代数の族とし，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{g}_i$ と置く．このとき，すべての $\mathfrak{g}_i$ が可解であることと，$\mathfrak{g}$ が可解であることとは同値である．
(5) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ をそのイデアルの有限族とし，$\mathfrak{a} = \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ と置く．すべての $\mathfrak{a}_i$ が可解であることと，$\mathfrak{a}$ が可解であることとは同値である．

証明　(1)　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とする．帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{D}^p(\mathfrak{h}) \subseteq \mathscr{D}^p(\mathfrak{g})$ だから，$\mathfrak{g}$ が可解ならば $\mathfrak{h}$ も可解である．

(2), (3)　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとし，等化準同型を $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と書く．帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $f(\mathscr{D}^p(\mathfrak{g})) = \mathscr{D}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから，$\mathfrak{g}$ が可解ならば $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解である．一方で，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可解ならば，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $f(\mathscr{D}^p(\mathfrak{g})) = \mathscr{D}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$ となる．すなわち，$\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ となる．さらに，$\mathfrak{a}$ が可解ならば，ある $q \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathscr{D}^{p+q}(\mathfrak{g}) = \mathscr{D}^q(\mathscr{D}^p(\mathfrak{g})) \subseteq \mathscr{D}^q(\mathfrak{a}) = 0$ となるから，$\mathfrak{g}$ は冪零である．

(4)　帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{D}^p(\mathfrak{g}_i)$ だから，すべての $\mathfrak{g}_i$ が可解であることと $\mathfrak{g}$ が可解であることとは同値である．

(5)　$\mathfrak{a}$ が可解ならば，(1) より，すべての $\mathfrak{a}_i$ は可解である．その逆を示すためには，$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が可解であるとして，$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ も可解であることを示せばよい．$\mathfrak{a}$ から $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ への自然な準同型は全射だから，

(2) より $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ は可解である．このことと (3) より，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ は可解である．これで，主張が示された． □

系 5.4 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，その可解イデアルの中で最大のものが存在する．

証明 $\mathfrak{g}$ のすべての可解イデアルを和を $\mathfrak{r}$ と置く．$\mathfrak{g}$ は有限次元だから，$\mathfrak{g}$ の有限個の可解イデアル $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ が存在して，$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ が成り立つ．よって，命題 5.3 より $\mathfrak{r}$ は可解であり，これが $\mathfrak{g}$ の可解イデアルの中で最大のものとなる． □

5.2 根基

定義 5.5（根基） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の可解イデアルの中で最大のもの（系 5.4 より存在する）を，$\mathfrak{g}$ の**根基**（radical）といい，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ と書く．

命題 5.6 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を有限次元 Lie 代数とし，$f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を全射準同型とする．このとき，$f(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{h}$ である．

証明 $f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{h}$ の可解イデアルだから（命題 5.3 (2)），$\operatorname{rad}\mathfrak{h}$ に含まれる． □

注意 5.7 後に系 6.17 で示すように，標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数の間の全射準同型 $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ について，$f(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) = \operatorname{rad}\mathfrak{h}$ が成り立つ．

命題 5.8 $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ を有限次元 Lie 代数の有限族とし，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ と置く．このとき，$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ である．

証明 $\bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルだから（命題 5.3 (4)），$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ に含まれる．一方で，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i$ への射影による $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ の像は $\mathfrak{g}_i$ の可解イデアルだから（命題 5.3 (2)），$\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ に含まれる．任意の $i \in I$ に対してこれが成り立つから，$\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subseteq \bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ である．よって，$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ である． □

5.3 冪零根基

定義 5.9（冪零根基） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**冪零根基**（nilpotent radical）を，

$$\operatorname{nil}\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} \text{ の任意の有限次元既約表現 } \rho \text{ に対して } \rho(x) = 0\}$$

と定める．

有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 ρ の核 $\operatorname{Ker}\rho$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，冪零根基 $\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ はその全体の交叉だから，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

命題 5.10 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数，(ρ, V) をその有限次元表現とし，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ が生成する $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の両側イデアルを $\langle\operatorname{nil}\mathfrak{g}\rangle$ と書く．このとき，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して，$\rho(\langle\operatorname{nil}\mathfrak{g}\rangle)^p = 0$ が成り立つ．

証明 ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり（命題 3.14），各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く．すると，冪零根基の定義より，各 i に対して $\rho_i(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) = 0$ である．すなわち，

$$\rho(\operatorname{nil}\mathfrak{g})V_i \subseteq V_{i+1}$$

である．各 V_i は $\rho(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$-安定だから，上式は，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ を $\langle\operatorname{nil}\mathfrak{g}\rangle$ に置き換えても正しい．よって，$\rho(\langle\operatorname{nil}\mathfrak{g}\rangle)^n = 0$

が成り立つ． □

系 5.11 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする．

(1) 冪零根基 $\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ の冪零イデアルである．
(2) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) のトレース形式の退化空間は，冪零根基 $\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ を含む．

証明 (1) 冪零根基 $\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることは，すでに述べた．命題 5.10 より，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{nil}\mathfrak{g})^p = 0$ となり，特に $\operatorname{ad}_{\operatorname{nil}\mathfrak{g}}(\operatorname{nil}\mathfrak{g})^p = 0$ となるから，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ は冪零である．

(2) 命題 5.10 より，$\rho(\mathfrak{g})\rho(\operatorname{nil}\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である．よって，ρ のレース形式を B_ρ と書くと，$B_\rho(\mathfrak{g}, \operatorname{nil}\mathfrak{g}) = \operatorname{tr}(\rho(\mathfrak{g})\rho(\operatorname{nil}\mathfrak{g})) = 0$ である． □

命題 5.12 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を有限次元 Lie 代数とし，$f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を全射準同型とする．このとき，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{nil}\mathfrak{h}$ である．

証明 ρ を $\mathfrak{h}$ の有限次元既約表現とすると，$\rho \circ f$ は $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現だから，$\operatorname{nil}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Ker}(\rho \circ f)$ である．すなわち，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{Ker}\rho$ である．任意の ρ に対してこれが成り立つから，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{nil}\mathfrak{h}$ である． □

注意 5.13 後に系 6.25 で示すように，標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数の間の全射準同型 $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ について，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) = \operatorname{nil}\mathfrak{h}$ が成り立つ．

補題 5.14 $\mathfrak{g}$ は標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数であり，忠実な有限次元既約表現をもつとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の任意の可換イデアル $\mathfrak{a}$ について，$\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ である．

証明 一般性を失わず，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(V)$（V は線型空間）の部分 Lie 代数であり，その自然表現は既約であるとする．$\mathfrak{g}$ の可換イデアル $\mathfrak{a}$ を任意にとり，$\mathfrak{a}$ が生成する $\operatorname{End}(V)$ の部分単位的代数を A と書く．$\mathfrak{a}$ は可換だから，A も可換である．

準備として，$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{b}$ であって $\mathfrak{a}$ に含まれるものについて，$\operatorname{tr}(\mathfrak{b}A) = 0$ ならば $\mathfrak{b} = 0$ であることを示す．$\operatorname{tr}(\mathfrak{b}A) = 0$ であるとすると，任意の $x \in \mathfrak{b}$ と $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $\operatorname{tr} x^n = \operatorname{tr}(xx^{n-1}) = 0$ となるから，$\mathfrak{b}$ の任意の元は冪零である（ここで，$\mathbb{K}$ の標数が 0 であることを用いた）．そこで，

$$W = \{v \in V \mid \mathfrak{b}v = 0\}$$

と置くと，系 4.8 より $W \neq 0$ である．さらに，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることから容易に確かめられるように，W は $\mathfrak{g}$-安定である．したがって，$\mathfrak{g}$ の自然表現が既約であることより，$W = V$ である．すなわち，$\mathfrak{b} = 0$ である．

補題の主張を示す．まず，A が可換であることより

$$\operatorname{tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]A) = \operatorname{tr}(\mathfrak{g}[\mathfrak{a}, A]) = 0$$

だから，前段の結果より，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$ である．したがって，$[\mathfrak{g}, A] = 0$ である．次に，この結果より

$$\operatorname{tr}((\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])A) \subseteq \operatorname{tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]A) = \operatorname{tr}(\mathfrak{g}[\mathfrak{g}, A]) = 0$$

だから，前段の結果より，$\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ である．これで，主張が示された． □

定理 5.15 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，$\operatorname{nil}\mathfrak{g} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が成り立つ．

証明 $\underline{\operatorname{nil}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ $\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零イデアルだから（系 5.11 (1)），$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ に含まれる．また，λ を $\mathfrak{g}$ 上の線型形式であって $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上で消えるものとすると，$\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{K} \cong \mathfrak{gl}(1, \mathbb{K})$ は $\mathfrak{g}$ の 1 次元（したがって，既

約）表現である．したがって，$\operatorname{nil}\mathfrak{g} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\mathfrak{g}^*,\ \lambda|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}=0} \operatorname{Ker}\lambda = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ である．よって，$\operatorname{nil}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ が成り立つ．

$\underline{\operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{nil}\mathfrak{g}}$　$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現 (ρ, V) に対して，$\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$ であることを示せばよい．$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は可解だから，$\rho(\mathscr{D}^{p+1}(\operatorname{rad}\mathfrak{g})) = 0$ を満たす最小の $p \in \mathbb{N}$ がとれる．$\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$，$\mathfrak{a}' = \rho(\mathscr{D}^p(\operatorname{rad}\mathfrak{g}))$ と置くと，$\mathfrak{g}'$ の自然表現は既約であり，$\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{g}'$ のイデアルである．また，$[\mathfrak{a}',\mathfrak{a}'] = \rho([\mathscr{D}^p(\operatorname{rad}\mathfrak{g}), \mathscr{D}^p(\operatorname{rad}\mathfrak{g})]) = \rho(\mathscr{D}^{p+1}(\operatorname{rad}\mathfrak{g})) = 0$ だから，$\mathfrak{a}'$ は可換である．したがって，補題 5.14 より

$$\rho(\mathscr{D}^p(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \subseteq \mathfrak{a}' \cap [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'] = 0$$

が成り立つ．ここで，$p \geq 1$ であるとすると，$\mathscr{D}^p(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ だから，上式より $\rho(\mathscr{D}^p(\operatorname{rad}\mathfrak{g})) = 0$ となるが，これは p の最小性に反する．よって，$p = 0$ であり，これを上式に代入すると

$$\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$$

を得る．これで，主張が示された．□

系 5.16　$(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数の有限族とし，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ と置く．このとき，$\operatorname{nil}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\operatorname{nil}\mathfrak{g}_i$ である．

証明　$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$（命題 5.8）かつ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \bigoplus_{i\in I}[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]$ だから，定理 5.15 より $\operatorname{nil}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I}\operatorname{nil}\mathfrak{g}_i$ である．□

系 5.17　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は可解である．
(b) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は冪零である．
(c) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は可解である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\operatorname{nil}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ だから（定理 5.15），$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は冪零である（系 5.11 (1)）．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は可換だから，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ も可解である（命題 5.3 (3)）．□

5.4 Lie の定理

定理 5.18　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元可解 Lie 代数とし，(ρ, V) をその有限次元既約表現とする．

(1) $\rho(\mathfrak{g})$ は可換である．
(2) $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元が三角化可能ならば[*2]，V は 1 次元である．

証明　(1)　$\mathfrak{g}$ が可解であることより $\operatorname{nil}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ だから（定理 5.15），$[\rho(\mathfrak{g}),\rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \rho(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) = 0$ である．

(2)　$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元が三角化可能であるとすると，(1) と合わせて，$\rho(\mathfrak{g})$ は同時三角化可能である．特に，$\rho(\mathfrak{g})$ の同時固有ベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ がとれる．ところが，ρ は既約だから，$V = \mathbb{K}v$ が成り立つ．□

[*2] $\mathbb{K}$ が代数閉ならば，この仮定は常に満たされる．

系 5.19（Lie の定理） $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の可解 Lie 代数，(ρ, V) をその有限次元表現とし，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は三角化可能であるとする．このとき，V の基底を適当にとれば，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の対応する行列表示が上三角行列となる．

証明 ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり（命題 3.14），各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く．すると，仮定より $\rho_i(\mathfrak{g})$ の任意の元は三角化可能だから，定理 5.18 より V_i/V_{i+1} は 1 次元である．そこで，各 i に対して $v_i \in V_i \setminus V_{i+1}$ をとると，$(v_{n-1}, \dots, v_0)$ は V の基底である．さらに，各 i に対して，$\rho(\mathfrak{g})v_i \in V_i = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_i, \dots, v_{n-1}\}$ が成り立つ．すなわち，$\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の基底 $(v_{n-1}, \dots, v_0)$ に関する行列表示は，上三角行列である． □

5.5 可解性に関する Cartan の判定法

命題 5.20 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，(ρ, V) をその有限次元表現とする．ρ のトレース形式を B_ρ と書くと，$B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \operatorname{rad}\mathfrak{g}) = 0$ が成り立つ．

証明 B_ρ は不変であり（命題 3.22 (1)），$[\mathfrak{g}, \operatorname{rad}\mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \operatorname{nil}\mathfrak{g}$ であり（定理 5.15），$\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ は B_ρ の退化空間に含まれる（系 5.11 (2)）．よって，

$$B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \operatorname{rad}\mathfrak{g}) = B_\rho(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}\mathfrak{g}]) \subseteq B_\rho(\mathfrak{g}, \operatorname{nil}\mathfrak{g}) = 0$$

である． □

補題 5.21 V を完全体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．x を V 上の線型変換とし，その Jordan 分解を $(x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}})$ と書く．このとき，$\mathfrak{gl}(V)$ 上の線型変換 $\operatorname{ad}(x)$ の Jordan 分解は，$(\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}), \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}}))$ である．特に，$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}})$ と $\operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}})$ は，ともに $\operatorname{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せる．

証明 $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$ だから $\operatorname{ad}(x) = \operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}) + \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}})$ であり，$[x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = 0$ だから $[\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}), \operatorname{ad}(x_{\mathrm{n}})] = 0$ である．x_{n} は冪零だから，補題 4.6 より，$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}})$ も冪零である．x_{s} は半単純だから，$\mathbb{K}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{K}}$ を考えると，係数拡大 $(x_{\mathrm{s}})_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は対角化可能である．そこで，$(x_{\mathrm{s}})_{(\overline{\mathbb{K}})}$ を対角化する $V_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ をとり，各 i に対して $(x_{\mathrm{s}})_{(\overline{\mathbb{K}})}(e_i) = \lambda_i e_i$（$\lambda_i \in \overline{\mathbb{K}}$）と書く．この基底に対応する $\mathfrak{gl}(V_{(\overline{\mathbb{K}})})$ の基底を $(E_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ と書くと，各 i, j に対して $(\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}))_{(\overline{\mathbb{K}})} E_{ij} = \operatorname{ad}((x_{\mathrm{s}})_{(\overline{\mathbb{K}})}) E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$ だから，$\operatorname{ad}((x_{\mathrm{s}})_{(\overline{\mathbb{K}})})$ も対角化可能である．よって，$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}})$ は半単純である．

後半の主張は，Jordan 分解に関する一般論である． □

補題 5.22 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間，M, M' を V の部分線型空間であって $M' \subseteq M$ を満たすものとし，

$$T = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, M] \subseteq M'\}$$

と置く．このとき，$x \in T$ が $\operatorname{tr}(Tx) = 0$ を満たすならば，x は冪零である．

証明 必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで，一般性を失わず，$\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する．$x \in T$ が $\operatorname{tr}(Tx) = 0$ を満たすとする．x の Jordan 分解を $(x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}})$ と書き，x_{s} を対角化する V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ をとり，各 i に対して $x_{\mathrm{s}}(e_i) = \lambda_i e_i$（$\lambda_i \in \mathbb{K}$）と書く．$x$ が冪零であることを示すためには，すべての λ_i が 0 であることをいえばよい．そのために，

$$E = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{K}$$

と置き，$\mathbb{Q}$-線型空間 E の双対空間 E^* が 0 であることを示す．

$f \in E^*$ を任意にとり，これに対して $y \in \mathfrak{gl}(V)$ を，

$$y(e_i) = f(\lambda_i)e_i \qquad (i \in \{1, \dots, n\})$$

によって定める．V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に対応する $\mathfrak{gl}(V)$ の基底を E_{ij} と書くと，各 i, j に対して，

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}})E_{ij} &= (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}, \\ \operatorname{ad}(y)E_{ij} &= f(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式 P であって，任意の i, j に対して $P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$ を満たすもの（$\lambda_i - \lambda_j = \lambda_{i'} - \lambda_{j'}$ ならば $f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_{i'} - \lambda_{j'})$ であり，$\lambda_i - \lambda_j = 0$ ならば $f(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ だから，このような P が存在する）をとると，上式より，

$$\operatorname{ad}(y) = P(\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}}))$$

が成り立つ．一方で，補題 5.21 より，$\operatorname{ad}(x_{\mathrm{s}})$ は，$\operatorname{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せる．これら二つより，$\operatorname{ad}(y)$ は，$\operatorname{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せる．

さて，$x \in T$ より $\operatorname{ad}(x)M \subseteq M'$ であり，前段で示したように $\operatorname{ad}(y)$ は $\operatorname{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せるから，$\operatorname{ad}(y)M \subseteq M'$ も成り立つ．すなわち，$y \in T$ である．したがって，仮定より，

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\lambda_i = \operatorname{tr}(yx) = 0$$

である．この等式の両辺に f を施せば，

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)^2 = 0$$

を得る．各 $f(\lambda_i)$ は有理数だから，上式より，$f(\lambda_i)$ はすべて 0 である．すなわち，$f = 0$ である．これで，主張が示された． □

定理 5.23（可解性に関する Cartan の判定法 I） $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，(ρ, V) をその忠実な有限次元表現とする．このとき，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は可解である．
(b) ρ のトレース形式を B_ρ と書くと，$B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ だから，命題 5.20 より $B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \operatorname{rad}\mathfrak{g}) = 0$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 一般性を失わず，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であり，ρ は $\mathfrak{g}$ の自然表現であると仮定する．$B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$ であるとする．このとき，

$$T = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

と置くと，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq T$ であり，

$$\operatorname{tr}(T[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \operatorname{tr}([T, \mathfrak{g}]\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\mathfrak{g}) = B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$$

が成り立つ．したがって，補題 5.22 より $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の元はすべて（V 上の線型変換として）冪零だから，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は（Lie 代数として）冪零である（系 4.11）．よって，$\mathfrak{g}$ は可解である（系 5.17）． □

定理 5.24 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，根基 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の直交空間に等しい．

証明 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書き，これに関する $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の直交空間を $\mathfrak{r}$ と置く．系 3.23 (2) より $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，命題 5.20 より $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{r}$ である．あとは，$\mathfrak{r}$ が可解であることを示せばよい．$\mathfrak{r}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}}$ のトレース形式は $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}}$ であり，$\mathfrak{r}$ の定義よりこのトレース形式に関して $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ と $\mathfrak{r}$ は直交する．したがって，可解性に関する Cartan の判定法（定理 5.23）より，$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ は可解である．さらに，$\operatorname{Ker}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}} = \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{r} = \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{r}$ は可換である．よって，$\mathfrak{r}$ は可解である（命題 5.3 (3)）． □

系 5.25（可解性に関する Cartan の判定法 II） 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は可解である．
(b) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書くと，$B_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\mathfrak{g}) = 0$ が成り立つ．

証明 定理 5.24 より，

$$\mathfrak{g}\text{ が可解} \iff \operatorname{rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \iff B_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\mathfrak{g}) = 0$$

である． □

系 5.26 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の根基 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ の特性イデアルである．

証明 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は $\mathfrak{g}$ の特性イデアルだから（命題 1.13 (2)），その Killing 形式に関する直交空間である $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである（定理 5.24，系 3.23 (2)）． □

系 5.27 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．このとき，$\operatorname{rad}\mathfrak{a} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ が成り立つ．

証明 $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ の可解イデアルだから（命題 5.3 (1)），$\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ に含まれる．一方で，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，$\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ の特性イデアルだから（系 5.26），$\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである（命題 1.12 (1)）．したがって，$\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルだから，$\operatorname{rad}\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ である．以上より，$\operatorname{rad}\mathfrak{a} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ が成り立つ． □

5.6 根基・冪零根基と係数体の変更

命題 5.28 $\mathbb{K}$ を可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

(1) $\mathbb{K}$ の標数が 0 であるとする．このとき，有限次元 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\operatorname{rad}\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ である．
(2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする．このとき，有限次元 $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ について，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = (\operatorname{rad}\mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]}$ である．

証明 (1) $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Killing 形式は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の係数拡大だから（命題 3.25 (2)），定理 5.24 より $\operatorname{rad}\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\operatorname{rad}\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ である．

(2) $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ のイデアルとする．すると，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}'$ のイデアルである．また，帰納的に確かめられるように，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathscr{D}^p(\operatorname{span}_{\mathbb{K}'}\mathfrak{a}) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}'}\mathscr{D}^p(\mathfrak{a})$ だから，$\mathfrak{a}$ が可解ならば $\operatorname{span}_{\mathbb{K}'}\mathfrak{a}$ も可解

である．このことと根基の最大性より，$\mathrm{span}_{\mathbb{K}'} \operatorname{rad} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = \operatorname{rad} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ となるから，$\mathfrak{g}'$ のイデアル $\mathfrak{r}'$ が存在して $\operatorname{rad} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = \mathfrak{r}'_{[\mathbb{K}]}$ が成り立つ．$\mathfrak{r}'$ が可解であることと $\mathfrak{r}'_{[\mathbb{K}]}$ が可解であることとは同値だから（命題 5.2），$\mathfrak{r}' = \operatorname{rad} \mathfrak{g}'$ であり，$\operatorname{rad} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = (\operatorname{rad} \mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]}$ が成り立つ． □

命題 5.29 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

(1) 有限次元 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，$\operatorname{nil} \mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\operatorname{nil} \mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ である．
(2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする．このとき, 有限次元 $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ について, $\operatorname{nil} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = (\operatorname{nil} \mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]}$ である．

証明 (1) 定理 5.15 と命題 5.28 (1) より，

$$\operatorname{nil} \mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = \operatorname{rad} \mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} \cap [\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}, \mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}] = (\operatorname{rad} \mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{(\mathbb{K}')} = (\operatorname{nil} \mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$$

である．

(2) 定理 5.15 と命題 5.28 (2) より，

$$\operatorname{nil} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = \operatorname{rad} \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} \cap [\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}, \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}] = (\operatorname{rad} \mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]} \cap [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']_{[\mathbb{K}]} = (\operatorname{nil} \mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]}$$

である． □

6 半単純 Lie 代数

6.1 単純 Lie 代数と半単純 Lie 代数

定義 6.1（単純 Lie 代数） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**単純**（simple）であるとは，$\mathfrak{g}$ が可換でなく，$\mathfrak{g}$ が 0 と $\mathfrak{g}$ 以外のイデアルをもたないことをいう．

定義 6.2（半単純 Lie 代数） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**半単純**（semisimple）であるとは，$\mathfrak{g}$ が 0 以外の可解イデアルをもたない（あるいは同値だが，$\operatorname{rad} \mathfrak{g} = 0$ である）ことをいう．

命題 6.3 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}$ が 0 以外の可換イデアルをもたないことである．

証明 $\mathfrak{g}$ が可解イデアル $\mathfrak{r} \neq 0$ をもつとする．$\mathscr{D}^p(\mathfrak{r}) \neq 0$ を満たす最大の $p \in \mathbb{N}$ をとると，$\mathscr{D}^p(\mathfrak{r})$ は $\mathfrak{g}$ の 0 でないイデアルであり，$[\mathscr{D}^p(\mathfrak{r}), \mathscr{D}^p(\mathfrak{r})] = \mathscr{D}^{p+1}(\mathfrak{r}) = 0$ だから $\mathscr{D}^p(\mathfrak{r})$ は可換である．よって，$\mathfrak{g}$ が半単純である（すなわち，0 以外の可解イデアルをもたない）ことと，0 以外の可換イデアルをもたないこととは同値である． □

系 6.4 単純 Lie 代数は，半単純である．

証明 命題 6.3 から明らかである． □

命題 6.5 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ であり，$\mathfrak{g}$ の随伴表現は忠実である．

証明 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の可換イデアルだから，0 である．$\mathfrak{g}$ の随伴表現の核は $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に等しいから，これは，$\mathfrak{g}$ の随伴表現が忠実であることを意味する． □

命題 6.6　有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の根基 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ であって $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が半単純となるものの中で最小のものである．

証明　$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとし，等化準同型を $f\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と書く．$f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})\subseteq\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから（命題 5.6），$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可解ならば $f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})=0$ であり，これは $\operatorname{rad}\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{a}$ を意味する．一方で，準同型定理より $f^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}))\cong\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから，$\mathfrak{a}$ が可解ならば $f^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}))$ も可解であり（命題 5.3 (3)），$f^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}))\subseteq\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ となる．特に，$\mathfrak{a}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ と置けば，$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g})=0$ を得る．すなわち，$\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は半単純である．□

注意 6.7　系 6.16 で示すように，標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ について，

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}\text{ が半単純} \iff \operatorname{rad}\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{a}$$

が成り立つ．

命題 6.8　$(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ を有限次元 Lie 代数の有限族とし，$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ と置く．すべての $\mathfrak{g}_i$ が半単純であることと，$\mathfrak{g}$ が半単純であることとは同値である．

証明　$\operatorname{rad}\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in I}\operatorname{rad}\mathfrak{g}_i$ であること（命題 5.8）から従う．□

命題 6.9　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．$\mathfrak{g}$ が半単純ならば，$\mathfrak{a}$ も半単純である．

証明　$\operatorname{rad}\mathfrak{a}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{a}$ であること（系 5.27）から従う．□

6.2　半単純性に関する Cartan の判定法

定理 6.10（半単純性に関する Cartan の判定法）　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(b) $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$ であり，$\mathfrak{g}$ の任意の忠実な有限次元表現のトレース形式は非退化である．
(c) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式は非退化である．

さらに，これらの条件の下で，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ が成り立つ．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)，<u>最後の主張</u>　$\mathfrak{g}$ が半単純であるとする．まず，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$ であることは，命題 6.5 ですでに示した．次に，ρ を $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現とし，そのトレース形式 B_ρ に関する $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の直交空間を $\mathfrak{a}$ と置く．すると，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである（系 3.23 (1)）．さらに，$B_\rho([\mathfrak{a},\mathfrak{a}],\mathfrak{a})\subseteq B_\rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\mathfrak{a})=0$ だから，可解性に関する Cartan の判定法（定理 5.23）より，$\mathfrak{a}$ は可解である．したがって，$\mathfrak{g}$ が半単純であることより，$\mathfrak{a}=0$ を得る．よって，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ が成り立ち，B_ρ は非退化である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$ ならば $\mathfrak{g}$ の随伴表現は忠実だから，主張は明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_\mathfrak{g}$ と書く．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の可換イデアルとすると，$\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})=0$ だから，$B_\mathfrak{g}(\mathfrak{a},\mathfrak{g})=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}))=0$ である．よって，$B_\mathfrak{g}$ が非退化ならば，$\mathfrak{g}$ は 0 以外の可換イデアルをもたず，これは $\mathfrak{g}$ が半単純であることを意味する（命題 6.3）．□

注意 6.11　定理 6.10 の条件は，条件 (b) から「$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$」を除いて得られる次の条件とも同値である．

(b′) $\mathfrak{g}$ の任意の忠実な有限次元表現のトレース形式は非退化である．

このことは，Ado の定理を用いて証明できる．詳しくは，Mathematics Stack Exchange [4] を参照のこと．

6.3 半単純 Lie 代数の分解

命題 6.12 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をその半単純イデアルとし，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間を $\mathfrak{a}^{\perp}$ と書く．このとき，$\mathfrak{a}^{\perp}$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，Lie 代数として $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ が成り立つ．

証明 系 3.23 (2) より $\mathfrak{a}^{\perp}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，双線型形式の一般論より $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^{\perp} \geq \dim \mathfrak{g}$ である．また，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ の Killing 形式をそれぞれ $B_{\mathfrak{g}}$, $B_{\mathfrak{a}}$ と書くと，$B_{\mathfrak{a}}$ は $B_{\mathfrak{g}}$ の制限だから（命題 3.24），

$$B_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}, \mathfrak{a}) = B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}, \mathfrak{a}) \subseteq B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\perp}, \mathfrak{a}) = 0$$

が成り立つ．半単純性に関する Cartan の判定法（定理 6.10）より $B_{\mathfrak{a}}$ は非退化だから，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ である．以上より，$\mathfrak{g}$ は線型空間として $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}^{\perp}$ に直和分解され，これらは $\mathfrak{g}$ のイデアルだから，これは Lie 代数としての直和分解でもある． □

定理 6.13 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(b) $\mathfrak{g}$ は，有限個の単純 Lie 代数の直和 Lie 代数として書ける．

さらに，$\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の有限族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の直和 Lie 代数であるとき，$\mathfrak{g}$ のイデアルは，$(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の部分族の直和で尽くされる．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 命題 6.12 より，$\mathfrak{g}$ の随伴表現は完全可約だから，既約分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ がとれる（命題 3.17）．このとき，各 $\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}$ の 0 でないイデアルの中で極小なものであり，Lie 代数として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．各 $\mathfrak{g}_i$ が単純であることを示す．$\mathfrak{g}$ は 0 以外の可換イデアルをもたないから，$\mathfrak{g}_i$ は可換ではない．また，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_i$ のイデアルとすると，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルでもあるから，$\mathfrak{g}_i$ の極小性より，$\mathfrak{a}$ は 0 または $\mathfrak{g}_i$ である．よって，$\mathfrak{g}_i$ は単純である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 単純 Lie 代数は半単純であり（系 6.4），有限個の半単純 Lie 代数の直和は半単純だから（命題 6.8），主張が成り立つ．

<u>最後の主張</u> $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の有限族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の直和 Lie 代数であるとして，$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ を任意にとる．各 $i \in I$ に対して，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ は単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_i$ のイデアルだから，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ または 0 でらう．前者の場合，$\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}$ である．後者の場合，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ であり，これは，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i$ への射影による $\mathfrak{a}$ の像が $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}_i)$ に含まれることを意味する．ところが，$\mathfrak{g}_i$ は単純だから $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}_i) = 0$ であり，このとき，$\mathfrak{a} \subseteq \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} \mathfrak{g}_j$ となる．以上より，$J = \{i \in I \mid \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i\}$ と置けば，$\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ． □

系 6.14 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．このとき，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(b) $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ はともに半単純である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\mathfrak{g}$ が半単純であるとする．このとき，定理 6.13 より，単純 Lie 代数の有限族 $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ と $J \subseteq I$ を用いて, Lie 代数として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i\in J} \mathfrak{g}_i$ と書けているとしてよい．このとき, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i\in J} \mathfrak{g}_i$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \bigoplus_{i\in I\setminus J} \mathfrak{g}_i$ は，有限個の単純 Lie 代数の直和として書けているから，半単純である（系 6.4，命題 6.8）．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ がともに半単純であるとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間を $\mathfrak{a}^\perp$ と書くと，Lie 代数として $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ が成り立つ（命題 6.12）．よって，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は半単純である（命題 6.8）． □

注意 6.15 半単純 Lie 代数の部分 Lie 代数は，半単純であるとは限らない．たとえば，1 次元 Lie 代数は可換だから，半単純ではない．

系 6.16 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．このとき，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は半単純である．
(b) $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$ である．

証明 命題 6.6 で示したように，根基 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ であって $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が半単純となるものの中で最小のものである．また，系 6.14 より，標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数の商は，また半単純である．これらのことから，主張が従う． □

系 6.17 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を全射準同型とする．このとき，$f(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) = \operatorname{rad}\mathfrak{h}$ である．

証明 まず，$f(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{h}$ であることは，命題 5.6 ですでに示した．次に，命題 5.6 より $\mathfrak{g}/rad\mathfrak{g}$ は半単純だから，その商 Lie 代数に同型な $\mathfrak{h}/f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ も半単純であり（系 6.14），したがって，ふたたび命題 5.6 より $\operatorname{rad}\mathfrak{h} \subseteq f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ である．よって，$f(\operatorname{rad}\mathfrak{g}) = \operatorname{rad}\mathfrak{h}$ が成り立つ． □

命題 6.18 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現は，$\mathfrak{g}$ から $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ への同型を与える．特に，$\mathfrak{g}$ 上の導分は，すべて内部導分である．

証明 $\mathfrak{g}$ の随伴表現が忠実であることは，命題 6.5 ですでに示した．あとは，$\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ であることを示せばよい．$\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ は $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ の半単純イデアルだから（命題 1.9 (1)），$\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ の Killing 形式に関する $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ の直交空間を $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ と書くと，Lie 代数として $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ が成立する（命題 6.12）．$D \in \operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ とすると，命題 1.9 (1) より

$$\operatorname{ad}(D(\mathfrak{g})) = [D, \operatorname{ad}(\mathfrak{g})] \subseteq [\operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp, \operatorname{ad}(\mathfrak{g})] = 0$$

であり，すでに述べたように ad は忠実だから，$D = 0$ である．よって，$\operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp = 0$ であり，上記の直和分解と合わせて，$\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ を得る． □

6.4 Weyl の完全可約性定理

補題 6.19 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現は完全可約である．

(b) (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現，W を V の余次元 1 の部分線型空間とし，これらが $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ を満たすとすると，W は V において $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間をもつ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) (b) が成り立つとする．$\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (σ, M) を任意にとり，$N \neq 0$ を M の $\sigma(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間として，N の M における $\sigma(\mathfrak{g})$-安定な補空間が存在することを示す．$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{End}(M)$ 上の表現 $\rho = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(M)} \circ \sigma$ を考え，$\mathrm{End}(M)$ の部分線型空間 V, W を

$$
\begin{aligned}
V &= \{u \in \mathrm{End}(M) \mid u(M) \subseteq N \text{ かつ } u|_N \text{ はスカラー倍}\}, \\
W &= \{u \in \mathrm{End}(M) \mid u(M) \subseteq N \text{ かつ } u|_N = 0\}
\end{aligned}
$$

と定める．V は $\rho(\mathfrak{g})$-安定であり，W は V の余次元 1 の部分線型空間であり，$\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ が満たされるから，仮定より，W は V において $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間 $\mathbb{K}u$ をもつ．$u \in V \setminus W$ であることより $u|_N$ は 0 でないスカラー倍だから，必要ならば u を適当にスカラー倍することで，$u|_N = \mathrm{id}_N$ であるとしてよい．また，$N = u(N) \subseteq u(M)$ であり，一方で $u \in V$ より $u(M) \subseteq N$ だから，$u(M) = N$ である．したがって，u は N の上への射影だから，$\mathrm{Ker}\, u$ は N の M における補空間である．さらに，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$\rho(x)u \in \rho(x)V \subseteq W$ かつ $\rho(x)\mathbb{K}u \subseteq \mathbb{K}u$ であることより $\rho(x)u = 0$ だから，$\sigma(x) \circ u = u \circ \sigma(x)$ が成り立つ．したがって，$\mathrm{Ker}\, u$ は $\sigma(\mathfrak{g})$-安定である．これで，主張が示された．□

定理 6.20（Weyl の完全可約性定理） 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，その任意の有限次元表現は，完全可約である．

証明 補題 6.19 より，(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現，W を V の余次元 1 の部分線型空間とし，これらが $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ を満たすとして，W が V において $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間をもつことを示せばよい．以下，ρ の W 上の部分表現を，ρ' と書く．

$\rho' = 0$ である場合，任意の x, $y \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)\rho(y)V \subseteq \rho'(x)W = 0$ より $\rho(x)\rho(y) = 0$ だから，$\rho(\mathfrak{g}) = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ である（定理 6.10）．よって，ρ は明らかに完全可約である．以下，$\rho' \neq 0$ である場合を考える．

まず，ρ' が既約である場合を考える．ρ' のトレース形式を $B_{\rho'}$ と書く．$\mathrm{Ker}\, \rho'$ は $\mathfrak{g}$ の半単純イデアルだから（系 6.14），$\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathrm{Ker}\, \rho'$ の直交空間を $\mathfrak{a}$ と置くと，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ における $\mathrm{Ker}\, \rho'$ の補イデアルとなる（命題 6.12）．そこで，$\mathfrak{a}$ の W 上の表現 $\rho'|_{\mathfrak{a}}$ を考えると，これは忠実だから，そのトレース形式 $B_{\rho'}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$ は非退化である（定理 6.10）．したがって，Casimir 元 $c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ が定まり，$\rho'(c) = \rho(c)|_W$ は W の $\mathfrak{g}$-自己同型となる（命題 3.28 (3)．$\rho' \neq 0$ より $\mathfrak{a} \neq 0$ であり，係数体 $\mathbb{K}$ の標数が 0 であることに注意する）．さらに，仮定 $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ より，$\rho(c)V \subseteq W$ が成り立つ．以上より，$\mathrm{Ker}\, \rho(c)$ は W の V における $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間である．

次に，一般の場合を，V の次元に関する帰納法で示す．$\dim V = 1$ ならば $W = 0$ であり，主張は明らかである．$\dim V \geq 2$ であるとし，次元がより小さい場合には主張が正しいとする．このとき，$W \neq 0$ だから，W の 0 でない $\rho(\mathfrak{g})$-安定な部分線型空間の中で極小なもの M がとれる．ρ の V/M 上の商表現を $\overline{\rho}$ と書くと，W/M は V/M の余次元 1 の部分線型空間であり，これらは $\overline{\rho}(\mathfrak{g})(W/M) \subseteq V/M$ を満たすから，帰納法の仮定より，W/M の V/M における $\overline{\rho}(\mathfrak{g})$-安定な補空間 L/M がとれる．ここで，L は V の $\mathfrak{g}$-安定な部分線型空間であり，M を余次元 1 の部分線型空間として含み，$L \cap W = M$ を満たす．$\rho(\mathfrak{g})L \subseteq L \cap W = M$ であり，

M の極小性より ρ の M 上の部分表現は既約だから，前段の結果より，M は L における $\rho(\mathfrak{g})$-安定な補空間をもつ．この補空間は，W の V における補空間でもある．これで，帰納法が完成した． $\square$

注意 6.21　Weyl の完全可約性定理（定理 6.20）の逆として，有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現が完全可約ならば，$\mathfrak{g}$ は半単純である．このことを示そう．

主張の仮定の下で，$\mathfrak{g}$ の任意の可換イデアル $\mathfrak{a}$ が 0 であることを示せばよい（命題 6.3）．$\mathfrak{g}$ の随伴表現が完全可約であることより，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{g}$ における補イデアル $\mathfrak{b}$ がとれる．この $\mathfrak{b}$ について，$\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}$ が成り立つ．そこで，$\mathfrak{a} \neq 0$ であると仮定すると，$\mathfrak{a}$ は 1 次元の商 Lie 代数をもつから，$\mathfrak{g}$ についても同様である．1 次元 Lie 代数は完全可約でない 2 次元表現

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をもつから，$\mathfrak{g}$ についても同様となるが，これは仮定に反する．よって，背理法より，$\mathfrak{a} = 0$ である．これで，主張が示された．

6.5　簡約 Lie 代数

定義 6.22（簡約 Lie 代数）　有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**簡約**（reductive）であるとは，その随伴表現が完全可約であることをいう．

定理 6.23　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は簡約である．
(b) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は半単純である．
(c) $\mathfrak{g}$ は，半単純 Lie 代数と可換 Lie 代数の直和 Lie 代数として書ける．
(d) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現であって，非退化なトレース形式をもつものが存在する．
(e) $\mathfrak{g}$ は忠実な有限次元完全可約表現をもつ．
(f) $\operatorname{nil} \mathfrak{g} = 0$ である．
(g) $[\mathfrak{g}, \operatorname{rad} \mathfrak{g}] = 0$ である．
(h) $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ である．

さらに，$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{s}$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ の直和 Lie 代数であるとき，$\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ かつ $\mathfrak{z} = \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{rad} \mathfrak{g}$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{g}$ が簡約であるとすると，$\mathfrak{g}$ の随伴表現の既約分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ がとれる（命題 3.17）．このとき，各 $\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}$ の 0 でないイデアルの中で極小なものであり，Lie 代数として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．各 $i \in I$ について，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_i$ のイデアルとすると，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルでもあるから，$\mathfrak{g}_i$ の極小性より，$\mathfrak{a}$ は 0 または $\mathfrak{g}_i$ である．したがって，$\mathfrak{g}_i$ は可換または単純である．$\mathfrak{g}_i$ が可換ならば $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = 0$ であり，単純ならば $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ だから，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は単純な $\mathfrak{g}_i$ 全体の直和となる．よって，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は半単純である（系 6.4，命題 6.8）．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が半単純であるとすると，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の $\mathfrak{g}$ における補イデアル $\mathfrak{z}$ が存在して，Lie 代数として $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$ が成り立つ（命題 6.12）．このとき，$\mathfrak{z} \cong \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ だから，$\mathfrak{z}$ は可換である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{s}$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ の直和 Lie 代数であるとする．$\mathfrak{z}$ の基底 $(e_1, \ldots, e_n)$

を一つ固定し，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{s}\oplus\mathbb{K}^n$ 上の表現 ρ を

$$\rho\left(x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}(x)\oplus\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\qquad(x\in\mathfrak{s},\ \lambda_i\in\mathbb{K})$$

によって定めると，ρ のトレース形式 B_ρ は

$$B_\rho\left(x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i, y+\sum_{i=1}^{n}\mu_i e_i\right)=B_{\mathfrak{s}}(x,y)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i\qquad(x,\ y\in\mathfrak{s},\ \lambda_i,\ \mu_i\in\mathbb{K})$$

で与えられる（ここで，$B_{\mathfrak{s}}$ は $\mathfrak{s}$ の Killing 形式を表す）．半単純性に関する Cartan の判定法（定理 6.10）より，$B_{\mathfrak{s}}$ は非退化だから，B_ρ も非退化である．

(d) $\Longrightarrow$ (e)　$\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ,V) が非退化なトレース形式 B_ρ をもつとする．ρ の組成列 $(V_0,\dots,V_n)$ をとり（命題 3.14），各 $i\in\{0,\dots,n-1\}$ に対して，ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く．$\rho'=\rho_0\oplus\dots\oplus\rho_{n-1}$ と置くと，ρ' は $\mathfrak{g}$ の有限次元完全可約表現である．ρ' が忠実であることを示す．$x\in\operatorname{Ker}\rho'$ とすると，各 i に対して $\rho(x)V_i\subseteq V_{i+1}$ である．さらに，各 V_i は $\rho(\mathfrak{g})$-安定だから，$\rho(x)\rho(\mathfrak{g})V_i\subseteq V_{i+1}$ である．したがって，$\rho(x)\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零だから，$B_\rho(x,\mathfrak{g})=\mathrm{tr}(\rho(x)\rho(\mathfrak{g}))=0$ であり，B_ρ が非退化であることより $x=0$ を得る．よって，ρ' は忠実である．

(e) $\Longrightarrow$ (f)　$\operatorname{nil}\mathfrak{g}=0$ であるとすると，$\mathfrak{g}$ の有限個の有限次元既約表現 ρ_1，…，ρ_n が存在して，$\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}\rho_i=0$ となる．このとき，$\rho=\rho_1\oplus\dots\oplus\rho_n$ は $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元完全可約表現である（命題 3.17）．

(f) $\Longrightarrow$ (g)　定理 5.15 より $[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]\subseteq\operatorname{rad}\mathfrak{g}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ だから，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}=0$ ならば $[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]=0$ である．

(g) $\Longleftrightarrow$ (h)　$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})\subseteq\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は常に成り立つから，

$$\operatorname{rad}\mathfrak{g}=\mathbf{Z}(\mathfrak{g})\iff\operatorname{rad}\mathfrak{g}\subseteq\mathbf{Z}(\mathfrak{g})\iff[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]=0$$

である．

(h) $\Longrightarrow$ (a)　$\mathfrak{g}$ の随伴表現は，$\mathfrak{g}/\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現 ρ を誘導する．ここで，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ であるとすると，$\mathfrak{g}/\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ は半単純だから（命題 6.6），Weyl の完全可約性定理（定理 6.20）より，ρ は完全可約となる．よって，このとき，$\mathfrak{g}$ の随伴表現も完全可約である．

最後の主張　$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{s}$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ の直和 Lie 代数であるとする．このとき，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]\oplus[\mathfrak{c},\mathfrak{c}]=\mathfrak{s}$ である（定理 6.10）．また，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=\mathbf{Z}(\mathfrak{s})\oplus\mathbf{Z}(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}$ であり（命題 6.5），(h) よりこれは $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ にも等しい．□

命題 6.24　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]$ が成り立つ．

証明　$\operatorname{nil}\mathfrak{g}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ であることは定理 5.15 ですでに示しており，$[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]\subseteq\operatorname{rad}\mathfrak{g}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ であることは明らかである．$\operatorname{nil}\mathfrak{g}\subseteq[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]$ であることを示す．$\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]$ と置き，等化準同型を $f\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ と書く．すると，命題 5.12 より，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g})\subseteq\operatorname{nil}\mathfrak{g}'$ である．一方で，系 6.17 より

$$[\mathfrak{g}',\operatorname{rad}\mathfrak{g}']=[f(\mathfrak{g}),f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})]=f([\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}])=0$$

だから，定理 6.23 より $\operatorname{nil}\mathfrak{g}'=0$ である．以上より，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g})=0$ であり，これは $\operatorname{nil}\mathfrak{g}\subseteq[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]$ を意味する．□

系 6.25 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を全射準同型とする．このとき，$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) = \operatorname{nil}\mathfrak{h}$ である．

証明 命題 6.24 と系 6.17 より，

$$f(\operatorname{nil}\mathfrak{g}) = f([\mathfrak{g}, \operatorname{rad}\mathfrak{g}]) = [f(\mathfrak{g}), f(\operatorname{rad}\mathfrak{g})] = [\mathfrak{h}, \operatorname{rad}\mathfrak{h}] = \operatorname{nil}\mathfrak{h}$$

である． □

6.6 単純性・半単純性・簡約性と係数体の変更

命題 6.26 $\mathbb{K}$ を可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

(1) $\mathbb{K}$ の標数が 0 であるとする．このとき，有限次元 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であることと，その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が半単純であることとは同値である．

(2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする．このとき，有限次元 $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が半単純であることと，その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が半単純であることとは同値である．

証明 (1) $\operatorname{rad}\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\operatorname{rad}\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ であること（命題 5.28 (1)）から従う．

(2) $\operatorname{rad}\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = (\operatorname{rad}\mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]}$ であること（命題 5.28 (2)）から従う． □

命題 6.27 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

(1) 有限次元 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が単純ならば，$\mathfrak{g}$ は単純である．

(2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする．このとき，有限次元 $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が単純であることと，その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が単純であることとは同値である．

証明 (1) $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が単純であるとすると，命題 6.26 (1) より $\mathfrak{g}$ は半単純だから，$\mathfrak{g}$ は有限個の単純 Lie 代数の直和として $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ と書ける（定理 6.13）．このとき，$\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\mathfrak{g}_1)_{(\mathbb{K}')} \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_n)_{(\mathbb{K}')}$ だが，$\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ は単純だから，$n = 1$ である．よって，$\mathfrak{g}$ は単純である．

(2) $\mathfrak{g}'$ のイデアルは $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ のイデアルでもあるから，$\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が単純ならば，$\mathfrak{g}'$ も単純である．逆に，$\mathfrak{g}'$ が単純であるとする．このとき，$\mathfrak{g}'$ は可換でないから，$\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ も可換でない．また，命題 6.26 (2) より，$\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ は半単純である．そこで，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ のイデアルとすると，$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}]$ が成り立つから（定理 6.13），$\operatorname{span}_{\mathbb{K}'}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ となり，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}'$ のイデアルでもある．したがって，$\mathfrak{a}$ は 0 または $\mathfrak{g}'$ である．よって，$\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ は単純である． □

注意 6.28 命題 6.27 (1) の逆は成り立たない．すなわち，$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とするとき，単純 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が単純であるとは限らない．

命題 6.29 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

(1) 有限次元 $\mathbb{K}$-Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が簡約であることと，その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が簡約であることとは同値である．

(2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする．このとき，有限次元 $\mathbb{K}'$-Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が簡約であることと，その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が簡約であることとは同値である．

証明 (1) 命題 5.29 の (a) $\iff$ (f) と，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\operatorname{nil}\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ であること（命題 5.29 (1)）から従う．

(2) 命題 5.29 の (a) $\iff$ (f) と，$\operatorname{nil}\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]} = (\operatorname{nil}\mathfrak{g}')_{[\mathbb{K}]}$ であること（命題 5.29 (2)）から従う． □

6.7 半単純 Lie 代数の例

命題 6.30 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．

(1) $\mathfrak{gl}(V)$ は簡約である．

(2) $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ であり，これは半単純である．

証明 (1) $\mathfrak{gl}(V)$ の自然表現は，明らかに既約（したがって特に，完全可約）である．よって，定理 6.23 の (a) $\Longleftrightarrow$ (e) より，$\mathfrak{gl}(V)$ は簡約である．

(2) (1) で示したように $\mathfrak{gl}(V)$ は簡約だから，定理 6.23 より，$\mathfrak{gl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{gl}(V))$ であり，$[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ は半単純である．一方で，容易に確かめられるように $\mathbf{Z}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathbb{K}\mathrm{id}_V$ であり，$\mathfrak{sl}(V)$ はこれの $\mathfrak{gl}(V)$ における補空間である．さらに，トレースの性質より，$[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ である．以上より，$\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ であり，これは半単純である． □

命題 6.31 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．

(1) $\varPhi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を非退化対称双線型形式とする．このとき，$\dim V \neq 2$ ならば $\mathfrak{o}(V, \varPhi)$ は半単純であり，$\dim V = 2$ ならば $\mathfrak{o}(V, \varPhi)$ は 1 次元（したがって，可換）である．

(2) $\varPhi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を非退化交代双線型形式とする．このとき，$\mathfrak{sp}(V, \varPhi)$ は半単純である．

証明 $\varPhi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を対称または交代な非退化双線型形式とし，$\mathfrak{o}(V, \varPhi)$ または $\mathfrak{sp}(V, \varPhi)$ を $\mathfrak{g}_\varPhi$ と書く．$x \in \mathfrak{gl}(V)$ の $\varPhi$ に関する随伴を $x^* \in \mathfrak{gl}(V)$ と書く（すなわち，x^* を，任意の v, $w \in W$ に対して $\varPhi(x(v), w) = \varPhi(v, x^*(w))$ を満たすという性質によって特徴付けられる $\mathfrak{gl}(V)$ の元とする）と，

$$\mathfrak{g}_\varPhi = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x + x^* = 0\}$$

である．

まず，$\mathfrak{g}_\varPhi$ が簡約であることを示す．そのためには，$\mathfrak{g}_\varPhi$ の自然表現のトレース形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ が非退化であることをいえばよい（定理 6.23）．$x \in \mathfrak{g}_\varPhi$ がこのトレース形式の退化空間に含まれるとして，$y \in \mathfrak{gl}(V)$ を任意にとる．すると，$y - y^* \in \mathfrak{g}_\varPhi$ だから，$\mathrm{tr}(x(y - y^*)) = 0$，すなわち $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(xy^*)$ である．したがって，

$$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(xy^*) = \mathrm{tr}(yx^*)^* = \mathrm{tr}(yx^*) = -\mathrm{tr}(yx) = -\mathrm{tr}(xy)$$

だから，$\mathrm{tr}(xy) = 0$ である．容易に確かめられるように，$\mathfrak{gl}(V)$ 上の双線型形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ は非退化だから，これが任意の $y \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して成り立つことより，$x = 0$ を得る．よって，$\mathfrak{g}_\varPhi$ の自然表現のトレース形式は非退化である．

あとは，$\varPhi$ が対称かつ $\dim V = 2$ である場合に $\mathfrak{g}_\varPhi$ が 1 次元であることと，それ以外の場合に $\mathfrak{g}_\varPhi$ の中心が 0 であることを示せばよい（定理 6.23）．

(1) $\varPhi$ が対称であるとして，$\mathfrak{g}_\varPhi = \mathfrak{o}(V, \varPhi)$ に関する主張を示す．命題 6.26 (1) より，必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで，一般性を失わず，係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する．このとき，対称双線型形式の一般論より，V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ であって $\varPhi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$（$\delta_{ij}$ は Kronecker のデルタ）を満たすものが存在する．よって，

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^{\mathrm{T}} = 0\}$$

に対して主張を示せば十分である．

$n = 0, 1$ の場合，$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = 0$ である．$n = 2$ の場合，$\mathfrak{o}(2, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である．よって，これらの場合には，主張が成り立つ．

$n \geq 3$ である場合を考える．$X = (x_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathbf{Z}(\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}))$ を任意にとる．まず，$X \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ だから，任意の i に対して $x_{ii} = 0$ である．次に，任意の異なる二つの添字 k, l に対して，X は $E_{kl} - E_{lk} \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ と可換だから，任意の $i, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k, l\}$ に対して $x_{kj} = x_{lj} = x_{ik} = x_{il} = 0$ が成り立つ．$n \geq 3$ であることより，任意の異なる二つの添字 k, j に対して，i, l を適当にとれば $i, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k, l\}$ が満たされるから，$x_{kj} = 0$ を得る．よって，$X = 0$ である．これで，$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ の中心が 0 であることが示された．

(2)　$\mathit{\Phi}$ が交代であるとして，$\mathfrak{g}_{\mathit{\Phi}} = \mathfrak{sp}(V, \mathit{\Phi})$ の中心が 0 であることを示す．命題 6.26 (1) より，必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで，一般性を失わず，係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する．このとき，交代双線型形式の一般論より，V の基底 $(e_1, \ldots, e_{2n})$ であって

$$\mathit{\Phi}(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (j = i + n) \\ -1 & (j = i - n) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

を満たすものが存在する．よって，

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid J_n X + X^{\mathrm{T}} J_n = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \middle| \, A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}),\, B,\, C \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

（$J_n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ であり，$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の n 次対称行列全体のなす空間を表す）の中心が 0 であることを示せば十分である．

$X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{T}} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{Z}(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}))$ を任意にとる．まず，任意の $A' \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ に対して，X は $\left(\begin{smallmatrix} A' & 0 \\ 0 & -A'^{\mathrm{T}} \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と可換だから，特に A は A' と可換である．これより，$A \in \mathbf{Z}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})) = \mathbb{K}I_n$ となるから，$A = \lambda I_n$（$\lambda \in \mathbb{K}$）と書ける．次に，X は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と可換だから，$\lambda = 0$ かつ $B = 0$ が成り立つ．同様に，X が $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と可換であることから，$C = 0$ であることもわかる．よって，$X = 0$ である．これで，$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ の中心が 0 であることが示された．　□

注意 6.32　命題 6.30 と命題 6.31 で半単純性を示した Lie 代数のうち，次のものは，単純であることが知られている（以下，V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする）．

- $\mathfrak{sl}(V)$（$V \neq 0$）
- $\mathfrak{o}(V, \mathit{\Phi})$（$V$ は 3 次元または 5 次元以上，$\mathit{\Phi}\colon V \times V \to \mathbb{K}$ は非退化対称双線型形式）
- $\mathfrak{sp}(V, \mathit{\Phi})$（$V \neq 0$，$\mathit{\Phi}\colon V \times V \to \mathbb{K}$ は非退化交代双線型形式）

参考文献

全体を通して，Bourbaki [1] を参考にした．本稿では，Engel の定理（系 4.9）を定理 4.7 から導く形で証明したが，筆者はこの定理を Nash [3] で知った．Killing 形式が 0 だが冪零でない Lie 代数の例（注意 4.5）については，Mathematics Stack Exchange [5] を参考にした．

Web ページについては，2025 年 1 月 20 日に閲覧し，内容を確認した．

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1*, Springer, 2007.

[2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.

[3] O. Nash, "Engel's Theorem in Mathlib", *Journal of Automated Reasoning* **67**.18 (2023).

[4] Mathematics Stack Exchange, "Semisimplicity of Lie algebras and non-degeneracy of associated bilinear forms of representations".
https://math.stackexchange.com/q/3980952

[5] Mathematics Stack Exchange, "When is the Killing form null?".
https://math.stackexchange.com/q/310272