極限のノート

箱（@o_ccah）

2019 年 4 月 1 日

記号と用語

- X を位相空間とする．点 $x \in X$ の近傍フィルタ（近傍全体のなすフィルタ）を，$\mathfrak{N}_X(x)$ あるいは単に $\mathfrak{N}(x)$ と書く．
- X を位相空間とする．X の任意の 1 点集合が閉であれば，X は T_1 であるという．X の任意の異なる 2 点が開集合で分離できるならば，X は T_2 であるという．X の任意の点とそれを含まない閉集合とが開集合で分離できるならば，X は正則であるという．正則かつ T_1 なる位相空間は T_3 であるという．
- X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族，$\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．すべての ϕ_i を連続にするような X 上の最小の位相を，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始位相という．
- 位相空間 X の点 $x \in X$ が孤立点であるとは，1 点集合 $\{x\}$ が X の開集合であることをいう．

1　フィルタ

フィルタに関する必要事項を，本節にまとめておく．詳しくは，「フィルタのノート」を参照のこと．

定義 1.1（フィルタ）　集合 X の部分集合族 $\mathfrak{F}$ が次の条件を満たすとき，$\mathfrak{F}$ は X 上のフィルタであるという．

(F1) $F \in \mathfrak{F}$ かつ $F \subseteq F' \subseteq X$ ならば $F' \in \mathfrak{F}$ である．
(F2) $F_0, \dots, F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ ならば $F_0 \cap \dots \cap F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ である（特に $X \in \mathfrak{F}$ である）．

$\mathfrak{P}(X)$ を X 上の自明なフィルタという．自明でないフィルタを真フィルタという．

集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ に対して，$\mathfrak{B}$ を含む X 上のフィルタのうち最小のものを，$\mathfrak{B}$ が生成するフィルタという．

定義 1.2（逆像フィルタ・像フィルタ）　X, Y を集合，$f \colon X \to Y$ を写像とする．

(1) Y 上のフィルタ $\mathfrak{G}$ に対して，X 上のフィルタ

$$f^{-1}(\mathfrak{G}) = \{A \subseteq X \mid \text{ある } G \in \mathfrak{G} \text{ が存在して } f^{-1}(G) \subseteq A\}$$

を $\mathfrak{G}$ の f による逆像フィルタという．

(2) X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，Y 上のフィルタ

$$f(\mathfrak{F}) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\}$$

を $\mathfrak{F}$ の f による像フィルタという．

命題 1.3　X, Y を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$f\colon X \to Y$ とする．$\mathfrak{F}$ が真フィルタならば，$f(\mathfrak{F})$ も真フィルタである．□

命題 1.4　X, Y, Z を集合，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ とする．

(1) Z 上のフィルタ $\mathfrak{H}$ に対して，$f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{H})) = (g \circ f)^{-1}(\mathfrak{H})$ である．
(2) X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$g(f(\mathfrak{F})) = g \circ f(\mathfrak{F})$ である．□

命題 1.5　X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．Y 上のフィルタ $\mathfrak{G}$ に対して，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である．$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ であるための必要十分条件は，$f(X) \in \mathfrak{G}$ である．

証明

$$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \{B \subseteq Y \mid \text{ある } G \in \mathfrak{G} \text{ が存在して } f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(B)\}$$

である．$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ は明らかである．後半の主張を示す．$f(X) \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ だから，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ ならば $f(X) \in \mathfrak{G}$ である．逆に，$f(X) \in \mathfrak{G}$ とする．$B \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ を任意にとると，$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathfrak{G})$ だから，ある $G \in \mathfrak{G}$ が存在して $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(B)$ となる．このとき x$G \cap f(X) = f(f^{-1}(G)) \subseteq B$ であり，仮定より $G, f(X) \in \mathfrak{G}$ だから，$B \in \mathfrak{G}$ である．よって，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{G}$ であり，前半の主張と合わせて $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ を得る．□

定義 1.6（相対フィルタ）　X を集合，$X' \subseteq X$ とする．X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，

$$\mathfrak{F}|_{X'} = \{F \cap X' \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

を $\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタという．

$\mathfrak{F}$ の相対フィルタは，包含写像による $\mathfrak{F}$ の逆像フィルタに等しい．

定義 1.7（積フィルタ）　$\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．$\prod_{i \in I} X_i$ の部分集合族

$$\left\{ \prod_{i \in I} F_i \;\middle|\; \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，有限個の } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}$$

が生成するフィルタを，$\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ の積フィルタといい，$\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ と書く．

$\mathfrak{F}_0, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ の積フィルタを，$\mathfrak{F}_0 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{n-1}$ とも書く．

2　真フィルタの極限

定義 2.1（真フィルタの極限点・接触点）　X を位相空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとする．

(1) $\mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ の近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x)$ よりも細かいとき，x は $\mathfrak{F}$ の極限点である，あるいは $\mathfrak{F}$ は x に収束するという．$\mathfrak{F}$ の極限点全体の集合を，$\lim \mathfrak{F}$ と書く．
(2) 任意の元 $F \in \mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ を接触点とする（すなわち $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F}$ である）とき，x は $\mathfrak{F}$ の接触点であるという．$\mathfrak{F}$ の接触点全体の集合を，$\operatorname{adh} \mathfrak{F}$ と書く．

命題 2.2　X を位相空間，$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ を X 上の真フィルタとする．$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ であるとき，次が成り立つ．

(1) $\lim \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{G}$ である．すなわち，$\mathfrak{F}$ の極限点は $\mathfrak{G}$ の極限点でもある．
(2) $\operatorname{adh} \mathfrak{F} \supseteq \operatorname{adh} \mathfrak{G}$ である．すなわち，$\mathfrak{G}$ の接触点は $\mathfrak{F}$ の接触点でもある．□

命題 2.3　位相空間上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ について，$\lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．すなわち，極限点は常に接触点である．

証明　$x \in \lim \mathfrak{F}$ ならば $\mathfrak{N}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ だから，任意の $N \in \mathfrak{N}(x)$ と任意の $F \in \mathfrak{F}$ は交わりをもつ．すなわち，任意の $F \in \mathfrak{F}$ に対して $x \in \overline{F}$ だから，$x \in \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．よって，$\lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．□

命題 2.4　位相空間 X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ を接触点にもつための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ より細かい真フィルタであって x に収束するものが存在することである．

証明　次の同値関係から従う．

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{adh} \mathfrak{F} &\iff \mathfrak{N}(x) \text{ の任意の元が } \mathfrak{F} \text{ の任意の元と交わる} \\ &\iff \mathfrak{N}(x) \cup \mathfrak{F} \text{ が有限交叉性をもつ} \\ &\iff \mathfrak{N}(x) \cup \mathfrak{F} \text{ を含む真フィルタが存在する} \\ &\iff x \text{ に収束する } \mathfrak{F} \text{ より細かい真フィルタが存在する．} \end{aligned}$$
□

系 2.5　位相空間上の極大フィルタ $\mathfrak{M}$ について，$\lim \mathfrak{M} = \operatorname{adh} \mathfrak{M}$ である．□

命題 2.6　X を位相空間，$A \subseteq X$ とする．点 $x \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $x \in \overline{A}$ である．
(b) X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ であって，A を元にもち，x に収束するものが存在する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$x \in \overline{A}$ ならば，x の任意の近傍は A と交わる．すなわち，$\mathfrak{N}(x) \cup \{A\}$ は有限交叉性をもつ．そこで，$\mathfrak{N}(x) \cup \{A\}$ が生成する真フィルタを考えれば，これは A を元にもち，x に収束する．
(b) $\Longrightarrow$ (a)　$A \in \mathfrak{F}$ かつ $x \in \lim \mathfrak{F}$ ならば，$x \in \lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F} \subseteq \overline{A}$ である（命題 2.3）．□

命題 2.7　位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ と点 $x \in X$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) f は x において連続である．
(b) $f(\mathfrak{N}(x))$ は $f(x)$ に収束する．
(c) X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ について，$\mathfrak{F}$ が x に収束するならば $f(\mathfrak{F})$ は $f(x)$ に収束する．

証明　(a) $\iff$ (b)　条件 (b) は，任意の $N \in \mathfrak{N}(f(x))$ に対して $f^{-1}(N) \in \mathfrak{N}(x)$ であることを意味するが，これは f の x における連続性の定義そのものである．
(b) $\Longrightarrow$ (c)　(b) は $f(\mathfrak{N}(x)) \supseteq \mathfrak{N}(f(x))$ を意味し，(c) は「$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}(x)$ ならば $f(\mathfrak{F}) \supseteq \mathfrak{N}(f(x))$」を意味する．(b) が成り立てば，$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}(x)$ のとき $f(\mathfrak{F}) \supseteq f(\mathfrak{N}(x)) \supseteq \mathfrak{N}(f(x))$ となり，したがって (c) が成り立つ．
(c) $\Longrightarrow$ (b)　(c) で $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}(x)$ と置けば (b) が従う．□

命題 2.8　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は x に収束する．

(b) すべての $i \in I$ に対して，$\phi_i(\mathfrak{F})$ は $\phi_i(x)$ に収束する．

証明　次の同値関係から従う．

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\iff \text{任意の近傍 } N \in \mathfrak{N}_X(x) \text{ に対して } N \in \mathfrak{F} \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ と近傍 } N' \in \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x)) \text{ に対して，} \phi_i^{-1}(N') \in \mathfrak{F} \qquad (*) \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ と近傍 } N' \in \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x)) \text{ に対して，} N' \in \phi_i(\mathfrak{F}) \\
&\iff \text{(b)}.
\end{aligned}$$

同値関係 ($*$) は，$\phi_i^{-1}(N')$（$i \in I$，$N' \in \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x))$）と表される集合全体が $\mathfrak{N}_X(x)$ の準フィルタ基であることによる．□

系 2.9　X を位相空間，A をその部分空間，$\iota\colon A \to X$ を包含写像とする．

(1) A 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x \in A$ について，$x \in \lim \mathfrak{F}$ であるための必要十分条件は，$x \in \lim \iota(\mathfrak{F})$ である．さらに，A が X の閉部分空間ならば，$\lim \mathfrak{F} = \lim \iota(\mathfrak{F})$ が成り立つ．
(2) X 上の真フィルタ $\mathfrak{G}$ が A 上に相対真フィルタ $\mathfrak{G}|_A$ を誘導するとする．このとき，点 $x \in A$ について，$x \in \lim \mathfrak{G}$ ならば $x \in \lim \mathfrak{G}|_A$ である．さらに，A が X の閉部分空間ならば，$\lim \mathfrak{G}|_A \supseteq \lim \mathfrak{G}$ が成り立つ．

証明　(1)　前半は命題 2.8 から従う．前半の結果は $\lim \mathfrak{F} = \lim \iota(\mathfrak{F}) \cap A$ とも書けるので，A が閉部分空間ならば $\lim \iota(\mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{adh} \iota(\mathfrak{F}) \subseteq \overline{A} = A$ であることに注意すれば，後半も従う．
(2)　$\iota(\mathfrak{G}|_A) = \iota(\iota^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ より $\lim \iota(\mathfrak{G}|_A) \supseteq \lim \mathfrak{G}$ であることに注意すれば，(1) から従う．□

系 2.10　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は x に収束する．
(b) すべての $i \in I$ に対して，$p_i(\mathfrak{F})$ は x_i に収束する（$p_i\colon X \to X_i$ は射影とする）．

証明　命題 2.8 から従う．□

3　写像の極限

定義 3.1（写像の極限）　X を集合，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとする．像フィルタ $f(\mathfrak{F})$ の極限点・接触点を，f の $\mathfrak{F}$ による極限値・接触値といい，それら全体の集合をそれぞれ

$$\lim_{\mathfrak{F}} f \quad \text{あるいは} \quad \lim_{x \to \mathfrak{F}} f(x),$$
$$\operatorname*{adh}_{\mathfrak{F}} f \quad \text{あるいは} \quad \operatorname*{adh}_{x \to \mathfrak{F}} f(x)$$

と書く．X が位相空間であるとき，点 $x \in X$ の近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x)$ による f の極限値・接触値を，f の x における極限値・接触値といい，それら全体の集合をそれぞれ

$$\lim_{x} f \quad \text{あるいは} \quad \lim_{y \to x} f(y),$$
$$\operatorname*{adh}_{x} f \quad \text{あるいは} \quad \operatorname*{adh}_{y \to x} f(y)$$

と書く．

$\mathfrak{F}$ が部分集合 $A \subseteq X$ 上に相対真フィルタ $\mathfrak{F}|_A$ を誘導するとする．このとき，写像 $f\colon A \to Y$ の $\mathfrak{F}|_A$ による極限値・接触値を，単に f の $\mathfrak{F}$ による極限値・接触値といい，記号においても単に $\lim_{\mathfrak{F}} f$ などと書く．特に，X が位相空間であって $\mathfrak{N}_X(x)$ が $A \subseteq X$ 上の相対真フィルタ $\mathfrak{N}_X(x)|_A$ を定めるとき，写像 $f\colon A \to Y$ の $\mathfrak{N}_X(x)|_A$ による極限値・接触値を，単に f の x における極限値・接触値といい，記号においても単に $\lim_x f$ などと書く．

写像 $f\colon X \to Y$ と X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ があり，$\mathfrak{F}$ が $A \subseteq X$ 上に相対真フィルタ $\mathfrak{F}|_A$ を定めるとする．このとき，制限写像 $f|_A$ の $\mathfrak{F}|_A$ による極限値・接触値を，f の A 内での極限値・接触値という．

$\mathfrak{N}_X(x)|_A$ が A 上の相対真フィルタであるための必要十分条件は，$x \in \overline{A}$ である．また，相対位相の定義から容易にわかるように，$x \in A$ のときは $\mathfrak{N}_X(x)|_A = \mathfrak{N}_A(x)$ である．そのため，以下では $\mathfrak{N}_X(x)|_A$ を（$x \notin A$ であっても）単に $\mathfrak{N}_A(x)$ と書く．

命題 3.2　X を集合，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $y \in Y$ について，次が成り立つ．

(1) $y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ であるための必要十分条件は，任意の $N \in \mathfrak{N}(y)$ に対して $f^{-1}(N) \in \mathfrak{F}$ となることである．
(2) $y \in \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f$ であるための必要十分条件は，任意の $N \in \mathfrak{N}(y)$ に対して $f^{-1}(N)$ が $\mathfrak{F}$ の任意の元と交わりをもつことである．

証明　それぞれ，次の同値関係から従う．

$$\begin{aligned} y \in \lim_{\mathfrak{F}} f &\iff \text{任意の } N \in \mathfrak{N}(y) \text{ に対して } N \in f(\mathfrak{F}) \\ &\iff \text{任意の } N \in \mathfrak{N}(y) \text{ に対して } f^{-1}(N) \in \mathfrak{F}, \\ y \in \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f &\iff \text{任意の } N \in \mathfrak{N}(y) \text{ と } F \in \mathfrak{F} \text{ に対し，} N \cap f(F) \neq \emptyset \\ &\iff \text{任意の } N \in \mathfrak{N}(y) \text{ と } F \in \mathfrak{F} \text{ に対し，} f^{-1}(N) \cap F \neq \emptyset. \end{aligned}$$ □

命題 3.3　X を集合，Y を位相空間とする．X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$\lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f \subseteq \overline{f(X)}$ が成り立つ．

証明　命題 2.3 より $\lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f$ であり，$f(X) \in f(\mathfrak{F})$ より $\operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f \subseteq \overline{f(X)}$ である． □

命題 3.4　X を集合，$A \subseteq X$，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とする．また，$\mathfrak{F}$ は X 上の真フィルタであって，A 上に相対真フィルタを誘導するとする．

(1) $\lim_{\mathfrak{F}} f|_A \supseteq \lim_{\mathfrak{F}} f$ である．すなわち，X における極限値は A における極限値でもある．
(2) $\operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f|_A \subseteq \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f$ である．すなわち，A における接触値は X における接触値でもある．

(1)，(2) ともに，$A \in \mathfrak{F}$ ならば等号が成り立つ．

証明　$\iota\colon A \to X$ を包含写像とする．$f|_A(\mathfrak{F}|_A) = f(\iota(\iota^{-1}(\mathfrak{F}))) \supseteq f(\mathfrak{F})$（命題 1.5）だから，主張は命題 2.2 から従う．$A \in \mathfrak{F}$ ならば $\iota(\iota^{-1}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{F}$ であり（命題 1.5），等号が成り立つ． □

命題 3.5　位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ と点 $x \in X$ について，次の条件 (a) と (b) は同値である．さらに，x が孤立点でなければ，これらは (c) とも同値である．

(a) f は x において連続である．

(b) $f(x) \in \lim_x f$ である．

(c) $f(x) \in \lim_x f|_{X\setminus\{x\}}$ である．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　命題 2.7 のいいかえにすぎない．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　命題 3.4 から従う．

x が孤立点でないとして (c) $\Longrightarrow$ (b) を示す．$f(\mathfrak{N}_{X\setminus\{x\}}(x))$ の各元は，$f(\mathfrak{N}_X(x))$ のある元あるいはそこから 1 点 $f(x)$ を取り除いたものに等しい．一方で，$\mathfrak{N}_Y(f(x))$ の各元は必ず $f(x)$ を含む．したがって，$\mathfrak{N}_Y(f(x)) \subseteq f(\mathfrak{N}_{X\setminus\{x\}}(x))$ ならば $\mathfrak{N}_Y(f(x)) \subseteq f(\mathfrak{N}_X(x))$ である．すなわち，$f(x) \in \lim_x f|_{X\setminus\{x\}}$ ならば $f(x) \in \lim_x f$ である．□

命題 3.6　X を集合，Y, Z を位相空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタ，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ とする．$y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ かつ g が y で連続ならば，$g(y) \in \lim_{\mathfrak{F}}(g \circ f)$ である．

証明　$y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ より $f(\mathfrak{F}) \supseteq \mathfrak{N}(y)$，したがって $g(f(\mathfrak{F})) \supseteq g(\mathfrak{N}(y))$ である．一方で，g が y で連続だから $g(y) \in \lim_y g$ となり（命題 3.5），したがって $g(\mathfrak{N}(y)) \supseteq \mathfrak{N}(g(y))$ である．よって $g(f(\mathfrak{F})) \supseteq \mathfrak{N}(g(y))$ だから，$g(y) \in \lim_{\mathfrak{F}}(g \circ f)$ である．□

4　フィルタに伴う位相空間

定義 4.1（フィルタに伴う位相空間）　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．$\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$（$\infty$ は X に属さない 1 点）とし，各点 $x \in \widetilde{X}$ に対して $\mathfrak{N}(x)$ を次のように定める．

$$\mathfrak{N}(x) = \{N \subseteq \widetilde{X} \mid x \in N\} \quad (x \in X)$$
$$\mathfrak{N}(\infty) = \{F \cup \{\infty\} \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

すると，この $\mathfrak{N}$ は近傍写像の条件を満たすから，これによって $\widetilde{X}$ 上に位相が定まる．この位相空間 $\widetilde{X}$ を，フィルタ $\mathfrak{F}$ に伴う位相空間という．

$\mathfrak{F}$ を集合 X 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}$ に伴う位相空間 $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ は，X 上に離散位相を誘導する．点 ∞ の近傍フィルタが誘導する X 上の相対フィルタを考えると，これは $\mathfrak{F}$ に等しい．

命題 4.2　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$\widetilde{X}$ を $\mathfrak{F}$ に伴う位相空間とする．X が $\widetilde{X}$ において稠密であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が真フィルタであることである．

証明　X が $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ において稠密であることは，∞ の任意の近傍が X と交わることと同値である．∞ の近傍フィルタは $\{F \cup \{\infty\} \mid F \in \mathfrak{F}\}$ だから，これは結局 $\mathfrak{F}$ が $\emptyset$ を含まないこと，すなわち $\mathfrak{F}$ が真フィルタであることと同値である．□

命題 4.3　X を集合，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $y \in Y$ について，$y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ に伴う位相空間 $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ から Y への写像

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X) \\ y & (x = \infty) \end{cases}$$

が連続であることである．

証明　X は $\widetilde{X}$ の部分空間として離散だから，$\widetilde{f}$ は X の各点においては常に連続である．一方で，$\widetilde{f}$ が ∞ で連続であるとは任意の $N \in \mathfrak{N}(y)$ に対して $\widetilde{f}^{-1}(N)$ が ∞ の近傍になること，すなわち $f^{-1}(N) \in \mathfrak{F}$ となることである．命題 3.2 より，これは $y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ と同値である．　□

5　極限と分離性

命題 5.1（T_2 空間における極限点の一意性）　位相空間 X 上の任意の真フィルタの極限点がたかだか 1 つであるための必要十分条件は，X が T_2 であることである．

証明　次の同値関係から従う．

$$
\begin{aligned}
& x \text{ と } y \text{ をともに極限点とする真フィルタは存在しない} \\
\iff\ & \mathfrak{N}(x) \text{ と } \mathfrak{N}(y) \text{ をともに含む真フィルタは存在しない} \\
\iff\ & \mathfrak{N}(x) \cup \mathfrak{N}(y) \text{ は有限交叉性をもたない} \\
\iff\ & U \in \mathfrak{N}(x) \text{ と } V \in \mathfrak{N}(y) \text{ であって互いに交わらないものが存在する} \\
\iff\ & x \text{ と } y \text{ は分離される}
\end{aligned}
$$
□

このことから，T_2 空間上の真フィルタの極限点集合や，T_2 空間への写像の極限値集合は，1 点集合または空集合となる．そのため以下では，T_2 空間における極限について考える場合，$\lim \mathfrak{F} = \{x\}$ や $\lim_{\mathfrak{F}} f = \{x\}$ の代わりに $\lim \mathfrak{F} = x$ や $\lim_{\mathfrak{F}} f = x$ とも書く．

命題 5.2　X を T_2 空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタ，$x \in X$ とする．$\mathfrak{F}$ が x に収束するならば，$\mathfrak{F}$ より細かい任意の真フィルタ $\mathfrak{G}$ について，$\lim \mathfrak{G} = x$ である．

証明　$\mathfrak{F}$ が x に収束し，$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ とすると，$x \in \lim \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{G}$ となる（命題 2.2）．ところが，X の T_2 性より $\mathfrak{G}$ の極限点はたかだか一意だから（命題 5.1），$\lim \mathfrak{G} = x$ を得る．　□

系 5.3　T_2 空間 X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ に収束するならば，x は $\mathfrak{F}$ の唯一の接触点である．

証明　$\mathfrak{F}$ の接触点全体の集合は，$\mathfrak{F}$ よりも細かいある真フィルタの極限点になっているような点全体の集合と一致していた（命題 2.4）．いま，$\mathfrak{F}$ が x に収束するとすると，$\mathfrak{F}$ よりも細かい任意の真フィルタ $\mathfrak{G}$ について $\lim \mathfrak{G} = x$ だから（命題 5.2），x が $\mathfrak{F}$ の唯一の接触点となる．　□

命題 5.4　X を集合，$A \subseteq X$，Y を T_2 空間，$f \colon X \to Y$ を写像とする．$\mathfrak{F}$ は X 上の真フィルタであって，A 上の相対真フィルタを誘導するとする．$x \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ ならば，$\lim_{\mathfrak{F}} f|_A = x$ である．

証明　$x \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ とすると，$x \in \lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \lim_{\mathfrak{F}} f|_A$ となる（命題 3.4 (1)）．ところが，Y の T_2 性より極限値 $\lim_{\mathfrak{F}} f|_A$ はたかだか一意だから（命題 5.1），$\lim_{\mathfrak{F}} f|_A = x$ を得る．　□

T_1 空間においては，極限は一意性は必ずしも成り立たないが，次のことがいえる．

命題 5.5　X を T_1 空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタ，$x \in X$ とする．任意の $F \in \mathfrak{F}$ が x を含むならば，$\mathfrak{F}$ の極限点としてありうるのは x のみである．

証明　x とは異なる点 $y \in X$ をとると，T_1 性より，x を含まない y の近傍 U がとれる．$U \in \mathfrak{N}(y)$ だが $U \notin \mathfrak{F}$ なので，$\mathfrak{F}$ は y には収束しない．よって，$\mathfrak{F}$ の極限点としてありうるのは x のみである．　□

系 5.6　X を位相空間，Y を T_1 空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f の $x \in X$ における極限点としてありうるのは，$f(x)$ のみである．

証明　$f(\mathfrak{N}(x))$ のすべての元は $f(x)$ を含むから，主張は命題 5.5 から従う． □

系 5.7　X を位相空間，Y を T_1 空間，$f\colon X \to Y$，$x \in X$ とする．次の 4 条件は同値である．

(a) f は x において連続である．
(b) $f(x) \in \lim_x f$ である．
(c) $\lim_x f = \{f(x)\}$ である．
(d) x における f の極限値が存在する（$\lim_x f \neq \emptyset$ である）．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　命題 3.5 ですでに示した．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d)　Y の T_1 性より，$\lim_x f$ は空集合か $\{f(x)\}$ かのどちらかである（系 5.6）．ここから同値性が従う． □

6　拡張定理と二重極限定理

定理 6.1（拡張定理）　X を位相空間，A をその稠密集合，Y を T_3 空間とする．このとき，写像 $f\colon A \to Y$ について，次の 2 条件は同値である．

(a) f の連続な拡張 $\tilde{f}\colon X \to Y$ が存在する．
(b) 任意の点 $x \in X$ に対して，f の x における極限値が存在する（$\lim_x f \neq \emptyset$ である）．

この条件が満たされるとき，f の連続な拡張 $\tilde{f}\colon X \to Y$ は一意であり，任意の $x \in X$ に対して

$$\tilde{f}(x) = \lim_x f$$

が成り立つ．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\tilde{f}\colon X \to Y$ が f の連続な拡張であるとする．点 $x \in X$ を任意にとる．$\tilde{f}$ の連続性と命題 3.5 より $\tilde{f}(x) \in \lim_x \tilde{f}$ であり，命題 3.4 (1) より $\lim_x f = \lim_x \tilde{f}|_A \supseteq \lim_x \tilde{f}$ だから，極限値 $\lim_x f$ は存在する．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　任意の $x \in X$ に対して極限値 $\lim_x f$ が存在するとする．写像 $\tilde{f}\colon X \to Y$ を，$x \in X$ に対して

$$\tilde{f}(x) = \lim_x f$$

とすることで定める．系 5.7 より $x \in A$ に対しては $\lim_x f = f(x)$ だから，$\tilde{f}$ は f の拡張である．

このように定めた写像 $\tilde{f}\colon X \to Y$ が連続であることを示す．正則空間 Y の各点においては「開近傍の閉包」全体が近傍基をなすから，任意の点 $x \in X$ と開近傍 $V \in \mathfrak{N}_Y(\tilde{f}(x))$ に対して，$\tilde{f}^{-1}(\overline{V}) \in \mathfrak{N}_X(x)$ であることを示せば十分である．$\tilde{f}$ の定義より $V \in \mathfrak{N}_Y(\tilde{f}(x)) \subseteq f(\mathfrak{N}_A(x))$ だから $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_A(x)$ であり，$U \cap A \subseteq f^{-1}(V)$ を満たす開近傍 $U \in \mathfrak{N}_X(x)$ が存在する．このとき $U \subseteq \tilde{f}^{-1}(\overline{V})$ であることを示そう．点 $x' \in U$ を任意にとる．$U \cap A \in \mathfrak{N}_A(x')$ だから $f(U \cap A) \in f(\mathfrak{N}_A(x')) = \lim_{x'} f$，したがって $\lim_{x'} f \subseteq \overline{f(U \cap A)}$ である．さらに，$U \cap A \subseteq f^{-1}(V)$ より $f(U \cap A) \subseteq V$ だから，

$$\tilde{f}(x') \in \lim_{x'} f \subseteq \overline{f(U \cap A)} \subseteq \overline{V},$$

したがって $x' \in \widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ である．よって，$U \subseteq \widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ が成り立つので，$\widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ は x の近傍である．

後半の主張は，等式延長の原理と上記の $\widetilde{f}$ の構成から従う． □

定理 6.2（二重極限定理） X_1, X_2 を集合，Y を T_3 空間，$f\colon X_1 \times X_2 \to Y$ とする．また，$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ をそれぞれ X_1, X_2 上の真フィルタとする．極限値

- $\lim_{(x_1,x_2)\to\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$ および
- 任意の $x_1 \in X_1$ に対して $\lim_{x_2\to\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$

が存在するとき，極限値 $\lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} \lim_{x_2\to\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$ が存在して，

$$\lim_{(x_1,x_2)\to\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} \lim_{x_2\to\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$$

が成り立つ．

証明 $\widetilde{X}_1 = X_1 \cup \{\infty_1\}$，$\widetilde{X}_2 = X_2 \cup \{\infty_2\}$ をそれぞれ X_1, X_2 上の真フィルタ $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ に伴う位相空間とし，$\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2$ の部分空間

$$X = (X_1 \times X_2) \cup (X_1 \times \{\infty_2\}) \cup \{(\infty_1, \infty_2)\}$$

を考える．$X_1 \times X_2$ が X において稠密であることに注意する．

フィルタに伴う位相空間の定義より，X の各点の（X における）近傍基として，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}(x_1, x_2) &= \{\{(x_1, x_2)\}\} && (x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2),\\
\mathfrak{B}(x_1, \infty_2) &= \{\{x_1\} \times (F_2 \cup \{\infty_2\}) \mid F_2 \in \mathfrak{F}_2\} && (x_1 \in X_1),\\
\mathfrak{B}(\infty_1, \infty_2) &= \{(F_1 \times (F_2 \cup \{\infty_2\})) \cup \{(\infty_1, \infty_2)\} \mid F_1 \in \mathfrak{F}_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}_2\}
\end{aligned}$$

がとれる．したがって，

$$\begin{aligned}
\lim_{(x_1,x_2)} f &= f(x_1, x_2) && (x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2),\\
\lim_{(x_1,\infty_2)} f &= \lim_{x_2\to\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2) && (x_1 \in X_1),\\
\lim_{(\infty_1,\infty_2)} f &= \lim_{(x_1,x_2)\to\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

である．いま，条件によって右辺が存在することは保証されているから，拡張定理（定理 6.1）より，$f\colon X_1 \times X_2 \to Y$ の連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意に存在し，$\widetilde{f}(x) = \lim_x f$（$x \in X$）を満たす．

さて，

$$\lim_{x_2\to\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2) = \lim_{(x_1,\infty_2)} f = \widetilde{f}(x_1, \infty_2) \quad (x_1 \in X_1)$$

である．また，点 (∞_1, ∞_2) の近傍フィルタが $X_1 \times \{\infty_2\}$ 上に誘導する相対フィルタは，$X_1 \times \{\infty_2\}$ を X_1 と同一視すれば，真フィルタ $\mathfrak{F}_1$ に等しい．したがって，$\widetilde{f}$ の連続性と命題 3.4 (1) より，

$$\lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} \widetilde{f}|_{X_1\times\{\infty_2\}}(x_1, \infty_2) = \lim_{(\infty_1,\infty_2)} \widetilde{f}|_{X_1\times\{\infty_2\}} = \widetilde{f}(\infty_1, \infty_2)$$

である．以上より，次が成り立つ．

$$\lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} \lim_{x_2\to\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} \widetilde{f}(x_1, \infty_2) = \widetilde{f}(\infty_1, \infty_2)$$

一方で，

$$\lim_{(x_1,x_2)\to\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2) = \lim_{(\infty_1,\infty_2)} f = \widetilde{f}(\infty_1, \infty_2)$$

だから，主張は示された． □

参考文献

[1] N. Bourbaki（著），森 毅（編・訳），清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 1』，東京図書，1968.