$\mathbb{R}^n$ の実線型構造と整合する全順序の特徴付け

箱（@o_ccah）

2020 年 3 月 17 日

本稿で考える問題は，高梨悠吾さんから伺った．

定義 V を実線型空間とする．V 上の順序 $\leq$ が V の**実線型構造と整合する**とは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(i) 任意の $x, y, z \in V$ に対して，$x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$ である．
(ii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$ に対して，$\lambda \geq 0$ かつ $x \geq 0$ ならば $\lambda x \geq 0$ である．

定義 V を n（有限）次元実線型空間，$\mathcal{E} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ を V の基底とする．各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，基底 $\mathcal{E}$ に関する i-成分を与える写像を $p_i \colon V \to \mathbb{R}$ と書く．V 上の順序 $\leq_{\mathcal{E}}$ を，$x, y \in V$ に対して $x \leq_{\mathcal{E}} y$ が

> $x = y$ または「ある $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ が存在して $p_0(x) = p_0(y)$, $\ldots$, $p_{i-1}(x) = p_{i-1}(y)$ かつ $p_i(x) < p_i(y)$ となる」

と同値であるとして定める．この順序 $\leq_{\mathcal{E}}$ を，**基底 $\mathcal{E}$ に関する辞書式順序**という．

容易にわかるように，有限次元実線型空間 V のある基底に関する辞書式順序は，V の実線型構造と整合する全順序である．

以下，有限次元実線型空間の基底 $\mathcal{E}$ に対して，$\leq_{\mathcal{E}}$ は常に $\mathcal{E}$ に関する辞書式順序を表すとする．また，$x <_{\mathcal{E}} y$ は「$x \leq_{\mathcal{E}} y$ かつ $x \neq y$」を表すとし，$x \geq_{\mathcal{E}} y$, $x >_{\mathcal{E}} y$ はそれぞれ $y \leq_{\mathcal{E}} x$, $y <_{\mathcal{E}} x$ と同義とする．

補題 n を 1 以上の整数とする．n 次元実線型空間 V が互いに交わらない 3 つの部分 P, N, W に分割され，これらは次の 3 条件を満たすとする．

(i) $-P = N$ である．
(ii) P, N はともに和および真に正な実数によるスカラー倍に関して閉じている．
(iii) W は V の真部分線型空間である．

このとき，W を含む $n-1$ 次元部分線型空間 $H \subseteq V$ が存在し，H が定める 2 つの閉半空間のうち，一方は P を，他方は N を含む．

証明 n に関する帰納法で示す．$n = 1$ の場合は明らかである．$n \geq 2$ とする．$V = \mathbb{R}^n$ とし，$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ と書くとき，$W \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_0 \in P$ および $-e_0 \in N$ が成り立つとしても一般

性を失わない．$\mathbb{R}^{n-1} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ とみなし，

$$W' = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x + \mathbb{R}e_0 \text{ は } P,\, N \text{ の両方と交わる}\}$$

と置く．W' は W を含む $\mathbb{R}^{n-1}$ の部分線型空間である．

まず，$W' = \mathbb{R}^{n-1}$ の場合を考える．各 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して，次の条件を満たすような $f(x) \in \mathbb{R}$ が一意に存在することに注意する：$\lambda > f(x)$ に対しては $x + \lambda e_0 \in P$ であり，$\lambda < f(x)$ に対しては $x + \lambda e_0 \in N$ である．これによって $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ を定めると，f は W 上では値 0 をとる線型写像である．よって，f のグラフを $H \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ とすれば，H は条件を満たす．

次に，W' が $\mathbb{R}^{n-1}$ の真部分線型空間である場合を考える．

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x + \mathbb{R}e_0 \subseteq P\},$$
$$N' = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x + \mathbb{R}e_0 \subseteq N\}$$

と置くと，$\mathbb{R}^{n-1}$ は互いに交わらない 3 つの部分 P', N', W' に分割され，これらは 3 条件 (i), (ii), (iii)（において P, N, W をそれぞれ P', N', W' に置き換えたもの）を満たす．したがって，帰納法の仮定より，W' を含む $n-2$ 次元部分線型空間 $H' \subseteq V'$ を，H' が定める 2 つの閉半空間のうち，一方は P' を，他方は N' を含むようにとれる．$H = H' + \mathbb{R}e_0$ と置けば，H は条件を満たす． □

定理　V を n（有限）次元実内積空間とし，その内積を $(-,-)$ と書く．V の実線型構造と整合する全順序 $\leq$ に対して，V の正規直交基底 $\mathcal{E} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ が一意に存在して，$\leq$ は $\mathcal{E}$ に関する辞書式順序 $\leq_{\mathcal{E}}$ に一致する．

証明　条件を満たす正規直交基底の存在を，n に関する帰納法で示す．$n = 0$ の場合は明らかである．$n \geq 1$ とし，$\leq$ を V の実線型構造と整合する全順序とする．$P = \{x \in V \mid x > 0\}$，$N = \{x \in V \mid x < 0\}$，$W = \{0\}$ と置くと補題が適用でき，$n-1$ 次元部分線型空間 $H \subseteq V$ を，H が定める 2 つの閉半空間のうち，一方は P を，他方は N を含むようにとれる．H に直交する単位ベクトルのうち P に含まれるものをとって e_0 とする．すると，H のとり方から，$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$(x, e_0) > 0$ ならば $x \in P$ であり，$(x, e_0) < 0$ ならば $x \in N$ である．さて，$\mathbb{R}e_0$ の直交補空間を V' とし，$\leq$ を制限して得られる V' 上の順序を $\leq'$ とすると，$\leq'$ は $n-1$ 次元内積空間 V' の実線型構造と整合する全順序である．したがって，帰納法の仮定より，V' の正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ が存在して，$\leq'$ は基底 $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ に関する辞書式順序に一致する．このとき，容易にわかるように，$\leq$ は基底 $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ に関する辞書式順序に一致する．これで，条件を満たす正規直交基底の存在が示された．

異なる正規直交基底が異なる辞書式順序を定めることを，n に関する帰納法で示す．$n = 0$ の場合は明らかである．$n \geq 1$ とし，$\mathcal{E} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ と $\mathcal{F} = (f_0, \ldots, f_{n-1})$ を V の異なる正規直交基底とする．まず，$e_0 = f_0$ のとき，$\mathbb{R}e_0 = \mathbb{R}f_0$ の直交補空間を V' とすると，$\mathcal{E}' = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ と $\mathcal{F}' = (f_1, \ldots, f_{n-1})$ は V' の異なる正規直交基底だから，帰納法の仮定より，V' 上の順序 $\leq_{\mathcal{E}'}$ と $\leq_{\mathcal{F}'}$ は異なる．$\leq_{\mathcal{E}'}$, $\leq_{\mathcal{F}'}$ はそれぞれ $\leq_{\mathcal{E}}$, $\leq_{\mathcal{F}}$ を制限して得られるから，$\leq_{\mathcal{E}}$ と $\leq_{\mathcal{F}}$ も異なる．次に，$e_0 = -f_0$ のとき，$e_0 >_{\mathcal{E}} 0$ かつ $-f_0 <_{\mathcal{F}} 0$ だから，$\leq_{\mathcal{E}}$ と $\leq_{\mathcal{F}}$ は異なる．最後に，$e_0 \neq \pm f_0$ のとき，$\mathbb{R}e_0$ と $\mathbb{R}f_0$ は異なる直交補空間をもつから，$(x, e_0) > 0$ かつ $(x, f_0) = 0$ を満たす $x \in V$ がとれる．$\epsilon > 0$ に対して $(x - \epsilon f_0, f_0) = -\epsilon < 0$ だが，内積の連続性より，$\epsilon > 0$ を十分小さくとれば $(x - \epsilon f_0, e_0) > 0$ となる．このとき，$x - \epsilon f_0 >_{\mathcal{E}} 0$ かつ $x - \epsilon f_0 <_{\mathcal{F}} 0$ である．よって，$\leq_{\mathcal{E}}$ と $\leq_{\mathcal{F}}$ は異なる．これで，異なる正規直交基底が異なる辞書式順序を定めることが示された． □