

商空間のノート

箱 (@o_ccah)

2019 年 5 月 12 日

記号と用語

- 集合 X からその商集合 X/R への写像であって、各 $x \in X$ に対して x の同値類を対応させるものを、等化写像という.
- 集合 X 上の同値関係 R を $X \times X$ の部分集合として扱うとき、これを R のグラフといい、 $\Gamma(R)$ と書く.
- X を集合、 R を X 上の同値関係、 $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像とする. X の部分集合 A が R に関して充満しているとは、 $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ であることをいう.
- X を集合、 R を X 上の同値関係とし、 A を X の部分集合とする. R を $A \times A$ に制限して得られる A 上の同値関係を、 R_A と書く.
- $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし、各 $i \in I$ に対して R_i を X_i 上の同値関係とする. 「 $x = (x_i)_{i \in I}$ と $y = (y_i)_{i \in I}$ が関係するのは、任意の $i \in I$ に対して $x_i = y_i$ であるとき、かつそのときに限る」とする $\prod_{i \in I} X_i$ 上の同値関係を、 $\prod_{i \in I} R_i$ と書く.
- $\{X_i\}_{i \in I}, \{Y_i\}_{i \in I}$ を集合族とし、各 $i \in I$ に対して $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ とする. $\prod_{i \in I} X_i$ の点 $(x_i)_{i \in I}$ に対して $\prod_{i \in I} Y_i$ の点 $(f_i(x_i))_{i \in I}$ を対応させる写像を、 $\{f_i\}_{i \in I}$ の積写像といい、 $\prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ と書く.

1 終位相の一般論

定義 1.1 (終位相) X を集合、 $\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする. 写像族 $\{\sigma_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ に対して、すべての σ_i が連続となるような X 上の最大の位相を、 $\{(Y_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$ (あるいは単に $\{\sigma_i\}_{i \in I}$) が誘導する X 上の終位相という.

容易にわかるように、 $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相は、任意の $i \in I$ に対して $\sigma_i^{-1}(A)$ が Y_i の開集合となるような $A \subseteq X$ の全体を開集合系とする位相である.

命題 1.2 (終位相の特徴付け) X を集合、 $\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする. 写像族 $\{\sigma_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相は、次の性質をもつ唯一の X 上の位相である.

任意の位相空間 Z と写像 $g: X \rightarrow Z$ について、 g が連続であることと、任意の $i \in I$ に対して $g \circ \sigma_i$ が連続であることは同値である.

証明 $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相を τ_f とする. このとき、位相空間 Z と写像 $g: X \rightarrow Z$ に対して、次

の同値関係が成り立つ.

任意の $i \in I$ に対して $g \circ \sigma_i$ が連続

\iff 任意の $i \in I$ と開集合 $O \subseteq Z$ に対して $\sigma_i^{-1}(g^{-1}(O))$ は Y_i の開集合

\iff 任意の開集合 $O \subseteq Z$ に対して $g^{-1}(O) \in \mathfrak{D}_f$. (*)

一方で, X 上の位相 \mathfrak{D} によって X を位相空間とみなすとき, g が連続であることは, 次のようにいいかえられる.

任意の開集合 $O \subseteq Z$ に対して $g^{-1}(O) \in \mathfrak{D}$. (**)

任意の位相空間 Z と写像 $g: X \rightarrow Z$ に対して $(*) \iff (**)$ であることは, $\mathfrak{D}_f = \mathfrak{D}$ であることに他ならない. □

命題 1.3 (終位相の推移性) X を集合, $\{Y_i\}_{i \in I}$ を集合族, $\{Z_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ (J_i は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合) を位相空間族とする. 写像族 $\{\sigma_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$, $\{\tau_{ij}: Z_{ij} \rightarrow Y_i\}_{i \in I, j \in J_i}$ について, $\{\sigma_i \circ \tau_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ が誘導する X 上の終位相と, 「各 Y_i を $\{\tau_{ij}\}_{j \in J_i}$ が誘導する終位相によって位相空間とみなすときの, $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相」とは一致する.

証明 終位相の特徴付け (命題 1.2) より, σ_i が連続であることと, 任意の $j \in J_i$ に対して $\sigma_i \circ \tau_{ij}$ が連続であることは同値である. ここから結論が従う. □

2 商空間と商写像

定義 2.1 (商空間) X を位相空間, R を X 上の同値関係とする. 等化写像 $\pi: X \rightarrow X/R$ が誘導する X/R 上の終位相を, X の位相が誘導する X/R 上の商位相という. 商位相によって X/R を位相空間とみなすとき, X/R を X の商空間という.

定義 2.2 (商写像) X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ とする. Y の位相が f の誘導する終位相に等しく, かつ f が全射であるとき, f は商写像であるという.

X を位相空間, X/R をその商空間とすると, 等化写像 $\pi: X \rightarrow X/R$ は商写像である. 逆に, $f: X \rightarrow Y$ が商写像であるとき, X を f が定める同値関係で割った商空間と Y とは f が誘導する写像により同相となる. このように, 商空間を考えることと商写像を考えることは等価である.

命題 2.3 X, Y を位相空間, R を X 上の同値関係, $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像とする. 写像 $f: X/R \rightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は, $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ が連続であることである.

証明 命題 1.2 から従う. □

系 2.4 X, Y を位相空間, R, S をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $f: X \rightarrow Y$ を R, S と整合する写像とする. f が連続ならば, f が誘導する写像 $\bar{f}: X/R \rightarrow Y/S$ も連続である. □

命題 2.5 X を位相空間, R, S を X 上の同値関係とし, S は R よりも粗いとする. このとき, 自然な全単射 $(X/R)/(S/R) \rightarrow X/S$ は同相写像である.

証明 命題 1.3 から従う. □

3 開写像と閉写像

定義 3.1 X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ とする.

- (1) X の開集合の f による像が常に Y の開集合であるとき, f は開写像であるという.
- (2) X の閉集合の f による像が常に Y の閉集合であるとき, f は閉写像であるという.

命題 3.2 X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ とし, A を X の部分集合とする.

- (1) f が開写像であり, A が X の開集合ならば, $f|_A: A \rightarrow Y$ も開写像である.
- (2) f が閉写像であり, A が X の閉集合ならば, $f|_A: A \rightarrow Y$ も閉写像である. □

命題 3.3 X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ とし, B を Y の部分集合とする.

- (1) f が開写像ならば, f を $f^{-1}(B)$ から B への写像とみなしたのも開写像である.
- (2) f が閉写像ならば, f を $f^{-1}(B)$ から B への写像とみなしたのも閉写像である.

証明 X の部分集合 A に対して $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ であることからわかる. □

命題 3.4 開連続全射および閉連続全射は商写像である.

証明 どちらも同様に示せるから, 開連続全射について示す. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を開連続全射とする. f の連続性より, Y の開集合の f による逆像は常に X の開集合である. 逆に, 部分集合 $B \subseteq Y$ について, $f^{-1}(B)$ が X の開集合であるとする. f が開写像であることより $f(f^{-1}(B))$ は Y の開集合であり, f が全射であることより $B = f(f^{-1}(B))$ だから, B は Y の開集合である. よって, Y の位相は, f が誘導する終位相に等しい. f の全射性と合わせて, f が商写像であることが従う. □

したがって, 開連続全射および閉連続全射は, 商写像の特別な場合であるといえる. これに対応して, 次の概念を定義する.

定義 3.5 X を位相空間, R を X 上の同値関係, $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像とする.

- (1) π が開写像であるとき, R は開同値関係であるという.
- (2) π が閉写像であるとき, R は閉同値関係であるという.

注意 開でも閉でもない商写像が存在する. あるいは同じことだが, 開でも閉でもない (位相空間上の) 同値関係が存在する. たとえば, R を \mathbb{R} 上の同値関係であって各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して n と $1/n$ とを同一視するものとする. R は開同値関係でも閉同値関係でもない.

4 商空間と部分空間

前節で述べた開写像・閉写像に関する命題から, 商空間と部分空間に関する次の命題が得られる.

命題 4.1 X を位相空間, R を X 上の同値関係, $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像, A を X の部分集合とする. 次のそれぞれの場合, 自然な全単射 $A/R_A \rightarrow \pi(A)$ は同相写像である.

- (1) R が開同値関係であり, A が X の開集合である.
- (2) R が閉同値関係であり, A が X の閉集合である.
- (3) R が開同値関係であり, A が R に関して充満している.
- (4) R が閉同値関係であり, A が R に関して充満している.

証明 (1) と (2), (3) と (4) の証明はそれぞれ同様にできるから, (1) と (3) のみ証明する. 自然な全単射 $A/R_A \rightarrow \pi(A)$ が同相写像であることは, π を A から $\pi(A)$ への写像とみなしたものが商写像であることに同値なので, これを示せばよい.

(1) R が開同値関係であり, A が X の開集合であるとする. このとき, 命題 3.2, 命題 3.3 より π を A から $\pi(A)$ への写像とみなしたのも開写像であり, したがって命題 3.4 より商写像である.

(3) R が開同値関係であり, A が R に関して充満しているとする. このとき, 命題 3.3 より π を $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ から $\pi(A)$ への写像とみなしたものは開写像であり, したがって命題 3.4 より商写像である. □

注意 命題 4.1 の結論は, 無条件には成り立たない. たとえば, R を \mathbb{R} 上の同値関係であって各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して n と $1/n$ とを同一視するものとし, $A = \{0\} \cup ((1, \infty) \setminus \mathbb{N}_{>0})$ とすると, A は R に関して充満しているが, 自然な全単射 $A/R_A \rightarrow \pi(A)$ は同相写像ではない. 実際, R_A は A 上の離散同値関係であり, 0 は $A/R_A = A$ の孤立点だが, $\pi(0)$ は $\pi(A) \subseteq \mathbb{R}/R$ の孤立点ではない.

5 商空間と積空間

命題 5.1 $\{X_i\}_{i \in I}, \{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし, 各 $i \in I$ に対して $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ とする. 各 f_i が開写像であり, 有限個の $i \in I$ を除いて f_i が全射ならば, 積写像 $\prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ も開写像である.

証明 各 f_i が開写像であり, 有限個の $i \in I$ を除いて f_i が全射とする. 各 $i \in I$ に対して U_i を X_i の開集合とし, 有限個の $i \in I$ を除いては $U_i = X_i$ とする. これらの積 $\prod_{i \in I} U_i$ の $\prod_{i \in I} f_i$ による像は $\prod_{i \in I} f_i(U_i)$ である. 仮定より, 各 $f_i(U_i)$ は Y_i の開集合であり, 有限個の $i \in I$ を除いては $f_i(U_i) = Y_i$ だから, この像は $\prod_{i \in I} Y_i$ の開集合である. このような $\prod_{i \in I} U_i$ の全体は $\prod_{i \in I} X_i$ の開基をなすから, $\prod_{i \in I} f_i$ は開写像である. □

上の命題から, 商空間と積空間に関する次の命題が得られる.

命題 5.2 $\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし, 各 $i \in I$ に対して R_i を X_i 上の同値関係とする. 各 R_i が開同値関係ならば, $\prod_{i \in I} R_i$ も開同値関係であり, 自然な全単射 $\prod_{i \in I} X_i / \prod_{i \in I} R_i \rightarrow \prod_{i \in I} (X_i / R_i)$ は同相写像である.

証明 各 $i \in I$ に対して, $\pi_i: X_i \rightarrow X_i / R_i$ を商写像とする. 各 π_i が開写像であるとして, $\prod_{i \in I} \pi_i$ が開写像であることを示せばよいが (命題 3.4), これは命題 5.1 から従う. □

注意 命題 5.2 の結論は, 無条件には成り立たない. たとえば, \mathcal{A} を \mathbb{Q} 上の離散同値関係, R を \mathbb{Q} 上の同値関係であって \mathbb{Z} のすべての点を同一視するものとする, \mathcal{A} は開かつ閉な同値関係, R は閉同値関係だが, 自然な全単射 $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) / (\mathcal{A} \times R) \rightarrow \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} / R)$ は同相写像ではない.

このことを見るために, $\mathcal{A} \times R$ に関して充満した $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ の開集合 (したがって $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) / (\mathcal{A} \times R)$ への自然な全射による像は開集合となる) であって, $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} / R)$ への自然な全射による像は開集合でないものを構成しよう. $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を $(0, 1)$ 内の無理数の列で, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を満たすものとする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(-1, n)$ と

$(-a_n, n)$ とを結ぶ線分を直径とする開球, $(-a_n, n)$ と (a_n, n) とを結ぶ線分を直径とする開球, (a_n, n) と $(1, n)$ とを結ぶ線分を直径とする開球を考え, これら 3 つの開球の合併を U_n とする. $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ と置くと, これは条件を満たす.

6 商空間の分離性

本節では, 商空間が Hausdorff になるための十分条件をいくつか挙げる.

命題 6.1 X を位相空間, R を X 上の同値関係とする. 次の 2 条件について, (a) \implies (b) が成り立つ. さらに, R が開同値関係ならば, 2 条件は同値となる.

- (a) X/R は Hausdorff である.
- (b) $\Gamma(R)$ は $X \times X$ の閉集合である.

証明 $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像とし, $\Delta(X/R) = \{(a, a) \mid a \in X/R\}$ と置く. X/R が Hausdorff であることは, $\Delta(X/R)$ が $(X/R) \times (X/R)$ の閉集合であることに同値である.

(a) \implies (b) X/R が Hausdorff であるとする. $\Delta(X/R)$ は $(X/R) \times (X/R)$ の閉集合だから, $\Gamma(R) = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta(X/R))$ は $X \times X$ の閉集合である.

(b) \implies (a) R が開同値関係であり, $\Gamma(R)$ が $X \times X$ の閉集合であるとする. このとき, 命題 5.2 より, $(X/R) \times (X/R)$ を $(X \times X)/(R \times R)$ と同一視できる. そのため, $\Delta(X/R)$ を $(X \times X)/(R \times R)$ の部分集合と考えたものが閉集合であることを示せばよい. $\Delta(X/R) \subseteq (X \times X)/(R \times R)$ の等化写像による逆像は, $\Gamma(R)$ である. 仮定よりこれは $X \times X$ の閉集合だから, 商位相の定義より, $\Delta(X/R)$ は $(X \times X)/(R \times R)$ の閉集合である. これで示された. \square

命題 6.2 X が正則 Hausdorff 空間, R が X 上の閉同値関係ならば, $\Gamma(R)$ は $X \times X$ の閉集合である.

証明 X を正則 Hausdorff 空間, R を X 上の閉同値関係とし, $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像とする. 点 $(x, y) \in \overline{\Gamma(R)}$ を任意にとる. すると, x の任意の開近傍 F と y の任意の開近傍 V に対して, $F \times V$ は $\Gamma(R)$ と交わる. すなわち, $\pi^{-1}(\pi(F))$ は V と交わる. ここで, V は y の任意の開近傍を動き, 仮定より $\pi^{-1}(\pi(F))$ は閉集合だから, $y \in \overline{\pi^{-1}(\pi(F))} = \pi^{-1}(\pi(F))$ である. したがって, $\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ と F は交わる. ここで, F は x の任意の開近傍を動き, 仮定より $\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ は閉集合だから, $x \in \overline{\pi^{-1}(\pi(\{y\}))} = \pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ である. これは, $(x, y) \in \Gamma(R)$ を意味する. よって, $\Gamma(R)$ は $X \times X$ の閉集合である. \square

系 6.3 X が正則 Hausdorff 空間, R が X 上の開かつ閉な同値関係ならば, X/R は Hausdorff である.

証明 命題 6.1 と命題 6.2 から従う. \square

命題 6.4 X を正則 Hausdorff 空間, F を X の空でない閉集合とし, R を X 上の同値関係であって F を 1 点に潰すものとする (すなわち, R に関する同値類は, F と各 $x \in X \setminus F$ に対する $\{x\}$ である). このとき, 商空間 X/R は Hausdorff である.

証明 $\pi: X \rightarrow X/R$ を等化写像とする. まず, 異なる 2 点 $x, y \in X \setminus F$ を任意にとる. X は Hausdorff であり, F は閉集合だから, x の開近傍 U と y の開近傍 V を交わらないように $X \setminus F$ の中にとれる. このとき, $\pi(U), \pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x), \pi(y)$ の開近傍であり, 互いに交わらない. 次に, $x \in X \setminus F$ を任意にとる.

X は正則であり, F は閉集合だから, x の開近傍 U と F の開近傍 V を交わらないようにとれる. このとき, $\pi(U), \pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x), F$ の開近傍であり, 互いに交わらない. よって, X/R は Hausdorff である. \square

参考文献

- [1] N. Bourbaki (著), 森 毅 (編・訳), 清水 達雄 (訳), 『ブルバキ数学原論 位相 1』, 東京図書, 1968.
- [2] 児玉 之宏, 永見 啓応, 『位相空間論』, 岩波書店, 1974.