

# 一様空間概説

箱 (@o\_ccah)

2019 年 3 月 1 日

## 概要

本稿では、位相空間論の基本的な知識をもった読者を想定して、一様空間という概念を紹介します。最後の節では、一様空間の有用性を示す例として、距離空間に関するよく知られた定理が、実は一様空間に対しても成り立つことを見ます。

## 記号と用語

- 集合  $X$  上のフィルタとは、 $X$  の部分集合族  $\mathcal{F}$  であって、2 条件
  - $F \in \mathcal{F}$  かつ  $F \subseteq F' \subseteq X$  ならば  $F' \in \mathcal{F}$  である。
  - $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  ならば  $F_1 \cap \dots \cap F_n \in \mathcal{F}$  である。

を満たすもののことをいう。

- 位相空間  $X$  の部分集合  $A$  に対して、 $\bar{A}$  で  $A$  の閉包を、 $A^\circ$  で  $A$  の内部を表す。
- 位相空間の正則性に、1 点集合が閉であることは課さない。
- $X$  を集合、 $A, B$  を  $X \times X$  の部分集合族とする。 $A$  と  $B$  の合成を、

$$BA = \{(x, z) \in X \times X \mid \text{ある } y \in X \text{ が存在して, } (x, y) \in A \text{ かつ } (y, z) \in B\}$$

と定める。 $A$  の  $n$  項の合成  $A \cdots A$  を、 $A^n$  と書く。また、 $A$  の逆を、

$$A^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in A\}$$

と定める。 $A^{-1} = A$  であるとき、 $A$  は対称であるという。

- $X$  を集合、 $A$  を  $X \times X$  の部分集合族とする。 $x \in X$  に対して、

$$A[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in A\}$$

と定める。

- $X, Y$  を集合とする。写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して、 $X \times X$  から  $Y \times Y$  への写像  $(x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))$  を、 $f^\times: X \times X \rightarrow Y \times Y$  と書く。

## 1 まえせつ

位相空間は、極限や連続性などの概念を扱うことのできる空間のクラスでした。これに対して、一様空間は、

極限や連続性などの概念を「一様に」扱うことのできる空間のクラス

であると言えます。

「一様に」というのがどういうことなのかを見るために、位相空間の範疇では扱えない概念に注目してみます。たとえば、完備性がその例です。完備性を定義するためには、Cauchy 列を定義する必要がありますが、それは距離空間  $(X, d)$  においては次のように定義されるものでした。

$X$  上の点列  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  が Cauchy 列であるとは、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、ある  $n_0 \in \mathbb{N}$  が存在して、任意の  $m, n \geq n_0$  に対して  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  が成り立つことをいう。

上の文中の「 $d(x_m, x_n) < \epsilon$ 」という部分で、点  $x_m$  と  $x_n$  がともに「動く」点であることがポイントです。「動かない」点と「動く」点との組み合わせであれば、動かない方の点の近傍フィルタを考えることで、位相空間の範疇でも扱うことができます。たとえば「点列の収束」は、「『動かない』点に『動く』点列が収束する」という形で述べられるため、位相空間の範疇で定式化できたのでした。ところが、どちらも「動く」点である場合には、こうは行きません。

別の例として、Lebesgue の被覆補題を考えてみます。これは、距離空間に関しては、次のように述べられます。

$(X, d)$  をコンパクト距離空間、 $\mathcal{U}$  をその開被覆とすると、ある  $\delta > 0$  が存在して、任意の  $x \in X$  に対して、 $x$  を中心とする半径  $\delta$  の開球は  $\mathcal{U}$  のある元に含まれる。

ここでは、 $\delta$  を  $x$  によらずに「一様に」とれるということが肝要です。位相空間の範疇では、空間の 2 点の近傍フィルタの間に明示的な関係はありませんから、このような「一様性」を表現することはできません。

このような「一様性」のからむ概念は、距離空間の範疇で定式化されることが多いと思います。距離空間は、距離という一様な「近さの基準」を備えているため、この種の概念を扱うことができるのです。

ところが、距離空間の構造は、「一様性」をあつかうには「過剰」であると言わざるを得ません。実際、完備距離空間に関する議論、あるいは距離空間に対する Lebesgue の被覆補題の証明を思い出してみれば、それらは定量的というよりはむしろ定性的で、実数の特性の使われ方は、せいぜいが「 $\epsilon/3$  をとる」程度のものであったことがわかったと思います。概念の定式化にあたってこのような「過剰」な構造を課すことは、一般性の観点から言って望ましくありませんし、本質の理解を妨げうることもあります。

そこで、「一様性」を扱うための適切な空間の範疇として、一様空間が登場します。ここまで述べてきたことから察せられると思いますが、一様空間は、位相空間と距離空間の中間に位置する概念です。すなわち、距離空間は自然に一様空間とみなすことができ、一様空間は自然に位相空間とみなすことができます。

次節から、一様空間について数学的に説明していきます。2 節では、一様空間の定義を述べます。3 節では、一様空間の 2 つの重要な例として、距離空間と位相群を見ます。4 節では、一様空間が自然に位相を定めることを説明します。5 節では、一様空間の間の射にあたる一様連続写像を定義します。最後に 6 節では、距離空間に関するよく知られた定理が、実は一様空間に対しても成り立つことを見ます。紙数の関係で、一様空間の完備性については説明できませんが、一様空間に対する Lebesgue の被覆補題については、この節で証明します。

## 2 一様空間の定義

一様空間の定義は、次のとおりです。

定義 2.1 (一様空間)  $X$  を集合とする.  $X \times X$  の部分集合族  $\mathcal{U}$  が次の条件を満たすとき,  $\mathcal{U}$  は  $X$  上の一様構造あるいは近縁系であるといい,  $(X, \mathcal{U})$  を一様空間という.

- (U1)  $\mathcal{U}$  は  $X \times X$  上のフィルタである.
- (U2) 任意の  $U \in \mathcal{U}$  は対角集合  $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$  を含む.
- (U3) 任意の  $U \in \mathcal{U}$  に対してある  $V \in \mathcal{U}$  が存在し,  $V^2 \subseteq U$  を満たす.
- (U4)  $U \in \mathcal{U}$  ならば  $U^{-1} \in \mathcal{U}$  である.

$\mathcal{U}$  を一様空間  $(X, \mathcal{U})$  の一様構造あるいは近縁系といい,  $\mathcal{U}$  の元を一様空間  $(X, \mathcal{U})$  上の近縁という.

一様構造  $\mathcal{U}$  を特に明示する必要がないときには, 単に「 $X$  は一様空間である」などともいいます.

直観的には, 一様空間  $X$  の 2 点  $x, y$  は, よりたくさんの近縁  $U$  に対して  $(x, y) \in U$  となっているほど「近い」といえます. そのように考えれば, 一様構造の条件 (U2), (U4) は, 「近さ」の基準が (ある意味で) 反射的かつ対称的になっている, という条件だと捉えられます. また, (U3) は, 「近さ」の基準を「刻む」ことができる, という条件だと捉えられます. このあたりの感覚は, 距離空間を念頭に置くと把握しやすいと思います (次節で, 一様空間の例として距離空間を見ます).

位相空間に対して開基という概念が存在したように, 一様空間に対して一様基という概念が存在します.

定義 2.2 (一様基)  $(X, \mathcal{U})$  を一様空間とし,  $\mathcal{B}$  を  $X \times X$  の部分集合族とする.

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X \mid \text{ある } B \in \mathcal{B} \text{ が存在して } B \subseteq U\}$$

であるとき,  $\mathcal{B}$  は一様空間  $(X, \mathcal{U})$  (あるいは一様構造  $\mathcal{U}$ ) の一様基であるという.  $\mathcal{B}$  が集合  $X$  上のある一様構造の一様基であることを, 単に  $\mathcal{B}$  は  $X$  上の一様基であるという.

### 3 一様空間の例

この節では, 距離空間と位相群が一様空間の例になる (より正確に言えば, 距離空間・位相群の構造が自然に一様空間の構造を定める) ことを見ます.

■距離空間  $(X, d)$  を距離空間とします. すなわち,  $d$  は  $X \times X$  から  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  への関数であって,

- 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- 任意の  $x, y \in X$  に対して  $d(y, x) = d(x, y)$
- 任意の  $x, y, z \in X$  に対して  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

を満たすとします.  $r > 0$  に対して

$$B_d(r) = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < r\}$$

と定めると,  $\{B_d(r) \mid r > 0\}$  は  $X$  上の一様基となります. すなわち,

$$\mathcal{U}_d = \{U \subseteq X \times X \mid \text{ある } r > 0 \text{ が存在して } B_d(r) \subseteq U\}$$

は  $X$  上の一様構造をなします (確かめてみてください). この一様構造  $\mathcal{U}_d$  を, 距離  $d$  が定める一様構造といいます.

■位相群  $G$  を位相群とします。すなわち、 $G$  は位相構造をもつ群であって、その演算  $G \times G \rightarrow G; (x, y) \mapsto xy$  および  $G \rightarrow G; x \mapsto x^{-1}$  は連続であるとします。単位元  $e \in G$  の各近傍  $U$  に対して

$$\begin{aligned} [U]_L &= \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in U\}, \\ [U]_R &= \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in U\} \end{aligned}$$

と定めると、このような  $[U]_L$  の全体および  $[U]_R$  の全体は、それぞれ  $X$  上の一様基となります。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_L &= \{U \subseteq X \times X \mid \text{ある単位元近傍 } U \text{ が存在して } [U]_L \subseteq U\}, \\ \mathcal{U}_R &= \{U \subseteq X \times X \mid \text{ある単位元近傍 } U \text{ が存在して } [U]_R \subseteq U\} \end{aligned}$$

はともに  $X$  上の一様構造をなします（確かめてみてください）。これらの一様構造  $\mathcal{U}_L, \mathcal{U}_R$  を、それぞれ、位相群  $G$  の左一様構造・右一様構造といいます。

## 4 一様構造が定める位相

一様空間には、次のように自然に位相が定まります。

定義 4.1（一様構造が定める位相）  $(X, \mathcal{U})$  を一様空間とする。  $X$  上の位相  $\mathfrak{O}_{\mathcal{U}}$  であって、各点  $x \in X$  が

$$\mathcal{U}[x] = \{U[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$$

を近傍フィルタとするようなものを、一様構造  $\mathcal{U}$  が定める位相という。

一様構造  $\mathcal{U}$  に対して、上の定義のような位相  $\mathfrak{O}_{\mathcal{U}}$  が一意に存在することを確認しましょう。そのためには、対応  $x \mapsto \mathcal{U}[x]$  が近傍写像の条件

- (N1) 各点  $x \in X$  に対して、 $\mathcal{U}[x]$  は  $X$  上のフィルタである。
- (N2)  $N \in \mathcal{U}[x]$  ならば  $x \in N$  である。
- (N3) 任意の  $N \in \mathcal{U}[x]$  に対して、ある  $M \in \mathcal{U}[x]$  が存在して、任意の  $y \in M$  に対して  $N \in \mathcal{U}[y]$  となる。

を満たすことを示せばよいです\*1。 (N1), (N2) はそれぞれ一様構造の条件 (U1), (U2) からすぐにわかるので、(N3) を示します。定義より、示すべき命題は

任意の  $x \in X$ ,  $U \in \mathcal{U}$  に対してある  $V \in \mathcal{U}$  が存在し、任意の  $y \in V[x]$  に対して  $U[x] \in \mathcal{U}[y]$  となる

です。  $x \in X$  と  $U \in \mathcal{U}$  を任意にとります。 (U3) より、  $V^2 \subseteq U$  を満たす  $V \in \mathcal{U}$  がとれます。すると、任意の点  $y \in V[x]$  に対して  $V[y] \subseteq U[x]$  です。実際、任意に点  $z \in V[y]$  をとると、  $y \in V[x]$  と合わせて  $z \in V^2[x] \subseteq U[x]$  がわかります。よって  $V[y] \subseteq U[x]$  かつ  $V[y] \in \mathcal{U}[y]$  だから  $U[x] \in \mathcal{U}[y]$  であり、これで (N3) が示されました。

以下では、特に断らなくても、一様空間には常に上のように定まる位相を考えるものとします。

命題 4.2  $X$  を一様空間とする。

- (1)  $X$  上の近縁の内部全体は、  $X$  の一様基をなす。特に、開近縁の全体は一様基をなす。

---

\*1 内田 [4, p. 74–75] を参照してください。

(2)  $X$  上の近縁の閉包全体は、 $X$  の一様基をなす。特に、閉近縁の全体は一様基をなす。

ここで、内部や閉包は、「 $X$  の一様構造から定まる  $X$  上の位相」から定まる  $X \times X$  上の積位相に関してのもので。

**補題** 一様空間  $X$  上の任意の近縁  $U$  と任意の  $A \subseteq X \times X$  に対して、 $A \subseteq (UAU^{-1})^\circ$ ,  $\overline{A} \subseteq U^{-1}AU$  が成り立つ。

**補題の証明** 任意の点  $(x, y) \in A$  に対して、 $U[x] \times U[y] \subseteq UAU^{-1}$  が成り立つ。実際、 $(u, v) \in U[x] \times U[y]$  ならば  $(u, x) \in U^{-1}$ ,  $(y, v) \in U$  であり、 $(x, y) \in A$  と合わせて  $(u, v) \in UAU^{-1}$  を得る。 $U[x] \times U[y]$  は  $X \times X$  における  $(x, y)$  の近傍だから、ここから  $(x, y) \in (UAU^{-1})^\circ$  が従う。よって、 $A \subseteq (UAU^{-1})^\circ$  である。

点  $(x, y) \in \overline{A}$  を任意にとる。すると、 $U[x] \times U[y]$  は  $(x, y)$  の近傍だから、 $U[x] \times U[y]$  は  $A$  と交わる。すなわち、点  $(u, v) \in (U[x] \times U[y]) \cap A$  がとれる。このとき  $(x, u) \in U$ ,  $(u, v) \in A$ ,  $(v, y) \in U^{-1}$  だから、 $(x, y) \in U^{-1}AU$  となる。よって、 $\overline{A} \subseteq U^{-1}AU$  である。□

**命題 4.2 の証明** (1)  $X$  上の任意の近縁  $U$  に対して  $U^\circ$  も近縁であることをいえばよい。一様構造の性質より、 $V^3 \subseteq U$  を満たす対称近縁  $V$  がとれる。このとき補題より  $V \subseteq (VVV^{-1})^\circ = (V^3)^\circ \subseteq U^\circ$  だから、 $U^\circ$  は近縁である。

(2)  $X$  上の任意の近縁  $U$  に対して、閉包が  $U$  に含まれるような近縁が存在することをいえばよい。一様構造の性質より、 $V^3 \subseteq U$  を満たす対称近縁  $V$  がとれる。このとき補題より  $\overline{V} \subseteq V^{-1}VV = V^3 \subseteq U$  だから、この  $V$  が求めるものである。□

一様空間（が定める位相）の分離性について、次のことがわかります。

**命題 4.3** 任意の一様空間は正則である。

**証明**  $X$  を一様空間とする。 $X$  上の閉近縁全体を  $\mathcal{T}$  と置くと、 $\mathcal{T}$  は一様基をなすので（命題 4.2 (2)）、各点  $x \in X$  において  $\mathcal{T}[x] = \{F[x] \mid F \in \mathcal{T}\}$  は  $x$  の近傍基をなす。特に、 $X$  の各点は閉集合のみからなる近傍基をもつ。よって、 $X$  は正則である。□

## 5 一様連続写像

位相空間の間の射にあたるものは連続写像でした。一様空間の間の射にあたる一様連続写像は、次のように定義されます。

**定義 5.1 (一様連続写像)** 一様空間  $X, Y$  の間の写像  $f: X \rightarrow Y$  が一様連続であるとは、 $Y$  上の任意の近縁  $V$  に対して  $f^{\times-1}(V) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid (f(x_1), f(x_2)) \in V\}$  が  $X$  上の近縁となることをいう。

$X$  と  $Y$  が距離空間の場合には、この定義は、いわゆるイプシロン・デルタ論法によるものと一致します。

容易にわかるように、一様連続写像の合成は一様連続です。また、連続性と一様連続性との間には、（期待されるとおり）次の命題が成り立ちます。

**命題 5.2**  $X, Y$  を一様空間、 $f: X \rightarrow Y$  を写像とする。 $f$  が（一様空間の間の写像として）一様連続ならば、 $f$  は（位相空間の間の写像として）連続である。

証明  $x \in X$  とする. 点  $f(x)$  の任意の近傍は,  $Y$  上の近縁  $V$  を用いて  $V[f(x)]$  と表せる.  $f$  が一様連続ならば  $f^{\times-1}(V)$  は  $X$  上の近縁となり, したがって  $f^{-1}(V[f(x)]) = f^{\times-1}(V)[x]$  は  $x$  の近傍である. よって,  $f$  は連続である.  $\square$

さて, 一様空間の「同型」は, 次のように定義されます.

定義 5.3 (一様同型)  $X, Y$  を一様空間とする. 写像  $f: X \rightarrow Y$  が全単射であり,  $f$  と  $f^{-1}$  がともに一様連続であるとき,  $f$  は  $X$  から  $Y$  への一様同型写像であるという. 一様空間  $X, Y$  の間に一様同型写像が存在するとき,  $X$  と  $Y$  は一様同型であるという.

命題 5.2 より, 一様同型写像は同相写像です. しかし, 逆は一般には成り立ちません. たとえば,  $(0, 1)$  から  $\mathbb{R}$  への写像  $x \mapsto -1/x - 1/(x-1)$  は, 同相写像ですが一様同型写像ではありません<sup>\*2</sup>. したがって, 「一様空間」は「位相空間」よりも精密な構造をもっているといえます.

## 6 コンパクト一様空間

この節では, いままで見てきたことを用いて, コンパクトな一様空間に関する定理を示します.

定理 6.1 コンパクト一様空間  $X$  の一様構造は,  $\Delta(X)$  の近傍全体, すなわち

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq U^\circ\}$$

である.

補題  $X$  を一様空間,  $U$  を  $\Delta(X)$  の近傍とする.  $X$  上のすべての近縁の交叉は,  $U$  に含まれる.

補題の証明  $(x, y) \notin U$  とする.  $U$  は  $\Delta(X)$  の近傍だから,  $U[x]$  は  $x$  の近傍である. したがって, 一様構造が定める位相の定義より,  $X$  上のある近縁  $V$  が存在して  $V[x] = U[x]$  となる. このとき  $(x, y) \notin V$  である. よって, すべての近縁の交叉は  $U$  に含まれる.  $\square$

定理 6.1 の証明  $X$  上の近縁が  $\Delta(X)$  の近傍であることは, 命題 4.2 (1) からわかる. 逆に,  $\Delta(X)$  の任意の開近傍  $U$  が  $X$  上の近縁であることを示す. 閉近縁の全体は一様基をなす (命題 4.2 (2)) から, 補題より,  $X$  上のすべての閉近縁の交叉は  $U$  に含まれる. すなわち,  $X$  上の閉近縁の全体を  $\mathcal{F}$  と置くと,  $\{U\} \cup \{F^c\}_{F \in \mathcal{F}}$  は  $X \times X$  の開被覆である.  $X \times X$  はコンパクトだから (Tychonoff の定理), 有限部分被覆  $\{U, F_1^c, \dots, F_n^c\}$  が存在する. このとき  $F_1 \cap \dots \cap F_n \subseteq U$  だから,  $U$  は  $X$  上の近縁である.  $\square$

定理 6.1 は, コンパクト空間上の一様構造が (存在すれば) 位相構造だけで決定されてしまうことを示しています. ここから, 次のことがわかります.

定理 6.2 コンパクト一様空間  $X$  から一様空間  $Y$  への写像は, 連続ならば一様連続である.

証明  $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする. すると,  $\Delta(Y)$  の近傍  $V$  に対して,  $f^{\times-1}(V)$  は  $\Delta(X)$  の近傍になる. このことと定理 6.1 より,  $f$  の一様連続性がわかる.  $\square$

<sup>\*2</sup> より強く,  $(0, 1)$  と  $\mathbb{R}$  は一様同型ではありません. すなわち,  $(0, 1)$  から  $\mathbb{R}$  へのどんな写像も一様同型ではありません. これは,  $\mathbb{R}$  は (一様空間として) 完備だが  $(0, 1)$  はそうではない, ということからわかります.

次に、一様空間に対する Lebesgue の被覆補題を示します。

**定理 6.3 (Lebesgue の被覆補題)**  $X$  をコンパクト一様空間、 $\mathfrak{U}$  をその開被覆とする。このとき、ある  $X$  上の近縁  $U$  が存在して、条件「任意の  $x \in X$  に対して、 $U[x]$  は  $\mathfrak{U}$  のある元に含まれる」を満たす。

**証明**  $\mathfrak{U}$  が開被覆であることと、一様構造が定める位相の定義より、各点  $x \in X$  に対して、 $V_x[x]$  が  $\mathfrak{U}$  のある元に含まれるような近縁  $V_x$  がとれる。これに対して、 $W_x^2 \subseteq V_x$  を満たす開近縁  $W_x$  をとる。すると、 $\{W_x[x]\}_{x \in X}$  はコンパクト空間  $X$  の開被覆だから、有限部分被覆  $\{W_{x_1}[x_1], \dots, W_{x_n}[x_n]\}$  がとれる。そこで

$$U = W_{x_1} \cap \dots \cap W_{x_n}$$

と置く。この  $U$  が条件を満たすことを示す。点  $x \in X$  を任意にとる。  $x \in W_{x_i}[x_i]$  なる  $1 \leq i \leq n$  がとれ、この  $i$  について

$$U[x] \subseteq W_{x_i}[x] \subseteq W_{x_i}^2[x_i] \subseteq V_{x_i}[x_i]$$

が成り立つ。ここで、第一の包含は  $U$  の定義から、第二の包含は  $x \in W_{x_i}[x_i]$  であることから、第三の包含は  $W_{x_i}^2 \subseteq V_{x_i}$  であることから従う。さて、 $V_{x_i}$  の定義より、 $V_{x_i}[x_i]$  を含む  $\mathfrak{U}$  の元が存在する。上の包含より、この  $\mathfrak{U}$  の元は  $U[x]$  も含む。よって、 $U$  は条件を満たす。  $\square$

距離が定める一様構造の定義を思い出せば、上の定理が「距離空間に対する Lebesgue の被覆補題」の一般化になっていることがわかります。

定理 6.2 と定理 6.3 は、どちらも距離空間に関してはよく知られたものですが、実は一様空間に対しても成り立つのです。1 節で述べたことの繰り返しになりますが、むしろ、これらの定理を述べるにあたっては、距離空間の構造は「過剰」であり、一様空間の構造こそが適切なのです。

このように、一様空間という概念は、「一様性」が関係する議論の土台として適切な構造を、私たちに与えてくれます。

## 参考文献

本稿では、Bourbaki [1] に従って近縁系を用いて一様空間を定義しましたが、一様被覆系を用いる（等価な）アプローチも知られています。たとえば Willard [3] は、これら 2 つのアプローチをともに扱っています。また、本稿では触れられなかった話題、一様空間の完備性、位相空間の一様化可能性と一様空間の距離化可能性については、Bourbaki [1, 2] や Willard [3] を参照してください。

- [1] N. Bourbaki (著), 森 毅 (編・訳), 清水 達雄 (訳), 『ブルバキ数学原論 位相 1』, 東京図書, 1968.
- [2] N. Bourbaki (著), 森 毅 (編), 山崎 泰郎 (訳), 清水 達雄 (訳), 『ブルバキ数学原論 位相 4』, 東京図書, 1969.
- [3] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.
- [4] 内田 伏一, 『集合と位相』, 数学シリーズ, 裳華房, 1986.