# コンパクト作用素のノート

箱（@o_ccah）

2020 年 9 月 19 日

**概要**

関数解析の基礎を前提として，コンパクト作用素や Fredholm 作用素について解説する．

## 目次



## 記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．
- 線型空間 $E$ の部分集合 $S$ に対して，$S$ が生成する $E$ の部分線型空間を $\operatorname{span} S$ と書く．
- 線型空間 $E$ 上の恒等作用素を，$I_E$ あるいは単に $I$ と書く．
- 距離空間において，$x$ を中心とする半径 $r \geq 0$ の閉単位球を $B(x; r)$ と書く．
- $\mathbb{K}$-ノルム空間 $E$ に対して，その位相的双対空間（$E$ 上の連続線型形式全体のなす空間）を $E'$ と書く．$E'$ は作用素ノルムによって $\mathbb{K}$-ノルム空間とみなす．また，$\mathbb{K}$-ノルム空間の間の連続線型作用素 $T\colon E \to F$ に対して，その双対作用素を $T'\colon F' \to E'$ と書く．
- $\mathbb{K}$-ノルム空間 $E$, $F$ に対して，$E$ から $F$ への連続線型写像全体のなす空間を $\mathscr{L}(E; F)$ と書く．$\mathscr{L}(E; E)$ を単に $\mathscr{L}(E)$ と書く．$\mathscr{L}(E; F)$ は作用素ノルムによって $\mathbb{K}$-ノルム空間とみなす．
- $\mathbb{K}$-Banach 空間上の連続線型作用素 $T$ のスペクトルを，$\operatorname{Sp}(T)$ と書く．

# 1　コンパクト作用素

## 1.1　コンパクト作用素

**定義 1.1（コンパクト作用素）**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ がコンパクトであるとは，$E$ の任意の有界集合 $A$ に対して $T(A)$ が全有界であることをいう．$E$ から $F$ へのコンパクト作用素の全体を，$\mathscr{LC}(E;F)$ と書く．$\mathscr{LC}(E;E)$ を単に $\mathscr{LC}(E)$ と書く．

$\mathbb{K}$-ノルム空間 $E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ がコンパクトであることをいうためには，閉単位球の像 $T(B(0;1))$ が全有界であることを示せばよい．また，$F$ が $\mathbb{K}$-Banach 空間ならば，$F$ の部分集合が全有界であることと相対コンパクトであることとは同値だから，「全有界」を「相対コンパクト」に置き換えても定義は変わらない．

距離空間が全有界であることは，その上の任意の点列が Cauchy 部分列をもつことと同値である．したがって，$\mathbb{K}$-ノルム空間 $E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ がコンパクトであるための必要十分条件は，$E$ 上の任意の有界点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 部分列をもつことである．$F$ が $\mathbb{K}$-Banach 空間ならば，これは，$E$ 上の任意の有界点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列をもつ（あるいは，距離空間だから同じことだが，接触点をもつ）こととも同値である．「有界点列」を「閉単位球内の点列」に置き換えてもよい．

**命題 1.2**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とし，$T$ を $E$ から $F$ への位相線型空間の同型とする．$T$ がコンパクトであるための必要十分条件は，$E$, $F$ が有限次元であることである．特に，$E$ 上の恒等作用素がコンパクトであるための必要十分条件は，$E$ が有限次元であることである．

**証明**　$T$ は位相線型空間の同型だから，$T$ がコンパクトであることは $F$ の有界集合が全有界であることと同値であり，これはさらに $F$ が（したがって $E$ も）有限次元であることと同値である．　□

**命題 1.3**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．

(1) $\mathscr{LC}(E;F)$ は $\mathscr{L}(E;F)$ の閉部分線型空間である．
(2) $E_1$, $F_1$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とし，$S$ を $E_1$ から $E$ への連続線型作用素，$U$ を $F$ から $F_1$ への連続線型作用素とすると，$E$ から $F$ への任意のコンパクト作用素 $T$ に対して，$STU$ は $E_1$ から $F_1$ へのコンパクト作用素である．

**証明**　(1)　$\lambda$, $\mu\in\mathbb{K}$, $T$, $S\in\mathscr{LC}(E;F)$ とすると，$T(B(0;1))$, $S(B(0;1))$ は全有界であり，したがって $(\lambda T+\mu S)(B(0;1))\subseteq\lambda T(B(0;1))+\mu S(B(0;1))$ も全有界だから，$\lambda T+\mu S\in\mathscr{LC}(E;F)$ である．よって，$\mathscr{LC}(E;F)$ は $\mathscr{L}(E;F)$ の部分線型空間である．

$\mathscr{LC}(E;F)$ が $\mathscr{L}(E;F)$ において閉であることを示す．$T$ が $\mathscr{LC}(E;F)$ の閉包に属するとして，$\epsilon>0$ を任意にとる．すると，$\|K-T\|\leq\epsilon$ を満たすコンパクト作用素 $K$ がとれる．$K(B(0;1))$ は全有界だから，有限個の点 $y_0$, …, $y_{n-1}\in F$ を $K(B(0;1))\subseteq\bigcup_{i=0}^{n-1}B(y_i;\epsilon)$ となるようにとれる．$\|K-T\|\leq\epsilon$ より任意の $x\in B(0;1)$ に対して $\|Kx-Tx\|\leq\epsilon$ だから，このとき

$$T(B(0;1))\subseteq\bigcup_{y\in K(B(0;1))}B(y;\epsilon)\subseteq\bigcup_{i=0}^{n-1}B(y_i;2\epsilon)$$

が成り立つ．任意の $\epsilon>0$ に対してこれがいえるから，$T(B(0;1))$ は全有界である．すなわち，$T$ はコンパク

トである．よって，$\mathscr{LC}(E;F)$ は $\mathscr{L}(E;F)$ において閉である．

(2)　連続線型作用素が有界集合を有界集合に，全有界集合を全有界集合にうつすことから従う．　□

**系 1.4**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間，$M$ を $E$ の部分線型空間とする．$E$ から $F$ へのコンパクト作用素 $T$ に対して，その制限 $T|_M$ もコンパクトである．

**証明**　$T|_M$ は包含写像 $M \to E$ と $T$ との合成だから，主張は命題 1.3 (2) から従う．　□

**系 1.5**　$\mathbb{K}$-ノルム空間 $E$ に対して，$\mathscr{LC}(E)$ は $\mathscr{L}(E)$ の閉イデアルである．

**証明**　命題 1.3 で $F = E$ とすれば主張を得る．　□

**命題 1.6**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ に対する次の 2 条件について，(b) $\Longrightarrow$ (a) が成り立つ．さらに，$F$ が Hilbert 空間ならば，2 条件は同値となる．

(a) $T$ はコンパクトである．
(b) $T$ は「$E$ から $F$ への有限階数の連続線型作用素全体の集合」の $\mathscr{L}(E;F)$ における閉包に属する．

**証明**　(b) $\Longrightarrow$ (a)　連続線型作用素は有界集合を有界集合にうつし，有限次元ノルム空間の有界集合は全有界だから，有限階数の連続線型作用素はコンパクトである．また，$\mathscr{LC}(E;F)$ は $\mathscr{L}(E;F)$ において閉である（命題 1.3）．よって，「$E$ から $F$ への有限階数の連続線型作用素全体の集合」の閉包は $\mathscr{LC}(E;F)$ に含まれる．

$F$ が Hilbert 空間であるとして，(a) $\Longrightarrow$ (b) を示す．$T$ がコンパクトであるとして，$\epsilon > 0$ を任意にとる．すると，$T(B(0;1))$ は全有界だから，有限個の点 $y_0, \dots, y_{n-1} \in F$ を $T(B(0;1)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} B(y_i;\epsilon)$ となるようにとれる．$F$ の有限次元部分線型空間 $\operatorname{span}\{y_0, \dots, y_{n-1}\}$ の上への直交射影を $P$ とすると，$PT$ は $E$ から $F$ への有限階数の連続線型作用素である．$\|PT - T\| \leq 2\epsilon$ であることを示す．$x \in E$, $\|x\| \leq 1$ を任意にとると，$Tx \in T(B(0;1)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} B(y_i;\epsilon)$ だから，$\|Tx - y_i\| \leq \epsilon$ となる $i$ がとれる．これを用いて，$Py_i = y_i$ に注意して式変形をすると，

$$\begin{aligned}\|PTx - Tx\| &\leq \|PTx - y_i\| + \|y_i - Tx\| \\ &= \|P(Tx - y_i)\| + \|y_i - Tx\| \\ &\leq 2\epsilon\end{aligned}$$

を得る．よって，$\|PT - T\| \leq \epsilon$ が成り立つ．これで，$T$ が「$E$ から $F$ への有限階数の連続線型作用素全体の集合」の $\mathscr{L}(E;F)$ における閉包に属することが示された．　□

**注意 1.7**　回帰的かつ可分な $\mathbb{K}$-Banach 空間 $E$ であって，「$E$ 上の有限階数の連続線型作用素全体の集合」の $\mathscr{L}(E)$ における閉包が $\mathscr{LC}(E)$ に一致しない（真に含まれる）ものが存在する [3]．

**命題 1.8**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ について，$T$ がコンパクトであることと，双対作用素 $T'$ がコンパクトであることとは同値である．

**証明**　$T$ がコンパクトであるとする．$T'$ がコンパクトであることを示すために，$F'$ の閉単位球に含まれる点列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとり，$(T'g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $E'$ に接触点をもつことを示す．Banach–Alaoglu の定理より $F'$ の閉単位球は汎弱コンパクトであり，したがって $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は汎弱位相に関する接触点 $g \in E'$ をもつ．以下，$T'g$ が $(T'g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の作用素ノルム位相に関する接触点であることを示す．

$\epsilon > 0$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ を任意にとる．$T(B(0;1))$ は全有界だから，有限個の $y_0, \ldots, y_{k-1} \in F$ を $T(B(0;1)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} B(y_i;\epsilon)$ となるようにとれる．さらに，$g$ は $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点だから，すべての $i$ に対して

$$|g_n(y_i) - g(y_i)| \leq \epsilon$$

となるような $n \geq n_0$ がとれる．この $n$ について，$\|T'g_n - T'g\| \leq 3\epsilon$ であることを示す．$x \in E$，$\|x\| \leq 1$ を任意にとると，$Tx \in T(B(0;1)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} B(y_i;\epsilon)$ だから，$\|Tx - y_i\| \leq \epsilon$ となる $i$ がとれる．これを用いて，$|g_n(y_i) - g(y_i)| \leq \epsilon$ と $\|g_n\|, \|g\| \leq 1$ に注意して式変形をすると，

$$\begin{aligned}\|(T'g_n)(x) - (T'g)(x)\| &= \|g_n(Tx) - g(Tx)\| \\ &\leq \|g_n(Tx - y_i)\| + \|g_n(y_i) - g(y_i)\| + \|g(y_i - Tx)\| \\ &\leq 3\epsilon\end{aligned}$$

を得る．よって，$\|T'g_n - T'g\| \leq 3\epsilon$ が成り立つ．これで，$T'g$ が $(T'g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の作用素ノルム位相に関する接触点であることが示された．

逆に，$T'$ がコンパクトであるとすると，すでに示した含意より $T''$ もコンパクトとなるが，$T$ は $T''$ の制限とみなせるから，このとき $T$ もコンパクトである（系 1.4）． □

**系 1.9**　$E, F$ を $\mathbb{K}$-Hilbert 空間とする．$E$ から $F$ へのコンパクト作用素 $T$ に対して，その随伴作用素 $T^*$ は $F$ から $E$ へのコンパクト作用素である．

**証明**　Riesz の表現定理より自然な Hilbert 空間の共役同型 $E' \cong E$，$F' \cong F$ が成り立ち，この同型によって双対作用素 $T'$ は随伴作用素 $T^*$ に対応するから，結論は命題 1.8 から従う．あるいは，有限階数の連続線型作用素の随伴はまた有限階数であることに注意して，命題 1.6 を用いてもよい． □

## 1.2　コンパクト作用素と弱位相

**命題 1.10**　$E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ に対する次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，$E$ が回帰的ならば，2 条件は同値となる．

(a) $T$ はコンパクトである．
(b) $E$ 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x \in E$ に弱収束するならば，$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $Tx$ に収束する．

**証明**　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$T$ がコンパクトであるとする．(b) を示すためには，$x = 0$ の場合だけを考えれば十分である．また，$F$ を完備化することで，一般性を失わず $F$ は Banach 空間であると仮定する．

$E$ 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に弱収束するとする．$T$ は $E$ の弱位相と $F$ の弱位相に関して連続だから，このとき $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に弱収束する．したがって，$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は弱位相に関して 0 以外の接触点をもたないから，ノルム位相に関しても 0 以外の接触点をもたない．$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に収束しないと仮定すると，ある $r > 0$ と部分列 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\|Tx_{n_k}\| \geq r$ が成り立つ．一方で，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に弱収束することより弱有界だから，Banach–Steinhaus の定理の帰結より有界でもあり，したがって $T$ のコンパクト性より $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は収束部分列をもつ．ところが，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\|Tx_{n_k}\| \geq r$ だったから，$(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ の極限点は 0 ではありえない．これは，$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がノルム位相に関して 0 以外の接触点をもたないことに反する．よって，背理法より，$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する．

$E$ が回帰的であるとして，(b) $\Longrightarrow$ (a) を示す．回帰的 Banach 空間上の有界点列は弱収束部分列をもつか

ら [4, 定理 2.114]，(b) が成り立つとすると，$E$ 上の任意の有界点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列をもつ．これで，主張は示された． □

**命題 1.11**　$E$, $F$ を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $T$ は有限階数である．
(b) $T$ は $E$ の弱位相と $F$ のノルム位相に関して連続である．

**証明**　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\operatorname{Im} T$ が $F$ の有限次元部分線型空間 $M$ に含まれるとする．位相線型空間の同型 $M \cong \mathbb{K}^n$ を 1 つ固定し，この同型を経由した $i$-成分への射影を $P_i\colon M \to \mathbb{K}$ と書く．すると，各 $i$ に対して $P_iT\colon E \to \mathbb{K}$ は $E$ 上の連続線型形式だが，線型形式が連続であることと弱連続であることとは同値だから，$P_iT$ は弱連続でもある．よって，$T$ は $E$ の弱位相と $F$ のノルム位相に関して連続である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$T$ が $E$ の弱位相と $F$ のノルム位相に関して連続であるとすると，弱位相の定義より，有限個の $f_0, \ldots, f_{n-1} \in E'$ を，$x \in E$ に対して $|f_0(x)|, \ldots, |f_{n-1}(x)| \leq 1$ ならば $\|Tx\| \leq 1$ となるようにとれる．ここで $x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} f_i$ とすると，$x$ の任意のスカラー倍 $\lambda x$ はすべての $i$ に対して $|f_i(\lambda x)| = 0$ を満たし，したがって $|\lambda|\|Tx\| = \|T(\lambda x)\| \leq 1$ となるから，$Tx = 0$ である．すなわち，$\bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} T$ である．$\bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} f_i$ はたかだか余次元 $n$ だから，それを含む $\operatorname{Ker} T$ もたかだか余次元 $n$ である．$T$ は線型同型 $E/\operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Im} T$ を誘導するから，$\operatorname{Im} T$ はたかだか $n$ 次元である．よって，$T$ は有限階数である． □

# 2　Fredholm の択一定理

## 2.1　位相的補空間に関する準備

**命題 2.1**　$E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$E$ の閉部分線型空間 $M$, $N$ が互いに他の代数的補空間ならば，これらは互いに他の位相的補空間でもある．

**証明**　$E$ の閉部分線型空間 $M$, $N$ が互いに他の代数的補空間ならば，写像 $M \times N \to E$; $(x, y) \mapsto x + y$ は Banach 空間の間の全単射連続線型作用素だから，開写像定理より，この写像は位相線型空間の同型である．すなわち，$M$, $N$ は互いに他の位相的補空間である． □

**命題 2.2**　$E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．

(1) $E$ の有限次元部分線型空間は，位相的補空間をもつ．
(2) $E$ の有限余次元閉部分線型空間は，位相的補空間をもつ．

**証明**　(1)　$M$ を $E$ の有限次元部分線型空間とし，$M$ の基底 $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ をとり，対応する双対基底を $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ とする．各 $\alpha_i$ は $M$ 上の連続線型形式だから，Hahn–Banach の拡張定理より，$E$ 上の連続線型形式 $\widetilde{\alpha}_i$ に拡張できる．$N = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} \widetilde{\alpha}_i$ と置くと，$N$ は $E$ の閉部分線型空間である．さらに，$M \cap N = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} \alpha_i = \{0\}$ であり，また任意の $x \in E$ に対して

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\alpha}_i(x) e_i + \left( x - \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\alpha}_i(x) e_i \right) \in M + N$$

だから $M + N = E$ である．よって，$M$, $N$ は互いに他の代数的補空間である $E$ の閉部分線型空間だから，

命題 2.1 より，これらは互いに他の位相的補空間である．

(2) $M$ を $E$ の有限余次元閉部分線型空間とする．$M$ の代数的補空間 $N$ をとると，$N$ は有限次元であり，したがって閉である．よって，$M, N$ は互いに他の代数的補空間である $E$ の閉部分線型空間だから，命題 2.1 より，これらは互いに他の位相的補空間である． □

## 2.2 Fredholm の択一定理

**補題 2.3** $E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$T$ を $E$ 上のコンパクト作用素，$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする．

(1) $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元である．

(2) $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - T)}$ は $E$ において有限余次元である．

**証明** $T$ を適当なスカラー倍で置き換えることで，一般性を失わず $\lambda = 1$ と仮定する．

(1) $T$ の $\mathrm{Ker}(I - T)$ への制限は $\mathrm{Ker}(I - T)$ 上の恒等作用素に等しく，$T$ はコンパクトだからこれもコンパクトとなる（系 1.4）．よって，命題 1.2 より，$\mathrm{Ker}(I - T)$ は有限次元である．

(2) $E/\overline{\mathrm{Im}(I - T)}$ の双対空間 $(E/\overline{\mathrm{Im}(I - T)})'$ は双対作用素の核 $\mathrm{Ker}(I - T')$ と自然に線型同型であり，$T'$ はコンパクトだから（命題 1.8），(1) より $\mathrm{Ker}(I - T')$ は有限次元である．よって，$(E/\overline{\mathrm{Im}(I - T)})'$ は有限次元であり，したがって $E/\overline{\mathrm{Im}(I - T)}$ も有限次元である．すなわち，$\overline{\mathrm{Im}(I - T)}$ は $E$ において有限余次元である． □

**補題 2.4** $E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$T$ を $E$ 上のコンパクト作用素，$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする．$E$ の閉部分線型空間 $M$ に対して，$(\lambda I - T)(M)$ は $E$ において閉である．

**証明** $T$ を適当なスカラー倍で置き換えることで，一般性を失わず $\lambda = 1$ と仮定する．

$E$ の閉部分線型空間 $M$ を任意にとる．補題 2.3 より $M \cap \mathrm{Ker}(I - T)$ は $M$ の有限次元部分線型空間だから，命題 2.2 (1) より $M$ において位相的補空間 $N$ をもつ．この $N$ は $E$ の閉部分線型空間であり，$N \cap \mathrm{Ker}(I - T) = \{0\}$ かつ $(I - T)(N) = (I - T)(M)$ を満たす．以下，$(I - T)(N)$ が $E$ において閉であることを示す．

$y \in \overline{(I - T)(N)}$ を任意にとる．すると，$N$ 上の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって $(I - T)x_n \to y$ を満たすものがとれる．この点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が有界であることを示す．そうでないとすると，各項が 0 でなく $\|x_{n_k}\| \to \infty$ を満たす部分列 $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ がとれる．$k \in \mathbb{N}$ に対して $x'_k = x_{n_k}/\|x_{n_k}\|$ と置くと，$(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は $N$ 上のノルム 1 の点の列であり，$(I - T)x_n \to y$ と $\|x_{n_k}\| \to \infty$ より $(I - T)x'_k \to 0$ を満たす．$(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は有界で $T$ はコンパクトだから，必要ならばさらに部分列をとって，$(Tx'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ はある $z \in E$ に収束するとしてよい．すると，

$$x'_k = Tx'_k + (I - T)x'_k \to z$$

だから，$z \in N$ である．また，$x'_k \to z$ より

$$(I - T)z = \lim_{k \to \infty} (I - T)x'_k = 0$$

である．よって，$z \in N \cap \mathrm{Ker}(I - T) = \{0\}$ だが，一方で $z$ はノルム 1 の点の列 $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の極限点だから，これは不可能である．よって，背理法より，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である．

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は有界で $T$ はコンパクトだから，必要ならば部分列をとって，$(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束するとしてよい．すると，$((I - T)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はともに収束するから，これらの和 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ もある $x \in E$ に収束す

る．各 $x_n$ は $N$ の点だから，$x \in N$ である．よって，

$$y = \lim_{n\to\infty}(I-T)x_n = (I-T)x \in (I-T)(N)$$

である．これで，$(I-T)(N)$ が $E$ において閉であることが示された． □

**定理 2.5（Fredholm の択一定理）** $E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$T$ を $E$ 上のコンパクト作用素，$\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ とする．$\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元，$\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ は $E$ の有限余次元閉部分線型空間であり，

$$\dim\operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \dim\operatorname{Coker}(\lambda I - T)$$

が成り立つ．特に，$\lambda I - T$ は全単射であるか，単射でも全射でもないかのどちらかである．

**証明** $T$ を適当なスカラー倍で置き換えることで，一般性を失わず $\lambda = 1$ と仮定する．補題 2.3 と定理 2.5 より，$\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元であり，$\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ は $E$ の有限余次元閉部分線型空間であることはわかっている．

まず，$I-T$ は全単射であるか，単射でも全射でもないかのどちらかであることを示す．そのためには，$I-T$ が単射であることと全射であることとの同値性をいえばよい．

$n\in\mathbb{N}$ に対して $M_n = \operatorname{Im}(I-T)^n$ と置くと，各 $M_n$ は $E$ の $T$-安定な閉部分線型空間であり（閉であることは補題 2.4 を繰り返し用いればわかる），$E = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ を満たす．ここで，$I-T$ が単射だが全射でないと仮定すると，$E = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$ となる．実際，$I-T$ が全射でないことより $M_0 \supset M_1$ であり，これを単射 $(I-T)^n$ でうつせば $M_n \supset M_{n+1}$ を得る．したがって，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $x_n \in M_n \setminus M_{n+1}$ を，

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{かつ} \quad \inf_{y\in M_{n+1}} \|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$$

を満たすようにとれる．このとき，任意の $m, n\in\mathbb{N}$，$m<n$ に対して，$(I-T)x_m + Tx_n \in M_{m+1} + M_n \subseteq M_{m+1}$ であることより

$$\|Tx_m - Tx_n\| = \|x_m - ((I-T)x_m + Tx_n)\| \geq \frac{1}{2}$$

だから，$\{Tx_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ は全有界でない．一方で，$\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ は有界だから，これは $T$ のコンパクト性に反する．よって，背理法より，$I-T$ は単射ならば全射でもある．

逆に，$I-T$ が全射であるとすると，その双対作用素 $I-T'$ は単射である．$T'$ はコンパクトだから（命題 1.8），すでに示した含意より $I-T'$ は全射でもある．よって，$I-T$ は単射である．これで，$I-T$ が単射であることと全射であることとの同値性が示された．

次に，$\dim\operatorname{Ker}(I-T) = \dim\operatorname{Coker}(I-T)$ が成り立つことを示す．すでに述べたように，$\operatorname{Ker}(I-T)$ は有限次元であり，$\operatorname{Im}(I-T)$ は有限余次元かつ閉だから，命題 2.2 より $\operatorname{Ker}(I-T), \operatorname{Coker}(I-T)$ はそれぞれ $E$ における位相的補空間 $M, N$ をもつ．さて，$E$ の有限次元部分線型空間の間の線型写像 $S_0\colon \operatorname{Ker}(I-T)\to N$ に対して，これを射影 $E\cong M\times\operatorname{Ker}(I-T)\to\operatorname{Ker}(I-T)$ および包含写像 $N\to E$ と合成して得られる連続線型作用素 $S\colon E\to E$ を考える．$S$ は有限階数だからコンパクトであり，したがって $\widetilde{T} = T+S$ もコンパクトである．$E$ を $M\times\operatorname{Ker}(I-T)$ や $\operatorname{Im}(I-T)\times N$ と同一視すると，$I-\widetilde{T}$ は $\widetilde{T}(x,y) = ((I-T)x, S_0 y)$ （$x\in M$，$y\in\operatorname{Ker}(I-T)$）と表示されるから，

$$\operatorname{Ker}(I-\widetilde{T}) = \operatorname{Ker} S_0, \qquad \operatorname{Im}(I-\widetilde{T}) = \operatorname{Im}(I-T) + \operatorname{Im} S_0$$

となる．したがって，$I-\widetilde{T}\colon E\to E$ が単射・全射であることは，それぞれ $S_0\colon \operatorname{Ker}(I-T)\to N$ が単射・全射であることと同値である．ここで，もし $\operatorname{Ker}(I-T)$ と $N$ の次元が等しくないとすると，$S_0$

として単射だが全射でないまたは全射だが単射でない線型写像がとれるが，すると $I-\widetilde{T}$ も同じ性質を満たすことになり，これは前半の結論に反する．よって，$\mathrm{Ker}(I-T)$ と $N$ は次元が等しい．すなわち，$\dim\mathrm{Ker}(I-T)=\dim\mathrm{Coker}(I-T)$ である． □

**系 2.6** $E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$T$ を $E$ 上のコンパクト作用素とする．$\mathrm{Sp}(T)\setminus\{0\}$ の点は，すべて $T$ の固有値である．

**証明** $\lambda\in\mathrm{Sp}(T)\setminus\{0\}$ とすると，スペクトルの定義より $\lambda I-T$ は全単射でないから，Fredholm の択一定理（定理 2.5）より $\lambda I-T$ は全射でも単射でもない．よって，$\lambda$ は $T$ の固有値である． □

## 2.3 コンパクト作用素のスペクトル

**命題 2.7** 無限次元 $\mathbb{K}$-Banach 空間 $E$ 上のコンパクト作用素 $T$ について，$0\in\mathrm{Sp}(T)$ である．

**証明** $0\notin\mathrm{Sp}(T)$ とすると $T$ は位相線型空間の同型となるが，これは命題 1.2 に反する． □

次の定理では，$0\in\mathbb{K}$ を中心とする半径 $r\geq 0$ の閉円板を $B(r)$ と書くことにする．

**定理 2.8** $E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$T$ を $E$ 上のコンパクト作用素とする．任意の $r>0$ に対して，$\mathrm{Sp}(T)\setminus B(r)$ は有限集合である．特に，$\mathrm{Sp}(T)$ は可算集合であり，$\mathrm{Sp}(T)\setminus\{0\}$ の点はすべて $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点である．

**証明** $r>0$ とし，$\mathrm{Sp}(T)\setminus B(r)$ から可算無限個の異なる点 $\lambda_n$（$n\in\mathbb{N}$）がとれたとして矛盾を導く．各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，系 2.6 より $\lambda_n$ は $T$ の固有値だから，対応するノルム 1 の固有ベクトル $x_n\in\mathbb{N}$ がとれる．$n\in\mathbb{N}$ に対して $M_n=\mathrm{span}\{x_0,\dots,x_n\}$ と置くと，各 $M_n$ は $E$ の $T$-安定な有限次元部分線型空間であり，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\lambda_nI-T)(M_n)&=\mathrm{span}\{(\lambda_nI-T)x_0,\dots,(\lambda_nI-T)x_{n-1},(\lambda_nI-T)x_n\}\\
&=\mathrm{span}\{(\lambda_n-\lambda_0)x_0,\dots,(\lambda_n-\lambda_{n-1})x_{n-1},(\lambda_n-\lambda_n)x_n\}\\
&=\mathrm{span}\{x_0,\dots,x_{n-1}\}\\
&=M_{n-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つ（ただし，$M_{-1}=\{0\}$ とみなす．以下同様）．また，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は異なる固有値に対応する固有ベクトルの族だから線型独立であり，$M_0\subset M_1\subset\cdots$ となる．したがって，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $y_n\in M_n\setminus M_{n-1}$ を，

$$
\|y_n\|=1 \quad かつ \quad \inf_{z\in M_{n-1}}\|y_n-z\|\geq\frac{1}{2}
$$

を満たすようにとれる．このとき，任意の $m,n\in\mathbb{N}$，$m<n$ に対して，$(\lambda_nI-T)y_n+Ty_m\in M_{n-1}+M_m\subseteq M_{n-1}$ であることより

$$
\begin{aligned}
\|Ty_n-Ty_m\|&=\|\lambda_ny_n-((\lambda_nI-T)y_n+Ty_m)\|\\
&=|\lambda_n|\|y_n-\lambda_n^{-1}((\lambda_nI-T)y_n+Ty_m)\|\\
&>\frac{r}{2}
\end{aligned}
$$

だから，$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は全有界でない．一方で，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界だから，これは $T$ のコンパクト性に反する．よって，背理法より，$\mathrm{Sp}(T)\setminus B(r)$ は有限集合である．

後半の主張は，前半の主張から容易にわかる． □

# 3 Fredholm 作用素

## 3.1 Fredholm 作用素

**定義 3.1（Fredholm 作用素）** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ が Fredholm であるとは，$\operatorname{Ker} T$ が有限次元であり，かつ $\operatorname{Im} T$ が $E$ において有限余次元かつ閉であることをいう．$E$ から $F$ への Fredholm 作用素の全体を，$\mathscr{F}(E;F)$ と書く．$\mathscr{F}(E;E)$ を単に $\mathscr{F}(E)$ と書く．

次の命題より，$\mathbb{K}$-Banach 空間の間の連続線型作用素 $T$ が Fredholm であることは，$\operatorname{Ker} T$ と $\operatorname{Coker} T$ がともに有限次元であることと同値である．

**命題 3.2** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間，$T$ を $E$ から $F$ への連続線型作用素とする．$\operatorname{Im} T$ が $F$ において有限余次元ならば，$\operatorname{Im} T$ は $F$ において閉である．

**証明** $E$ の代わりに $E/\operatorname{Ker} T$ を考えることで，一般性を失わず $T$ は単射であると仮定する．$\operatorname{Im} T$ が $F$ において有限余次元であるとして，$\operatorname{Im} T$ の $F$ における代数的補空間 $M$ をとると，$M$ は有限次元である．写像 $\widetilde{T}\colon E \times M \to F$ を $\widetilde{T}(x,y) = Tx + y$ と定めると，$\widetilde{T}$ は Banach 空間の間の全単射連続線型作用素だから，開写像定理より $\widetilde{T}^{-1}$ は位相線型空間の同型である．よって，$E \times \{0\}$ が $E \times M$ において閉であることより，$\operatorname{Im} T = \widetilde{T}(E \times \{0\})$ は $F$ において閉である． □

**定理 3.3（Atkinson の定理）** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $T$ は Fredholm である．
(b) $F$ から $E$ への連続線型作用素 $S$ であって，$ST - I_E$ と $TS - I_F$ がともに有限階数であるものが存在する．
(c) $F$ から $E$ への連続線型作用素 $S$ であって，$ST - I_E$ と $TS - I_F$ がともにコンパクトであるものが存在する．

さらに，(b) や (c) の状況で，$S$ は $F$ から $E$ への Fredholm 作用素となる．

**証明** 後半の主張は，3 条件の同値性からただちに従う．以下，3 条件の同値性を示す．

(a) $\Longrightarrow$ (b) $T$ が Fredholm であるとする．すると，$\operatorname{Ker} T$ は有限次元であり，$\operatorname{Im} T$ は有限余次元かつ閉だから，命題 2.2 より $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ はそれぞれ $E$, $F$ における位相的補空間 $M$, $N$ をもつ．$T$ を制限して $M$ から $\operatorname{Im} T$ への写像とみなしたものを $T_0$ と書くと，$T_0$ は Banach 空間の間の全単射連続作用素だから，開写像定理より位相線型空間の同型である．

射影 $F \cong \operatorname{Im} T \times N \to \operatorname{Im} T$，$T_0$ の逆作用素 $T_0\colon \operatorname{Im} T \to M$，包含写像 $M \to E$ をこの順に合成して得られる連続線型作用素 $S\colon F \to E$ を考える．$E$, $F$ をそれぞれ $M \times \operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T \times N$ と同一視すると，$ST$ と $TS$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
ST(x,x') &= S(T_0x, 0) = (T_0^{-1}T_0x, 0) = (x, 0) \qquad && (x \in M,\ x' \in \operatorname{Ker} T),\\
TS(y,y') &= T(T_0^{-1}y, 0) = (T_0T_0^{-1}y, 0) = (y, 0) \qquad && (y \in \operatorname{Im} T,\ y' \in N)
\end{aligned}
$$

と表示される．よって，$ST - I_E$ は射影 $E \cong M \times \operatorname{Ker} T \to \operatorname{Ker} T$ に，$TS - I_F$ は射影 $F \cong \operatorname{Im} T \times N \to N$

に等しい．これらはともに有限階数である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$F$ から $E$ への連続線型作用素 $S$ について，$K = ST - I_E$ と $L = TS - I_F$ がともにコンパクトであるとする．すると，

$$\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker} ST = \operatorname{Ker}(I_E + K)$$

であり，Fredholm の択一定理（定理 3.7）より $\operatorname{Ker}(I_E + K)$ は有限次元だから，$\operatorname{Ker} T$ も有限次元である．また，

$$\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} TS = \operatorname{Im}(I_F + L)$$

であり，Fredholm の択一定理（定理 3.7）より $\operatorname{Im}(I_F + L)$ は有限余次元だから，$\operatorname{Im} T$ も有限余次元である．よって，$T$ は Fredholm である．□

**系 3.4**　$\mathbb{K}$-Banach 空間 $E$, $F$ に対して，$\mathscr{F}(E;F)$ は $\mathscr{L}(E;F)$ の開集合である．

**証明**　$T_0 \in \mathscr{F}(E;F)$ とし，$F$ から $E$ への連続線型作用素 $S_0$ であって $S_0T_0 - I_E$ がコンパクトかつ $T_0S_0 - I_F$ がコンパクトであるものをとる（定理 3.3）．$K = S_0T_0 - I_E \in \mathscr{LC}(E)$，$L = T_0S_0 - I_F \in \mathscr{LC}(F)$ と置く．$T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，

$$\begin{aligned} T &= T_0 + (T_0S_0 - L)(T - T_0) \\ &= T_0(I_E + S_0(T - T_0)) - L(T - T_0) \end{aligned}$$

である．$T$ が十分 $T_0$ に近ければ，$\|S_0(T - T_0)\| < 1$ が成り立ち，したがって Banach 代数の一般論より $I_E + S_0(T - T_0)$ は $\mathscr{L}(E)$ において可逆である [5, 命題 1.8]．このような $T$ に対して，$S = (I_E + S_0(T - T_0))^{-1}S_0$ と置く．すると，

$$\begin{aligned} ST &= (I_E + S_0(T - T_0))^{-1}S_0T_0(I_E + S_0(T - T_0)) - SL(T - T_0) \\ &= (I_E + S_0(T - T_0))^{-1}(I_E + S_0(T - T_0)) + (I_E + S_0(T - T_0))^{-1}K(I_E + S_0(T - T_0)) - SL(T - T_0) \\ &= I_E + (I_E + S_0(T - T_0))^{-1}K(I_E + S_0(T - T_0)) - SL(T - T_0) \end{aligned}$$

であり，命題 1.3 より上式最右辺の $I_E$ 以外の項は $\mathscr{LC}(E)$ の元だから，$ST - I_E$ はコンパクトである．同様に，

$$\begin{aligned} TS &= T_0(I_E + S_0(T - T_0))(I_E + S_0(T - T_0))^{-1}S_0 + L(T - T_0)S \\ &= T_0S_0 + L(T - T_0)S \\ &= I_F + L + L(T - T_0)S \end{aligned}$$

であり，命題 1.3 より上式最右辺の $I_E$ 以外の項は $\mathscr{LC}(E)$ の元だから，$TS - I_F$ はコンパクトである．よって，定理 3.3 より $T \in \mathscr{F}(E;F)$ である．これで，$\mathscr{F}(E;F)$ が $\mathscr{L}(E;F)$ の開集合であることが示された．□

**系 3.5**　$E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とし，$\pi\colon \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E)$ を自然な全射とする．$E$ 上の連続線型作用素 $T$ が Fredholm であるための必要十分条件は，$\pi(T)$ が $\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E)$ において可逆であることである．すなわち，$\mathscr{F}(E) = \pi^{-1}((\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^{\times})$ である．

**証明**　Atkinson の定理（定理 3.3）で $F = E$ とした場合である．□

## 3.2 Fredholm 指数

**定義 3.6** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$E$ から $F$ への Fredholm 作用素 $T$ に対して，その **Fredholm 指数**を

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T$$

と定める．

Fredholm の択一定理（定理 2.5）は，$\mathbb{K}$-Banach 空間 $E$ 上のコンパクト作用素 $T$ と $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ に対して，$\lambda I - T$ が Fredholm 指数 0 の Fredholm 作用素であることを主張している．

**定理 3.7（Fredholm 指数の加法性）** $E$, $F$, $G$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$T$ が $E$ から $F$ への Fredholm 作用素であり，$S$ が $F$ から $G$ への Fredholm 作用素ならば，$ST$ は $E$ から $G$ への Fredholm 作用素であり，

$$\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$$

が成り立つ．

**証明** より一般に，次の主張を示す．

> $E$, $F$, $G$ を可換体上の線型空間，$T\colon E \to F$，$S\colon F \to G$ を線型写像とし，$\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Coker} T$, $\operatorname{Ker} S$, $\operatorname{Coker} S$ はすべて有限次元であるとする．このとき，$\operatorname{Ker} ST$, $\operatorname{Coker} ST$ は有限次元であり，
>
> $$\operatorname{Ker} ST - \operatorname{Coker} ST = (\operatorname{Ker} T - \operatorname{Coker} T) + (\operatorname{Ker} S - \operatorname{Coker} S)$$
>
> が成り立つ．

まず，$T$ の制限 $T|_{\operatorname{Ker} ST}\colon \operatorname{Ker} ST \to \operatorname{Ker} S$ を考える．$T|_{\operatorname{Ker} ST}$ の核は $\operatorname{Ker} T$，像は $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} S$ だから，$T|_{\operatorname{Ker} ST}$ は線型同型

$$\operatorname{Ker} ST / \operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} S$$

を誘導する．したがって，

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} ST &= \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ker} ST / \operatorname{Ker} T \\ &= \dim \operatorname{Ker} T + \dim(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} S) \\ &= \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ker} S - \dim \operatorname{Ker} S / (\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} S) \end{aligned} \tag{$*$}$$

が成り立つ（$\operatorname{Ker} ST$ が有限次元であることも同時に示されている）．次に，$S$ が誘導する線型写像 $\overline{S}\colon \operatorname{Coker} T \to \operatorname{Coker} ST$ を考える．$\overline{S}$ の核は $(\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} S)/\operatorname{Im} T$，像は $\operatorname{Im} S / \operatorname{Im} ST$ だから，$\overline{S}$ は線型同型

$$\operatorname{Coker} T / ((\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} S)/\operatorname{Im} T) \cong \operatorname{Im} S / \operatorname{Im} ST$$

を誘導する．したがって，

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Coker} ST &= \dim \operatorname{Coker} S + \dim \operatorname{Im} S / \operatorname{Im} ST \\ &= \dim \operatorname{Coker} S + \dim \operatorname{Coker} T / ((\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} S)/\operatorname{Im} T) \\ &= \dim \operatorname{Coker} S + \dim \operatorname{Coker} T - \dim (\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} S)/\operatorname{Im} T \end{aligned} \tag{$**$}$$

が成り立つ（Coker $ST$ が有限次元であることも同時に示されている）．最後に，第二同型定理より

$$\operatorname{Ker} S/(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} S) \cong (\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} S)/\operatorname{Im} T \tag{$***$}$$

が成り立つことに注意する．以上 3 式 ($*$), ($**$), ($***$) より，示すべき結論

$$\operatorname{Ker} ST - \operatorname{Coker} ST = (\operatorname{Ker} T - \operatorname{Coker} T) + (\operatorname{Ker} S - \operatorname{Coker} S)$$

を得る． □

**定理 3.8（Fredholm 指数のコンパクト摂動に対する安定性）** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$E$ から $F$ への Fredholm 作用素 $T$ とコンパクト作用素 $K$ に対して，$T+K$ も Fredholm であり，$\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$ が成り立つ．

**証明** $T$ は Fredholm 作用素だから，Atkinson の定理（定理 3.3）より，$F$ から $E$ への Fredholm 作用素 $S$ を $ST - I_E$ と $TS - I_F$ がともにコンパクトであるようにとれる．すると，$S(T+K) - I_E$ と $(T+K)S - I_F$ もコンパクトだから，Atkinson の定理（定理 3.3）より，$T+K$ は Fredholm である．

次に，$\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$ を示す．$ST$ は $I_E$ のコンパクト摂動だから，Fredholm の択一定理（定理 2.5）より $\operatorname{ind} ST = 0$ である．したがって，Fredholm 指数の加法性（定理 3.7）より

$$\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S = 0$$

である．また，$S(T+K)$ も $I_E$ のコンパクト摂動だから（命題 1.3 (2)），同様にして

$$\operatorname{ind}(T+K) + \operatorname{ind} S = 0$$

を得る．よって，$\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$ が成り立つ． □

**定理 3.9（Fredholm 指数の連続性）** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．Fredholm 指数を与える写像 $\operatorname{ind}\colon \mathscr{F}(E;F) \to \mathbb{Z}$ は，作用素ノルムに関して連続（あるいは同じことだが，局所定数）である．

**証明** $T_0 \in \mathscr{F}(E;F)$ とすると，Atkinson の定理（定理 3.3）より，$F$ から $E$ への Fredholm 作用素 $S_0$ を $S_0T_0 - I_E$ がコンパクトであるようにとれる．すると，Fredholm 指数の加法性とコンパクト摂動に対する安定性（定理 3.7，定理 3.8）より，

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} T_0 + \operatorname{ind} S_0 &= \operatorname{ind} S_0T_0 \\ &= \operatorname{ind} I_E \\ &= 0\end{aligned}$$

である．次に，$T \in \mathscr{F}(E;F)$ が十分 $T_0$ に近く，$\|S_0(T - T_0)\| < 1$ が成り立つとすると，Banach 代数の一般論より $I_E + S_0(T-T_0)$ は $\mathscr{L}(E)$ において可逆である [5, 命題 1.8]．このような $T$ に対して，Fredholm 指数の加法性とコンパクト摂動に対する安定性（定理 3.7，定理 3.8），および $I_E + S_0(T-T_0)$ が可逆であることより

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S_0 &= \operatorname{ind} TS_0 \\ &= \operatorname{ind}(T_0S_0 + (T-T_0)S) \\ &= \operatorname{ind}(I_E + (T-T_0)S) \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る．よって，$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_0$ である．これで，ind が作用素ノルムに関して連続であることが示された． □

$E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とすると，$\mathscr{LC}(E)$ は $\mathscr{L}(E)$ の閉イデアルだから（系 1.5），商 Banach 代数 $\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E)$ が考えられる．Banach 代数の一般論より，乗法群 $(\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^\times$ は相対位相に関して位相群をなす [5, 系 1.9]．これを用いると，上に述べた 3 つの定理は，$F = E$ の場合には次のようにまとめられる．

**定理 3.10** $E$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．Fredholm 指数を与える写像 $\operatorname{ind}\colon \mathscr{F}(E) \to \mathbb{Z}$ は，連続（あるいは同じことだが，局所定数）群準同型 $\overline{\operatorname{ind}}\colon (\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^\times \to \mathbb{Z}$ を誘導する．

**証明** $\pi\colon \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E)$ を自然な全射とすると，$\mathscr{F}(E) = \pi^{-1}((\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^\times)$ だから（系 3.5），$\pi$ の制限として写像 $\pi|_{\mathscr{F}(E)}\colon \mathscr{F}(E) \to (\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^\times$ を得る．$\pi$ は全射，開かつ連続で演算を保つから，$\pi|_{\mathscr{F}(E)}$ は全射，開かつ連続な群準同型である．Fredholm 指数の加法性と連続性（定理 3.7，定理 3.9）より，Fredholm 指数を与える写像 $\operatorname{ind}\colon \mathscr{F}(E) \to \mathbb{Z}$ は連続群準同型である．さらに，Fredholm 指数のコンパクト摂動に対する安定性（定理 3.8）より，ind は $\pi|_{\mathscr{F}(E)}$ を経由し，連続群準同型 $\overline{\operatorname{ind}}\colon (\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^\times \to \mathbb{Z}$ を誘導する．これで，主張は示された． □

最後に，Fredholm 指数 0 の Fredholm 作用素の特徴付けを述べる．

**命題 3.11** $E$, $F$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間とする．$E$ から $F$ への連続線型作用素 $T$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $T$ は Fredholm 指数 0 の Fredholm 作用素である．
(b) $T$ は $E$ から $F$ への可逆な連続線型作用素と有限階数をもつ連続線型作用素との和として書ける．
(c) $T$ は $E$ から $F$ への可逆な連続線型作用素とコンパクト作用素の和として書ける．

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b) $T$ が Fredholm 指数 0 の Fredholm 作用素であるとすると，$\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Coker} T < \infty$ である．$\operatorname{Ker} T$ は有限次元であり，$\operatorname{Im} T$ は有限余次元かつ閉だから，命題 2.2 より $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ はそれぞれ $E$, $F$ における位相的補空間 $M$, $N$ をもつ．$\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Coker} T = \dim N$ より線型同型写像 $S_0\colon \operatorname{Ker} T \to N$ がとれるが，これを射影 $E \cong M \times \operatorname{Ker} T \to \operatorname{Ker} T$ および包含写像 $N \to F$ と合成して得られる連続線型作用素 $S\colon E \to F$ を考える．$S$ は有限階数である．また，$T + S\colon E \to F$ は Banach 空間の間の全単射連続線型作用素だから，開写像定理より位相線型空間の同型である．よって，$T$ は $E$ から $F$ への可逆な連続線型作用素 $T + S$ と有限階数をもつ連続線型作用素 $-S$ との和として書ける．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) $T$ が $E$ から $F$ への可逆な連続線型作用素 $T_0$ とコンパクト作用素 $K$ の和として書けるとすると，Fredholm 指数のコンパクト摂動に対する安定性（定理 3.8）より，$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_0 = 0$ である． □

## 3.3 複素 Hilbert 空間上の Fredholm 作用素

本小節では，複素 Hilbert 空間 $E$ に対して，その上の Fredholm 作用素全体のなす集合 $\mathscr{F}(E)$ の（作用素ノルム位相に関する）弧状連結成分を決定する．

次の事実の証明は，「スペクトル分解のノート」 [6, 定理 2.46] を参照のこと．

**事実 3.12**　$E$ を複素 Hilbert 空間とする．$E$ 上の可逆な連続線型作用素全体のなす群 $\mathscr{L}(E)^{\times}$ は，作用素ノルム位相に関して弧状連結である．

$\mathscr{F}(E)$ の弧状連結成分を決定する．$E$ が有限次元の場合は，$\mathscr{F}(E) = \mathscr{L}(E)$ であり，$\mathscr{F}(E)$ 自体が唯一の連結成分となる．そこで，$E$ が無限次元の場合を考える．

**定理 3.13**　$E$ を無限次元複素 Hilbert 空間とする．各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathscr{F}_n = \{T \in \mathscr{F}(E) \mid \operatorname{ind} T = n\}$$

は $\mathscr{F}(E)$ の作用素ノルム位相に関する弧状連結成分である．さらに，$\mathscr{F}(E)$ の弧状連結成分はこれで尽くされる．

**証明**　Fredholm 指数を与える写像 $\operatorname{ind}\colon \mathscr{F}(E) \to \mathbb{Z}$ は連続だから（定理 3.9），$\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{F}(E)$ の位相的な分割を与える．また，ind が全射であることが，次のようにしてわかる．ind は群準同型 $\overline{\operatorname{ind}}\colon (\mathscr{L}(E)/\mathscr{LC}(E))^{\times} \to \mathbb{Z}$ を経由するから（定理 3.10），ind が全射であることを示すためには，$\operatorname{ind}(T) = 1$ となる $T \in \mathscr{F}(E)$ の存在をいえばよい．このためには，たとえば，$E$ の正規直交基底 $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$（$E$ は無限次元だから，$\Lambda$ は無限集合となる）をとり，1 つの添字 $\lambda_0 \in \Lambda$ と全単射 $\phi\colon \Lambda \setminus \{\lambda_0\} \to \Lambda$ を固定し，$T \in \mathscr{L}(E)$ を

$$Te_\lambda = \begin{cases} e_{\phi(\lambda)} & (\lambda \neq \lambda_0) \\ 0 & (\lambda = \lambda_0) \end{cases}$$

によって定めればよい．よって，ind は全射である．すなわち，どの $\mathscr{F}_n$ も空ではない．あとは，$n \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathscr{F}_n$ の任意の 2 点が $\mathscr{F}_n$ 内の曲線で結べることを示せばよい．

まず，$\mathscr{F}_0$ の任意の 2 点が $\mathscr{F}_0$ 内の曲線で結べることを示す．そのためには，$\mathscr{F}_0$ の任意の点が $\mathscr{F}_0$ 内の曲線で $I$ と結べることをいえばよい．命題 3.11 より，$\mathscr{F}_0$ の任意の点は，$T \in \mathscr{L}(E)^{\times}$ と $K \in \mathscr{LC}(E)$ を用いて $T + K$ と書ける．Fredholm 指数のコンパクト摂動に対する安定性（定理 3.8）より，

$$[0,1] \to \mathscr{L}(E); \quad t \mapsto T + tK$$

は $T$ と $T+K$ を結ぶ $\mathscr{F}_0$ 内の曲線である．さらに，$\mathscr{L}(E)^{\times}$ は弧状連結だから（事実 3.12），$T$ は $\mathscr{L}(E)^{\times} \subseteq \mathscr{F}_0$ 内の曲線で $I$ と結べる．よって，$\mathscr{F}_0$ の任意の点は $\mathscr{F}_0$ 内の曲線で $I$ と結べるから，主張は示された．

次に，一般に $\mathscr{F}_n$（$n \in \mathbb{Z}$）の任意の 2 点が $\mathscr{F}_n$ 内の曲線で結べることを示す．2 点 $T_0, T_1 \in \mathscr{F}_n$ を任意にとる．Atkinson の定理（定理 3.3）より，$S_0 \in \mathscr{F}(E)$ を $K = T_0S_0 - I$ がコンパクトであるようにとれる．すると，Fredholm 指数の加法性とコンパクト摂動に対する安定性（定理 3.7，定理 3.8）より

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} S_0T_1 &= \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} S_0 \\ &= \operatorname{ind} T_1 - \operatorname{ind} T_0 + \operatorname{ind} S_0T_0 \\ &= n - n + \operatorname{ind} I \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．したがって，前段の結果より，$I$ と $S_0T_1$ を結ぶ $\mathscr{F}_0$ 内の曲線 $\gamma\colon [0,1] \to \mathscr{F}_0$ がとれる．これを用いて曲線

$$[0,1] \to \mathscr{L}(E); \quad t \mapsto T_0\gamma(t)$$

を考えると，Fredholm 指数の加法性（定理 3.7）より任意の $t \in [0,1]$ に対して $\operatorname{ind} T_0\gamma(t) = \operatorname{ind}\gamma(t) + \operatorname{ind} T_0 = n$ だから，これは $T_0$ と $T_0S_0T_1 = (I+K)T_1$ を結ぶ $\mathscr{F}_n$ 内の曲線である．さらに，Fredholm 指数のコンパ

クト摂動に対する安定性（定理 3.8）より，

$$[0,1] \to \mathscr{L}(E); \quad t \mapsto (I+tK)T_1$$

は $T_1$ と $(I+K)T_1$ を結ぶ $\mathscr{F}_n$ 内の曲線である．よって，$\mathscr{F}_n$ の任意の 2 点は $\mathscr{F}_n$ 内の曲線で結べる．これで，主張は示された．□

## 参考文献

全体を通して，Arveson [1] を参考にした．コンパクト作用素と弱位相の関係（1.2 節）や複素 Hilbert 空間上の Fredholm 作用素（3.3 節）については，Conway [2] を参考にした．


[1] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[2] J. B. Conway, *Functional Analysis*, 2nd edition, Springer, 2007.

[3] P. Enflo, “A counterexample to the approximation problem in Banach spaces”, *Acta Mathematica* **130**.1 (1973): 309–317.

[4] 宮島 静雄,『関数解析』，横浜図書，2005.

[5] 箱,「Gelfand 理論のノート」，2020 年 9 月 18 日版.
`https://o-ccah.github.io`

[6] 箱,「スペクトル分解のノート」，2020 年 9 月 10 日版.
`https://o-ccah.github.io`

[7] Mathematics Stack Exchange ‘Finite-dimensional subspaces of normed vector spaces are direct summands’.（2020 年 9 月 18 日アクセス）
`https://math.stackexchange.com/questions/104440/finite-dimensional-subspaces-of-normed-vector-spaces-are-direct-summands`

[8] Mathematics Stack Exchange ‘Is compact operator weak-to-norm continuous?’.（2020 年 9 月 18 日アクセス）
`https://math.stackexchange.com/questions/178581/is-compact-operator-weak-to-norm-continuous`