院試おつかれさまでした

東大 2016 A5

(1) $z^5 + 13z - 5 = 0$ の解の絶対値はすべて < 2 を示せ.

(2)
$$\int_{|z|=2} \frac{z^4+1}{z^5+13z-5}\,dz$$
を求めよ.

解答 (1) Rouché の定理.

$$f(z) = z^5 + 13z - 5, \quad g(z) = z^5$$

$$\rightsquigarrow |f(z) - g(z)| = |13z - 5| \leq 13|z| + 5$$
$\downarrow$ $|z| = 2$
$$= 31$$
$$< 32$$
$$= |z|^5$$

$\longrightarrow$ $f(z)$ と $g(z)$ は $\{|z| < 2\}$ に同じ数の根をもつから OK.

(2) 留数定理より. $z^5 + 13z - 5$ の根を $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ とすると,
$$\int_{|z|=2} \frac{z^4+1}{z^5+13z-5}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{5} \operatorname*{Res}_{z=\alpha_j} \frac{z^4+1}{z^5+13z-5}$$
$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{5} \frac{\alpha_j^4 + 1}{(\alpha_j - \alpha_1) \underset{\hat{j}}{\cdots} (\alpha_j - \alpha_5)}$$

$\longrightarrow$ 破滅

偏角の原理より.
$$\int_{|z|=2} \frac{(z^5+13z-5)'}{z^5+13z-5}\,dz = 5 \cdot 2\pi i$$
$(z^5+13z-5)' = 5z^4+13$

一方で. Cauchy の積分定理より. P: 多項式に対して

$\deg P \leq 5 - 2 = 3$

$$\int_{|z|=2} \frac{P(z)}{z^5+13z-5} = \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{z^5+13z-5} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{|z|=2} \frac{z^4+1}{z^5+13z-5}\,dz = \frac{1}{5}\int_{|z|=2} \frac{(z^5+13z-5)'}{z^5+13z-5}\,dz$$

$$= 2\pi i.$$

□

$$\sum_{j=1}^{5} \frac{\alpha_j^4+1}{(\alpha_j-\alpha_1)\cdots(\alpha_j-\alpha_5)} = 1.$$

一般に: $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$: distinct cpx. num. に対して,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^k}{(\alpha_j-\alpha_1)\cdots \underset{\hat{j}}{\cdots} (\alpha_j-\alpha_n)} = \begin{cases} 0 & (0 \le k \le n-2) \\ 1 & (k = n-1). \end{cases}$$

(Euler の公式).