辰馬双対定理

箱（@o_ccah）

2022 年 5 月 1 日

（最終更新日：2022 年 5 月 1 日）

概要

局所コンパクト可換群に対する Pontryagin 双対定理と，コンパクト群に対する淡中双対定理は，いずれも「表現から群が復元できる」と主張する定理だと解釈できます．この主張を一般の（可換ともコンパクトとも限らない）局所コンパクト群に拡張したものが，1967 年に辰馬伸彦によって証明された辰馬双対定理です．

本発表では，辰馬双対定理の主張とその証明を紹介します．

位相群，Lebesgue 積分，Hilbert 空間とその上の有界作用素に関する基本的なことは前提知識として仮定します．局所コンパクト群上の積分や位相群の表現について知っているとなおよいですが，これらは発表中に簡単に説明する予定です．

目次

記号と用語

- 線型空間などの係数体は常に $\mathbb{C}$ とし，いちいち明示しない．特に断らない限り，関数は複素数値のものを考える．
- Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素を $I_{\mathcal{H}}$ と書く．
- Hilbert 空間の族 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ の Hilbert 直和を $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と書く．
- Hilbert 空間の族 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ の Hilbert テンソル積を $\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と書く．

- 局所コンパクト Hausdorff な位相群を，単に局所コンパクト群という．コンパクト Hausdorff な位相群を，単にコンパクト群という．

1 位相群のユニタリ表現

1.1 位相群のユニタリ表現

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体がなす群を $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ と書く．弱作用素位相と強作用素位相は $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ 上で一致し，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ はこの位相に関して位相群をなす．以下，この方法で $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ を位相群とみなす．

定義 1.1（ユニタリ表現） G を位相群とする．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とするとき，連続群準同型 $\pi\colon G \to \mathscr{U}(\mathcal{H})$ を G の $\mathcal{H}$ 上の**ユニタリ表現**（unitary representation）という．このとき，$(\pi, \mathcal{H})$ は G のユニタリ表現である，ともいう．

Hilbert 空間を表す記号を明示せずに，π は G のユニタリ表現である，などということもある．このときは，対応する Hilbert 空間を $\mathcal{H}_\pi$ と書くことにする．

例 1.2 G を位相群，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とするとき，任意の $x \in G$ に対して恒等作用素 $I_{\mathcal{H}}$ を与える写像は，明らかに G の $\mathcal{H}$ 上のユニタリ表現である．これを G の $\mathcal{H}$ 上の**自明表現**（trivial representation）といい，$\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ と書く．

G を位相群とし，$\{(\pi_i, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ を G のユニタリ表現の族とする．このとき，

$$\left(\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\pi_i\right)(x) = \widehat{\bigoplus_{i\in I}}\pi_i(x) \qquad (x \in G)$$

と定めると，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\pi_i$ は G の $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ 上のユニタリ表現である．これを，ユニタリ表現の族の **Hilbert 直和**という．また，I が有限であるとき，

$$\left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\pi_i\right)(x) = \widehat{\bigotimes_{i\in I}}\pi_i(x) \qquad (x \in G)$$

と定めると，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\pi_i$ は G の $\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ 上のユニタリ表現である．これを，ユニタリ表現の族の **Hilbert テンソル積**という．

定義 1.3（ユニタリ同値） G を位相群，$(\pi_1, \mathcal{H}_1)$, $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ を G のユニタリ表現とする．ユニタリ作用素 $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ であって任意の $x \in G$ に対して $U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$ を満たすものを，π_1 から π_2 への**ユニタリ同値**（unitary equivalence）という．π_1 から π_2 へのユニタリ同値が存在するとき，π_1 と π_2 は**ユニタリ同値**（unitarily equivalent）であるといい，$\pi_1 \cong \pi_2$ と書く．

定義 1.4（既約ユニタリ表現） G を位相群，$(\pi, \mathcal{H})$ を G のユニタリ表現であって $\mathcal{H} \neq 0$ であるものとする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{K}$ であって任意の $x \in G$ に対して $\pi(x)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ を満たす（このとき $\mathcal{K}$ は G-**安定**（stable）であるという）ものが 0 と $\mathcal{H}$ のみであるとき，π は**既約**（irreducible）であるという．

1.2 局所コンパクト群の左正則表現

定義 1.5（左・右・両側 Haar 測度） G を局所コンパクト群とする．

(1) G 上の正則 Borel 測度 $\mu \neq 0$ であって，任意の $x \in G$ と Borel 集合 $S \subseteq G$ に対して $\mu(xS) = \mu(S)$ を満たすものを，G の**左 Haar 測度**という．
(2) G 上の正則 Borel 測度 $\mu \neq 0$ であって，任意の $x \in G$ と Borel 集合 $S \subseteq G$ に対して $\mu(Sx) = \mu(S)$ を満たすものを，G の**右 Haar 測度**という．
(3) G 上の正則 Borel 測度であって左 Haar 測度でも右 Haar 測度でもあるものを，G の**両側 Haar 測度**あるいは単に **Haar 測度**という．

事実 1.6（左 Haar 測度の存在と一意性） 任意の局所コンパクト群 G に対して，G の左 Haar 測度が正の定数倍を除いて一意に存在する．

正則 Borel 測度の定義や左 Haar 測度の存在と一意性（事実 1.6）については，たとえば Cohn [1, ch. 8] を参照のこと．

例 1.7 (1) $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ の Lebesgue 測度は Haar 測度である．
(2) 離散群の数え上げ測度は Haar 測度である．

G を局所コンパクト群として G の左 Haar 測度を 1 つ固定し，L^2 空間 $L^2(G)$ を考える．$x \in G$ に対して関数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ に対する作用素 $\lambda(x)$ を

$$\lambda(x)f(y) = f(x^{-1}y) \qquad (x \in G)$$

と定めると，左 Haar 測度の定義から $\lambda(x)$ は $L^2(G)$ 上のユニタリ作用素となり，λ は G の $L^2(G)$ 上のユニタリ表現となる（連続性は，コンパクト台連続関数全体の空間 $C_c(G)$ が $L^2(G)$ において稠密であること [1, Prop. 7.4.3] を用いて証明できる）．このユニタリ表現 λ を，G の**左正則表現**（left regular representation）という．

2 Pontryagin 双対定理，淡中双対定理から辰馬双対定理へ

2.1 Pontryagin 双対定理

絶対値 1 の複素数全体がなす位相群を $\mathbb{U}$ と書く．

定義 2.1（双対群） G を局所コンパクト可換群とする．G から $\mathbb{U}$ への連続群準同型全体がコンパクト一様収束位相に関してなす位相群を，G の**双対群**といい，$\widehat{G}$ と書く．

定理 2.2（Pontryagin 双対定理） 局所コンパクト可換群 G に対して，その双対群 $\widehat{G}$ も局所コンパクト可換群である．さらに，$x \in G$ に対して $\mathrm{ev}_x \in \widehat{\widehat{G}}$ を

$$\mathrm{ev}_x(\chi) = \chi(x) \qquad (\chi \in \widehat{G})$$

と定めると，G から $\widehat{\widehat{G}}$ への写像 $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ は位相群の同型である．

双対群 $\widehat{G}$ は，G の 1 次元ユニタリ表現のユニタリ同値関係に関する完全代表系である．ところが，Schur の補題より可換な位相群のユニタリ表現はすべて 1 次元だから，$\widehat{G}$ は G の既約ユニタリ表現のユニタリ同値関係に関する完全代表系でもある．したがって，Pontryagin 双対定理は，「局所コンパクト可換群がその既約ユニタリ表現から復元できる」と主張する定理だと解釈できる．

2.2 淡中双対定理と辰馬双対定理

局所コンパクト群 G に対して，そのユニタリ表現全体の集まりを $\mathrm{Rep}(G)$ と書く．（これは集合をなさない．注意 2.9 も参照のこと．）

定義 2.3（許容作用素場） G を局所コンパクト群とする．$\mathrm{Rep}(G)$ 上の**許容作用素場**（admissible operator field）とは，$\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ に対してユニタリ作用素 $T_\pi \in \mathscr{U}(\mathcal{H}_\pi)$ を与える族 $(T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ であって，次の 3 条件を満たすものである．

(i) 任意の $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Rep}(G)$ と π_1 から π_2 へのユニタリ同値 $U\colon \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ に対して，$UT_{\pi_1} = T_{\pi_2}U$ である．

(ii) 任意の $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Rep}(G)$ に対して，$T_{\pi_1\oplus\pi_2} = T_{\pi_1} \oplus T_{\pi_2}$ である．

(iii) 任意の $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Rep}(G)$ に対して，$T_{\pi_1 \widehat{\otimes} \pi_2} = T_{\pi_1} \widehat{\otimes} T_{\pi_2}$ である．

$\mathrm{Rep}(G)$ を「G のユニタリ表現を対象，その間のユニタリ同値を射とする圏」とみなせば，$\mathrm{Rep}(G)$ 上の許容作用素場とは「恒等関手 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Rep}(G)}$ から自身への自然変換であって直和・Hilbert テンソル積と整合するもの」といえる．

命題 2.4 G を局所コンパクト群，$(T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ を $\mathrm{Rep}(G)$ 上の許容作用素場とする．このとき，G のユニタリ表現の族 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ に対して，$T_{\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\pi_i} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_{\pi_i}$ である．

証明 各 $i \in I$ に対する自然なユニタリ同値 $\widehat{\bigoplus}_{j\in I} \pi_j \cong \pi_i \oplus \widehat{\bigoplus}_{j\in I\setminus\{i\}} \pi_j$ に注意して，定義 2.3 の条件 (i), (ii) を用いればよい． □

系 2.5 G を局所コンパクト群，$(T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ を $\mathrm{Rep}(G)$ 上の許容作用素場とする．このとき，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自明表現 $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ について，$T_{\mathbf{1}_{\mathcal{H}}} = I_{\mathcal{H}}$ である．

証明 1 次元自明表現については，自然なユニタリ同値 $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} \cong \mathbf{1}_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ と定義 2.3 の条件 (i), (iii) から $T_{\mathbf{1}_{\mathbb{C}}} = I_{\mathbb{C}}$ がわかる．一般の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自明表現 $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ は 1 次元自明表現の Hilbert 直和にユニタリ同値だから，定義 2.3 の条件 (i) と命題 2.4 から結論を得る． □

許容作用素場の全体は，次のように位相群をなす．

定義 2.6（許容作用素場のなす位相群） G を局所コンパクト群とする．$\mathrm{Rep}(G)$ 上の許容作用素場全体の集合を $\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))$ と書く．$\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))$ は成分ごとの合成と次の性質で特徴付けられる位相によって位相群をなす：

> $\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))$ 上のネット $(\boldsymbol{T}^i = (T^i_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)})_{i\in I}$ が $\boldsymbol{T} = (T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ に収束するための必要十分条件は，任意の $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ に対して $\mathscr{U}(\mathcal{H}_\pi)$ の位相で $T^i_\pi \to T_\pi$ となることである．

以下，この方法で $\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))$ を位相群とみなす．

コンパクト群 G に対して $\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))$ が G の復元になっていることを主張するのが淡中双対定理（1939）であり，それを一般の局所コンパクト群に対して主張するのが辰馬双対定理（1967）である．明らかに辰馬双対定理は淡中双対定理の一般化だが，歴史的経緯を尊重し，分けて書いておくことにする．

定理 2.7（淡中双対定理） コンパクト群 G に対して，写像

$$\varPhi\colon G \to \mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G)), \quad x \mapsto (\pi(x))_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$$

は位相群の同型である．

定理 2.8（辰馬双対定理） 局所コンパクト群 G に対して，写像

$$\varPhi\colon G \to \mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G)), \quad x \mapsto (\pi(x))_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$$

は位相群の同型である．

注意 2.9 局所コンパクト群 G に対してそのユニタリ表現全体の集まり $\mathrm{Rep}(G)$ は集合をなさないから，$\mathrm{Rep}(G)$ で添字付けられた族を用いている定義 2.6 は集合論的に問題がある．これを回避する方法には，次の 2 つがある．

- Grothendieck 宇宙を用いる．
- $\mathrm{Rep}(G)$ の代わりに κ を十分大きい無限基数として「Hilbert 空間次元が κ 以下のユニタリ表現の全体 $\mathrm{Rep}^{\leq\kappa}(G)$」を考え，さらにそのユニタリ同値関係に関する完全代表系をとる（これは集合としてとれる）．具体的には，κ を $L^2(G)$ の Hilbert 空間次元と $\aleph_0$ の大きい方とすれば，次節の証明が変更なく通用することが確かめられる．（なお，$L^2(G)$ の Hilbert 空間次元はもとの群 G に依存しているが，十分大きいすべての無限基数 κ で議論が成立することから，G のユニタリ表現から G が復元できていることに変わりはない．）

3 辰馬双対定理の証明

本節では, G を局所コンパクト群とし, 辰馬双対定理(定理 2.8)を証明する．$x \in G$ に対して $(\pi(x))_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ は明らかに許容作用素場だから，写像

$$\varPhi\colon G \to \mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G)), \quad x \mapsto (\pi(x))_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$$

が定まる．これが位相群の同型であることを示したい．

3.1 証明の流れ

以下，G には左 Haar 測度が 1 つ固定されているとし，$G \times G$ にはその積測度 [1, sec. 7.6] を与える（これは $G \times G$ の左 Haar 測度である）．$x \in G$ に対して，関数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ に対する作用素 $\lambda(x)$, $\rho(x)$ を

$$\lambda(x)f(y) = f(y^{-1}x), \qquad \rho(x)f(y) = f(yx)$$

と定める．$(\lambda, L^2(G))$ は G の左正則表現である．

辰馬双対定理の証明には，左正則表現と次の作用素が重要な役割を果たす．

定義 3.1（Katz–竹崎作用素） 関数 $F\colon G\times G\to\mathbb{C}$ に対する作用素 A を

$$AF(x,y)=F(y^{-1}x,y)\qquad (x,\,y\in G)$$

と定めると，A は $L^2(G\times G)$ 上のユニタリ作用素となる（正則 Borel 測度に対する Tonelli の定理からわかる）．このユニタリ作用素 A を，**Katz–竹崎作用素**という．なお，A の逆作用素は

$$A^{-1}F(x,y)=F(yx,y)\qquad (x,\,y\in G)$$

で与えられる．

自然な Hilbert 空間の同型 $L^2(G\times G)\cong L^2(G)\mathbin{\widehat{\otimes}}L^2(G)$ によってこれらを同一視すると，容易にわかるように，Katz–竹崎作用素 A は G のユニタリ表現 $\mathbf{1}_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}\lambda$ から $\lambda\mathbin{\widehat{\otimes}}\lambda$ へのユニタリ同値である．したがって，$\mathrm{Rep}(G)$ 上の許容作用素場 $(T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ に対して

$$A(I_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}T_\lambda)=(T_\lambda\mathbin{\widehat{\otimes}}T_\lambda)A$$

が成り立つ．そこで，

$$\mathscr{T}(\lambda)=\{T\in\mathscr{U}(L^2(G))\mid A(I_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}T)=(T\mathbin{\widehat{\otimes}}T)A\}$$

と置き，これに $\mathscr{U}(L^2(G))$ の部分空間としての位相を入れると，連続写像

$$\varPsi\colon\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))\to\mathscr{T}(\lambda),\quad (T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}\mapsto T_\lambda$$

が定まる．

これで，2 つの写像

$$G\xrightarrow{\varPhi}\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))\xrightarrow{\varPsi}\mathscr{T}(\lambda)$$

が得られた．$\varPhi$ が連続群準同型であることと，$\varPsi$ が連続であることは明らかであり，$\varPsi\circ\varPhi=\lambda$ が位相的埋め込みであることも容易にわかる．$\varPhi$ が位相群の同型であることを示すためには，あと

- $\varPsi\colon\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))\to\mathscr{T}(\lambda)$ の単射性
- $\varPsi\circ\varPhi\colon G\to\mathscr{T}(\lambda)$ の全射性

の 2 つを示せばよい．以下の小節で，これらを順に示す．

3.2 $\varPsi$ の単射性

本節では，$\varPsi\colon\mathscr{T}(\mathrm{Rep}(G))\to\mathscr{T}(\lambda)$ の単射性，すなわち許容作用素場 $(T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ が左正則表現に対する成分 T_λ だけで決まってしまうことを示す．

G 上の $\mathcal{H}$ 値 L^2 関数全体のなす Hilbert 空間を $L^2(G;\mathcal{H})$ と書く（Bochner 積分，たとえば Cohn [1, app. E] を参照のこと）．自然な Hilbert 空間の同型 $L^2(G;\mathcal{H})\cong L^2(G)\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathcal{H}$ によってこれらを同一視する．

補題 3.2 π を G のユニタリ表現とする．関数 $F\colon G\to\mathcal{H}_\pi$ に対する作用素 A_π を

$$A_\pi F(x)=\pi(x)(F(x))\qquad (x\in G)$$

と定めると，A_π は $L^2(G)$ 上のユニタリ作用素であり，G のユニタリ表現 $\lambda\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathbf{1}_{\mathcal{H}_\pi}$ から $\lambda\mathbin{\widehat{\otimes}}\pi$ へのユニタリ同値である．

証明　A_π が $L^2(G)$ 上のユニタリ作用素であることは明らかであり，G の作用との整合性も容易に確かめられる． □

補題 3.2，系 2.5 および定義 2.3 の条件 (i), (iii) から，許容作用素場 $(T_\pi)_{\pi\in\mathrm{Rep}(G)}$ が左正則表現に対する成分 T_λ だけで決まってしまうことがわかる．

3.3　$\Psi\circ\Phi$ の全射性

本節では，$\Psi\circ\Phi\colon G\to\mathscr{T}(\lambda)$ の全射性，すなわち

$$\mathscr{T}(\lambda)=\{T\in\mathscr{U}(L^2(G))\mid A(I_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}T)=(T\mathbin{\widehat{\otimes}}T)A\}$$

の任意の元が $\lambda(x)$（$x\in G$）という形であることを示す．より強く，T を $L^2(G)$ 上の（ユニタリとは限らない）有界作用素であって $A(I_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}T)=(T\mathbin{\widehat{\otimes}}T)A$ を満たすものとし，T が 0 または $\lambda(x)$（$x\in G$）という形であることを示そう．

補題 3.3　任意の $x\in G$ に対して，T は $\rho(x)$ と可換である．

証明　容易にわかるように，$\rho(x)\mathbin{\widehat{\otimes}}I_{L^2(G)}$ と A は可換である．すなわち，$\rho(x)\mathbin{\widehat{\otimes}}I_{L^2(G)}$ は A を通して自身と対応する．一方で，$I_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}T$ は A を通して $T\mathbin{\widehat{\otimes}}T$ と対応するのだった．$\rho(x)\mathbin{\widehat{\otimes}}I_{L^2(G)}$ と $I_{L^2(G)}\mathbin{\widehat{\otimes}}T$ は可換だから，これより，$\rho(x)\mathbin{\widehat{\otimes}}I_{L^2(G)}$ と $T\mathbin{\widehat{\otimes}}T$ も可換である．すなわち，

$$\rho(x)T\mathbin{\widehat{\otimes}}T=T\mathbin{\widehat{\otimes}}T\rho(x)$$

が成り立つ．よって，$\rho(x)T=T\rho(x)$ または $T=0$ だが，いずれにしても T は $\rho(x)$ と可換である． □

補題 3.4　任意の $f\in L^2(G)$ と $g\in L^1(G)$ に対して，$T(f*g)=Tf*g$ である．

証明　$L^2(G)$ 値の積分を用いれば，補題 3.3 から

$$\begin{aligned}T(f*g)&=T\biggl(\int_G g(y^{-1})\rho(y)f\,dy\biggr)\\&=\int_G g(y^{-1})T\rho(y)f\,dy\\&=\int_G g(y^{-1})\rho(y)Tf\,dy\\&=Tf*g\end{aligned}$$

として結論を得る． □

以下では，関数空間

$$\mathscr{E}=\mathrm{span}\{\phi*\psi\mid\phi\in L^2(G),\,\psi\in C_\mathrm{c}(G)\}$$

を考える．$\mathscr{E}$ は $L^2(G)$ および無限遠で消える連続関数全体が一様ノルムに関してなす Banach 空間 $C_0(G)$ に稠密に含まれる．また，補題 3.4 より T は $\mathscr{E}$ を自身の中に移す．

補題 3.5　任意の $f\in L^2(G)$ と $g\in\mathscr{E}$ に対して，$T(f\cdot g)=Tf\cdot Tg$ である．

証明　可換図式

$$\begin{array}{ccc} L^2(G\times G) & \xrightarrow{T\widehat{\otimes}T} & L^2(G\times G) \\ {\scriptstyle A^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A^{-1}} \\ L^2(G\times G) & \xrightarrow[I_{L^2(G)}\widehat{\otimes}T]{} & L^2(G\times G) \end{array}$$

における $f\otimes g\in L^2(G\times G)$ の行き先を見ることで，$G\times G$ 上の関数 $(x,y)\mapsto Tf(yx)Tg(y)=(\rho(x)Tf\cdot Tg)(y)$ と $(x,y)\mapsto T(\rho(x)f\cdot g)(y)$ とがほとんどいたるところで一致することがわかる．したがって，正則 Borel 測度に対する Tonelli の定理より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{G\times G}|(\rho(x)Tf\cdot Tg)(y)-T(\rho(x)f\cdot g)(y)|^2\,d(x,y) \\ &= \int_G\int_G|(\rho(x)Tf\cdot Tg)(y)-T(\rho(x)f\cdot g)(y)|^2\,dy\,dx \\ &= \int_G\|\rho(x)Tf\cdot Tg-T(\rho(x)f\cdot g)\|_2^2\,dx \end{aligned}$$

だから，ほとんどすべての $x\in G$ に対して $L^2(G)$ の元として

$$\rho(x)Tf\cdot Tg=T(\rho(x)f\cdot g)$$

である．ところが，$g,\ Tg\in\mathscr{E}$ より上式の両辺は $x\in G$ に対する $L^2(G)$ 値の関数として連続だから，結局上式は任意の $x\in G$ に対して成り立つ．特に $x=e$ とすれば結論を得る．　□

補題 3.6　T は $\mathscr{E}$ 上で一様ノルムに関してノルム減少である．

証明　T は $L^2(G)$ 上の有界作用素だから，ある定数 $C\geq 0$ が存在して任意の $f\in L^2(G)$ に対して $\|Tf\|_2^2\leq C\|f\|_2^2$ となる．ここで，$f\in\mathscr{E}$ ならば，補題 3.5 より任意の整数 $p\geq 1$ に対して $T(f^p)=(Tf)^p$ であり，したがって

$$\|Tf\|_{2p}^{2p}=\|(Tf)^p\|_2^2=\|T(f^p)\|_2^2\leq C\|f^p\|_2^2=C\|f\|_{2p}^{2p},$$

すなわち

$$\int_G|Tf|^{2p}\,dx\leq C\int_G|f|^{2p}\,dx \tag{$*$}$$

である．

T が $\mathscr{E}$ 上で一様ノルムに関してノルム減少であることを示すためには，上の状況で $\|f\|_\infty\leq 1$ かつ $\|Tf\|_\infty>1$ として矛盾を導けばよい．$\|f\|_\infty\leq 1$ とすると，$(*)$ の右辺は $p=1$ のときに最大となり，したがって $p\to\infty$ のとき有界である．一方で，$\|Tf\|_\infty>1$ とすると，$\|Tf\|_\infty>1+\epsilon$ となる $\epsilon>0$ をとれば

$$\int_G|Tf|^{2p}\,dx\geq|\{x\in G\mid |Tf(x)|\geq 1+\epsilon\}|(1+\epsilon)^{2p}\to\infty\quad(p\to\infty)$$

を得る（Borel 集合 $S\subseteq G$ に対して $|S|$ は S の測度を表す）．これらは互いに矛盾する．これで，主張が示された．　□

補題 3.6 より，T は $C_0(G)$ 上の有界作用素 $\widetilde{T}$ に一意に拡張される．補題 3.5 より $\widetilde{T}$ は代数の準同型であり，補題 3.3 より $\widetilde{T}$ は $\rho(x)$（$x\in T$）と可換である．

$G\cup\{\infty\}$ を G の 1 点コンパクト化とし，$x \in G\cup\{\infty\}$ での値を対応させる代数の準同型を $\mathrm{ev}_x\colon C_0(G) \to \mathbb{C}$ と書く（$\mathrm{ev}_\infty = 0$ である）．$\mathrm{ev}_e \circ \widetilde{T}\colon C_0(G) \to \mathbb{C}$ は代数の準同型だから，Gelfand 理論の結果より，ある $x_0 \in G \cup \{\infty\}$ が存在して

$$\mathrm{ev}_e \circ \widetilde{T} = \mathrm{ev}_{x_0}$$

と書ける．さらに，$\widetilde{T}$ は $\rho(x)$（$x \in G$）と可換だから

$$\mathrm{ev}_x \circ \widetilde{T} = \mathrm{ev}_e \circ \rho(x) \circ \widetilde{T} = \mathrm{ev}_e \circ \widetilde{T} \circ \rho(x) = \mathrm{ev}_{x_0} \circ \rho(x) = \mathrm{ev}_{x_0 x}$$

が得られ（$x_0 = \infty$ の場合は $x_0 x = \infty$ とみなす），したがって

$$\widetilde{T} = \begin{cases} \lambda(x_0^{-1}) & (x_0 \in G) \\ 0 & (x_0 = \infty) \end{cases}$$

である．$\mathscr{E}$ は $L^2(G)$ において稠密だから，これより

$$T = \begin{cases} \lambda(x_0^{-1}) & (x_0 \in G) \\ 0 & (x_0 = \infty) \end{cases}$$

を得る．これで，本小節のはじめの述べた主張が示された．

参考文献

本発表で述べた辰馬双対定理の証明は，梅田 [2] による．

[1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Springer, 2013.

[2] 梅田亨，「淡中–辰馬双対定理の証明の簡易化」，数学 **32**.3 (1980): 271–272.

[3] N. Tatsuuma (辰馬伸彦), “A duality theorem for locally compact groups”, *Journal of Mathematics of Kyoto University* **6**.2 (1967): 187–293.

[4] 辰馬伸彦，「一般の locally compact 群における淡中型双対定理」，数学 **20**.2 (1968): 65–75.

[5] 辰馬伸彦，『位相群の双対定理』，紀伊國屋書店，1994.