

# 分裂簡約 Lie 代数

箱

2025 年 8 月 7 日

## 概要

分裂簡約 Lie 代数の構造論および表現論を解説する。構造論については、分裂簡約 Lie 代数からルート系が定義されることを見たあと、それを用いて分裂可能単純 Lie 代数を分類する。表現論については、最高ウェイト理論を解説する。

## 目次

1	Cartan 部分代数	2
1.1	Cartan 部分代数 . . . . .	2
1.2	同時広義固有空間に関する準備 . . . . .	3
1.3	Cartan 部分代数の存在 . . . . .	6
1.4	多項式写像に関する準備 . . . . .	8
1.5	Cartan 部分代数の共役性 . . . . .	10
1.6	簡約 Lie 代数の Cartan 部分代数 . . . . .	13
2	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現	14
2.1	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群のウェイト . . . . .	14
2.2	最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群 . . . . .	15
2.3	有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群 . . . . .	17
3	分裂簡約 Lie 代数	19
3.1	分裂簡約 Lie 代数とそのルート系 . . . . .	19
3.2	分裂簡約 Lie 代数における $\mathfrak{sl}_2$ -三対 . . . . .	21
3.3	被約ルート系の公理を満たすことの証明 . . . . .	23
3.4	存在定理 . . . . .	27
3.5	一意性定理と同型定理 . . . . .	34
3.6	古典型分裂単純 Lie 代数 . . . . .	36
3.7	分裂可能単純 Lie 代数の分類 . . . . .	42
4	分裂簡約 Lie 代数の表現	43
4.1	$\mathfrak{g}$ -加群のウェイト . . . . .	43
4.2	最高ウェイト $\mathfrak{g}$ -加群 . . . . .	45

4.3	Verma 加群	47
4.4	整ベクトルと優整ベクトルに関する補足	49
4.5	条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$ -加群	50
4.6	最高ウェイト理論	52

## 記号と用語

- 本稿を通して、特に断らない限り、 $\mathbb{K}$  を可換体とし、線型空間などの係数体は  $\mathbb{K}$  であるとする。
- 線型空間  $V$  のテンソル代数を  $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^n(V)$  と書き、対称代数を  $\mathbf{S}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{S}^n(V)$  と書く。
- Lie 代数に関する記号と用語は、「Lie 代数」[4] による。
- ルート系に関する記号と用語は、「ルート系」[5] による。

## 1 Cartan 部分代数

### 1.1 Cartan 部分代数

**定義 1.1 (Cartan 部分代数)** 有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の **Cartan 部分代数** (Cartan subalgebra) とは、 $\mathfrak{g}$  の冪零部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  であって、 $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  を満たすものをいう。

$\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{g}'$  をその部分 Lie 代数とすると、 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数ならば、明らかに、 $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}'$  の Cartan 部分代数でもある。

**命題 1.2** 有限次元冪零 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は、 $\mathfrak{g}$  自身を唯一の Cartan 部分代数にもつ。

**証明** 明らかに、 $\mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である。これが唯一の Cartan 部分代数であることを示す。 $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の真部分 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})$  を満たす最大の  $p \in \mathbb{N}$  をとる。すると、

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h} + \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})] \subseteq \mathfrak{h} + \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$$

となるから、 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  が成り立つ。よって、 $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数ではない。□

**系 1.3**  $\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$  をその Cartan 部分代数とする。このとき、 $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の極大冪零部分 Lie 代数（すなわち、冪零部分 Lie 代数の中で包含関係に関して極大なもの）である。

**証明** 定義より、Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  は冪零である。また、 $\mathfrak{g}$  の冪零部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}'$  が  $\mathfrak{h}$  を含むとすると、 $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{h}'$  の Cartan 部分代数でもあるから、命題 1.2 より  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$  である。□

**系 1.4**  $\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie 代数とする。 $\mathfrak{h}$  と  $\mathfrak{h}'$  がともに  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であり、 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$  を満たすならば、 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$  である。

**証明** 系 1.3 から従う。□

**命題 1.5**  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$  を有限次元 Lie 代数の有限族とし、 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  と置く。各  $i \in I$  に対して  $\mathfrak{h}_i$  を  $\mathfrak{g}_i$  の Cartan 部分代数とすると、 $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である。逆に、 $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数は、す

べてこのようにして得られる。

**証明** 冪零 Lie 代数の直和は冪零である [4, 命題 4.3 (4)]。また, 各  $i \in I$  に対して  $\mathfrak{h}_i$  を  $\mathfrak{g}_i$  の部分線型空間として,  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  と置くと,  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{i \in I} N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$  である。よって, 各  $i \in I$  に対して  $\mathfrak{h}_i$  を  $\mathfrak{g}_i$  の Cartan 部分代数とすると,  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である。

逆に,  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とする。各  $i \in I$  に対して  $\mathfrak{g}$  から  $\mathfrak{g}_i$  への射影による  $\mathfrak{h}$  の像を  $\mathfrak{h}_i$  と置くと, それらの直和  $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  は冪零だから [4, 命題 4.3 (2), (4)], 系 1.3 より  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  が成り立つ。また,  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{i \in I} N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$  は  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  に等しいから, 任意の  $i \in I$  に対して  $N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$  は  $\mathfrak{h}_i$  に等しい。よって, 各  $\mathfrak{h}_i$  は  $\mathfrak{g}_i$  の Cartan 部分代数である。□

**命題 1.6**  $\mathbb{K}$  を可換体とし,  $\mathbb{K}'$  をその拡大体とする。

- (1)  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  について,  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であることと,  $\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}$  が  $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$  の Cartan 部分代数であることは同値である。
- (2)  $\mathbb{K}'$  は  $\mathbb{K}$  の有限次拡大体であるとする。このとき,  $\mathbb{K}'$  上の有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}'$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}'$  について,  $\mathfrak{h}'$  が  $\mathfrak{g}'$  の Cartan 部分代数であることと,  $\mathfrak{h}'_{[\mathbb{K}]}$  が  $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$  の Cartan 部分代数であることは同値である。さらに,  $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$  の任意の Cartan 部分代数は,  $\mathfrak{g}'$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}'$  を用いて  $\mathfrak{h}'_{[\mathbb{K}]}$  と書ける。

**証明** (1) 冪零性が係数拡大で不変であること [4, 命題 4.2 (1)] から従う。

(2) 前半の主張は, 冪零性が係数の制限で不変であること [4, 命題 4.2 (2)] から従う。

後半の主張を示す。  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$  の Cartan 部分代数とする。  $\mathfrak{h}$  が冪零であることより  $\text{span}_{\mathbb{K}'} \mathfrak{h}$  も冪零だから, 系 1.3 より  $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{K}'} \mathfrak{h}$  が成り立つ。よって, 後半の主張は, 前半の主張から従う。□

## 1.2 同時広義固有空間に関する準備

本小節では,  $S$  を集合,  $V$  を線型空間とし, 写像  $\rho: S \rightarrow \text{End}(V)$  が定まっているとき,  $\lambda \in \mathbb{K}^S$  に対して

$$V^\lambda(S) = \{v \in V \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対してある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } (\rho(s) - \lambda(s))^n v = 0\}$$

と書く。  $S$  が 1 元集合  $\{s\}$  である場合には,  $V^\lambda(S)$  を単に  $V^{\lambda(s)}(s)$  と書く。定義から明らかに,  $V^\lambda(S)$  は  $V$  の部分線型空間であり,

$$V^\lambda(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s)$$

が成り立つ。

$\mathfrak{g}$  を Lie 代数,  $S$  をその部分集合とすると, 特に断らなければ, 写像  $\text{ad}|_S: S \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  を考えることにより, 記号  $\mathfrak{g}^\lambda(S)$  ( $\lambda \in \mathbb{K}^S$ ) を用いる。すなわち,

$$\mathfrak{g}^\lambda(S) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対してある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } (\text{ad}(s) - \lambda(s))^n x = 0\}$$

と書く。この記号は, 本節の以下の部分を通して用いる。

**命題 1.7**  $S$  を集合,  $V$  を線型空間とし,  $\rho: S \rightarrow \text{End}(V)$  を写像とする。このとき, 和  $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$  は直和である。

**証明** 異なる有限個の元  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}^S$  を任意にとり, 各  $i \in \{1, \dots, k\}$  に対して  $v_i \in V^{\lambda_i}(S)$  とするとき,  $v_1 + \dots + v_k = 0$  ならば  $v_1 = \dots = v_k = 0$  であることを示せばよい。この主張を,  $k$  に関する帰納法で

示す.  $k = 0, 1$  のとき, 主張は明らかである.  $k \geq 2$  とし,  $k$  がより小さい場合には主張が成り立つとする.  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  は異なるから,  $\lambda_1(s) = \dots = \lambda_k(s)$  が成り立たないような  $s \in S$  がとれる. 各  $v_i$  は  $\rho(s)$  の広義固有空間  $V^{\lambda_i(s)}(s)$  に属し, 線型代数の一般論より, 広義固有空間の和  $\sum_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$  は直和である. したがって,  $v_1 + \dots + v_k = 0$  ならば, 任意の  $\mu \in \mathbb{K}$  に対して

$$\sum_{i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(s) = \mu} v_i = 0$$

が成り立つ.  $s$  のとり方より, 任意の  $\mu \in \mathbb{K}$  に対して  $\{i \in \{1, \dots, k\} \mid \lambda_i(s) = \mu\}$  は  $\{1, \dots, k\}$  全体にはならない. よって, 上式と帰納法の仮定より,  $v_1 = \dots = v_k = 0$  を得る. これで, 帰納法が完成した.  $\square$

**命題 1.8**  $S$  を集合,  $V_1, V_2, W$  を線型空間とし,  $\rho_1: S \rightarrow \text{End}(V_1)$ ,  $\rho_2: S \rightarrow \text{End}(V_2)$ ,  $\sigma: S \rightarrow \text{End}(W)$  を写像とする.  $\Phi: V_1 \times V_2 \rightarrow W$  は双線型写像であり, 任意の  $s \in S$ ,  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$  に対して

$$\Phi(\rho_1(s)v_1, v_2) + \Phi(v_1, \rho_2(s)v_2) = \sigma(s)\Phi(v_1, v_2)$$

を満たすとする. このとき, 任意の  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^S$  に対して,

$$\Phi(V_1^{\lambda_1}(S), V_2^{\lambda_2}(S)) \subseteq W^{\lambda_1 + \lambda_2}(S)$$

が成り立つ.

**証明** 仮定より, 任意の  $s \in S$ ,  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$  に対して

$$(\sigma(s) - \lambda_1(s) - \lambda_2(s))\Phi(v_1, v_2) = \Phi((\rho_1(s) - \lambda_1(s))v_1, (\rho_2(s) - \lambda_2(s))v_2)$$

だから,  $n \in \mathbb{N}$  とすると

$$(\sigma(s) - \lambda_1(s) - \lambda_2(s))^n \Phi(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi((\rho_1(s) - \lambda_1(s))^{n-k} v_1, (\rho_2(s) - \lambda_2(s))^k v_2)$$

である. よって,  $v_1 \in V_1^{\lambda_1}(S)$  かつ  $v_2 \in V_2^{\lambda_2}(S)$  ならば,  $\Phi(v_1, v_2) \in W^{\lambda_1 + \lambda_2}(S)$  である.  $\square$

**系 1.9**  $\mathfrak{g}$  を Lie 代数とし,  $S$  をその部分集合とする. このとき, 任意の  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^S$  に対して,  $[\mathfrak{g}^\lambda(S), \mathfrak{g}^\mu(S)] \subseteq \mathfrak{g}^{\lambda + \mu}(S)$  が成り立つ. 特に,  $\mathfrak{g}^0(S)$  は  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数である.

**証明** 命題 1.8 から従う.  $\square$

**系 1.10**  $\mathfrak{g}$  を Lie 代数,  $S$  をその部分集合とし,  $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  を不変な双線型形式とする. このとき, 任意の  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^S$ ,  $\lambda + \mu \neq 0$  に対して,  $B(\mathfrak{g}^\lambda(S), \mathfrak{g}^\mu(S)) = 0$  が成り立つ.

**証明** 写像  $\rho_1, \rho_2: S \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  を  $\rho_1(x) = \rho_2(x) = \text{ad}(x)$  によって定め, 写像  $\sigma: S \rightarrow \text{End}(\mathbb{K})$  を  $\sigma(x) = 0$  によって定めると,  $B$  の不変性より, これらは命題 1.8 の仮定を満たす. よって, 任意の  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^S$ ,  $\lambda + \mu \neq 0$  に対して,  $B(\mathfrak{g}^\lambda(S), \mathfrak{g}^\mu(S)) \subseteq \mathbb{K}^{\lambda + \mu}(S) = 0$  である.  $\square$

**補題 1.11**  $V$  を線型空間,  $x, y \in \text{End}(V)$  とし, ある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)^n y = 0$  を満たすとする. このとき, 任意の  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して, 広義固有空間  $V^\lambda(x)$  は  $y$ -安定である.

**証明** 双線型写像  $\Phi: \text{End}(V) \times V \rightarrow V$  を  $\Phi(z, v) = z(v)$  によって定めると, 任意の  $z \in \text{End}(V)$  と  $v \in V$  に対して  $x(\Phi(z, v)) = \Phi(z, x(v)) + \Phi(\text{ad}(x)z, v)$  が成り立つ. したがって,  $\Phi$  に対して命題 1.8 を適用するこ

とで、 $\Phi(\text{End}(V)^0(\text{ad}(x)), V^\lambda(x)) \subseteq V^\lambda(x)$  を得る。仮定より  $y \in \text{End}(V)^0(\text{ad}(x))$  だから、 $V^\lambda(x)$  は  $y$ -安定である。□

**命題 1.12**  $S$  を集合、 $V$  を有限次元線型空間とし、 $\rho: S \rightarrow \text{End}(V)$  を写像とする。このとき、次の条件は同値である。

- (a) 直和分解  $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$  が成立し、任意の  $\lambda \in \mathbb{K}^S$  に対して、 $V^\lambda(S)$  は  $\rho(S)$ -安定である。
- (b)  $\rho(S)$  の任意の元は三角化可能であり、かつ任意の  $s, s' \in S$  に対してある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して  $\text{ad}_{\text{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s') = 0$  を満たす。

**証明** (a)  $\implies$  (b) 条件 (a) が成り立つとして、 $s, s' \in S$  とすると、広義固有空間分解  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$  が成立し、各  $V^\mu(s)$  は  $\rho(s')$ -安定である。広義固有空間分解が成立することより、 $\rho(s)$  は三角化可能である。また、任意の  $\mu \in \mathbb{K}$  に対して、 $\rho_\mu(s'') = \rho(s'')|_{V^\mu(s)}$  ( $s'' \in S$ ) と書くと、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} (\text{ad}_{\text{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s'))|_{V^\mu(s)} &= \text{ad}_{\text{gl}(V)}(\rho_\mu(s))^n \rho_\mu(s') \\ &= \text{ad}_{\text{gl}(V)}(\rho_\mu(s) - \mu)^n \rho_\mu(s') \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\rho_\mu(s) - \mu)^{n-k} \rho_\mu(s') (-\mu)^k \end{aligned}$$

である。 $\rho_\mu(s) - \mu$  は冪零だから、 $n$  が十分大きいとき、上式の最右辺は 0 となる。任意の  $\mu \in \mathbb{K}$  に対してこれが成り立ち、 $V$  が有限次元であることより  $V^\mu(s) \neq 0$  となる  $\mu \in \mathbb{K}$  は有限個だから、 $n$  が十分大きいとき  $\text{ad}_{\text{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s') = 0$  となる。

(b)  $\implies$  (a) 条件 (b) が成り立つとする。まず、 $\lambda \in \mathbb{K}^S$  とすると、任意の  $s \in S$  に対して  $V^{\lambda(s)}(s)$  は  $\rho(S)$ -安定だから (補題 1.11),  $V^\lambda(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s)$  も  $\rho(S)$ -安定である。

次に、直和分解  $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$  が成立することを示す。和  $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$  が直和であることは、命題 1.7 ですでに示した。 $V = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$  であることを、次元  $\dim_{\mathbb{K}} V$  に関する帰納法で示す。次元がより小さい場合には主張が成り立つとする。ある  $\lambda \in \mathbb{K}^S$  が存在して  $V = V^\lambda(S)$  となるならば、主張は明らかである。そうでないとすると、ある  $s \in S$  が存在して、直和分解  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$  が非自明な (すなわち、0 でない直和因子が二つ以上存在する) ものとなる (任意の  $s \in S$  に対して、仮定より  $\rho(s)$  が三角化可能であり、したがって、広義固有空間分解  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$  が成立することを用いた)。仮定より、各  $V^\mu(s)$  は  $\rho(S)$ -安定だから、帰納法の仮定より、 $V^\mu(s) = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} (V^\lambda(S) \cap V^\mu(s))$  が成り立つ。これで、帰納法が完成した。□

**系 1.13**  $\mathfrak{g}$  を代数閉体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$  をその冪零部分 Lie 代数とする。このとき、直和分解  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$  が成立する。

**証明** 係数体  $\mathbb{K}$  が代数閉であることより、 $\mathfrak{g}$  上の任意の線型写像は三角化可能である。また、 $\mathfrak{h}$  が冪零であることより  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$  を満たす  $p \in \mathbb{N}$  がとれ、この  $p$  について、任意の  $h, h' \in \mathfrak{h}$  に対して  $\text{ad}_{\text{gl}(\mathfrak{g})}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h))^p \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h') = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\mathfrak{h}}(h))^p h' = 0$  が成り立つ。よって、主張は、命題 1.12 から従う。□

**命題 1.14**  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$  をその冪零部分 Lie 代数とする。このとき、ある  $p \in \mathbb{N}$  が存在して、任意の  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$  に対して、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p = 0$  が成り立つ。

**証明** 必要ならば係数拡大を考えることにより、一般性を失わず、係数体  $\mathbb{K}$  は代数閉であると仮定する。このとき、系 1.13 より、直和分解  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$  が成立する。 $\mathfrak{g}$  は有限次元だから、 $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \mid \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0\}$

と置くと、 $\Delta$  は有限である。さらに、 $\mathbb{K}$  は標数 0 だから、 $p \in \mathbb{N}$  を任意の  $\lambda \in \Delta \setminus \{0\}$  に対して  $(\Delta + p\lambda) \cap \Delta = \emptyset$  を満たすようにとれる。  $\lambda \in \Delta \setminus \{0\}$  とするとき、任意の  $\mu \in \Delta$  に対して  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}^{\mu+p\lambda}(\mathfrak{h}) = 0$  だから (系 1.9),  $\mathfrak{g}$  の直和分解と合わせて  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p = 0$  を得る。 よって、この  $p$  が主張の条件を満たす。  $\square$

**命題 1.15**  $\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie 代数、 $\mathfrak{h}$  をその冪零部分 Lie 代数とし、 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  を不変な非退化双線型形式とする。 このとき、任意の  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$  に対して、 $B|_{\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$  は非退化である。

**証明** 必要ならば係数拡大を考えることにより、一般性を失わず、係数体  $\mathbb{K}$  は代数閉であると仮定する。 このとき、系 1.13 より、直和分解  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$  が成立する。  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$  とし、 $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$  を任意にとると、 $B$  の非退化性より、ある  $y \in \mathfrak{g}$  が存在して  $B(x, y) \neq 0$  となる。 一方で、任意の  $\mu \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{-\lambda\}$  に対して  $B(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h})) = 0$  だから (系 1.10), 必要ならば  $y$  をその  $\mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ -成分に置き換えることで、 $y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$  としてよい。 以上より、 $B|_{\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$  は左非退化である。 右非退化性も、同様に確かめられる。 よって、 $B|_{\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$  は非退化である。  $\square$

### 1.3 Cartan 部分代数の存在

**補題 1.16**  $\mathfrak{g}$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$  をその部分 Lie 代数とする。  $a \in \mathfrak{h}$  が次の条件を満たすとする。

- (i)  $\mathfrak{g}^0(a)$  は、 $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数の族  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$  の中で極小である。
- (ii)  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(a)$  である。

このとき、 $\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  が成り立つ (すなわち、 $\mathfrak{g}^0(a)$  は  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$  の中で最小である)。

**証明** 条件 (i), (ii) が満たされるとして、 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^0(a)$  と置く。  $\mathfrak{m}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数であり (系 1.9), 条件 (ii) より  $\mathfrak{h}$  を含む。 随伴表現が誘導する  $\mathfrak{m}$  の  $\mathfrak{m}$  と  $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$  上の表現を、それぞれ  $\rho_{\mathfrak{m}}$  と  $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}$  と書く。  $x \in \mathfrak{m}$  を任意にとり、 $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して、 $\rho_{\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$ ,  $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$  の固有多項式をそれぞれ

$$\begin{aligned} p(T, \lambda) &= T^r + p_1(\lambda)T^{r-1} + \cdots + p_r(\lambda), \\ q(T, \lambda) &= T^{n-r} + q_1(\lambda)T^{n-r-1} + \cdots + q_{n-r}(\lambda) \end{aligned}$$

(ここで、 $n = \dim \mathfrak{g}$ ,  $r = \dim \mathfrak{m}$  である) と書く。 上式と  $p(T, \lambda) = \det(T - \rho_{\mathfrak{m}}(a) - \lambda \rho_{\mathfrak{m}}(x))$  および  $q(T, \lambda) = \det(T - \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a) - \lambda \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(x))$  を比較すれば、各  $p_i$  と  $q_i$  がたかだか  $i$  次の  $\mathbb{K}$  係数多項式であることがわかる。 また、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(a + \lambda x)$  の固有多項式は、 $p(T, \lambda)q(T, \lambda)$  である。 以下、 $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$p(T, \lambda) = T^r \iff \rho_{\mathfrak{m}}(a + \lambda x) \text{ は冪零} \iff \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}^0(a + \lambda x) \quad (*)$$

であることに注意する。

$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^0(a)$  だから、(\*) より  $p(T, 0) = T^r$  である。 一方で、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(a)$  の固有多項式  $p(T, 0)q(T, 0)$  の根 0 の重複度は、対応する広義固有空間の次元  $\dim \mathfrak{m} = r$  に等しい。 したがって、 $q(T, 0)$  は 0 を根にもたない。 すなわち、 $q_{n-r}(0) \neq 0$  であり、特に、多項式  $q_{n-r}$  は 0 ではない。 このことと  $\mathbb{K}$  が無限可換体であることより、 $q_{n-r}(\lambda) \neq 0$  を満たす  $\lambda \in \mathbb{K}$  が無限個存在する。 このような  $\lambda$  に対しては、 $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$  は可逆だから、 $\mathfrak{g}^0(a + \lambda x) \subseteq \mathfrak{m}$  が成り立つ。 条件 (i) と合わせて、 $\mathfrak{g}^0(a + \lambda x) = \mathfrak{m}$  を得るから、(\*) より  $p(T, \lambda) = T^r$  であ

る.  $p(T, \lambda) = T^r$  であるということは  $p_1(\lambda) = \cdots = p_r(\lambda) = 0$  であるということにほかならず,  $p_1, \dots, p_r$  は多項式だから, これが無限個の  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して成り立つことより, すべての  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対しても成り立つ. したがって, (\*) より,  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}^0(a + \lambda x)$  である. よって,

$$\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{m} \subseteq \bigcap_{x \in \mathfrak{m}, \lambda \in \mathbb{K}} \mathfrak{g}^0(a + \lambda x) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$$

だから,  $\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  が成り立つ.  $\square$

**定理 1.17**  $\mathfrak{g}$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とする.  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  に対して, 次の条件は同値である.

- (a)  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である.
- (b)  $\mathfrak{h}$  は,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数の族  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$  に属し, かつこの中で極小である.
- (c)  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  である.

**証明** (a)  $\implies$  (b)  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であるとする. 任意の  $x \in \mathfrak{h}$  に対して,  $\mathfrak{h}$  が冪零であることより  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(x)$  は冪零だから,  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(x)$  である. そこで,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数の族  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$  の中で極小なもの  $\mathfrak{g}^0(a)$  ( $a \in \mathfrak{h}$ ) をとると (次元が最小のものをとればよい), 補題 1.16 より, 任意の  $x \in \mathfrak{h}$  に対して  $\mathfrak{g}^0(a) \subseteq \mathfrak{g}^0(x)$  である.

$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$  であることを示す.  $\mathfrak{h}$  と  $\mathfrak{g}^0(a)$  は  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数であり (系 1.9),  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(a)$  だから, 随伴表現は  $\mathfrak{h}$  の  $\mathfrak{g}^0(a)/\mathfrak{h}$  上の表現を誘導する. この表現を  $\rho$  と書くと, 任意の  $x \in \mathfrak{h}$  に対して,  $\mathfrak{g}^0(a) \subseteq \mathfrak{g}^0(x)$  であることより,  $\rho(x)$  は冪零である. したがって,  $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}^0(a)$  であると仮定すると, Engel の定理 [4, 系 4.9] より,  $\mathfrak{g}^0(a)/\mathfrak{h}$  の 0 でない元であって  $\rho(\mathfrak{h})$  によって零化されるものが存在する. すなわち,  $y \in \mathfrak{g}^0(a) \setminus \mathfrak{h}$  であって  $[\mathfrak{h}, y] \subseteq \mathfrak{h}$  を満たすものが存在する. ところが, これは  $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  であることに反するから, 背理法より,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$  である.

$\mathfrak{h}$  が  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$  の中で極小であることを示す.  $x \in \mathfrak{g}$  が  $\mathfrak{g}^0(x) \subseteq \mathfrak{h}$  を満たすとする.  $x \in \mathfrak{g}^0(x) \subseteq \mathfrak{h}$  だから,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$  が  $(\mathfrak{g}^0(y))_{y \in \mathfrak{h}}$  の中で最小であることより,  $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{h}$  である. よって,  $\mathfrak{h}$  は  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$  の中で極小である.

(b)  $\implies$  (c)  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$  ( $a \in \mathfrak{g}$ ) が  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$  の中で極小であるとする. すると,  $a \in \mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{h}$  であり, 仮定より特に  $\mathfrak{g}^0(a)$  は  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$  の中で極小だから, 補題 1.16 より,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  が成り立つ.

(c)  $\implies$  (a)  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  であるとする. このとき,  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$  の任意の元は冪零だから,  $\mathfrak{h}$  は冪零である [4, 系 4.10]. また,  $\mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$  を満たす  $p \in \mathbb{N}$  をとると

$$\text{ad}(\mathfrak{h})^{p+1} \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \text{ad}(\mathfrak{h})^p \mathfrak{h} = \mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$$

となるから,  $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  である. よって,  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である.  $\square$

**系 1.18 (Cartan 部分代数の存在)** 無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は, Cartan 部分代数をもつ.

**証明** 定理 1.17 より,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数の族  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$  の中で極小なものをとれば (次元が最小のものをとればよい), それが  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である.  $\square$



## 1.4 多項式写像に関する準備

本小節では、有限次元線型空間  $V$  に対して、 $V$  上の多項式関数全体のなす単位的結合  $\mathbb{K}$ -代数を、 $\text{Pol}(V)$  と書く。係数体  $\mathbb{K}$  が無限可換体である場合、これは、双対空間の対称代数  $\mathbf{S}(V^*)$  に自然に同型である。

$V$  と  $W$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とし、 $\phi: V \rightarrow W$  を多項式写像（すなわち、任意の  $g \in W^*$  に対して  $g \circ \phi \in \text{Pol}(V)$  であるような写像）とすると、多項式写像  $\phi: V \rightarrow W$  による引き戻しが単位的  $\mathbb{K}$ -代数の準同型  $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$  を定めることに注意する。

**定義 1.19 (支配的な多項式写像)**  $V$  と  $W$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする。多項式写像  $\phi: V \rightarrow W$  が**支配的** (dominant) であるとは、 $\phi$  による引き戻し  $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$  が単射であることをいう。

$V$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする。 $V$  の部分集合であって  $V$  上の多項式関数の族の共通零点集合として書けるものの全体は、閉集合系の公理を満たす。これによって定まる位相を、 $V$  の **Zariski 位相** (Zariski topology) という。Zariski 位相を考えていることを明示する意味で、「Zariski 閉集合」、「Zariski 開集合」、「Zariski 稠密集合」などという。容易に確かめられるように、 $\text{Pol}(V)$  は整域であり、このことから、 $V$  の任意の空でない Zariski 開集合が  $V$  において Zariski 稠密であることが従う。

本小節の以下の部分では、可換環  $A$  から  $B$  への環準同型全体のなす空間を、 $\text{Hom}(A, B)$  と書く。また、可換環  $A$  の  $S \subseteq A$  による局所化を  $S^{-1}A$  と書き、 $S = \{s\}$  である場合にはこれを  $A[s^{-1}]$  とも書く。

**補題 1.20**  $V$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする。 $v \in V$  に対して、 $\text{ev}_v \in \text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$  を、 $\text{ev}_v(f) = f(v)$  によって定める。このとき、写像  $v \mapsto \text{ev}_v$  は、 $V$  から  $\text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$  への線型同型写像である。

**証明**  $\text{Pol}(V)$  は双対空間の対称代数  $\mathbf{S}(V^*)$  に自然に同型だから、 $V^*$  の基底  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  を一つ固定すると、 $\text{Pol}(V)$  から  $\mathbb{K}$  への環準同型は、 $\phi_1, \dots, \phi_n$  の行き先を決めるごとに一意に定まる。一方で、 $V$  の元も、 $\phi_1, \dots, \phi_n$  の値を決めるごとに一意に定まる。よって、写像  $v \mapsto \text{ev}_v$  は、 $V$  から  $\text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$  への線型同型写像である。  $\square$

**補題 1.21**  $A$  と  $B$  を整域とし、 $A$  は  $B$  に部分環として含まれ、 $B$  は単位的  $A$ -代数として有限生成であるとする。このとき、ある  $a \in A \setminus \{0\}$  と  $A$  上代数的独立な  $x_1, \dots, x_n \in B$  が存在して、 $B[a^{-1}]$  が  $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$  上整となる。

**証明**  $S = A \setminus \{0\}$  と置き、分数体  $\text{Frac}(A) = S^{-1}A$  と局所化  $S^{-1}B$  を考える。Noether の正規化補題 [1, Chapter 5, Exercise 16] より、 $\text{Frac}(A)$  上代数的独立な  $x_1, \dots, x_n \in S^{-1}B$  が存在して、 $S^{-1}B$  が  $\text{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$  上整となる。必要ならば分母を払うことで、 $x_1, \dots, x_n \in B$  としてよい。

任意の  $y \in B$  に対して、ある  $s \in S$  が存在して、 $sy$  が  $A[x_1, \dots, x_n]$  上整となることを示す。 $y$  は  $(S^{-1}B$  の元とみなすと)  $\text{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$  上整だから、ある  $d \in \mathbb{N}$  と  $p_i(x_1, \dots, x_n) \in \text{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$  ( $i \in \{0, \dots, d-1\}$ ) が存在して、

$$y^d + p_{d-1}(x_1, \dots, x_n)y^{d-1} + \dots + p_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

を満たす。上式で分母を払うことで、ある  $s \in S$  と  $q_i(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots, x_n]$  ( $i \in \{0, \dots, d-1\}$ ) が存



在して,

$$(sy)^d + p_{d-1}(x_1, \dots, x_n)(sy)^{d-1} + \dots + p_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

を満たすことがわかる. よって,  $sy$  は  $A[x_1, \dots, x_n]$  上整である.

$B$  の単位的  $A$ -代数としての有限生成系  $y_1, \dots, y_m$  をとる. 前段の結果より, 各  $j$  に対して,  $s_j \in S$  を  $s_j y_j$  が  $A[x_1, \dots, x_n]$  上整となるようにとれる.  $a = s_1 \cdots s_m \in S$  と置けば, 任意の  $j$  に対して  $ay_j$  は  $A[x_1, \dots, x_n]$  上整である.  $B[a^{-1}]$  は単位的  $A[a^{-1}]$ -代数として  $ay_1, \dots, ay_m$  によって生成されるから, このことより,  $B[a^{-1}]$  は  $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$  上整である.  $\square$

**補題 1.22**  $A$  と  $B$  を整域とし,  $A$  は  $B$  に部分環として含まれ,  $B$  は単位的  $A$ -代数として有限生成であるとする. このとき, 任意の  $b \in B \setminus \{0\}$  に対して, ある  $a \in A \setminus \{0\}$  が存在して, 任意の代数閉体  $\mathbb{K}$  と, 任意の  $\tau \in \text{Hom}(A, \mathbb{K})$  であって  $\tau(a) \neq 0$  を満たすものに対して,  $\tau$  を拡張する  $\tilde{\tau} \in \text{Hom}(B, \mathbb{K})$  であって  $\tilde{\tau}(b) \neq 0$  を満たすものが存在する.

**証明**  $b \in B \setminus \{0\}$  とすると, 局所化  $B[b^{-1}]$  も整域であり,  $A$  を部分環として含み, 単位的  $A$ -代数として有限生成である. したがって, 補題 1.21 より, ある  $a \in A \setminus \{0\}$  と  $A$  上代数的独立な  $x_1, \dots, x_n \in B[b^{-1}]$  が存在して,  $B[b^{-1}, a^{-1}]$  が  $A[x_1, \dots, x_n][a^{-1}]$  上整となる.  $\mathbb{K}$  を代数閉体とし,  $\tau \in \text{Hom}(A, \mathbb{K})$  が  $\tau(a) \neq 0$  を満たすとする.  $\tau$  は  $\tau' \in \text{Hom}(A[a^{-1}], \mathbb{K})$  に一意に拡張される. さらに,  $x_1, \dots, x_n$  は  $A$  上代数的独立であり, したがって  $A[a^{-1}]$  上代数的独立でもあるから,  $\tau'$  を拡張する  $\tau'' \in \text{Hom}(A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n], \mathbb{K})$  が存在する.  $B[a^{-1}, b^{-1}]$  は  $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$  上整だから, 上昇定理の系 [1, Chapter 5, Exercise 2] より,  $\tau''$  を拡張する  $\tau''' \in \text{Hom}(B[a^{-1}, b^{-1}], \mathbb{K})$  が存在する.  $\tilde{\tau} = \tau'''|_B \in \text{Hom}(B, \mathbb{K})$  が主張の条件を満たす環準同型となる.  $\square$

**命題 1.23**  $V$  と  $W$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする. 多項式写像  $\phi: V \rightarrow W$  に対する次の条件について, (a)  $\iff$  (b)  $\iff$  (c) が成り立つ. さらに,  $\mathbb{K}$  が代数閉ならば, これらの条件は同値である.

- (a)  $\phi$  は支配的である.
- (b)  $\phi(V)$  は  $W$  において Zariski 稠密である.
- (c)  $V$  の任意の Zariski 稠密開集合の  $\phi$  による像は,  $W$  のある Zariski 稠密開集合を含む.

**証明** (a)  $\iff$  (b) 次のとおり, 主張の同値性が成り立つ.

$$\begin{aligned} \phi \text{ が支配的でない} &\iff \text{ある } g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\} \text{ が存在して, } g \circ \phi = 0 \\ &\iff \text{ある } g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\} \text{ が存在して, } \phi(V) \subseteq g^{-1}(\{0\}) \\ &\iff W \text{ の真の Zariski 閉集合であって } \phi(V) \text{ を含むものが存在する} \\ &\iff \phi(V) \text{ が } W \text{ において Zariski 稠密でない.} \end{aligned}$$

(c)  $\implies$  (b) 明らかである.

(a)  $\implies$  (c) ( $\mathbb{K}$  が代数閉である場合)  $\phi$  が支配的であるとする. すると,  $\phi$  による引き戻し  $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$  は単射環準同型だから, これによって  $\text{Pol}(W)$  を  $\text{Pol}(V)$  の部分環とみなして補題 1.22 を適用することで, 次を得る.

任意の  $f \in \text{Pol}(V) \setminus \{0\}$  に対して, ある  $g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\}$  が存在して,  $\tau \in \text{Hom}(\text{Pol}(W), \mathbb{K})$  であって  $\tau(g) \neq 0$  を満たす任意のものに対して,  $\tilde{\tau} \in \text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$  であって  $\tilde{\tau} \circ \phi^* = \tau$  かつ  $\tilde{\tau}(f) \neq 0$  を満たすものが存在する.

補題 1.20 に注意すれば、これは、次のように書き換えられる。

任意の  $f \in \text{Pol}(V) \setminus \{0\}$  に対して、ある  $g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\}$  が存在して、 $w \in W$  であって  $g(w) \neq 0$  を満たす任意のものに対して、 $v \in \phi^{-1}(\{w\})$  であって  $f(v) \neq 0$  を満たすものが存在する。

この命題の「 $w \in W$  であって」以下の部分は、 $\phi(\{f \neq 0\}) \supseteq \{g \neq 0\}$  であることを意味する。よって、 $V$  の任意の Zariski 稠密開集合の  $\phi$  による像は、 $W$  のある Zariski 稠密開集合を含む。□

$V$  と  $W$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間、 $\phi: V \rightarrow W$  を多項式写像とし、 $x_0 \in V$  とする。  $\phi(x_0 + h)$  を  $h \in V$  に関して次数ごとに整理して

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \delta_1(h) + \cdots + \delta_n(h) \quad (\delta_i: V \rightarrow W \text{ は斉 } i \text{ 次多項式写像})$$

と表すときの線型写像  $\delta_1: V \rightarrow W$  を、 $\phi$  の点  $x_0$  における**微分** (derivative) といい、 $\phi'(x_0)$  と書く。

**命題 1.24**  $V$  と  $W$  を無限可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする。多項式写像  $\phi: V \rightarrow W$  のある点  $x_0 \in V$  における微分  $\phi'(x_0): V \rightarrow W$  が全射ならば、 $\phi$  は支配的である。

**証明** 一般性を失わず、 $\phi(0) = 0$  であり、 $\phi'(0): V \rightarrow W$  が全射であるとする。すなわち、 $\phi$  は全射線型写像  $\phi'(0)$  と 2 次以上の項のみからなる多項式写像との和であるとする。  $g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\}$  とし、 $g$  の斉  $i$  次部分を  $g_i$  と書き、 $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid g_i \neq 0\}$  と置く。すると、 $g \circ \phi$  は斉  $n$  次多項式関数  $g_n \circ \phi'(0)$  と  $n+1$  次以上の項のみからなる多項式関数との和となり、 $\phi'(0)$  は全射であり  $g_n \neq 0$  だから、 $g \circ \phi \neq 0$  を得る。よって、 $\phi$  による引き戻し  $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$  は単射だから、 $\phi$  は支配的である。□

## 1.5 Cartan 部分代数の共役性

$V$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の線型空間とする。線型写像  $T: V \rightarrow V$  が**局所冪零** (locally nilpotent) であるとは、任意の  $v \in V$  に対して、ある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して、 $T^n(v) = 0$  を満たすことをいう。  $V$  が有限次元である場合には、 $T$  が冪零であることと局所冪零であることは同値である。

$V$  上の局所冪零な線型写像  $T$  に対して、 $V$  上の線型写像  $e^T$  を、

$$e^T(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n(v)$$

(右辺は有限項を除き 0 である) と定める<sup>\*1</sup>。容易に確かめられるように、 $T$  と  $S$  が互いに可換な  $V$  上の局所冪零な線型写像ならば、 $e^{T+S} = e^T e^S = e^S e^T$  が成り立つ。特に、 $e^T$  は、 $e^{-T}$  を逆にもつ  $V$  の自己線型同型である。また、 $A$  が結合的とは限らない代数であり、 $D$  がその上の局所冪零な導分ならば、 $e^D$  は結合的とは限らない代数  $A$  の自己同型である。

**定義 1.25 (初等自己同型)**  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とする。  $\text{ad}(x)$  が冪零であるような  $x \in \mathfrak{g}$  に対する自己同型  $e^{\text{ad}(x)}$  の全体が生成する  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  の部分群を、 $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  と書く。  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  の元を、 $\mathfrak{g}$  の**初等自己同型** (elementary automorphism) という。

<sup>\*1</sup> 本小節の範囲では、 $V$  が有限次元である (したがって、 $T$  が冪零である) 場合だけで十分である。一般の場合の定義は、3 節や 4 節で用いられる。

$\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とし,  $\mathfrak{h}$  をその冪零部分 Lie 代数とする. このとき,  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ ,  $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$  とすると,  $\text{ad}(x)$  は冪零だから (命題 1.14),  $e^{\text{ad}(x)} \in \text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  が定まる. 本小節の以下の部分では, この形の初等自己同型全体が生成する  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  の部分群を,  $E(\mathfrak{h})$  と書くことにする.

**補題 1.26**  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の代数閉体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とし,  $\mathfrak{h}$  をその冪零部分 Lie 代数とする.  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$  であって  $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \neq 0$  を満たすもの ( $\mathfrak{g}$  が有限次元であることと命題 1.7 より, このような  $\lambda$  は有限個である) を重複なく列挙して,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とする.

(1)  $\mathfrak{h}_{\text{reg}} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})\}$  と置くと,  $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$  は  $\mathfrak{h}$  の Zariski 稠密開集合である.

(2) 写像  $\phi: \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \dots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{g}$  を

$$\phi(h, x_1, \dots, x_n) = e^{\text{ad}(x_1)} \dots e^{\text{ad}(x_n)}(h)$$

と定めると, これは支配的な多項式写像である.

**証明** (1)  $h \in \mathfrak{g}$  とする. 直和分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$  が成立するから (系 1.13),

$$\mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i(h)=0} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$$

である. したがって,  $\mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  であるための必要十分条件は,  $\lambda_1(h), \dots, \lambda_n(h)$  がいずれも 0 でないことである. よって,  $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$  は,  $\mathfrak{h}$  上の多項式関数  $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$  の非零点集合だから,  $\mathfrak{h}$  の Zariski 稠密開集合である.

(2)  $p \in \mathbb{N}$  を任意の  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h}))^p = 0$  を満たすようにとると (命題 1.14), 写像  $\phi$  は

$$\phi(h, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{p-1} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \text{ad}(x_1)^{k_1} \dots \text{ad}(x_n)^{k_n}(h)$$

と書けるから, これは多項式写像である. 次に,  $\phi$  が支配的であることを示すために,  $h \in \mathfrak{h}$  を固定して, 微分  $\phi'(h, 0, \dots, 0)$  を求める.  $\phi(h+u, 0, \dots, 0) = h+u$  ( $u \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ ) より

$$\phi'(h, 0, \dots, 0)(u, 0, \dots, 0) = u$$

であり,  $\phi(h, 0, \dots, v_i, \dots, 0) = h + [v_i, h] + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{1}{k!} \text{ad}(v_i)^k(h)$  ( $v_i \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$ ) より

$$\phi'(h, 0, \dots, 0)(0, 0, \dots, v_i, \dots, 0) = [v_i, h]$$

である. したがって, 微分  $\phi'(h, 0, \dots, 0): \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \dots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{g}$  は,

$$\phi'(h, 0, \dots, 0)(u, v_1, \dots, v_n) = u + [v_1, h] + \dots + [v_n, h]$$

で与えられる. ここで,  $h \in \mathfrak{h}$  を  $\lambda_1(h), \dots, \lambda_n(h)$  がいずれも 0 でないようにとっておけば,  $\text{ad}(h)$  は各  $\mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$  上で線型同型となるから, 上式より,  $\phi'(h, 0, \dots, 0)$  の像は  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) + \sum_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$  (系 1.13) となる. よって, 命題 1.24 より,  $\phi$  は支配的である.  $\square$

**補題 1.27**  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の代数閉体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とし,  $\mathfrak{h}_1$  と  $\mathfrak{h}_2$  をその Cartan 部分代数とする. このとき,  $\phi_1 \in E(\mathfrak{h}_1)$  と  $\phi_2 \in E(\mathfrak{h}_2)$  であって,  $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$  を満たすものが存在する.

証明 各  $i \in \{1, 2\}$  に対して, 定理 1.17 より  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_i$  であることに注意して,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{i,\text{reg}} &= \{h \in \mathfrak{h}_i \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_i)\} \\ &= \{h \in \mathfrak{h}_i \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{h}_i\}\end{aligned}$$

と置く. すると, 補題 1.26 と命題 1.23 より,  $E(\mathfrak{h}_i)\mathfrak{h}_{i,\text{reg}}$  は  $\mathfrak{g}$  のある Zariski 稠密開集合を含む. 特に,  $E(\mathfrak{h}_1)\mathfrak{h}_{1,\text{reg}} \cap E(\mathfrak{h}_2)\mathfrak{h}_{2,\text{reg}} \neq \emptyset$  である. すなわち, 各  $i \in \{1, 2\}$  に対して  $\phi_i \in E(\mathfrak{h}_i)$  と  $h_i \in \mathfrak{h}_{i,\text{reg}}$  をとって,  $\phi_1(h_1) = \phi_2(h_2)$  となるようにできる. 各  $i \in \{1, 2\}$  に対して

$$\phi_i(\mathfrak{h}_i) = \phi_i(\mathfrak{g}^0(h_i)) = \mathfrak{g}^0(\phi_i(h_i))$$

だから,  $\phi_1(h_1) = \phi_2(h_2)$  より  $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$  である. □

定理 1.28 (Cartan 部分代数の共役性)  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の代数閉体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とする.

- (1)  $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$  の部分群  $E(\mathfrak{h})$  は,  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  (系 1.18 より存在する) のとり方によらない. これを  $E$  と書くと,  $E$  は  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  の正規部分群である.
- (2)  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数は, すべて  $E$  ((1) の記号) の下で共役である.

証明 (1)  $\mathfrak{h}_1$  と  $\mathfrak{h}_2$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とすると, 補題 1.27 より,  $\phi_1 \in E(\mathfrak{h}_1)$  と  $\phi_2 \in E(\mathfrak{h}_2)$  を  $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$  となるようにとれる. 各  $i \in \{1, 2\}$  に対して

$$E(\mathfrak{h}_i) = \phi_i E(\mathfrak{h}_i) \phi_i^{-1} = E(\phi_i(\mathfrak{h}_i))$$

だから,  $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$  より  $E(\mathfrak{h}_1) = E(\mathfrak{h}_2)$  である.

$\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とし,  $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  とすると,  $\phi(\mathfrak{h})$  も  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数だから,

$$\phi E \phi^{-1} = \phi E(\mathfrak{h}) \phi^{-1} = E(\phi(\mathfrak{h})) = E$$

が成り立つ. よって,  $E$  は  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  の正規部分群である.

- (2) (1) の証明の前段の状況で,  $\phi_2^{-1}\phi_1 \in E$  は,  $\mathfrak{h}_1$  を  $\mathfrak{h}_2$  に移す. □

系 1.29 標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数は, すべて等しい次元をもつ.

証明  $\overline{\mathbb{K}}$  を  $\mathbb{K}$  の代数閉包とする.  $\mathfrak{h}$  と  $\mathfrak{h}'$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とすると, それらの係数拡大  $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$  と  $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$  は  $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$  の Cartan 部分代数だから (命題 1.6), Cartan 部分代数の共役性 (定理 1.28) より,  $\dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})} = \dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$  である. よって,  $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}'$  である. □

定義 1.30 (階数)  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とする.  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数の次元 (系 1.18 と系 1.29 より, これは一意に定まる) を,  $\mathfrak{g}$  の **階数** (rank) という.

系 1.31  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元 Lie 代数とする.

- (1)  $\mathfrak{g}$  の階数は,  $x \in \mathfrak{g}$  に対する部分 Lie 代数  $\mathfrak{g}^0(x)$  の次元の最小値に等しい.
- (2)  $x \in \mathfrak{g}$  に対して,  $\mathfrak{g}^0(x)$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は,  $\mathfrak{g}^0(x)$  の次元が  $\mathfrak{g}$  の階数に等しいことである.
- (3)  $\mathfrak{g}$  の任意の Cartan 部分代数は, (2) の方法で得られる.

証明 定理 1.17 で示したように,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は,  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数の族  $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$  に属し, かつこの中で極小であることである. このことと階数の定義から, 主張が従う.  $\square$

## 1.6 簡約 Lie 代数の Cartan 部分代数

命題 1.32  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数とする.  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  に対して, 次の条件は同値である.

- (a)  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である.
- (b)  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}'$  が存在して,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  と書ける.

証明 簡約 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は, 半単純 Lie 代数  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  と可換 Lie 代数  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  に (Lie 代数として) 直和分解される [4, 定理 6.23]. よって, 主張は, 命題 1.5 から従う.  $\square$

補題 1.33 標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  は, 可換である.

証明  $\mathfrak{g}$  の随伴表現の  $\mathfrak{h}$  への制限を  $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  と置くと,  $\rho$  のトレース形式は,  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式  $B$  の制限  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  にほかならない. 半単純性に関する Cartan の判定法 [4, 定理 6.10] より  $B$  は非退化だから,  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})}$  も非退化である (定理 1.17, 命題 1.15). したがって,  $\mathfrak{h}$  は簡約である [4, 定理 6.23]. 一方で,  $\mathfrak{h}$  は冪零でもあるから,  $\mathfrak{h}$  は可換である.  $\square$

補題 1.34  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数とし,  $\mathfrak{h}$  をその冪零部分 Lie 代数とする. このとき, 任意の  $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  に対して, その  $\mathfrak{g}$  における半単純部分  $x_s$  と冪零部分  $x_n$  は, ともに  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  に属する. 特に,  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とすると, 任意の  $x \in \mathfrak{h}$  に対して, その  $\mathfrak{g}$  における半単純部分  $x_s$  と冪零部分  $x_n$  は, ともに  $\mathfrak{h}$  に属する.

証明  $x, y \in \mathfrak{g}$  として,  $y$  の半単純部分を  $y_s$  と書くと,

$$x \in \mathfrak{g}^0(y) \iff x \in \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(y_s) \iff [x, y_s] = 0$$

である. 上式において,  $x$  をその半単純部分  $x_s$  に置き換えても, 同じ同値性が成り立つ.  $\text{ad}(x_s)$  は  $\text{ad}(x)$  の線型写像としての半単純部分だから, Jordan 分解に関する一般論より,  $\text{ad}(x_s)$  は  $\text{ad}(x)$  の定数項をもたない多項式として表せる. したがって,  $[x, y_s] = 0$  ならば  $[x_s, y_s] = 0$  である. 上記の同値性と合わせて,  $x \in \mathfrak{g}^0(y)$  ならば  $x_s \in \mathfrak{g}^0(y)$  であることを得る. よって,  $x$  が  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \bigcap_{y \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}^0(y)$  に属するならば,  $x_s$  と  $x_n = x - x_s$  も  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  に属する.

$\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数ならば,  $\mathfrak{h}$  は冪零であり,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  が成り立つ (定理 1.17). よって, 後半の主張は, 前半の主張から従う.  $\square$

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の部分線型空間  $\mathfrak{h}$  が ( $\mathfrak{g}$  において) **極大可換** (maximally commutative) であるとは,  $\mathfrak{h}$  が可換であり, かつ  $\mathfrak{g}$  の可換な部分線型空間であって  $\mathfrak{h}$  を真に含むものが存在しないことをいう. 容易に確かめられるように, これが成り立つための必要十分条件は,  $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  であることである.

定理 1.35  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数とする.  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  に対して, 次の条件は同値である.

- (a)  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数である.  
 (b)  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  において極大可換であり,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の任意の元は半単純である.

**証明** 定理 1.17 ですでに示したように,  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は,  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  であることである. また,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の任意の元が半単純ならば, その同時固有値 0 の同時広義固有空間  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  は, 同時固有値 0 の同時固有空間, すなわち  $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  に等しい. よって, 主張を示すためには,  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であるとして,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の任意の元が半単純であることを示せばよい.

命題 1.32 より, 一般性を失わず,  $\mathfrak{g}$  は半単純であると仮定する.  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数であるとして,  $x \in \mathfrak{h}$  を任意にとり, その Jordan 分解を  $(x_s, x_n)$  と書く. すると,  $x_n \in \mathfrak{h}$  であり (補題 1.34),  $\mathfrak{h}$  は可換だから (補題 1.33),  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$  は  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の任意の元と可換である. さらに,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$  は冪零だから,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$  の任意の元も冪零である. したがって,  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式を  $B$  と書くと,

$$B(\mathfrak{h}, x_n) = \text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)) = 0$$

である.  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})}$  は非退化だから (定理 1.17, 命題 1.15), 上式より,  $x_n = 0$  を得る. よって,  $x = x_s$  であり,  $x$  は半単純である. すなわち,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$  は半単純である.  $\square$

## 2 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

Lie 代数

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K}) \mid \text{tr } x = 0\}$$

を考え,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置くと,  $(H, X, Y)$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の基底である. これを,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の**標準基底** (standard basis) という. これらの元  $H, X, Y$  は, 関係式

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たす.

本節では, 特に断らなくても,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の標準基底を記号  $(H, X, Y)$  で表す.

### 2.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群のウェイト

**定義 2.1 (ウェイト)**  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とする.  $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の  $V$  への作用の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を, それぞれ,  $V$  の**ウェイト** (weight), **ウェイトベクトル** (weight vector), **ウェイト空間** (weight space) という.  $H$  の  $V$  への作用における固有値  $\lambda \in \mathbb{K}$  の重複度を,  $V$  におけるウェイト  $\lambda$  の**重複度** (multiplicity) という.

**定義 2.2 (ウェイト加群)**  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  は, それがウェイト空間の直和に分解される (すなわち,  $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の  $V$  への作用が対角化可能である) とき, **ウェイト加群** (weight module) であるという.

**命題 2.3**  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とする.  $v \in V$  がウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  のウェイトベクトルならば,  $Xv$  はウェイト  $\lambda + 2$  のウェイトベクトルであり,  $Yv$  はウェイト  $\lambda - 2$  のウェイトベクトルである.



証明  $v \in V$  がウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  のウェイトベクトルであるとする、 $Hv = \lambda v$  だから、

$$\begin{aligned} HXv &= XHv + [H, X]v = \lambda Xv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv, \\ HYv &= YHv + [H, Y]v = \lambda Yv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv \end{aligned}$$

である。すなわち、 $Xv$  はウェイト  $\lambda + 2$  のウェイトベクトルであり、 $Yv$  はウェイト  $\lambda - 2$  のウェイトベクトルである。  $\square$

命題 2.4  $f: V \rightarrow W$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の間の  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -準同型とする。  $v \in V$  がウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  のウェイトベクトルならば、 $f(v) \in W$  はウェイト  $\lambda$  のウェイトベクトルである。

証明  $v \in V$  がウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  のウェイトベクトルであるとする、 $Hv = \lambda v$  だから、

$$Hf(v) = f(Hv) = \lambda f(v)$$

である。すなわち、 $f(v)$  はウェイト  $\lambda$  のウェイトベクトルである。  $\square$

## 2.2 最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群

定義 2.5 (極大ベクトル)  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  のウェイトベクトル  $e \neq 0$  であって  $Xe = 0$  を満たすものを、 $V$  の**極大ベクトル** (maximal vector) という。  $V$  の極大ベクトルであって  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群として生成するものを、 $V$  の**極大生成ベクトル** (maximal generating vector) という。

定義 2.6 (最高ウェイト加群)  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  がウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  の極大生成ベクトルをもつとき、 $V$  は**最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト加群** (highest weight module of highest weight  $\lambda$ ) であるという。

命題 2.7  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする。  $V$  をウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  の極大ベクトル  $e$  をもつ  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とし、 $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$e_n = \frac{1}{n!} Y^n e$$

と定める。

(1) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$He_n = (\lambda - 2n)e_n, \quad Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \quad Ye_n = (n + 1)e_{n+1}$$

が成り立つ。ただし、 $e_{-1} = 0$  とみなす。

以下では、さらに、 $e$  が  $V$  の極大生成ベクトルである（したがって、 $V$  は最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト加群である）とする。

(2) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $e_n \neq 0$  であるとする。このとき、 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は  $V$  の基底である。

(3) ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $e_n = 0$  であるとして、 $m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \neq 0\}$  と置く。このとき、 $(e_0, \dots, e_m)$  は  $V$  の基底であり、 $\lambda = m$  である。

証明 (1)  $H$  の作用に関する主張は命題 2.3 から従い、 $Y$  の作用に関する主張は  $e_n$  の定義から明らかである。 $X$  の作用に関する主張を、 $n \in \mathbb{N}$  に関する帰納法で示す。 $n = 0$  のとき、 $e_0 = e$  は極大ベクトルだから



$Xe_0 = 0$  である.  $n \geq 1$  とし,  $Xe_{n-1} = (\lambda - n + 2)e_{n-2}$  が成り立つとすると,

$$\begin{aligned} nXe_n &= XYe_{n-1} \\ &= YXe_{n-1} + [X, Y]e_{n-1} \\ &= Y(\lambda - n + 2)e_{n-2} + He_{n-1} \\ &= (n-1)(\lambda - n + 2)e_{n-1} + (\lambda - 2n + 2)e_{n-1} \\ &= n(\lambda - n + 1)e_{n-1} \end{aligned}$$

となり,  $Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}$  が成り立つ. これで, 帰納法が完成した.

(2) (1) より,  $\text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  は  $V$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群である.  $e_0 = e$  は  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群として生成するから,  $V = \text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  である. また, 仮定より  $e_n$  はいずれも 0 でなく, (1) よりすべて異なるウェイトのウェイトベクトルだから,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は線型独立である. よって,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は  $V$  の基底である.

(3)  $(e_0, \dots, e_m)$  が  $V$  の基底であることは, (2) と同様にして示せる. また,  $e_m \neq 0$  かつ  $e_{m+1} = 0$  であり, 一方で (1) より  $Xe_{m+1} = (\lambda - m)e_m$  だから,  $\lambda = m$  が成り立つ.  $\square$

最高ウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  の最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は, もし存在すれば, その構造は命題 2.7 によって決まってしまう. 分類を完成させるために, 与えられた最高ウェイトの最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群を具体的に構成する.

$\lambda \in \mathbb{K}$  に対して, 線型空間としては  $M(\lambda) = \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}$  と定め (その標準基底を  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  と書く),  $H, X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の  $M(\lambda)$  への線型作用を

$$He_n = (\lambda - 2n)e_n, \quad Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \quad Ye_n = (n + 1)e_{n+1}$$

によって定める (ただし,  $e_{-1} = 0$  とみなす). これらの作用を標準基底  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に関して行列表示すれば,

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda - 2 & & \\ & & \lambda - 4 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & \\ & 0 & \lambda - 1 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる. 容易に確かめられるように, これらの作用によって,  $M(\lambda)$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群をなす. 明らかに,  $e_0$  は  $M(\lambda)$  のウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトルである.

さらに,  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  であるとする. このとき,  $M(\lambda)$  において  $Xe_{\lambda+1} = (\lambda - (\lambda + 1) + 1)e_{\lambda} = 0$  だから,

$$N(\lambda) = \text{span}\{e_{\lambda+1}, e_{\lambda+2}, \dots\}$$

と定めると, これは  $M(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群である. これを用いて

$$L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$$

と定め,  $M(\lambda)$  から  $N(\lambda)$  への等化準同型による各  $e_n$  の像をそのまま  $e_n$  と書く. 明らかに,  $L(\lambda)$  は  $(e_0, \dots, e_{\lambda})$  を基底にもつ  $\lambda + 1$  次元の  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群であり,  $e_0$  は  $L(\lambda)$  のウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトルである.  $H, X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の  $L(\lambda)$  への作用を基底  $(e_0, \dots, e_{\lambda})$  に関して行列表示すれば,

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda - 2 & & & \\ & & \lambda - 4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ & 0 & \lambda - 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

**定理 2.8 (最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類)**  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする。  $\lambda \in \mathbb{K}$  とする。

- (1)  $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$  であるとする。このとき、最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は、同型を除いて  $M(\lambda)$  のみである。  $M(\lambda)$  は無限次元かつ既約なウェイト加群であり、そのウェイトは  $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \dots$  (すべて重複度 1) である。
- (2)  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  であるとする。このとき、最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は、同型を除いて  $M(\lambda)$  と  $L(\lambda)$  のみである。  $M(\lambda)$  は無限次元かつ可約なウェイト加群であり、そのウェイトは  $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \dots$  (すべて重複度 1) である。  $L(\lambda)$  は  $\lambda+1$  次元かつ既約なウェイト加群であり、そのウェイトは  $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \dots, -\lambda$  (すべて重複度 1) である。

**証明** 最高ウェイト加群の分類に関する主張は、命題 2.7 から従う。次元とウェイトに関する主張は、明らかである。

既約性に関する主張を示す。まず、  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  であるとする、  $M(\lambda)$  は、部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $N(\lambda) \neq 0$ ,  $M(\lambda)$  をもつから、可約である。次に、  $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$  であるとして、  $M(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $N \neq 0$  を任意にとる。  $v \in M \setminus \{0\}$  を一つ固定して  $v = \sum_{n=0}^m c_n e_n$  ( $c_n \in \mathbb{K}$ ,  $c_m \neq 0$ ) と表すと、命題 2.7 より

$$X^m v = \sum_{n=0}^m c_n X^m e_n = c_m (\lambda - p + 1)(\lambda - p + 2) \cdots \lambda e_0$$

である。これは、  $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$  より  $e_0$  の 0 でないスカラー倍であり、  $N$  に属する。  $e_0$  は  $M(\lambda)$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群として生成するから、  $N = M(\lambda)$  となる。よって、  $M(\lambda)$  は既約である。  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  である場合に  $L(\lambda)$  が既約であることも、同様に示せる。  $\square$

**系 2.9**  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする。  $V$  をウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  の極大ベクトル  $e$  をもつ  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とし、  $e$  が生成する  $V$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  を  $M$  と置く。  $M$  が有限次元ならば、  $\lambda = \dim M - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  である。

**証明**  $e$  は  $M$  の極大生成ベクトルだから、主張は、最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類 (定理 2.8) から従う。  $\square$

## 2.3 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群

**補題 2.10**  $A$  を単位的結合代数とする\*2。

- (1)  $h, x \in A$  が  $[h, x] = 2x$  を満たすならば、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、  $[h, x^n] = 2nx^n$  が成り立つ。
- (2)  $h, x, y \in A$  が  $[h, x] = 2x$  かつ  $[x, y] = h$  を満たすならば、任意の  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  に対して、  $[x^n, y] = nx^{n-1}(h + n - 1) = n(h - n + 1)x^{n-1}$  が成り立つ。

**証明** (1)  $[h, x] = 2x$  だから、  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$[h, x^n] = \sum_{i=0}^{n-1} x^i [h, x] x^{n-1-i} = 2nx^n$$

\*2 本小節の範囲では、  $A = \mathbf{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$  であり、下記の  $h, x, y$  がそれぞれ  $H, X, Y$  である場合だけで十分である。一般の場合の主張は、補題 3.21 の証明で用いられる (この補題は、存在定理 (定理 3.22) の証明で用いられる)。

である.

(2)  $[x, y] = h$  であることと (1) より,  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  に対して,

$$\begin{aligned}
[x^n, y] &= \sum_{i=1}^{n-1} x^i [x, y] x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i h x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i (x^{n-1-i} h + [h, x^{n-1-i}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i (x^{n-1-i} h + 2(n-1-i)x^{n-1-i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^{n-1} (h + 2(n-1-i)) \\
&= nx^{n-1} (h + n - 1)
\end{aligned}$$

である. また, (1) より  $[h, x^{n-1}] = 2(n-1)x^{n-1}$  だから,

$$\begin{aligned}
nx^{n-1}(h + n - 1) &= n(h + n - 1)x^{n-1} - [h, x^{n-1}] \\
&= n(h + n - 1)x^{n-1} - 2(n-1)x^{n-1} \\
&= n(h - n + 1)x^{n-1}
\end{aligned}$$

である. □

**命題 2.11**  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする. 0 でない有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  は, 極大ベクトルをもつ.

**証明**  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  は  $\mathbb{K}^2$  上の線型写像として冪零だから, その  $V$  への作用も冪零である [4, 命題 6.32 (2)]. そこで,  $X^n \in \mathbf{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$  の  $V$  への作用が 0 になるような最小の  $n \in \mathbb{N}$  をとる.  $V \neq 0$  だから,  $n \geq 1$  である.  $X^{n-1}v \neq 0$  を満たす  $v \in V$  をとり,  $e = X^{n-1}v$  と置く. すると,  $e \neq 0$  かつ  $Xe = 0$  である. また,

$$n(H - n + 1)e = n(H - n + 1)X^{n-1}v = [X^n, Y]v = 0$$

(第 2 の等号は補題 2.10 (2) から, 第 3 の等号は  $X^n$  の  $V$  への作用が 0 であることから従う) だから,  $He = (n-1)e$  である. よって,  $e$  は  $V$  の極大ベクトルである. □

**定理 2.12 (有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類)**  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする. 有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は,  $\lambda \in \mathbb{N}$  に対する  $L(\lambda)$  で同型を除いて尽くされる.  $L(\lambda)$  は  $\lambda + 1$  次元のウェイト加群であり, そのウェイトは  $\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots, -\lambda$  (すべて重複度 1) である.

**証明** 0 でない有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は極大ベクトルをもち (命題 2.11), 有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の場合, それは自動的に極大生成ベクトルとなる. よって, 主張は, 最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類 (定理 2.8) から従う. □

**系 2.13**  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする.  $V$  を有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とし, それにおけるウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  の重複度を  $m_\lambda$  と書く.

- (1)  $V$  はウェイト加群であり、そのウェイトはすべて整数である。
- (2) 任意の  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して、 $m_\lambda = m_{-\lambda}$  である。
- (3)  $m_0 \geq m_2 \geq m_4 \geq \dots$  かつ  $m_1 \geq m_3 \geq m_5 \geq \dots$  である。
- (4)  $V$  は完全可約である。さらに、 $L(\lambda)$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ ) の  $V$  における重複度は、 $m_{\lambda+2} - m_\lambda$  である。

証明 Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より  $V$  は完全可約だから、主張は、 $V$  が有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群である場合に示せば十分である。この場合の主張は、いずれも、有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類 (定理 2.12) から容易に確かめられる。□

系 2.14  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする。  $V$  を有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とし、そのウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}$  のウェイト空間を  $V_\lambda$  と書く。

- (1)  $X$  の作用が定める  $V_\lambda$  から  $V_{\lambda+2}$  への線型写像 (命題 2.3 より定まる) は、 $\lambda$  が  $-1$  以下の整数のとき単射であり、 $-1$  以上の整数のとき全射である。
- (2)  $Y$  の作用が定める  $V_\lambda$  から  $V_{\lambda-2}$  への線型写像 (命題 2.3 より定まる) は、 $\lambda$  が  $1$  以下の整数のとき全射であり、 $1$  以上の整数のとき単射である。

証明 Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より  $V$  は完全可約だから、主張は、 $V$  が有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群である場合に示せば十分である。この場合の主張は、いずれも、有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類 (定理 2.12) から容易に確かめられる。□

### 3 分裂簡約 Lie 代数

#### 3.1 分裂簡約 Lie 代数とそのルート系

定義 3.1 (分裂半単純・簡約 Lie 代数)  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数とする。  $\mathfrak{g}$  の**分裂化 Cartan 部分代数** (splitting Cartan subalgebra) とは、  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  であって、  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  が同時対角化可能であるものをいう。このような  $\mathfrak{h}$  が存在するとき、  $\mathfrak{g}$  は**分裂可能** (splittable) であるといい、組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を**分裂簡約 Lie 代数** (split reductive Lie algebra) という。さらに、  $\mathfrak{g}$  が半単純・単純である場合には、それぞれ、組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を**分裂半単純 Lie 代数** (split semisimple Lie algebra) ・**分裂単純 Lie 代数** (split simple Lie algebra) という。

分裂簡約 Lie 代数  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  から  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  への**同型** (isomorphism) とは、同型  $\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  であって  $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$  を満たすものをいう。これが存在するとき、  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  と  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  は**同型** (isomorphic) であるという。

$\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数とし、  $\mathfrak{h}$  をその Cartan 部分代数とすると、  $\mathfrak{h}$  は可換であり、  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の任意の元は半単純である (定理 1.35)。したがって、  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数であるためには、  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の任意の元が三角化可能であれば十分である。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とすると、写像  $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$  に対応する  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の同時固有空間を、  $\mathfrak{g}_\alpha$  と書く。すなわち、

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \alpha(h)x\}$$

と書く。明らかに、  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  となりうるのは  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  のときだけである。

定義 3.2 (分裂簡約 Lie 代数のルート系) 標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の**ルート系** (root system) を,

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

と定める.  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の各元を,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の**ルート** (root) という.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とすると,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  は同時対角化可能であり, 定理 1.35 より  $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  だから, 直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する. これを,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の**ルート空間分解** (root space decomposition) といい, 各  $\mathfrak{g}_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ) を, **ルート空間** (root space) という.  $\mathfrak{g}$  は有限次元だから, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は有限である.

注意 3.3  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数の有限族とし,  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  と置く. このとき,  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  は, 各  $\mathfrak{g}_i$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}_i$  を用いて  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$  と書ける (命題 1.5).  $h = \sum_{i \in I} h_i$  ( $h_i \in \mathfrak{h}_i$ ) に対して,

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h) = \bigoplus_{i \in I} \text{ad}_{\mathfrak{g}_i}(h_i)$$

だから,  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(h)$  が対角化可能であるための必要十分条件は, 各  $\text{ad}_{\mathfrak{h}_i}(h_i)$  が対角化可能であることである. したがって,  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, 各  $\mathfrak{h}_i$  が  $\mathfrak{g}_i$  の分裂化 Cartan 部分代数であることである. さらに, これらの条件の下で,  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i & (\alpha = 0) \\ (\mathfrak{g}_i)_{\alpha|_{\mathfrak{h}_i}} & (\alpha|_{\mathfrak{h}_i} \neq 0 \text{ かつ 任意の } j \in I \setminus \{i\} \text{ に対して } \alpha|_{\mathfrak{h}_j} = 0) \\ 0 & (\text{任意の } j \in I \text{ に対して } \alpha|_{\mathfrak{h}_j} \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に,  $\mathfrak{h}^*$  から  $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i^*$  への自然な線型同型写像は,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  から  $\coprod_{i \in I} \Delta(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$  への全単射を与える.

注意 3.4  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の簡約 Lie 代数とすると,  $\mathfrak{g}$  は半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  と可換 Lie 代数  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の (Lie 代数としての) 直和に分解される [4, 定理 6.23]. よって, 注意 3.3 の特別な場合として, 次のことがいえる.

- $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  は,  $\mathfrak{g}'$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}'$  を用いて,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  と書ける.  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数であるための必要十分条件は,  $\mathfrak{h}'$  が  $\mathfrak{g}'$  の分裂化 Cartan 部分代数であることである.
- 上記の条件の下で,  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) & (\alpha = 0) \\ \mathfrak{g}'_{\alpha|_{\mathfrak{h}'}} & (\alpha \neq 0 \text{ かつ } \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0) \\ 0 & (\alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$  に含まれ,  $V$  から  $\mathfrak{h}'^*$  への線型同型写像  $\alpha \mapsto \alpha|_{\mathfrak{h}'}$  は,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  から  $\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  への全単射を与える.

注意 3.5  $\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とし,  $\mathbb{K}'$  をその拡大体とする.  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とすると,  $\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}$  は  $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$  の Cartan 部分代数であり (命題 1.6 (1)),  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}}(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})) = \{T_{(\mathbb{K}')} \mid T \in \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\}$  は同時対角化可能だから,  $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}), \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}'))}$  は  $\mathbb{K}'$  上の分裂簡約 Lie 代数である. また,  $\alpha' \in (\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}'))}^*$  に対して,

$$(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}'))}_{\alpha'} = \begin{cases} (\mathfrak{g}_{\alpha})_{(\mathbb{K}')} & (\alpha' = \alpha_{(\mathbb{K}')}), \alpha \in \mathfrak{h}^* \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に,  $\mathfrak{h}^*$  から  $(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}'))}^*$  への写像  $\alpha \mapsto \alpha_{(\mathbb{K}')}$  は,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  から  $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}), \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}'))}$  への全単射を与える. これにより, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}), \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}'))}$  は, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の  $\mathbb{K}'$  への係数拡大と同一視できる.

命題 3.6  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする.

- (1) 任意の  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  に対して,  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  が成り立つ.
- (2)  $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  を不変な双線型形式とする. このとき, 任意の  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  であって  $\alpha + \beta \neq 0$  を満たすものに対して,  $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$  が成り立つ.
- (3)  $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  を非退化かつ不変な双線型形式とする. このとき, 任意の  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  に対して, 双線型形式  $B|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}: \mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{K}$  は非退化である. 特に, 双線型形式  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$  は非退化である.

証明 (1)  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}, y \in \mathfrak{g}_{\beta}$  とすると, 任意の  $h \in \mathfrak{h}$  に対して

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y]$$

だから,  $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  である. よって,  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  である.

(2)  $\alpha + \beta \neq 0$  であるとして,  $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$  を満たす  $h \in \mathfrak{h}$  をとる.  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}, y \in \mathfrak{g}_{\beta}$  とすると,  $B$  の不変性より

$$0 = B([h, x], y) + B(x, [h, y]) = \alpha(h)B(x, y) + \beta(h)B(x, y)$$

だから,  $B(x, y) = 0$  である. よって,  $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$  である.

(3)  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  が  $B(x, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = 0$  を満たすとする. (2) より, 任意の  $\beta \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}$  に対しても  $B(x, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$  だから,  $B(x, \mathfrak{g}) = 0$  である.  $B$  は非退化だから, これより,  $x = 0$  を得る. 同様にして,  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が  $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, y) = 0$  を満たすならば  $y = 0$  であることもわかる. よって,  $B|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  は非退化である. 特に,  $\alpha = 0$  として,  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  が非退化であることを得る.  $\square$

系 3.7  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする. 任意の  $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$  に対して,  $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})$  のすべての元は冪零である.

証明  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$  は有限集合だから,  $p \in \mathbb{N}$  を  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}) + p\alpha$  が  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$  と交わらないようにとれる. このとき, 任意の  $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$  に対して  $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})^p \mathfrak{g}_{\beta} \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+p\alpha} = 0$  だから (命題 3.6 (1)),  $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})^p \mathfrak{g} = 0$  である. よって,  $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})$  のすべての元は冪零である.  $\square$

## 3.2 分裂簡約 Lie 代数における $\mathfrak{sl}_2$ -三対

定義 3.8 ( $\mathfrak{sl}_2$ -三対)  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の標準基底を  $(H, X, Y)$  と書く. Lie 代数  $\mathfrak{g}$  における  $\mathfrak{sl}_2$ -三対 ( $\mathfrak{sl}_2$ -triple) とは,  $\mathfrak{g}$  の元の組  $(h, x, y)$  であって,  $H, X, Y$  をそれぞれ  $h, x, y$  に移す  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  から  $\mathfrak{g}$  への線型写像が単射準同型であるものをいう.

**注意 3.9** Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の元  $h, x, y$  が, 少なくとも一つは 0 でなく, 関係式  $[h, x] = 2x$ ,  $[h, y] = -2y$ ,  $[x, y] = h$  を満たすとする. このとき, 容易に確かめられるように,  $h, x, y$  はいずれも 0 でない. さらに,  $h, x, y$  は  $\text{ad}(h)$  の異なる固有空間に属するから, これらは線型独立である. よって, このとき,  $(h, x, y)$  は  $\mathfrak{sl}_2$ -三対である.

**定理 3.10**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする. 各  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して, 次が成り立つ.

- (1)  $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$  および  $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  は 1 次元である.
- (2)  $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$  であって  $\alpha(H_\alpha) = 2$  を満たすものが一意に存在する.
- (3)  $H_\alpha$  を (2) のとおりに定める. 任意の  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$  に対して,  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  であって  $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$  を満たすものが一意に存在する. さらに, このとき,  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  は  $\mathfrak{sl}_2$ -三対である.

**証明**  $\mathfrak{g}$  上の非退化かつ不変な双線型形式  $B$  を一つ固定する ( $\mathfrak{g}$  は簡約だから,  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現であって, 非退化なトレース形式をもつものが存在する [4, 定理 6.23]. このトレース形式を  $B$  とすればよい [4, 命題 3.23 (1)]). 命題 3.6 (3) より,  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  や  $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  も非退化である. 次の 4 段階に分けて, 主張を示す.

(I)  $\mathfrak{h}_\alpha$  が 1 次元であることを示す.  $\mathfrak{h}$  上の双線型形式  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  は非退化だから,  $h_\alpha \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  であって任意の  $h \in \mathfrak{h}$  に対して  $B(h, h_\alpha) = \alpha(h)$  を満たすものが (一意に) 存在する.  $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  とすると,  $[x, y] \in \mathfrak{h}$  (命題 3.6 (1)) であり, 任意の  $h \in \mathfrak{h}$  に対して

$$\begin{aligned} B(h, [x, y]) &= B([h, x], y) \\ &= \alpha(h)B(x, y) \\ &= B(h, h_\alpha)B(x, y) \\ &= B(h, B(x, y)h_\alpha) \end{aligned}$$

だから,  $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  が非退化であることより

$$[x, y] = B(x, y)h_\alpha \quad (*)$$

が成り立つ. 一方で,  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  であることと  $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  が非退化であることより,  $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \mathbb{K}$  である. よって,  $\mathfrak{h}_\alpha = B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha})h_\alpha = \mathbb{K}h_\alpha$  であり,  $\mathfrak{h}_\alpha$  は 1 次元である.

(II)  $\alpha(H_\alpha) = 2$  を満たす  $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$  が一意に存在することを示す. (I) で示したように  $\mathfrak{h}_\alpha$  は 1 次元だから, あとは,  $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha} \neq 0$  であることをいえばよい.  $\mathfrak{h}_\alpha$  は 1 次元だから,  $\mathfrak{g}_\alpha$  と  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  のそれぞれの 1 次元部分線型空間  $\mathfrak{g}'_\alpha$  と  $\mathfrak{g}'_{-\alpha}$  を,  $[\mathfrak{g}'_\alpha, \mathfrak{g}'_{-\alpha}] = \mathfrak{h}_\alpha$  を満たすようにとれる. ここで,  $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha} = 0$  であると仮定すると,  $[\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{g}'_\alpha] = [\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{g}'_{-\alpha}] = 0$  となる. したがって,  $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}_\alpha + \mathfrak{g}'_\alpha + \mathfrak{g}'_{-\alpha}$  と置くと,

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{h}_\alpha, \quad [\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{h}_\alpha] = [\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha] = 0$$

となるから,  $\mathfrak{s}$  は  $\mathfrak{g}$  の冪零部分 Lie 代数である.  $\mathfrak{s}$  の冪零根基は  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{h}_\alpha$  だから [4, 定理 5.15],  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha)$  のすべての元は冪零である [4, 命題 5.10]. 一方で,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha) \subseteq \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  は同時対角化可能でもあるから,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha) = 0$  となる. 随伴表現  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$  が  $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  上で単射であることと合わせれば,  $\mathfrak{h}_\alpha = 0$  を得るが, これは (I) に反する. よって, 背理法より,  $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha} \neq 0$  である.

(III) 任意の  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$  に対して,  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  が  $\mathfrak{sl}_2$ -三対となるような  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  をとれることを示す.  $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  が非退化であることと (\*) より  $[X_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathfrak{h}_\alpha$  だから,  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  を  $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$  となるようにとれる.  $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$  はいずれも 0 でなく, ルート空間分解に関して異なる直和因子に属するから,



これらは線型独立である。また、これらは関係式

$$[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha, \quad [X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$$

を満たす。よって、 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  は  $\mathfrak{sl}_2$ -三対である。

(IV)  $\mathfrak{g}_\alpha$  と  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  が 1 次元であることを示す (このことから、(3) の一意性も従う)。  $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$  には非退化な双線型形式  $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$  が存在するから、  $\mathfrak{g}_\alpha$  と  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  の次元は等しい。以下、  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  が 1 次元であることを示す。  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の標準基底を  $(H, X, Y)$  と書き、(III) でとった  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  と随伴表現によって、  $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす。すると、任意の  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  に対して、

$$\begin{aligned} Hy &= [H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)y = -2y, \\ Xy &= [X_\alpha, y] = B(X_\alpha, y)h_\alpha \end{aligned}$$

となる (第 2 式の第 2 の等号は、(\*) による)。ここで、  $y \neq 0$  かつ  $B(X_\alpha, y) = 0$  であるとする、  $y$  は有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $\mathfrak{g}$  のウェイト  $-2$  の極大ベクトルとなるが、これは系 2.9 に反する。よって、任意の  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$  に対して  $B(X_\alpha, y) \neq 0$  だが、そのためには、  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  はたかだか 1 次元でなければならない。一方、  $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  より  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq 0$  だから、  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  は 1 次元である。  $\square$

### 3.3 被約ルート系の公理を満たすことの証明

**補題 3.11**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とすると、任意の  $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して、  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  である。ここで、  $H_\alpha$  は、定理 3.10 によって定まるものとする。

**証明**  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  と  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  を  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  が  $\mathfrak{sl}_2$ -三対となるようにとり (定理 3.10 (3))、これよ随伴表現によって  $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす。すると、  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  は  $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$  に  $\beta(H_\alpha)$  倍で作用するから、有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $\mathfrak{g}$  はウェイト  $\beta(H_\alpha)$  をもつ。系 2.13 (1) より、これは整数である。  $\square$

**補題 3.12**  $\mathfrak{g}$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の Lie 代数、  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の有限次元部分線型空間とし、  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(h)x\}$$

と書く。  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 、  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 、  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 、  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  とし、これらは次の条件を満たすとする\*3。

- (i)  $\alpha(H_\alpha) = 2$  である。
- (ii)  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  は  $\mathfrak{sl}_2$ -三対である。
- (iii)  $\mathfrak{g}$  上の線型写像  $\text{ad}(X_\alpha)$  と  $\text{ad}(Y_\alpha)$  は局所冪零である。

このとき、

$$\theta_\alpha = e^{\text{ad}(X_\alpha)} e^{\text{ad}(-Y_\alpha)} e^{\text{ad}(X_\alpha)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると、次が成り立つ。

- (1)  $\theta_\alpha$  は  $\mathfrak{h}$  を安定にし、  $\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}}$  は、  $s_{H_\alpha}(h) = h - \alpha(h)H_\alpha$  によって定まる  $\mathfrak{h}$  上の線型写像  $s_{H_\alpha}$  に等しい。
- (2)  $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^*$  は、  $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$  によって定まる  $\mathfrak{h}^*$  上の線型写像  $s_\alpha$  に等しい。

\*3 本小節の範囲では、  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数であり、  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  が定理 3.10 のように定まる  $\mathfrak{sl}_2$ -三対である場合だけで十分である。一般の場合の主張は、存在定理 (定理 3.22) の証明で用いられる。

(3)  $s_\alpha$  を (2) のとおりに定める. このとき, 任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して,  $\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$  である.

証明 (1) 条件 (i) より, 直和分解  $\mathfrak{h} = \text{Ker } \alpha \oplus \mathbb{K}\alpha$  が成立する.  $h \in \text{Ker } \alpha$  に対しては,  $\text{ad}(X_\alpha)h = \alpha(h)X_\alpha = 0$  かつ  $\text{ad}(Y_\alpha)h = -\alpha(h)Y_\alpha = 0$  だから,

$$\theta_\alpha(h) = h = s_{H_\alpha}(h)$$

である. また, 容易に確かめられるように,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  (その標準基底を  $(H, X, Y)$  と書く) において  $e^{\text{ad}(X)}e^{\text{ad}(-Y)}e^{\text{ad}(X)}(H) = -H$  が成り立つから, 条件 (ii) と (i) より,

$$\theta_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha = s_{H_\alpha}(H_\alpha)$$

である. よって,  $\theta_\alpha$  は  $\mathfrak{h}$  を安定にし,  $\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}} = s_{H_\alpha}$  が成り立つ.

(2) (1) より, 任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  と  $h \in \mathfrak{h}$  に対して,

$$\begin{aligned} (\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^*(\lambda)(h) &= \lambda(\theta_\alpha(h)) \\ &= \lambda(h - \alpha(h)H_\alpha) \\ &= \lambda(h) - \lambda(H_\alpha)\alpha(h) \\ &= s_\alpha(\lambda)(h) \end{aligned}$$

である. よって,  $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^* = s_\alpha$  が成り立つ.

(3)  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  とする.  $\theta_\alpha$  は  $\mathfrak{g}$  の自己同型だから,

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta_\alpha^{-1}(x) \in V_\lambda\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, \theta_\alpha^{-1}(x)] = \lambda(h)\theta_\alpha^{-1}(x)\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [\theta_\alpha(h), x] = \lambda(h)x\} \end{aligned}$$

である. ここで, (1) と (2) より,  $\theta_\alpha$  は  $\mathfrak{h}$  を安定にし,  $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^{* -1} = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$  を満たす. よって, 上式と合わせて,

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = s_\alpha(\lambda)(h)x\} \\ &= \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)} \end{aligned}$$

を得る. □

**定理 3.13**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする. このとき,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$  上の被約ルート系であり,  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の双対ルート  $\alpha^\vee \in V^*$  は

$$\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha) \quad (\lambda \in V)$$

によって与えられ, ルート鏡映  $s_\alpha: V \rightarrow V$  は

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha \quad (\lambda \in V)$$

によって与えられる. 特に,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が分裂半単純 Lie 代数ならば,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $\mathfrak{h}^*$  上の被約ルート系である. ここで,  $H_\alpha$  は, 定理 3.10 によって定まるものとする.

証明 注意 3.4 より,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subseteq V$  である. また, 各  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して,  $\alpha \in V$  かつ  $\alpha(H_\alpha) = 2$  だから, 主張の式によって定義される線型写像  $s_\alpha: V \rightarrow V$  は鏡映である.

以下,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  と鏡映  $s_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ) が被約ルート系の公理 (RS1)–(RS4) (「ルート系」 [5, 定義 1.5] を参照のこと) を満たすことを確かめる.

(RS1)  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が有限であることと 0 を含まないことは明らかである.  $h \in \mathfrak{h}$  が任意の  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して  $\alpha(h) = 0$  を満たすとする, ルート空間分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$  より,  $\text{ad}(h) = 0$  である. すなわち,  $h \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  である. これは,  $V$  上の線型形式であって任意の  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  において値 0 をとるものが 0 しかないことを意味する. よって,  $\text{span } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = V$  である.

(RS2)  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とし,  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとる. すると, 系 3.7 より  $\text{ad}(X_\alpha)$  と  $\text{ad}(Y_\alpha)$  は冪零だから, これらは補題 3.12 の仮定を満たす. したがって, 任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して,  $\mathfrak{g}_\lambda$  と  $\mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$  は  $\mathfrak{g}$  の自己同型によって移り合う. よって,  $s_\alpha$  は  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を安定にする.

(RS3) 補題 3.11 で示したように, 任意の  $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して,  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  である.

(RS4)  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とする.  $\text{ad}(H_\alpha)$  は  $\mathfrak{g}_{2\alpha}$  には  $2\alpha(H_\alpha) = 4$  倍写像として作用するから, 命題 3.6 (1) と合わせて,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{2\alpha} &= [H_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}], \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{3\alpha}] \end{aligned}$$

を得る. ところが,  $\mathfrak{g}_\alpha$  は 1 次元だから (定理 3.10 (1)),  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$  である. また, すでに示した (RS1)–(RS3) より  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  はルート系だから, ルート系の一般論 [5, 系 1.25] より  $3\alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  であり, したがって,  $\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$  である. よって, 上式より  $\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$  であり, これは  $2\alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を意味する.  $\square$

定理 3.13 の状況で,  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とするとき, 記号の濫用で,  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対しても

$$\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha), \quad s_\alpha(\lambda) = \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$$

として, 双対ルート  $\alpha^\vee$  やルート鏡映  $s_\alpha$  を  $\mathfrak{h}^*$  上に拡張する. すなわち,  $Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0\}$  と置くと直和分解  $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$  が成立するが,  $\alpha^\vee$  は  $Z$  上では値 0 をとるとして拡張し,  $s_\alpha$  は  $Z$  上では恒等写像であるとして拡張する. このとき,  $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}^{**}$  は自然な線型同型  $\mathfrak{h}^{**} \cong \mathfrak{h}$  を通して  $H_\alpha$  に対応するから, しばしばこれらを同一視して  $\alpha^\vee = H_\alpha$  などと書く. また, Weyl 群  $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$  の  $V$  への作用も,  $Z$  上には自明に作用するとして,  $\mathfrak{h}^*$  への作用に拡張する.

系 3.14  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする. このとき,  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  の基底である. 特に,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が分裂半単純 Lie 代数ならば,  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\mathfrak{h}$  の基底である. ここで,  $H_\alpha$  は, 定理 3.10 によって定まるものとする.

証明 定理 3.13 とルート系の一般論 [5, 命題 1.13 (1), 命題 2.17] より,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$  は  $\mathfrak{h}'$  上の被約ルート系であり,  $\Pi^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$  はその基底である. 特に,  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\mathfrak{h}'$  の基底である.  $\square$

系 3.15  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数,  $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を線型独立な二つのルートとし,

$$I_{\beta, \alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$$

と置く.

- (1)  $I_{\beta, \alpha}$  は,  $p, q \in \mathbb{N}$  を用いて  $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$  と書ける.
- (2) (1) の  $p$  と  $q$  について,  $p - q = -n(\beta, \alpha) = -\beta(H_\alpha)$  である.
- (3) (1) の  $p$  と  $q$  について,  $\gamma = \beta - q\alpha$  と置くと,  $p + q = -n(\gamma, \alpha) = -\gamma(H_\alpha)$  であり, これは  $0, 1, 2, 3$  のいずれかである.

証明 定理 3.13 とルート系の一般論 [5, 命題 1.29] から従う.  $\square$

命題 3.16  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする. 二つのルート  $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  について,  $\alpha + \beta \neq 0$  ならば,  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  である.

証明  $\alpha = \beta$  ならば  $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$  だから, 主張は明らかである.  $\alpha \neq \pm\beta$  である場合を考える.  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は被約ルート系だから (定理 3.13), このとき,  $\alpha$  と  $\beta$  は線型独立である [5, 系 1.25].  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとり, これと随伴表現によって  $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす.  $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$  を系 3.15 のとおりに定めると,

$$\mathfrak{s} = \bigoplus_{j \in I_{\beta, \alpha}} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$$

は  $\mathfrak{g}$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群であり (命題 3.6 (1)), 各  $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$  は  $\mathfrak{s}$  のウェイト  $(\beta + j\alpha)(H_\alpha) = -(p - q) + 2j$  (系 3.15 (2)) のウェイト空間であり, これらはすべて 1 次元である (定理 3.10 (1)). したがって, 有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $\mathfrak{s}$  のウェイトは  $-(p + q), -(p + q) + 2, \dots, p + q$  であり, これらの重複度はすべて 1 だから, 系 2.13 (4) より,  $\mathfrak{s}$  は最高ウェイト  $p + q$  の有限次元既約  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $L(p + q)$  に同型である.  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の  $L(p + q)$  への作用は, 0 でない各ウェイト空間を, そのウェイトに 2 を加えたウェイト空間に全射に移す. よって,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \text{ad}(X_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = X\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

が成り立つ.  $\square$

系 3.17  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とし,  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$ , 負ルート全体のなす集合を  $\Delta_-$  と書く.

- (1)  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$  が生成する  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数は,  $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$  である.
- (2)  $\bigoplus_{\alpha \in -\Pi} \mathfrak{g}_\alpha$  が生成する  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数は,  $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha$  である.
- (3)  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$  が生成する  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数は,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  である. 特に,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が分裂半単純 Lie 代数ならば,  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$  は  $\mathfrak{g}$  を Lie 代数として生成する.

証明 (1)  $\mathfrak{n}_+$  は,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数であり (命題 3.6 (1)),  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$  を含む. 次に,  $\beta \in \Delta_+$  とすると, ルート系の一般論 [5, 命題 2.13] より, 単純ルートの列  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Pi$  を,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \beta$  であり, かつ任意の  $i \in \{1, \dots, k\}$  に対して  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \in \Delta_+$  であるようにとれる. このとき, 命題 3.16 を繰り返し適用することで,  $\mathfrak{g}_\beta = [[\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}], \dots, \mathfrak{g}_{\alpha_k}]$  を得る. よって,  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$  は  $\mathfrak{n}_+$  を Lie 代数として生成する.

(2) (1) と同様である.

(3)  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$  が生成する  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数を,  $\mathfrak{g}'$  と置く.  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  は,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数であり,  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$  を含むから (注意 3.4),  $\mathfrak{g}' \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  である. 次に, (1) と (2) より,  $\bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_- \subseteq \mathfrak{g}'$  である. また, 任意の  $\alpha \in \Pi$  に対して  $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}'$  であり ( $H_\alpha$  は, 定理 3.10 によって定まるもの

とする),  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  の基底だから (系 3.14),  $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'$  である. よって,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}'$$

(第 1 の等号は, 注意 3.4 から従う) である. 以上より,  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  が成り立つ.  $\square$

### 3.4 存在定理

本節の以下の部分では,  $\delta_{\alpha\beta}$  を Kronecker のデルタとする.

$\Pi$  をルート系の基底とすると, 異なる二つの単純ルート  $\alpha, \beta \in \Pi$  に対して, Cartan 整数  $n(\beta, \alpha)$  は 0 以下の整数である [5, 命題 2.2]. 本節の以下の部分では, このことに注意する.

**補題 3.18**  $V$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする.  $\Delta$  を  $V$  上のルート系とし,  $\Pi$  をその基底とする.  $\Pi$  が自由に生成する単位的結合  $\mathbb{K}$ -代数  $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$  ( $\mathbb{K}^{\oplus \Pi}$  の標準基底を  $(e_\gamma)_{\gamma \in \Pi}$  と書く) を考え,  $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$  上の線型写像  $\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\alpha, \hat{Y}_\alpha$  ( $\alpha \in \Pi$ ) を,

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= \left( -\sum_{i=1}^k n(\gamma_i, \alpha) \right) (e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ \hat{X}_\alpha(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= \begin{cases} 0 & (k=0) \\ (\hat{Y}_{\gamma_1} \hat{X}_\alpha - \delta_{\alpha\gamma_1} \hat{H}_\alpha)(e_{\gamma_2} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) & (k \geq 1), \end{cases} \\ \hat{Y}_\alpha(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= e_\alpha \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k} \end{aligned}$$

によって定める (まず  $\hat{H}_\alpha$  と  $\hat{Y}_\alpha$  を定め, 次にそれらを用いて  $\hat{X}_\alpha$  を次数  $k$  に関して再帰的に定める). このとき, 任意の  $\alpha, \beta \in \Pi$  に対して, 次が成り立つ.

- (1)  $[\hat{H}_\alpha, \hat{H}_\beta] = 0$ .
- (2)  $[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] = n(\beta, \alpha) \hat{X}_\beta$ .
- (3)  $[\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha) \hat{Y}_\beta$ .
- (4)  $[\hat{X}_\alpha, \hat{Y}_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \hat{H}_\alpha$ .

**証明** (1), (4) 明らかである.

(3) 任意の  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Pi$  に対して,

$$\begin{aligned} & [\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\beta](e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ &= \left( -n(\beta, \alpha) - \sum_{i=1}^k n(\beta_i, \alpha) \right) (e_\beta \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) - \left( -\sum_{i=1}^k n(\beta_i, \alpha) \right) (e_\beta \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ &= -n(\beta, \alpha) (e_\beta \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ &= -n(\beta, \alpha) \hat{Y}_\beta(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \end{aligned}$$

である. よって,  $[\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha) \hat{Y}_\beta$  が成り立つ.

(2) 任意の  $\gamma \in \Pi$  に対して, (1), (3), (4) より,

$$\begin{aligned}
0 &= [\hat{H}_\alpha, [\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma]] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta], \hat{Y}_\gamma] + [\hat{X}_\beta, [\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\gamma]] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta], \hat{Y}_\gamma] - n(\gamma, \alpha)[\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\gamma, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] + (n(\beta, \alpha) - n(\gamma, \alpha))[\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] + (n(\beta, \alpha) - n(\gamma, \alpha))\delta_{\beta\gamma}\hat{H}_\beta \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma]
\end{aligned}$$

である. よって, 任意の  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Pi$  に対して

$$\begin{aligned}
([\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta)(e_{\gamma_1} \otimes \dots \otimes e_{\gamma_k}) &= ([\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta)\hat{Y}_{\gamma_1} \dots \hat{Y}_{\gamma_k} 1 \\
&= \hat{Y}_{\gamma_1} \dots \hat{Y}_{\gamma_k} ([\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta) 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから,  $[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] = n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta$  が成り立つ. □

**補題 3.19**  $V$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする.  $\Delta$  を  $V$  上の被約ルート系とし,  $\Pi$  をその基底とする.  $\tilde{\mathfrak{g}}$  を,  $\alpha \in \Pi$  に対する生成元

$$\tilde{H}_\alpha, \quad \tilde{X}_\alpha, \quad \tilde{Y}_\alpha$$

と  $\alpha, \beta \in \Pi$  に対する関係式

$$\begin{aligned}
(\text{R1}) \quad & [\tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\beta] = 0 \\
(\text{R2}) \quad & [\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = n(\beta, \alpha)\tilde{X}_\beta \\
(\text{R3}) \quad & [\tilde{H}_\alpha, \tilde{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha)\tilde{Y}_\beta \\
(\text{R4}) \quad & [\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\beta] = \delta_{\alpha\beta}\tilde{H}_\alpha
\end{aligned}$$

によって定まる Lie 代数とする.  $\lambda \in V$  に対して

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } [\tilde{H}_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\}$$

と書き,

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{g}}_0, \quad \tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \quad \tilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

と定める.

- (1) 任意の  $\lambda, \mu \in V$  に対して,  $[\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \tilde{\mathfrak{g}}_\mu] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$  である.
- (2) 各  $\alpha \in \Pi$  に対して  $\tilde{H}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$ ,  $\tilde{X}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ ,  $\tilde{Y}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$  であり, 直和分解  $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$  が成立する.
- (3)  $\tilde{\mathfrak{h}}$ ,  $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ ,  $\tilde{\mathfrak{n}}_-$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の部分 Lie 代数であり, 直和分解  $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_-$  が成立する. (したがって,  $\lambda \in V \setminus ((\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi))$  に対しては,  $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = 0$  である.)
- (4)  $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\tilde{\mathfrak{h}}$  の基底である.
- (5)  $\tilde{\mathfrak{n}}_+$  は Lie 代数として  $(\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  によって生成される.

(6)  $\tilde{\mathfrak{n}}_-$  は Lie 代数として  $(\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  によって生成される.\*4

証明 (1)  $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, y \in \tilde{\mathfrak{g}}_\mu$  とすると, 任意の  $\alpha \in \Pi$  に対して

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha^\vee(\lambda)[x, y] + \alpha^\vee(\mu)[x, y]$$

だから,  $[x, y] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$  である. よって,  $[\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \tilde{\mathfrak{g}}_\mu] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$  である.

(2)  $\tilde{H}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{X}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$  は, それぞれ関係式 (R1), (RS2), (RS3) から従う.

$\tilde{\mathfrak{g}}$  は線型空間として「 $\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$  ( $\alpha \in \Pi$ ) からなる有限列において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの」全体で生成されるが, 前段の結果と (1) より, このような元はある  $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$  に含まれる. よって,  $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda \in V} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$  が成り立つ. さらに, 線型代数の一般論より, この和は直和である.

(3), (4), (5), (6) ( $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  の線型独立性を除く) (1) より,  $\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の部分 Lie 代数である. (2) より, これらの和  $\tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}_+ + \tilde{\mathfrak{n}}_-$  は直和である.

$(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}, (\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}, (\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  が生成する  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の部分 Lie 代数を, それぞれ  $\tilde{\mathfrak{h}}', \tilde{\mathfrak{n}}'_+, \tilde{\mathfrak{n}}'_-$  と置く. これらは, それぞれ  $\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$  に含まれる. 主張を示すためには,  $\tilde{\mathfrak{g}}' = \tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_+ \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_-$  が  $\tilde{\mathfrak{g}}$  全体に一致することをいえばよい.  $\tilde{\mathfrak{g}}'$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の生成元  $\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$  をすべて含むから, そのためには,  $\tilde{\mathfrak{g}}'$  が  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の部分 Lie 代数であることをいえばよい. そのためには,  $\tilde{\mathfrak{g}}'$  が  $\text{ad}(\tilde{H}_\alpha), \text{ad}(\tilde{X}_\alpha), \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$  によって安定であることをいえば十分である. このことは,  $\tilde{\mathfrak{g}}'$  が線型空間として

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_\beta & (\beta \in \Pi), \\ & [\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] & (k \geq 1 \text{ は整数}, \beta_1, \dots, \beta_k \in \Pi) \end{aligned}$$

の全体によって生成されることと, 次の主張から従う.

主張 3.20 上記の元に  $\text{ad}(\tilde{H}_\alpha), \text{ad}(\tilde{X}_\alpha), \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$  を施した結果について, 次の表に述べたことが成り立つ. ここで,  $c = n(\beta_1, \alpha) + \dots + n(\beta_k, \alpha)$  と置いた.

	$\tilde{H}_\beta$	$[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]$	$[\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\text{ad}(\tilde{H}_\alpha)$	0	$c[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]$	$-c[\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\text{ad}(\tilde{X}_\alpha)$	$-n(\alpha, \beta)\tilde{X}_\alpha$	$[\tilde{X}_\alpha, [\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]]$	$\begin{cases} \in \tilde{\mathfrak{h}}' & (k = 1) \\ \in \tilde{\mathfrak{n}}'_+ & (k \geq 2) \end{cases}$
$\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$	$n(\alpha, \beta)\tilde{Y}_\alpha$	$\begin{cases} \in \tilde{\mathfrak{h}}' & (k = 1) \\ \in \tilde{\mathfrak{n}}'_+ & (k \geq 2) \end{cases}$	$[\tilde{Y}_\alpha, [\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]]$

主張 3.20 の証明  $\tilde{H}_\beta$  の列の主張は, 関係式 (R1), (R2), (R3) から従う.  $[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]$  の列の主張と  $[\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]$  の列の主張は同様に示せるから, 前者のみを考える.  $\text{ad}(\tilde{X}_\alpha)$  の行の主張は, 明らかである.  $\text{ad}(\tilde{H}_\alpha)$  の行の主張は, (1) と (2) より  $[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\beta_1 + \dots + \beta_k}$  であることから従う.  $\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$  の主張について,  $k = 1$  のときは, 関係式 (R4) より,

$$\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)\tilde{X}_{\beta_1} = \delta_{\alpha\beta_1}\tilde{H}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{h}}'$$

\*4 より強く,  $\tilde{\mathfrak{n}}_+$  と  $\tilde{\mathfrak{n}}_-$  がそれぞれ  $(\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  と  $(\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  を基本族とする自由 Lie 代数であることまでいえる. 証明は, Bourbaki [3, §VIII.4.2, Proposition 3] を参照のこと.



である。また,  $[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \in \tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_+$  であるとする, 関係式 (R4) より,

$$\begin{aligned} & \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_{k+1}}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \\ &= \text{ad}(\tilde{X}_{\beta_{k+1}}) \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] - \delta_{\alpha\beta_{k+1}} \text{ad}(\tilde{H}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \\ &\in \text{ad}(\tilde{X}_{\beta_{k+1}})(\tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_+) + \tilde{\mathfrak{n}}'_+ \\ &= \tilde{\mathfrak{n}}'_+ \end{aligned}$$

となる。よって, 帰納的に,  $k \geq 2$  のとき  $\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \in \tilde{\mathfrak{n}}'_+$  であることを得る。 //

$(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  の線型独立性 生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と補題 3.18 より, Lie 代数  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の  $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$  上の表現であって  $\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$  をそれぞれ  $\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\alpha, \hat{Y}_\alpha$  に移すものが, 一意に存在する。各  $\alpha \in \Pi$  に対して,  $\mathbb{K}^{\oplus \Pi}$  (を  $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$  の部分線型空間とみなしたものは  $\hat{H}_\alpha$ -安定であり,  $\mathbb{K}^{\oplus \Pi}$  の標準基底に関する  $\hat{H}_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus \Pi}}$  の行列表示は,  $(\beta, \beta)$ -成分が  $n(\beta, \alpha)$  である対角行列である。Cartan 行列  $(n(\beta, \alpha))_{(\beta, \alpha) \in \Pi \times \Pi}$  は正則だから [5, 命題 4.2],  $(\hat{H}_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus \Pi}})_{\alpha \in \Pi}$  は  $\text{End}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$  において線型独立である。特に,  $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}$  において線型独立である。  $\square$

**補題 3.21**  $V$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする。  $\Delta$  を  $V$  上の被約ルート系とし,  $\Pi$  をその基底とする。  $\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$  を, 補題 3.19 のとおりに定義する。異なる二つの単純ルート  $\alpha, \beta \in \Pi$  に対して

$$\tilde{X}_{\alpha\beta} = \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\beta, \quad \tilde{Y}_{\alpha\beta} = \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{Y}_\beta$$

と定め,  $\tilde{X}_{\alpha\beta}$  の全体が生成する  $\tilde{\mathfrak{g}}$  のイデアルを  $\tilde{\mathfrak{a}}_+$  と置き,  $\tilde{Y}_{\alpha\beta}$  の全体が生成する  $\tilde{\mathfrak{g}}$  のイデアルを  $\tilde{\mathfrak{a}}_-$  と置く。このとき,

$$\tilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} (\tilde{\mathfrak{a}}_+ \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+, \quad \tilde{\mathfrak{a}}_- = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} (\tilde{\mathfrak{a}}_- \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_-$$

が成り立つ。

**証明** どちらも同様だから,  $\tilde{\mathfrak{a}}_+$  に関する主張を示す。  $\tilde{\mathfrak{a}}_+$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}$  のイデアルであり, 特に  $\text{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})$ -安定だから, 線型代数の一般論より,

$$\tilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in V} (\tilde{\mathfrak{a}}_+ \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$$

が成り立つ。あとは,  $\tilde{\mathfrak{a}}_+$  が  $\tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$  に含まれることを示せばよい。以下,  $\tilde{X}_{\alpha\beta}$  の全体が生成する  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の部分線型空間を,  $\tilde{\mathfrak{a}}_+^0$  と置く。

まず,  $[\tilde{\mathfrak{n}}_-, \tilde{\mathfrak{a}}_+^0] = 0$  を示す。  $\tilde{\mathfrak{n}}_-$  は Lie 代数として  $(\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  によって生成されるから (補題 3.19 (6)), そのためには, 任意の  $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$  ( $\alpha \neq \beta$ ) に対して  $[\tilde{Y}_\gamma, \tilde{X}_{\alpha\beta}] = 0$  であることをいえばよい。  $\gamma \neq \alpha$  のとき, 関係式 (R2) と (R4) より,

$$\begin{aligned} [\tilde{Y}_\gamma, \tilde{X}_{\alpha\beta}] &= \text{ad}(\tilde{Y}_\gamma) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\beta \\ &= \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \text{ad}(\tilde{Y}_\gamma) \tilde{X}_\beta \\ &= -\delta_{\beta\gamma} \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{H}_\beta \\ &= \delta_{\beta\gamma} n(\alpha, \beta) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

である ( $n(\beta, \alpha) = 0$  ならば  $n(\alpha, \beta) = 0$  であり,  $n(\beta, \alpha) < 0$  ならば  $\text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\alpha = 0$  だから, 最後の等式が成り立つ).  $\gamma = \alpha$  のとき, 関係式 (R2), (R3), (R4) と補題 2.10 (2) より,

$$\begin{aligned} [\tilde{Y}_\alpha, \tilde{X}_{\alpha\beta}] &= \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\beta \\ &= \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha) \tilde{X}_\beta - (1 - n(\beta, \alpha)) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{-n(\beta, \alpha)} (\text{ad}(\tilde{H}_\alpha) - n(\beta, \alpha)) \tilde{X}_\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって, いずれの場合にも,  $[\tilde{Y}_\gamma \tilde{X}_{\alpha\beta}] = 0$  が成り立つ.

次に,  $\tilde{\mathfrak{a}}_+ \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+$  を示す.  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の随伴表現に対応する包絡代数の表現を  $\rho: \mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{End}(\tilde{\mathfrak{g}})$  と書くと,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{a}}_+ &= \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{g}})) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 \\ &= \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{h}})) \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 && (\text{補題 3.19 (3), Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 [4, 系 2.5]}^{*5}) \\ &= \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{h}})) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 && (\text{前段の結果}) \\ &\subseteq \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 && (\text{補題 3.19 (1), (2) より } [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{X}_{\alpha\beta}] \subseteq \mathbb{K} \tilde{X}_{\alpha\beta}) \\ &\subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+ && (\tilde{\mathfrak{a}}_+^0 \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+) \end{aligned}$$

である. これで, 主張が示された. □

**定理 3.22 (存在定理)**  $V$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の有限次元線型空間とする.  $\Delta$  を  $V$  上の被約ルート系とし,  $\Pi$  をその基底とする.  $\mathfrak{g}$  を,  $\alpha \in \Pi$  に対する生成元

$$H_\alpha, \quad X_\alpha, \quad Y_\alpha$$

と  $\alpha, \beta \in \Pi$  に対する関係式

$$\begin{aligned} \text{(R1)} \quad & [H_\alpha, H_\beta] = 0 \\ \text{(R2)} \quad & [H_\alpha, X_\beta] = n(\beta, \alpha) X_\beta \\ \text{(R3)} \quad & [H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta, \alpha) Y_\beta \\ \text{(R4)} \quad & [X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha \\ \text{(R5)} \quad & \text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} X_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ \text{(R6)} \quad & \text{ad}(Y_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} Y_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \end{aligned}$$

によって定まる Lie 代数とし,  $\mathfrak{h} = \text{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$  と定める.

- (1)  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は分裂半単純 Lie 代数である.
- (2)  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\mathfrak{h}$  の基底である.
- (3) (2) より, 各  $\alpha \in \Pi$  に対して  $\alpha^\vee$  を  $H_\alpha$  に移すことで  $V^*$  から  $\mathfrak{h}$  への線型同型写像が定まるが, これが誘導する線型同型写像  $\Phi: V \rightarrow \mathfrak{h}^*$  は, ルート系  $\Delta$  から  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  への同型である.

**証明** 補題 3.19 と補題 3.21 の記号を用いると,  $\mathfrak{g}$  は商 Lie 代数  $\tilde{\mathfrak{g}}/(\tilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{a}}_-)$  であり, 等化準同型を  $\varpi: \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$

<sup>\*5</sup> Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 (の定式化の一つ) は, 「 $\mathfrak{g}$  が (任意の可換体上の) Lie 代数であり,  $(x_i)_{i \in I}$  が  $\mathfrak{g}$  の全順序集合  $I$  で添字付けられた基底であるとき,  $n \in \mathbb{N}$  と  $i_1, \dots, i_n \in I$  が  $i_1 \leq \dots \leq i_n$  を満たす範囲を動くときの  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  の全体が, 包絡代数  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  の基底をなす」ことを主張している. この主張のうち, 「(線型空間として) 生成する」ことは, 帰納法によって容易に証明できる. ここで必要なのは, 「(線型空間として) 生成する」ことだけである.

と書くと,  $\varpi(\tilde{H}_\alpha) = H_\alpha$ ,  $\varpi(\tilde{X}_\alpha) = X_\alpha$ ,  $\varpi(\tilde{Y}_\alpha) = Y_\alpha$  である. 補題 3.19 (2), (3) より, 直和分解

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

が成立する. このことと補題 3.21 より,  $\mathfrak{g}_\lambda = \varpi(\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) = \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda / ((\tilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$  と置くと, 直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in V} \mathfrak{g}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)} \mathfrak{g}_\lambda \quad (*)$$

が成立する.

直和分解 (\*) における  $\lambda = 0$  に対応する因子については,  $(\tilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_0 = 0$  だから (補題 3.21),  $\varpi$  は  $\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{g}}_0$  から  $\mathfrak{g}_0$  への同型を与える.  $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  は  $\tilde{\mathfrak{h}}$  の基底だから,  $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$  の基底である. これで (2) が示され, したがって, 線型同型写像  $\Phi: V \rightarrow \mathfrak{h}^*$  を (3) のように定義できる.

$\lambda \in V$  に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda \subseteq \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } [H_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\}$$

だが,  $\lambda$  が動くとき, 左辺の和は直和分解 (\*) を与え, 右辺の和は線型代数の一般論より直和だから, 上式では等号が成り立つ. (3) の線型同型写像  $\Phi: V \rightarrow \mathfrak{h}^*$  を用いれば,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\lambda &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } \lambda \in \Pi \text{ に対して } [H_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \Phi(\lambda)(h)x\} \end{aligned} \quad (**)$$

とも書ける.

**主張 3.23**  $\alpha \in \Pi$  とする.

(1)  $\mathfrak{g}$  上の線型写像  $\text{ad}(X_\alpha)$  と  $\text{ad}(Y_\alpha)$  は局所冪零である.

(2)  $\mathfrak{g}$  の自己同型  $\theta_\alpha$  を

$$\theta_\alpha = e^{\text{ad}(X_\alpha)} e^{\text{ad}(-Y_\alpha)} e^{\text{ad}(X_\alpha)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると ((1) より可能である), 任意の  $\lambda \in V$  に対して,  $\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$  が成り立つ.

**主張 3.23 の証明** (1) どちらも同様だから,  $\text{ad}(X_\alpha)$  が局所冪零であることを示す.  $\text{ad}(X_\alpha)$  は  $\mathfrak{g}$  上の導分だから,  $\text{ad}(X_\alpha)$  を繰り返し施すと 0 になる元全体は  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数をなす. 任意の  $\beta \in \Pi$  に対して,  $H_\beta$ ,  $X_\beta$ ,  $Y_\beta$  に  $\text{ad}(X_\alpha)$  を繰り返し施すと 0 になることを示せばよい. これは,

$$\begin{aligned} \text{ad}(X_\alpha)^2 H_\beta &= \text{ad}(X_\alpha)(-n(\beta, \alpha)X_\alpha) = 0, \\ \text{ad}(X_\alpha)X_\alpha &= 0, \\ \text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} X_\beta &= 0 & (\beta \neq \alpha), \\ \text{ad}(X_\alpha)^3 X_\beta &= \text{ad}(X_\alpha)^2(\delta_{\alpha\beta}H_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

であることから従う.

(2)  $\Phi(\alpha)(H_\alpha) = \alpha^\vee(\alpha) = 2$  であり,  $\mathfrak{g}_\lambda$  は (\*\*) のように書け,  $H_\alpha \neq 0$  であることと関係式 (R2), (R3), (R4) より  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  は  $\mathfrak{sl}_2$ -三対である (注意 3.9). よって,  $\Phi(\alpha)$  と  $H_\alpha$ ,  $X_\alpha$ ,  $Y_\alpha$  は補題 3.12 の仮定を満たし, 主張はこの補題の (3) から従う. //

主張 3.24  $\mathfrak{g}_\lambda$  ( $\lambda \in V$ ) は,  $\lambda = 0$  ならば  $\mathfrak{h}$  であり,  $\lambda \in \Delta$  ならば 1 次元であり, それ以外ならば 0 である. 特に,  $\mathfrak{g}$  は有限次元であり, 直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する.

主張 3.24 の証明  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  はすでに示した. (\*) より,  $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$  となりうるのは,  $\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)$  のときだけである.  $\lambda \in \mathbb{Z}\Delta$  が一つのルートの整数倍として書けなければ, ある  $s \in \mathbf{W}(\Delta)$  が存在して  $s(\lambda) \notin (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)$  となるから [5, 命題 2.15], 主張 3.23 (2) より,  $\mathfrak{g}_\lambda = 0$  である.

以下, ルート  $\alpha \in \Delta$  と正の整数  $m$  に対して,

$$\dim \mathfrak{g}_{m\alpha} = \begin{cases} 1 & (m = 1) \\ 0 & (m \geq 2) \end{cases}$$

を示す. 被約ルート系  $\Delta$  の任意のルートが Weyl 群の作用によって単純ルートに移せる [5, 定理 2.10 (2)] ことと主張 3.23 (2) より, 単純ルート  $\alpha \in \Pi$  に対してこれを示せば十分である.  $\tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$  は Lie 代数として  $(\tilde{X}_\beta)_{\beta \in \Pi}$  によって生成されるから (補題 3.19 (5)),  $\mathfrak{n}_+ = \varpi(\tilde{\mathfrak{n}}_+) = \bigoplus_{\lambda \in (\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$  は Lie 代数として  $X_\alpha$  によって生成される. したがって,  $\mathfrak{n}_+$  は線型空間として

$$X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_k} \text{ において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの } (k \in \mathbb{N}_{>0}, \beta_1, \dots, \beta_k \in \Pi) \quad (***)$$

の全体によって生成される. (\*\*\*) は直和因子  $\mathfrak{g}_{\beta_1 + \dots + \beta_k}$  に属するが (補題 3.21 (1)),  $\beta_1 + \dots + \beta_k = m\alpha$  となるのは  $k = m$  かつ  $\beta_1 = \dots = \beta_k = \alpha$  のときだけである.  $m \geq 2$  のとき, (\*\*\*) は常に 0 だから,  $\mathfrak{g}_{m\alpha} = 0$  である.  $m = 1$  のとき, (\*\*\*) は  $X_\alpha$  だから,  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{K}X_\alpha$  である. もし  $X_\alpha = 0$  ならば  $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha] = 0$  となりすでに示した (2) に矛盾するから,  $X_\alpha \neq 0$  であり,  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  を得る. これで, 主張が示された. //

主張 3.25  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は分裂半単純 Lie 代数であり, そのルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $\Phi(\Delta)$  に等しい.

主張 3.25 の証明  $\mathfrak{g}$  が半単純であること  $\mathfrak{g}$  の任意の可解イデアル  $\mathfrak{r}$  が 0 であることを示す.  $\mathfrak{r}$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルであり, 特に  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -安定だから, 主張 3.24 と線型代数の一般論より, 直和分解

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha)$$

が成立する.

まず,  $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$  を示す. 上式より, そのためには, 任意のルート  $\alpha \in \Delta$  に対して  $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha = 0$  を示せばよい. 被約ルート系  $\Delta$  の任意のルートが Weyl 群の作用によって単純ルートに移せる [5, 定理 2.10 (2)] ことと主張 3.23 (2) より, 単純ルート  $\alpha \in \Pi$  に対してこれを示せば十分である. この場合, 主張 3.24 より,  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{K}X_\alpha$  である. また, 関係式 (R2), (R3), (R4) と  $H_\alpha \neq 0$  であることより  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  は  $\mathfrak{sl}_2$ -三対だから (注意 3.9),  $\text{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$  は  $\mathfrak{g}$  の単純部分 Lie 代数である. よって,

$$\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{r} \cap \mathbb{K}X_\alpha \subseteq \mathfrak{r} \cap \text{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\} = 0$$

が成り立つ.

次に,  $\mathfrak{r} = 0$  を示す.  $\alpha \in \Pi$  を任意にとる. 前段で示したように  $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$  であり, (\*\*) が成り立つから,  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_\alpha] = \Phi(\alpha)(\mathfrak{r})\mathfrak{g}_\alpha$  である. 一方で,  $\mathfrak{r}$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルだから,  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$  である. したがって,  $\Phi(\alpha)(\mathfrak{r}) = 0$  である. 任意の  $\alpha \in \Pi$  に対してこれが成り立ち,  $\Phi(\Pi)$  は  $\mathfrak{h}^*$  の基底だから,  $\mathfrak{r} = 0$  である.

$\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数であること (\*\*) のとおり  $\mathfrak{g}$  は  $\text{ad}(\mathfrak{h})$  の同時固有空間の直和に同時固有値 0 の同時固有空間は  $\mathfrak{h}$  である. よって,  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数である (定理 1.35).

$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \Phi(\Delta)$  (\*\*) と主張 3.24 から従う. //

これで, すべての主張が示された.  $\square$

### 3.5 一意性定理と同型定理

**命題 3.26**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする. 各  $\alpha \in \Pi$  に対して,  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとる. このとき, 任意の  $\alpha, \beta \in \Pi$  に対して, 次が成り立つ.

- (1)  $[H_\alpha, H_\beta] = 0$ .
- (2)  $[H_\alpha, X_\beta] = n(\beta, \alpha)X_\beta$ .
- (3)  $[H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta, \alpha)Y_\beta$ .
- (4)  $[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta}H_\alpha$ .
- (5)  $\text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}X_\beta = 0$  ( $\alpha \neq \beta$  の場合).
- (6)  $\text{ad}(Y_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}Y_\beta = 0$  ( $\alpha \neq \beta$  の場合).

**証明** (1), (2), (3) 明らかである.

(4)  $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$  であることは明らかである.  $\alpha \neq \beta$  であるとする, ルート系の基底の定義より  $\alpha - \beta \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$  だから,  $[X_\alpha, Y_\beta] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = 0$  である (命題 3.6 (1)).

(5)  $\alpha \neq \beta$  であるとする.  $I_{\beta, \alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$  と置くと, 系 3.15 (1) より,  $p, q \in \mathbb{N}$  を用いて  $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$  と書ける. ルート系の基底の定義より  $\beta - \alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  だから,  $q = 0$  であり, 系 3.15 (2) と合わせて  $p = p - q = -n(\beta, \alpha)$  を得る. よって,

$$\text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}X_\beta \in \text{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+(1-n(\beta, \alpha))\alpha} = 0$$

である (命題 3.6 (1)).

(6) (5) と同様である.  $\square$

**定理 3.27 (一意性定理)**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂半単純 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする. 各  $\alpha \in \Pi$  に対して,  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとる.  $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$  を, 被約ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とその基底  $\Pi$  から存在定理 (定理 3.22) の方法で定まる分裂半単純 Lie 代数とする (ただし, 存在定理における  $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$  を, ここではそれぞれ  $H_{0, \alpha}, X_{0, \alpha}, Y_{0, \alpha}$  と書く). このとき, 準同型  $\phi: \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$  であって  $H_{0, \alpha}, X_{0, \alpha}, Y_{0, \alpha}$  をそれぞれ  $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$  に移すものが一意に存在する. さらに, この  $\phi$  は,  $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$  から  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  への同型である.

**証明** 生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と命題 3.26 より, 準同型  $\phi: \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$  であって  $H_{0, \alpha}, X_{0, \alpha}, Y_{0, \alpha}$  をそれぞれ  $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$  に移すものが一意に存在する.  $X_\alpha$  と  $Y_\alpha$  の全体は  $\mathfrak{g}$  を Lie 代数として生成するから (系 3.17 (3)), この  $\phi$  は全射である. さらに, 存在定理 (定理 3.22 (3)) より, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$  と  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は同型だから,

$$\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{h}_0^* + \#\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0) = \dim \mathfrak{h}^* + \#\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ。よって、 $\phi$  は同型である。さらに、 $\phi$  は、 $\mathfrak{h}_0 = \text{span}\{H_{0,\alpha} \mid \alpha \in \Pi\}$  を  $\mathfrak{h} = \text{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$  に移すから、 $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$  から  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  への同型である。□

**定理 3.28 (同型定理)**  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  と  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂半単純 Lie 代数とし、 $\Pi_1$  と  $\Pi_2$  をそれぞれルート系  $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  と  $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  の基底とする。  $\Phi: \mathfrak{h}_1^* \rightarrow \mathfrak{h}_2^*$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  から  $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  への同型であって  $\Pi_1$  を  $\Pi_2$  に移すものとし、各  $\alpha \in \Pi_1$  に対して、 $\phi_\alpha: (\mathfrak{g}_1)_\alpha \rightarrow (\mathfrak{g}_2)_{\Phi(\alpha)}$  を線型同型とする。このとき、 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  から  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  への同型  $\phi$  であって

$$(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \Phi, \quad \phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha \quad (\alpha \in \Pi_1)$$

を満たすものが一意に存在する。

**証明** 各  $i \in \{1, 2\}$  と  $\alpha \in \Pi_i$  に対して、 $\mathfrak{g}_i$  における  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_{i,\alpha}, X_{i,\alpha}, Y_{i,\alpha})$  を定理 3.10 のようにとる。必要ならば各  $X_{2,\alpha}$  をスカラー倍だけ調整して、 $\phi_\alpha(X_{1,\alpha}) = X_{2,\alpha}$  であるとする。

$\phi$  を  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  から  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  への同型とする。各  $\mathfrak{g}_\alpha$  は 1 次元だから (定理 3.10 (1)),  $\phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha$  であるための必要十分条件は、

$$\phi(X_{1,\alpha}) = X_{2,\Phi(\alpha)} \quad (*)$$

であることである。また、線型同型写像  $\Phi^{*-1}: \mathfrak{h}_1^* \rightarrow \mathfrak{h}_2^*$  は各  $H_{1,\alpha} = \alpha^\vee$  を  $H_{2,\Phi(\alpha)} = \Phi(\alpha)^\vee$  に移すから、 $(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \Phi$  であるための必要十分条件は、任意の  $\alpha \in \Pi_1$  に対して

$$\phi(H_{1,\alpha}) = H_{2,\Phi(\alpha)} \quad (**)$$

であることである。次に、 $\phi$  が任意の  $\alpha \in \Pi_1$  に対して  $(*)$  と  $(**)$  を満たすとする。すると、各  $\alpha \in \Pi_1$  に対して、 $\phi(Y_{1,\alpha}) = \phi((\mathfrak{g}_1)_{-\alpha}) = (\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$  であり、 $(\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$  は 1 次元だから (定理 3.10 (1)), ある  $c_\alpha \in \mathbb{K}$  を用いて  $\phi(Y_{1,\alpha}) = c_\alpha Y_{2,\Phi(\alpha)}$  と書ける。ところが、

$$\begin{aligned} H_{2,\Phi(\alpha)} &= \Phi(H_{1,\alpha}) \\ &= \Phi([X_{1,\alpha}, Y_{2,\alpha}]) \\ &= [\Phi(X_{1,\alpha}), \Phi(Y_{2,\alpha})] \\ &= c_\alpha [X_{2,\Phi(\alpha)}, Y_{2,\Phi(\alpha)}] \\ &= c_\alpha H_{2,\Phi(\alpha)} \end{aligned}$$

だから、 $c_\alpha = 1$  であり、

$$\phi(Y_{1,\alpha}) = Y_{2,\Phi(\alpha)} \quad (***)$$

が成り立つ。

前段の議論より、 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  から  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  への同型  $\phi$  が主張の条件を満たすための必要十分条件は、任意の  $\alpha \in \Pi_1$  に対して  $(*)$ ,  $(**)$ ,  $(***)$  が成り立つことである。一意性定理 (定理 3.27) より、このような  $\phi$  は、一意に存在する。□

**系 3.29** 標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂可能簡約 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数は、すべて  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  の下で共役である。

**証明**  $\mathfrak{g}$  が半単純である場合に示せば十分だから (注意 3.4), 以下ではそのように仮定する。  $\overline{\mathbb{K}}$  を  $\mathbb{K}$  の代数閉包とする。  $\mathfrak{h}$  と  $\mathfrak{h}'$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とすると、それらの係数拡大  $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$  と  $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$  は  $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$  の Cartan 部分代数だから (命題 1.6), Cartan 部分代数の共役性 (定理 1.28) より、 $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$  の自己同型であって  $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$

を  $\mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})}$  に移すものが存在する. この自己同型が誘導するルート系  $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})$  から  $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})})$  への同型を,  $\Psi: (\mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})^* \rightarrow (\mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})})^*$  と置く.  $\mathfrak{h}^*$  から  $(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})^*$  への写像  $\alpha \mapsto \alpha_{(\mathbb{K})}$  は  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を  $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})$  に移し,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$  と  $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})})$  についても同様だから (注意 3.5),  $\Psi$  は, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  から  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$  への同型  $\Psi: \mathfrak{h}^* \rightarrow (\mathfrak{h}')^*$  を誘導する. よって, 同型定理 (定理 3.28) より,  $\mathfrak{g}$  の自己同型であって  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{h}'$  に移すものが存在する.  $\square$

**命題 3.30** 標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂半単純 Lie 代数  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して, 次の条件は同値である.

- (a)  $\mathfrak{g}$  は単純である.
- (b)  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は既約である.

**証明** 明らかに,  $\mathfrak{g} = 0$  と  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \emptyset$  とは同値である. 以下では,  $\mathfrak{g} \neq 0$  である (したがって,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq \emptyset$  である) 場合を考える.

(a)  $\implies$  (b)  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が二つの空でない被約ルート系  $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  の直和に分解されたとする. 存在定理 (定理 3.22) より, 各  $i \in \{1, 2\}$  に対して,  $\Delta_i$  に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数  $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$  がとれる.  $\Delta_i \neq \emptyset$  だから,  $\mathfrak{g}_i \neq 0$  である. また, これらの直和  $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$  は,  $\Delta_1 \sqcup \Delta_2 = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数である (注意 3.3). 同型定理 (定理 3.28) より, Lie 代数  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  は  $\mathfrak{g}$  に同型である. よって,  $\mathfrak{g}$  は単純でない.

(b)  $\implies$  (a)  $\mathfrak{g}$  が単純でないとする.  $\mathfrak{g}$  は 0 でない半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}_1$  と  $\mathfrak{g}_2$  の (Lie 代数としての) 直和に分解できる.  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  の Cartan 部分代数だから, 各  $\mathfrak{g}_i$  の Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}_i$  を用いて,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  と書ける.  $\mathfrak{h}$  が  $\mathfrak{g}$  の分裂化 Cartan 部分代数であることから, 各  $\mathfrak{h}_i$  は  $\mathfrak{g}_i$  の分裂化 Cartan 部分代数であり,  $\mathfrak{h}^*$  から  $\mathfrak{h}_1^* \oplus \mathfrak{h}_2^*$  への自然な同型によって, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は二つの空でないルート系  $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$  と  $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$  の直和に移される (注意 3.3). よって,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は可約である.  $\square$

$\mathbb{K}$  を標数 0 の可換体とする. 存在定理 (定理 3.22), 同型定理 (定理 3.28), 系 3.29 より, 分裂可能半単純 Lie 代数の同型類, 分裂半単純 Lie 代数の同型類, 被約ルート系の同型類は一対一に対応する. さらに, 命題 3.30 より, 分裂可能半単純 Lie 代数の同型類, 分裂半単純 Lie 代数の同型類, 既約な被約ルート系の同型類とは一対一に対応する. 分裂可能半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  または分裂半単純 Lie 代数  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が **A<sub>l</sub> 型** ( $l \geq 1$ ), **B<sub>l</sub> 型** ( $l \geq 1$ ), **C<sub>l</sub> 型** ( $l \geq 1$ ), **D<sub>l</sub> 型** ( $l \geq 2$ ), **E<sub>6</sub> 型**, **E<sub>7</sub> 型**, **E<sub>8</sub> 型**, **F<sub>4</sub> 型**, **G<sub>2</sub> 型** であるとは, そのルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が対応する型であることをいう. A<sub>l</sub> 型, B<sub>l</sub> 型, C<sub>l</sub> 型, D<sub>l</sub> 型を総称して**古典型** (classical type) といい, E<sub>6</sub> 型, E<sub>7</sub> 型, E<sub>8</sub> 型, F<sub>4</sub> 型, G<sub>2</sub> 型を総称して**例外型** (exceptional type) という. D<sub>2</sub> 型を除く各型のルート系は既約だから, それらには単純 Lie 代数が対応する.

### 3.6 古典型分裂半単純 Lie 代数

本小節では, 古典型分裂 (半) 単純 Lie 代数を, 具体的に構成する. 以下,  $n$  次単位行列を  $I_n$  と書き, 行列単位を  $E_{i,j}$  と書く. また,  $\mathbb{K}$  上の  $m \times n$  行列全体のなす空間を  $\text{Mat}(m, n, \mathbb{K})$  ( $m = n$  の場合は,  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ ) と書き,  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次対称行列全体のなす空間を  $\text{Sym}(n, \mathbb{K})$  と書き,  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次歪対称行列全体のなす空間を  $\text{SkewSym}(n, \mathbb{K})$  と書く.



$A_l$  ( $l \geq 1$ ) 型の分裂単純 Lie 代数

$\mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K})$  の部分 Lie 代数

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K}) \mid \text{tr } X = 0\}\end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.37],

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_{l+1}) \mid x_1, \dots, x_{l+1} \in \mathbb{K}, x_1 + \dots + x_{l+1} = 0\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる).

対応するルート系は

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_{l+1})) &= x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

だから,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $A_l$  型の分裂単純 Lie 代数である. 各ルートの双対ルートは

$$H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} = \pm(E_{i,i} - E_{j,j})$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}E_{i,j}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}E_{j,i}\end{aligned}$$

である.

$B_l$  ( $l \geq 1$ ) 型の分裂単純 Lie 代数

対称双線型形式  $\Phi: \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \rightarrow \mathbb{K}$  を, 標準基底に関して行列表示

$$\tilde{S}_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l & 0 \\ I_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

をもつものとして定める. すると,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \Phi) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \mid \tilde{S}_l X + X^T \tilde{S}_l = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B & 2v \\ C & -A^T & 2w \\ w^T & v^T & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}), B, C \in \text{SkewSym}(l, \mathbb{K}), v, w \in \mathbb{K}^l \right\}\end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.38 (1)],

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l, 0) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる).

対応するルート系は

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l, 0)) &= x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

だから,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $B_l$  型の分裂単純 Lie 代数である. 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned} H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm\epsilon_i} &= \pm(E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) \end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i,l+j}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j} - E_{j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j} - E_{l+j,i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{i,j} & -E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i} &= \mathbb{K}(2E_{i,2l+1} + E_{2l+1,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i^T & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i} &= \mathbb{K}(2E_{l+i,2l+1} + E_{2l+1,i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_i \\ e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である ( $\mathbb{K}^l$  の標準基底を  $(e_1, \dots, e_l)$  と書いた).

次に,  $B_l$  型の分裂単純 Lie 代数を, 別の方法で実現する.  $g \in GL(2l+1, \mathbb{K})$  を

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_l & \frac{1}{2}I_l & 0 \\ \frac{1}{2}I_l & -\frac{1}{2}I_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & I_l & 0 \\ I_l & -I_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定め, Lie 代数  $\mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K})$  の自己同型  $X \mapsto gXg^{-1}$  を  $\text{Ad}(g)$  と書く. この自己同型は,

$$\text{Ad}(g) \begin{pmatrix} A & B & v \\ C & D & w \\ v' & w' & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B+C+D) & \frac{1}{2}(A-B+C-D) & \frac{1}{2}(v+w) \\ \frac{1}{2}(A+B-C-D) & \frac{1}{2}(A-B-C+D) & \frac{1}{2}(v-w) \\ v'+w' & v'-w' & x \end{pmatrix}$$

で与えられる.  $\mathfrak{g}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{h}$  と置くと,  $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  も  $B_l$  型の分裂単純 Lie 代数である.  $\mathfrak{g}'$  と  $\mathfrak{h}'$  や, 対応するルート系などを求めよう.  $\Phi$  の  $g$  による押し出し  $\Phi': \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \rightarrow \mathbb{K}$  は, 標準基底に関して行列表示

$$(g^{-1})^T \tilde{S}_l g^{-1} = 2I_{l,l+1} = \begin{pmatrix} 2I_l & 0 & 0 \\ 0 & -2I_l & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

をもつ対称双線型形式だから,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}' &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \Phi') \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \mid I_{l,l+1}X + X^T I_{l,l+1} = 0\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{o}(l, \mathbb{K}), D \in \mathfrak{o}(l+1, \mathbb{K}), B \in \text{Mat}(l, l+1, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

である. この Lie 代数を,  $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$  と書く. また,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}' &= \{ \text{Ad}(g) \text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l, 0) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

であり, 対応するルート系は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') &= \{ \pm(\epsilon'_i \pm \epsilon'_j) \mid 1 \leq i < j \leq l \} \cup \{ \pm\epsilon'_i \mid 1 \leq i \leq l \}, \\ \text{各 } \epsilon'_i \in \mathfrak{h}'^* \text{ は, } \epsilon'_i \left( \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) &= x_i \text{ で与えられる元} \end{aligned}$$

であり, 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned} H_{\pm(\epsilon'_i - \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} - E_{j,j} & 0 \\ E_{i,i} - E_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm(\epsilon'_i + \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} + E_{j,j} & 0 \\ E_{i,i} + E_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm\epsilon'_i} &= \pm \text{Ad}(g)(E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} & 0 \\ E_{i,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i^T & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & e_i \\ e_i^T & -e_i^T & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_i \\ e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & -e_i \\ e_i^T & e_i^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である ( $\mathbb{K}^l$  の標準基底を  $(e_1, \dots, e_l)$  と書いた).

$C_l$  ( $l \geq 1$ ) 型の分裂単純 Lie 代数

$\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$  の部分 Lie 代数

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{sp}(l, \mathbb{K}) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid J_l X + X^T J_l = 0\} \quad (J_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}), B, C \in \text{Sym}(l, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.38 (2)],

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる).  
対応するルート系は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l)) &= x_i \text{ で与えられる元} \end{aligned}$$

だから,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $C_l$  型の分裂単純 Lie 代数である. 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned} H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})), \\ H_{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})), \\ H_{\pm 2\epsilon_i} &= \pm(E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) \end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j, l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i, l+j}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i, l+j} + E_{j, l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} + E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i, j} + E_{l+j, i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} + E_{j,i} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{2\epsilon_i} &= \mathbb{K}E_{i, l+i} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-2\epsilon_i} &= \mathbb{K}E_{l+i, i} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,i} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

$D_l$  ( $l \geq 2$ ) 型の分裂 (半) 単純 Lie 代数

対称双線型形式  $\Phi: \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \rightarrow \mathbb{K}$  を, 標準基底に関して行列表示

$$S_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

をもつものとして定める．すると，

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \Phi) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid S_l X + X^T S_l = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}), B, C \in \text{SkewSym}(l, \mathbb{K}) \right\}\end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.38 (1)],

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる). 対応するルート系は

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l)) &= x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

だから,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $D_l$  型の分裂半単純 Lie 代数 ( $l \geq 3$  ならば, 分裂単純 Lie 代数) である. 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})), \\ H_{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j, l+j}))\end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j, l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i, l+j}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i, l+j} - E_{j, l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i, j} - E_{l+j, i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である.

次に,  $D_l$  型の分裂単純 Lie 代数を, 別の方法で実現する.  $g \in GL(2l, \mathbb{K})$  を

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_l & \frac{1}{2}I_l \\ \frac{1}{2}I_l & -\frac{1}{2}I_l \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & I_l \\ I_l & -I_l \end{pmatrix}$$

と定め, Lie 代数  $\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$  の自己同型  $X \mapsto gXg^{-1}$  を  $\text{Ad}(g)$  と書く. この自己同型は,

$$\text{Ad}(g) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B+C+D) & \frac{1}{2}(A-B+C-D) \\ \frac{1}{2}(A+B-C-D) & \frac{1}{2}(A-B-C+D) \end{pmatrix}$$

で与えられる.  $\mathfrak{g}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{h}$  と置くと,  $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  も  $D_l$  型の分裂単純 Lie 代数である.  $\mathfrak{g}'$  と  $\mathfrak{h}'$  や, 対応するルート系などを求めよう.  $\Phi$  の  $g$  による押し出し  $\Phi': \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \rightarrow \mathbb{K}$  は, 標準基底に関して行列表示

$$(g^{-1})^T S_l g^{-1} = 2I_{l,l} = \begin{pmatrix} 2I_l & 0 \\ 0 & -2I_l \end{pmatrix}$$

をもつ対称双線型形式だから,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}' &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \Phi') \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid I_{l,l}X + X^T I_{l,l} = 0\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \mid A, D \in \mathfrak{o}(l, \mathbb{K}), B \in \text{Mat}(l, \mathbb{K}) \right\}\end{aligned}$$

である. この Lie 代数を,  $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$  と書く. また,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}' &= \{\text{Ad}(g) \text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\}\end{aligned}$$

であり, 対応するルート系は

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') &= \{\pm(\epsilon'_i \pm \epsilon'_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon'_i \in \mathfrak{h}'^* \text{ は, } \epsilon'_i \left( \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \right) &= x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

であり, 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}H_{\pm(\epsilon'_i - \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} - E_{j,j} \\ E_{i,i} - E_{j,j} & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm(\epsilon'_i + \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i, l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j, l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} + E_{j,j} \\ E_{i,i} + E_{j,j} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である.

### 3.7 分裂可能単純 Lie 代数の分類

$E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  型の (同型を除いて一意に存在する) 分裂可能単純 Lie 代数を, それぞれ  $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_7(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_8(\mathbb{K}), \mathfrak{f}_4(\mathbb{K}), \mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$  と書く.

**定理 3.31 (分裂可能単純 Lie 代数の分類)** 次に挙げる Lie 代数は, いずれも分裂可能単純 Lie 代数である. 任意の分裂可能単純 Lie 代数は, これらのいずれかに同型である. (表 1 も参照のこと.)

- $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$  ( $l \geq 1$ )
- $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$  ( $l \geq 1$ )
- $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{K})$  ( $l \geq 1$ )

表 1 分裂可能単純 Lie 代数の分類

型	分裂可能単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$A_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$	
$B_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$	
$C_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{K})$	
$D_l \ (l \geq 2)$	$\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$	
$E_6$	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$	
$E_7$	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$	
$E_8$	$\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$	
$F_4$	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$	
$G_2$	$\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$	

- $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K}) \ (l \geq 2)$
- $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_7(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_8(\mathbb{K}), \mathfrak{f}_4(\mathbb{K}), \mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$

証明 存在定理 (定理 3.22), 同型定理 (定理 3.28), 系 3.29, 命題 3.30 より, 分裂可能単純 Lie 代数の同型類と被約な既約ルート系の同型類とは一対一に対応する. よって, 主張は, 被約な既約ルート系の分類 [5, 定理 4.13, 4.3 節] と前小節で述べた古典型分裂可能単純 Lie 代数の構成から従う.  $\square$

注意 3.32 (古典型分裂可能 (半) 単純 Lie 代数の偶然同型) 低階数でのルート系の同型と同型定理 (定理 3.28) から, 古典型分裂可能 (半) 単純 Lie 代数の間の同型が得られる (表 2). これらを, **偶然同型** (accidental isomorphism) という. 分類定理 (定理 3.31) に挙げた分裂可能単純 Lie 代数の間の同型は, 同表 (「 $A_1 \times A_1 \cong D_2$ 」の行を除く) に挙げたもので尽くされている.

## 4 分裂簡約 Lie 代数の表現

### 4.1 $\mathfrak{g}$ -加群のウェイト

定義 4.1 (ウェイト)  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群とする.  $\mathfrak{h}$  の  $V$  への作用の同時固有値 (これは,  $\mathfrak{h}$  から  $\mathbb{K}$  への写像である), 同時固有ベクトル, 同時固有空間を, それぞれ,  $V$



表 2 古典型分裂可能 (半) 単純 Lie 代数の偶然同型

型	偶然同型	Dynkin 図形
$A_1 \cong B_1 \cong C_1$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(1, 2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(1, \mathbb{K})$	•
$B_2 \cong C_2$	$\mathfrak{o}(2, 3, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{K})$	• $\longleftrightarrow$ •
$A_1 \oplus A_1 \cong D_2$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2, 2, \mathbb{K})$	•   •
$A_3 \cong D_3$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(3, 3, \mathbb{K})$	• — • — •

の ( $\mathfrak{h}$  に関する) **ウェイト** (weight), **ウェイトベクトル** (weight vector), **ウェイト空間** (weight space) という.  $\mathfrak{h}$  の  $V$  の作用における同時固有値  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$  の重複度を,  $V$  におけるウェイト  $\lambda$  の **重複度** (multiplicity) という.

定義 4.1 の状況で,  $V$  におけるウェイト  $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$  のウェイト空間を,  $V_{\lambda}$  と書く. すなわち,

$$V_{\lambda} = \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } hv = \lambda(h)v\}$$

と書く. 明らかに,  $V_{\lambda} \neq 0$  となりうるのは  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  のときだけである. 同時固有空間に関する一般論より, 和  $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_{\lambda}$  は直和である.

注意 4.2 定義 4.1 において,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  (その標準基底を  $(H, X, Y)$  と書く),  $\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$  とし, 線型同型写像  $\lambda \mapsto \lambda(H)$  によって  $\mathfrak{h}^*$  を  $\mathbb{K}$  と同一視したものが, 定義 2.1 にほかならない.

定義 4.3 (ウェイト加群)  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする.  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  は, それが ( $\mathfrak{h}$  に関する) ウェイト空間の直和に分解される (すなわち,  $\mathfrak{h}$  の  $V$  への作用が同時対角化可能である) とき, ( $\mathfrak{h}$  に関する) **ウェイト加群** (weight module) であるという.

命題 4.4  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする.  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群とすると, 任意の  $\alpha, \lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して,  $\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda+\alpha}$  が成り立つ.

証明  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $v \in V_{\lambda}$  とすると, 任意の  $h \in \mathfrak{h}$  に対して

$$h xv = [h, x]v + xhv = \alpha(h)xv + \lambda(h)xv$$

だから,  $xv \in V_{\lambda+\alpha}$  である. よって,  $\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda+\alpha}$  である. □

命題 4.5  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする.  $f: V \rightarrow W$  を  $\mathfrak{g}$ -加群の間の  $\mathfrak{g}$ -準同型とすると, 任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して,  $f(V_{\lambda}) \subseteq W_{\lambda}$  が成り立つ.

証明  $v \in V_{\lambda}$  とすると, 任意の  $h \in \mathfrak{h}$  に対して

$$hf(v) = f(hv) = \lambda(h)f(v)$$

だから,  $f(v) \in W_{\lambda}$  である. よって,  $f(V_{\lambda}) \subseteq W_{\lambda}$  である. □

## 4.2 最高ウェイト $\mathfrak{g}$ -加群

**定義 4.6 (極大ベクトル)**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底,  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,  $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$  と置く.  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  の  $(\mathfrak{h})$  に関するウェイトベクトル  $e \neq 0$  であって  $\mathfrak{n}_+ e = 0$  を満たすものを,  $V$  の  $(\mathfrak{h}$  と  $\Pi$  に関する) **極大ベクトル** (maximal vector) という.  $V$  の極大ベクトルであって  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成するものを,  $V$  の  $(\mathfrak{h}$  と  $\Pi$  に関する) **極大生成ベクトル** (maximal generating vector) という.

**定義 4.7 (最高ウェイト加群)**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  が  $(\mathfrak{h}$  と  $\Pi$  に関する) ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の極大生成ベクトルをもつとき,  $V$  は  $(\mathfrak{h}$  と  $\Pi$  に関する) **最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト加群** (highest weight module of highest weight  $\lambda$ ) であるという.

**注意 4.8** 定義 4.6 と定義 4.7 において,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  (その標準基底を  $(H, X, Y)$  と書く),  $\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$ ,  $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$  とし, 線型同型写像  $\lambda \mapsto \lambda(H)$  によって  $\mathfrak{h}^*$  を  $\mathbb{K}$  と同一視したものが, 定義 2.5 と定義 2.6 にほかならない.

**命題 4.9**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  のウェイトベクトル  $e \neq 0$  が極大ベクトルであるための必要十分条件は, 任意の単純ルート  $\alpha \in \Pi$  に対して  $\mathfrak{g}_\alpha v = 0$  であることである.

**証明**  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,  $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$  と置くと,  $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$  は  $\mathfrak{n}_+$  を Lie 代数として生成する (系 3.17 (1)). よって, 主張が成り立つ.  $\square$

**命題 4.10**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,  $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$  と置く.  $V$  をウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の極大生成ベクトル  $e$  をもつ最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群とする.

- (1)  $V = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e$  が成り立つ.
- (2)  $V$  の任意のウェイトは  $\lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$  に属し, その重複度はすべて有限である. また, ウェイト  $\lambda$  の重複度は 1 である.
- (3)  $V$  はウェイト加群である.

**証明** (1)  $e$  は  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成し, Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 [4, 系 2.5]<sup>\*6</sup> より  $\mathbf{U}(\mathfrak{g}) = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$  だから,  $V = \mathbf{U}(\mathfrak{g})e = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)e = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e$  である.

(2), (3)  $\Pi$  に関する正ルートを重複なく列挙して  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  とし, 各  $i \in \{1, \dots, k\}$  に対して  $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}$  を一つずつ固定する. すると, Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 [4, 系 2.5]<sup>\*7</sup> より  $y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}$  ( $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}$ ) の全体は  $\mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)$  を線型空間として生成するから, (1) と合わせて

$$V = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e = \text{span}_{\mathbb{K}}\{y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k} e \mid q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}\}$$

を得る. ここで, 各  $y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k} e$  は, ウェイト  $\lambda - \sum_{i=1}^k q_i \alpha_i$  のウェイトベクトルである (命題 4.4). よって,

<sup>\*6</sup> 脚注 \*5 を参照のこと.

<sup>\*7</sup> 脚注 \*5 を参照のこと.

$V$  の任意のウェイトは  $\lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$  に属し,  $V$  はウェイト加群である. また, 任意の  $\mu \in \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$  に対して,  $\lambda - \sum_{i=1}^k q_i \alpha_i = \mu$  を満たす  $(q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{N}^k$  はたかだか有限個であり,  $\mu = \lambda$  のときはこのような組は  $(0, \dots, 0)$  のみである. よって,  $V$  の任意のウェイトの重複度は有限であり, ウェイト  $\lambda$  の重複度は 1 である.  $\square$

**系 4.11**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする. 最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  の最高ウェイトは一意に定まり,  $V$  の極大生成ベクトルはスカラー倍を除いて一意である.

**証明** 命題 4.10 (2) から従う.  $\square$

**注意 4.12** 系 4.11 の状況で,  $V$  は, 極大生成ベクトル以外の極大ベクトルをもちうる. たとえば, 2.2 節で定義した  $M(\lambda)$  ( $\lambda \in \mathbb{K}$ ) は最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群であり, その極大生成ベクトルはスカラー倍を除いて  $e_0$  のみだが,  $\lambda \in \mathbb{N}$  のとき,  $e_{\lambda+1}$  は  $M(\lambda)$  のウェイト  $-\lambda - 2$  の極大ベクトルである.

**系 4.13**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする. 最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  から自身への  $\mathfrak{g}$ -準同型は, 恒等写像  $\text{id}_V$  のスカラー倍のみである.

**証明**  $V$  がウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の極大生成ベクトル  $e$  をもつとする.  $f: V \rightarrow V$  を  $\mathfrak{g}$ -準同型とすると,  $f(e) \in f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda = \mathbb{K}e$  だから (命題 4.5, 命題 4.10 (2)), ある  $c \in \mathbb{K}$  が存在して  $f(e) = ce$  となる.  $e$  は  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成するから, これより,  $f = c\text{id}_V$  である.  $\square$

**系 4.14**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $V$  を最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群とする.

- (1) 各  $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  は,  $V$  に  $\lambda(z)$  倍写像として作用する.
- (2)  $V$  は直既約\*<sup>8</sup> である.
- (3) さらに,  $V$  が有限次元であるとする. このとき,  $V$  は既約である.

**証明** (1)  $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の  $V$  への作用は,  $\mathfrak{g}$ -準同型だから, 系 4.13 よりスカラー倍である. 一方で,  $e \in V$  をウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトルとすると,  $ze = \lambda(z)e$  である. よって,  $z$  は,  $V$  に  $\lambda(z)$  倍写像として作用する.

(2) 明らかに,  $V \neq 0$  である.  $V = V' \oplus V''$  を直和分解とすると, 対応する射影  $p: V \rightarrow V'$  は  $\mathfrak{g}$ -準同型だから, 系 4.13 より  $p = c\text{id}_V$  ( $c \in \mathbb{K}$ ) と書ける.  $c \neq 0$  ならば  $V' = p(V) = V$  であり,  $c = 0$  ならば  $V' = p(V) = 0$  である. よって,  $V$  は直既約である.

(3) Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より,  $V$  の  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ -加群としての既約分解  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  がとれる. 各  $V_i$  は  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ -安定だが, (1) より  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ -安定でもあるから,  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  は  $\mathfrak{g}$ -加群としての既約分解でもある. (2) より  $V$  は直既約だから,  $I$  は 1 元集合であり,  $V$  は既約である.  $\square$

**系 4.15**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $V$  をウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の極大生成ベクトル  $e$  をもつ最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群とし,  $W$  をその真部分加群とする. このとき,  $W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi, \lambda \neq \mu} V_\mu$  であり,  $V/W$  はウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトル  $e + W$  をもつ最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群である.

---

\*<sup>8</sup>  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  が直既約 (indecomposable) であるとは,  $V \neq 0$  であり, かつ  $V$  が二つの 0 でない部分加群の直和として書けないことをいう.

証明 直和分解  $V = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi} V_\mu$  が成り立ち (命題 4.10 (2), (3)),  $W$  は  $\mathfrak{h}$ -安定だから, 同時固有空間に関する一般論より,

$$W = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi} (V_\mu \cap W)$$

が成り立つ.  $V_\lambda$  は 1 次元 (命題 4.10 (2)) だから  $V_\lambda \cap W$  は 0 または  $V_\lambda$  だが, 後者の場合  $e \in V_\lambda \subseteq W$  となり,  $e$  が  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成することと  $W$  が  $V$  の真部分加群であることに反する. よって,  $V_\lambda \cap W = 0$  であり, 上記の直和分解と合わせて  $W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi, \lambda \neq \mu} V_\mu$  を得る. また, これより  $e + W \neq 0$  だから,  $e + W$  は  $V/W$  のウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトルである.  $\square$

### 4.3 Verma 加群

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,  $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  と置く. このとき,  $\mathfrak{h}$  が可換であること (定理 1.35) と命題 3.6 (1) より  $[\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+] \subseteq \mathfrak{n}_+$  だから, 1 次元  $\mathfrak{b}_+$ -加群  $\mathbb{K}v_\lambda$  を,

$$(h + x)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad (h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{n}_+)$$

によって定義できる. このことを踏まえて, 次のように定義する.

**定義 4.16 (Verma 加群)**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,  $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  と置く.  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して, 上記の 1 次元  $\mathfrak{b}_+$ -加群  $\mathbb{K}v_\lambda$  を用いて, **Verma 加群** (Verma module)  $M(\lambda)$  を

$$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda$$

と定める (ここで,  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  を自然に右  $\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$ -加群とみなしている). また,

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda)$$

と定める.

**命題 4.17**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  とする.

- (1) Verma 加群  $M(\lambda)$  は, ウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトル  $e_\lambda$  をもつ最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群である.
- (2)  $V$  をウェイト  $\lambda$  の極大ベクトル  $e$  をもつ  $\mathfrak{g}$ -加群とする. このとき,  $\mathfrak{g}$ -準同型  $\phi: M(\lambda) \rightarrow V$  であって  $e_\lambda$  を  $e$  に移すものが, 一意に存在する.

証明  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,  $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  と置く.

(1) 任意の  $h \in \mathfrak{h}$  に対して,  $he_\lambda = h \otimes v_\lambda = 1 \otimes hv_\lambda = \lambda(h)e_\lambda$  である. 任意の  $x \in \mathfrak{n}_+$  に対して,  $xe_\lambda = x \otimes v_\lambda = 1 \otimes xv_\lambda = 0$  である. 明らかに,  $e_\lambda$  は  $M(\lambda)$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成する. 以上より,  $e_\lambda$  は  $M(\lambda)$  のウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトルである.

(2)  $e$  が  $V$  のウェイト  $\lambda$  の極大ベクトルであることを用いて容易に確かめられるように,  $(u, v_\lambda) \in \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{K}v_\lambda$  を  $ue \in V$  に移す双線形写像は,  $\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$ -均衡である. よって, テンソル積の普遍性より, 線型写像  $\phi: M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda \rightarrow V$  であって各  $u \otimes v_\lambda$  を  $ue$  に移すものが, 一意に存在する. この  $\phi$  が, 条件を満たす一意な  $\mathfrak{g}$ -準同型である.  $\square$

**定理 4.18**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  とする.

- (1) Verma 加群  $M(\lambda)$  の真部分加群  $N$  に対して商加群  $M(\lambda)/N$  を与える対応は,  $M(\lambda)$  の真部分加群と最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群の同型類との間の一対一対応である.
- (2) Verma 加群  $M(\lambda)$  は, 最大真部分加群  $N(\lambda)$  をもつ. これに対応する最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群  $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$  は既約であり, その他の真部分加群  $N$  に対応する最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群  $M(\lambda)/N$  は無限次元かつ可約である.

**証明** (1) 系 4.15 より,  $M(\lambda)$  の真部分加群  $N$  に対して,  $M(\lambda)/N$  は最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群である.

最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群が, 同型を除いて  $M(\lambda)$  の真部分加群による商で尽くされることを示す.  $V$  をウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトル  $e$  をもつ最高ウェイト  $\mathfrak{g}$ -加群とすると, Verma 加群の普遍性 (命題 4.17 (1)) より,  $\mathfrak{g}$ -準同型  $\phi: M(\lambda) \rightarrow V$  であって  $e_\lambda$  を  $e$  に移すものが一意に存在する.  $e$  は  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成するから, この  $\phi$  は全射であり, したがって,  $\mathfrak{g}$ -同型  $M(\lambda)/\text{Ker } \phi \cong V$  を誘導する.  $V \neq 0$  だから,  $\text{Ker } \phi$  は  $M(\lambda)$  の真部分加群である.

$N$  と  $N'$  が  $M(\lambda)$  の真部分加群であり,  $\mathfrak{g}$ -同型  $\psi: M(\lambda)/N \rightarrow M(\lambda)/N'$  が存在するとして,  $N = N'$  を示す.  $\pi: M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)/N$  と  $\pi': M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)/N'$  を等化準同型とすると,  $\psi(\pi(e))$  と  $\pi'(e)$  はともに  $M(\lambda)/N'$  の極大生成ベクトルだから (系 4.15), ある  $c \in \mathbb{K}^\times$  が存在して  $\psi(\pi(e)) = c\pi'(e)$  が成り立つ (系 4.11). Verma 加群の普遍性 (命題 4.17 (2)) と合わせて,  $\psi \circ \pi = c\pi'$  を得る. よって,

$$N' = \text{Ker}(\psi \circ \pi) = \text{Ker } \pi' = N'$$

が成り立つ.

(2) 系 4.15 より,  $M(\lambda)$  のすべての真部分加群の和はまたは真部分加群であり, これが  $M(\lambda)$  の最大真部分加群  $N(\lambda)$  となる.  $M(\lambda)$  の真部分加群  $N$  に対して,  $M(\lambda)/N$  が既約であることは,  $N$  が  $M(\lambda)$  の真部分加群の中で極大であることと同値だが,  $M(\lambda)$  は最大真部分加群  $N(\lambda)$  をもつから, この条件を満たすものは  $N = N(\lambda)$  のみである. また,  $M(\lambda)/N$  が有限次元であるとする,  $M(\lambda)/N$  は既約だから (系 4.14 (3)),  $N = N(\lambda)$  となる. これで, すべての主張が示された.  $\square$

**定義 4.19 (Verma 加群の既約商)**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して, Verma 加群  $M(\lambda)$  をその最大真部分加群  $N(\lambda)$  で割って得られる最高ウェイト既約  $\mathfrak{g}$ -加群  $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$  (定理 4.18) を, **Verma 加群の既約商** (irreducible quotient of the Verma module) という.  $M(\lambda)$  から  $L(\lambda)$  への等化準同型による  $e_\lambda \in M(\lambda)$  の像を, そのまま  $e_\lambda \in L(\lambda)$  と書く.

**注意 4.20**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とすると,  $\mathfrak{h}$  は半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  の分裂化 Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}'$  と  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の直和として書ける (注意 3.4).  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底,  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書き,

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}'_{\alpha|_{\mathfrak{h}'}} , \quad \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \mathfrak{b}'_+ = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}_+$$

と置く.  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  として  $\lambda' = \lambda|_{\mathfrak{h}'} \in (\mathfrak{h}')^*$  と置き,  $\mathfrak{g}$  と  $\mathfrak{g}'$  のそれぞれの上の Verma 加群

$$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda, \quad M(\lambda') = \mathbf{U}(\mathfrak{g}') \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}'_+)} \mathbb{K}v_{\lambda'}$$

とその極大生成ベクトル

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda), \quad e_{\lambda'} = 1 \otimes v_{\lambda'} \in M(\lambda')$$

を考える.

$M(\lambda)$  を  $\mathfrak{g}'$ -加群とみなすと,  $e_\lambda$  はウェイト  $\lambda'$  の極大生成ベクトルだから,  $M(\lambda')$  の普遍性 (命題 4.17 (2)) より,  $\mathfrak{g}'$ -準同型  $\phi: M(\lambda') \rightarrow M(\lambda)$  であって  $e_{\lambda'}$  を  $e_\lambda$  に移すものが (一意に) 存在する. また, 任意の  $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  に対して  $z$  の  $M(\lambda')$  への作用を  $\lambda(z)$  倍写像と定めることで  $M(\lambda')$  は  $\mathfrak{g}$ -加群をなし,  $e_{\lambda'}$  はウェイト  $\lambda$  の極大生成ベクトルとなるから,  $M(\lambda)$  の普遍性 (命題 4.17 (2)) より,  $\mathfrak{g}$ -準同型  $\psi: M(\lambda) \rightarrow M(\lambda')$  であって  $e_\lambda$  を  $e_{\lambda'}$  に移すものが (一意に) 存在する. さらに, Verma 加群の普遍性から誘導される準同型の一意性 (命題 4.17 (2)) を用いて確かめられるように,  $\phi$  と  $\psi$  は互いに他の逆である. 以上より,  $M(\lambda)$  は,  $M(\lambda')$  に上記の方法で  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の作用を定めて得られる  $\mathfrak{g}$ -加群に同型である.

$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の各元は  $M(\lambda)$  にスカラー倍によって作用するから, 前段の同型を通して,  $M(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群と  $M(\lambda')$  の部分  $\mathfrak{g}'$ -加群は一对一に対応する. よって, 前段の同型によって  $M(\lambda)$  と  $M(\lambda')$  を同一視するとき,  $N(\lambda) = N(\lambda')$  かつ  $L(\lambda) = L(\lambda')$  である.

**注意 4.21**  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  (その標準基底を  $(H, X, Y)$  と書く),  $\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$ ,  $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$  とし, 線型同型写像  $\lambda \mapsto \lambda(H)$  によって  $\mathfrak{h}^*$  を  $\mathbb{K}$  と同一視する. 最高ウェイト  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の分類 (定理 2.8) と定理 4.18 を比較すれば, 2.2 節で定義した  $M(\lambda)$  と  $L(\lambda)$  が, Verma 加群とその既約商に同型であることが確かめられる.

#### 4.4 整ベクトルと優整ベクトルに関する補足

$\Delta$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  有限次元線型空間  $V$  上の被約ルート系とし,  $\Pi$  をその基底とするとき,  $\lambda \in V$  に対して,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } \Delta \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意のルート } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}, \\ \lambda \text{ が } (\Delta, \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

と定義するのだった [5, 定義 3.1].

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする.  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は  $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$  上の被約ルート系であり,  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の双対ルート  $\alpha^\vee$  は  $\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha)$  ( $\lambda \in V$ ) ( $H_\alpha$  は定理 3.10 によって定まるものとする) によって与えられる (定理 3.13). したがって,  $\lambda \in V$  に対して,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意のルート } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \\ \lambda \text{ が } (\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

である.

前段の状況で, 「整ベクトル」と「優整ベクトル」の定義を拡張して,  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対してもこれらの用語を用いることにする. すなわち, 上記の同値性が  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対しても成り立つとすることで, 「 $\lambda$  が  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に関する整ベクトルである」ことと「 $\lambda$  が  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルである」ことを定義する.



$Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0\}$  と置き、直和分解  $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$  に関する射影を  $\text{pr}_V: \mathfrak{h}^* \rightarrow V$  と書くと、

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{pr}_V(\lambda) \text{ が } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル,} \\ \lambda \text{ が } (\Delta, \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{pr}_V(\lambda) \text{ が } (\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} \end{aligned}$$

である。

この拡張された定義に関して、次が成り立つ。この命題は、定理 4.29 の証明で用いられる。

**命題 4.22**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし、 $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする。 $\mathfrak{h}^*$  の部分集合  $\mathfrak{X}$  が、次の条件を満たすとする。

- (i) ある  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  が存在して、 $\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$  となる。
- (ii)  $\mathfrak{X}$  は  $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ -安定である。

このとき、 $\mathfrak{X}$  は有限である。

**証明**  $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$  および  $Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0\}$  と置き、直和分解  $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$  に関する射影を  $\text{pr}_V: \mathfrak{h}^* \rightarrow V$  および  $\text{pr}_Z: \mathfrak{h}^* \rightarrow Z$  と書く。 $\Pi \subseteq V$  だから、条件 (i) より、 $\text{pr}_Z(\mathfrak{X}) \subseteq \{\text{pr}_Z(\lambda)\}$  である。また、 $\text{pr}_V(\mathfrak{X})$  は、 $\text{pr}_V(\lambda) - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$  に含まれ  $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ -安定だから、ルート系の一般論 [5, 命題 3.5] より、有限である。よって、 $\mathfrak{X}$  は有限である。  $\square$

## 4.5 条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$ -加群

**定義 4.23** (条件 (CD) を満たす  $\mathfrak{g}$ -加群)  $\mathfrak{g}$  を Lie 代数とする。 $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  が**条件 (CD) を満たす**<sup>\*9</sup> とは、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の任意の元の  $V$  への作用が対角化可能であることをいう。

**注意 4.24** Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$  を満たす（これは、 $\mathfrak{g}$  が半単純ならば成り立つ）ならば、明らかに、任意の  $\mathfrak{g}$ -加群は条件 (CD) を満たす。

**命題 4.25**  $\mathfrak{g}$  を Lie 代数とし、 $V$  を既約  $\mathfrak{g}$ -加群とする。任意の  $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  に対して、次の条件は同値である。

- (a)  $z$  の  $V$  への作用はスカラー倍である。
- (b)  $z$  の  $V$  への作用は対角化可能である。
- (c)  $z$  の  $V$  への作用は固有値をもつ。

特に、 $\mathbb{K}$  が代数閉ならば、任意の有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -加群は条件 (CD) を満たす。

**証明** (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c) 明らかである。

(c)  $\implies$  (a)  $z$  の  $V$  への作用を  $\rho(z)$  と書く。 $\rho(z)$  が固有値  $c \in \mathbb{K}$  をもつとすると、 $\rho(z) - \text{cid}_V$  は  $V$  から自身への単射でない  $\mathfrak{g}$ -準同型だから、 $\text{Ker}(\rho(z) - \text{cid}_V)$  は  $V$  の 0 でない部分加群である。 $V$  は既約だから、 $\text{Ker}(\rho(z) - \text{cid}_V) = V$  である。すなわち、 $\rho(z) = \text{cid}_V$  が成り立つ。

**最後の主張**  $\mathbb{K}$  が代数閉であるとする。有限次元線型空間  $V \neq 0$  上の線型変換は必ず固有値をもつ。よって、主張は、すでに示した同値性から従う。  $\square$

<sup>\*9</sup> 「条件 (CD) を満たす」は、本稿だけの用語である。“center”と“diagonalizable”の頭文字をとって“(CD)”とした。



**命題 4.26**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする.  $V$  を有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群とする.

- (1)  $V$  の任意のウェイトは,  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に関する整ベクトルである.
- (2)  $V$  が条件 (CD) を満たすとする. このとき,  $V$  は完全可約なウェイト加群である.
- (3)  $V$  が条件 (CD) を満たすとし,  $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする. このとき,  $V \neq 0$  ならば  $V$  は極大ベクトルをもち,  $V$  が既約ならば  $V$  は最高ウェイト加群である.

**証明** 各  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して,  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとる.

(1)  $V$  がウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  のウェイトベクトル  $v \neq 0$  をもつとする.  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とし,  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  によって  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす. すると,  $Hv = H_\alpha v = \lambda(H_\alpha)v$  だから,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  はウェイト  $\lambda(H_\alpha)$  をもつ. したがって, 系 2.13 (1) より,  $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  である. これが任意のルート  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して成り立つから,  $\lambda$  は  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に関する整ベクトルである.

(2)  $V$  が完全可約であることを示す.  $\omega \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})^*$  に対して

$$V_{(\omega)} = \{v \in V \mid \text{任意の } z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \text{ に対して } zv = \omega(z)v\}$$

と置くと, 仮定より, 直和分解  $V = \bigoplus_{\omega \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})^*} V_{(\omega)}$  が成立する. さらに,  $\mathfrak{g}$  の任意の元の作用と  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の任意の元の作用が可換であることから確かめられるように, 各  $V_{(\omega)}$  は  $V$  の部分加群である. Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より, 各  $V_{(\omega)}$  は  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ -加群として完全可約だが, 一方で,  $V_{(\omega)}$  の任意の部分線型空間は  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ -安定だから,  $V_{(\omega)}$  は  $\mathfrak{g}$ -加群としても完全可約である. よって,  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  は完全可約である.

$V$  がウェイト加群であることを示す.  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とし,  $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  によって  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす. すると,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  はウェイト加群だから (系 2.13 (1)),  $H_\alpha$  の  $V$  への作用は対角化可能である. また, 仮定より,  $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$  の任意の元の  $V$  への作用は対角化可能である. ここで,

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\} \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$$

であり (注意 3.4, 系 3.14),  $\mathfrak{h}$  は可換だから (定理 1.35),  $\mathfrak{h}$  の  $V$  への作用は同時対角化可能である. すなわち,  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  はウェイト加群である.

(3)  $V \neq 0$  であるとする.  $V$  は有限次元だからそのウェイトは有限個であり, 一方で, (2) より  $V$  は少なくとも一つのウェイトをもつ. そこで,  $\Pi$  に関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書くと,  $V$  のウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  であって  $\lambda + \Delta_+$  が  $V$  のウェイトを含まないものがとれる.  $e \in V_\lambda \setminus \{0\}$  をとると, 任意の  $\alpha \in \Delta_+$  に対して  $\mathfrak{g}_\alpha e \in V_{\lambda+\alpha} = 0$  だから (命題 4.4),  $e$  は極大ベクトルである. さらに,  $V$  が既約ならば,  $e$  は  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群として生成するから,  $e$  は極大生成ベクトルである.  $\square$

**命題 4.27**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする.  $V_1$  と  $V_2$  は条件 (CD) を満たす有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群であり, 任意のウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の  $V_1$  における重複度と  $V_2$  における重複度が等しいとする. このとき,  $V_1$  と  $V_2$  は  $\mathfrak{g}$ -同型である.

**証明**  $V_1$  と  $V_2$  はウェイト加群だから (命題 4.26 (2)), 仮定より,  $V_1$  と  $V_2$  の次元は等しい. この共通の次元に関する帰納法で, 主張を示す.  $\dim V_1 = \dim V_2 = 0$  である場合には, 主張は明らかである.  $\dim V_1 = \dim V_2 \geq 1$  であるとして, 次元がより小さい場合には主張が成り立つとする.  $V_1$  と  $V_2$  は有限次元だから, そのウェイトは有限個である. そこで, ルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底  $\Pi$  を一つ固定し, それに関する正ルート全体のなす集合を  $\Delta_+$  と書くと,  $V_1$  と  $V_2$  のウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  であって  $\lambda + \Delta_+$  が  $V_1$  と  $V_2$  のウェイトを含まないものがとれる. 各  $i \in \{1, 2\}$  に対してウェイトベクトル  $e_i \in V_i \setminus \{0\}$  をとると,  $\lambda$  のとり方より,

これは極大ベクトルである．そこで， $e_i$  が生成する部分加群を  $W_i \subseteq V_i$  と置くと， $W_i$  は最高ウェイト  $\lambda$  の有限次元最高ウェイト加群だから， $L(\lambda)$  に同型である（定理 4.18 (2)）． $V_i$  は完全可約だから（命題 4.26 (2)），部分加群  $V'_i \subseteq V_i$  であって  $W_i$  の補空間であるものがとれる． $V'_1$  と  $V'_2$  はふたたび主張の仮定を満たすから，帰納法の仮定より，これらは  $\mathfrak{g}$ -同型である．よって， $V_1 = L(\lambda) \oplus V'_1$  と  $V_2 = L(\lambda) \oplus V'_2$  も  $\mathfrak{g}$ -同型である．これで，帰納法が完成した． $\square$

## 4.6 最高ウェイト理論

**補題 4.28**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする． $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群とし， $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  を対応する表現とする． $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とし， $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとり， $V$  上の線型写像  $\rho(X_\alpha)$  と  $\rho(Y_\alpha)$  は局所冪零であるとする．このとき，

$$\theta_\alpha^\rho = e^{\rho(X_\alpha)} e^{\rho(-Y_\alpha)} e^{\rho(X_\alpha)} \in GL(V)$$

と定めると，任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して， $\theta_\alpha^\rho(V_\lambda) = V_{s_\alpha(\lambda)}$  が成り立つ．

**証明**  $a, x \in \mathfrak{g}$  とし， $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(a)$  は冪零であり， $\rho(a)$  は局所冪零であるとする．すると，任意の  $v \in V$  に対して

$$\begin{aligned} \rho(e^{\text{ad}(a)}(x))v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ad}(\rho(a))^n \rho(x)v \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} \rho(a)^p \rho(x) (-\rho(a))^q v \\ &= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \rho(a)^p \rho(x) (-\rho(a))^q v \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \rho(a)^p \rho(x) e^{-\rho(a)} v \\ &= e^{\rho(a)} \rho(x) e^{-\rho(a)} v \end{aligned}$$

だから（どの総和も有限項を除いて 0 になることに注意する），

$$\rho(e^{\text{ad}(a)}(x)) = e^{\rho(a)} \rho(x) e^{-\rho(a)}$$

が成り立つ．したがって， $\text{ad}(X_\alpha)$  と  $\text{ad}(Y_\alpha)$  が冪零であること（系 3.7）に注意して  $\theta_\alpha = e^{\text{ad}(X_\alpha)} e^{\text{ad}(-Y_\alpha)} e^{\text{ad}(X_\alpha)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  と定めると，任意の  $x \in \mathfrak{g}$  に対して，

$$\rho(\theta_\alpha(x)) = \theta_\alpha^\rho \rho(x) (\theta_\alpha^\rho)^{-1} \quad (*)$$

が成り立つ．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$  とする．(\*) より，

$$\begin{aligned} \theta_\alpha^\rho(V_\lambda) &= \{v \in V \mid (\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) \in V_\lambda\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) = \lambda(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v)\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \theta_\alpha^\rho \rho(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) = \lambda(h)v\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(\theta_\alpha(h))v = \lambda(h)v\} \end{aligned}$$

である。ここで、補題 3.12 (1), (2) より、 $\theta_\alpha$  は  $\mathfrak{h}$  を安定にし、 $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^{-1} = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$  を満たす。よって、上式と合わせて、

$$\begin{aligned}\theta_\alpha^\rho(V_\lambda) &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)v = \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))v\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)v = s_\alpha(\lambda)(h)v\} \\ &= V_{s_\alpha(\lambda)}\end{aligned}$$

を得る。 □

**定理 4.29**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし、 $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して、次の条件は同値である。

- (a)  $\lambda$  は  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルである。
- (b) 任意の  $\alpha \in \Pi$  に対して、 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  のすべての元の  $L(\lambda)$  への作用は局所冪零である。
- (c)  $L(\lambda)$  のウェイト全体のなす集合は、 $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ -安定である。
- (d)  $L(\lambda)$  は有限次元である。

さらに、これらの条件の下で、 $L(\lambda)$  におけるウェイトの重複度は、 $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$  の作用の各軌道上で一定である。

**証明** 各  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して、 $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  を定理 3.10 のようにとる。

(a)  $\implies$  (b)  $\lambda$  が  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルであるとする。 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とし、 $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  によって  $L(\lambda)$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす。 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の標準基底を  $(H, X, Y)$  と書くとき、 $Y$  の  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $L(\lambda)$  への作用が局所冪零であることを示したい。 $Y$  は  $\mathbb{K}^2$  上の線型写像として冪零だから、その任意の有限次元  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群への作用も冪零である [4, 命題 6.32 (2)] したがって、 $L(\lambda)$  のすべての有限次元部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の和が  $L(\lambda)$  全体となることを示せばよい。

$W$  を  $L(\lambda)$  の有限次元部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とすると、任意の  $x \in \text{span}_{\mathbb{K}}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$  に対して

$$x\mathfrak{g}W \subseteq \mathfrak{g}xW + [x, \mathfrak{g}]W \subseteq \mathfrak{g}W$$

だから、 $\mathfrak{g}W$  も  $L(\lambda)$  の有限次元部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群である。したがって、 $L(\lambda)$  のすべての有限次元部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群の和は、 $L(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群である。 $L(\lambda)$  は既約  $\mathfrak{g}$ -加群だから、あとは、 $L(\lambda)$  有限次元部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群であって 0 でないことを示せばよい。

$e_\lambda$  が生成する  $L(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群が有限次元であることを示そう。 $m = \lambda(H_\alpha)$  と置くと、仮定より、 $m \in \mathbb{N}$  である。 $e_\lambda$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $L(\lambda)$  のウェイト  $m$  の極大ベクトルだから、各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$e_{\lambda, n} = \frac{1}{n!} Y_\alpha^n e_\lambda$$

と置くと、 $e_\lambda$  が生成する  $L(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は  $\text{span}_{\mathbb{K}}\{e_{\lambda, n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  である (命題 2.7 (2), (3))。ここで、 $e_{\lambda, m+1}$  に注目すると、命題 2.7 (1) より

$$X_\alpha e_{\lambda, m+1} = (m - (m+1) + 1)e_{\lambda, m} = 0$$

である。また、 $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$  とすると、 $[X_\beta, Y_\alpha] = 0$  であり (命題 3.26 (4))、 $e_\lambda$  は  $\mathfrak{g}$ -加群  $L(\lambda)$  の極大ベクトルだから、

$$X_\beta e_{\lambda, m+1} = \frac{1}{(m+1)!} X_\beta Y_\alpha^{m+1} e_\lambda = \frac{1}{(m+1)!} Y_\alpha^{m+1} X_\beta e_\lambda = 0$$

である。もし  $e_{\lambda, m+1} \neq 0$  ならば、上式より  $e_{\lambda, m+1}$  は  $\mathfrak{g}$ -加群  $L(\lambda)$  の極大ベクトルであり (命題 4.9),  $L(\lambda)$  は既約  $\mathfrak{g}$ -加群だから、これは自動的に極大生成ベクトルとなる。ところが、 $e_{\lambda, m+1}$  のウェイトは  $\lambda - (m+1)\alpha$  だから (命題 4.4), これは、最高ウェイトの一意性 (系 4.11) に矛盾する。よって、背理法より  $e_{\lambda, m+1} = 0$  であり、 $e_\lambda$  が生成する  $L(\lambda)$  の部分  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群は有限次元である。これで、主張が示された。

(b)  $\implies$  (c), 最後の主張 条件 (b) が成り立つとすると、各  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  に対して  $\theta_\alpha^\rho \in GL(V)$  を補題 4.28 のとおりに定義でき、これは任意の  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  に対して  $\theta_\alpha^\rho(V_\mu) = V_{s_\alpha(\mu)}$  を満たす。よって、任意の  $w \in \mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$  と  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して、 $L(\lambda)$  におけるウェイト  $\lambda$  と  $w(\lambda)$  の重複度は等しい。特に、 $L(\lambda)$  のウェイト全体のなす集合は、 $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ -安定である。

(c)  $\implies$  (d)  $L(\lambda)$  のウェイト全体のなす集合を  $\mathfrak{X}$  と置くと、 $\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$  である (命題 4.10 (2))。さらに、 $\mathfrak{X}$  が  $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ -安定であるとする、 $\mathfrak{X}$  は命題 4.22 の仮定を満たすから、有限である。 $L(\lambda)$  はウェイト加群であり、その各ウェイトの重複度は有限だから (命題 4.10 (2), (3)), このとき、 $L(\lambda)$  は有限次元である。

(d)  $\implies$  (a)  $\alpha \in \Pi$  とし、 $\mathfrak{sl}_2$ -三対  $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$  によって  $V$  を  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とみなす。すると、 $He_\lambda = H_\alpha e_\lambda = \lambda(H_\alpha)v$  かつ  $Xe_\lambda = X_\alpha e_\lambda = 0$  だから、 $e_\lambda$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群  $V$  のウェイト  $\lambda(H_\alpha)$  の極大ベクトルである。したがって、系 2.9 より、 $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$  である。これが任意の単純ルート  $\alpha \in \Pi$  に対して成り立つから、 $\lambda$  は  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルである。  $\square$

**定理 4.30 (最高ウェイト理論)**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とし、 $\Pi$  をルート系  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の基底とする。

- (1) 条件 (CD) を満たす有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  は、最高ウェイト加群であり、その最高ウェイトは、 $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルである。
- (2)  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトル  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  に対して、Verma 加群の既約商  $L(\lambda)$  は、条件 (CD) を満たす有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -加群である。
- (3) (1) と (2) の対応は、条件 (CD) を満たす有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -加群の同型類と  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルとの間の、互いに他の逆を与える一対一対応である。

**証明** 主張は、次のことから従う。

- 条件 (CD) を満たす有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -加群は、最高ウェイト加群である (命題 4.26)。
- 最高ウェイト  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  の最高ウェイト既約  $\mathfrak{g}$ -加群は、同型を除いて  $L(\lambda)$  のみである (定理 4.18)。
- $L(\lambda)$  が有限次元であるための必要十分条件は、 $\lambda$  が  $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$  に関する優整ベクトルであることである (定理 4.29)。  $\square$

**注意 4.31**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を標数 0 の可換体  $\mathbb{K}$  上の分裂簡約 Lie 代数とする。

- (1) 注意 4.24 と命題 4.25 より、 $\mathbb{K}$  が代数閉であるかまたは  $\mathfrak{g}$  が半単純ならば、最高ウェイト理論 (定理 4.30) において、「条件 (CD) を満たす」はなくても同じである。
- (2)  $\mathbb{K}$  が代数閉でなく  $\mathfrak{g}$  が半単純でなければ、条件 (CD) を満たさない有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -加群が存在しうる。たとえば、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  とし、 $\mathfrak{g}$  を 1 次元可換 Lie 代数  $\mathbb{R}$  とすると、写像  $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$  は  $\mathbb{R}$  の  $\mathbb{R}^2$  上の既約表現だが、条件 (CD) を満たさない。
- (3)  $\mathfrak{g}$  が半単純でなければ、( $\mathbb{K}$  が代数閉であっても、) 条件 (CD) を満たさない有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群が存在する。実際、 $\lambda \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$  であって  $\lambda|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0$  を満たすものを一つ固定すると、写像  $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \lambda(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  は  $\mathfrak{g}$

の  $\mathbb{K}^2$  上の表現だが, 条件 (CD) を満たさない.

## 参考文献

全体を通して, Bourbaki [3] を参考にした. 補題 1.21 と補題 1.22 の証明については, Atiyah–MacDonald [1, Chapter 5, Exercises 20, 21] を参考にした.

- [1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7*, Springer, 2006.
- [3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8*, Springer, 2006.
- [4] 箱, 「Lie 代数」, 2025 年 5 月 24 日版.  
<https://o-ccah.github.io/docs/lie-algebra.html>
- [5] 箱, 「ルート系」, 2025 年 8 月 7 日版.  
<https://o-ccah.github.io/docs/root-system.html>