

対称多項式の基本定理

箱 (@o_ccah)

2023 年 3 月 10 日

概要

対称多項式の基本定理を証明する．関連して，冪和対称多項式を用いた対称多項式の基本定理の類似や，交代多項式と対称多項式との関係についても触れる．

目次

1	辞書式順序	1
2	対称多項式	3
3	対称多項式の基本定理	4
4	冪和対称多項式	5
5	交代多項式	7

記号と用語

- 自然数，整数，有理数全体の集合を，それぞれ \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} と書く．0 は自然数に含める．
- A を可換環とすると， $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して，多項式環の元 $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in A[X_1, \dots, X_n]$ を X^α と書く．

1 辞書式順序

定義 1.1 (辞書式順序) \mathbb{N}^n 上の関係 \prec および \preceq を，次のように定める：

\mathbb{N}^n の 2 元 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対して，関係 $\alpha \prec \beta$ を「ある $1 \leq i \leq n$ が存在して，すべての $j < i$ に対して $\alpha_j = \beta_j$ かつ $\alpha_i < \beta_i$ である」と定め，これを用いて関係 $\alpha \preceq \beta$ を「 $\alpha = \beta$ または $\alpha \prec \beta$ 」と定める．

関係 \preceq を， \mathbb{N}^n 上の辞書式順序という． $\alpha \prec \beta$ の代わりに $\beta \succ \alpha$ とも書き， $\alpha \preceq \beta$ の代わりに $\beta \succeq \alpha$ とも書く．

辞書式順序 \preceq は \mathbb{N}^n 上の整列順序であり， \mathbb{N}^n の加法と整合する（すなわち， $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ に対して， $\alpha \preceq \beta$

ならば $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$ である).

定義 1.2 (辞書式順序に関する次数) A を可換環とする. $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ を

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$$

と表すとき, $a_\alpha \neq 0$ となる $\alpha \in \mathbb{N}^n$ のうち辞書式順序に関して最大のものを, f の辞書式順序に関する次数という. ただし, $f = 0$ の辞書式順序に関する次数は $-\infty$ とし, 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して $-\infty \prec \alpha$ であると約束する.

命題 1.3 A を可換環とする. $f_1, \dots, f_k \in A[X_1, \dots, X_n]$ とし, 各 j に対して, f_j は辞書式順序に関してたかだか α_j 次であり, その α_j 次の係数は a_j であるとする. このとき, 積 $f_0 \cdots f_{k-1}$ は辞書式順序に関してたかだか $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ 次であり, その $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 次の係数は $a_1 \cdots a_k$ である.

証明 辞書式順序が \mathbb{N}^n の加法と整合することから明らかである. □

辞書式順序とは関係ないが, 後で必要になるので, 多項式環の零因子に関する命題を示しておく.

命題 1.4 A を可換環とする. $f \in A[X]$ に対して, 次の 2 条件は同値である.

- (a) f は $A[X]$ において零因子である.
- (b) ある $c \in A \setminus \{0\}$ が存在して, $cf = 0$ となる.

証明 (b) \implies (a) 明らかである.

(a) \implies (b) $f = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ ($a_k \in A$, $a_d \neq 0$) が $A[X]$ において零因子であるとする. ある $g \in A[X] \setminus \{0\}$ が存在して $fg = 0$ となる. このような g の中で次数が最小のものをとり, その最高次の係数を $c \in A \setminus \{0\}$ と置く. すべての $0 \leq k \leq d$ に対して $a_k g = 0$ であることを, k に関する降順の帰納法で示す. $0 \leq k \leq d$ とし, $k < j \leq d$ に対しては $a_j g = 0$ が示されたとする. このとき,

$$0 = fg = \sum_{j=0}^d a_j X^j \cdot g = \sum_{j=0}^k a_j X^j \cdot g$$

だから, 両辺の $k + \deg g$ 次の係数を比較することで $a_k c = 0$ を得る. したがって, g を a_k 倍すると最高次の係数が消えるから, $a_k g$ は g よりも次数が真に小さくなる. 一方で, $f \cdot a_j g = a_j fg = 0$ である. よって, g の次数の最小性より $a_k g = 0$ である. これで, 帰納法が完成した. いま示したことから特に, 任意の $0 \leq k \leq d$ に対して $a_k c = 0$ であり, したがって $cf = 0$ である. これで, 主張が示された. □

系 1.5 A を可換環とする. $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ が零因子ならば, そのすべての係数は A における零因子である.

証明 n に関する帰納法で示す. $n = 0$ のときは明らかである. $n \geq 1$ として, $n - 1$ のときには主張は正しいとする. $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ が零因子であるとして, f を X_n について整理して $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k X_n^k$ ($f_k \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$) と書く. すると, 命題 1.4 より各 f_k は $A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ における零因子だから, 帰納法の仮定より f_k のすべての係数は A における零因子である. よって, f のすべての係数は A における零因子である. これで, 帰納法が完成した. □

2 対称多項式

多重指数の空間 \mathbb{N}^n には, n 次対称群 \mathfrak{S}_n が

$$\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$$

によって左から作用する. 対応して, 可換環 A 上の n 変数多項式環 $A[X_1, \dots, X_n]$ には, \mathfrak{S}_n が

$$\sigma \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^{\sigma\alpha},$$

すなわち

$$(\sigma f)(X_1, \dots, X_n) = f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

によって左から作用する. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, その作用 $f \mapsto \sigma f$ は単位的 A -代数 $A[X_1, \dots, X_n]$ の自己同型である.

定義 2.1 (対称多項式) A を可換環とする. A 上の n 変数多項式 f であって, 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma f = f$ を満たすものを, A 上の n 変数対称多項式という. A 上の n 変数対称多項式の全体は, $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$ の部分単位的 A -代数をなす. この部分単位的 A -代数を, $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$ と書く.

定義 2.2 (軌道対称多項式) A を可換環とする. $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して, 指数 α の軌道対称多項式 m_α を,

$$m_\alpha = \sum_{\beta \in \mathfrak{S}_n \alpha} X^\beta \in A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$$

と定める.

\mathbb{N}^n の部分集合 \mathbb{N}_\downarrow^n を

$$\mathbb{N}_\downarrow^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n\}$$

と定めると, \mathbb{N}_\downarrow^n は \mathfrak{S}_n の \mathbb{N}^n への作用が定める同値関係に関する完全代表系である. よって, $\alpha \in \mathbb{N}_\downarrow^n$ に対する軌道対称多項式 m_α の全体は, $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$ の A -加群としての基底をなす.

命題 2.3 A を可換環とする. $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_\downarrow^n$ に対して, 軌道対称多項式の積 $m_{\alpha_1} \cdots m_{\alpha_k}$ は

$$m_{\alpha_1} \cdots m_{\alpha_k} = m_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_\downarrow^n, \gamma \prec \alpha_1 + \dots + \alpha_k} a_\gamma m_\gamma \quad (a_\gamma \in \mathbb{Z})$$

という形に書ける.

証明 各 j に対して, m_{α_j} は辞書式順序に関してたかだか α_j 次であり^{*1}, その α_j 次の係数は 1 である. したがって, 命題 1.3 より, $m_{\alpha_1} \cdots m_{\alpha_k}$ は辞書式順序に関してたかだか $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ 次であり, その $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ 次の係数は 1 である. また, 各 m_{α_j} は整数係数だから, それらの積 $m_{\alpha_1} \cdots m_{\alpha_k}$ も整数係数である. よって, $m_{\alpha_1} \cdots m_{\alpha_k}$ を m_γ ($\gamma \in \mathbb{N}_\downarrow^n$) の線型結合として書くと, 主張の形になる. \square

^{*1} A が零環でなければ, m_{α_j} の辞書式順序に関する次数はちょうど α_j である. A が零環の場合は $m_{\alpha_j} = 0$ であり, その辞書式順序に関する次数は $-\infty$ である.

3 対称多項式の基本定理

定義 3.1 (基本対称多項式) A を可換環とする. $k \in \mathbb{N}$ に対して, k 次基本対称多項式 e_k を,

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_k} \in A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$$

と定める. 変数の個数を明示する必要がある場合には, e_k の代わりに $e_k^{(n)}$ と書く.

k 次基本対称多項式 e_k は, $0 \leq k \leq n$ ならば指数 $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 が k 個, 0 が $n - k$ 個並ぶ) の軌道対称多項式であり, $k > n$ ならば 0 である.

定理 3.2 (対称多項式の基本定理) 可換環 A に対して, 1 次から n 次までの基本対称多項式 e_1, \dots, e_n は, $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$ の単位的 A -代数としての基底である. すなわち, 写像

$$\phi: A[E_1, \dots, E_n] \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}, \quad f \mapsto f(e_1, \dots, e_n)$$

は, 単位的 A -代数の同型である.

証明 まず, ϕ の全射性を示す. そのためには, 任意の $\alpha \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n$ に対して, 軌道対称多項式 m_{α} が ϕ の像に属することを示せばよい. これを, 辞書式順序 (これは $\mathbb{N}_{\downarrow}^n$ 上の整列順序である) に関する帰納法で示す. $\alpha \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n$ とし, 任意の $\gamma \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n$, $\gamma \prec \alpha$ に対して $m_{\gamma} \in \text{Im } \phi$ が示されたとする. $1 \leq k \leq n$ に対して $\epsilon_k = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 が k 個, 0 が $n - k$ 個並ぶ) と置くと, $\alpha \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n$ より, $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\alpha = \nu_1 \epsilon_1 + \dots + \nu_n \epsilon_n$$

を満たす. この ν_1, \dots, ν_n について, 命題 2.3 より, 基本対称式の積 $e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n}$ は

$$e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n} = m_{\epsilon_1}^{\nu_1} \cdots m_{\epsilon_n}^{\nu_n} = m_{\alpha} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n, \gamma \prec \alpha} a_{\gamma} m_{\gamma} \quad (a_{\gamma} \in \mathbb{Z})$$

と書ける. $e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n} \in \text{Im } \phi$ であり, 帰納法の仮定より $\gamma \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n$, $\gamma \prec \alpha$ に対して $a_{\gamma} m_{\gamma} \in \text{Im } \phi$ だから, $m_{\alpha} \in \text{Im } \phi$ である. これで, 帰納法が完成し, ϕ の全射性が示された.

次に, ϕ の単射性を, n に関する帰納法で示す. $n = 0$ のときは明らかである. $n \geq 1$ として, $n - 1$ のときには主張は正しいとする. $f \in A[E_1, \dots, E_n]$, $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ とすると, 特に

$$f(e_1(X_1, \dots, X_{n-1}, 0), \dots, e_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}, 0), 0) = 0$$

である. $1 \leq k \leq n - 1$ に対して $e_k(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)$ は $n - 1$ 変数の k 次基本対称多項式だから, 帰納法の仮定より, $f(e_1, \dots, e_{n-1}, 0) = 0$ である. よって, 因子定理 (f を $A[E_1, \dots, E_{n-1}]$ 上の E_n を不定元とする多項式と見て適用する) より, f は E_n で割り切れる. そこで, $g \in A[E_1, \dots, E_n]$ を用いて $f = E_n g$ と書くと,

$$0 = f(e_1, \dots, e_n) = e_n g(e_1, \dots, e_n)$$

だが, $e_n = X_1 \cdots X_n$ は零因子ではないから*2 $g(e_1, \dots, e_n) = 0$ である. よって, f の次数に関する無限降下法より, $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ を満たす $f \in A[E_1, \dots, E_n]$ は $f = 0$ 以外に存在しない. これで, 帰納法が完成し, ϕ の単射性が示された. \square

*2 系 1.5 から従うといってもよいが, 直接考えても明らかである.

4 冪和対称多項式

定義 4.1 (冪和対称多項式) A を可換環とする. $k \in \mathbb{N}$ に対して, k 次冪和対称多項式 p_k を,

$$p_k = X_1^k + \cdots + X_n^k \in A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$$

と定める. 変数の個数を明示する必要がある場合には, p_k の代わりに $p_k^{(n)}$ と書く.

k 次冪和対称多項式 p_k は, 指数 $(k, 0, \dots, 0)$ の軌道対称多項式である.

命題 4.2 (Newton の恒等式) A を可換環とする. $k \in \mathbb{N}$ に対して, 基本対称多項式と冪和対称多項式の間の等式

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j e_{k-j} p_j = (n-k) e_k$$

が成り立つ.

証明 まず, $k = n$ の場合に示す. 多項式環 $A[X_1, \dots, X_n][T]$ において

$$(T - X_1) \cdots (T - X_n) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) T^j$$

であり, これに $T = X_i$ を代入すると

$$0 = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) X_i^j$$

となる. この式の $1 \leq i \leq n$ にわたる総和をとって両辺を $(-1)^k$ 倍することにより, $k = n$ の場合の Newton の恒等式

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j e_{n-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) p_j^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (*)$$

を得る.

次に, $k > n$ の場合を示す. $(*)$ において n を k に置き換え, X_{n+1}, \dots, X_k に 0 を代入すると,

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j e_{k-j}^{(k)}(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) p_j^{(k)}(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) = 0$$

となる. 上式の各項について, $e_{k-j}^{(k)}(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) = e_{k-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$ であり, $j \geq 1$ ならば $p_j^{(k)}(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) = p_j^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$ である. また, $j = 0$ については $p_0^{(k)} = k$, $p_0^{(n)} = n$ だが, $e_k^{(k)}(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) = 0$ だから, この違いは式に影響しない. よって, 上式は, $k > n$ の場合の Newton の恒等式

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j e_{k-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) p_j^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = 0$$

に他ならない.

最後に、 $k < n$ の場合の Newton の恒等式

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j e_{k-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) p_j^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = (n-k) e_k^{(n)}(X_1, \dots, X_n) \quad (**)$$

を示す。上式の両辺は斉 k 次の対称多項式だから、 $\alpha \in \mathbb{N}_{\downarrow}^n$ 、 $|\alpha| = k$ に対して、上式の両辺の α 次の係数が等しいことを示せばよい。このとき、 α は $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$ という形である。さて、 $(*)$ において n を k に置き換えると、

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j e_{k-j}^{(k)}(X_1, \dots, X_k) p_j^{(k)}(X_1, \dots, X_k) = 0$$

となる。 $e_{k-j}^{(k)}(X_1, \dots, X_k) = e_{k-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0)$ であり、 $j \geq 1$ ならば $p_j^{(k)}(X_1, \dots, X_k) = p_j^{(n)}(X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0)$ である。また、 $j = 0$ については、 $p_0^{(k)} = k$ 、 $p_0^{(n)} = n$ である。よって、上式は

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j e_{k-j}^{(n)}(X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0) p_j^{(n)}(X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0) = (n-k) e_k^{(n)}(X_1, \dots, X_k, 0, \dots, 0) \quad (***)$$

と書き直せる。 $(***)$ は $(**)$ において X_{k+1}, \dots, X_n に 0 を代入したもののだが、 α は $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$ という形だから、 $(**)$ と $(***)$ の対応する辺の α 次の係数はそれぞれ等しい。よって、 $(***)$ が成り立つことから、 $(**)$ の両辺の α 次の係数は等しい。これで、主張が示された。 \square

系 4.3 A を可換環とする。

- (1) $k \in \mathbb{N}$ に対して、 p_k は $(-1)^{k-1} k e_k$ と「 e_1, \dots, e_{k-1} の A -係数多項式」の和として書ける。
- (2) A が \mathbb{Q} と同型な部分環をもつとする。このとき、 $k \geq 1$ に対して、 e_k は $(-1)^{k-1} k^{-1} p_k$ と「 p_1, \dots, p_{k-1} の A -係数多項式」の和として書ける。

証明 (1) $k \in \mathbb{N}$ に対して、Newton の恒等式 (命題 4.2) は

$$p_k = e_1 p_{k-1} - e_2 p_{k-2} + \dots + (-1)^{k-2} e_{k-1} p_1 + (-1)^{k-1} k e_k$$

と書き直せる。これを用いれば、 k に関して帰納的に主張が示せる。

- (2) A が \mathbb{Q} と同型な部分環をもつ場合、 $k \geq 1$ に対して、Newton の恒等式 (命題 4.2) は

$$e_k = k^{-1} (e_{k-1} p_1 - e_{k-2} p_2 + \dots + (-1)^{k-1} e_0 p_k)$$

と書き直せる。これを用いれば、 k に関して帰納的に主張が示せる。 \square

定理 4.4 A は可換環であり、 \mathbb{Q} と同型な部分環をもつとする。このとき、1 次から n 次までの冪対称多項式 p_1, \dots, p_n は、 $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$ の単位的 A -代数としての基底である。すなわち、写像

$$\psi: A[p_1, \dots, p_n] \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}, \quad f \mapsto f(p_1, \dots, p_n)$$

は、単位的 A -代数の同型である。

証明 ψ の全射性は、対称多項式の基本定理 (定理 3.2) における ϕ の全射性と、基本対称多項式 e_k が ψ の像に属すること (系 4.3 (2)) から従う。

ψ の単射性を示す. $f \in A[P_1, \dots, P_n] \setminus \{0\}$ を任意にとり, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha P^\alpha$ と表す. 各 p_k を, $F_k \in A[E_1, \dots, E_n]$ を用いて $p_k = F_k(e_1, \dots, e_n)$ と表すと,

$$f(p_1, \dots, p_n) = f(F_1(e_1, \dots, e_n), \dots, F_n(e_1, \dots, e_n))$$

である. 対称多項式の基本定理 (定理 3.2) における ϕ の単射性より, $f(p_1, \dots, p_n) \in A[X_1, \dots, X_n]$ が 0 でないことを示すためには, 上式の右辺で e_k を不定元 E_k に置き換えて得られる $A[E_1, \dots, E_n]$ の元

$$f(F_1(E_1, \dots, E_n), \dots, F_n(E_1, \dots, E_n)) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} a_\alpha F_1(E_1, \dots, E_n)^{\alpha_1} \cdots F_n(E_1, \dots, E_n)^{\alpha_n}$$

が 0 でないことをいえばよい.

「 $n, n-1, \dots, 1$ -成分の優先順位で比較する \mathbb{N}^n 上の辞書式順序」を \preceq' と書き, 「 \preceq' に関する次数」を定義 1.2 と同様に定義する. 系 4.3 (1) より, $1 \leq k \leq n$ に対して, F_k の \preceq' に関する次数は $\delta_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (k -成分のみが 1 で, 他は 0) であり, その δ_k 次の係数は $(-1)^{k-1}k$ である. したがって, 命題 1.3 (に対応する \preceq' に関する次数についての結果) より, 各 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, $F_1^{\alpha_1} \cdots F_n^{\alpha_n}$ の \preceq' に関する次数は α であり, その α 次の係数は $\prod_{k=1}^n ((-1)^{k-1}k)^{\alpha_k}$ である. よって, f の \preceq' に関する次数を β とすれば, $f(F_1, \dots, F_n)$ の β 次の係数は $a_\beta \prod_{k=1}^n ((-1)^{k-1}k)^{\alpha_k} \neq 0$ だから (A において 0 以外の整数が零因子でないことを用いた), $f(F_1, \dots, F_n) \neq 0$ である. これで, ψ の単射性が示された. \square

注意 4.5 証明からわかるように, 定理 4.4 における ψ の単射性は, A において 0 以外の整数 (正確には, 0 以外の整数の一意な環準同型 $\mathbb{Z} \rightarrow A$ による像) が零因子でないと仮定するだけでも成り立つ.

注意 4.6 一般の可換環 A に対しては, 定理 4.4 は成り立たない. たとえば, $\mathbb{Q}[X, Y]$ において

$$XY = 2^{-1}((X+Y)^2 - (X^2 + Y^2)),$$

すなわち

$$e_2(X, Y) = 2^{-1}(p_1(X, Y)^2 - p_2(X, Y))$$

であり, 定理 4.4 より, これ以外の方法で e_2 を p_1, p_2 の \mathbb{Q} -係数多項式として表すことはできない. 特に, e_2 を p_1, p_2 の \mathbb{Z} -係数多項式として表すことはできないから, $A = \mathbb{Z}$ に対しては定理 4.4 における ψ の全射性は成り立たない. また, p を素数とすると^{*3}, $\mathbb{F}_p[X, Y]$ においては

$$(X+Y)^p = X^p + Y^p,$$

すなわち

$$p_1(X, Y)^p = p_p(X, Y)$$

だから, $A = \mathbb{F}_p$ に対しては定理 4.4 における ψ の単射性は成り立たない.

5 交代多項式

定義 5.1 (差積) A を可換環とする. 差積 Δ を,

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) \in A[X_1, \dots, X_n]^{\text{alt}}$$

^{*3} 対称冪和多項式を表す記号と衝突するが, 許してほしい.

と定める．変数の個数を明示する必要がある場合には， Δ の代わりに $\Delta^{(n)}$ と書く．

補題 5.2 A を可換環とする． $f \in A[X]$ が $a_1, \dots, a_k \in A$ を根にもち，すべての $1 \leq i < j \leq k$ に対して $a_i - a_j$ が零因子でなければ， f は $(X - a_1) \cdots (X - a_k)$ で割り切れる．

証明 k に関する帰納法で示す． $k = 0$ のときは明らかである． $k \geq 1$ として， $k - 1$ のときには主張は正しいとする． f が a_1, \dots, a_k を根にもちとすると，因子定理より f は $X - a_n$ で割り切れるから，ある $g \in A[X]$ が存在して $f = (X - a_k)g$ と書ける．すべての $1 \leq i \leq k - 1$ に対して， f は a_i を根にもち， $a_i - a_k$ は零因子でないから， g も a_i を根にもち．よって，帰納法の仮定より g は $(X - a_1) \cdots (X - a_{k-1})$ で割り切れるから， f は $(X - a_1) \cdots (X - a_k)$ で割り切れる．これで，帰納法が完成した． \square

命題 5.3 A を可換環とする． $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ に対して，次の 2 条件は同値である．

- (a) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対して， f において X_j を X_i に置き換えて得られる多項式 $f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n)$ は 0 である．
- (b) f は差積 Δ で割り切れる．

証明 (a) \implies (b) 明らかである．

(b) \implies (a) n に関する帰納法で示す． $n = 0$ のときは明らかである． $n \geq 1$ として， $n - 1$ のときには主張は正しいとする． $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ が (a) を満たすとする． f は $A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ 上の X_n を不定元とする多項式として X_1, \dots, X_{n-1} を根にもち，系 1.5 より $X_i - X_j$ ($1 \leq i < j \leq n - 1$) は零因子ではないから*4，補題 5.2 より f は $(X_1 - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n)$ で割り切れる．したがって，ある $g \in A[X_1, \dots, X_n]$ が存在して

$$f = (X_1 - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n)g$$

と書ける．各 $1 \leq i < j \leq n - 1$ に対して，上式において X_j を X_i に置き換えると

$$0 = (X_1 - X_n) \cdots (X_i - X_n) \cdots (X_i - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n)g(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}, X_n)$$

となるが，系 1.5 より $(X_1 - X_n) \cdots (X_i - X_n) \cdots (X_i - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n)$ は零因子ではないから

$$g(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}, X_n) = 0$$

である．すなわち， g は $A[X_n]$ 上の X_1, \dots, X_{n-1} を不定元とする $n - 1$ 変数多項式として条件 (a) を満たす．よって，帰納法の仮定より g は差積

$$\Delta^{(n-1)}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (X_i - X_j)$$

で割り切れるから， f は

$$(X_1 - X_n) \cdots (X_{n-1} - X_n) \Delta^{(n-1)}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \Delta^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$$

で割り切れる．これで，帰納法が完成した． \square

定義 5.4 (交代多項式) A を可換環とする． A 上の n 変数多項式 f であって，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma f = (\text{sgn } \sigma)f$ を満たすものを， A 上の n 変数交代多項式という． A 上の n 変数交代多項式の全体は， $A[X_1, \dots, X_n]$ の部分 A -加群をなす．この部分 A -加群を， $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{alt}}$ と書く．

*4 念のため注意しておく， A が零環であっても $1 \in A$ が零因子でないことに変わりはないから，問題なく系 1.5 が適用できる．

命題 5.5 A を可換環とし, $2 \in A$ は零因子ではないとする. このとき, 任意の $f \in A[X_1, \dots, X_n]^{\text{alt}}$ と $1 \leq i < j \leq n$ に対して, f において X_j を X_i に置き換えて得られる多項式 $f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n)$ は 0 である.

証明 $\tau \in \mathfrak{S}_n$ を i と j の互換とすると, f の交代性より

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) &= -\tau f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) \\ &= -f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n), \end{aligned}$$

すなわち

$$2f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) = 0$$

だから, $2 \in A$ が零因子でないことより $f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) = 0$ である. \square

定理 5.6 A を可換環とし, $2 \in A$ は零因子ではないとする. このとき, 写像

$$\delta: A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}} \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]^{\text{alt}}, \quad f \mapsto \Delta \cdot f$$

は, A -加群の同型である.

証明 対称多項式と交代多項式との積は交代多項式になるから, δ は確かに $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{sym}}$ から $A[X_1, \dots, X_n]^{\text{alt}}$ への A -加群の準同型を定める. 系 1.5 より差積 Δ は零因子ではないから, δ は単射である. δ の全射性を示す. $2 \in A$ が零因子でないことと命題 5.5, 命題 5.3 より, 任意の $f \in A[X_1, \dots, X_n]^{\text{alt}}$ に対してある $g \in A[X_1, \dots, X_n]$ が存在して $f = \Delta \cdot g$ となる. この g について, 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$(\text{sgn } \sigma) \Delta \cdot g = (\text{sgn } \sigma) f = \sigma f = \sigma \Delta \cdot \sigma g = (\text{sgn } \sigma) \Delta \cdot \sigma g$$

だから, Δ が零因子でないことより $g = \sigma g$ である. すなわち, g は対称多項式である. これで, δ の全射性が示された. \square

参考文献

- [1] 本間泰史, 「有限群の表現, 対称群の表現の基礎」. (2023 年 3 月 10 日アクセス)
http://www.f.waseda.jp/homma_yasushi/homma2/download/representation.pdf
- [2] マスオ, 「ニュートンの恒等式とその証明」. (2023 年 3 月 10 日アクセス)
<https://manabitimes.jp/math/1304>