Kunen『数学基礎論講義』第 I 章の演習問題の解答

箱（@o_ccah）

2019 年 9 月 8 日

概要

本稿は，Kunen『数学基礎論講義』第 I 章の演習問題の非公式解答集である．現在，全 70 問中，演習問題 I.8.23, I.11.38, I.15.10, I.15.11, I.15.12 を除く 65 問の解答を記載している．

目次

記号と用語

- 記号と用語は，基本的に，Kunen『数学基礎論講義』 [3] のものをそのまま用いた．
- たとえば，$f \restriction A$ で写像（や関係）の制限を，$S(\alpha)$ で順序数の後続者を，$\mathrm{type}(A; R)$ で順序型を，$\mathrm{trcl}(x)$ で推移閉包を，$R(\alpha)$ で累積的階層を，$H(\kappa)$ で推移閉包の濃度が κ 未満の集合全体の集合を表す．
- ただし，次の点については例外である．
  - 量化の直後の論理式を囲む括弧について，本では (–) と [–] が混在しているが，本稿では (–) で統

一する．
  - 公理系について，本では主にイタリック体で *ZFC* などと表されているが，本稿ではローマン体で ZFC などと表す．
  - クラスや集合を表す記号であって複数文字からなるものについて，本ではイタリック体で *ON* などと表されているが，本稿ではローマン体で ON などと表す．
  - 順序対について，本ではこれを表す記号として $\langle x, y\rangle$ と (x, y) がともに用いられているが，本稿では，他の括弧との混同を避けるため，$\langle x, y\rangle$ のみを用いる．
  - 本では写像と函数の語が混在しているが，本稿では写像で統一する．
  - 写像による像について，本では主に $f``A$ で表されているが，本稿では $f[A]$ で表す．
  - 写像による逆像について，本ではこれを表す記号は定義されていないが，本稿では $f^{-1}[B]$ で表す．
  - 写像のなす集合について，本ではこれを表す記号として B^A や $B^{<\alpha}$ と ${}^A B$ や ${}^{<\alpha}B$ がともに用いられているが，本稿では，基数の演算との混同を避けるため，${}^A B$ や ${}^{<\alpha}B$ のみを用いる．
  - 基数の演算について，本では順序数の演算との混同を避けるため $\boxed{\kappa + \lambda}$ などと表されている箇所があるが，本稿では $\kappa + \lambda$ などの表記で統一する．
  - 人名について，本（訳書）では片仮名表記となっているが，本稿ではアルファベット表記とする．
  - その他，細かい表現について，本とは異なるものを用いることがある．
- いくつかの演習問題では，その時点で定義されていない概念を用いる．そのような演習問題の解答には，記号〈*〉を付した．

公理系について

Z^-, ZF^-, ZFC^-, Z, ZF, ZFC については，Kunen『数学基礎論講義』の pp. 14–15 を参照のこと．また，Inf で無限の公理を，P で冪集合の公理を表し，たとえば $\mathrm{Z}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ で Z^- から無限の公理と冪集合の公理を除いた公理系を表す．

- I.2, I.6 節の演習問題の解答は，$\mathrm{Z}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ に基づく．
- I.7, I.8 節の演習問題の解答は，$\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ に基づく．ただし，I.7.19 は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ に基づく．
- I.9 節の演習問題（I.9.6 のみ）の解答は，$\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ に基づく．
- I.10, I.11 節の演習問題の解答は，ZF^- に基づく．ただし，I.10.5 は $\mathrm{Z}^- - \mathrm{Inf}$ に，I.11.35 は Z^- に基づく．
- I.12 節の演習問題の解答のうち，I.12.6, I.12.13, I.12.17, I.12.18 は ZF^- に，I.12.14, I.12.15 は ZFC^- に基づく．
- I.13 節の演習問題の解答は，ZFC^- に基づく．
- I.14 節の演習問題の解答のうち，I.14.3, I.14.9, I.14.14, I.14.15 は ZF^- に，I.14.16, I.14.17, I.14.20 は ZFC^- に，I.14.23, I.14.24 は ZF に，I.14.19, I.14.21, I.14.22 は ZFC に基づく．
- I.15 節の演習問題の解答のうち，I.15.2, I.15.5, I.15.15 は ZF^- に，I.15.8, I.15.9, I.15.10 の後半, I.15.11 の後半, I.15.12, I.15.14 は ZFC^- に，I.15.10 の前半, I.15.11 の前半は $\mathrm{ZFC}^- + \mathrm{CH}$ に基づく．

I.2　公理

解答 I.2.1*　公理 1（外延性の公理）が真になるのは (1), (2), (3), (4), (6), (7)，公理 2（基礎の公理）が真になるのは (1), (5), (6), (7)，公理 4（対の公理）が真になるのは (2)，公理 5（和集合の公理）が真になるのは (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) すべてである． □

I.6　外延性，内包，対，和集合

解答 I.6.3*　$\neg(\exists x\ \mathrm{emp}(x))$ を満たすのは (2), (3), (4) であり，これらはすべて外延性の公理を満たす． □

解答 I.6.11*　まず，どの構造が内包公理を満たすかを調べる．内包公理を満たす空でない構造は必ず空集合をもつはずだから，(2), (3), (4) は内包公理を満たさない．一方で，空集合をもち，領域の各元がたかだか 1 つしか元をもたないような構造は内包公理を満たすから，(1), (5), (7) は内包公理を満たす．最後に，(6) は ϕ を $\neg\,\mathrm{emp}(x)$ と定めたときの内包公理 $\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge (\neg\,\mathrm{emp}(x)))$ を満たさない．実際，(6) において 2 の元は 0 と 1 だが，このうち空集合でない 1 のみを元とする元は存在しない．

よって，外延性の公理と内包公理を満たすのは (1), (7) である．このうち，2 つの集合の和集合が存在しないことがあるのは (7) である．実際，(7) において b の元は a，c の元は b だが，a と b のみを元とする元は存在しない． □

解答 I.6.13*　解答 I.6.11 で見たとおり，外延性の公理と内包公理を満たすのは (1), (7) である．このうち，$\forall x \neg \exists y (y \in x)$ を満たすのは (1) である． □

解答 I.6.15　$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$，すなわち

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \tag{$*$}$$

とする．($*$) の左辺の元 $\{x\}$, $\{x, y\}$ はともに x を元にもつから，右辺の元 $\{x'\}$ も x を元にもつ．すなわち，$x = x'$ である．$x = y$ の場合，($*$) の左辺は元を 1 つしかもたないから，右辺もそうであり，したがって $\{x'\} = \{x', y'\}$，$x' = y'$ である．よってこの場合，$x = y = x' = y'$ である．一方で $x \neq y$ の場合，($*$) の左辺の元のうち一方のみが y を含むから，右辺もそうであり，したがって $y' = y$ である．これで示された． □

解答 I.6.17　$\langle 0, 1\rangle = \{\{0\}, \{0, 1\}\} = \{1, 2\}$，$\langle 1, 0\rangle = \{\{1\}, \{1, 0\}\} = \{\{1\}, 2\}$． □

解答 I.6.20　$\{x, y, z\} = \{x, z, y\}$ を示す．外延性の公理より，$\forall a (a \in \{x, y, z\} \leftrightarrow a \in \{x, z, y\})$ を示せばよい．定義より，$a \in \{x, y, z\}$ は $(a = x \vee a = y) \vee a = z$ と同値であり，$a \in \{x, z, y\}$ は $(a = x \vee a = z) \vee a = y$ と同値である．これらは論理的に同値だから，結論を得る．

$u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cup (u \cap w)$ を示す．外延性の公理より，$\forall a (a \in u \cap (v \cup w) \leftrightarrow a \in (u \cap v) \cup (u \cap w))$ を示せばよい．定義より $a \in u \cap (v \cap w)$ は $a \in u \wedge (a \in v \vee a \in w)$ と同値であり，$a \in (u \cap v) \cup (u \cap w)$ は $(a \in u \wedge a \in v) \vee (a \in u \wedge a \in w)$ と同値である．これらは論理的に同値だから，結論を得る． □

I.7　関係・函数・離散数学

解答 I.7.13　$<$ と $\prec$ がそれぞれ S と T を狭義に全順序付けるとして，それらの辞書式積を $\lhd$ と置き，これが $S \times T$ を狭義に全順序付けることを示す．

まず，$\lhd$ が $S \times T$ 上で非反射的であることを示す．$\langle s,t \rangle \in S \times T$ を任意にとる．$<$ が S 上で非反射的であることより $s \not< s$ であり，$\prec$ が T 上で非反射的であることより $t \not\prec t$ だから，$\langle s,t \rangle \not\lhd \langle s,t \rangle$ である．すなわち，$\lhd$ は $S \times T$ 上で非反射的である．

次に，$\lhd$ が $S \times T$ 上で推移的であることを示す．$\langle s,t \rangle, \langle s',t' \rangle, \langle s'',t'' \rangle \in S \times T$ が $\langle s,t \rangle \lhd \langle s',t' \rangle$ かつ $\langle s',t' \rangle \lhd \langle s',t' \rangle$ を満たすとする．$s < s'$ かつ $s' = s''$，または $s = s'$ かつ $s' < s''$ の場合，$s < s''$ である．また，$s < s'$ かつ $s' < s''$ の場合，$<$ が S 上で推移的であることより $s < s''$ である．これらの場合，$\langle s,t \rangle \lhd \langle s'',t'' \rangle$ である．上記のいずれでもないとすると，$s = s'$ かつ $s' = s''$ であり，$t \prec t'$ かつ $t' \prec t''$ である．この場合，$s = s''$ であり，$\prec$ が T 上で推移的であることより $t \prec t''$ だから，$\langle s,t \rangle \lhd \langle s'',t'' \rangle$ である．よって，$\lhd$ は $S \times T$ 上で推移的である．

最後に，$\lhd$ が $S \times T$ 上で三分律を満たすことを示す．$\langle s,t \rangle, \langle s',t' \rangle \in S \times T$ を任意にとる．$<$ は S 上で三分律を満たすから $s < s'$ または $s' < s$ または $s = s'$ であり，$\prec$ は T 上で三分律を満たすから $t \prec t'$ または $t' \prec t$ または $t = t'$ である．$s < s'$ ならば $\langle s,t \rangle \lhd \langle s',t' \rangle$ であり，$s' < s$ ならば $\langle s',t' \rangle \lhd \langle s,t \rangle$ である．また，$s = s'$ の場合，$t \prec t'$，$t' \prec t$，$t = t'$ のそれぞれに応じて $\langle s,t \rangle \lhd \langle s',t' \rangle$，$\langle s',t' \rangle \lhd \langle s,t \rangle$，$\langle s,t \rangle = \langle s',t' \rangle$ となる．よって，$\lhd$ は $S \times T$ 上で三分律を満たす．

以上より，$\lhd$ は $S \times T$ を狭義に全順序付ける．　□

解答 I.7.16　どちらでも同じだから，$\{x : \exists y([\![x,y]\!] \in R)\}$ の存在のみ示す．内包公理より，集合 $R' = \{z \in R : \exists x,y(z = [\![x,y]\!])\}$ が存在する．論理式 $\phi(z,x)$ を $\exists y(z = [\![x,y]\!])$ と定めると，$\forall z \in R' \exists! x\, \phi(z,x)$ である．実際，R' の定義より x の存在が，仮定されている $[\![-,-]\!]$ の性質から x の一意性がわかる．よって，置換公理より，$\forall z \in R' \exists x \in X\, \phi(z,x)$ を満たす集合 X がとれる．内包公理より，集合 $D = \{x \in X : \exists y(\langle x,y \rangle \in R)\}$ が存在するが，これが $\{x : \exists y([\![x,y]\!] \in R)\}$ となる．　□

解答 I.7.17　まず，A の恒等写像（フォーマルには $\{\langle x,x \rangle : x \in A\}$．たとえば置換公理を用いて定義できる）は $(A;\lhd_1)$ から $(A;\lhd_1)$ の上への同型写像だから，$(A;\lhd_1) \cong (A;\lhd_1)$ である．よって，$\cong$ は反射的である．

次に，$(A;\lhd_1) \cong (B;\lhd_2)$ とすると，$(A;\lhd_1)$ から $(B;\lhd_2)$ への上への同型写像 F がとれるが，このとき F^{-1} は $(B;\lhd_2)$ から $(A;\lhd_1)$ への上への同型射像だから，$(B;\lhd_2) \cong (A;\lhd_1)$ である．よって，$\cong$ は対称的である．

最後に，$(A;\lhd_1) \cong (B;\lhd_2)$ かつ $(B;\lhd_2) \cong (C;\lhd_3)$ とすると，$(A;\lhd_1)$ から $(B;\lhd_2)$ への上への同型写像 F と $(B;\lhd_1)$ から $(C;\lhd_2)$ への上への同型写像 G がとれるが，このとき $G \circ F$ は $(A;\lhd_1)$ から $(C;\lhd_3)$ への上への同型写像だから，$(A;\lhd_1) \cong (C;\lhd_3)$ である．よって，$\cong$ は推移的である．

以上より，$\cong$ は同値関係である．　□

解答 I.7.19*　R が A 上でサイクル $a_0 R a_1 R \cdots R a_n R a_0$ をもつとすると，$\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ は A の空でない部分集合だが R-極小な元をもたない．よって，R は A 上で整礎的でない．[*1]

逆に，A の空でない部分集合 X であって R-極小な元をもたないものがとれたとする．X は空でないから $a_0 \in X$ がとれる．また，X が R-極小な元をもたないことより，一般に $a_i \in X$ が定まったとき，$a_{i+1} \in X$ を

[*1] こちらの含意は，A が有限でなくても成り立つ．

$a_{i+1}Ra_i$ なるようにとれる．このようにして，X の元の列であって R に関して降鎖をなすもの $a_0, a_1, \ldots$ がとれる．さて，A は有限，したがって X も有限だから，ある自然数 m, n（$m < n$）が存在して $a_m = a_n$ となる．よって，R は A 上でサイクル $a_m = a_n Ra_{n-1}R \cdots Ra_{m+1}Ra_m$ をもつ． □

解答 I.7.21　X を A の部分集合とする．R が A 上で非反射的である・推移的である・三分律を満たすとすると，それぞれ $\forall x \in A(\neg(xRx))$，$\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$，$\forall x, y \in A(xRy \vee yRx \vee x = y)$ であり，これらは全称量化の範囲を A から X に制限しても当然成り立つ．したがって，これらの性質は X に遺伝する．また，R が A 上で整礎的であるとすると，A の任意の空でない部分集合は R-極小な元をもち，特に X の任意の空でない部分集合も R-極小な元をもつ．したがって，整礎性は X に遺伝する．よって，R が A を整列順序付けるならば，R は X を整列順序付ける． □

解答 I.7.23　$<$ と $\prec$ をそれぞれ関係とし，それらの辞書式積を $\lhd$ と置く．$<$ と $\prec$ がそれぞれ S と T を狭義に全順序付けるならば $\lhd$ が $S \times T$ を狭義に全順序付けることは，演習問題 I.7.13 で示した．あとは，$<$ と $\prec$ がそれぞれ S と T 上で整礎的であるとして，$\lhd$ が $S \times T$ 上で整礎的であることを示せばよい．

$S \times T$ の空でない部分集合 X を任意にとる．$\mathrm{dom}(X) = \{x \in S : \exists y \in T(\langle x, y\rangle \in X)\}$ は S の空でない部分集合だから，この中から $<$-極小な元 x_0 がとれる．次いで，$x_0 \in \mathrm{dom}(X)$ より $\{y \in T : \langle x_0, y\rangle \in X\}$ は T の空でない部分集合だから，この中なら $\prec$-極小な元 y_0 がとれる．すると，$\langle x_0, y_0\rangle$ は X において $\lhd$-極小である．実際，任意の $\langle x, y\rangle \in X$ に対して，x_0 のとり方より $x \not< x_0$ であり，また $x = x_0$ ならば，y_0 のとり方より $y \not\prec y_0$ であるから，$\langle x, y\rangle \not\lhd \langle x_0, y_0\rangle$ である．よって，$\lhd$ は $S \times T$ 上で整礎的である． □

I.8　順序数

解答 I.8.10　前半は後半の特別な場合だから，後半のみを示す．

X を順序数からなる空でない集合とする．定理 I.8.5 (4) より，X は最小元 α をもつ．このとき，$\alpha \in X$ より $\bigcap X \subseteq \alpha$ である，また，α の最小性と補題 I.8.8 より，任意の $\xi \in X$ に対して $\alpha \subseteq \xi$ だから，$\alpha \subseteq \bigcap X$ である．よって，$\bigcap X$ は X の最小元 α に等しい．

X を順序数からなる集合とする[*2]．まず，$\bigcup X$ が順序数であることを示す．$x \in \bigcup X$ とすると，ある $\alpha \in X$ が存在して $x \in \alpha$ となる．α は順序数，したがって推移的集合だから，$x \in \alpha$ より $x \subseteq \alpha \subseteq \bigcup X$ を得る．よって，$\bigcup X$ は推移的集合である．また，$\bigcup X$ の元はある順序数 $\alpha \in X$ の元であり，したがって補題 I.8.6 よりそれ自身順序数である．すなわち，$\bigcup X$ は順序数からなる集合である．よって，定理 I.8.5 (4) より，$\bigcup X$ の任意の空でない部分集合は最小元をもつ．以上より，$\bigcup X$ は順序数である．さらに，順序数どうしの $\leq$ 関係が包含関係に他ならないこと（補題 I.8.8）に注意すると，$\bigcup X$ は $\forall \xi \in X(\xi \leq \alpha)$ を満たす最小の順序数 α であることがわかる．すなわち，$\bigcup X$ は X の上限である． □

解答 I.8.11　α を順序数として，$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ が順序数であることを示す．まず，$\beta \in S(\alpha)$ とすると，$\beta \in \alpha$ または $\beta = \alpha$ だから，前者の場合は α が推移的集合であることより，後者の場合は自明に $\beta \subseteq S(\alpha)$ を得る．よって，$S(\alpha)$ は推移的集合である．次に，X を $S(\alpha)$ の空でない部分集合とする．$X = \{\alpha\}$ ならば，明らかに α が X の最小元である．そうでないとすると $X \cap \alpha \neq \emptyset$ だから，α が順序数であることより，$X \cap \alpha$ は最小元 β をもつ．この β は α の元，すなわち $\beta < \alpha$ だから，β は X の最小元でもある．いずれにしても，X は最小

[*2] $\bigcup X = \sup X$ は，X が空であっても成り立つ．

元をもつ．以上より，$S(\alpha)$ は順序数である．

順序数 γ に対して，$\gamma < S(\alpha)$ とは $\gamma \in S(\alpha)$，すなわち $\gamma \in \alpha \vee \gamma = \alpha$ のことであり，これは $\gamma \leq \alpha$ そのものである． □

解答 I.8.13 n を自然数とする．すると，n 以下の順序数はすべて 0 または後続型順序数だから，任意の $\alpha \leq n$ に対して，当然 α 以下の順序数もすべて 0 または後続型順序数である．よって，任意の $\alpha \leq n$ は自然数である．特に，n の元はまた自然数である．

$\alpha \leq S(n)$ とすると，$\alpha = S(n)$ または $\alpha \leq n$ である（演習問題 I.8.11）．前者の場合は明らかに，後者の場合は n が自然数であることより，α は 0 または後続型順序数である．よって，$S(n)$ は自然数である． □

解答 I.8.22 定理 I.8.19 より，A は順序数 α であり，R は $<$ であるとしても一般性を失わない．$\delta = \mathrm{type}(X; <)$ と置くと，$(X; <)$ から $(\delta; <)$ の上への同型写像 f がとれる．いま，$\forall \xi \in X (f(\xi) \leq \xi)$ が成り立たないとすると，$<$ が X を整列順序付けていることより，$f(\xi) > \xi$ なる $\xi \in X$ の中で最小のもの ξ_0 がとれる．f は同型写像だから，$f(\xi_0) > \xi_0$ より $\xi_0 > f^{-1}(\xi_0)$ である．したがって，ξ_0 の最小性より，$\xi_0 = f(f^{-1}(\xi_0)) \leq f^{-1}(\xi_0)$ である．ところが，これは $\xi_0 > f^{-1}(\xi_0)$ に反する．よって，背理法より，$\forall \xi \in X (f(\xi) \leq \xi)$ が成り立つ．

f は上への同型射像だったから，$\forall \eta \in \delta \exists \xi \in X (\eta \leq \xi)$ となる．一方で，$X \subseteq \alpha$ だったから，$\forall \xi \in X (\xi < \alpha)$ である．よって，$\forall \eta \in \delta (\eta < \alpha)$ となる．これは $\delta \leq \alpha$ を意味する． □

解答 I.8.23 □

I.9 順序数についての帰納法と再帰

解答 I.9.6 (1) $x = \bigcup^0 x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ だからよい．

(2) $y \in \mathrm{trcl}(x)$ とすると，ある $n \in \omega$ が存在して $y \in \bigcup^n x$ となるが，このとき $y \subseteq \bigcup \bigcup^n x = \bigcup^{n+1} x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ である．よって，$\mathrm{trcl}(x)$ は推移的集合である．

(3) t が x を含む推移的集合であるとする．任意の $n \in \omega$ に対して $\bigcup^n x \subseteq t$ であることを，通常帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$\bigcup^0 x = x \subseteq t$ である．n のときに成り立つと仮定すると，$\bigcup^n x \subseteq t$ であり，t は推移的集合だから $\bigcup^{n+1} x = \bigcup \bigcup^n x \subseteq t$ となり，$n+1$ のときにも成り立つ．これで，任意の $n \in \omega$ に対して $\bigcup^n x \subseteq t$ であり，したがって $\mathrm{trcl}(x) \subseteq t$ であることが示された．

(4) $y \in x$ とする．任意の $n \in \omega$ に対して $\bigcup^n y \subseteq \bigcup^{n+1} x$ であることを，通常帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$y \in x$ より $\bigcup^0 y = y \subseteq \bigcup x = \bigcup^1 x$ である．n のときに成り立つと仮定すると，$\bigcup^n y \subseteq \bigcup^{n+1} x$ より $\bigcup^{n+1} y = \bigcup \bigcup^n y \subseteq \bigcup \bigcup^{n+1} x = \bigcup^{n+2} x$ となり，$n+1$ のときにも成り立つ．これで，任意の $n \in \omega$ に対して $\bigcup^n y \subseteq \bigcup^{n+1} x$ であり，したがって $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ であることが示された．

(5) 任意の $n \in \omega$ に対して $z \in \bigcup^n x$ と「z から x への長さ $n+1$ の $\in$-経路（フォーマルには，$n+2$ の上の写像 s であって，$s(0) = z$，$s(n+1) = x$ かつ $\forall i < n+1 (s(i) \in s(i+1))$ を満たすもの）が存在すること」とが同値であることを，通常帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$z \in \bigcup^0 x$ すなわち $z \in x$ とは，z から x への長さ 1 の $\in$-経路が存在することに他ならない．n のときに成り立つと仮定し，$n+1$ のときを考える．$z \in \bigcup^{n+1} x$ は，ある $y \in \bigcup^n x$ が存在して $z \in y$ となることと同値である．ここで，帰納法の仮定より，$y \in \bigcup^n x$ は y から x への長さ $n+1$ の $\in$-経路が存在することと同値だった．よって結局，$z \in \bigcup^{n+1} x$ は z から x への長さ $n+2$ の $\in$-経路が存在することと同値であり，結論は $n+1$ のときにも成り立つ．これで，任意の $n \in \omega$ に対して $z \in \bigcup^n x$ と「z から x への長さ $n+1$ の $\in$-経路が存在すること」とが同値であり，したがって $z \in \mathrm{trcl}(x)$ と

「z から x への $\in$-経路が存在すること」が同値であることが示された． □

I.10　冪集合

解答 I.10.5　直積集合は

$$A \times B = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \exists x \in A \exists y \in B(z = \langle x, y \rangle)\},$$

商集合は

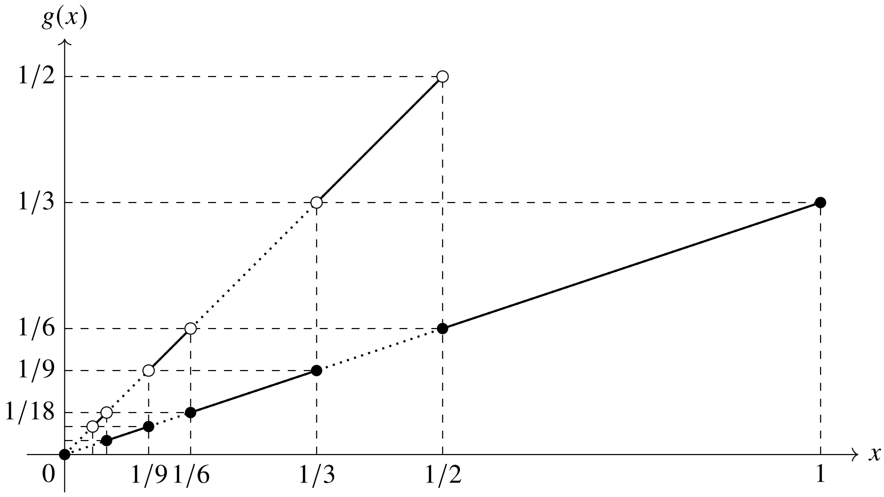
$$A/R = \{X \in \mathcal{P}(A) : \exists x \in A(X = [x])\}$$

と定義すればよい． □

I.11　基数

解答 I.11.3*　$(0,1)$ から $\mathbb{R}$ への全単射として $x \mapsto \tan(\pi(x-1/2))$ がとれるから, $(0,1) \approx \mathbb{R}$, $(0,1)\times(0,1) \approx \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ である．また，$\langle x, y \rangle \in (0,1) \times (0,1)$ に対して，$x = 0.a_1a_2\dots$，$y = 0.b_1b_2\dots$ と十進無限小数で表し（ただし，途中から 9 のみが続くことはないようにする），$z = 0.a_1b_1a_2b_2\dots$ なる $(0,1)$ の元を与える対応は，$(0,1) \times (0,1)$ から $(0,1)$ への単射である．よって，$(0,1) \times (0,1) \preccurlyeq (0,1)$ である． □

解答 I.11.6*　(前半)　g のグラフは，次のとおりである．



(後半)　不連続点を有限個しかもたない全単射 $h\colon [0,1] \to [0,1/2)$ がとれたと仮定する．すると，$[0,1]$ を $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ と有限個の小区間に分割して，$i = 0, \dots, n-1$ に対して h が (a_i, a_{i+1}) 上では連続であるようにできる．区間上の連続単射は狭義単調だから，h の (a_i, a_{i+1}) 上での下限・上限をそれぞれ s_i, t_i と置くと，$s_i, t_i \in [0, 1/2,]$ かつ $s_i < t_i$ であり，$h[(a_i, b_i)] = (s_i, t_i)$ である．さらに，(s_i, t_i) どうしは互いに交わらない．そこで，適切な置換 $\sigma\colon \{0, \dots, n-1\} \to \{0, \dots, n-1\}$ をとれば,

$$0 \le s_{\sigma(0)} < t_{\sigma(0)} \le s_{\sigma(1)} < t_{\sigma(1)} \le \dots \le s_{\sigma(n-1)} < t_{\sigma(n-1)} \le 1/2$$

となる．さて，h は $X = [0,1] \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1}(a_i, a_{i+1}) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ から $Y = [0,1/2) \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1}(s_i, t_i)$ への全単射を与えているはずである．X は有限だから，そのためにはまず，Y も有限でなければならない．したがって，$0 = s_{\sigma(0)}$，$t_{\sigma(n-1)} = 1/2$ かつ $i = 0, \ldots, n-2$ に対して $t_{\sigma(i)} = s_{\sigma(i+1)}$ である．ところが，このとき $Y = \{0, s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(n-1)}\}$ だから $|Y| = n$ であり，$|X| = n+1$ なる X との間に全単射は存在せず，矛盾である．よって，背理法より，$[0,1]$ から $[0,1/2)$ の上へのどんな全単射も，無限個の不連続点をもつ． □

解答 I.11.12　$A \preccurlyeq B$ かつ $C \preccurlyeq D$ とすると，単射 $f\colon A \to B$，$g\colon C \to D$ がとれる．$C \neq \emptyset$ だから $D \neq \emptyset$ であり，したがって $d \in D$ を 1 つ固定できる．$h \in {}^{A}C$ に対して $s(h) \in {}^{B}D$ を，$f[A]$ 上では $g \circ h \circ f^{-1}$ に一致し，$B \setminus f[A]$ 上では常に値 d をとる写像と定めると，$s\colon {}^{A}C \to {}^{B}D$ は単射である．よって，${}^{A}C \preccurlyeq {}^{B}D$ である． □

解答 I.11.15　(1)　演習問題 I.8.22 そのものである．

(2)　$B \preccurlyeq \alpha$ とすると，単射 $f\colon B \to \alpha$ がとれる．$f[B] \subseteq \alpha$ だから，(1) より $\delta = \mathrm{type}(f[B]; \in) \leq \alpha$ である．この δ について，$B \approx f[B] \approx \delta$ が成り立つ．

(3)　$\beta \leq \gamma$ より $\beta \subseteq \gamma$ である（補題 I.8.8）．一方で，$\alpha \leq \beta$ より $\alpha \subseteq \beta$ だから（補題 I.8.8），$\alpha \approx \gamma$ と合わせて $\gamma \preccurlyeq \beta$ を得る．よって，補題 I.11.4 より $\beta \approx \gamma$ であり，$\alpha \approx \gamma$ と合わせて $\alpha \approx \beta \approx \gamma$ を得る． □

解答 I.11.19　A が順序型 α に整列順序付けられるとは，関係 R と $(A; R)$ から $(\alpha; <)$ の上への同型写像 f が存在することをいう．これが成り立つとき，f は A から α への全単射である．逆に，全単射 $f\colon A \to \alpha$ が存在するとき，関係 R を $R = \{\langle x, y\rangle \in A \times A : f(x) < f(y)\}$ と定めれば，f は $(A; R)$ から $(\alpha; <)$ の上への同型写像となる．よって，A が順序型 α に整列順序付けられることと，全単射 $f\colon A \to \alpha$ が存在することとは同値である．

後半の主張は，前半の主張と定理 I.8.19 から従う． □

解答 I.11.21　A が整列可能であり，$f\colon A \to B$ が全射であるとする．A を整列順序付ける関係 R をとる．$y \in B$ に対して，$f^{-1}[\{y\}]$ は A の空でない部分集合だから，$f^{-1}[\{y\}]$ は R-最小元を（一意に）もつ．そこで，この R-最小元を $g(y)$ と定めることで，単射 $g\colon B \to A$ が得られる．g は B から A の部分集合への全単射を与え，A の部分集合は R によって整列順序付けられるから（演習問題 I.7.21），B は整列可能である．

$A \approx |A|$ であり，上のとおり $B \preccurlyeq A$ だから，$B \preccurlyeq |A|$ である．よって，演習問題 I.11.15 (2) より，ある $\delta \leq |A|$ が存在して $B \approx \delta$ である．$|B|$ とは B との間に全単射が存在するような順序数のうち最小のものだったから，これより $|B| \leq \delta \leq |A|$ である．[*3] □

解答 I.11.22　κ は基数であって，B は空でないとする．$B \preccurlyeq \kappa$ とすると，単射 $g\colon B \to \kappa$ がとれる．B は空でないから，$b \in B$ を 1 つ固定できる．$f\colon \kappa \to B$ を，$g[B]$ 上では g^{-1} に一致し，$\kappa \setminus g[B]$ 上では常に値 b をとる写像と定めると，f は全射である．[*4]

逆に，全射 $f\colon \kappa \to B$ が存在するとする．κ は $<$ によって整列順序付けられているから，解答 I.11.21 で見たように，B から κ への単射がとれる．すなわち，$B \preccurlyeq \kappa$ である． □

解答 I.11.23　A と B はいずれも整列可能であるとする[*5]．

[*3] 先に演習問題 I.11.23 の 3 番目の主張を示しておけば，この議論は省略できる．

[*4] 「$B \preccurlyeq \kappa$ ならば全射 $f\colon \kappa \to B$ が存在する」は，B が空でなければ，κ が基数でなく一般の集合であっても成り立つ．

[*5] $A \preccurlyeq B$ ならば，A と B の部分集合との間に全単射が存在するから，演習問題 I.7.21 より，B が整列可能ならば A も整列可能である（解答 I.11.21 でも同じ議論をした）．よって，2, 3, 4 番目の主張の左から右を導くにあたっては，B が整列可能であるとだけしても十分である．

(1 番目の主張)　$|A|$ は，A との間に全単射が存在するような順序数のうち最小のものだったから，その最小性より，任意の $\beta < |A|$ に対して $\beta \not\approx |A|$ である．一方で，$\beta < |A|$ ならば $\beta \subseteq |A|$（補題 I.8.8），したがって $\beta \preccurlyeq |A|$ である．これら 2 つから，$\beta \prec |A|$ となる（定義 I.11.7 の後の注意書きを参照のこと）．よって，$|A|$ は基数である．

(2 番目の主張)　$A \preccurlyeq B$ とすると，$B \approx |B|$ と合わせて $A \preccurlyeq |B|$ である．よって，演習問題 I.11.15 (2) より，ある $\delta \leq |B|$ が存在して $A \preccurlyeq \delta$ である．$|A|$ とは A との間に全単射が存在するような順序数のうち最小のものだったから，これより $|A| \leq \delta \leq |B|$ である．

(3 番目の主張)　$A \approx B$ ならば，順序数に対して，A との間に全単射が存在することと B との間に全単射が存在することとは同値になるから，$|A| = |B|$ である．逆に，$|A| = |B|$ ならば，$A \approx |A|$，$B \approx |B|$ と合わせて $A \approx B$ を得る．

(4 番目の主張)　$A \prec B$ は $A \preccurlyeq B$ かつ $A \not\approx B$ と同値だから（定義 I.11.7 の後の注意書きを参照のこと），結論は上の 2, 3 番目の主張から従う．　□

解答 I.11.24　A が有限であるとは，ある $n \in \omega$ が存在して $A \preccurlyeq n$ となることであった．このとき，演習問題 I.11.23 の 2 番目の主張（解答 I.11.23 の脚注も参照のこと）より，A は整列可能であって $|A| \leq |n| \leq n < \omega$ である[*6]．逆に，A が整列可能であって $|A| < \omega$ ならば，$A \approx |A| \in \omega$ だから，A は有限である．　□

解答 I.11.25　まず，m, n が自然数ならば，その和 $m + n$ と積 $m \cdot n$ も自然数であることを注意しておく．このことは，和については，p. 58 の表 I.1 の「再帰的な計算」と演習問題 I.8.13 の前半に注意すれば，通常帰納法により示される．また，積については，「再帰的な計算」と和についての結果に注意すれば，やはり通常帰納法により示される．

A, B は有限で $m = |A|$，$n = |B|$ であるとする．演習問題 I.11.24 より，m, n は自然数である．

(和について)　写像 $f\colon A \cup B \to \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ を，$x \in A$ に対しては $f(x) = \langle 0, x\rangle$，$y \in B$ に対しては $f(y) = \langle 1, y\rangle$ と定めると，これは単射だから，$A \cup B \preccurlyeq \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ である．また，$A \approx m$，$B \approx n$ と順序数の和の定義より，$\{0\} \times A \cup \{1\} \times B \approx \{0\} \times m \cup \{1\} \times n \approx m + n$ である．これら 2 つより $A \cup B \preccurlyeq m + n$ を得る．$m + n$ は自然数だから，$A \cup B$ は有限である．また，演習問題 I.11.23 の 2 番目の主張（解答 I.11.23 の脚注も参照のこと）より，$A \cup B$ は整列可能であって，$|A \cup B| \leq |m + n| = m + n$ である（最後の式変形で，$m + n$ は自然数であり，したがって定理 I.11.17 (2) より基数であることを用いた）．

等号成立条件が $A \cap B = \emptyset$ であることを示す．$A \cap B = \emptyset$ であれば，上で定義した $f\colon A \cup B \to \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ は全単射となるから，上の議論を繰り返すことにより，$|A \cup B| = m + n$ を得る（演習問題 I.11.23 の 2 番目の主張の代わりに，同演習問題の 3 番目の主張を用いる）．逆に，$A \cap B \neq \emptyset$ とすると，上で定義した $f\colon A \cup B \to \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ は全射でない単射だから，上の議論を繰り返すことにより，$A \cup B$ から $m + n$ への全射でない単射が得られる．そこで，$l = |A \cup B|$（すでに示したように $l \leq m + n$ だから，l は自然数）と置くと，全射でない単射 $g\colon l \to m + n$ が存在する．g は全射でないから，$x \in (m + n) \setminus g[l]$ がとれる．これを用いて，l 上では g に一致し l には値 x を対応させる写像を考えると，これは $S(l)$ から $m + n$ への単射である．演習問題 I.8.13 と定理 I.11.17 (2) より $S(l), m + n$ はともに基数だから，演習問題 I.11.23 の 3 番目の主張と合わせて，$S(l) = |S(l)| \leq |m + n| = m + n$，したがって演習問題 I.8.11 より $|A \cup B| = l < m + n$ である．これで示された．

[*6] 自然数は基数（定理 I.11.17 (2)）だから $|n| = n$ であるが，ここでは，任意の順序数 α に対して明らかに成り立つ式 $|\alpha| \leq \alpha$ を用いるだけで十分である．

（積について）　$A \approx m$，$B \approx n$ と順序数の積の定義より，$A \times B \approx m \times n \approx m \cdot n$ である．$m \cdot n$ は自然数だから，$A \times B$ は有限である．また，演習問題 I.11.23 の 3 番目の主張（解答 I.11.23 の脚注も参照のこと）より，$A \times B$ は整列可能であって，$|A \times B| = |m \cdot n| = m \cdot n$ である（最後の式変形で，$m \cdot n$ は自然数であり，したがって定理 I.11.17 (2) より基数であることを用いた）．　□

解答 I.11.28　α を順序数とする．基数 κ に対して，$\kappa \not\preccurlyeq \alpha$ ならば $\kappa \not\subseteq \alpha$ だから $\alpha < \kappa$ であり（補題 I.8.8），逆に $\alpha < \kappa$ ならば基数の定義より $\alpha \prec \kappa$ だから $\kappa \not\preccurlyeq \alpha$ である．よって，α^+ は α より大きい最小の基数である．

演習問題 I.8.11 より，$S(\alpha) = \alpha + 1$ は α よりも大きい順序数のうち最小のものだから，$\alpha^+ \geq \alpha + 1$ である．$\alpha < \omega$ ならば，$S(\alpha) = \alpha + 1$ は自然数，したがって基数だから（演習問題 I.8.13，定理 I.11.17 (2)），演習問題 I.8.11 より $\alpha^+ = \alpha + 1$ となる．$\alpha \geq \omega$ ならば，定理 I.11.17 (1) より $\alpha + 1$ が基数になることはないから，$\alpha^+ > \alpha + 1$ である．　□

解答 I.11.29　記号は定理 I.11.26 の証明のとおりとする．β 未満の順序数 α を任意にとる．すると，β の定義より，ある $\langle X, R \rangle \in W$ が存在して $\alpha < \mathrm{type}(X; R) + 1$，すなわち $\alpha \leq \mathrm{type}(X; R)$ である．したがって，$\alpha \preccurlyeq X \preccurlyeq A$ である．一方で $\beta \not\preccurlyeq A$ だったから，$\alpha \not\approx \beta$ となる．よって，β は基数である．

β は基数だから，$\beta = |\beta| = \kappa$ である．次に，$\beta = \aleph(A)$ を示す．そのためには，基数 λ が $\lambda \not\preccurlyeq A$ を満たすとして，$\lambda \geq \beta$ をいえばよい．ある $\langle X, R \rangle \in W$ について $\lambda \leq \mathrm{type}(X; R)$ となったと仮定すると，$\lambda \preccurlyeq X \preccurlyeq A$ となってしまう．したがって，$\lambda \not\preccurlyeq A$ ならば任意の $\langle X, R \rangle \in W$ に対して $\lambda \geq \mathrm{type}(X; R) + 1$，すなわち $\lambda \geq \beta$ である．これで示された．　□

解答 I.11.31　（前半）　ξ を固定し，$\zeta > \xi$ に関する超限帰納法で $\aleph_\xi < \aleph_\zeta$ を示す．$\zeta = \xi + 1$ のとき，$\aleph_\zeta = \aleph_\xi^+ > \aleph_\xi$ より結論は成り立つ．ζ に対して結論が成り立つとすると，$\aleph_{\zeta+1} = \aleph_\zeta^+ > \aleph_\zeta > \aleph_\xi$ より，結論は $\zeta + 1$ に対しても成り立つ．$\zeta > \xi$ を極限順序数とすると，$\zeta > \xi + 1$ だから，$\aleph_\zeta = \sup_{\alpha<\zeta} \aleph_\alpha \geq \aleph_{\xi+1} > \aleph_\xi$ より結論は ζ に対して成り立つ．これで，任意の $\zeta > \xi$ に対して $\aleph_\xi < \aleph_\zeta$ が成り立つことが示された．

（後半）　任意の順序数 ξ に対して $\aleph_\xi$ が無限基数であることは，$(-)^+$ の定義と定理 I.11.17 (3) から，ξ に関する超限帰納法でわかる．あとは，任意の無限基数が $\aleph_\xi$ の形に書けることを示せばよい．

準備として，任意の順序数 α に対して $\alpha \leq \aleph_\alpha$ であることを，超限帰納法で示す．$\alpha = 0$ のとき，結論は明らかである．α に対して結論が成り立つとすると，$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+ \geq \aleph_\alpha + 1 \geq \alpha + 1$ より，結論は $\alpha + 1$ に対しても成り立つ．α が極限順序数であり，α 未満に対しては結論が成り立つとすると，$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\} \geq \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$ より，結論は α に対しても成り立つ．これで，任意の順序数 α に対して $\alpha \leq \aleph_\alpha$ であることが示された．

無限基数 κ を任意にとる．上の準備からわかるとおり，$\aleph_\alpha \geq \kappa$ を満たす順序数 α は必ず存在するから，そのような α の中で最小のもの ξ がとれる．すると，定義より $\aleph_\xi \geq \kappa$ である．以下，$\aleph_\xi \leq \kappa$ を示す．$\xi = 0$ の場合，κ は無限基数だから，明らかに結論は成り立つ．ξ が後続型順序数の場合，$\xi = \eta + 1$ と置くと，ξ の最小性より $\aleph_\eta < \kappa$ だから，$\aleph_\xi = \aleph_\eta^+ \leq \kappa$ である．ξ が極限順序数の場合，ξ の最小性より任意の $\eta < \xi$ に対して $\aleph_\eta < \kappa$ だから，$\aleph_\xi = \sup\{\aleph_\eta : \eta < \xi\} \leq \kappa$ である．よって，いずれにしても，$\aleph_\xi \leq \kappa$ となる．これで，$\kappa = \aleph_\xi$ が示された．　□

解答 I.11.33　（前半）　解答 I.11.31 の後半の準備で見たように $\delta_1 = \aleph_{\delta_0} \geq \delta_0$ だから，$\gamma = \sup\{\delta_n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$ である．演習問題 I.11.31 の後半より $n \in \omega \setminus \{0\}$ に対して δ_n は無限基数だから，その上限で書けている γ も無限基数（定理 I.11.17 (3)），特に極限順序数である．よって $\aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\}$ であり，アレフ系列の単

調性（演習問題 I.11.31 の前半）と合わせて

$$\aleph_\gamma = \sup\{\aleph_{\delta_n} : n \in \omega\} = \sup\{\delta_{n+1} : n \in \omega\} = \gamma$$

を得る．

(後半)　$\delta = 0$ とする[*7]．$\alpha < \gamma$ を任意にとる．すると，$\alpha < \delta_n$ なる $n \in \omega$ の中で最小のものがとれる．この n について，明らかに $n \neq 0$ だから，$n = m + 1$ なる $m \in \omega$ がとれる．n の最小性より $\delta_m \leq \alpha < \delta_{m+1}$ だから，アレフ系列の単調性（演習問題 I.11.31 の前半）と合わせて $\aleph_\alpha \geq \aleph_{\delta_m} = \delta_{m+1} > \alpha$ を得る．よって，任意の $\alpha < \gamma$ に対して $\alpha < \aleph_\alpha$ である．これで，γ の最小性が示された．　□

解答 I.11.34　α, β を順序数とする．[*8]

(和について)　$\max(\alpha, \beta) \geq \omega$ として，$|\alpha + \beta| = \max(|\alpha|, |\beta|)$ を示す．$\alpha \geq \beta$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，$\max(|\alpha|, |\beta|) = |\alpha|$ である．$\alpha + \beta = \mathrm{type}(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta)$ だから，$\alpha \approx \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$ を示せばよい．α から $\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$ への単射として $\xi \mapsto \langle 0, \xi \rangle$ がとれるから，$\alpha \preccurlyeq \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$ である．一方で，仮定より $\alpha \geq \omega$ だから，定理 I.11.32 より

$$\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta \preccurlyeq \alpha \times \alpha \approx \alpha$$

である．よって，$\alpha \approx \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$ である（定理 I.11.5）．

(積について)　$\max(\alpha, \beta) \geq \omega$ かつ $\min(\alpha, \beta) \geq 1$ として，$|\alpha \cdot \beta| = \max(|\alpha|, |\beta|)$ を示す．$\alpha \geq \beta$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，$\max(|\alpha|, |\beta|) = |\alpha|$ である．$\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\beta \times \alpha)$ だから，$\alpha \approx \beta \times \alpha$ を示せばよい．α から $\beta \times \alpha$ への単射として $\xi \mapsto \langle 0, \xi \rangle$ がとれるから（$\beta \geq 1$ に注意），$\alpha \preccurlyeq \beta \times \alpha$ である．一方で，仮定より $\alpha \geq \omega$ だから，定理 I.11.32 より

$$\beta \times \alpha \preccurlyeq \alpha \times \alpha \approx \alpha$$

である．よって，$\alpha \approx \beta \times \alpha$ である（定理 I.11.5）．

(冪について)　まず，順序数 α と $\beta \geq 1$ に対して $\alpha^\beta \geq \alpha$ であることを，β に関する超限帰納法で示す．$\beta = 1$ のとき，$\alpha^1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ より成り立つ．β に対して成り立つとすると，$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha \geq \alpha \cdot \alpha \geq \alpha$ だから，$\beta + 1$ に対しても成り立つ．β が極限順序数のとき，$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta\} \geq \alpha^1 = \alpha$ より成り立つ．これで示された．

次に，順序数 $\alpha \geq 2$ と β に対して $\alpha^\beta \geq \beta$ であることを，β に関する超限帰納法で示す．$\beta = 0$ のとき，$\alpha^0 = 1 > 0$ より成り立つ．β に対して成り立つとすると，単射 $f \colon \beta \to \alpha^\beta$ がとれる．これを用いて，$g(\xi) = \langle f(\xi), 0 \rangle$（$\xi \in \beta$）かつ $g(\beta) = \langle 0, 1 \rangle$ と定めることで，単射 $g \colon \beta + 1 \to \alpha^\beta \times \alpha$ が得られる（$\alpha \geq 2$ であり，$\beta = 0$ なら明らかに，そうでなければ帰納法の仮定より $\alpha^\beta \geq 1$ であることに注意）．よって $\beta \leq \alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^{\beta+1}$ であり，結論は $\beta + 1$ に対しても成り立つ．極限順序数 β 未満では結論が成り立つとすると，$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta\} \geq \sup\{\xi : \xi < \beta\} = \beta$ だから，結論は β に対しても成り立つ．これで示された．

以上より，$\alpha \geq 2$ かつ $\beta \geq 1$ ならば $\alpha^\beta \geq \max(\alpha, \beta)$，したがって $|\alpha^\beta| \geq \max(|\alpha|, |\beta|)$ である．

最後に，$\max(\alpha, \beta) \geq \omega$ として，$|\alpha^\beta| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ を示す．そのためには，任意の無限順序数 δ に対して，$\alpha, \beta \leq \delta$ ならば $\alpha^\beta \preccurlyeq \delta$ であることを示せばよい．無限順序数 δ と $\alpha \leq \delta$ を固定し，単射 $j \colon \delta \times \delta \to \delta$ を 1 つ

[*7] 以下の証明により，「$\alpha < \delta$ ならば $\alpha \neq \aleph_\alpha$」を満たす任意の順序数 δ に対して，同様の結果が成立することがわかる．

[*8] 以下の証明からわかるとおり，問題文の仮定 $\min(\alpha, \beta) \geq 2$ は，和については不要であり，積については $\min(\alpha, \beta) \geq 1$ で十分であり，冪については $\alpha \geq 2$ かつ $\beta \geq 1$ で十分である．

固定しておく（定理 I.11.32）．$\beta \le \delta$ に対して単射 $f_\beta \colon \alpha^\beta \to \delta$ を，次のように超限再帰的に定める[*9]：

- $f_0 \colon \alpha^0 = 1 \to \delta$ は包含写像とする．これは明らかに単射である．
- $\beta < \delta$ とし，単射 $f_\beta \colon \alpha^\beta \to \delta$ が定まったとする．写像 $f'_{\beta+1} \colon \alpha^\beta \times \alpha \to \delta$ を

  $$f'_{\beta+1}(\xi,\eta) = j(f_\beta(\xi),\eta)$$

  と定め，これと $\alpha^{\beta+1}$ から $\alpha^\beta \times \alpha$ への同型写像[*10] を合成したものを $f_{\beta+1} \colon \alpha^{\beta+1} \to \delta$ と定める．すると，$f'_{\beta+1}$ は単射であり，したがって $f_{\beta+1}$ も単射である．
- $\beta \le \delta$ を極限順序数とし，$\xi < \beta$ に対しては単射 $f_\xi \colon \alpha^\xi \to \delta$ が定まったとする．$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta\} = \bigcup_{\xi<\beta} \alpha^\xi$ に注意して，$\eta \in \alpha^\beta$ に対して

  $$h(\eta) = \min\{\xi < \beta : \eta \in \alpha^\xi\}$$

  と置き，写像 $f_\beta \colon \alpha^\beta \to \delta$ を，

  $$f_\beta(\eta) = j(h(\eta), f_{h(\eta)}(\eta))$$

  と定める．すると，f_β は単射である．

これで，$\alpha, \beta \le \delta$ ならば $\alpha^\beta \preccurlyeq \delta$ であることが示された． □

解答 I.11.35　集合 X とそれを整列順序付ける関係 R との組 $\langle X, R\rangle$ を，整列順序集合という．整列順序集合 $\langle X, R\rangle$ と $a \in X$ に対して，$X' = \{x \in X : xRa\}$ と置くとき，整列順序集合 $\langle X', R\rangle$ を $\langle X, R\rangle$ の a による切片という．次の事実に注意する（この事実は，$\mathrm{Z}^- - \mathrm{Inf}$ から示せる）．

> **整列順序集合の比較定理**　2 つの整列順序集合 $\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ について，$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ とが同型であるか，$\langle X, R\rangle$ が $\langle Y, S\rangle$ のある切片と同型であるか，$\langle Y, S\rangle$ が $\langle X, R\rangle$ のある切片と同型であるか，の 3 つの場合のうち，いずれかただ 1 つが成り立つ．

以上のことに関しては，内田 [4, pp. 38–40] を参照のこと．

定理 I.11.26 の証明と同様に，W を

$$W = \{\langle X, R\rangle \in \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) : R \subseteq X \times X \text{ かつ } R \text{ は } X \text{ を整列順序付ける}\}$$

と置く．また，$\cong$ を W 上の順序同型関係とし，$B = W/{\cong}$ と置く．（演習問題 I.10.5 より，直積集合や商集合は Z^- 集合論で作ることができることに注意する．）B 上の関係 $\lhd$ を，

$$[\langle X, R\rangle] \lhd [\langle Y, S\rangle] \iff \langle X, R\rangle \text{ は } \langle Y, S\rangle \text{ のある切片に同型である}$$

と定める（ここで，$[-]$ は $\cong$ による同値類を表す）．すると，$\lhd$ は B を整列順序付ける．このことを示そう．まず，整列順序集合の比較定理より，$\lhd$ は B を狭義に全順序付ける．次に，$\mathcal{A}$ を B の空でない部分集合とし

[*9] 選択公理の使用を回避するために，次の 2 点に注意する．(1) 最初に無限順序数 δ と単射 $j \colon \delta \times \delta \to \delta$ を固定しておくこと．これをしないと，再帰の各段階で j のような単射を選ばなければならず，選択公理が必要となってしまう．(2) 超限帰納法ではなく超限再帰で，各段階において単射を明示的に構成すること．超限帰納法で「任意の $\beta \le \delta$ に対して α^β から δ への単射が存在する」ことを示そうとすると，極限順序数の段階で「それ未満の帰納法の仮定」を一斉に使わなければならず，選択公理が必要となってしまう．

[*10] 同型写像 $g \colon \alpha^{\beta+1} \to \alpha^\beta \times \alpha$ のとり方は一意だから，この部分に選択公理は必要ない．

て，$\mathcal{A}$ が $\lhd$-最小元をもつことを示す．$\mathcal{A}$ は空でないから，$[\langle X_1, R_1\rangle] \in \mathcal{A}$（$\langle X_1, R_1\rangle \in W$）を 1 つ固定できる．$[\langle X_1, R_1\rangle]$ が $\mathcal{X}$ の $\lhd$-最小元ならば，示すべきことはなにもない．そうでなければ，

$$A = \{a \in X_1 : \text{ある } [\langle X, R\rangle] \in \mathcal{A} \text{ が存在して } \langle X, R\rangle \text{ は } \langle X_1, R_1\rangle \text{ の } a \text{ による切片と同型である}\}$$

は X_1 の空でない部分集合だから，R_1 が X_1 を整列順序付けていることより，A の R_1-最小元 a_0 がとれる．A の定義より，ある $[\langle X_0, R_0\rangle] \in \mathcal{A}$ が存在して $\langle X_0, R_0\rangle$ は $\langle X_1, R_1\rangle$ の a_0 による切片と同型である．a_0 の最小性より，この $[\langle X_0, R_0\rangle]$ は $\mathcal{A}$ の $\lhd$-最小元である．これで，$\lhd$ が B を狭義に全順序付けることが示された．

B が不可算であることを，背理法で示す．B が可算であると仮定すると，単射 $f\colon B \to \omega$ がとれる．f の値域を X，f によって B 上の整列順序 $\lhd$ を X 上にうつしたものを R と置くと，$\langle X, R\rangle \in W$，したがって $[\langle X, R\rangle] \in B$ である．X と R の定義より，$\langle B, \lhd\rangle$ は $\langle X, R\rangle$ に同型である．一方で，$\langle X, R\rangle$ は，$\langle B, \lhd\rangle$ の $[\langle X, R\rangle]$ による切片に同型である．実際，$x \in X$ に $[\langle X, R\rangle$ の x による切片$]$ を対応させる写像が同型写像となる．これら 2 つより，$\langle B, \lhd\rangle$ は $\langle B, \lhd\rangle$ の切片と同型ということになるが，これは整列順序集合の比較定理に反する．よって，背理法より，B は不可算である． □

解答 I.11.36* A を可算な集合，$\lhd$ を A を狭義に全順序付ける関係とする．A は可算だから，A は整列可能であって $\alpha = |A|$ は自然数または ω である（演習問題 I.11.23 の 2 番目の主張．解答 I.11.23 の脚注も参照のこと）．α から A への全単射 $n \mapsto a_n$ を 1 つ固定し，$A = \{a_n : n < \alpha\}$ と表す．写像 $f\colon A \to \mathbb{Q}$ を，次のように再帰的に定める[*11]．

- $f(a_0) = 0$ とする．
- $n \geq 1$ かつ $\forall i < n(a_i \lhd a_n)$ ならば，$f(a_n) = \max\{f(a_i) : i < n\} + 1$ とする．
- $n \geq 1$ かつ $\forall i < n(a_n \lhd a_n)$ ならば，$f(a_n) = \min\{f(a_i) : i < n\} - 1$ とする．
- $a_i \lhd a_n \lhd a_j$ なる $i, j < n$ が存在するならば，そのような a_i の中での $\lhd$-最大元を b，そのような a_j の中での $\lhd$-最小元を c と置き，$f(a_n) = (f(b) + f(c))/2$ とする．

すると，f の定義から，任意の $m \leq \alpha$ に対して f の $\{a_n : n < m\}$ への制限が順序を保つ単射であることが，通常帰納法で示される．特に $m = \alpha$ として，f は順序を保つ単射である．よって，$(A; \lhd)$ は $\mathbb{Q}$ の部分集合 $(f[A]; <)$ に同型である． □

解答 I.11.37* (4) → (1) → (2) 明らかである．

(2) → (3) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が（$\mathbb{R}$ 上の標準的な全順序 $<$ によって）整列順序付けられているとして，A が可算であることを示せばよい．A が整列順序付けられていることより，任意の $a \in A$ に対して自然数 $n \geq 1$ が存在し，開区間 $(a, a + 1/n)$ は A と交わらない．実際，$a \in A$ に対してそのような n がとれないとすると，A の空でない部分集合 $A \cap (a, \infty)$ は A において最小元をもたず，A が整列順序付けられていることに反する．そこで，$a \in A$ に対して，$(a, a + 1/n)$ が A と交わらないような自然数 $n \geq 1$ の中で最小のものを n_a と置ける[*12]．定義より，$a \in A$ に対する $(a, a + 1/n_a)$ は互いに交わらない．

さて，任意の $a \in A$ に対して $(a, a + 1/n_a) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ であり，$\mathbb{Q}$ は可算無限である（解答 I.15.8 を参照のこと）．そこで，全単射 $f\colon \omega \to \mathbb{Q}$ を 1 つ固定し，

$$g(a) = \min\{n \in \omega : f(n) \in (a, a + 1/n_a)\}$$

[*11] ここで，全順序集合の空でない有限部分集合は必ず最大元・最小元をもつことに注意する．このことは，通常帰納法で証明できる．

[*12] 「最小のもの」と指定することで，選択公理の使用を回避している

と定めれば，g は A から ω への単射である．よって，A は可算である．

(3) → (4)　0 以上の有理数の全体のなす集合を $\mathbb{Q}_{\geq 0}$，0 以上の実数の全体のなす集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と書くことにする．写像 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)$ を，$f(x) = x/(x+1)$ と定める．f は同相写像であり，順序を保ち，$\mathbb{Q}_{\geq 0}$ を $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ にうつす．

可算順序数 δ を任意にとり，単射 $j\colon \omega \to \delta$ を 1 つ固定する．順序数 $\alpha \leq \delta$ に対して，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ において閉集合であるような $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の部分集合であって α と同型であるもの A_α を，次のように超限再帰的に定める[*13]：

- $A_0 = \emptyset$ とする．
- $\alpha < \delta$ とし，A_α が条件を満たすように定まったとする．このとき，$A_{\alpha+1} = f[A_\alpha] \cup \{1\}$ と定める．$A_{\alpha+1}$ は $\alpha+1$ と同型な $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の部分集合である．さらに，$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)$ は同相写像だから $f[A_\alpha]$ は $[0,1)$ の閉集合であり，したがって $A_{\alpha+1}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の閉集合である．
- $\alpha \leq \delta$ を極限順序数とし，$\xi < \alpha$ に対して A_ξ が条件を満たすように定まったとする．$\mathbb{R}_{\geq 0}$ の閉集合 B を，
$$B = \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} (f[A_\xi] + j(\xi))}$$
と定める．ここで，$f[A_\xi] + j(\xi)$ は $f[A_\xi]$ を $j(\xi)$ だけ平行移動させた集合を，上線は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ における閉包を表す．$\{f[A_\xi] + j(\xi)\}_{\xi<\alpha}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ において局所有限だから，$B = \bigcup_{\xi<\alpha} \overline{f[A_\xi] + j(\xi)}$ である．また，$f[A_\xi] + j(\xi)$ は $[j(\xi), j(\xi)+1)$ の閉集合だから，$\overline{f[A_\xi] + j(\xi)}$ は $f[A_\xi] + j(\xi)$ またはこれに 1 点 $j(\xi)+1$ を加えたものである．よって，B は $\bigcup_{\xi<\alpha}(f[A_\xi] + j(\xi))$ に $\omega \setminus \{0\}$ の何点かを加えたものであり，$\mathbb{Q}_{\geq 0}$ に含まれる．また，このことと各 $f[A_\xi]$ が整列順序集合であることから，B も整列順序集合であることがわかる．
任意の $\xi < \alpha$ に対して，B は ξ と同型な整列順序集合を含むから，$\mathrm{type}(B; <) \geq \xi$ である（演習問題 I.8.22）．したがって，$\mathrm{type}(B; <) \geq \alpha$ である．$\mathrm{type}(B; <) = \alpha$ であれば，$A_\alpha = B$ と定める．すると，A_α は条件を満たす．そうでなければ，$\mathrm{type}(B \cap [0,b)) = \alpha$ なる $b \in B$ が一意に存在する．この b をとり，$B \cap [0,b)$ の $\mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,b); x \mapsto bf(x)$ による逆像を A_α と定める．すると，A_α は α と同型な $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の部分集合である．さらに，B は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の閉集合だから $B \cap [0,b)$ の閉集合であり，$\mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,b)$; $x \mapsto bf(x)$ は同相写像だから A_α は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の閉集合である．よって，いずれにしても，A_α は条件を満たす．

これで，順序数 $\alpha \leq \delta$ に対して，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ において閉集合であるような $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の部分集合であって α と同型であるもの A_α が構成できた．□

解答 I.11.38*　□

I.12　選択公理 AC

解答 I.12.6　$Y \subseteq X$ とするとき，X の任意の有限部分集合が $\mathcal{F}$ に属するならば，当然 Y の任意の有限部分集合も $\mathcal{F}$ に属する．よって，$\mathcal{F}$ が有限特性の集合族で $X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{F}$ である．□

解答 I.12.13　準備として，ω_1 は可算順序数全体の集合であることを示しておく．順序数 α に対して，$\alpha \in \omega_1$

[*13] 選択公理の使用を回避するために，解答 I.11.35 と同様の工夫をしている．解答 I.11.35 の脚注を参照のこと．

は $|\alpha| < \omega_1$ と同値であり（ω_1 が基数であることを用いた），これは $|\alpha| \leq \omega$ と同値である（ω_1 が ω より大きい最小の基数であることを用いた）．さらにこれは，$\alpha \preccurlyeq \omega$，すなわち α が可算であることと同値である（演習問題 I.11.23 と，ω が基数であること：定理 I.11.17 (4) を用いた）．これで示された．

定理 I.11.32 より $\omega \approx \omega \times \omega$ だから，$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathcal{P}(\omega \times \omega)$ である．そこで，$\mathcal{P}(\omega \times \omega)$ から ω_1 への全射を構成すればよい．写像 $f\colon \mathcal{P}(\omega \times \omega) \to \omega_1$ を，

$$f(R) = \begin{cases} \mathrm{type}(\omega; R) & (R \text{ が } \omega \text{ 上の整列順序}) \\ |R| & (R \text{ が有限}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定めると，f は全射であることを示す．まず，準備で示したとおり，すべての可算順序数は ω_1 の元だから，f は確かに ω_1 への写像である．次に，$\alpha \in \omega_1$ を任意にとる．α が自然数であれば，α は基数（定理 I.11.17）かつ $\alpha \times \{0\} \approx \alpha$ だから，$f(\alpha \times \{0\}) = |\alpha \times \{0\}| = \alpha$ である．一方で，α が可算無限順序数ならば $|\alpha| = \omega$ だから（α が可算であることより $|\alpha| \leq \omega$ が，無限であることより $|\alpha| \geq \omega$ がわかる），全単射 $f\colon \alpha \to \omega$ がとれる．そこで，α 上の関係 $<$ を f で ω に移したものを R と置けば，R は ω 上の整列順序であり，f は $(\alpha; <)$ から $(\omega; R)$ の上への同型写像だから，$f(R) = \mathrm{type}(\omega; R) = \alpha$ である．よって，f は全射である． □

解答 I.12.14* 対偶を示す．すなわち，「任意の正の実数 ϵ に対して，$E \subseteq X$ のどの相異なる 2 点の距離も ϵ より大きいならば，E は可算である」として，X が可分であることを示す．各 $n \in \omega$ に対して，

$$\mathcal{F}_n = \{E \subseteq X : E \text{ のどの相異なる 2 点の距離も } 2^{-n} \text{ より大きい}\}$$

と置くと，$\mathcal{F}_n$ は包含関係に関して帰納的な順序集合である．実際，鎖 $C \subseteq \mathcal{F}_n$ に対して，$\bigcup C$ は $\mathcal{F}_n$ に属し，C の上界を与える．よって，Zorn の補題より，極大元 $E_n \in \mathcal{F}_n$ がとれる（$n \mapsto E_n$ なる対応を選ぶ部分で選択公理を用いる）．仮定より，各 E_n は可算だから，定理 I.12.11（選択公理を用いる）より，$E = \bigcup_{n \in \omega} E_n$ も可算である．この E が X で稠密であることを示す．そうでないとすると，$x \in X \setminus E$ と $n \in \omega$ を，x を中心とする半径 2^{-n} の閉球が E と交わらないようにとれる．すると，$E_n \cup \{x\}$ も $\mathcal{F}_n$ に属することになるが，これは E_n の極大性に反する．よって，E は X で稠密であり，X は可分である． □

解答 I.12.15* X, Y をコンパクト Hausdorff 空間[*14]，$f\colon X \to Y$ を連続な全射とする．Zorn の補題より，X の部分集合族

$$\mathcal{F} = \{Z \subseteq X : Z \text{ は } X \text{ の閉集合，} f[Z] = Y\}$$

が包含関係の逆に関して帰納的な順序集合であることを示せば十分である．鎖 $C \subseteq \mathcal{F}$ に対して，$Z_0 = \bigcap C$（ただし，C のときは $Z_0 = X$ とする）が $\mathcal{F}$ に属することを示せばよい．まず，Z_0 は X の閉集合の共通部分だから，X の閉集合である．次に，$f[Z_0] = Y$ を示す．$y \in Y$ を任意にとる．f は連続だから $f^{-1}[\{y\}]$ は X の閉集合であり（Y の 1 点部分集合は閉であることに注意），各 $Z \in C$ について $f[Z] = Y$ より $Z \cap f^{-1}[Z_0] \neq \emptyset$ だから，$C \cap \{f^{-1}[\{y\}]\}$ は有限交叉性をもつ X の閉集合族である．X はコンパクトだから，$Z_0 \cap f^{-1}[\{y\}] = \bigcap(C \cap \{f^{-1}[\{y\}]\})$ は空ではない．すなわち，$y \in f[Z_0]$ である．これで，$f[Z_0] = Y$ が示された．以上より，$Z_0 \in \mathcal{F}$ である． □

---

*14 以下の証明からわかるとおり，（「既約」の定義を一般の位相空間の間の連続写像に拡張した上で，）X はコンパクト，Y は T_1（任意の 1 点部分集合が閉）と仮定するだけで十分である．

解答 I.12.17　(前半)　単射 $g\colon \omega \to A$ がとれたとすると，全射でない単射 $f\colon A \to A$ が

$$f(x) = \begin{cases} g(g^{-1}(x)+1) & (x \in g[\omega]) \\ x & (x \in A \setminus g[\omega]) \end{cases}$$

と構成できるから，A は Dedekind 有限ではない．

逆に，A が Dedekind 有限ではない，すなわち全射でない単射 $f\colon A \to A$ がとれたとする．$x_0 \in A \setminus f[A]$ を 1 つ固定し，$g\colon \omega \to A$ を再帰的に

$$g(0) = x_0, \qquad g(n+1) = f(g(n))$$

と定める．g が単射であることを，背理法で示す．g が単射でないとすると，$m, n \in \omega$ であって $m < n$ かつ $g(m) = g(n)$ なるものが存在する．このような m と n の組のうち，m が最小となるものをとる．$n > 0$ だから，$n = n' + 1$（$n' \in \omega$）と書ける．もし $m > 0$ とすると，m も $m = m' + 1$（$m' \in \omega$）と書け，g の定義より $f(g(m')) = f(g(n'))$ となるが，f は単射だから $g(m') = g(n')$ となり，m の最小性に反する．したがって，$m = 0$ である．これより $x_0 = g(0) = g(n) = f(g(n'))$ だが，これは $x_0 \notin f[A]$ に反する．よって，g は単射であり，$\omega \preccurlyeq A$ である．

(後半)　A が有限であるとすると，定義よりある $n \in \omega$ が存在して $A \preccurlyeq n$ となる．一方で，ω は基数だから（定理 I.11.17），$\omega \preccurlyeq n$ とはなりえない．よってこのとき，$\omega \preccurlyeq A$ ではありえず，したがって前半より A は Dedekind 有限である[*15]．

選択公理を仮定し，A が Dedekind 有限であるとする．前半より $\omega \not\preccurlyeq A$ だから，定理 I.12.1 (4)（選択公理を用いる）より，$A \prec \omega$ である．したがって，演習問題 I.11.23 の 3 番目の主張（解答 I.11.23 の脚注も参照のこと）より，A は整列可能であって $|A| < \omega$ である．よって，演習問題 I.11.24 より，A は有限である．　□

解答 I.12.18*　演習問題 I.12.18 の上の記述に従い，距離空間 X が可分であるとは，X が有限であるか，または稠密部分集合 $D \subseteq X$ であって $D \approx \omega$ なるものが存在することであるとする．

$X \subseteq \mathbb{R}$ が Dedekind 有限だが有限でないとする．すると，演習問題 I.12.17 の前半より $\omega \not\preccurlyeq X$ だから，X のどんな部分集合も ω との間に全単射をもたない．よって，X が有限でないことと合わせて，X は可分ではない．

次に，一般に，任意の $X \subseteq \mathbb{R}$ に対して演習問題 I.12.14 の結果が成立しないことを示す．$X \subseteq \mathbb{R}$ とし，部分集合 $E \subseteq X$ と正の実数 ϵ が「任意の相異なる 2 点 $x, y \in E$ に対して $|x - y| > \epsilon$」を満たすとする．すると，$x \in E$ に対する閉区間 $[x - \epsilon/2, x + \epsilon/2]$ は互いに交わらない．さて，任意の $x \in E$ に対して $[x - \epsilon/2, x + \epsilon/2] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ であり，$\mathbb{Q}$ は可算無限である（解答 I.15.8 を参照のこと）．そこで，全単射 $f\colon \omega \to \mathbb{Q}$ を 1 つ固定し，

$$g(x) = \min\{n \in \omega : f(n) \in [x - \epsilon/2, x + \epsilon/2]\}$$

と定めれば，g は E から ω への単射である．したがって，E は可算である．よって，$X \subseteq \mathbb{R}$ に対して演習問題 I.12.14 の結果は成立しない．　□

I.13　基数の算術

解答 I.13.17　示すべきことは，κ が弱到達不能基数ならば $\kappa = \aleph_\kappa$ かつ $\mathrm{type}(\{\alpha < \kappa : \alpha = \aleph_\alpha\}) = \kappa$ であることと，強到達不能基数ならば $\kappa = \beth_\kappa$ かつ $\mathrm{type}(\{\alpha < \kappa : \alpha = \beth_\alpha\}) = \kappa$ であることである．

[*15] 以上の証明からわかるとおり，「有限ならば Dedekind 有限」は，選択公理に依存せず成り立つ．

(前半) κ を弱到達不能基数とする．まず，$\kappa = \aleph_\kappa$ を示す．$\kappa \leq \aleph_\kappa$ であることは，解答 I.11.31 の後半の準備で（一般の順序数に対して）見た．$\aleph_\kappa \leq \kappa$ を示す[*16]．κ は極限順序数だから，そのためには，任意の順序数 $\xi < \kappa$ に対して $\aleph_\xi < \kappa$ をいえば十分である．ξ に関する超限帰納法で示そう．$\xi = 0$ のとき，結論は $\omega < \kappa$ だが，これは弱到達不能基数の定義の一部である．ξ に対して結論が成り立つとすると，$\aleph_\xi < \kappa$ だから，弱到達不能基数の定義より，$\aleph_{\xi+1} = \aleph_\xi^+ < \kappa$ である．よって，結論は $\xi + 1$ に対しても成り立つ．$\xi < \kappa$ を極限順序数とし，ξ 未満に対しては結論が成り立つとする．すると，$\eta \mapsto \aleph_\eta$ は ξ から κ への写像だが，κ は正則で $\xi < \kappa$ だから，その像は κ で非有界である．よって，$\aleph_\xi = \sup\{\aleph_\eta : \eta < \xi\} < \kappa$ であり，結論は ξ に対しても成り立つ．これで，任意の順序数 $\xi < \kappa$ に対して $\aleph_\xi < \kappa$ であることが示された．

次に，$\mathrm{type}(\{\alpha < \kappa : \alpha = \aleph_\alpha\}) = \kappa$ を示す．$\mathrm{type}(\{\alpha < \kappa : \alpha = \aleph_\alpha\}) \leq \kappa$ は，演習問題 I.11.15 (1) の結果である．逆向きの不等式を示そう．そのためには，$\alpha = \aleph_\alpha$ を満たす順序数 $\alpha < \kappa$ からなる狭義単調増加な列 $\langle \alpha_\xi : \xi < \kappa \rangle$ を構成すればよい（演習問題 I.8.22）．

$\xi < \kappa$ に対して順序数 α_ξ を，次のように超限再帰的に定める：

- $\alpha_0 = \sup\{0, \aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \dots\}$.
- 順序数 $\xi < \kappa$ に対して，$\alpha_{\xi+1} = \sup\{\alpha_\xi^+, \aleph_{\alpha_\xi^+}, \aleph_{\aleph_{\alpha_\xi^+}}, \dots\}$.
- 極限順序数 $\xi < \kappa$ に対して，$\alpha_\xi = \sup\{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$.

すると，この列 $\langle \alpha_\xi : \xi < \kappa \rangle$ は求める条件を満たしている．このことを示そう．

まず，$\langle \alpha_\xi : \xi < \kappa \rangle$ が狭義単調増加であることは明らかである（厳密には，超限帰納法で示す）．

次に，任意の $\xi < \kappa$ に対して $\alpha_\xi = \aleph_{\alpha_\xi}$ であることを，ξ に関する超限帰納法で示す．0 または後続型順序数 ξ に対しては，演習問題 I.11.33 の前半から結論を得る．ξ を極限順序数とし，ξ 未満に対しては結論が成り立つとすると，帰納法の仮定と $\alpha_\xi = \sup\{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$，およびアレフ系列の単調性（演習問題 I.11.31 の前半）より

$$\aleph_{\alpha_\xi} = \sup\{\aleph_{\alpha_\eta} : \eta < \xi\} = \sup\{\alpha_\eta : \eta < \xi\} = \alpha_\xi$$

だから，ξ に対しても結論は成り立つ．これで，任意の $\xi < \kappa$ に対して $\alpha_\xi = \aleph_{\alpha_\xi}$ であることが示された．

次に，準備として，次のことを注意しておく．$\alpha < \kappa$ ならば $\aleph_\alpha < \aleph_\kappa = \kappa$ である（アレフ系列の単調性：演習問題 I.11.31 の前半を用いた）．これを繰り返し適用し，さらに $\kappa > \omega$ および κ の正則性に注意すると，

$$\alpha < \kappa \quad \to \quad \sup\{\alpha, \aleph_\alpha, \aleph_{\aleph_\alpha}, \dots\} < \kappa \tag{$*$}$$

がわかる．

最後に，任意の $\xi < \kappa$ に対して $\alpha_\xi < \kappa$ であることを，ξ に関する超限帰納法で示す．$\xi = 0$ のとき，($*$) より結論は成り立つ．$\xi < \kappa$ に対して結論が成り立つとすると，$\alpha_\xi < \kappa$ だから，κ が弱到達不能であることから $\alpha_\xi^+ < \kappa$ である．よって，($*$) より，結論は $\xi + 1$ に対しても成り立つ．$\xi < \kappa$ を極限順序数とし，ξ 未満に対しては結論が成り立つとする．すると，$\eta \mapsto \alpha_\eta$ は ξ から κ への写像だが，κ は正則で $\xi < \kappa$ だから，その像は

[*16] 弱到達不能基数 κ に対して $\aleph_\kappa \leq \kappa$ であることは，超限帰納法を使わずに，次のように示すこともできる．ただし，この証明ではアレフ系列に固有の事実「任意の無限基数がアレフ系列に現れる」（演習問題 I.11.31 の後半）を用いているので，ベート系列には適用できない．

演習問題 I.11.31 の後半より，順序数 α を用いて $\kappa = \aleph_\alpha$ と書ける．弱到達不能基数の定義より，α は 0 でも後続型順序数でもないから，α は極限順序数である．よって，補題 I.13.11 より，$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\kappa)$ となる．さらに，κ は正則だから $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ である．これらを合わせて $\kappa = \mathrm{cf}(\alpha)$，したがって $\kappa \leq \alpha$ を得る．よって，$\aleph_\kappa \leq \aleph_\alpha = \kappa$ である（アレフ系列の単調性：演習問題 I.11.31 の前半を用いた）．

κ で非有界である．よって，$\alpha_\xi = \sup\{\alpha_\eta : \eta < \xi\} < \kappa$ であり，結論は ξ に対しても成り立つ．これで，任意の順序数 $\xi < \kappa$ に対して $\alpha_\xi < \kappa$ であることが示された．

以上より，$\langle \alpha_\xi : \xi < \kappa \rangle$ は $\alpha = \aleph_\alpha$ を満たす順序数 $\alpha < \kappa$ からなる狭義単調増加な列である．これで，$\mathrm{type}(\{\alpha < \kappa : \alpha = \aleph_\alpha\}) \geq \kappa$ が示された．

(後半)　前半と同様に示される．前半の解答ではアレフ系列に関する事実 $\xi < \zeta \to \aleph_\xi < \aleph_\zeta$（演習問題 I.11.31 の前半），$\xi \leq \aleph_\xi$（解答 I.11.31 の後半の準備），$\gamma = \sup\{\delta, \aleph_\delta, \aleph_{\aleph_\delta}, \ldots\}$ が $\gamma = \aleph_\gamma$ を満たすこと（演習問題 I.11.33 の前半）を用いているが，対応するベート系列に関する事実は，それぞれ，解答 I.13.18 の第一の準備，解答 I.13.18 の第二の準備，解答 I.13.18 の本論で示されている．　□

解答 I.13.18　第一の準備として，ベート系列の単調性，すなわち順序数 ξ, ζ に対して $\xi < \zeta \to \beth_\xi < \beth_\zeta$ であることを示す[*17]．ξ を固定し，$\zeta > \xi$ に関する超限帰納法で $\beth_\xi < \beth_\zeta$ を示す．$\zeta = \xi + 1$ のとき，$\beth_\zeta = \beth_\xi^+ > \beth_\xi$ より結論は成り立つ．ζ に対して結論が成り立つとすると，$\beth_{\zeta+1} = 2^{\beth_\zeta} > \beth_\zeta > \beth_\xi$ より，結論は $\zeta + 1$ に対しても成り立つ．$\zeta > \xi$ を極限順序数とすると，$\zeta > \xi + 1$ だから，$\beth_\zeta = \sup_{\alpha<\zeta} \beth_\alpha \geq \beth_{\xi+1} > \beth_\xi$ より結論は ζ に対して成り立つ．これで，任意の $\zeta > \xi$ に対して $\beth_\xi < \beth_\zeta$ が成り立つことが示された．

第二の準備として，任意の順序数 α に対して $\alpha \leq \beth_\alpha$ であることを，超限帰納法で示す[*18]．$\alpha = 0$ のとき，結論は明らかである．α に対して結論が成り立つとすると，$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \geq \beth_\alpha + 1 \geq \alpha + 1$ より，結論は $\alpha + 1$ に対しても成り立つ．α が極限順序数であり，α 未満に対しては結論が成り立つとすると，$\beth_\alpha = \sup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\} \geq \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$ より，結論は α に対しても成り立つ．これで，任意の順序数 α に対して $\alpha \leq \beth_\alpha$ であることが示された．

δ を順序数とし，順序数の列 $\langle \delta_n : n \in \omega \rangle$ を，$n \in \omega$ に関して再帰的に

$$\delta_0 = \delta, \qquad \delta_{n+1} = \beth_{\delta_n}$$

と定め，$\gamma = \sup\{\delta_n : n \in \omega\}$ と置く．この γ に対して，$\gamma = \beth_\gamma$ を示す[*19][*20]．第二の準備より $\delta_1 = \beth_{\delta_0} \geq \delta_0$ だから，$\gamma = \sup\{\delta_n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$ である．$2^{(-)}$ の定義と定理 I.11.17 (3) から，任意の順序数 ξ に対して $\beth_\xi$ は無限基数だから，$n \in \omega \setminus \{0\}$ に対して δ_n は無限基数である．したがって，その上限で書けている γ も無限基数（定理 I.11.17 (3)），特に極限順序数である．よって $\beth_\gamma = \sup\{\beth_\alpha : \alpha < \gamma\}$ であり，ベート系列の単調性（第一の準備）と合わせて

$$\beth_\gamma = \sup\{\beth_{\delta_n} : n \in \omega\} = \sup\{\delta_{n+1} : n \in \omega\} = \gamma$$

を得る．　□

解答 I.13.20　κ は基数，λ は無限基数で $\kappa \leq \lambda$ を満たすとする．

(前半)　各 $x \in [\lambda]^\kappa$ に対して，$|x| = \kappa$ より全単射 $f_x \colon \kappa \to x \subseteq \lambda$ がとれる（$x \mapsto f_x$ なる対応を選ぶ部分で選択公理を用いる）．この対応 $x \mapsto f_x$ は $[\lambda]^\kappa$ から ${}^\kappa\lambda$ への単射だから，$|[\lambda]^\kappa| \leq \lambda^\kappa$ である．一方で，${}^\kappa\lambda \subseteq [\kappa \times \lambda]^\kappa$ であり，補題 I.13.6 より $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda) = \lambda$ だから（$\kappa \leq \lambda$ と λ が無限基数であることを用いた），$\lambda^\kappa \leq |[\kappa \times \lambda]^\kappa| = |[\lambda]^\kappa|$ である．よって，$|[\lambda]^\kappa| = \lambda^\kappa$ である．

(後半)　さらに，$\kappa > 0$ とする．$[\lambda]^{<\kappa} = \bigcup_{\theta < \kappa \text{ 基数}} [\lambda]^\theta$ であることに注意する．$\mu = \sup\{\lambda^\theta : \theta < \kappa \text{ 基数}\}$ と置く．任意の基数 $\theta < \kappa$ に対して，$[\lambda]^\theta \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ だから，前半の結果と合わせて $|[\lambda]^{<\kappa}| \geq |[\lambda]^\theta| = \lambda^\theta$ を得る．

---

*17 この部分は，解答 I.11.31 の前半と同様である．

*18 この部分は，解答 I.11.31 の後半の準備と同様である．

*19 演習問題 I.13.18 に解答するだけならば，$\delta_0 = 0$ としてよく，このとき $\delta_0 \leq \delta_1$ は明らかだから，第二の準備は不要である．しかし，解答 I.13.17 の後半で第二の準備と一般の順序数 δ に対する $\gamma = \beth_\gamma$ を用いるため，このようにしておく．

*20 この部分は，解答 I.11.33 の前半と同様である．解答 I.11.33 の後半に対応するベート系列に関する結果も，同様にして得られる．

よって，$|[\lambda]^{<\kappa}| \geq \mu$ である．一方で，前半の結果より，任意の基数 $\theta < \kappa$ に対して $|[\lambda]^{\theta}| = \lambda^{\theta} \leq \mu$ である．また，$\kappa = 1$ ならば明らかに，$\kappa > 1$ ならば $\mu \geq \lambda^1 = \lambda$ より $\kappa \leq \mu$ である．よって，定理 I.12.11（選択公理を用いる）より，$|[\lambda]^{<\kappa}| = |\bigcup_{\theta < \kappa \text{ 基数}} [\lambda]^{\theta}| \leq \mu$ である．以上より，$|[\lambda]^{<\kappa}| = \mu = \sup\{\lambda^{\theta} : \theta < \kappa \text{ 基数}\}$ である．

λ が無限基数であることと補題 I.13.6 に注意すれば，通常帰納法により，任意の自然数 $n \geq 1$ に対して $\lambda^n = \lambda$ であることがわかる．よって，前段で示した式で $\kappa = \omega$ と置いて，$[\lambda]^{<\omega} = \sup\{\lambda^n : n < \omega\} = \lambda$ を得る． □

解答 I.13.21* K の加法単位元を 0_K，乗法単位元を 1_K と書くことにする．A は B を基底とする体 K 上のベクトル空間だから，

$$A = \{\langle x_b : b \in B\rangle : \forall b \in B(x_b \in K),\ \text{有限個の } b \in B \text{ を除いて } x_b = 0_K\}$$

としても一般性を失わない（K の加法単位元を 0_K と書いた）．

$b \in B$ に対して「b-成分が 1_K でその他の成分がすべて 0_K である A の元」を対応させる写像は B から A への単射だから，$|B| \leq |A|$ である．また，$b_0 \in B$ を 1 つ固定すると（$B \neq \emptyset$ よりこれは可能である），$k \in K$ に対して「b_0-成分が k でその他の成分が 0_K である A の元」を対応させる写像は K から B への単射だから，$|K| \leq |A|$ である．よって，$|A| \geq \max(|B|, |K|)$ である．

次に，$|A| \leq \max(|B|, |K|)$ を示す．$\kappa = \max(|B|, |K|)$ と置く（条件より，これは無限基数である）．$F \in [B]^{<\omega}$（B の有限部分集合）に対して

$$A_F = \{\langle x_b : b \in B\rangle : \forall b \in B(x_b \in K),\ b \in B \setminus F \text{ に対しては } x_b = 0_K\}$$

と置くと，$A = \bigcup_{F \in [B]^{<\omega}} A_F$ である．任意の $F \in [B]^{<\omega}$ に対して，$|A_F| = |K|^{|F|} \leq \kappa^{|F|} = \kappa$ である（解答 I.13.20 の後半の最後の議論を参照のこと）．また，演習問題 I.13.20 の後半より，$|[B]^{<\omega}| \leq |[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$ である．よって，定理 I.12.11（選択公理を用いる）より，$|A| = |\bigcup_{F \in [B]^{<\omega}} A_F| \leq \kappa = \max(|B|, |K|)$ である．これで示された． □

I.14 基礎の公理

解答 I.14.3 演習問題 I.14.14 のヒントにある写像 $f : \omega \to \mathrm{HF}$ を計算する C++ のプログラムのコードを示す．プログラムを実行して表示される 16 から 65535 までの 65520 個の集合が，ランク 4 の集合すべてである．

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <cmath>
using namespace std;

#define COUNT_SIZE 65536

int main() {
  string hf_sets[COUNT_SIZE] = {""};
  bool first_element;

  for (int i = 0; i < COUNT_SIZE; i++) {
    first_element = true;
```

```
    hf_sets[i] += "{";

    for (int j = 0; j < ceil(log2(i + 1)); j++) {
      if ((i >> j) % 2 == 1) {
        if (!first_element) {
          hf_sets[i] += ", ";
        }
        hf_sets[i] += hf_sets[j];
        first_element = false;
      }
    }

    hf_sets[i] += "}";

    cout << i << ": " << hf_sets[i] << endl;
  }

  return 0;
}
```

□

解答 I.14.9　補題 I.14.6 より，

$$\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 : y \in x\} \tag{$*$}$$

であり，

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\left(\bigcup x\right) &= \sup\{\mathrm{rank}(z) + 1 : \exists y \in x (z \in y)\} \\ &= \sup\{\sup\{\mathrm{rank}(z) + 1 : z \in y\} : y \in x\} \\ &= \sup\{\mathrm{rank}(y) : y \in x\} \end{aligned} \tag{$**$}$$

である．

rank(x) が後続型順序数 $\alpha + 1$ である場合，($*$) より，$y \in x$ に対する rank(y) は最大値 α をとる．よって，($**$) より，rank$(\bigcup x) = \alpha$ である．

rank(x) が 0 または極限順序数の場合を考える．rank$(\bigcup x) \leq$ rank(x) は ($*$), ($**$) より明らかである（補題 I.14.8 (4) でも示した）．rank$(x) \leq$ rank$(\bigcup x)$ を示す．rank(x) が後続型順序数でないことと ($*$) より，任意の $y \in x$ に対して rank$(y) + 1 <$ rank(x) だから，ふたたび ($*$) より，各 $y \in x$ に対して rank$(y) + 1 <$ rank$(y') + 1$，したがって rank$(y) + 1 \leq$ rank(y') なる $y' \in x$ が存在する．このことと ($*$), ($**$) より，rank$(\bigcup x) \leq$ rank(x) である．よって，rank$(\bigcup x) =$ rank(x) である．□

解答 I.14.14*　$m, n \in \omega$ が nEm を満たすとすると，$2^n \leq m$，特に $n < m$ である．そこで，写像 $f : \omega \to \mathrm{HF}$ を再帰的に

$$f(m) = \{f(n) : nEm\}$$

と定義できる．この f が $(\omega; E)$ から $(\mathrm{HF}; \in)$ の上への同型写像を与えていることを示す．

f が単射であることを示す．そのためには，任意の $a \in \omega$ に対して $f{\restriction}a$ が単射であることをいえばよい．これを通常帰納法で示そう．$a = 0$ のとき，結論は明らかである．$a \in \omega$ とし，a に対して結論が成り立つとして，

$a+1$ のときを考える．$m, m' \in a+1$ が $f(m) = f(m')$ を満たすとする．すると，$\{f(n) : nEm\} = \{f(n) : nEm'\}$ である．$m, m' \leq a$ だから，解答の最初に述べたとおり，$n \geq a$ に対しては nEm も nEm' も成立しない．一方で，帰納法の仮定より，$f{\restriction}a$ は単射である．よって，$\{f(n) : nEm\} = \{f(n) : nEm'\}$ より $\{n : nEm\} = \{n : nEm'\}$ でなければばならない．これは m と m' の 2 進数展開が一致することを意味し，したがって $m = m'$ である．よって，$f{\restriction}(a+1)$ は単射であり，結論は $a+1$ に対しても成り立つ．これで，f が単射であることが示された．

$m, n \in \omega$ に対して，$f(n) \in f(m)$ はある $n' \in \omega$ が存在して $n'Em$ かつ $f(n) = f(n')$ となることと同値だが，すでに示したように f は単射なので，これは nEm と同値である．

あとは，f が全射であることを示せばよい．$x \in \mathrm{HF}$ が f の像に入っていることを，$\mathrm{rank}(x)$ に関する通常帰納法で示す（補題 I.14.4 (4) より，HF はランクが有限な集合の全体であることに注意）．$x \in \mathrm{HF}$ とし，x よりもランクが小さい集合に対しては結論が成り立つとする．任意の $y \in x$ は $\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x)$ を満たすので（補題 I.14.4 (5)），その f による逆像 $f^{-1}(y) \in \omega$ がとれる．x が有限集合であることに注意して（演習問題 I.9.6 (1) と補題 I.14.12 からわかる），$m = \sum_{y \in x} 2^{f^{-1}(y)}$ と置こう．すると，$n \in \omega$ に対して nEm は $y \in x$ を用いて $n = f^{-1}(y)$ と書けることと同値だから，

$$f(m) = \{f(n) : nEm\} = \{y : y \in x\} = x$$

である．よって，x は f の像に入っている．これで，f が全射であることが示された． □

解答 I.14.15　クラス K は，$\forall y(y \subseteq K \to y \in K)$ を満たすとする．任意の順序数 α に対して $R(\alpha) \subseteq K$ であることを，超限帰納法で示す．α を 0 または極限順序数とし，α 未満に対して結論が成り立つとすると，$R(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi) \subseteq K$ だから，結論は α に対しても成り立つ．順序数 α に対して結論が成り立つとし，$y \in R(\alpha+1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$ を任意にとると，帰納法の仮定より $y \subseteq R(\alpha) \subseteq K$ だから，K に対する条件より $y \in K$ となる．よって，結論は $\alpha+1$ に対しても成り立つ．よって，任意の順序数 α に対して，$R(\alpha) \subseteq K$ が成り立つ．すなわち，$\mathrm{WF} \subseteq K$ である． □

解答 I.14.16　(前半)　任意の順序数 ξ に対して $|R(\omega+\xi)| = \beth_\xi$ であることを，超限帰納法で示す．

$\xi = 0$ のときを考える．$\omega \subseteq R(\omega)$ だから（補題 I.14.5 (1)），$|R(\omega)| \geq \omega$ である．一方で，$n \in \omega$ に対して $|R(n)| < \omega$ であることが通常帰納法によりわかるから（この事実は補題 I.14.12 の中でも用いている），定理 I.12.11（選択公理を用いる）より，$|R(\omega)| = |\bigcup_{n\in\omega} R(n)| \leq \omega$ である．よって，結論は $\xi = 0$ のとき成り立つ．

ξ に対して結論が成り立つとすると，$|R(\omega+\xi+1)| = |\mathcal{P}(R(\omega+\xi))| = 2^{\beth_\xi} = \beth_{\xi+1}$ より（p. 58 の表 I.1 の「結合律」を用いた），結論は $\xi+1$ に対しても成り立つ．

ξ を極限順序数とし，ξ 未満に対して結論が成り立つとする．任意の $\eta < \xi$ に対して $R(\omega+\eta) \subseteq R(\omega+\xi)$ だから（補題 I.14.4 (2)）$|R(\omega+\xi)| \geq |R(\omega+\eta)| = \beth_\eta$ であり，したがって $|R(\omega+\xi)| \geq \sup\{\beth_\eta : \eta < \xi\} = \beth_\xi$ である．一方で，$|\omega+\xi| = |\xi| \leq \xi \leq \beth_\xi$ であり（演習問題 I.11.34 の和についての主張と解答 I.13.18 の第二の準備を用いた），任意の $\eta < \xi$ に対して $|R(\omega+\eta)| = \beth_\eta \leq \beth_\xi$ だから，定理 I.12.11（選択公理を用いる）より，$|R(\omega+\xi)| = |\bigcup_{\eta<\xi} R(\omega+\eta)| \leq \beth_\xi$ である（$R(\omega+\xi) = \bigcup_{\eta<\xi} R(\omega+\eta)$ は補題 I.14.4 (2) からわかる）．よって，$|R(\omega+\xi)| = \beth_\xi$ であり，結論は ξ に対しても成り立つ．

以上より，任意の順序数 ξ に対して，$|R(\omega+\xi)| = \beth_\xi$ が成り立つ．

(後半)　$\xi \geq \omega^2$ とすると，$\xi = \omega^2 + \eta$ なる順序数 η がとれる（p. 58 の表 I.1 の「減算」）．したがって，$\omega+\xi = \omega+\omega^2+\eta = \omega\cdot(1+\omega)+\eta = \omega^2+\eta = \xi$ と計算できる（p. 58 の表 I.1 の「結合律」と「左分配律」を用いた）．前半の結果と合わせて，$|R(\xi)| = |R(\omega+\xi)| = \beth_\xi$ を得る． □

解答 I.14.17　$\forall x \in A \exists y\, \phi(x,y)$ とする．$\widehat{\phi}(x,\alpha)$ を「α は $\exists y \in R(\alpha)\, \phi(x,y)$ を満たす最小の順序数である」という論理式とすると，基礎の公理と定理 I.14.10 より $\forall x \in A \exists! \alpha\, \widehat{\phi}(x,\alpha)$ だから，（弱いほうの）置換公理より，$\forall x \in A \exists \alpha \in \widehat{B}\, \widehat{\phi}(x,y)$ を満たす $\widehat{B}$ が存在する．$B = \bigcap_{\alpha \in \widehat{B} \cap \mathrm{ON}} R(\alpha)$ と置けば，この B は $\forall x \in A \exists y \in B\, \phi(x,y)$ を満たす．これで，$\forall x \in A \exists y\, \phi(x,y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B\, \phi(x,y)$ が示された．□

解答 I.14.19　κ を無限基数とする．

(1)　$x \in H(\kappa)$ を任意にとる[*21]．$\mathrm{trcl}(x)$ は推移的集合だから（演習問題 I.9.6 (2)），補題 I.14.11（と基礎の公理[*22] および定理 I.14.10）より，$\alpha = \{\mathrm{rank}(y) : y \in \mathrm{trcl}(x)\}$ は順序数である．$\mathrm{trcl}(x)$ から α への全射が存在するから $|\alpha| \le |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$ であり，κ は基数だから $\alpha < \kappa$ である．さて，任意の $y \in x$ に対して $\mathrm{rank}(y) < \alpha$ だから，補題 I.14.6 より $\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 : y \in x\} \le \alpha < \alpha + 1$，したがって $x \in R(\alpha + 1)$ である．$\alpha < \kappa$ より $R(\alpha + 1) \subseteq R(\kappa)$ であることと合わせて（補題 I.11.14 (2)），$x \in R(\kappa)$ を得る．よって，$H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$ である．

(2)　$|H(\kappa)| \ge 2^{<\kappa}$ を示す．基数 $\theta < \kappa$ を任意にとる．$x \subseteq \theta$ に対して，$\sup x = \bigcup x = \mathrm{trcl}(x)$ である．実際，演習問題 I.8.10（解答 I.8.10 の脚注も参照のこと）より $\sup x = \bigcup x$ であり，推移閉包の定義より $\bigcup x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ であり，$\sup x$ は x を含む順序数，特に推移的集合だから演習問題 I.9.6 (3) より $\mathrm{trcl}(x) \subseteq \sup x$ である．したがって $|\mathrm{trcl}(x)| \le \sup x \le \theta < \kappa$ だから，$x \in H(\kappa)$ である．これより $\mathcal{P}(\theta) \subseteq H(\kappa)$ だから，$|H(\kappa)| \ge 2^\theta$ である．よって，$|H(\kappa)| \ge 2^{<\kappa}$ が成り立つ．

次に，準備として，一般の基数 κ に対して $\lambda \le 2^{<\lambda}$ であることを示す．これは，任意の基数 $\theta < \lambda$ に対して $\theta < 2^\theta \le 2^\theta \le 2^{<\lambda}$ であることからわかる．

κ はふたたび無限基数とし，$|H(\kappa)| \le 2^{<\kappa}$ を示す．$\kappa = \omega$ のとき，(1) と演習問題 I.14.16 の前半より $|H(\omega)| \le |R(\omega)| = \omega$ である．また，後続型基数に対して結論が示されたとすると，極限基数 κ に対しても，$H(\kappa) = \bigcup_{\theta < \kappa \text{ 基数}} H(\theta^+)$，定理 I.12.11 および上の準備より $|H(\kappa)| \le 2^{<\lambda}$ がわかる．そこで，あとは後続型基数に対して示せばよい．

任意の無限基数 θ に対して $|H(\theta^+)| \le 2^\theta$ であることを示したい．(1) より $H(\theta^+) = \bigcup_{\alpha < \theta^+} (H(\theta^+) \cap R(\alpha))$ であり，$\theta^+ \le 2^\theta$ だから，任意の順序数 $\alpha < \theta^+$ に対して $|H(\theta^+) \cap R(\alpha)| \le 2^\theta$ を示せば，定理 I.12.11（選択公理を用いる）から，$|H(\theta^+)| \le 2^\theta$ が結論できる．

以下，任意の順序数 $\alpha < \theta^+$ に対して $|H(\theta^+) \cap R(\alpha)| \le 2^\theta$ であることを，超限帰納法で示す．$\alpha < \theta^+$ を 0 または極限順序数とし，α 未満に対しては結論が成り立つとすると，$H(\theta^+) \cap R(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} (H(\theta^+) \cap R(\xi))$，$|\alpha| < \theta^+ \le 2^\theta$，定理 I.12.11（選択公理を用いる）より $|H(\theta^+) \cap R(\alpha)| \le 2^\theta$ だから，結論は α に対しても成り立つ．次に，後続型順序数のときを考える．α に対して結論が成り立つとする．$x \in H(\theta^+) \cap R(\alpha + 1)$ ならば，$|x| \le |\mathrm{trcl}(x)| < \theta^+$ であり（演習問題 I.9.6 (1)），かつ $x \subseteq H(\theta^+) \cap R(\alpha)$ である（演習問題 I.9.6 (4)，補題 I.14.4 (5)）．したがって，$H(\theta^+) \cap R(\alpha + 1) \subseteq [H(\theta^+) \cap R(\alpha)]^{<\theta^+}$ だから，帰納法の仮定と演習問題 I.13.20，補題 I.13.9 より，

$$|H(\theta^+) \cap R(\alpha + 1)| \le |[H(\theta^+) \cap R(\alpha)]^{<\theta^+}| \le |[2^\theta]^{<\theta^+}| = (2^\theta)^\theta = 2^\theta$$

である．よって，結論は $\alpha + 1$ に対しても成り立つ．これで，任意の順序数 $\alpha < \theta^+$ に対して $|H(\theta^+) \cap R(\alpha)| \le 2^\theta$

---

*21 $H(\kappa)$ の定義において，一般の集合 x に対して $\mathrm{trcl}(x)$ の濃度を定めるためには，選択公理が必要である．ただし，$|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$ を「$\mathrm{trcl}(x)$ が整列可能かつ $|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$」と解釈すれば，選択公理なしで $H(\kappa)$ が定義できる．この定義を採用するとき，$H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$ は，選択公理なしで証明できる．実際，解答 I.14.19 (1) において，$\mathrm{trcl}(x)$ から α への全射の存在から $|\alpha| \le |\mathrm{trcl}(x)|$ を導くところで，$\mathrm{trcl}(x)$ が整列可能であることと演習問題 I.11.21 にさえ注意すればよい．

*22 補題 I.14.12 の下の注意から，$H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$ の証明には基礎の公理が必要であることがわかる．

であることが示された． □

解答 I.14.20 κ を正則基数とする．

(前半) $y \subseteq H(\kappa)$ かつ $|y| < \kappa$ とする．$\mathrm{trcl}(y) = y \cup \bigcup_{z \in y} \mathrm{trcl}(z)$ であり，$|y| < \kappa$ かつ任意の $z \in y$ に対して $|\mathrm{trcl}(z)| < \kappa$ だから，定理 I.13.12 (1)（選択公理を用いる）より $|\mathrm{trcl}(y)| = |y \cup \bigcup_{z \in y} \mathrm{trcl}(z)| < \kappa$ である．よって，$y \in H(\kappa)$ である．

(後半) $z \in H(\kappa)$ かつ $f : z \to H(\kappa)$ とする．$z \in H(\kappa)$ より $|z| \leq |\mathrm{trcl}(z)| < \kappa$ だから（演習問題 I.9.6 (1) を用いた），$|f| = |z| < \kappa$ である．また，f の任意の元は $u \in z$ と $v \in H(\kappa)$ を用いて $\langle u, v \rangle$ と書ける．$H(\kappa)$ は推移的集合（演習問題 I.9.6 (4) からわかる）だから $u \in H(\kappa)$ であり，$\mathrm{trcl}(\langle u, v \rangle) = \{\{u\}, \{u, v\}\} \cup \mathrm{trcl}(u) \cup \mathrm{trcl}(v)$ だから，$|\mathrm{trcl}(\langle u, v \rangle)| \leq 2 + |\mathrm{trcl}(u)| + |\mathrm{trcl}(v)| < \kappa$ である（補題 I.13.5 を用いた）．よって，前半の結果より，$f \in H(\kappa)$ である． □

解答 I.14.21* $\gamma > \omega$ を極限順序数とする．$R(\gamma)$ が推移的集合であることに注意する（補題 I.14.4 (1)）．まず，$R(\gamma)$ が ZC のモデルであることを示す．[*23]

(集合の存在の公理) 示すべきことは，$\exists x \in R(\gamma)(x = x)$，すなわち $R(\gamma) \neq \emptyset$ であり，これは明らかである．

(外延性の公理) 示すべきことは，

$$\forall x, y \in R(\gamma)(\forall z \in R(\gamma)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

である．これは，$R(\gamma)$ が推移的集合であること（補題 I.14.4 (1)）と（集合論の宇宙 V における）外延性の公理から従う．

(基礎の公理) 示すべきことは，

$$\forall x \in R(\gamma)(\exists y \in R(\gamma)(y \in x) \to \exists y \in R(\gamma)(y \in x \wedge (\neg \exists z \in R(\gamma)(z \in x \wedge z \in y)))$$

である．$x \in R(\gamma)$ を任意にとる．$\exists y \in R(\gamma)(y \in x)$ とすれば，（集合論の宇宙 V における）基礎の公理より，ある $y \in x$ が存在して $x \cap y \neq \emptyset$ である．$R(\gamma)$ は推移的集合だから，この y は $R(\gamma)$ に属し，条件を満たす．これで示された．

(内包公理図式) 示すべきことは，y を自由変数として含まない論理式 ϕ に対して，ϕ が含む x 以外の自由変数を列挙して $w_0, \ldots, w_{n-1}$ とするときの

$$\forall w_0, \ldots, w_{n-1}, z \in R(\gamma) \exists y \in R(\gamma) \forall x \in R(\gamma)(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi^{R(\gamma)}))$$

である．$w_0, \ldots, w_{n-1}, z \in R(\gamma)$ を任意にとる．z の部分集合 $y = \{x \in z : \phi^{R(\gamma)}\}$ について，$\mathrm{rank}(y) \leq \mathrm{rank}(z) < \gamma$（補題 I.14.7）より $y \in R(\gamma)$ であり，この y は条件を満たす．これで示された．

(対の公理) 示すべきことは，

$$\forall x, y \in R(\gamma) \exists z \in R(\gamma)(x \in z \wedge y \in z)$$

である．x, $y \in R(\gamma)$ とすると $\mathrm{rank}(x)$, $\mathrm{rank}(y) < \gamma$ であり，γ は極限順序数だから $\mathrm{rank}(\{x, y\}) = \max(\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)) + 1 < \gamma$（補題 I.14.8 (1)），したがって $\{x, y\} \in R(\gamma)$ である．そこで，$z = \{x, y\}$ と置けば条件は満たされる．これで示された．

[*23] 解答 I.14.21 と I.14.22 では，II.17 節の pp. 232–244 の内容を用いる．補題 II.17.13, II.17.15 は，それぞれ演習問題 I.14.21, I.14.22 を述べ直したものである．なお，論理式の絶対性と，集合論の理論のモデルであることの証明についてのより系統的な扱いが，Kunen [2, pp. 145–197] にある．

(和集合の公理)　示すべきことは,

$$\forall \mathcal{F} \in R(\gamma) \exists A \in R(\gamma) \forall Y, x \in R(\gamma)((x \in Y \land Y \in \mathcal{F}) \to x \in A)$$

である．$\mathcal{F} \in R(\gamma)$ とすると $\mathrm{rank}(\bigcup \mathcal{F}) \leq \mathrm{rank}(\mathcal{F}) < \gamma$（補題 I.14.8 (4)），したがって $\bigcup \mathcal{F} \in R(\gamma)$ である．そこで，$A = \bigcup \mathcal{F}$ と置けば条件は満たされる．これで示された．

(無限の公理)　空集合を与える論理式 $w = \emptyset$ と後続者を与える論理式 $w = S(z)$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の下でそれぞれ $\exists! w(w = \emptyset)$, $\forall z \exists! w(w = S(z))$ を満たし，どちらも $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルに対して絶対的である（例 II.17.5，補題 II.17.9，補題 II.17.6）[*24]．ここまで見てきたとおり，$R(\gamma)$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルだから，示すべきことは

$$\exists x \in R(\gamma)(\emptyset \in x \land \forall y \in x(S(y) \in x))$$

である．$\gamma > \omega$ より $\omega \in R(\gamma)$ だから（補題 I.14.5 (1)），$x = \omega$ と置けば条件は満たされる．これで示された．

(冪集合の公理)　包含関係を表す論理式は推移的集合に対して絶対的であり（例 II.17.5 (2)，補題 II.17.6），$R(\gamma)$ は推移的集合だから，示すべきことは

$$\forall x \in R(\gamma) \exists y \in R(\gamma) \forall z \in R(\gamma)(z \subseteq x \to z \in y)$$

である．$x \in R(\gamma)$ とすると $\mathrm{rank}(x) < \gamma$ であり，γ は極限順序数だから $\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x)) = \mathrm{rank}(x) + 1 < \gamma$（補題 I.14.8 (3)），したがって $\mathcal{P}(x) \in R(\gamma)$ である．そこで，$y = \mathcal{P}(x)$ と置けば条件は満たされる．これで示された．

(選択公理)　$\mathrm{df}(F)$ を「F は互いに交わりのない空でない集合からなる族である」という論理式

$$\emptyset \notin F \land \forall x, y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset)$$

とし，$\mathrm{cs}(C, F)$ を「C は集合族 F の選択集合である」という論理式

$$\forall x \in F(\mathrm{SING}(C \cap x))$$

とする．補題 II.17.9 の方法で容易にわかるように，$\mathrm{df}(F), \mathrm{cs}(C, F)$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ 上 Δ_0 式で表現できるから，これらの論理式は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルに対して絶対的である（補題 II.17.6）．

選択公理は

$$\forall F(\mathrm{df}(F) \to \exists C(\mathrm{cs}(C, F)))$$

と書ける．ここまで見てきたとおり，$R(\gamma)$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルだから，示すべきことは

$$\forall F \in R(\gamma)(\mathrm{df}(F) \to \exists C \in R(\gamma)(\mathrm{cs}(C, F)))$$

である．$F \in R(\gamma)$ を任意にとる．$\mathrm{df}(F)$ とすると，（集合論の宇宙 V における）選択公理より，F の選択集合 C がとれる．このとき $C \subseteq \bigcup F$ だから $\mathrm{rank}(C) \leq \mathrm{rank}(\bigcup F) \leq \mathrm{rank}(F) < \gamma$（補題 I.14.7，補題 I.14.8 (4)），したがって $C \in R(\gamma)$ であり，この C が条件を満たす．これで示された．

(置換公理の不成立について)　次に，$\omega < \gamma < \omega_1$ を満たす極限順序数 γ（たとえば $\omega + \omega$）に対しては，$R(\gamma)$ で置換公理が成立しない（正確には，成立しない置換公理の実例がある）ことを示す．$R(\gamma)$ で置換公理が成立すると仮定する．γ は可算無限だから，ω を順序型 γ で順序付ける整列順序 $W \subseteq \omega \times \omega$ がとれる．W

[*24] 後続者を与える論理式 $w = S(z)$ の絶対性について，補題 II.17.9 では ZF 上 Δ_0 式と同値であると主張されているのみだが，容易にわかるように，ここでの公理系は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ に弱められる．Kunen [2, pp. 157–158] にも記述がある．

の各元は自然数 2 つの順序対だから，補題 I.14.5 (3)，補題 I.14.8 (2)，補題 I.14.6 より $\mathrm{rank}(W) \leq \omega$ であり，したがって $\gamma > \omega$ より $W \in R(\gamma)$ である．さて，整列順序に対してその順序型を与える論理式 $\alpha = \mathrm{type}(A; R)$ は，ZF − P の下で R が A を整列順序付けるときに $\exists!\alpha(\alpha = \mathrm{type}(A; R))$ を満たすように定義され，ZF − P の推移的モデルに対して絶対的である[*25]．いま，仮定より $R(\gamma)$ は ZF − P の推移的モデルだから，$W \in R(\gamma)$ から $\gamma = \mathrm{type}(W) \in R(\gamma)$ を得るが，これは矛盾である（補題 I.14.5 (1)）．よって，背理法より，$R(\gamma)$ で置換公理は成立しない． □

解答 I.14.22* κ を正則基数とする．$H(\kappa)$ が推移的集合であることを示す．まず，$H(\kappa)$ が ZFC − P − Inf のモデルであることを示す．[*26]

(集合の存在の公理) 示すべきことは，$\exists x \in H(\kappa)(x = x)$，すなわち $H(\kappa) \neq \emptyset$ であり，これは明らかである．

(外延性の公理) 示すべきことは，

$$\forall x, y \in H(\kappa)(\forall z \in H(\kappa)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

である．これは，$H(\kappa)$ が推移的集合であることと（集合論の宇宙 V における）外延性の公理から従う．

(基礎の公理) 示すべきことは，

$$\forall x \in H(\kappa)(\exists y \in H(\kappa)(y \in x) \to \exists y \in H(\kappa)(y \in x \wedge (\neg\exists z \in H(\kappa)(z \in x \wedge z \in y)))$$

である．$x \in H(\kappa)$ を任意にとる．$\exists y \in H(\kappa)(y \in x)$ とすれば，（集合論の宇宙 V における）基礎の公理より，ある $y \in x$ が存在して $x \cap y \neq \emptyset$ である．$H(\kappa)$ は推移的集合だから，この y は $H(\kappa)$ に属し，条件を満たす．これで示された．

(内包公理図式) 示すべきことは，y を自由変数として含まない論理式 ϕ に対して，ϕ が含む x, z 以外の自由変数を列挙して $w_0, \ldots, w_{n-1}$ とするときの

$$\forall w_0, \ldots, w_{n-1}, z \in H(\kappa)\exists y \in H(\kappa)\forall x \in H(\kappa)(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi^{H(\kappa)}))$$

である．$w_0, \ldots, w_{n-1}, z \in H(\kappa)$ を任意にとる．z の部分集合 $y = \{x \in z : \phi^{H(\kappa)}\}$ について，$|\mathrm{trcl}(y)| \leq |\mathrm{rank}(z)| < \kappa$（演習問題 I.9.6 (4)）より $y \in H(\kappa)$ であり，この y は条件を満たす．これで示された．

(対の公理) 示すべきことは，

$$\forall x, y \in H(\kappa)\exists z \in H(\kappa)(x \in z \wedge y \in z)$$

である．$x, y \in H(\kappa)$ とすると $|\mathrm{trcl}(x)|, |\mathrm{trcl}(y)| < \kappa$ であり，κ は無限基数だから $|\mathrm{trcl}(\{x, y\})| = 2 + |\mathrm{trcl}(x)| + |\mathrm{trcl}(y)| < \kappa$（補題 I.13.6），したがって $\{x, y\} \in H(\kappa)$ である．そこで，$z = \{x, y\}$ と置けば条件は満たされる．これで示された．

(和集合の公理) 示すべきことは，

$$\forall \mathcal{F} \in H(\kappa)\exists A \in H(\kappa)\forall Y, x \in H(\kappa)((x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \to x \in A)$$

である．$\mathcal{F} \in H(\kappa)$ とすると $|\mathrm{trcl}(\bigcup\mathcal{F})| \leq |\mathrm{trcl}(\mathcal{F})| < \kappa$，したがって $\bigcup\mathcal{F} \in H(\kappa)$ である．そこで，$A = \bigcup\mathcal{F}$ と置けば条件は満たされる．これで示された．

[*25] Kunen [2, p. 168] を参照のこと

[*26] 解答 I.14.21 の冒頭の脚注も参照のこと．

(置換公理図式)　示すべきことは，B を自由変数として含まない論理式 ϕ に対して，ϕ が含む x, y, A 以外の自由変数を列挙して $w_0, \ldots, w_{n-1}$ とするときの

$$\forall w_0, \ldots, w_{n-1}, A \in H(\kappa)(\forall x \in H(\kappa) \cap A \exists! y \in H(\kappa)\, \phi^{H(\kappa)} \to \exists B \in H(\kappa) \forall x \in H(\kappa) \cap A \exists y \in H(\kappa) \cap B\, \phi^{H(\kappa)})$$

である．$w_0, \ldots, w_{n-1} \in H(\kappa)$ を任意にとる．$\forall x \in H(\kappa) \cap A \exists! y \in H(\kappa)\, \phi^{H(\kappa)}$ とする．$H(\kappa)$ は推移的集合だから $H(\kappa) \cap A = A$ であることに注意して，

$$B = \{y \in H(\kappa) : \exists x \in H(\kappa) \cap A\, \phi^{H(\kappa)}\} = \{y \in H(\kappa) : \exists x \in A\, \phi^{H(\kappa)}\}$$

と置く．すると，B は $\forall x \in H(\kappa) \cap A \exists y \in H(\kappa) \cap B\, \phi^{H(\kappa)}$ を満たす．また，κ は正則であり，$B \subseteq H(\kappa)$ かつ $|B| \leq |A| \leq |\mathrm{trcl}(A)| < \kappa$ だから，演習問題 I.4.20 の前半より $B \in H(\kappa)$ である（選択公理を用いる）．これで示された．

(選択公理)　$\mathrm{df}(F), \mathrm{cs}(C, F)$ を，解答 I.14.21 と同じものとする．解答 I.14.21 と同様に，示すべきことは

$$\forall F \in H(\kappa)(\mathrm{df}(F) \to \exists C \in H(\kappa)(\mathrm{cs}(C, F)))$$

である．$F \in H(\kappa)$ を任意にとる．$\mathrm{df}(F)$ とすると，（集合論の宇宙 V における）選択公理より，F の選択集合 C がとれる．このとき $C \subseteq \bigcup F$ だから $|\mathrm{trcl}(C)| \leq |\mathrm{trcl}(\bigcup F)| \leq |\mathrm{trcl}(F)| < \kappa$，したがって $C \in H(\kappa)$) であり，この C が条件を満たす．これで示された．

($H(\kappa)$ で無限の公理が成立するための条件)　次に，正則基数 κ に対して，$H(\kappa)$ で無限の公理が成立することと，$\kappa > \omega$ とが同値であることを示す．空集合を与える論理式 $w = \emptyset$ と後続者を与える論理式 $w = S(z)$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の下でそれぞれ $\exists! w(w = \emptyset)$，$\forall z \exists! w(w = S(z))$ を満たし，どちらも $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルに対して絶対的である（例 II.17.5 (1)，補題 II.17.9，補題 II.17.6）[*27]．ここまで見てきたとおり，$H(\kappa)$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルだから，$H(\kappa)$ で無限の公理が成立するとは

$$\exists x \in H(\kappa)(\emptyset \in x \land \forall y \in x(S(y) \in x))$$

ということである．これは $\exists x \in H(\kappa)(\omega \subseteq x)$ ということであり，明らかに，これが成立するための必要十分条件は $\kappa > \omega$ である．これで示された．

($H(\kappa)$ で冪集合の公理が成立するための条件)　最後に，正則基数 κ に対して，$H(\kappa)$ で冪集合の公理が成立することと，κ が ω または強到達不能基数である（任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対して $2^\lambda < \kappa$ である，といっても同じ）こととが同値であることを示す．包含関係を表す論理式は推移的集合に対して絶対的であり（例 II.17.5 (2)，補題 II.17.6），$H(\kappa)$ は推移的集合だから，$H(\kappa)$ で冪集合の公理が成立するとは

$$\forall x \in H(\kappa) \exists y \in H(\kappa) \forall z \in H(\kappa)(z \subseteq x \to z \in y)$$

ということである．包含関係の絶対性，$H(\kappa)$ が部分集合をとる操作に関して閉じていること，$H(\kappa)$ で内包公理が成立することに注意すると，これはさらに

$$\forall x \in H(\kappa)(\mathcal{P}(x) \in H(\kappa)) \tag{$*$}$$

と同値であることがわかる．

$\mathrm{trcl}(\mathcal{P}(x)) = \mathcal{P}(x) \cup \mathrm{trcl}(x)$ だから，$\lambda = |\mathrm{trcl}(x)|$ と置くと，$|\mathrm{trcl}(\mathcal{P}(x))| \leq 2^{|x|} + \lambda \leq 2^\lambda + \lambda$ である．λ が有限ならば $2^\lambda + \lambda$ も有限であり，λ が無限ならば $2^\lambda + \lambda = 2^\lambda$ である（補題 I.13.6）．よって，κ が ω または強到

[*27] 解答 I.14.21 の「無限の公理」の脚注も参照のこと．

達不能基数ならば，(∗) が成り立つ．逆に，(∗) が成り立つとして，基数 $\lambda < \kappa$ を任意にとる．$\lambda \in H(\kappa)$ だから (∗) より $\mathcal{P}(\lambda) \in H(\kappa)$，したがって $2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)| \leq |\mathrm{trcl}(\mathcal{P}(\lambda))| < \kappa$ である．よって，κ は ω または強到達不能基数である．以上より，正則基数 κ に対して，$H(\kappa)$ で冪集合の公理が成立することと，κ が ω または強到達不能基数であることとは同値である． □

解答 I.14.23　$\forall y((\forall x \in y\, \psi(x)) \to \psi(y))$ とする．もし $\forall y\, \psi(y)$ が成り立たないとすると，基礎の公理と定理 I.14.10 より，$\neg\psi(y)$ なる y のうちランクが最小のもの y_0 がとれる．この y_0 について，任意の $x \in y_0$ は y_0 よりも小さいランクをもつから（補題 I.14.4 (5)），y_0 の最小性より $\psi(x)$ である．ところが，これは仮定に反する．よって，背理法より，$\forall y\, \psi(y)$ である． □

解答 I.14.24　定理 I.9.2 より，順序数 α に対して $\widetilde{F}(\alpha)$ を，

- α が 0 または極限順序数のとき，$\widetilde{F}(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} \widetilde{F}(\xi)$ と定める．
- 順序数 α に対して，$\widetilde{F}(\alpha+1) = \{\langle x, G(\widetilde{F}(\alpha) \restriction \mathrm{trcl}(x))\rangle : x \in R(\alpha+1)\}$ と定める．

と再帰的に定義できる．正確には，ϕ を用いて明示的に書ける論理式 $\widetilde{\psi}$ が存在し，$\forall x \exists! y\, \widetilde{\psi}(x, y)$ であり，$\widetilde{\psi}$ が定める対応を $\widetilde{F}$ と書くと，$\widetilde{F}$ は上式を満たす．

順序数 α に対して，$\widetilde{F}(\alpha)$ は $R(\alpha)$ 上の写像であり，任意の $\beta < \alpha$ に対して $\widetilde{F}(\alpha) \restriction R(\beta) = \widetilde{F}(\beta)$ であることを，α に関する超限帰納法で示す．α を 0 または極限順序数とし，α 未満に対して結論が成り立つとすると，$\widetilde{F}(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} \widetilde{F}(\xi)$ より，結論は α に対しても成り立つ．α を順序数とし，α に対しては結論が成り立つとする．$\widetilde{F}(\alpha+1)$ が $R(\alpha+1)$ 上の写像であることは，定義から明らかである．あとは，任意の $\beta < \alpha+1$ に対して $\widetilde{F}(\alpha+1) \restriction R(\beta) = \widetilde{F}(\beta)$ であることを示せばよいが，帰納法の仮定より，そのためには $\widetilde{F}(\alpha+1) \restriction R(\alpha) = \widetilde{F}(\alpha)$ をいえば十分である．$x \in R(\alpha)$ を任意にとり，$\beta = \mathrm{rank}(x) < \alpha$ と置く．すると，$\mathrm{rank}(\mathrm{trcl}(x)) = \mathrm{rank}(x) = \beta$（補題 I.14.8 (6)）より $\mathrm{trcl}(x) \subseteq R(\beta) \subseteq R(\alpha)$ だから，帰納法の仮定より $\widetilde{F}(\alpha) \restriction R(\beta) = \widetilde{F}(\beta)$ であることと合わせて，

$$\widetilde{F}(\alpha+1)(x) = G(\widetilde{F}(\alpha) \restriction \mathrm{trcl}(x)) = G(\widetilde{F}(\beta) \restriction \mathrm{trcl}(x)) = \widetilde{F}(\beta+1)(x)$$

を得る．また，$\beta + 1 \leq \alpha$ だから，ふたたび帰納法の仮定より $\widetilde{F}(\beta+1)(x) = \widetilde{F}(\alpha)(x)$ である．よって，$\widetilde{F}(\alpha+1)(x) = \widetilde{F}(\alpha)(x)$ であり，$x \in R(\alpha)$ は任意だったから，$\widetilde{F}(\alpha+1) \restriction R(\alpha) = \widetilde{F}(\alpha)$ が成り立つ．以上より，順序数 α に対して，$\widetilde{F}(\alpha)$ は $R(\alpha)$ 上の写像であり，任意の $\beta < \alpha$ に対して $\widetilde{F}(\alpha) \restriction R(\beta) = \widetilde{F}(\beta)$ である．

さて，$\widetilde{F}$ を用いて，集合 x に対して $F(x)$ を

$$F(x) = \widetilde{F}(\mathrm{rank}(x)+1)(x)$$

と定める（基礎の公理を用いる）．正確には，対応 $\widetilde{F}$ を定める論理式 $\widetilde{\psi}$ を用いて論理式 ψ を明示的に定め，$\forall x \exists! y \psi(x, y)$ であり，ψ が定める対応 F が上式を満たすようにする．すると，$\widetilde{F}$ の定義と前段の結果より，任意の集合 x に対して

$$F(x) = \widetilde{F}(\mathrm{rank}(x)+1)(x) = G(\widetilde{F}(\mathrm{rank}(x)) \restriction \mathrm{trcl}(x)) = G(F \restriction \mathrm{trcl}(x))$$

が成り立つ．これで示された．[*28] □

[*28] 再帰的定義に関するより一般的な命題が，Kunen [2, pp. 137–138] で示されている．

I.15 実数と記号的存在

解答 I.15.2 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ は定義から明らかである．また，$\mathbb{Q}$ の各元は ω の元であるかまたは $i, m, n \in \omega$ を用いて $\langle i, \langle m, n \rangle\rangle$ と表せるので，補題 I.14.5 (3) と補題 I.14.8 (2) より，そのランクは有限である．よって，$\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{HF}$ である．$\omega \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathrm{HF}$ と補題 I.14.5 (3)，補題 I.14.6 より

$$\omega = \mathrm{rank}(\omega) \leq \mathrm{rank}(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{rank}(\mathbb{Q}) \leq \omega$$

だから，$\mathrm{rank}(\mathbb{Z}) = \mathrm{rank}(\mathbb{Q}) = \omega$ である．また，補題 I.14.5 (3) と補題 I.14.8 (2) より，

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(-2/3) = \mathrm{rank}(\langle 1, \langle 2, 3\rangle\rangle) &= \max(\mathrm{rank}(1), \mathrm{rank}(\langle 2, 3\rangle)) + 2 \\ &= \max(\mathrm{rank}(1), \max(\mathrm{rank}(2), \mathrm{rank}(3)) + 2) + 2 \\ &= \max(1, \max(2, 3) + 2) + 2 \\ &= 7\end{aligned}$$

である． □

解答 I.15.5 $x \in \mathbb{R}$ を任意にとる．$x \subseteq \mathbb{Q}$ だから，補題 I.14.7 と演習問題 I.15.2 より $\mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(\mathbb{Q}) \leq \omega$ である．一方で，$x \neq \emptyset$ かつ x は下に閉じているから，十分大きい任意の $m \in \omega$ に対して $\langle 1, \langle m, 1\rangle\rangle = -m \in x$ となる．よって，補題 I.14.6 より，$\mathrm{rank}(x) \geq \omega$ である．これで，$\mathrm{rank}(x) = \omega$ が示された．さらに，これと補題 I.14.6 より，$\mathrm{rank}(\mathbb{R}) = \omega + 1$ である．

$\mathbb{C}$ の各元は $x, y \in \mathbb{R}$ を用いて $\langle x, y\rangle$ と書けるので，前段の結果と補題 I.14.8 (2) より，そのランクは $\omega + 2$ である．これと補題 I.14.6 より，$\mathrm{rank}(\mathbb{C}) = \omega + 3$ である． □

解答 I.15.8* 準備として，$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ を示す．$\mathbb{Q}$ の定義より $\omega \subseteq \mathbb{Q} \preccurlyeq \{0\} \times \omega \cup \{1\} \times (\omega \times (\omega \times \omega))$ だから，$\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}| \leq \aleph_0 + \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ である（補題 I.13.6）．よって，$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ である．

$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ を示す．$b \in {}^{\omega}2$ に対して $\sum_{i=0}^{\infty} b(i) 2^{-2(i+1)} \in \mathbb{R}$ を対応させる写像は単射だから，$2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$ である．一方で，$\mathbb{R}$ の定義より $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ だから，$|\mathbb{R}| \leq 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0}$ である．よって，$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ である．

$|C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ を示す．$x \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbb{R}$ 上の定値写像 $x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を対応させる写像は単射だから，$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R}, \mathbb{R})|$ である．一方で，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ において稠密であることと連続関数の性質より，$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対して $f{\restriction}\mathbb{Q} \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ を対応させる写像は単射だから，$|C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| \leq |{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ である（補題 I.13.9）．よって，$|C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ である．

$|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ である（補題 I.13.9）．[*29] □

解答 I.15.9* (Borel 部分集合について) 一般に，集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ について，X の部分集合族の列 $\langle \mathcal{B}_\alpha : \alpha \leq \omega_1 \rangle$ を超限再帰的に

- $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}$ とする．
- 順序数 $\alpha < \omega_1$ について，$\mathcal{B}_\alpha$ が定まったとき，$\mathcal{B}_\alpha$ の元の可算個の和集合と $\mathcal{B}_\alpha$ の元の X における補集合の全体を，$\mathcal{B}_{\alpha+1}$ と定める．
- 極限順序数 $\alpha \leq \omega_1$ について，任意の $\xi < \alpha$ に対して $\mathcal{B}_\xi$ が定まったとき，$\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{B}_\xi$ と定める．

*29 $2^{\aleph_0}$ や $2^{2^{\aleph_0}}$ を定義するためには選択公理が必要だが，以上の証明からわかるとおり，$\mathbb{R} \approx C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx {}^{\omega}2$ や ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \approx {}^{{}^{\omega}2}2$ を示すだけならば，選択公理は不要である．

と定めると，$\mathcal{A}$ が生成する σ-集合代数 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}_{\omega_1}$ に等しいことを示す．

まず，$\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ を含む σ-集合代数であることから，超限帰納法により，任意の $\alpha \leq \omega_1$ に対して $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$ であることがわかる．よって，$\mathcal{B}_{\omega_1} \subseteq \mathcal{B}$ である．次に，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$ を示す．$\mathcal{B}$ の最小性より，そのためには，$\mathcal{B}_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ が σ-集合代数をなすことをいえばよい．$A \in \mathcal{B}_{\omega_1}$ とし，$A \in \mathcal{B}_\alpha$ なる最小の順序数 $\alpha < \omega_1$ をとると，$X \setminus A \in \mathcal{B}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$ である．よって，$\mathcal{B}_{\omega_1}$ は補集合をとる操作に関して閉じている．$\mathcal{B}_{\omega_1}$ の可算部分族 $\{A_i : i \in I\}$ を任意にとる．各 $i \in I$ に対して，$A_i \in \mathcal{B}_\alpha$ なる最小の順序数 $\alpha < \omega_1$ を α_i と置く．$\alpha = \sup\{\alpha_i : i \in I\}$ と置くと，I は可算だから $\alpha < \omega_1$ であり（補題 I.13.11 (5) より ω_1 が正則であることを用いた．選択公理を用いる），任意の $i \in I$ に対して $A_i \in \mathcal{B}_\alpha$ である（$\langle \mathcal{B}_\alpha : \alpha \leq \omega_1 \rangle$ が増大列であることに注意）．したがって，$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$ である．よって，$\mathcal{B}_{\omega_1}$ は可算部分族の和集合をとる操作に関して閉じている．これで，$\mathcal{B}_{\omega_1}$ は σ-集合代数をなし，したがって $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$ であることが示された．以上より，$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\omega_1}$ である．

集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ について，$|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$ ならば，$\mathcal{A}$ が生成する σ-集合代数 $\mathcal{B}$ について $|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$ であることを示す．$|\mathcal{B}| \geq 2^{\aleph_0}$ は明らかである．$|\mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$ を示すために，X の部分集合族の列 $\langle \mathcal{B}_\alpha : \alpha \leq \omega_1 \rangle$ を前々段のとおりに定め，任意の $\alpha \leq \omega_1$ に対して $|\mathcal{B}_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$ であることを超限帰納法で示す．$\alpha = 0$ のとき，$|\mathcal{B}_0| = |\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$ より結論は成り立つ．$\alpha < \omega_1$ に対して結論が成り立つとすると，$|\mathcal{B}_{\alpha+1}| \leq |[\mathcal{B}_\alpha]^{<\omega_1}| + |\mathcal{B}_\alpha| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ だから（演習問題 I.13.20 の後半，補題 I.13.9，補題 I.13.6），結論は $\alpha + 1$ に対しても成り立つ．$\alpha \leq \omega_1$ を極限順序数とし，α 未満に対して結論が成り立つとすると，定理 I.12.11（選択公理を用いる）より $|\mathcal{B}_\alpha| = |\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{B}_\xi| \leq 2^{\aleph_0}$ だから，結論は α に対しても成り立つ．以上より，$|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$ である．

さて，$\mathbb{R}$ の Borel 部分集合全体の集合とは，$\mathbb{R}$ の開集合全体のなす集合 $\mathcal{A}$ が生成する σ-集合代数 $\mathcal{B}$ のことである．$x \in \mathbb{R}$ に対して $(x, x+1) \in \mathcal{A}$ を対応させる写像は単射だから $|\mathcal{A}| \geq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ であり（演習問題 I.15.8），一方で $\mathbb{R}$ は第二可算だから $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^{\aleph_0}$ である．よって，前段の結果より，$|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$ である．

(Lebesgue 可測部分集合について)　$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$ だから（演習問題 I.15.8），$\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測部分集合の個数は $2^{2^{\aleph_0}}$ 以下である．一方で，Cantor 集合 $C \subseteq \mathbb{R}$ は Lebesgue 零集合だから，C の部分集合はすべて Lebesgue 可測であり，したがって $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測部分集合は少なくとも $|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^{2^{\aleph_0}}$ 個存在する（Cantor 集合については，たとえば Cohn [1, pp. 26–27] を参照のこと）．よって，$\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測部分集合の個数は $2^{2^{\aleph_0}}$ である．□

解答 I.15.10*　□

解答 I.15.11*　□

解答 I.15.12*　□

解答 I.15.14　演習問題 I.14.20 の後半（選択公理を用いる）で $\kappa = \omega$ として，任意の $n < \omega$ に対して n から HF への写像は HF の元であること，すなわち ${}^{<\omega}\mathrm{HF} \subseteq \mathrm{HF}$ を得る．□

解答 I.15.15　0 以外の順序数は $0 = \emptyset$ を元にもつが，写像の元はすべて順序対であるから空ではない．よって，どんな写像も 0 以外の順序数と等しくはなりえない．特に，任意の $A \subseteq \omega \setminus \{0\}$ に対して $A \cap {}^{<\omega}A = \emptyset$ である．□

参考文献

[1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Springer, 2013.
[2] K. Kunen（著），藤田 博司（訳），『集合論 独立性証明への案内』，日本評論社，2008.
[3] K. Kunen（著），藤田 博司（訳），『キューネン 数学基礎論講義』，日本評論社，2016.
[4] 内田 伏一，『集合と位相』，裳華房，1986.