

フィルタのノート

箱 (@o_ccah)

2019 年 5 月 12 日

記号と用語

- 0 を含む自然数全体の集合を、 \mathbb{N} と書く.
- 集合 X の部分集合全体のなす集合を、 $\mathfrak{P}(X)$ と書く.
- A_0, \dots, A_{n-1} などと書いた場合、特に断らない限り、 $n \in \mathbb{N}$ とする.
- 集合 X の部分集合について考えているとき、空な交叉は X , 空な合併は \emptyset であると約束する.
- 集合 X の部分集合族 \mathfrak{A} について、 \mathfrak{A} が有限交叉性をもつとは、任意の有限個の元 $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ に対して $A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \neq \emptyset$ であることをいう.
- 集合 X の部分集合族 \mathfrak{A} と $X' \subseteq X$ に対して、 \mathfrak{A} の X' への制限を $\mathfrak{A}|_{X'} = \{A \cap X' \mid A \in \mathfrak{A}\}$ と定める.

1 フィルタの定義

定義 1.1 (フィルタ) 集合 X の部分集合族 \mathfrak{F} が次の条件を満たすとき、 \mathfrak{F} は X 上のフィルタであるといい、これらの組 (X, \mathfrak{F}) をフィルタ付き集合という.

(F1) $F \in \mathfrak{F}$ かつ $F \subseteq F' \subseteq X$ ならば $F' \in \mathfrak{F}$ である.

(F2) $F_0, \dots, F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ ならば $F_0 \cap \dots \cap F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ である (特に $X \in \mathfrak{F}$ である).

$\mathfrak{P}(X)$ を X 上の自明なフィルタという. 自明でないフィルタを真フィルタという.

容易にわかるように、集合 X 上のフィルタ \mathfrak{F} が真フィルタであるための必要十分条件は、 $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ である. また、真フィルタは有限交叉性をもつ.

命題 1.2 X を集合、 \mathfrak{F} を X 上のフィルタとする. X の部分集合 A_0, \dots, A_{n-1} に対して、 $A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \in \mathfrak{F}$ であることと、すべての A_i が \mathfrak{F} に属することとは同値である. \square

定義 1.3 (フィルタの比較) 集合 X 上のフィルタ全体の集合を、包含関係によって順序集合とみなす. より詳しくは、集合 X 上のフィルタ $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ に対して、 $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1$ であるとき、 \mathfrak{F}_1 は \mathfrak{F}_0 よりも細かい、 \mathfrak{F}_0 は \mathfrak{F}_1 よりも粗いという. より強く $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1$ であるとき、それぞれ真に細かい、真に粗いという.

2 準フィルタ基とフィルタ基

定義 2.1 (準フィルタ基・フィルタ基) X を集合, \mathfrak{F} を X 上のフィルタ, \mathfrak{B} を X の部分集合族とする.

- (1) \mathfrak{B} の元の有限交叉の拡大として表せる集合全体が \mathfrak{F} と一致するとき, すなわち

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{有限個の元 } B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B_0 \cap \dots \cap B_{n-1} \subseteq F\} \quad (*)$$

であるとき, \mathfrak{B} はフィルタ \mathfrak{F} の準フィルタ基である, あるいは \mathfrak{B} はフィルタ \mathfrak{F} を生成するという.

- (2) \mathfrak{B} の元の拡大として表せる集合全体が \mathfrak{F} と一致するとき, すなわち

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$$

であるとき, \mathfrak{B} はフィルタ \mathfrak{F} のフィルタ基であるという. \mathfrak{B} が集合 X 上のあるフィルタのフィルタ基であるとき, 単に \mathfrak{B} は X 上のフィルタ基であるといい, \mathfrak{B} が X 上のある真フィルタのフィルタ基であるとき, \mathfrak{B} は X 上の真フィルタ基であるという.

容易にわかるように, 集合 X の部分集合族 \mathfrak{B} に対して, $(*)$ の右辺は常に X 上のフィルタとなっている. さらに, これは \mathfrak{B} を含む X 上のフィルタの中で最小のものである. したがって, \mathfrak{B} が生成するフィルタとは, \mathfrak{B} を含むような最小のフィルタのことに他ならない.

命題 2.2 X を集合, \mathfrak{B} をその部分集合族とする.

- (1) \mathfrak{B} が X 上のある真フィルタの準フィルタ基である (すなわち, \mathfrak{B} が真フィルタを生成する) ための必要十分条件は, \mathfrak{B} が有限交叉性をもつことである.
- (2) \mathfrak{B} が X 上の (あるフィルタの) フィルタ基であるための必要十分条件は, 「 $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ ならば, ある集合 $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq B_0 \cap \dots \cap B_{n-1}$ となる」ことである.
- (3) \mathfrak{B} が X 上の真フィルタ基であるための必要十分条件は, (2) の条件に加えて $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ が成り立つことである.

証明 (1) \mathfrak{B} が有限交叉性をもたなければ, \mathfrak{B} の元の有限交叉として \emptyset が得られるから, \mathfrak{B} は自明なフィルタを生成する. 逆に, \mathfrak{B} が有限交叉性をもてば, \mathfrak{B} の有限交叉の拡大全体は \emptyset を含まないから, \mathfrak{B} は真フィルタを生成する.

(2) 必要性を示す. $\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$ がフィルタであるとする. $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ とすると, フィルタの定義より $B_0 \cap \dots \cap B_{n-1} \in \mathfrak{F}$ だから, \mathfrak{F} の定義より $B \subseteq B_0 \cap \dots \cap B_{n-1}$ なる $B \in \mathfrak{B}$ が存在する. よって, 条件は必要である.

十分性を示す. 件の条件が成り立つとする. $\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$ と置くと, (F1) は明らかに成り立ち, 仮定より (F2) も成り立つ. よって, 条件は十分である.

(3) \mathfrak{B} が X 上の真フィルタ基であるための必要十分条件は「(1) かつ (2)」だが, 容易にわかるように, (2) の条件の下で (1) の条件は $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ と同値なので, 主張が従う. \square

3 極大フィルタ

定義 3.1 (極大フィルタ) 集合 X 上の真フィルタのうち包含関係に関して極大であるものを, X 上の極大フィルタという.

命題 3.2 集合 X の部分集合族 \mathfrak{A} について, 次の 2 条件は同値である.

- (a) \mathfrak{A} は X 上の極大フィルタである.
- (b) \mathfrak{A} は有限交叉性を持ち, かつ任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{A}$ または $A^c \in \mathfrak{A}$ が成り立つ.

証明 (a) \implies (b) \mathfrak{A} が X 上の極大フィルタであるとする. まず, \mathfrak{A} は真フィルタだから, 有限交叉性をもつ. 次に, ある $A \subseteq X$ に対して $A, A^c \notin \mathfrak{A}$ と仮定する. $A^c \notin \mathfrak{A}$ だから, \mathfrak{A} は A^c の部分集合を含まない. すなわち, \mathfrak{A} のすべての元は A と交わる. したがって, $\mathfrak{A} \cup \{A\}$ はまた有限交叉性をもつ. $\mathfrak{A} \cup \{A\}$ が生成する真フィルタは \mathfrak{A} よりも真に細かいが, これは \mathfrak{A} の極大性に矛盾する. よって, 任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{A}$ または $A^c \in \mathfrak{A}$ が成り立つ.

(b) \implies (a) \mathfrak{A} が (b) の条件を満たすとする. まず, \mathfrak{A} が真フィルタであることを示す. $A \in \mathfrak{A}$ かつ $A \subseteq A' \subseteq X$ とすると, \mathfrak{A} の有限交叉性より $A'^c \notin \mathfrak{A}$ だから, $A' \in \mathfrak{A}$ である. また, $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ とすると, $A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap (A_0 \cap \dots \cap A_{n-1})^c = \emptyset$ だから, \mathfrak{A} の有限交叉性より $(A_0 \cap \dots \cap A_{n-1})^c \notin \mathfrak{A}$ であり, したがって $A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ である. さらに, \mathfrak{A} は有限交叉性をもつから $\emptyset \notin \mathfrak{A}$ である. よって, \mathfrak{A} は真フィルタである.

次に, \mathfrak{A} が極大フィルタであることを示す. $A \notin \mathfrak{A}$ とすると, $A^c \in \mathfrak{A}$ である. $A \cap A^c = \emptyset$ だから, $\mathfrak{A} \cup \{A\}$ を含む真フィルタは存在しない. よって, \mathfrak{A} は極大フィルタである. \square

命題 3.3 X を集合, \mathfrak{M} を X 上の極大フィルタとする. X の部分集合 A_0, \dots, A_{n-1} に対して, $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1} \in \mathfrak{M}$ であることと, ある A_i が \mathfrak{M} に属することとは同値である. 特に, $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1} = X$ ならば, ある A_i が \mathfrak{M} に属する.

証明 命題 3.2 より, $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1} \in \mathfrak{M}$ は「 $A_0^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c \in \mathfrak{M}$ 」の否定と同値であり, ある A_i が \mathfrak{M} に属することは「すべての A_i^c が \mathfrak{M} に属する」ことの否定と同値である. 鉤括弧で囲った 2 つの条件は同値 (命題 1.2) だから, 主張が従う. \square

定理 3.4 集合 X 上の任意の真フィルタ \mathfrak{F} に対して, \mathfrak{F} よりも細かい極大フィルタが存在する.

証明 真フィルタ \mathfrak{F} よりも細かい真フィルタの全体に Zorn の補題を適用して, 結論を得る. \square

4 フィルタ射

定義 4.1 (フィルタ射) $(X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{G})$ をフィルタ付き集合とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が (X, \mathfrak{F}) から (Y, \mathfrak{G}) へのフィルタ射であるとは, 任意の $G \in \mathfrak{G}$ に対して $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$ であることをいう.

命題 4.2 フィルタ付き集合 $(X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{G}), (Z, \mathfrak{H})$ の間の写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ について, f と g がフィルタ射ならば, $g \circ f$ もフィルタ射である. \square

命題 4.3 $(X, \mathfrak{F}), (Y, \mathfrak{G})$ をフィルタ付き集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. \mathfrak{B} が \mathfrak{G} の準フィルタ基であるとき, f がフィルタ射であるための必要十分条件は, 任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ となることである.

証明 必要性は明らかだから, 十分性を示す. \mathfrak{B} が \mathfrak{G} の準フィルタ基であり, 任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ が成り立つとする. 任意に $G \in \mathfrak{G}$ をとると, 準フィルタ基の定義より, $B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \subseteq G$ を満たす $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ が存在する. このとき

$$f^{-1}(B_0) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_{n-1}) = f^{-1}(B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \subseteq f^{-1}(G)$$

が成り立つ. 条件より $f^{-1}(B_1), \dots, f^{-1}(B_n) \in \mathfrak{F}$ だから, フィルタの性質より $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$ である. よって, f はフィルタ射である. \square

5 フィルタの誘導

5.1 始フィルタと終フィルタ

定義 5.1 (始フィルタ・終フィルタ) X を集合, $\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族とする.

- (1) 写像族 $\{\phi_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ に対して, すべての ϕ_i がフィルタ射となるような X 上の最小のフィルタ構造を, $\{((Y_i, \mathfrak{G}_i), \phi_i)\}_{i \in I}$ (あるいは単に $\{\phi_i\}_{i \in I}$) が誘導する X 上の始フィルタという.
- (2) 写像族 $\{\sigma_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ に対して, すべての σ_i がフィルタ射となるような X 上の最大のフィルタ構造を, $\{((Y_i, \mathfrak{G}_i), \sigma_i)\}_{i \in I}$ (あるいは単に $\{\sigma_i\}_{i \in I}$) が誘導する X 上の終フィルタという.

容易にわかるように, $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタは,

$$\{F \subseteq X \mid \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(F) \in \mathfrak{G}_i\}$$

で与えられる.

\mathfrak{F} を X 上のフィルタとすると, $\phi_i: X \rightarrow Y_i$ が (X, \mathfrak{F}) から (Y_i, \mathfrak{G}_i) へのフィルタ射であるための必要十分条件は, \mathfrak{F} が $\phi_i^{-1}(G)$ ($G \in \mathfrak{G}_i$) という形の集合をすべて含むことである. よって, $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは, $\phi_i^{-1}(G)$ ($i \in I, G \in \mathfrak{G}_i$) という形の集合全体が生成するフィルタに他ならない. より詳しく, 次の命題が成り立つ.

命題 5.2 X を集合, $\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族, $\{\phi_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする. $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタを \mathfrak{F}_I とする. 各 $i \in I$ に対して, \mathfrak{C}_i が \mathfrak{G}_i の準フィルタ基ならば,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}} &= \{\phi_i^{-1}(C) \mid i \in I, C \in \mathfrak{C}_i\}, \\ \mathfrak{B} &= \{\phi_{i_0}^{-1}(C_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}, i_0, \dots, i_{n-1} \in I, C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}\} \end{aligned}$$

はそれぞれ \mathfrak{F}_I の準フィルタ基・フィルタ基である.

証明 \mathfrak{F} を X 上のフィルタとすると, 命題 4.3 より, $\phi_i: X \rightarrow Y_i$ が (X, \mathfrak{F}) から (Y_i, \mathfrak{G}_i) へのフィルタ射であるための必要十分条件は, \mathfrak{F} が $\phi_i^{-1}(C)$ ($C \in \mathfrak{C}_i$) という形の集合をすべて含むことである. よって, $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは, $\phi_i^{-1}(C)$ ($i \in I, C \in \mathfrak{C}_i$) という形の集合全体が生成するフィルタに他ならない. これは, $\tilde{\mathfrak{B}}$ が \mathfrak{F}_I の準フィルタ基であることを示している. \mathfrak{B} は $\tilde{\mathfrak{B}}$ の元の有限交叉全体だから, \mathfrak{F}_I のフィルタ基である. \square

特に、命題 5.2 で、 $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i$ と置いたときの $\widetilde{\mathfrak{B}}$ と \mathfrak{B} を、それぞれ始フィルタ \mathfrak{F}_i の標準準フィルタ基・標準フィルタ基という。

命題 5.3 (始フィルタ・終フィルタの特徴付け) X を集合、 $\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族とする。

- (1) 写像族 $\{\phi_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは、次の性質をもつ唯一の X 上のフィルタである。

任意のフィルタ付き集合 (Z, \mathfrak{H}) と写像 $f: Z \rightarrow X$ について、 f がフィルタ射であることと、任意の $i \in I$ に対して $\phi_i \circ f$ がフィルタ射であることは同値である。

- (2) 写像族 $\{\sigma_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタは、次の性質をもつ唯一の X 上のフィルタである。

任意のフィルタ付き集合 (Z, \mathfrak{H}) と写像 $g: X \rightarrow Z$ について、 g がフィルタ射であることと、任意の $i \in I$ に対して $g \circ \sigma_i$ がフィルタ射であることは同値である。

証明 (1) $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタを \mathfrak{F}_i とする。このとき、フィルタ付き集合 Z と写像 $f: Z \rightarrow X$ に対して、次の同値関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \phi_i \circ f \text{ がフィルタ射} \\ & \iff \text{任意の } i \in I \text{ と } G \in \mathfrak{G}_i \text{ に対して } f^{-1}(\phi_i^{-1}(G)) \in \mathfrak{H} \\ & \iff \mathfrak{F}_i \text{ の標準準フィルタ基の任意の元 } B \text{ に対して } f^{-1}(B) \in \mathfrak{H} \\ & \iff \text{任意の } F \in \mathfrak{F}_i \text{ に対して } f^{-1}(F) \in \mathfrak{H}. \end{aligned} \quad (*)$$

一方で、 X 上のフィルタ \mathfrak{F} によって X をフィルタ付き集合とみなすとき、 f がフィルタ射であることは、次のようにいいかえられる。

$$\text{任意の } F \in \mathfrak{F} \text{ に対して } f^{-1}(F) \in \mathfrak{H} \quad (**)$$

任意のフィルタ付き集合 (Z, \mathfrak{H}) と写像 $f: Z \rightarrow X$ に対して $(*) \iff (**) \iff \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$ であることに他ならない。

- (2) $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタを \mathfrak{F}_f とする。このとき、フィルタ付き集合 Z と写像 $g: X \rightarrow Z$ に対して、次の同値関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \text{任意の } i \in I \text{ に対して } g \circ \sigma_i \text{ がフィルタ射} \\ & \iff \text{任意の } i \in I \text{ と } H \in \mathfrak{H} \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(g^{-1}(H)) \in \mathfrak{G}_i \\ & \iff \text{任意の } H \in \mathfrak{H} \text{ に対して } g^{-1}(H) \in \mathfrak{F}_f. \end{aligned} \quad (***)$$

一方で、 X 上のフィルタ \mathfrak{F} によって X をフィルタ付き集合とみなすとき、 g がフィルタ射であることは、次のようにいいかえられる。

$$\text{任意の } H \in \mathfrak{H} \text{ に対して } g^{-1}(H) \in \mathfrak{F}. \quad (****)$$

任意のフィルタ付き集合 (Z, \mathfrak{H}) と写像 $g: X \rightarrow Z$ に対して $(***) \iff (****) \iff \mathfrak{F}_f = \mathfrak{F}$ であることに他ならない。□

命題 5.4 (始フィルタ・終フィルタの推移性) X を集合、 $\{Y_i\}_{i \in I}$ を集合族、 $\{(Z_{ij}, \mathfrak{H}_{ij})\}_{i \in I, j \in J_i}$ (J_i は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合) をフィルタ付き集合族とする。

- (1) $\{\phi_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$, $\{\psi_{ij}: Y_i \rightarrow Z_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ を写像族とする. このとき, $\{\psi_{ij} \circ \phi_i\}_{i \in I, j \in J_i}$ が誘導する X 上の始フィルタと, 「各 Y_i を $\{\psi_{ij}\}_{j \in J_i}$ が誘導する始フィルタによってフィルタ付き集合とみなすときの, $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタ」とは一致する.
- (2) $\{\sigma_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$, $\{\tau_{ij}: Z_{ij} \rightarrow Y_i\}_{i \in I, j \in J_i}$ を写像族とする. このとき, $\{\sigma_i \circ \tau_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ が誘導する X 上の終フィルタと, 「各 Y_i を $\{\tau_{ij}\}_{j \in J_i}$ が誘導する終フィルタによってフィルタ付き集合とみなすときの, $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタ」とは一致する.

証明 (1) 始フィルタの特徴付け (命題 5.3 (1)) より, ϕ_i がフィルタ射であることと, 任意の $j \in J_i$ に対して $\psi_{ij} \circ \phi_i$ がフィルタ射であることは同値である. ここから結論が従う.

(2) 終フィルタの特徴付け (命題 5.3 (2)) より, σ_i がフィルタ射であることと, 任意の $j \in J_i$ に対して $\sigma_i \circ \tau_{ij}$ がフィルタ射であることは同値である. ここから結論が従う. \square

5.2 逆像フィルタと像フィルタ

定義 5.5 (逆像フィルタ・像フィルタ) X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) Y をフィルタ構造 \mathfrak{G} によってフィルタ付き集合とみなすとき, f が誘導する X 上の始フィルタを, \mathfrak{G} の f による逆像フィルタといい, $f^{-1}(\mathfrak{G})$ と書く.
- (2) X をフィルタ構造 \mathfrak{F} によってフィルタ付き集合とみなすとき, f が誘導する Y 上の終フィルタを, \mathfrak{F} の f による像フィルタといい, $f(\mathfrak{F})$ と書く.

逆像フィルタ $f^{-1}(\mathfrak{G})$, 像フィルタ $f(\mathfrak{F})$ を具体的に書けば,

$$f^{-1}(\mathfrak{G}) = \{A \subseteq X \mid \text{ある } G \in \mathfrak{G} \text{ が存在して } f^{-1}(G) \subseteq A\},$$

$$f(\mathfrak{F}) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\}$$

となる.

命題 5.6 X, Y を集合, \mathfrak{G} を Y 上のフィルタ, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) \mathfrak{C} が \mathfrak{G} の準フィルタ基ならば, $\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ の準フィルタ基である.
- (2) \mathfrak{C} が \mathfrak{G} のフィルタ基ならば, $\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基である.

証明 (1) 命題 5.2 から従う.

(2) \mathfrak{B} が $f^{-1}(\mathfrak{G})$ を生成することは (1) からわかるから, \mathfrak{B} が集合 X 上のフィルタ基であることを確かめればよい. $C_0, \dots, C_{n-1} \in \mathfrak{C}$ を任意にとる. \mathfrak{C} はフィルタ基だから, $C \subseteq C_0 \cap \dots \cap C_{n-1}$ を満たす $C \in \mathfrak{C}$ がとれる. このとき, $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(C_0) \cap \dots \cap f^{-1}(C_{n-1})$ が成り立つ. よって, 命題 2.2 (2) より, \mathfrak{B} は X 上のフィルタ基である. \square

命題 5.7 X, Y を集合, \mathfrak{F} を X 上のフィルタ, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. \mathfrak{B} が \mathfrak{F} のフィルタ基ならば, $\mathfrak{C} = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は $f(\mathfrak{F})$ のフィルタ基である.

証明 一般に $B \subseteq X$ に対して $f^{-1}(f(B)) \supseteq B$ だから, $B \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ ならば $f^{-1}(f(B)) \in \mathfrak{F}$, したがって $f(B) \in f(\mathfrak{F})$ である. よって, $\mathfrak{C} \subseteq f(\mathfrak{F})$ である. 一方で, $G \in f(\mathfrak{F})$ ならば $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$, したがってある $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq f^{-1}(G)$ となる. このとき $f(B) \in \mathfrak{C}$ であり, $f(B) \subseteq G$ が成り立つ. よって, \mathfrak{C} は $f(\mathfrak{F})$

のフィルタ基である.

□

命題 5.8 X, Y, Z を集合, $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.

(1) Z 上のフィルタ \mathfrak{H} に対して, $f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{H})) = (g \circ f)^{-1}(\mathfrak{H})$ である.

(2) X 上のフィルタ \mathfrak{F} に対して, $g(f(\mathfrak{F})) = g \circ f(\mathfrak{F})$ である.

証明 始フィルタ・終フィルタの推移性 (命題 5.4) から従う.

□

命題 5.9 X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像, \mathfrak{G} を Y 上のフィルタとする. $f^{-1}(\mathfrak{G})$ が真フィルタであるための必要十分条件は, 任意の $G \in \mathfrak{G}$ が $f(X)$ と交わることである. 特に, f が全射で \mathfrak{G} が真フィルタならば, $f^{-1}(\mathfrak{G})$ も真フィルタである.

□

命題 5.10 X, Y を集合, \mathfrak{F} を X 上のフィルタ, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

(1) \mathfrak{F} が真フィルタならば, $f(\mathfrak{F})$ も真フィルタである.

(2) \mathfrak{F} が極大フィルタならば, $f(\mathfrak{F})$ も極大フィルタである.

証明 (1) 明らかである.

(2) 命題 3.2 より, \mathfrak{F} が極大フィルタであることは任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{F}$ または $A^c \in \mathfrak{F}$ が成り立つことと同値であり, $f(\mathfrak{F})$ が極大フィルタであることは任意の $B \subseteq Y$ に対して $B \in f(\mathfrak{F})$ または $B^c \in f(\mathfrak{F})$ が成り立つことと同値である. 後者は前者から従う ($A = f^{-1}(B)$ と置けばわかる) から, \mathfrak{F} が極大フィルタならば $f(\mathfrak{F})$ も極大フィルタである.

□

命題 5.11 X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

(1) X 上のフィルタ \mathfrak{F} に対して, $f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}$ である.

(2) Y 上のフィルタ \mathfrak{G} に対して, $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である. $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ であるための必要十分条件は, $f(X) \in \mathfrak{G}$ である.

証明 (1) f は (X, \mathfrak{F}) から $(Y, f(\mathfrak{F}))$ へのフィルタ射であり, $(X, f^{-1}(f(\mathfrak{F})))$ から $(X, f(\mathfrak{F}))$ へのフィルタ射でもある. よって, 始フィルタの最小性より, $f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}$ である.

(2) f は $(X, f^{-1}(\mathfrak{G}))$ から (Y, \mathfrak{G}) へのフィルタ射であり, $(X, f^{-1}(\mathfrak{G}))$ から $(Y, f(f^{-1}(\mathfrak{G})))$ へのフィルタ射でもある. よって, 終フィルタの最大性より, $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である.

後半の主張を示す. $f(X) \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ だから, $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ ならば $f(X) \in \mathfrak{G}$ である. 逆に, $f(X) \in \mathfrak{G}$ とする. $B \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ を任意にとると, $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathfrak{G})$ だから, ある $G \in \mathfrak{G}$ が存在して $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(B)$ となる. このとき $G \cap f(X) = f(f^{-1}(G)) \subseteq B$ であり, 仮定より $G, f(X) \in \mathfrak{G}$ だから, $B \in \mathfrak{G}$ である. よって, $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{G}$ であり, 前半の結論と合わせて $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ を得る.

□

5.3 相対フィルタ

定義 5.12 (相対フィルタ) X を集合, \mathfrak{F} を X 上のフィルタ, $X' \subseteq X$ とする. X を \mathfrak{F} によってフィルタ付き集合とみなすときの, 包含写像 $\iota: X' \rightarrow X$ が誘導する X' 上の始フィルタ (すなわち, ι による \mathfrak{F} の逆像フィルタ) を, \mathfrak{F} が誘導する X' 上の相対フィルタという.

\mathfrak{F} が誘導する X' 上の相対フィルタは、具体的には、 \mathfrak{F} の X' への制限 $\mathfrak{F}|_{X'} = \{F \cap X' \mid F \in \mathfrak{F}\}$ に一致する。

命題 5.13 X を集合、 \mathfrak{F} を X 上のフィルタ、 $X' \subseteq X$ とする。

- (1) \mathfrak{B} が \mathfrak{F} の準フィルタ基ならば、 $\mathfrak{B}|_{X'}$ は \mathfrak{F} が誘導する X' 上の相対フィルタの準フィルタ基である。
- (2) \mathfrak{B} が \mathfrak{F} のフィルタ基ならば、 $\mathfrak{B}|_{X'}$ は \mathfrak{F} が誘導する X' 上の相対フィルタのフィルタ基である。

証明 命題 5.6 から従う。 □

命題 5.14 X を集合、 \mathfrak{F} を X 上のフィルタ、 $X'' \subseteq X' \subseteq X$ とする。このとき、 \mathfrak{F} が誘導する X'' 上の相対フィルタと、「 \mathfrak{F} が誘導する X' 上の相対フィルタ」が誘導する X'' 上の相対フィルタとは一致する。

証明 始フィルタの推移性（命題 5.4 (1)）から従う。 □

命題 5.15 X を集合、 \mathfrak{F} を X 上のフィルタ、 $X' \subseteq X$ とする。 \mathfrak{F} が誘導する X' 上の相対フィルタが真フィルタであるための必要十分条件は、 \mathfrak{F} の任意の元が X' と交わることである。

証明 命題 5.9 から従う。 □

5.4 積フィルタ

定義 5.16 (積フィルタ) $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族、 $X = \prod_{i \in I} X_i$ とし、各 $i \in I$ に対して \mathfrak{F}_i を X_i 上のフィルタとする。各 X_i を \mathfrak{F}_i によってフィルタ付き集合とみなすときの、射影 $p_i: X \rightarrow X_i$ の全体が誘導する X 上の始フィルタを、 $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ の積フィルタといい、 $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ と書く。

$\mathfrak{F}_0, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ の積フィルタを、 $\mathfrak{F}_0 \times \dots \times \mathfrak{F}_{n-1}$ とも書く。

積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ の標準準フィルタ基・標準フィルタ基は、それぞれ

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{B}} &= \left\{ \prod_{i \in I} F_i \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i, \text{ 1つの } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}, \\ \mathfrak{B} &= \left\{ \prod_{i \in I} F_i \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i, \text{ 有限個の } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}\end{aligned}$$

で与えられる。

命題 5.17 $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし、各 $i \in I$ に対して \mathfrak{F}_i を X_i 上のフィルタとする。積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ が真フィルタであるための必要十分条件は、すべての \mathfrak{F}_i が真フィルタであることである。

証明 積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ の標準フィルタ基は

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i \in I} F_i \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i, \text{ 有限個の } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}$$

であった。 \mathfrak{F} が真フィルタであることは $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ と同値であり、これはすべての \mathfrak{F}_i が真フィルタであることと同値である。 □

命題 5.18 $\{X_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ (J_i は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合) を集合族とし、各 $i \in I, j \in J_i$ に対して \mathfrak{F}_{ij} を X_{ij} 上のフィルタとする。このとき、積フィルタ $\prod_{i \in I, j \in J_i} \mathfrak{F}_{ij}$ と、積フィルタの族の積フィルタ

$\prod_{i \in I} \prod_{j \in J_i} \mathfrak{F}_{ij}$ とは等しい.

証明 始フィルタの推移性 (命題 5.4 (1)) から従う. \square

命題 5.19 $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族, $X = \prod_{i \in I} X_i$ とし, 各 $i \in I$ に対して $X'_i \subseteq X_i$, $X' = \prod_{i \in I} X'_i$ とする. また, 各 $i \in I$ に対して \mathfrak{F}_i を X_i 上のフィルタとする. \mathfrak{F}_i が誘導する X'_i 上の相対フィルタを \mathfrak{F}'_i , $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ が誘導する X' 上の相対フィルタを \mathfrak{F}' とするとき, $\mathfrak{F}' = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}'_i$ が成り立つ.

証明 $p_i: X \rightarrow X_i$ および $p'_i: X' \rightarrow X'_i$ を射影, $\iota: X' \rightarrow X$ および $\iota_i: X'_i \rightarrow X_i$ を包含写像とする. フィルタ \mathfrak{F}' は, 始フィルタの推移性 (命題 5.4 (1)) より, $\{p_i \circ \iota\}_{i \in I}$ が誘導する始フィルタに等しい. 一方で, 積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}'_i$ は, 同命題より, $\{\iota_i \circ p'_i\}_{i \in I}$ が誘導する始フィルタに等しい. ところが $p_i \circ \iota = \iota_i \circ p'_i$ だから, これらのフィルタは等しい. \square

命題 5.20 $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし, 各 $i \in I$ に対して \mathfrak{F}_i を X_i 上のフィルタとする. $X = \prod_{i \in I} X_i$, $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ と置き, $p_i: X \rightarrow X_i$ を射影とする. このとき, 各 $i \in I$ に対して,

$$p_i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_i$$

が成り立つ.

証明 積フィルタ $\mathfrak{F} = \prod \mathfrak{F}_i$ の標準フィルタ基は

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i \in I} F_i \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i, \text{ 有限個の } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}$$

だったから, 命題 5.7 より, $p_i(\mathfrak{F})$ のフィルタ基として $\mathfrak{B}_i = \{p_i(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ がとれる. ところが, \mathfrak{B}_i は \mathfrak{F}_i に等しい. よって, $p_i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_i$ である. \square

参考文献

[1] N. Bourbaki (著), 森 毅 (編・訳), 清水 達雄 (訳), 『ブルバキ数学原論 位相 1』, 東京図書, 1968.