離散半群の Stone–Čech コンパクト化と Ramsey 理論

箱（@o_ccah）

2018 年 9 月 10 日

（最終更新日：2019 年 3 月 21 日）

概要

コンパクト化とは，位相空間からコンパクト（Hausdorff）空間への連続写像（典型的には稠密な埋め込み）を考えることをいう．コンパクト化には様々な種類があるが，その中でも Stone–Čech コンパクト化は「最大の」コンパクト化であり，特によい性質（普遍性）をもっている．本稿では，半群を離散空間とみなすことでその Stone–Čech コンパクト化を考え，そこから組合せ論，特に Ramsey 理論的な結果が得られることを紹介する．

目次

記号と用語

- 0 を含む自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書き，正の整数全体の集合を $\mathbb{N}_{>0}$ と書く．
- 特に断らずに「$A_1, \ldots, A_n$」などと書いた場合には，$n \in \mathbb{N}$ とする（$n = 0$ の場合を除外しない）．
- 集合 X の部分集合について考えているとき，その空な交叉は X，空な合併は $\emptyset$ であると約束する．
- 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつとは，任意の有限個の元 $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ に対して $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ であることをいう．

1　プロローグ

Ramsey 理論とは，「どのような条件のもとで一定の秩序が必ず出現するといえるか」を調べる組合せ論の分野である．本発表では，Stone–Čech コンパクト化によって Ramsey 理論の結果が得られることを紹介する．具体的には，次の定理の証明を与える．

定理（Hindman の定理）　正の整数全体を r 色に塗り分けたとする．このとき，正の整数の無限列 $x_0, x_1, \ldots$ をとって，これらの重複なしの空でない有限和がすべて同色となるようにできる．

本論に入る前に，どのようにして Stone–Čech コンパクト化から Ramsey 理論の結果が得られるのか，その概略を見ておこう．次のようなタイプの問題は，Ramsey 理論では典型的である（分割正規性の問題）．

> S の部分集合 $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ が性質 P をもっているとき，
> 必ず $A_1, \ldots, A_r$ の中に性質 P をもつものが存在するか？

Hindman の定理もこれに該当し，$\mathbb{N}_{>0}$ が $S = A$ に，「r 色に塗り分けられた正の整数」が $A_1, \ldots, A_r$ に，「正の整数の無限列 $x_0, x_1, \ldots$ が存在して，それらの重複なしの空でない有限和がすべてその色である」という性質が P にあたる．

今回紹介する証明の概略は，次のとおりである．まず，性質 P を特徴づけるような「良い点のクラス」を定める．すなわち，

$$A \text{ が性質 } P \text{ をもつ} \iff A \text{ が「良い点」を「含む」}$$

が成り立つようにする．すると，$A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ が性質 P をもつならば，A は「良い点」を「含む」．$A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ だから，ある A_i が「良い点」を「含んで」いなければならない．このとき，その A_i は性質 P をもつ．

当然，「良い点のクラス」なるものは，もとの S（Hindman の定理の場合は $\mathbb{N}_{>0}$）の中には存在しない．ところが，S の Stone–Čech コンパクト化 βS の中にであれば，「良い点のクラス」を見つけられる場合がある．これには，βS がコンパクト Hausdorff（したがって十分に極限が存在する）であり，しかもある普遍性をもっていることが利いている．このようにして，「良い点のクラス」は βS の部分集合として定式化され，A が性質 P をもつことが，A が良い点を「含む」（もちろん，この「含む」は文字通りの意味ではない）ことによって特徴づけられるのである．

2　フィルタからの準備

定義 2.1（フィルタ）　集合 X の部分集合族 $\mathfrak{F}$ が次の 2 条件を満たすとき，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ（filter）という．

(i) $F \in \mathfrak{F}$ かつ $F \subseteq F' \subseteq X$ ならば $F' \in \mathfrak{F}$ である．すなわち，$\mathfrak{F}$ は上に閉じている．
(ii) $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{F}$ ならば $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathfrak{F}$ である（特に $X \in \mathfrak{F}$）．すなわち，$\mathfrak{F}$ は有限交叉で閉じている．

$\mathfrak{P}(X)$ を自明なフィルタ（trivial filter）といい，$\mathfrak{P}(X)$ 以外のフィルタを真フィルタ（proper filter）という．

フィルタの例をいくつか挙げておこう．

- $x \in X$ を固定したとき，「x を含む X の部分集合全体」は X 上の真フィルタである．これは，x が生成する単項フィルタ（principal filter）と呼ばれる．
- X を位相空間とする．$x \in X$ を固定したとき，「x の近傍全体」は X 上の真フィルタである．
- 無限集合 X に対して，「補集合が有限な X の部分集合全体」は X 上の真フィルタである．

明らかに，フィルタ $\mathfrak{F}$ が真フィルタであるための必要十分条件は，それが空集合を含まないことである．

集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ が与えられたとき，$\mathfrak{A}$ を含む最小の X 上のフィルタを $\mathfrak{A}$ が生成するフィルタという．$\mathfrak{A}$ が生成するフィルタは，具体的には次のように構成される（証明は容易なので省略する）．

命題 2.2　X を集合，$\mathfrak{A}$ を X の部分集合族とする．$\mathfrak{A}$ の元の有限交叉全体を $\mathfrak{A}'$，$\mathfrak{A}'$ の元の拡大全体（すなわち，ある $A \in \mathfrak{A}'$ を含むような X の部分集合の全体）を $\mathfrak{F}$ とすれば，$\mathfrak{F}$ は X 上のフィルタとなる．$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{A}$ を含む（包含関係に関して）最小のフィルタである．また，$\mathfrak{F}$ が真フィルタであるための必要十分条件は，$\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつことである． □

次に，極大フィルタを定義する．極大フィルタは，3 節で離散空間の Stone–Čech コンパクト化を構成するのに用いられる．

定義 2.3（極大フィルタ）　集合 X 上の真フィルタ全体の中で包含関係に関して極大なものを，X 上の極大フィルタ（maximal filter）[*1] という．

たとえば，単項フィルタは明らかに極大フィルタである．単項でない極大フィルタの存在は，ZF 上独立であることが知られている[*2]．ZFC 上では，次の命題により極大フィルタが十分に存在することがわかる．

命題 2.4　集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつならば，$\mathfrak{A}$ を含む極大フィルタが存在する．

証明　$\mathfrak{A}$ を含む真フィルタ全体の集合 $\mathscr{A}$ は空でなく，包含関係に関して帰納的だから，これに Zorn の補題を適用すればよい． □

極大フィルタの著しい性質を見ていこう．

命題 2.5　$\mathfrak{M}$ を集合 X 上の極大フィルタとする．このとき，任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{M}$ または $A^c \in \mathfrak{M}$ のどちらか一方のみが成り立つ．

証明　$\mathfrak{M}$ を極大フィルタとする．$A, A^c \in \mathfrak{M}$ と仮定すると $\emptyset = A \cap A^c \in \mathfrak{M}$ となり，$\mathfrak{M}$ が真フィルタであることに反するので，これはありえない．次に，ある $A \subseteq X$ が $A, A^c \notin \mathfrak{M}$ を満たす仮定する．フィルタが上に閉じていることより，$\mathfrak{M}$ は A^c の部分集合を含まない．したがって，$\mathfrak{M}$ のすべての元は A と交わるから，$\mathfrak{M} \cup \{A\}$ は有限交叉性をもつ．$\mathfrak{M} \cup \{A\}$ が生成する真フィルタは $\mathfrak{M}$ を真に含むが，これは $\mathfrak{M}$ の極大性に矛盾する．よって，任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{M}$ または $A^c \in \mathfrak{M}$ が成り立つ． □

命題 2.6　X を集合，$\mathfrak{M}$ を X 上の極大フィルタとする．$A_1, \dots, A_n$ を X の部分集合とする．

(1) $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{M}$ であることと，すべての i に対して $A_i \in \mathfrak{M}$ であることとは同値である．
(2) $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathfrak{M}$ であることと，ある i が存在して $A_i \in \mathfrak{M}$ であることとは同値である．

*1 超フィルタ（ultrafilter）ともいう．
*2 Feferman (1964) [5] が「$\omega = \mathbb{N}$ 上のすべての極大フィルタが単項である」ことの ZF 上独立性を示し，その後に Blass (1997) [3] が「すべての極大フィルタが単項である」ことの ZF 上独立性を示した．

証明　(1)　フィルタの定義から明らかである．(これは一般のフィルタで成り立つ．)

(2)　命題 2.5 より，$A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{M}$ は $A_n^c \cap \cdots \cap A_n^c \in \mathfrak{M}$ の否定と同値であり，「ある i が存在して $A_i \in \mathfrak{M}$ となる」ことは「すべての i に対して $A_i^c \in \mathfrak{M}$ となる」ことの否定と同値である．よって，主張は (1) から従う． □

もうひとつ記号を導入しておこう．

定義 2.7　集合 X の部分集合 A に対して，

$$\widehat{A} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \text{ は } X \text{ 上の極大フィルタで，} A \in \mathfrak{M}\}.$$

命題 2.8　X を集合，$A, A_1, \ldots, A_n$ を X の部分集合とする．次が成り立つ．

(1) $\widehat{A^c} = (\widehat{A})^c$. [*3]
(2) $(A_1 \widehat{\cap \cdots \cap} A_n) = \widehat{A_1} \cap \cdots \cap \widehat{A_n}$.
(3) $(A_1 \widehat{\cup \cdots \cup} A_n) = \widehat{A_1} \cup \cdots \cup \widehat{A_n}$.

証明　命題 2.5 と命題 2.6 のいいかえに過ぎない． □

3　離散空間の Stone–Čech コンパクト化

これから繰り返し用いる事実を挙げておく．

事実（等式延長原理）　X を位相空間，Y を Hausdorff 空間，$f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする．X の稠密部分集合上で $f = g$ が成り立つならば，X 全体で $f = g$ である．

これからは，極大フィルタを「集合族」よりもむしろ「点」であるとみなし，実際に次節では極大フィルタを点とする空間を考えることで離散空間の Stone–Čech コンパクト化を構成する．そこで，以下では極大フィルタを ξ や η などのギリシア小文字で表すことにする．

定義 3.1（Stone–Čech コンパクト化）　位相空間 X の Stone–Čech コンパクト化とは，コンパクト Hausdorff 空間 βX と連続写像 $i\colon X \to \beta X$ との組 $(\beta X, i)$ であって，次の普遍性を満たすものをいう．

> 任意のコンパクト Hausdorff 空間 K と連続写像 $f\colon X \to K$ に対して，$\beta f \circ i = f$ を満たす連続写像 $\beta f\colon \beta X \to K$ が一意に存在する．

この普遍性によって，Stone–Čech コンパクト化は同型を除いて一意に定まる．すなわち，$(\beta X, i)$ と $(\beta' X, i')$ がともに位相空間 X の Stone–Čech コンパクト化ならば，同相写像 $\phi\colon \beta X \to \beta' X$ であって $\phi \circ i = i'$ を満たすものが存在する．

Stone–Čech コンパクト化は任意の位相空間に対して構成できるが[*4]，ここでは離散空間の場合のみを考える．

---

*3 右辺は「X 上の極大フィルタ全体の集合」における $\widehat{A}$ の補集合である．

*4 一般的な構成については，Wikipedia [13] にわかりやすい解説がある．なお，一般に位相空間 X の Stone–Čech コンパクト化を $(\beta X, i)$ とするとき，$i(X)$ は常に βX で稠密である．また，$i\colon X \to \beta X$ が埋め込みであるための必要十分条件は，X が完全正則 Hausdorff であることである．

定理 3.2（離散空間の Stone–Čech コンパクト化） X を離散空間とする．βX を X 上の極大フィルタ全体の集合とし，これに

$$\{\widehat{A} \mid A \subseteq X\}$$

を開基とする位相を考える．そして，$i\colon X \to \beta X$ を

$$i(x) = (x \text{ が生成する単項フィルタ})$$

と定める．すると，$(\beta X, i)$ は X の Stone–Čech コンパクト化である．さらに，この $i\colon X \to \beta X$ は稠密な埋め込みである（すなわち，$i(X)$ は βX で稠密であり，i は X から $i(X)$ への同相を与える）．

証明　命題 2.8 より，$\{\widehat{A} \mid A \subseteq X\}$ は確かに βX 上の開基となる．

■βX がコンパクト Hausdorff であること　Hausdorff 性を示す．異なる 2 点 $\xi, \eta \in \beta X$ を任意にとる．$\xi \neq \eta$ だから，ξ と η の一方にしか含まれないような $A \subseteq X$ が存在する．一般性を失わず，$A \in \xi$，$A \notin \eta$ とする．このとき $\xi \in \widehat{A}$ かつ $\eta \in \widehat{A^c}$ である．$\widehat{A} \cap \widehat{A^c} = \emptyset$ だから（命題 2.8），ξ, η は開集合 $\widehat{A}$ と $\widehat{A^c}$ によって分離される．

コンパクト性を示す．開基の元からなる βX の開被覆 $\{\widehat{A_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ が常に有限部分被覆をもつことを示せばよい．命題 2.8 より，そのためには，$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の有限部分族であって X を被覆するものの存在をいえば十分である．そのような有限部分族が存在しないと仮定すると，$\mathfrak{A} = \{A_\lambda^c\}_{\lambda \in \Lambda}$ は有限交叉性をもつ．したがって，命題 2.4 より，$\mathfrak{A}$ を含む極大フィルタ ξ が存在する．このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\xi \in \widehat{A_\lambda^c}$，したがって $\xi \notin \widehat{A_\lambda}$（命題 2.8）だが，これは $\{\widehat{A_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が βX を被覆することに反する．よって，背理法より結論を得る．

■i が稠密な埋め込みであること　空でない開基の元は常に $i(X)$ と交わるから，$i(X)$ は βX において稠密である．また，$x \in X$ に対して $\widehat{\{x\}} = \{i(x)\}$ だから，$i(X)$ は βX の部分空間として離散である．したがって，i は X から $i(X)$ への同相を与える．

■$(\beta X, i)$ が普遍性を満たすこと　K をコンパクト Hausdorff 空間とし，$f\colon X \to K$ を連続写像とする．$i(X)$ が βX において稠密であり，K は Hausdorff だから，等式延長原理より可換性 $\beta f \circ i = f$ を満たす連続写像 βf はたかだか一意である．

可換性 $\beta f \circ i = f$ を満たす連続写像 $\beta f\colon \beta X \to K$ の存在を示す．各 $\xi \in \beta X$ に対して

$$\beta f(\xi) \in \bigcap_{A \in \xi} \overline{f(A)}$$

が成り立つように βf を定める[*5]．上式の右辺は有限交叉性をもつ閉集合族の交叉だから，K のコンパクト性より空でなく，したがってこの定義は可能である．これが条件を満たすことをみる．

$x \in X$ に対して $\{x\} \in i(x)$ が成り立つから，βf の定義より $\beta f(i(x)) \in \overline{f(\{x\})} = \{f(x)\}$，したがって $\beta f(i(x)) = f(x)$ である．よって，可換性が成り立つ．

βf の連続性を示す．K の正則性より，任意の $\xi \in \beta X$ と $\beta f(\xi)$ の閉近傍 V に対して $(\beta f)^{-1}(V)$ が ξ の近傍であることを示せばよい．そのために，

$$\xi \in \widehat{f^{-1}(V)} \subseteq (\beta f)^{-1}(V)$$

*5 「真フィルタの極限」について知識がある人向けの説明：$\beta f(\xi)$ は，ξ の f による像として得られる極大フィルタの，K における極限である．コンパクト Hausdorff 空間において極大フィルタは必ず一意な極限をもつから，この定義が可能である．

を示そう．まず，$\xi \in \widehat{f^{-1}(V)}$ を示す．これが成り立たないとすると $\xi \in \widehat{(f^{-1}(V)^c)} = \widehat{f^{-1}(V^c)}$（命題 2.8）となるから，$\beta f$ の定義より

$$\beta f(\xi) \in \overline{f(f^{-1}(V^c))} \subseteq \overline{V^c} = V^{\circ c}$$

となるが，これは V が $\beta f(\xi)$ の近傍であることに反する．次に，$\widehat{f^{-1}(V)} \subseteq (\beta f)^{-1}(V)$ を示す．$\eta \in \widehat{f^{-1}(V)}$ を任意にとると，βf の定義より

$$\beta f(\eta) \in \overline{f(f^{-1}(V))} \subseteq \overline{V} = V$$

となる．これで示された．□

以下，離散空間 X に対して βX と書いたら，これは常に定理 3.2 の方法で構成された Stone–Čech コンパクト化を表す．また，$i\colon X \to \beta X$ は埋め込みだから，x と $i(x)$ を同一視することによって X を βX の部分空間とみなせる．以下では常にこのようにみなす．

命題 3.3　X を離散空間，A を X の部分集合とする．A の βX における閉包 $\overline{A}$ は，$\widehat{A}$ に等しい．

証明　$\widehat{A} = (\widehat{A^c})^c$ より $\widehat{A}$ は（開集合であると同時に）閉集合であり，A を含むから，$\overline{A} \subseteq \widehat{A}$ が成り立つ．

逆向きの包含を示すため，$\xi \in \widehat{A}$ を任意にとる．$\xi \in \widehat{B}$ となる $B \subseteq X$ をとると，$\xi \in \widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$（命題 2.8）より特に $A \cap B \neq \emptyset$ である．$\widehat{B}$ の全体は開基をなすから，これで ξ の任意の近傍が A と交わることがわかった．よって，$\xi \in \overline{A}$ である．□

命題 3.3 と命題 2.8 より，離散空間 X の部分集合について，補集合・有限交叉・有限合併をとる操作と，その集合の βX における閉包をとる操作とは可換である．

4　離散半群の Stone–Čech コンパクト化

定義 4.1（半群）　集合 S とその上の 2 項演算 $\cdot\colon S \times S \to S$ との組 $(S, \cdot)$ であって，結合律

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (\forall x, y, z \in S)$$

を満たすものを半群（semigroup）という[*6]．部分集合 $T \subseteq S$ が同じ演算 $\cdot$ によって半群 $(T, \cdot)$ をなしていれば，これを $(S, \cdot)$ の部分半群（subsemigroup）という．

以下では，集合 S 上に 2 項演算 $\cdot$ が定まっているとき，$x \in S$ による左・右からの作用をそれぞれ $\lambda_x, \rho_x\colon S \to S$ と書く．すなわち，$\lambda_x(y) = x \cdot y$，$\rho_x(y) = y \cdot x$ である．また，$x \in S$ と $A \subseteq S$ に対して，

$$\begin{aligned} xA &= \lambda_x(A) = \{x \cdot a \mid a \in A\}, \\ x^{-1}A &= \lambda_x^{-1}(A) = \{y \mid x \cdot y \in A\} \end{aligned}$$

と定める．Ax, Ax^{-1} も同様に定める．

定義 4.2（位相構造をもつ半群）　位相構造をもつ半群 S を考える．

(1) 任意の $x \in S$ に対して $\lambda_x\colon S \to S$ が連続であれば，S を左位相半群という．
(2) 任意の $x \in S$ に対して $\rho_x\colon S \to S$ が連続であれば，S を右位相半群という．

[*6] 空集合を半群の定義から除外することもあるが，本稿では除外しない．

(3) S が左位相半群でも右位相半群でもあるならば，S を半位相半群という．

(4) S に定まった演算 $S \times S \to S$ が連続であれば，S を位相半群という．

半群に離散位相を考えたものを離散半群という．離散半群は常に位相半群である．

定理 4.3　離散半群 $(S, \cdot)$ の（位相空間としての）Stone–Čech コンパクト化 βS を考える．このとき，βS 上の 2 項演算 $*\colon \beta S \times \beta S \to \beta S$ であって，次の 3 条件を満たすものが一意に存在する．

(i) 演算 $*$ は演算 $\cdot$ の拡張である．すなわち，任意の $x, y \in S$ に対して $x * y = x \cdot y$ である．

(ii) 任意の $x \in S$ に対して，$\lambda_x\colon \beta S \to \beta S$，$\eta \mapsto x * \eta$ は連続である．

(iii) 任意の $\eta \in \beta S$ に対して，$\rho_\eta\colon \beta S \to \beta S$，$\xi \mapsto \xi * \eta$ は連続である．

これで定まる $(\beta S, *)$ は右位相半群となり，これを離散半群 $(S, \cdot)$ の Stone–Čech コンパクト化という．

証明　まず，$x \in S$ を固定すると，

$$\lambda_x\colon S \to S \hookrightarrow \beta S, \quad y \mapsto x \cdot y$$

は連続だから，Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，これは連続写像 $\beta\lambda_x\colon \beta S \to \beta S$ に一意に延長できる．これによって $x * \eta$（$\eta \in \beta S$）を定める．次に，$\eta \in \beta S$ を固定すると，

$$\rho_\eta\colon S \to \beta S, \quad x \mapsto x * \eta$$

は連続だから，Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，これは連続写像 $\beta\rho_\eta\colon \beta S \to \beta S$ に一意に延長できる．これによって $\xi * \eta$（$\xi \in \beta S$）を定める．すると，これは与えられた条件を満たす．

逆に，与えられた条件を満たすように $*$ を定義するには上のようにするしかないから，$*$ の一意性は，普遍性が誘導する連続写像の一意性から従う．

$*\colon \beta S \times \beta S \to \beta S$ が結合律を満たすことを確かめる．まず，$x, y \in S$ を固定したとき，

$$\begin{aligned} \lambda_{x*y}\colon \beta S \to \beta S, &\quad \theta \mapsto (x * y) * \theta; \\ \lambda_x \circ \lambda_y\colon \beta S \to \beta S, &\quad \theta \mapsto x * (y * \theta) \end{aligned}$$

はともに連続であり，$\cdot$ の結合性より S 上では一致するので，等式延長原理より βS 上でも一致する．次に，$x \in S$，$\theta \in \beta S$ を固定したとき，

$$\begin{aligned} \rho_\theta \circ \lambda_x\colon \beta S \to \beta S, &\quad \eta \mapsto (x * \eta) * \theta; \\ \lambda_x \circ \rho_\theta\colon \beta S \to \beta S, &\quad \eta \mapsto x * (\eta * \theta) \end{aligned}$$

はともに連続であり，直前の結果より S 上では一致するので，等式延長原理より βS 上でも一致する．最後に，$\eta, \theta \in \beta S$ を固定したとき，

$$\begin{aligned} \rho_\theta \circ \rho_\eta\colon \beta S \to \beta S, &\quad \xi \mapsto (\xi * \eta) * \theta; \\ \rho_{\eta*\theta}\colon \beta S \to \beta S, &\quad \xi \mapsto \xi * (\eta * \theta) \end{aligned}$$

はともに連続であり，直前の結果より S 上では一致するので，等式延長原理より βS 上でも一致する．よって，$*$ は結合律を満たす．□

以下，半群の演算記号は省略し，記号上は S の演算と βS の演算を区別しない．また，単に「半群 S の Stone–Čech コンパクト化を考える」などといった場合，S は離散半群とみなすとする．

5　半群の冪等元

本節では，Hindman の定理の証明に必要ないくつかの命題を示す．Hindman の定理の証明には，半群の冪等元が大きく関わってくる．

定義 5.1　半群 S の冪等元（idempotent）とは，$xx = x$ を満たす元 $x \in S$ のことをいう．S の冪等元全体の集合を，$\mathrm{Idem}(S)$ と書く．

定理 5.2　空でないコンパクト Hausdorff 右位相半群は冪等元をもつ．

証明　S を空でないコンパクト Hausdorff 右位相半群とし，S の空でないコンパクト部分半群全体を $\mathscr{A}$ と置く．$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$ を（包含関係に関する）鎖とすると，$\mathscr{C}$ は有限交叉性をもつ閉集合族だから，S のコンパクト性より $\bigcap \mathscr{C}$ は空でなく，これは $\mathscr{A}$ における $\mathscr{C}$ の下界を与える．よって，Zorn の補題より，$\mathscr{A}$ は極小元 T をもつ．

$x \in T$ をとると，これが冪等であることを示す．まず，$Tx = \rho_x(T)$ は S のコンパクト部分半群で $Tx \subseteq T$ だから，極小性より $Tx = T$ となる．次に，

$$A = \{y \in T \mid yx = x\}$$

と置く．A は T の部分半群であり，$x \in T = Tx$ だから A は空でない．さらに，$A = T \cap \rho_x^{-1}\{x\}$ と書けるから，A はコンパクト集合 T の閉集合，したがってコンパクトである．よって，極小性より $A = T$ となる．特に $x \in A$ だから，$xx = x$ が成り立つ．□

次に，離散半群の Stone–Čech コンパクト化における演算の振る舞いを見ておこう．簡略化のため，新しい記号を導入する．部分集合 $A \subseteq S$ と $\xi \in \beta S$ に対して，$\xi \in \overline{A}$ の代わりに $\xi \lhd A$ と書く．フィルタの言葉でいえば，これは $\xi \in \widehat{A}$ および $A \in \xi$ と同値である．

命題 5.3　S を半群，A をその部分集合とする．

(1) $x \in S$，$\eta \in \beta S$ に対して
$$x\eta \lhd A \iff \eta \lhd x^{-1}A.$$

(2) $\xi, \eta \in \beta S$ に対して
$$\xi\eta \lhd A \iff \xi \lhd \{x \in S \mid \eta \lhd x^{-1}A\}.$$

証明　(1)　必要性を示す．$x\eta \lhd A$ とすると，$\overline{A}$ は $x\eta = \lambda_x(\eta)$ の近傍だから，λ_x の連続性より $\lambda_x^{-1}(\overline{A})$ は η の近傍となる．したがって，$\eta \lhd \lambda_x^{-1}(\overline{A}) \cap S = x^{-1}A$ となる．

十分性を示す．$x\eta \ntriangleleft A$ とすると $x\eta \lhd A^c$ だから，すでに示した必要性より $\eta \lhd x^{-1}(A^c) = (x^{-1}A)^c$，すなわち $\eta \ntriangleleft x^{-1}A$ となる．

(2)　必要性を示す．$\xi\eta \lhd A$ とすると，$\overline{A}$ は $\xi\eta = \rho_\eta(\xi)$ の近傍だから，ρ_η の連続性より $\rho_\eta^{-1}(\overline{A})$ は ξ の近傍となる．すなわち
$$\xi \lhd \rho_\eta^{-1}(\overline{A}) \cap S = \{x \in S \mid x\eta \in \overline{A}\} = \{x \in S \mid \eta \lhd x^{-1}A\}$$
となる（最後の変形に (1) を用いた）．

十分性を示す．$\xi\eta \ntriangleleft A$ とすると $\xi\eta \lhd A^c$ だから，すでに示した必要性より $\xi \lhd \{x \in S \mid \eta \lhd x^{-1}(A^c)\} = \{x \in S \mid \eta \lhd (x^{-1}A)^c\}$，すなわち $\xi \ntriangleleft \{x \in S \mid \eta \lhd x^{-1}A\}$ となる．□

命題 5.3 より，離散半群の Stone–Čech コンパクト化における冪等元について，次のことがいえる．

命題 5.4　S を半群，$\xi \in \mathrm{Idem}(\beta S)$ とする．A を S の部分集合とし，

$$A^\star = \{x \in A \mid \xi \lhd x^{-1}A\}$$

と置く．

(1) $\xi \lhd A$ ならば $\xi \lhd A^\star$ である．
(2) 任意の $x \in A^\star$ に対して，$\xi \lhd x^{-1}A^\star$ である．

証明　(1)　$\xi = \xi\xi \lhd A$ だから，命題 5.3 (2) より $\xi \lhd \{x \in S \mid \xi \lhd x^{-1}A\}$ である．$\xi \lhd A$ とあわせて $\xi \lhd \{x \in S \mid \xi \lhd x^{-1}A\} \cap A = A^\star$ を得る．

(2)　$x \in A^\star$ とすると $\xi \lhd x^{-1}A$ だから，A の代わりに $x^{-1}A$ として (1) を適用することで

$$\begin{aligned}
\xi &\lhd \{y \in x^{-1}A \mid \xi \lhd y^{-1}x^{-1}A\} \\
&= \{y \mid xy \in A,\ \xi \lhd (xy)^{-1}A\} \\
&= x^{-1}\{z \mid z \in A,\ \xi \lhd z^{-1}A\} \\
&= x^{-1}A^\star
\end{aligned}$$

を得る．□

6　Hindman の定理

半群 S の元の無限列 $x_0, x_1, \dots$ に対して，これらから 1 個以上有限個の元を選び，順番を変えずに演算を施すことで得られる元の全体を $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$ と書く．すなわち，

$$\langle x_0, x_1, \dots \rangle = \{x_{n_1} x_{n_2} \cdots x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}_{>0},\ n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$$

である．有限個の元 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in S$ に対する $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ も同様に定義する．

定義 6.1　半群 S の部分集合 A が豊富[*7] であるとは，$\langle x_0, x_1, \dots \rangle \subseteq A$ を満たす無限列 $x_0, x_1, \dots \in S$ が存在することをいう．

定理 6.2　半群 S の部分集合 A が豊富であるための必要十分条件は，$\overline{A} \cap \mathrm{Idem}(\beta S) \neq \emptyset$ である．

証明　十分性，必要性の順に示す．

■十分性　ある $\xi \in \overline{A} \cap \mathrm{Idem}(\beta S)$ が存在するとする．主張よりも強く，

$$A^\star = \{x \in A \mid \xi \lhd x^{-1}A\}$$

が豊富であることを示す．帰納的に，$\langle x_0, x_1, \dots \rangle \subseteq A^\star$ を満たす無限列 $x_0, x_1, \dots \in A$ を構成しよう．

*7 「豊富」は本稿だけの用語である．Hindman, Strauss [11] では IP set（infinite-dimensional parallelepiped，無限次元平行体）と呼ばれているが，味気ないのでこうした．

いま，$\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \subseteq A^\star$ が成り立っているとする．命題 5.4 と帰納法の仮定より，$\xi \lhd A^\star$ かつ任意の $y \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ に対して $\xi \lhd y^{-1}A^\star$ である．よって，

$$A^\star \cap \bigcap_{y\in\langle x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle} y^{-1}A^\star \neq \emptyset.$$

したがって，上式左辺から元 x_n をとることができる．このとき $x_n \in A^\star$ かつ「任意の $y \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ に対して $yx_n \in A^\star$」だから，

$$\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\rangle \subseteq A^\star$$

が成り立つ．

■必要性　$T_k = \langle x_k, x_{k+1}, \ldots\rangle$ と置き，

$$T = \bigcap_{k\geq 0} \overline{T_k}$$

が βS の空でないコンパクト部分半群であることを見る．$\{\overline{T_k}\}_{k\geq 0}$ は有限交叉性をもつコンパクト空間 βS の閉集合族だから，その交叉 T は空でないコンパクト集合である．

T が演算で閉じていることを確かめる．$\xi, \eta \in T$ を任意にとり，$\xi\eta \in T$ を示したい．命題 5.3 (2) より，そのためには任意の $k \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して

$$\xi \lhd \{x \in S \mid \eta \lhd x^{-1}T_k\}$$

を示せばよい．いま $\xi \lhd T_k$ であることはわかっているから，

$$T_k \subseteq \{x \in S \mid \eta \lhd x^{-1}T_k\}$$

であることを見れば十分である．$x \in T_k$ を任意にとる．x の因子に現れるどの添字よりも大きく $l \in \mathbb{N}_{>0}$ をとれば $xT_l \subseteq T_k$，すなわち $T_l \subseteq x^{-1}T_k$ となるから，$\eta \lhd T_l \subseteq x^{-1}T_k$ が成り立つ．これで，T が βS の空でないコンパクト部分半群であることがわかった．

さて，T は空でないコンパクト Hausdorff 右位相半群だから，定理 5.2 より冪等元 $\xi \in T$ をもつ．この元は $\xi \in \overline{A} \cap \mathrm{Idem}(\beta S)$ を満たす．□

系 6.3　S は半群，A はその部分集合であり，$A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ と書けているとする．A が豊富ならば，$A_1, \ldots, A_r$ の中に豊富なものが存在する．

証明　A が豊富ならば，定理 6.2 より，$\overline{A}$ は $\mathrm{Idem}(\beta S)$ と交わる．$\overline{A} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_r}$ だから，ある $\overline{A_i}$ は $\mathrm{Idem}(\beta S)$ と交わる．ふたたび定理 6.2 より，このとき A_i は豊富である．□

系 6.4（Hindman の定理）　正の整数全体を r 色に塗り分けたとする．このとき，正の整数の無限列 $x_0, x_1, \ldots$ をとって，これらの重複なしの空でない有限和がすべて同色となるようにできる．

証明　半群 $(\mathbb{N}_{>0}, +)$ に対して系 6.3 を適用すればよい．□

7　エピローグ

歴史的経緯を見ておこう．Hindman の定理は，Graham, Rothschild (1971) [7] が提起した問題を解決する形で Hindman (1974) [9] が証明した．その同年に，Baumgartner (1974) [1] が Hindman の証明を簡略化したものを発表している．これらふたつの証明はともに組合せ論的なものである．本稿で紹介した Stone–Čech コンパクト化による証明は，Galvin, Glazer (1975) による．Glavin, Glazer 自身は証明を出版しなかったが，たとえば Comfort によるサーベイ (1977) [4] に見ることができる．他に，Furstenberg, Weiss (1978) [6] が位相力学系を用いて Hindman の定理を証明している．

実は，Hindman の定理よりも強く，次のことが成り立つ．

定理　正の整数全体を r 色に塗り分けたとする．このとき，正の整数の無限列 $x_0, x_1, \ldots$ と $y_0, y_1, \ldots$ をとって，$x_0, x_1, \ldots$ の重複なしの空でない有限和および $y_0, y_1, \ldots$ の重複なしの空でない有限積すべてが同色となるようにできる．

この定理は，まず Stone–Čech コンパクト化 $\beta\mathbb{N}_{>0}$ の代数構造を用いて証明され（Hindman (1979) [10]，Hindman, Strauss [11] の 5.3 節も参照のこと），その後に組合せ論的に証明された（Bergelson, Hindman (1993) [2]）．

Hindman の定理の他に，次の定理も Stone–Čech コンパクト化によって証明することができる．

定理（van der Waerden の定理 (1927) [12]）　正の整数全体を r 色に塗り分け，$\mathbb{N}_{>0} = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ と分割したとする．このとき，ある $i \in \{1, \ldots, r\}$ が存在し，任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して，A_i は定数ではない長さ l の等差数列を含む．

定理（Hales–Jewett の定理 (1963) [8]）　任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ と $r \in \mathbb{N}_{>0}$ に対してある $d \in \mathbb{N}_{>0}$ が存在し，次のことが成り立つ：一辺の長さが n の d 次元立方体の n^d 個のマスをどのように r 色に塗り分けても，必ず同色のマスが n 個並んだ列が存在する．

これらの定理の Stone–Čech コンパクト化を用いた証明の鍵は，半群 S の部分集合 A が「piecewise syndetic」であるための必要十分条件が「$\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \emptyset$」で与えられることである．ここで，$K(\beta S)$ は「βS の最小（両側）イデアル」を表す．詳しくは，Hindman, Strauss [11] の 14.1，14.2 節を参照のこと．

最後に，いくつか演習問題を載せておく．

問題 7.1　半群 S の部分集合 A が豊富であるとは，$\langle x_0, x_1, \ldots \rangle \subseteq A$ を満たす無限列 $x_0, x_1, \ldots \in S$ が存在することであった．S が冪等元をもたないならば，豊富な部分集合 A に対して，前文の $x_0, x_1, \ldots$ をすべて異なるようにとれることを示せ．

問題 7.2　Hales–Jewett の定理から van der Waerden の定理を導け．

問題 7.3　Hales–Jewett の定理によると，$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $d \in \mathbb{N}_{>0}$ を十分大きくとれば，n^d の立方体でのマルバツは必ず決着がつく．このとき，実際には先手必勝である（先手に必勝戦略がある）ことを示せ．（ヒント：背理法）

参考文献

今回の発表は，主に Hindman, Strauss [11] の第 1 章から第 5 章までによる．ただし，記号・用語は Hindman, Strauss のものとは変えた部分がある．たとえば，本稿では自然数全体 $\mathbb{N}$ に 0 を含めたが，Hindman, Strauss では含めていない．また，本稿では Wikipedia [13] を参考に，普遍性によって Stone–Čech コンパクト化を定義したが，Hindman, Strauss では本稿の定理 3.2 で与えた構成を（離散空間の）Stone–Čech コンパクト化の定義としている．

[1] J. E. Baumgartner, “A short proof of Hindman’s theorem”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **17**.3 (1974): 384–386.

[2] V. Bergelson, N. Hindman, “Additive and multiplicative Ramsey Theorems in $\mathbb{N}$ — some elementary results”, *Combinatorics, Probability and Computing* **2**.3 (1993): 221–241.

[3] A. Blass, “A model without ultrafilters”, *Bulletin L’Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques* **25** (1997): 329–331.

[4] W. W. Comfort, “Ultrafilters: Some old and some new results”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **83**.4 (1977): 417–455.

[5] S. Feferman, “Some applications of the notions of forcing and generic sets”, *Fundamenta Mathematicae* **56** (1964): 325–345.

[6] H. Furstenberg, B. Weiss, “Topological dynamics and combinatorial number theory”, *Journal d’Analyse Mathématique* **34**.1 (1978): 61–85.

[7] R. L. Graham, B. L. Rothschild, “Ramsey’s Theorem for n-parameter sets”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **159** (1971): 257–292.

[8] A. W. Hales, R. I. Jewett, “Regularity and positional games”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **106** (1963): 222–229.

[9] N. Hindman, “Finite sums from sequences within cells of a partition of N”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **17**.1 (1974): 1–11.

[10] N. Hindman, “Partitions and sums and products of integers”, *Transactions of the American Mathematical Society* **247** (1979): 227–245.

[11] N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone–Čech compactification: Theory and Applications*, 2nd edition, De Gruyter, 2011.

[12] B. van der Waerden, “Beweis einer baudetschen vermutung”, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **19** (1927): 212–216.

[13] Wikipedia ‘Stone–Čech compactification’.（2018 年 9 月 8 日アクセス）
https://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Čech_compactification