対称多項式の基本定理

箱（@o_ccah）

2021 年 3 月 17 日

概要

対称多項式の基本定理を証明する．関連して，冪和対称多項式を用いた対称多項式の基本定理の類似や，交代多項式と対称多項式との関係についても触れる．

目次

1 辞書式順序 1

2 対称多項式 3

3 対称多項式の基本定理 4

4 冪和対称多項式 5

5 交代多項式 7

記号と用語

- 自然数，整数，有理数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ と書く．0 は自然数に含める．
- A を可換環とするとき，$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ に対して，多項式環の元 $X_0^{\alpha_0} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$ を X^α と書く．

1 辞書式順序

定義 1.1（辞書式順序） $\mathbb{N}^n$ 上の関係 $\prec$ および $\preceq$ を，次のように定める：

> $\mathbb{N}^n$ の 2 元 $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$，$\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ に対して，関係 $\alpha \prec \beta$ を「ある $0 \le i < n$ が存在して，任意の $j < i$ に対して $\alpha_j = \beta_j$ かつ $\alpha_i < \beta_i$ である」と定め，これを用いて関係 $\alpha \preceq \beta$ を「$\alpha = \beta$ または $\alpha \prec \beta$」と定める．

関係 $\preceq$ を，$\mathbb{N}^n$ 上の**辞書式順序**という．$\alpha \prec \beta$ の代わりに $\beta \succ \alpha$ とも書き，$\alpha \preceq \beta$ の代わりに $\beta \succeq \alpha$ とも書く．

辞書式順序 $\preceq$ は $\mathbb{N}^n$ 上の整列順序であり，$\mathbb{N}^n$ の加法と整合する（すなわち，$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ に対して，$\alpha \preceq \beta$

ならば $\alpha+\gamma \preceq \beta+\gamma$ である).

定義 1.2(辞書式順序に関する次数) A を可換環とする．$f \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$ を

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$$

と表すとき，$a_\alpha \neq 0$ となる $\alpha \in \mathbb{N}^n$ のうち辞書式順序に関して最大のものを，f の**辞書式順序に関する次数**という．ただし，$f=0$ の辞書式順序に関する次数は $-\infty$ とし，任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して $-\infty \prec \alpha$ であると約束する．

命題 1.3 A を可換環とする．$f_0, \dots, f_{k-1} \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$ とし，各 j に対して，f_j は辞書式順序に関してたかだか α_j 次であり，その α_j 次の係数は a_j であるとする．このとき，積 $f_0 \cdots f_{k-1}$ は辞書式順序に関してたかだか $\alpha_0+\cdots+\alpha_{n-1}$ 次であり，その $\alpha_0+\cdots+\alpha_{n-1}$ 次の係数は $a_0 \cdots a_{k-1}$ である．

証明 辞書式順序が $\mathbb{N}^n$ の加法と整合することから明らかである． □

辞書式順序とは関係ないが，後で必要になるので，多項式環の零因子に関する命題を示しておく．

命題 1.4 A を可換環とする．$f \in A[X]$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) f は $A[X]$ において零因子である．
(b) ある $c \in A \setminus \{0\}$ が存在して，$cf=0$ となる．

証明 (b) $\Longrightarrow$ (a) 明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b) $f = \sum_{k=0}^d a_k X^k$($a_k \in A$，$a_d \neq 0$)が $A[X]$ において零因子であるとすると，ある $g \in A[X] \setminus \{0\}$ が存在して $fg=0$ となる．このような g の中で次数が最小のものをとり，その最高次の係数を $c \in A \setminus \{0\}$ と置く．任意の $0 \leq k \leq d$ に対して $a_k g = 0$ であることを，k に関する降順の帰納法で示す．$0 \leq k \leq d$ とし，$k < j \leq d$ に対しては $a_j g = 0$ が示されたとする．このとき，

$$0 = fg = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \cdot g = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j \cdot g$$

だから，両辺の $k + \deg g$ 次の係数を比較することで $a_k c = 0$ を得る．したがって，g を a_k 倍すると最高次の係数が消えるから，$a_k g$ は g よりも次数が真に小さくなる．一方で，$f \cdot a_j g = a_j fg = 0$ である．よって，g の次数の最小性より $a_k g = 0$ である．これで，帰納法が完成した．いま示したことから特に，任意の $0 \leq k \leq d$ に対して $a_k c = 0$ であり，したがって $cf = 0$ である．これで，主張が示された． □

系 1.5 A を可換環とする．$f \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$ が零因子ならば，その係数はすべて A における零因子である．

証明 n に関する帰納法で示す．$n=0$ のときは明らかである．$n \geq 1$ として，$n-1$ のときは主張は正しいとする．$f \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$ が零因子であるとして，f を X_{n-1} について整理して $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k X_{n-1}^k$($f_k \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$)と書く．すると，命題 1.4 より各 f_k は $A[X_0, \dots, X_{n-2}]$ における零因子だから，帰納法の仮定より f_k の係数はすべて A における零因子である．よって，f の係数はすべて A における零因子である．これで，帰納法が完成した． □

2　対称多項式

多重指数の空間 $\mathbb{N}^n$ には，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が

$$\sigma(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = (\alpha_{\sigma^{-1}(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n-1)})$$

によって左から作用する．対応して，可換環 A 上の n 変数多項式環 $A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ には，$\mathfrak{S}_n$ が

$$\sigma\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^{\sigma\alpha},$$

すなわち

$$(\sigma f)(X_0, \ldots, X_{n-1}) = f(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(n-1)})$$

によって左から作用する．各作用 $f \mapsto \sigma f$ は，単位的 A-代数 $A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ の自己同型である．

定義 2.1（対称多項式）　A を可換環とする．A 上の n 変数多項式 f であって，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma f = f$ を満たすものを，A 上の n 変数**対称多項式**という．A 上の n 変数対称多項式の全体は，$A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ の部分単位的 A-代数をなす．この部分単位的 A-代数を，$A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$ と書く．

定義 2.2（軌道和対称多項式）　A を可換環とする．$\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して，指数 α の**軌道和対称多項式** m_α を，

$$m_\alpha = \sum_{\beta \in \mathfrak{S}_n \alpha} X^\beta \in A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$$

と定める．

$\mathbb{N}^n$ の部分集合 $\mathbb{N}^n_\downarrow$ を

$$\mathbb{N}^n_\downarrow = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_0 \geq \cdots \geq \alpha_{n-1}\}$$

と定めると，$\mathbb{N}^n_\downarrow$ は $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{N}^n$ への作用が定める同値関係の完全代表系である．よって，$\alpha \in \mathbb{N}^n_\downarrow$ に対する軌道和対称多項式 m_α の全体は，$A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$ の A-加群としての基底をなす．

命題 2.3　A を可換環とする．$\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{N}^n_\downarrow$ に対して，軌道和対称多項式の積 $m_{\alpha_0} \cdots m_{\alpha_{k-1}}$ は

$$m_{\alpha_0} \cdots m_{\alpha_{k-1}} = m_{\alpha_0 + \cdots + \alpha_{k-1}} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n_\downarrow,\ \gamma \prec \alpha_0 + \cdots + \alpha_{k-1}} a_\gamma m_\gamma \qquad (a_\gamma \in \mathbb{Z})$$

という形に書ける（ここで，$\mathbb{Z}$ の元を，一意な環準同型 $\mathbb{Z} \to A$ によるその元の像と同一視している）．

証明　各 j に対して，m_{α_j} は辞書式順序に関してたかだか α_j 次であり[*1]，その α_j 次の係数は 1 である．したがって，命題 1.3 より，$m_{\alpha_0} \cdots m_{\alpha_{k-1}}$ は辞書式順序に関してたかだか $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{k-1}$ 次であり，その $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{k-1}$ 次の係数は 1 である．また，各 m_{α_j} は「整数」係数だから，それらの積 $m_{\alpha_0} \cdots m_{\alpha_{k-1}}$ も「整数」係数である．よって，$m_{\alpha_0} \cdots m_{\alpha_{k-1}}$ を m_γ（$\gamma \in \mathbb{N}^n_\downarrow$）の線型結合として書くと，主張の形になる．　□

[*1] A が零環でなければ，m_{α_j} の辞書式順序に関する次数はちょうど α_j である．A が零環の場合は $m_{\alpha_j} = 0$ であり，その辞書式順序に関する次数は $-\infty$ である．

3 対称多項式の基本定理

定義 3.1（基本対称多項式） A を可換環とする．$k \in \mathbb{N}$ に対して，k 次基本対称多項式 e_k を，

$$e_k = \sum_{0 \le i_0 < \cdots < i_{k-1} < n} X_{i_0} \cdots X_{i_{k-1}} \in A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$$

と定める．変数の個数を明示する必要がある場合には，e_k の代わりに $e_k^{(n)}$ と書く．

k 次基本対称多項式 e_k は，$0 \le k \le n$ ならば指数 $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$（$1$ が k 個，0 が $n-k$ 個並ぶ）の軌道和対称多項式であり，$k > n$ ならば 0 である．

定理 3.2（対称多項式の基本定理） 可換環 A に対して，1 次から n 次までの基本対称多項式 e_1, …, e_n は，$A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$ の単位的 A-代数としての基底である．すなわち，写像

$$\phi\colon A[E_1, \ldots, E_n] \to A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}; \quad f \mapsto f(e_1, \ldots, e_n)$$

は，単位的 A-代数の同型である．

証明 まず，ϕ の全射性を示す．そのためには，任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n_{\downarrow}$ に対して，軌道和対称多項式 m_α が ϕ の像に属することを示せばよい．これを，辞書式順序（これは $\mathbb{N}^n_{\downarrow}$ 上の整列順序である）に関する帰納法で示す．$\alpha \in \mathbb{N}^n_{\downarrow}$ とし，任意の $\gamma \in \mathbb{N}^n_{\downarrow}$，$\gamma \prec \alpha$ に対して $m_\gamma \in \operatorname{Im}\phi$ が示されたとする．$1 \le k \le n$ に対して $\epsilon_k = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$（$1$ が k 個，0 が $n-k$ 個並ぶ）と置くと，$\alpha \in \mathbb{N}^n_{\downarrow}$ より，ν_1, …, $\nu_n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\alpha = \nu_1 \epsilon_1 + \cdots + \nu_n \epsilon_n$$

を満たす．この ν_1, …, ν_n について，命題 2.3 より，基本対称式の積 $e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n}$ は

$$e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n} = m_{\epsilon_1}^{\nu_1} \cdots m_{\epsilon_n}^{\nu_n} = m_\alpha + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n_{\downarrow},\ \gamma \prec \alpha} a_\gamma m_\gamma \qquad (a_\gamma \in \mathbb{Z})$$

と書ける．$e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n} \in \operatorname{Im}\phi$ であり，帰納法の仮定より $\gamma \in \mathbb{N}^n_{\downarrow}$，$\gamma \prec \alpha$ に対して $a_\gamma \in \operatorname{Im}\phi$ だから，$m_\alpha \in \operatorname{Im}\phi$ である．これで，帰納法が完成し，ϕ の全射性が示された．

次に，ϕ の単射性を，n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らかである．$n \ge 1$ として，$n-1$ のときには主張は正しいとする．$f \in A[E_1, \ldots, E_n]$，$f(e_1, \ldots, e_n) = 0$ とすると，特に

$$f(e_1(X_0, \ldots, X_{n-2}, 0), \ldots, e_{n-1}(X_0, \ldots, X_{n-2}, 0), 0) = 0$$

である．$1 \le k \le n-1$ に対して $e_k(X_0, \ldots, X_{n-2}, 0)$ は $n-1$ 変数の k 次基本対称多項式だから，帰納法の仮定より，$f(E_1, \ldots, E_{n-1}, 0) = 0$ である．よって，因子定理（f を $A[E_1, \ldots, E_{n-1}]$ 上の E_n を不定元とする多項式と見て適用する）より，f は E_n で割り切れる．そこで，$g \in A[E_1, \ldots, E_n]$ を用いて $f = E_n g$ と書くと，

$$0 = f(e_1, \ldots, e_n) = e_n g(e_1, \ldots, e_n)$$

だが，$e_n = X_0 \cdots X_{n-1}$ は零因子ではないから[*2] $g(e_1, \ldots, e_n) = 0$ である．よって，f の次数に関する無限降下法より，$f(e_1, \ldots, e_n) = 0$ を満たす $f \in A[E_1, \ldots, E_n]$ は $f = 0$ 以外に存在しない．これで，帰納法が完成し，ϕ の単射性が示された． □

[*2] 系 1.5 から従うといってもよいが，直接考えても明らかである．

4 冪和対称多項式

定義 4.1（冪和対称多項式） A を可換環とする．$k \in \mathbb{N}$ に対して，k 次冪和対称多項式 p_k を，

$$p_k = X_0^k + \cdots + X_{n-1}^k \in A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$$

と定める．変数の個数を明示する必要がある場合には，p_k の代わりに $p_k^{(n)}$ と書く．

k 次冪和対称多項式 p_k は，指数 $(k, 0, \ldots, 0)$ の軌道和対称多項式である．

命題 4.2（Newton の恒等式） A を可換環とする．$k \in \mathbb{N}$ に対して，基本対称多項式と冪和対称多項式の間の等式

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j e_{k-j} p_j = (n-k) e_k$$

が成り立つ．

証明 まず，$k = n$ の場合に示す．多項式環 $A[X_0, \ldots, X_{n-1}][T]$ において

$$(T - X_0) \cdots (T - X_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1}) T^j$$

であり，これに $T = X_i$ を代入すると

$$0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1}) X_i^j$$

となる．この式の $0 \leq i < n$ にわたる総和をとって両辺を $(-1)^k$ 倍することにより，$k = n$ の場合の Newton の恒等式

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j e_{n-j}^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1}) p_j^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1}) = 0 \tag{$*$}$$

を得る．

次に，$k > n$ の場合を示す．($*$) において n を k に置き換え，X_n, …, X_{k-1} に 0 を代入すると，

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j e_{k-j}^{(k)}(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0, \ldots, 0) p_j^{(k)}(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0, \ldots, 0) = 0$$

となる．上式の各項について，$e_{k-j}^{(k)}(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0, \ldots, 0) = e_{k-j}^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1})$ であり，$j \geq 1$ ならば $p_j^{(k)}(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0, \ldots, 0) = p_j^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1})$ である．また，$j = 0$ については $p_0^{(k)} = k$，$p_0^{(n)} = n$ だが，$e_k^{(k)}(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0, \ldots, 0) = 0$ だから，この違いは式に影響しない．よって，上式は，$k > n$ の場合の Newton の恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j e_{k-j}^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1}) p_j^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1}) = 0$$

に他ならない．

最後に，$k<n$ の場合の Newton の恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j e_{k-j}^{(n)}(X_0,\dots,X_{n-1})p_j^{(n)}(X_0,\dots,X_{n-1})=(n-k)e_k^{(n)}(X_0,\dots,X_{n-1}) \tag{$**$}$$

を示す．上式の両辺は斉 k 次の対称多項式だから，$\alpha\in\mathbb{N}^n_{\downarrow}$，$|\alpha|=k$ に対して，上式の両辺の α 次の係数が等しいことを示せばよい．このとき，α は $(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1},0,\dots,0)$ という形である．さて，$(*)$ において n を k に置き換えると，

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_{k-j}^{(k)}(X_0,\dots,X_{k-1})p_j^{(k)}(X_0,\dots,X_{k-1})=0$$

となる．$e_{k-j}^{(k)}(X_0,\dots,X_{k-1})=e_{k-j}^{(n)}(X_0,\dots,X_{k-1},0,\dots,0)$ であり，$j\geq 1$ ならば $p_j^{(k)}(X_0,\dots,X_{k-1})=p_j^{(n)}(X_0,\dots,X_{k-1},0,\dots,0)$ である．また，$j=0$ については，$p_0^{(k)}=k$，$p_0^{(n)}=n$ である．よって，上式は

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j e_{k-j}^{(n)}(X_0,\dots,X_{k-1},0,\dots,0)p_j^{(n)}(X_0,\dots,X_{k-1},0,\dots,0)=(n-k)e_k^{(n)}(X_0,\dots,X_{k-1},0,\dots,0) \tag{$***$}$$

と書き直せる．$(***)$ は $(**)$ において $X_k,\dots,X_{n-1}$ に 0 を代入したものだが，α は $(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1},0,\dots,0)$ という形だから，$(**)$ と $(***)$ の対応する辺の α 次の係数はそれぞれ等しい．よって，$(***)$ が成り立つことより，$(**)$ の両辺の α 次の係数は等しい．これで，主張が示された． □

系 4.3 A を可換環とする．

(1) $k\in\mathbb{N}$ に対して，p_k は $(-1)^{k-1}ke_k$ と「$e_1,\dots,e_{k-1}$ の A 係数多項式」の和として書ける．

(2) A が $\mathbb{Q}$ と同型な部分環をもつとする．このとき，$k\geq 1$ に対して，e_k は $(-1)^{k-1}k^{-1}p_k$ と「$p_1,\dots,p_{k-1}$ の A 係数多項式」の和として書ける．

証明 (1) $k\in\mathbb{N}$ に対して，Newton の恒等式（命題 4.2）は

$$p_k=e_1p_{k-1}-e_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-2}e_{k-1}p_1+(-1)^{k-1}ke_k$$

と書き直せる．これを用いれば，k に関して帰納的に主張が示せる．

(2) A が $\mathbb{Q}$ と同型な部分環をもつ場合，$k\geq 1$ に対して，Newton の恒等式（命題 4.2）は

$$e_k=k^{-1}(e_{k-1}p_1-e_{k-2}p_2+\cdots+(-1)^{k-1}e_0p_k)$$

と書き直せる．これを用いれば，k に関して帰納的に主張が示せる． □

定理 4.4 A は可換環であり，$\mathbb{Q}$ と同型な部分環をもつとする．このとき，1 次から n 次までの冪和対称多項式 $p_1,\dots,p_n$ は，$A[X_0,\dots,X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$ の単位的 A-代数としての基底である．すなわち，写像

$$\psi\colon A[P_1,\dots,P_n]\to A[X_0,\dots,X_{n-1}]^{\mathrm{sym}};\quad f\mapsto f(p_1,\dots,p_n)$$

は，単位的 A-代数の同型である．

証明 ψ の全射性は，対称多項式の基本定理（定理 3.2）における ϕ の全射性と，基本対称多項式 e_k が ψ の像に属すること（系 4.3 (2)）から従う．

ψ の単射性を示す．$f \in A[P_1,\dots,P_n] \setminus \{0\}$ を任意にとり，$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha P^\alpha$ と表す．各 p_k を，$F_k \in A[E_1,\dots,E_n]$ を用いて $p_k = F_k(e_1,\dots,e_n)$ と表すと，

$$f(p_1,\dots,p_n) = f(F_1(e_1,\dots,e_n),\dots,F_n(e_1,\dots,e_n))$$

である．対称多項式の基本定理（定理 3.2）における ϕ の単射性より，$f(p_1,\dots,p_n) \in A[X_0,\dots,X_{n-1}]$ が 0 でないことを示すためには，上式の右辺で e_k を不定元 E_k に置き換えて得られる $A[E_1,\dots,E_n]$ の元

$$f(F_1(E_1,\dots,E_n),\dots,F_n(E_1,\dots,E_n)) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_\alpha F_1(E_1,\dots,E_n)^{\alpha_1}\cdots F_n(E_1,\dots,E_n)^{\alpha_n}$$

が 0 でないことをいえばよい．

「$n, n-1, \dots,$ 1-成分の優先順位で比較する $\mathbb{N}^n$ 上の辞書式順序」を $\preceq'$ と書き,「$\preceq'$ に関する次数」を定義 1.2 と同様に定義する．系 4.3 (1) より，$1 \le k \le n$ に対して，F_k の $\preceq'$ に関する次数は $\delta_k = (0,\dots,1,\dots,0)$ (k-成分のみが 1 で，他は 0）であり，その δ_k 次の係数は $(-1)^{k-1}k$ である．したがって，命題 1.3（に対応する $\preceq'$ に関する次数についての結果）より，各 $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して，$F_1^{\alpha_1}\cdots F_n^{\alpha_n}$ の $\preceq'$ に関する次数は α であり，その α 次の係数は $\prod_{k=1}^n ((-1)^{k-1}k)^{\alpha_k}$ である．よって，f の $\preceq'$ に関する次数を β とすれば，$f(F_1,\dots,F_n)$ の β 次の係数は $a_\beta \prod_{k=1}^n ((-1)^{k-1}k)^{\alpha_k} \ne 0$ だから（A において「0 でない整数」が零因子でないことを用いた），$f(F_1,\dots,F_n) \ne 0$ である．これで，ψ の単射性が示された．□

注意 4.5　証明からわかるように，定理 4.4 における ψ の単射性に関しては，A において「0 でない整数」が零因子でない（正確には，任意の $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して，一意な環準同型 $\mathbb{Z} \to A$ による k の像は零因子でない）と仮定するだけで十分である．

注意 4.6　一般の可換環 A に対しては，定理 4.4 は成り立たない．たとえば，$\mathbb{Q}[X,Y]$ において

$$XY = 2^{-1}((X+Y)^2 - (X^2+Y^2)),$$

すなわち

$$e_2(X,Y) = 2^{-1}(p_1(X,Y)^2 - p_2(X,Y))$$

であり，定理 4.4 より，これ以外の方法で e_2 を p_1, p_2 の $\mathbb{Q}$ 係数多項式として表すことはできない．特に，e_2 を p_1, p_2 の $\mathbb{Z}$ 係数多項式として表すことはできないから，$A = \mathbb{Z}$ に対しては定理 4.4 における ψ の全射性は成り立たない．また，p を素数とすると[*3]，$\mathbb{F}_p[X,Y]$ においては

$$(X+Y)^p = X^p + Y^p,$$

すなわち

$$p_1(X,Y)^p = p_p(X,Y)$$

だから，$A = \mathbb{F}_p$ に対しては定理 4.4 における ψ の単射性は成り立たない．

5　交代多項式

定義 5.1（差積）　A を可換環とする．差積 Δ を，

$$\Delta = \prod_{0\le i<j<n} (X_i - X_j) \in A[X_0,\dots,X_{n-1}]^{\mathrm{alt}}$$

[*3] 対称冪和多項式を表す記号と衝突するが，他によい記号が思い付かなかった．

と定める．変数の個数を明示する必要がある場合には，$\varDelta$ の代わりに $\varDelta^{(n)}$ と書く．

補題 5.2 A を可換環とする．$f \in A[X]$ が $a_0, \ldots, a_{k-1} \in A$ を根にもち，任意の $0 \leq i < j < k$ に対して $a_i - a_j$ が零因子でなければ，f は $(X - a_0)\cdots(X - a_{k-1})$ で割り切れる．

証明 k に関する帰納法で示す．$k = 0$ のときは明らかである．$k \geq 1$ として，$k-1$ のときには主張は正しいとする．f が $a_0, \ldots, a_{k-1}$ を根にもつとすると，因子定理より f は $X - a_0$ で割り切れるから，ある $g \in A[X]$ が存在して $f = (X - a_0)g$ となる．任意の $1 \leq i < k$ に対して，f は a_i を根にもち，$a_i - a_0$ は零因子でないから，g も a_i を根にもつ．よって，帰納法の仮定より g は $(X - a_1)\cdots(X - a_{k-1})$ で割り切れるから，f は $(X - a_0)\cdots(X - a_{k-1})$ で割り切れる．これで，帰納法が完成した．□

命題 5.3 A を可換環とする．$f \in A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 任意の $0 \leq i < j < n$ に対して，f において X_j を X_i に置き換えて得られる多項式 $f(X_0, \ldots, X_i, \ldots, X_i, \ldots, X_{n-1})$ は 0 である．
(b) f は差積 $\varDelta$ で割り切れる．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らかである．$n \geq 1$ として，$n-1$ のときには主張は正しいとする．$f \in A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ が (a) を満たすとすると，f は $A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ 上の X_0 を不定元とする多項式として $X_1, \ldots, X_{n-1}$ を根にもち，系 1.5 より $X_i - X_j$（$1 \leq i < j < n$）は零因子ではないから[*4]，補題 5.2 より f は $(X_0 - X_1)\cdots(X_0 - X_{n-1})$ で割り切れる．したがって，ある $g \in A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ が存在して

$$f = (X_0 - X_1)\cdots(X_0 - X_{n-1})g$$

となる．任意の $1 \leq i < j < n$ に対して，上式の両辺において X_j を X_i に置き換えると

$$0 = (X_0 - X_1)\cdots(X_0 - X_i)\cdots(X_0 - X_i)\cdots(X_0 - X_{n-1})g(X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_{n-1})$$

となるが，系 1.5 より $(X_0 - X_1)\cdots(X_0 - X_i)\cdots(X_0 - X_i)\cdots(X_0 - X_{n-1})$ は零因子ではないから

$$g(X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_{n-1}) = 0$$

である．すなわち，g は $A[X_0]$ 上の $X_1, \ldots, X_{n-1}$ を不定元とする $n-1$ 変数多項式として条件 (a) を満たす．よって，帰納法の仮定より g は差積

$$\varDelta^{(n-1)}(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j < n} (X_i - X_j)$$

で割り切れるから，f は

$$(X_0 - X_1)\cdots(X_0 - X_{n-1})\varDelta^{(n-1)}(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \varDelta^{(n)}(X_0, \ldots, X_{n-1})$$

で割り切れる．これで，帰納法が完成した．□

定義 5.4（交代多項式） A を可換環とする．A 上の n 変数多項式 f であって，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma f = (\operatorname{sgn} \sigma) f$ を満たすものを，A 上の n 変数**交代多項式**という．A 上の n 変数交代多項式の全体は，$A[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ の部分 A-加群をなす．この部分 A-加群を，$A[X_0, \ldots, X_{n-1}]^{\mathrm{alt}}$ と書く．

[*4] 念のため注意しておくと，A が零環であっても $1 \in A$ が零因子でないことに変わりはないから，問題なく系 1.5 が適用できる．

命題 5.5　A を可換環とし，$2 \in A$ は零因子ではないとする．このとき，任意の $f \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]^{\mathrm{alt}}$ と $0 \le i < j < n$ に対して，f において X_j を X_i に置き換えて得られる多項式 $f(X_0, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1})$ は 0 である．

証明　$\tau \in \mathfrak{S}_n$ を i と j の互換とすると，f の交代性より

$$\begin{aligned} f(X_0, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}) &= \tau f(X_0, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}) \\ &= -f(X_0, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}), \end{aligned}$$

すなわち

$$2f(X_0, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}) = 0$$

だから，$2 \in A$ が零因子でないことより $f(X_0, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_{n-1}) = 0$ である．□

定理 5.6　A を可換環とし，$2 \in A$ は零因子ではないとする．このとき，写像

$$\delta \colon A[X_0, \dots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}} \to A[X_0, \dots, X_{n-1}]^{\mathrm{alt}}; \quad f \mapsto \Delta \cdot f$$

は，A-加群の同型である．

証明　対称多項式と交代多項式との積は交代多項式になるから，δ は確かに $A[X_0, \dots, X_{n-1}]^{\mathrm{sym}}$ から $A[X_0, \dots, X_{n-1}]^{\mathrm{alt}}$ への A-加群の準同型を定める．また，系 1.5 より差積 Δ は零因子ではないから，δ は単射である．最後に，δ の全射性を示す．$2 \in A$ が零因子でないことと命題 5.5，命題 5.3 より，任意の $f \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]^{\mathrm{alt}}$ に対してある $g \in A[X_0, \dots, X_{n-1}]$ が存在して $f = \Delta \cdot g$ となる．この g について，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$(\operatorname{sgn} \sigma)\Delta \cdot g = (\operatorname{sgn} \sigma)f = \sigma f = \sigma\Delta \cdot \sigma g = (\operatorname{sgn} \sigma)\Delta \cdot \sigma g$$

だから，Δ が零因子でないことより $g = \sigma g$ である．すなわち，g は対称多項式である．これで，δ の全射性が示された．□

参考文献

[1] 本間 泰史，「有限群の表現，対称群の表現の基礎」.（2021 年 3 月 17 日アクセス）
http://www.f.waseda.jp/homma_yasushi/homma2/download/representation.pdf

[2] マスオ，「ニュートンの恒等式とその証明」.（2021 年 3 月 17 日アクセス）
https://manabitimes.jp/math/1304