ルート系

箱

2023 年 8 月 29 日

概要

ルート系の一般論についてまとめる．ルート系やそれに関連する概念を定義し，その基本的な性質を見たあと，ルート系の Dynkin 図形による分類について述べる．

目次

記号と用語

- 本稿を通して，$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．特に断らなければ，線型空間の係数体は $\mathbb{K}$ とする．

1　ルート系

1.1　鏡映

定義 1.1（鏡映）　$n \geq 1$ を整数とし，V を n 次元 $\mathbb{K}$-線型空間とする．V から自身への線型写像であって，1 を重複度 $n-1$ の固有値とし，-1 を重複度 1 の固有値とするものを，V 上の**鏡映**（reflection）という．鏡映 s に対して，その固有値 1 の固有空間を**鏡映面**，固有値 -1 の固有空間を**鏡映軸**という．

V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して，線型写像 $s_{\alpha,f}\colon V \to V$ を

$$s_{\alpha,f}(v) = v - f(v)\alpha \qquad (v \in V)$$

と定める．$f(\alpha) = 2$ ならば，$s_{\alpha,f}$ は $\operatorname{Ker} f$ を鏡映面，$\mathbb{K}\alpha$ を鏡映軸とする鏡映である．逆に，V 上の任意の鏡映は，このように書ける（ただし，α と f の選び方には 1 次元分の自由度がある）．本節の以下の部分では，この記号 $s_{\alpha,f}$ を断りなく用いる．

命題 1.2　V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間，R をその有限部分集合とし，R は V を張るとする．線型同型写像 σ, $\tau\colon V \to V$ であって $\sigma^2 = \tau^2 = \mathrm{id}_V$ を満たすものについて，これらの固有値 -1 の固有空間が一致し，これらがともに R を安定にするならば，$\sigma = \tau$ である．

証明　σ と τ の共通の固有値 -1 の固有空間を，V^0 と置く．$v \in V$ とすると，$\sigma(v) - v$, $\tau(v) - v \in V^0$ より $\sigma\tau(v) - v = \sigma(\tau(v) - \sigma(v)) = \sigma((\tau(v) - v) - (\sigma(v) - v)) \in V^0$ であり，$\sigma\tau$ は V^0 上では恒等写像だから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
(\sigma\tau)^n(v) - v &= \sum_{i=0}^{n-1}((\sigma\tau)^{i+1}(v) - (\sigma\tau)^i(v)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(\sigma\tau)^i(\sigma\tau(v) - v) \\
&= n(\sigma\tau(v) - v)
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で，$G = \{T \in GL(V) \mid T(R) = R\}$ は $GL(V)$ の有限部分群であり，仮定より $\sigma\tau \in G$ だから，$\sigma\tau$ の位数は有限である．そのためには，$\sigma\tau(v) - v = 0$ でなければならない．よって，$\sigma = \tau$ である．　□

命題 1.3　V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間とし，$\langle -, - \rangle$ をその上の非退化対称双線型形式とする．V 上の鏡映 s がこの形式を不変にし，$\alpha \in V \setminus \{0\}$ を $-\alpha$ に移すならば，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$s(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \qquad (v \in V)$$

である．すなわち，$s = s_{\alpha,f}$（$f \in V^*$）と表すとき，

$$f = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

である．

証明　v を s の鏡映面上の点とすると

$$\langle \alpha, v\rangle = \langle \alpha, s(v)\rangle = \langle s(\alpha), v\rangle = -\langle \alpha, v\rangle$$

より $\langle \alpha, v\rangle = 0$ であり，$\langle -,-\rangle$ に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間 $(\mathbb{K}\alpha)^{\perp}$ は $\dim V - 1$ 次元だから，s の鏡映面は $(\mathbb{K}\alpha)^{\perp}$ に等しい．α は s の鏡映面上にはないから，$\langle \alpha, \alpha\rangle \neq 0$ である．$s_{\alpha,f}$ は，α を $-\alpha$ に移し $(\mathbb{K}\alpha)^{\perp}$ の点は動かさないから，s に一致する．□

命題 1.4　V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間とする．任意の $\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して，$s^*_{\alpha,f} = s_{f,\alpha}$ である．

証明　任意の $g \in V^*$ と $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} s^*_{\alpha,f}(g)(v) &= g(s_{\alpha,f}(v)) \\ &= g(v - f(v)\alpha) \\ &= g(v) - f(v)g(\alpha) \\ &= (g - g(\alpha)f)(v) \\ &= s_{f,\alpha}(g)(v) \end{aligned}$$

だから，$s^*_{\alpha,f} = s_{f,\alpha}$ である．□

1.2　ルート系

定義 1.5（ルート系）　有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上の**ルート系**（root system）とは，部分集合 $R \subseteq V$ であって，次の 3 条件 (RS1)–(RS3) を満たすものをいう．さらに，条件 (RS4) も満たすとき，そのルート系は**被約**（reduced）であるという[*1]．

(RS1) R は有限であり，0 を含まず，V を張る．
(RS2) 任意の $\alpha \in R$ に対して，V 上の鏡映 s_α であって，$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ かつ $s_\alpha(R) = R$ を満たすものが存在する．((RS1) と命題 1.2 より，このような s_α は一意に定まり，したがって，$s_\alpha = s_{\alpha,\alpha^\vee}$ となる $\alpha^\vee \in V^*$ も一意に定まる．以下，この記号を用いる．)
(RS3) 任意の $\alpha, \beta \in R$ に対して，$\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$ である．
(RS4) $\alpha \in R$ ならば $2\alpha \notin R$ である．

$\mathbb{K}$-線型空間 V の次元を，ルート系 R の**階数**（rank）という．ルート系の各元を，**ルート**（root）という．
(RS2) における $\alpha^\vee$ を α の**双対ルート**（coroot）といい，s_α を α に関する**ルート鏡映**（root reflection）という．ルート鏡映全体が生成する $GL(V)$ の部分群を，ルート系 R の **Weyl 群**（Weyl group）といい，$W(R)$ と書く．

以下，特に断らなくても，ルート α の双対ルートを $\alpha^\vee$ と書き，α に関するルート鏡映を s_α と書く．考えているルート系を明示したいときは，双対ルートを $\alpha^\vee_R$，ルート鏡映を s^R_α などとも書く．また，$\alpha, \beta \in R$ に対して，

$$n(\beta, \alpha) = \alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$$

[*1] 被約ルート系のことを単にルート系と呼ぶことも多い．

と書き，これを **Cartan 整数**（Cartan integer）という．この記号を用いれば，ルート β を α に関するルート鏡映で移した先は，

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$$

と書ける．

定義 1.6（ルート系の同型）　R_1, R_2 を，それぞれ有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V_1, V_2 上のルート系とする．ルート系 R_1 から R_2 への**同型**（isomorphism）とは，線型同型写像 $\mathit{\Phi}\colon V_1 \to V_2$ であって，$\mathit{\Phi}(R_1) = R_2$ を満たすものをいう．ルート系 R_1 から R_2 への同型が存在するとき，これらのルート系は**同型**（isomorphic）であるという．

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とすると，R は V の係数拡大 $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ の部分集合ともみなせる．このようにみなすと，明らかに，R は $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ 上のルート系となる．これを，ルート系の係数拡大という．

命題 1.7　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．V の部分 $\mathbb{Q}$-線型空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を

$$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} R$$

と定めると，R は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系でもあり，包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V$ が誘導する $\mathbb{K}$-線型写像 $i\colon V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \to V$ は同型である（したがって，V 上のルート系 R は，$V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系 R の $\mathbb{K}$ への係数拡大とみなせる）．

証明　$V_{\mathbb{Q}}$ と R が (RS1), (RS4) を満たすことは明らかである．また，$\alpha \in R$ とすると，V と R が (RS3) を満たすことより $\alpha^\vee(V_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}$ だから，$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \in (V_{\mathbb{Q}})^*$ であり，$s_\alpha|_{V_{\mathbb{Q}}}$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の鏡映 $s_{\alpha,\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}}$ である．この鏡映は，明らかに (RS2), (RS3) の条件を満たす．よって，R は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系である．

包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V$ が誘導する $\mathbb{K}$-線型写像 $i\colon V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \to V$ が同型であることを示す．まず，$V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} R$ だから，i は全射である．次に，i が単射であることを示す．そのためには，i の双対線型写像

$$i^*\colon V^* \to (V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K})^* \cong (V_{\mathbb{Q}})^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$$

が全射であることをいえばよい．各 $\alpha \in R$ に対して

$$i^*(\alpha^\vee) = \alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \otimes 1$$

だから，$(V_{\mathbb{Q}})^* = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \mid \alpha \in R\}$ をいえばよい．以下，これを示す．$V_{\mathbb{Q}}$ 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定すると（任意にとった $V_{\mathbb{Q}}$ 上の内積を $W(R)$ の作用に関して平均すればよい），$\alpha \in R$ に対して命題 1.3 より $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

であり，これは $\langle -, - \rangle$ が定める $\mathbb{Q}$-線型同型 $V_{\mathbb{Q}} \cong (V_{\mathbb{Q}})^*$ を通して $2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle \in V_{\mathbb{Q}}$ に対応する．$\alpha \in R$ が動くときこれら全体は $V_{\mathbb{Q}}$ を張るから，$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}$ の全体は $(V_{\mathbb{Q}})^*$ を張る．これで，主張が示された．　□

系 1.8　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) V 上の $\operatorname{Aut}(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ であって，任意の $v \in V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} R$ に対して $\langle v, v \rangle \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるものが存在する．

(2) $\langle -,- \rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ を V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式とすると，任意のルート α, $\beta\in R$ に対して，$\langle\alpha,\alpha\rangle\neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee=\frac{2\langle -,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle},\qquad n(\beta,\alpha)=\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

である．

証明 (1) $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ の部分体である場合，任意に固定した V 上の内積を $\mathrm{Aut}(R)$ の作用に関して平均すれば，V 上の $\mathrm{Aut}(R)$-不変な内積が得られる．$\mathbb{K}$ が一般の場合，$V_\mathbb{Q}$ 上の $\mathrm{Aut}(R)$-不変な内積を一つとって係数拡大すれば，条件を満たす V 上の非退化対称双線型形式が得られる．

(2) ルート鏡映 $s_\alpha=s_{\alpha,\alpha^\vee}$ は $\langle -,- \rangle$ を不変にし，α を $-\alpha$ に移すから，命題 1.3 より $\langle\alpha,\alpha\rangle\neq 0$ かつ $\alpha^\vee=2\langle -,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ である．また，これより，$n(\beta,\alpha)=\alpha^\vee(\beta)=2\langle\beta,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ である． □

命題 1.7 より，有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系 R は，$V_\mathbb{Q}=\mathrm{span}_\mathbb{Q} R$ 上のルート系とみなせ，これはさらに，係数拡大によって $V_\mathbb{R}=V_\mathbb{Q}\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R}$ 上のルート系ともみなせる．さらに，系 1.8 (1) より，$V_\mathbb{R}$ 上の $W(R)$-不変な内積が存在する．これらにより，ルート系の性質の証明の多くは，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ であり，$W(R)$-不変な内積が定まっている場合に帰着される．この論法は，本節の以下の部分でしばしば用いられる．

系 1.9 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$v\in V$ が任意の $\alpha\in R$ に対して $s_\alpha(v)=v$ を満たすならば，$v=0$ である．

証明 系 1.8 (2) より，$\mathrm{span}_\mathbb{K}\{\alpha^\vee\mid\alpha\in R\}=V^*$ である．よって，任意の $\alpha\in R$ に対して $s_\alpha(v)=v$，すなわち $\alpha^\vee(v)=0$ であるとすると，$v=0$ である． □

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，$W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ を固定する．このとき，系 1.8 より，二つのルート α, $\beta\in R$ に対して

$$n(\alpha,\beta)=0\iff n(\beta,\alpha)=0\iff\langle\alpha,\beta\rangle=0$$

である．そこで，$n(\alpha,\beta)=n(\beta,\alpha)=0$ であるとき，α と β は**直交する**（orthogonal）という．また，ルートの集合 A, B について，A に属する任意のルートと B に属する任意のルートが直交するとき，A と B は直交するという．

1.3 部分ルート系

命題 1.10 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．部分線型空間 $V'\subseteq V$ と部分集合 $R'\subseteq R$ が，$R'=R\cap V'$ かつ $\mathrm{span}_\mathbb{K} R'=V'$ を満たすとする．

(1) R' は V' 上のルート系であり，R が被約ならば R' も被約である．

(2) $\alpha\in R'$ に対して，$s_\alpha^{R'}=s_\alpha^R|_{V'}$ である（$s_\alpha^{R'}$, $s_\alpha^R|_{V'}$ は，それぞれルート系 R', R における α に関するルート鏡映を表す）．

(3) $\alpha\in R'$ に対して，$\alpha_{R'}^\vee=\alpha_R^\vee|_{V'}$ である（$\alpha_{R'}^\vee$, $\alpha_R^\vee|_{V'}$ は，それぞれルート系 R', R における α の双対ルートを表す）．

(4) V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ の V' への制限は，V' 上の $W(R')$-不変な非退化対称双線型形式である．

(5) 群準同型 $\iota\colon W(R')\to W(R)$ であって，任意の $\alpha\in R'$ に対して $\iota(s_\alpha^{R'})=s_\alpha^R$ であるものが一意に存在する．さらに，この ι は単射である．

証明 (1), (2) R' が (R1) を満たすことと，R が (R4) を満たすならば R' もそうであることは明らかである．$\alpha\in R'$ とすると，任意の $v\in V'$ に対して $s_\alpha^R(v)=v-\alpha_R^\vee(v)\alpha\in V'$ だから，V' は s_α^R-安定である．したがって，制限 $s_\alpha^R|_{V'}$ は V' 上の鏡映となる．この鏡映は，明らかに (RS2), (RS3) の条件を満たす．よって，R' は V' 上のルート系であり，(2) が成り立つ．

(3) (2) より $s_\alpha^{R'}=s_\alpha^R|_{V'}=s_{\alpha,\alpha_R^\vee|_{V'}}$ だから，$\alpha_{R'}^\vee=\alpha_R^\vee|_{V'}$ である．

(4) V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,-\rangle$ の V' への制限が $W(R')$-不変であることは，(2) から明らかである．次に，$v\in V'$ が任意の $w\in V'$ に対して $\langle v,w\rangle=0$ を満たすとする．すると，任意の $\alpha\in R'$ に対して

$$s_\alpha^{R'}(v)=s_\alpha^R(v)=v-\frac{2\langle v,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha=v$$

だから（系 1.8），系 1.9 より $v=0$ である．よって，$\langle -,-\rangle$ は V' 上で非退化である．

(5) 条件を満たす ι の一意性は，$s_\alpha^{R'}$ の全体が $W(R')$ を生成することから明らかである．条件を満たす ι の存在を示す．V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,-\rangle$ を一つ固定する．(4) で示したように，$\langle -,-\rangle$ は V' 上で非退化だから，これに関する V' の直交空間 $V'^\perp$ は，V' の V における補空間である．したがって，単射群準同型 $\iota\colon GL(V')\to GL(V)$ を，$\iota(T)=T\oplus\mathrm{id}_{V'^\perp}$ と定義できる．この ι は，明らかに，各 $\alpha\in R'$ に対して $s_\alpha^{R'}$ を s_α^R に移し，したがって，$W(R')$ を $W(R)$ の中に移す． □

定義 1.11（部分ルート系） 命題 1.10 の状況で，R' を R の**部分ルート系**（root subsystem）という．

1.4 双対ルート系

補題 1.12 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$\alpha\in R$ と $t\in\mathrm{Aut}(R)$ に対して，

$$s_{t(\alpha)}=ts_\alpha t^{-1},\qquad t(\alpha)^\vee=t^{*-1}(\alpha^\vee)$$

である．

証明 $ts_\alpha t^{-1}$ は $t(\alpha)$ を $-t(\alpha)$ に移し R を安定にする鏡映だから，ルート鏡映の一意性より，$ts_\alpha t^{-1}=s_{t(\alpha)}$ である．また，

$$\begin{aligned}s_{t(\alpha)}(v)=ts_\alpha t^{-1}(v)&=t(t^{-1}(v)-\alpha^\vee(t^{-1}(v))\alpha)\\&=v-\alpha^\vee(t^{-1}(v))t(\alpha)\\&=v-t^{*-1}(\alpha^\vee)(v)t(\alpha)\\&=s_{t(\alpha),t^{*-1}(\alpha^\vee)}(v)\qquad\qquad(v\in V)\end{aligned}$$

だから，$t(\alpha)^\vee=t^{*-1}(\alpha^\vee)$ である． □

命題 1.13 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) $R^\vee=\{\alpha^\vee\mid\alpha\in R\}$ は V^* 上のルート系であり，R が被約であることと $R^\vee$ が被約であることとは同値である．

(2) 任意の $\alpha\in R$ に対して，$s_{\alpha^\vee}=s_\alpha^*=s_\alpha^{*-1}$ である．

(3) 任意の $\alpha \in R$ に対して，$\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ である．

(4) $GL(V)$ から $GL(V^*)$ への群同型 $t \mapsto t^{*-1}$ は，自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ から $\mathrm{Aut}(R^\vee)$ への群同型を与え，Weyl 群 $W(R)$ から $W(R^\vee)$ への群同型を与える．

証明 (1), (2), (3)　系 1.8 (2) より，$R^\vee$ は (RS1) を満たし，R が (RS4) を満たすことと $R^\vee$ が (RS4) を満たすこととは同値である．各 $\alpha^\vee \in R^\vee$ に対して，$\alpha^\vee(\alpha) = 2$ だから

$$s_{\alpha^\vee} = s_{\alpha^\vee, \alpha} \colon V^* \to V^*, \quad f \mapsto f - f(\alpha)\alpha^\vee$$

は V^* 上の鏡映であり，$s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^* = s_\alpha^{*-1}$ である（命題 1.4）．$\beta^\vee \in R^\vee$ に対して

$$s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = s_\alpha^{*-1}(\beta^\vee) = s_\alpha(\beta)^\vee \in R^\vee$$

だから（最後の等号で補題 1.12 を用いた），$s_{\alpha^\vee}$ は (RS2) の条件を満たす．また，このとき $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ であり，任意の $\alpha^\vee, \beta^\vee \in R^\vee$ に対して $\alpha^{\vee\vee}(\beta^\vee) = \beta^\vee(\alpha) \in \mathbb{Z}$ だから，(RS3) も満たされる．よって，$R^\vee$ は V^* 上のルート系であり，(2), (3) が成り立つ．

(4)　補題 1.12 より，$t \in \mathrm{Aut}(R)$ ならば $t^{*-1} \in \mathrm{Aut}(R^\vee)$ であり，(3) よりその逆も成り立つ．よって，群同型 $t \mapsto t^{*-1}$ は，$\mathrm{Aut}(R)$ から $\mathrm{Aut}(R^\vee)$ への群同型を与える．また，(2) よりこの群同型は s_α を $s_{\alpha^\vee}$ に移すから，$W(R)$ から $W(R^\vee)$ への群同型も与える．□

定義 1.14（双対ルート系）　命題 1.13 の状況で，$R^\vee$ を R の**双対ルート系**（dual root system）という．

1.5　ルート系の直和と既約分解

命題 1.15　$(V_i)_{i \in I}$ を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間の有限族とし，各 $i \in I$ に対して R_i を V_i 上のルート系とする．$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$，$R = \coprod_{i \in I} R_i \subseteq V$ と置く．

(1) R は V 上のルート系であり，R が被約であることとすべての R_i が被約であることとは同値である．

(2) $\alpha \in R_i$ に対して，ルート鏡映 s_α^R は，

$$s_\alpha^R(v) = \begin{cases} s_\alpha^{R_i}(v) & (v \in V_i) \\ v & (v \in V_j,\ j \neq i) \end{cases}$$

で与えられる（s_α^R, $s_\alpha^{R_i}$ は，それぞれルート系 R, R_i における α に関するルート鏡映を表す）．

(3) $\alpha \in R_i$ に対して，双対ルート $\alpha_R^\vee$ は，

$$\alpha_R^\vee(v) = \begin{cases} \alpha_{R_i}^\vee(v) & (v \in V_i) \\ 0 & (v \in V_j,\ j \neq i) \end{cases}$$

で与えられる（$\alpha_R^\vee$, $\alpha_{R_i}^\vee$ は，それぞれルート系 R, R_i における α の双対ルートを表す）．

証明　明らかである．□

定義 1.16（ルート系の直和）　命題 1.15 の状況で，R を $(R_i)_{i \in I}$ の**直和**（direct sum）という．

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．V が部分線型空間の有限族 $(V_i)_{i \in I}$ に直和分解され，各 V_i 上にルート系 R_i があって $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ となっていれば，R はルート系の有限族 $(R_i)_{i \in I}$ の直和と自然に同一視できる．このとき，R は $(R_i)_{i \in I}$ に**直和分解**されるという．

命題 1.17　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，$(R_i)_{i\in I}$ を R の有限分割とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(a) $(R_i)_{i\in I}$ はルート系 R の直和分解である．

(b) 各 $i \in I$ に対して $V_i = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} R_i$ と置くと，$\sum_{i\in I} V_i$ は直和である．

(c) 任意の異なる 2 元 $i, j \in I$ に対して，R_i と R_j は直交する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\sum_{i\in I} V_i$ が直和ならば，各 $i \in I$ に対して $R_i = R \cap V_i$ だから R_i は V_i 上のルート系であり（命題 1.10），したがって $(R_i)_{i\in I}$ はルート系 R の直和分解である．

(a) $\Longrightarrow$ (c)　ルート系の直和におけるルート鏡映の式から従う．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 1.7，系 1.8）．このとき，(c) が成り立つとすると，どの異なる二つの R_i も内積に関して直交するから，$(V_i)_{i\in I}$ は内積空間 V における直交族であり，したがって $\sum_{i\in I} V_i$ は直和である．□

定義 1.18（既約ルート系）　R を空でないルート系とする．R が「一つが R でその他がすべて $\emptyset$」という形の直和分解しかもたないとき，ルート系 R は**既約**（irreducible）であるという．そうでないとき，ルート系 R は**可約**（reducible）であるという．

ルート系の既約ルート系への直和分解を**既約分解**といい，既約分解に現れる既約ルート系のそれぞれを**既約成分**という．

命題 1.19　任意のルート系は，順序を除いて一意に既約分解される．

証明　R をルート系とする．R が可約である限り R は二つの空でないルート系 R' と R'' の直和に分解でき，R', R'' に対しても同じことがいえる．R は有限集合だから，この操作は有限回で終了する．よって，R の既約分解は存在する．

$(R_i)_{i\in I}$ と $(R'_j)_{j\in J}$ がともに R の既約分解であるとする．各 $i \in I$ と $j \in J$ に対して，$\{R_i \cap R'_j, R_i \setminus R'_j\}$ は R_i の直和分解だから，R_i の既約性より $R_i \cap R'_j = R_i$ または $R_i \setminus R'_j = R_i$，すなわち $R_i \supseteq R'_j$ または $R_i \cap R'_j = \emptyset$ である．R_i と R'_j を逆にしても同じことがいえるから，結局 $R_i = R'_j$ または $R_i \cap R'_j = \emptyset$ である．これが任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して成り立つから，$(R_i)_{i\in I}$ と $(R'_j)_{j\in J}$ は順序を除いて一致する．よって，R の既約分解は順序を除いて一意である．□

命題 1.20　有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系 R に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) R は既約である．

(b) Weyl 群 $W(R)$ の V 上の自然表現は既約である．

証明　R が空（したがって $V = 0$）ならば，どちらの条件も成り立たない．以下，R が空でない場合を考える．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　0 と V 以外の $W(R)$-安定部分線型空間 V_1 がとれたとする．$\beta \in R \setminus V_1$ とすると，V_1 は s_β-安定だから，任意の $v \in V$ に対して $s_\beta(v) = v - \beta^\vee(v)\beta$ は V に属する．ところが，$v \in V$ かつ $\alpha \notin V$ だから，そのためには $\beta^\vee(v) = 0$ でなければならない．したがって，$\beta^\vee$ は V_1 上で 0 となる．特に，任意の $\alpha \in R \cap V_1$ に対して $n(\alpha, \beta) = \beta^\vee(\alpha) = 0$ である．よって，$R \cap V_1$ と $R \setminus V_1$ は直交する．

$V_1 \neq V$ かつ $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} R = V$ だから，R は V_1 に含まれない．すなわち，$R \setminus V_1$ は空でない．また，$R \cap V_1$ が

空であるとすると，前段の議論よりすべての $\alpha^\vee$（$\alpha \in R$）が V_1 上で 0 であることになるが，これは $V_1 \neq 0$ に反する（系 1.8 (2)）．よって，$R \cap V_1$ は空でない．以上より，R は可約である．対偶をとれば，主張が従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　R が V_1 上の空でないルート系 R_1 と V_2 上の空でないルート系 R_2 に直和分解されるとすると，命題 1.15 より，V_1 と V_2 は $W(R)$-安定である．対偶をとれば，主張が従う．□

系 1.21　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上の既約ルート系とする．V 上の $W(R)$-不変な双線型形式は，スカラー倍を除いて一意である．

証明　V 上の $W(R)$-不変な双線型形式は，$W(R)$ の自然表現からその反傾表現への同変作用素と同一視できる．よって，主張は，命題 1.20 と Schur の補題から従う．□

注意 1.22　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，$\langle -,- \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ を $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式とする．$\alpha, \beta \in R$ を同じ既約成分に属する二つのルートとすると，$s \in W(R)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる（命題 1.20）．このとき，

$$\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle s(\alpha), s(\alpha) \rangle} = \frac{n(\beta, s(\alpha))}{n(\alpha, s(\beta))} \in \mathbb{Q}_{>0}$$

であり，この値は $\langle -,- \rangle$ のとり方によらない．そこで，用語の濫用で，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも，$\sqrt{\langle \beta, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle}$ を **β の α に対するの長さの比**という．

$W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を，任意の $v \in V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} R$ に対して $\langle v, v \rangle \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるようにとれば（系 1.8 (1)），$\langle -,- \rangle$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の $W(R)$-不変な内積を定め，これはさらに，係数拡大によって $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ 上の $W(R)$-不変な内積を定める．これにより，ルートの長さの比に関する議論は，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合に帰着できる．

1.6　二つのルートの関係

定理 1.23　R は有限次元実内積空間 V 上のルート系であり，その内積は $W(R)$-不変であるとする．二つのルート $\alpha, \beta \in R$ であって $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ を満たすものについて，次の表の (i)–(xi) のうちいずれかただ一つが成り立つ．さらに，V が被約ならば，次の表の (i)–(ix) のうちいずれかただ一つが成り立つ．

	$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	$\|\beta\|/\|\alpha\|$	$\angle(\alpha,\beta)$
(i)	0	0	不定	90°
(ii)	1	1	1	60°
(iii)	-1	-1	1	120°
(iv)	1	2	$\sqrt{2}$	45°
(v)	-1	-2	$\sqrt{2}$	135°
(vi)	1	3	$\sqrt{3}$	30°
(vii)	-1	-3	$\sqrt{3}$	150°
(viii)	2	2	1	0°
(ix)	-2	-2	1	180°
(x)	1	4	2	0°
(xi)	-1	-4	2	180°

証明　$n(\alpha,\beta) = 2\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\beta,\beta\rangle$ かつ $n(\beta,\alpha) = 2\langle\beta,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ だから（系 1.8 (2)），

$$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) = \frac{4\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 4(\cos\angle(\alpha,\beta))^2 \leq 4$$

である．また，$n(\alpha,\beta) = 0$ と $n(\beta,\alpha) = 0$ とは同値であり，$n(\alpha,\beta), n(\beta,\alpha) \neq 0$ ならば

$$\frac{n(\beta,\alpha)}{n(\alpha,\beta)} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$$

である．したがって，組 $(n(\alpha,\beta), n(\beta,\alpha))$ の可能性は，表に挙げたもので尽くされる．

(x) または (xi) の場合，$\beta = \pm 2\alpha$ となり被約性の条件 (RS4) に反するから，R が被約ならば，起こりうる可能性は (i)–(ix) に限られる．□

注意 1.24　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，$\alpha, \beta \in R$ とする．

(1) 定理 1.23 と命題 1.7，系 1.8 (1) より，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも，$n(\alpha,\beta)$ と $n(\beta,\alpha)$ の値の組み合わせは，定理 1.23 の表の (i)–(xi)（R が被約ならば，(i)–(ix)）のいずれかである．(i) 以外の場合には，β の α に対する長さの比は，表における「$\|\beta\|/\|\alpha\|$」の値となる（系 1.27）．

(2) 用語の濫用で，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも，**二つのルート** $\alpha, \beta \in R$ **のなす角度** $\angle(\alpha,\beta)$ を，$n(\alpha,\beta)$ と $n(\beta,\alpha)$ の値から定理 1.23 の表によって定義する．特に，α と β が鋭角をなす，直交する，鈍角をなすとは，それぞれ $n(\beta,\alpha) > 0$，$n(\beta,\alpha) = 0$，$n(\beta,\alpha) < 0$ であることをいう（「直交」については，1.2 節の最後に述べた定義と一致する）．

系 1.25　ルート系 R の二つのルート α, β が線型従属ならば，β は $\pm\alpha/2, \pm\alpha, \pm 2\alpha$ のいずれかである．さらに，R が被約ならば，β は $\pm\alpha$ のいずれかである．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，$W(R)$-不変な内積が定まっていると仮定する（命題 1.7，系 1.8 (1)）．この場合の主張は，定理 1.23 に含まれる．□

系 1.26　ルート系 R の二つのルート α, β について，次が成り立つ．

(1) α と β が鋭角をなすならば，$\beta - \alpha \in R \cup \{0\}$ である．
(2) α と β が鈍角をなすならば，$\beta + \alpha \in R \cup \{0\}$ である．□

証明　(1)　$\alpha \neq \beta$ かつ $n(\beta,\alpha) > 0$ ならば，定理 1.23 より $n(\beta,\alpha) = 1$ または $n(\alpha,\beta) = 1$ である．前者の場合 $\beta - \alpha = \beta - n(\beta,\alpha)\alpha = s_\alpha(\beta) \in R$ であり，後者の場合 $\alpha - \beta = \alpha - n(\alpha,\beta)\beta = s_\beta(\alpha) \in R$ だから，いずれにしても $\beta - \alpha \in R$ となる．

(2)　$-\alpha$ と β に (1) を適用すればよい．□

系 1.27　R をルート系とする．$\alpha, \beta \in R$ を同じ既約成分に属する二つのルートとすると，β の α に対する長さの比は，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$（R が被約ならば，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$）またはこれらの逆数のいずれかである．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，$W(R)$-不変な内積が定まっていると仮定する（命題 1.7，系 1.8，注意 1.22）．α と β は同じ既約成分に属するから，$s \in W(R)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる（命題 1.20）．よって，定理 1.23 より，$\|\beta\|/\|\alpha\| = \|\beta\|/\|s(\alpha)\|$ は $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$（R が被約ならば $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$）またはこれらの逆数のいずれかに等しい．□

命題 1.28　R をルート系とする．同じ既約成分に属する二つのルート $\alpha, \beta \in R$ の長さが等しければ，これらは Weyl 群 $W(R)$ の作用によって移り合う．

証明　α と β は同じ既約成分に属するから，$s \in W(R)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる（命題 1.20）．必要ならば s を ss_α に置き換えることで，$s(\alpha)$ と β は鋭角または直角をなすとしてよい．α と β の（したがって，$s(\alpha)$ と β の）長さが等しいことより，$\angle(s(\alpha), \beta)$ は $0°$ または $60°$ である（定理 1.23，注意 1.24）．前者の場合，$s(\alpha) = \beta$ である．後者の場合，$\gamma = s(\alpha) - \beta \in R$ であり（系 1.26 (1)），$s_\gamma s(\alpha) = \beta$ となる．これで，主張が示された．　□

命題 1.29　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，$\alpha, \beta \in R$ を線型独立な二つのルートとし，

$$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in R\}$$

と置く．

(1) $I_{\beta,\alpha}$ は，$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける．

(2) (1) の p, q について，$p - q = -n(\beta, \alpha)$ である．

(3) (1) の p, q について，$\gamma = \beta - q\alpha$ と置くと，$p + q = -n(\gamma, \alpha)$ であり，これは $0, 1, 2, 3$ のいずれかである．

証明　(1)　$p = \max I_{\beta,\alpha}$，$-q = \min I_{\beta,\alpha}$ と置く．明らかに $0 \in I_{\beta,\alpha}$ だから，$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．もし $I_{\beta,\alpha} \neq [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ であるとすると，$r, s \in I_{\beta,\alpha}$ を $r < s$ かつ $r + 1, s - 1 \notin I_{\beta,\alpha}$ を満たすようにとれる．この r, s について，系 1.26 の対偶より

$$n(\beta + r\alpha, \alpha) \geq 0 \geq n(\beta + s\alpha, \alpha)$$

だが，一方で $n(\beta + j\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + jn(\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + 2j$ は j に関して狭義単調増加だから，これは不可能である．よって，背理法より，$I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ である．

(2)　ルート鏡映 s_α は $\beta + j\alpha$ を $\beta - (n(\beta, \alpha) + j)\alpha$ に移すから，写像 $j \mapsto -(n(\beta, \alpha) + j)$ は $I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ から自身への全単射である．よって，$p - q = -n(\beta, \alpha)$ である．

(3)　β の代わりに γ に対して (2) を適用すれば，$p + q = -n(\gamma, \alpha)$ を得る．また，α と γ は線型独立だから，定理 1.23 より $|n(\gamma, \alpha)|$ は $0, 1, 2, 3$ のいずれかである．$p + q \geq 0$ だから，$p + q = -n(\gamma, \alpha)$ は $0, 1, 2, 3$ のいずれかである．　□

命題 1.30　R をルート系とする．線型独立な二つのルート $\alpha, \beta \in R$ が $\beta + \alpha \in R$ を満たすとして，$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を命題 1.29 のとおりに定める．このとき，$\beta + \alpha$ の β に対する長さの比（$\alpha, \beta, \alpha + \beta$ の中で直交する対はたかだか一つだから，β と $\beta + \alpha$ は R の同じ既約成分に属し，長さの比が定まる）は，$\sqrt{(q+1)/p}$ に等しい．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，$W(R)$-不変な内積が定まっていると仮定する（命題 1.7，系 1.8 (1)，系 1.27）．$\gamma = \beta - q\alpha$ と置く．命題 1.29 と $\beta + \alpha \in R$（すなわち $p \geq 1$）より，$p + q = -n(\gamma, \alpha) \in \{1, 2, 3\}$ である．以下，この値によって場合分けをする．

$p + q = -n(\gamma, \alpha) = 1$ ならば，$(p, q) = (1, 0)$，$\beta = \gamma$ である．この場合，$s_\alpha(\gamma) = \gamma + \alpha$ だから，

$$\frac{\|\beta + \alpha\|}{\|\beta\|} = \frac{\|\gamma + \alpha\|}{\|\gamma\|} = 1 = \sqrt{\frac{q+1}{p}}$$

である．

$p+q=-n(\gamma,\alpha)=2$ ならば，$\|\gamma\|/\|\alpha\|=\sqrt{2}$ かつ $\angle(\alpha,\gamma)=135^\circ$ である（定理 1.23）．$(p,q)=(2,0)$ ならば，$\beta=\gamma$ であり，

$$\frac{\|\beta+\alpha\|}{\|\beta\|}=\frac{\|\gamma+\alpha\|}{\|\gamma\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{q+1}{p}}$$

である．$(p,q)=(1,1)$ ならば，$\beta=\gamma+\alpha$ であり，

$$\frac{\|\beta+\alpha\|}{\|\beta\|}=\frac{\|\gamma+2\alpha\|}{\|\gamma+\alpha\|}=\sqrt{2}=\sqrt{\frac{q+1}{p}}$$

である．

$p+q=-n(\gamma,\alpha)=3$ ならば，$\|\gamma\|/\|\alpha\|=\sqrt{3}$ かつ $\angle(\alpha,\gamma)=150^\circ$ である（定理 1.23）．$(p,q)=(3,0)$ ならば，$\beta=\gamma$ であり，

$$\frac{\|\beta+\alpha\|}{\|\beta\|}=\frac{\|\gamma+\alpha\|}{\|\gamma\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{q+1}{p}}$$

である．$(p,q)=(2,1)$ ならば，$\beta=\gamma+\alpha$ であり，

$$\frac{\|\beta+\alpha\|}{\|\beta\|}=\frac{\|\gamma+2\alpha\|}{\|\gamma+\alpha\|}=1=\sqrt{\frac{q+1}{p}}$$

である．$(p,q)=(1,2)$ ならば，$\beta=\gamma+2\alpha$ であり，

$$\frac{\|\beta+\alpha\|}{\|\beta\|}=\frac{\|\gamma+3\alpha\|}{\|\gamma+2\alpha\|}=\sqrt{3}=\sqrt{\frac{q+1}{p}}$$

である．

以上で，すべての場合に主張が示された． □

1.7 被約ルート系への帰着

定義 1.31（割れないルート） R をルート系とする．ルート $\alpha\in R$ が**割れない**（indivisible）とは，$\alpha/2\notin R$ であることをいう．

命題 1.32 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．R' を，R の割れないルート全体のなす集合とする．

(1) R' は V 上の被約ルート系であり，R が既約であることと R_0 が既約であることとは同値である．

(2) $\alpha\in R'$ に対して，$s_\alpha^{R'}=s_\alpha^R$ である（$s_\alpha^{R'}$, s_α^R は，それぞれルート系 R', R における α に関するルート鏡映を表す）．

(3) $\alpha\in R'$ に対して，$\alpha_{R'}^\vee=\alpha_R^\vee$ である（$\alpha_{R'}^\vee$, $\alpha_R^\vee$ は，それぞれルート系 R', R における α の双対ルートを表す）．

(4) $W(R')=W(R)$ である．

証明 (1), (2) R' が (R1), (R4) を満たすことは明らかである．$\alpha\in R'$ とすると，s_α^R は R の自己同型だから，割れないルートを割れないルートに移す．したがって，鏡映 s_α^R は，(RS2), (RS3) の条件を満たす．よって，R' は V 上の被約ルート系であり，(3) が成り立つ．

$V = V_1 \oplus V_2$ を線型空間の直和分解とするとき，$R = (R \cap V_1) \sqcup (R \cap V_2)$ であることと $R' = (R' \cap V_1) \sqcup (R' \cap V_2)$ であることは同値であり，また，$i = 1, 2$ に対して，$R \cap V_i$ が空であることと $R' \cap V_i$ が空であることとは同値である．よって，R が既約であることと R' が既約であることとは同値である．

(3), (4)　(2) から明らかである．　□

注意 1.33　命題 1.32 において，$R' = \{\alpha \in R \mid \alpha/2 \notin R\}$ の代わりに $R'' = \{\alpha \in R \mid 2\alpha \notin R\}$ を用いても，同じ主張が成り立つ．証明も，まったく同様にできる．

注意 1.34　命題 1.32 や注意 1.33 において，$\mathrm{Aut}(R') = \mathrm{Aut}(R)$ や $\mathrm{Aut}(R'') = \mathrm{Aut}(R)$ は成り立たない．たとえば，$\mathbb{K}^2$ の標準基底を (ϵ_1, ϵ_2) と書くと，$R = \{\pm\epsilon_1, \pm 2\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ は $\mathbb{K}^2$ 上の（被約でない）ルート系であり，R の自己同型は恒等写像のみだが，$R' = \{\pm\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ や $R'' = \{\pm 2\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ は恒等写像以外の自己同型をもつ．

次の定理により，被約でない既約ルート系の構成と分類は，被約なルート系の構成と分類に帰着される（2.4 節）．

定理 1.35　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上の被約でない既約ルート系とする．

(1) R の各ルートの最短ルートに対する長さの比は，$1, \sqrt{2}, 2$ のいずれかである．

以下，最短ルートに対する長さの比が $1, \sqrt{2}, 2$ であるようなルートの全体を，それぞれ A, B, C と置く．

(2) $2A = C$ である．
(3) A に属する異なる二つのルートは，直交する．
(4) $R' = A \cup B$ と $R'' = B \cup C$ は，V 上の被約な既約ルート系である．

証明　(1)　R の二つのルートの長さの比は，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ またはこれらの逆数のいずれかである（系 1.27）．一方で，R は被約でないから，長さの比が $1 : 2$ であるような二つのルートが存在する．以上から，主張が従う．

(2)　R は被約でないから，$\alpha, 2\alpha \in R$ を満たすルート α がとれ，$\alpha \in A$ かつ $2\alpha \in C$ となる．$\beta \in A$ とすると，$s \in W(R)$ を $s(\alpha) = \beta$ となるようにとれるから（命題 1.28），$2\beta = s(2\alpha) \in C$ である．逆に，$\gamma \in C$ とすると，$s \in W(R)$ を $s(2\alpha) = \gamma$ となるようにとれるから（命題 1.28），$\gamma/2 = s(\alpha) \in A$ である．よって，$2A = C$ である．

(3)　$\alpha, \beta \in A$ を異なる二つのルートとすると，(2) より $2\alpha \in C$ である．2α と β の長さの比は $2 : 1$ だから，定理 1.23 より，これらは直交する．よって，α と β は直交する．

(4)　(2) より，$A \cup B = \{\alpha \in R \mid \alpha/2 \notin R\}$，$B \cup C = \{\alpha \in R \mid 2\alpha \notin R\}$ である．よって，主張は，命題 1.32 と注意 1.33 から従う．　□

1.8　ルート系の基底

定義 1.36（ルート系の基底）　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$B \subseteq R$ がルート系 R の基底（basis）であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(i) B は $\mathbb{K}$-線型空間 V の基底である．

(ii) 任意の $\alpha \in R$ に対して，α を B の元の線型結合として書くときの係数は，「すべて 0 以上の整数である」か「すべて 0 以下の整数である」かのいずれかである．

R の基底 B を固定するとき，B の元を，**単純ルート**（simple root）という．ルートのうち，B の元の線型結合として書くときの係数がすべて 0 以上の整数であるものを B に関する**正ルート**（positive root）といい，すべて 0 以下の整数であるものを B に関する**負ルート**（negative root）という．B に関する正ルート，負ルートの全体を，それぞれ $R_+(B)$, $R_-(B)$ と書く．

定義から明らかに，ルート系の基底は，割れないルートのみからなる．

R をルート系とすると，R の自己同型は，基底を基底に移す．これにより，自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ は（したがって Weyl 群 $W(R)$ も），R の基底全体の集合に作用する．

命題 1.37　R をルート系とし，B をその基底とする．異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in B$ は，直角または鈍角をなす．

証明　基底の定義より $\beta - \alpha \notin R \cup \{0\}$ だから，主張は系 1.26 (1) の対偶から従う．□

本小節の以下の部分では，R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とするとき，$\alpha \in R$ に関するルート鏡映の鏡映面を $\mathit{\Pi}_\alpha$ と書く．すなわち，

$$\mathit{\Pi}_\alpha = \mathrm{Ker}\,\alpha^\vee = \{v \in V \mid \alpha^\vee(v) = 0\}$$

である．$\langle -,- \rangle$ を V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式とすると，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ $\alpha^\vee = 2\langle -, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ だから（系 1.8），$\mathit{\Pi}_\alpha$ はこの非退化対称双線型形式に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間となる．

定義 1.38（Weyl チャンバー）　R を有限次元実線型空間 V 上のルート系とする．V の開集合 $V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ の各連結成分を，R の **Weyl チャンバー**（Weyl chamber）という．

R を有限次元実線型空間上のルート系とすると，R の自己同型は，Weyl チャンバーを Weyl チャンバーに移す．これにより，自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ は（したがって Weyl 群 $W(R)$ も），R の Weyl チャンバー全体の集合に作用する．

補題 1.39　実内積空間 V の元の族 $(v_i)_{i \in I}$ が 2 条件

(i) ある $w \in V \setminus \{0\}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して $\langle v_i, w \rangle > 0$ となる．
(ii) 任意の異なる 2 元 $i, j \in I$ に対して，$\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$ である．

を満たすならば，$(v_i)_{i \in I}$ は線型独立である．

証明　I', $I'' \subseteq I$ を互いに交わらない有限部分集合とし，各 $i \in I'$ に対して $a_i \geq 0$，各 $j \in I''$ に対して $b_j \geq 0$ を任意にとる．もし $\sum_{i \in I'} a_i v_i = \sum_{j \in I''} b_j v_j$ ならば，これを v と置くと，条件 (ii) より

$$\|v\|^2 = \left\langle \sum_{i \in I'} a_i v_i, \sum_{j \in I''} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i \in I',\, j \in I''} a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$$

だから，

$$\sum_{i \in I'} a_i v_i = \sum_{j \in I''} b_j v_j = v = 0$$

である．条件 (i) の $w \in V \setminus \{0\}$ と上式の各辺との内積をとれば，$a_i = 0$ および $b_j = 0$ を得る．よって，$(v_i)_{i\in I}$ は線型独立である． □

定理 1.40　R を有限次元実線型空間 V 上のルート系とする．

(1) R の基底 B に対して，

$$C(B) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \alpha^\vee(v) > 0\}$$

は R の Weyl チャンバーである．

(2) R の Weyl チャンバー C に対して，

$$\begin{aligned} R_+(C) &= \{\alpha \in R \mid \alpha^\vee(C) \subseteq \mathbb{R}_{>0}\}, \\ B(C) &= \{\alpha \in R_+(C) \mid \alpha \text{ は } R_+(C) \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\} \end{aligned}$$

と定めると，$B(C)$ は R の基底である．

(3) (1) と (2) の対応は互いに他の逆であり，R の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える．さらに，この対応は，自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ の作用を保つ．

証明　V 上の $W(R)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定する（系 1.8）．$\alpha \in R$ と $v \in V$ に対して，$\alpha^\vee(v) = 2\langle v,\alpha\rangle/\langle \alpha,\alpha\rangle$ だから，$\alpha^\vee(v)$ と $\langle v,\alpha\rangle$ は同符号である．

(1)　内積を用いると，

$$C(B) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \langle v,\alpha\rangle > 0\}$$

と書ける．B は V の基底だから，$C(B)$ は連結である．$C(B)$ の元と B に関する正ルートとの内積は正であり，B に関する負ルートとの内積は負だから，$C(B)$ は

$$V \setminus \bigcup_{\alpha\in R} \Pi_\alpha = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in R \text{ に対して } \langle v,\alpha\rangle \neq 0\}$$

に含まれる．さらに，$v' \in V \setminus \bigcup_{\alpha\in R} \Pi_\alpha$ が $C(B)$ と同じ連結成分に含まれるならば，任意の $\alpha \in R$ に対して $\langle v',\alpha\rangle$ と $\langle v,\alpha\rangle$（$v \in C(B)$）は同符号だから，$v' \in C(B)$ である．よって，$C(B)$ は $V \setminus \bigcup_{\alpha\in R} \Pi_\alpha$ の一つの連結成分，すなわち Weyl チャンバーである．

(2)　$\alpha^\vee$ の符号は各 Weyl チャンバー上で一定だから，$v_0 \in C$ を一つ固定すると

$$R_+(C) = \{\alpha \in R \mid \langle v_0,\alpha\rangle > 0\} \tag{$*$}$$

と書ける．$\alpha \in R_+(C)$ とすると，それが $B(C)$ に属していない限り $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$（$k \geq 2$，$\alpha_1$，...，$\alpha_k \in R_+(C)$）と分解でき，各 α_i に対しても同じことがいえる．各 i に対して $\langle v_0,\alpha_i\rangle < \langle v_0,\alpha\rangle$ だから，この操作は有限回で終了する．よって，$R_+(C)$ に属するルートは，$B(C)$ の元の 0 以上の整数を係数とする線型結合で書ける．$R = R_+(C) \cup (-R_+(C))$ だから，残りのルートは，$B(C)$ の元の 0 以下の整数を係数とする線型結合で書ける．

前段の結果から，$B(C)$ が V を張ることもわかる．あとは，$B(C)$ が線型独立であることを示せばよい．そのためには，$B(C)$ が補題 1.39 の 2 条件を満たすことをいえばよい．条件 (i) は，($*$) より満たされる．条件 (ii) が満たされないとすると，ある α，$\beta \in B(C)$ に対して $\langle \alpha,\beta\rangle \leq 0$ となるが，このとき系 1.26 より $\beta - \alpha \in R$ である．したがって，$\beta - \alpha$ または $\alpha - \beta$ が $R_+(C)$ に属することになるが，いずれにしても α，$\beta \in B(C)$ に矛盾する．よって，背理法より，条件 (ii) は満たされる．

(3)　B を R の基底とすると，容易にわかるように $R_+(B) \subseteq R_+(C(B))$ だが，$R_+(B)$ と $R_-(B) = -R_+(B)$，$R_+(C(B))$ と $-R_+(C(B))$ はともに R の分割を与えるから，$R_+(B) = R_+(C(B))$ である．したがって，$B(C(B))$ は $R_+(B)$ の元のうち $R_+(B)$ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けないもの全体だが，正ルートの定義よりこれは B に等しい．また，C を R の Weyl チャンバーとすると，容易にわかるように $C \subseteq C(B(C))$ であり，C と $C(B(C))$ はともに $V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$ の連結成分だから $C = C(B(C))$ である．よって，(1) と (2) の対応は互いに他の逆であり，R の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える．

$t \in \mathrm{Aut}(R)$ とすると，R の基底 B に対して，

$$\begin{aligned} C(t(B)) &= \{v \in V \mid 任意の\ \alpha \in B\ に対して\ t(\alpha)^\vee(v) > 0\} \\ &= \{v \in V \mid 任意の\ \alpha \in B\ に対して\ \alpha^\vee(t^{-1}(v)) > 0\} \\ &= t(C(B)) \end{aligned}$$

である（補題 1.12）．よって，上記の対応は，自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ の作用を保つ．　□

系 1.41　任意のルート系は，基底をもつ．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ と仮定する（命題 1.7）．このとき基底の存在は，定理 1.40 から従う．　□

命題 1.42　R をルート系とし，B をその基底とする．正ルートの列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in R_+(B)$（$k \geq 1$）について，それらの和 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ もルートならば，$\{1, \ldots, k\}$ 上の置換 π であって，すべての $1 \leq i \leq k$ に対して $\alpha_{\pi(1)} + \cdots + \alpha_{\pi(i)}$ がルートであるものが存在する．

証明　k に関する帰納法で示す．$k = 1$ の場合は明らかである．$k \geq 2$ とし，$k-1$ に対する主張は正しいとする．$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ と置くと，$n(\alpha_1, \beta) + \cdots + n(\alpha_k, \beta) = n(\beta, \beta) = 2$ だから，$n(\alpha_i, \beta) > 0$ となる $1 \leq i \leq k$ が存在する．この i について，系 1.26 (1) より，$\beta - \alpha_i \in R$ となる．そこで，α_i を除く $k-1$ 個のルートに帰納法の仮定を適用すれば，k の場合の主張が示される．これで，帰納法が完成した．　□

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，B をその基底（定理 1.47 (1) より存在する）とすると，R が生成する V の部分 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}R$ は，B を基底とする格子 $\mathbb{Z}B$ に等しい．これを，ルート系 R の**ルート格子**（root lattice）という．

系 1.43　ルート系 R から可換群 A への写像 $f \colon R \to A$ が 2 条件

(i) 任意の $\alpha \in R$ に対して，$f(-\alpha) = f(\alpha)^{-1}$ である．
(ii) 任意の $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ に対して，$f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$ である．

を満たすならば，f はルート格子 $\mathbb{Z}R$ から A への群準同型に一意に拡張される．

証明　B を R の基底とすると，ルート格子 $\mathbb{Z}R$ は B を基底とする格子だから，B 上で f に一致する群準同型 $\widetilde{f} \colon \mathbb{Z}R \to A$ が一意に存在する．これが f の拡張であることを示そう．条件 (ii) より，正ルート β に対して $\widetilde{f}(\beta) = f(\beta)$ を示せばよい．命題 1.42 より，単純ルートの列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を，任意の $1 \leq i \leq k$ に対して $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ がルートであり，かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \beta$ であるようにとれる．よって，条件 (ii) より

$$\widetilde{f}(\beta) = \widetilde{f}(\alpha_1) \cdots \widetilde{f}(\alpha_k) = f(\alpha_1) \cdots f(\alpha_k) = f(\beta)$$

である．これで，主張が示された．　□

次に，Weyl 群の基底全体の集合への作用を考える．

補題 1.44　R をルート系とし，B をその基底とする．単純ルート $\alpha \in B$ に関する鏡映 s_α は，$R_+(B) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こす．

証明　$\beta \in R_+(B) \setminus \mathbb{K}\alpha$ とする．$s_\alpha(\beta) \notin \mathbb{K}\alpha$ は明らかである．$\beta = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma \gamma$（各 a_γ は 0 以上の整数）と表すと，ある $\gamma \in B \setminus \{\alpha\}$ が存在して $a_\gamma > 0$ となる．ここで，

$$s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma(\gamma - n(\gamma, \alpha)\alpha) = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma \gamma - \left(\sum_{\gamma \in B} n(\gamma, \alpha)\right)\alpha$$

だから，$s_\alpha(\gamma)$ を B の元の線型結合で表すときの γ の係数も $a_\gamma > 0$ である．これより，$s_\alpha(\beta) \in R_+(B)$ である．よって，s_α は，$R_+(B) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こす．□

系 1.45　R をルート系とし，B をその基底とする．B に関する正ルートであって割れないもの全体の和の 1/2 倍を ρ と置くと，任意の単純ルート $\alpha \in B$ に対して，$s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ である．

証明　B に関する正ルートであって割れないもの全体の集合を，$R_+(B)'$ と置く．s_α は，$R_+(B) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こし（補題 1.44），割れないルートを割れないルートに移すから，$R_+(B)' \setminus \{\alpha\}$ 上の置換を引き起こす．よって，

$$s_\alpha(\rho) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta \in R_+(B)' \setminus \{\alpha\}} s_\alpha(\beta) + s_\alpha(\alpha)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta \in R_+(B)' \setminus \{\alpha\}} \beta - \alpha\right) = \rho - \alpha$$

である．□

補題 1.46　R をルート系とし，B をその基底とする．$s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$（$k \geq 1$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B$）とし，$s$ は k 個未満の $\{s_\alpha \mid \alpha \in B\}$ の元の合成としては書けないとする．このとき，$s(\alpha_k)$ は B に関する負ルートである．

証明　$s(\alpha_k) = -s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ が正ルートであると仮定すると，$s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は負ルートだから，$1 \leq i \leq k-1$ を適当にとって，$\beta = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は負ルートだが $s_{\alpha_i}(\beta) = s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は正ルートであるようにできる．一方で，s_{α_i} は $\mathbb{K}\alpha_i$ に属さない正ルートを正ルートに移す（補題 1.44）．したがって，$\beta \in \mathbb{K}\alpha_i$ でなければならないから，

$$s_{\alpha_i} = s_\beta = s_{s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}} s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}} \cdots s_{\alpha_{i+1}}$$

となり（補題 1.12），移項すれば

$$s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_k} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$$

を得る．これより $s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k} = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$ となるが，これは k の最小性に矛盾する．よって，背理法より，$s(\alpha_k)$ は負ルートである．□

定理 1.47　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) Weyl 群 $W(R)$ は，R の基底全体の集合に自由かつ推移的に作用する．
(2) B を R の基底とすると，$W(R)B$ は R の割れないルート全体に等しい．
(3) B を R の基底とすると，Weyl 群 $W(R)$ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in B\}$ によって生成される．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ であり，V に $W(R)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7, 系 1.8）．R の基底 B を一つ固定し（系 1.41 より存在する），$\{s_\alpha \mid \alpha \in B\}$ が生成する $W(R)$ の部分群を $W'(R)$ と置く．まず (1), (2) で $W(R)$ を $W'(R)$ に置き換えた主張 $(1')$, $(2')$ を示し，次に $(2')$ を用いて (3) を示す．

$(1')$　$W'(R)$ の R の基底全体の集合への作用が推移的であることを示す．定理 1.40 より，$W'(R)$ の R の Weyl チャンバー全体の集合への作用が推移的であることを示せばよい．B に関する正ルートであって割れないもの全体の和の 1/2 倍を，ρ と置く．点 $v \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ を任意にとり，これに対して，$s \in W'(R)$ を $\langle s(v), \rho \rangle$ が最大となるようにとる．すると，任意の $\alpha \in B$ に対して，

$$\langle s(v), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha s(v), \rho \rangle = \langle s(v), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle s(v), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

（最後の等号で系 1.45 を用いた）より $\langle s(v), \alpha \rangle \geq 0$ であり，また $v \notin \mathit{\Pi}_{s^{-1}(\alpha)}$ より $\langle s(v), \alpha \rangle = \langle v, s^{-1}(\alpha) \rangle \neq 0$ だから，$\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ である．したがって，$s(v) \in C(B)$ であり，これは v を含む Weyl チャンバーが s の作用で $C(B)$ に移ることを意味する．よって，$W'(R)$ の R の Weyl チャンバー全体の集合への作用は推移的である．

次に，$W'(R)$ の R の基底全体の集合への作用が自由であることを示す．前段で推移性を示したから，$s \in W'(R) \setminus \{1\}$ として $s(B) \neq B$ を示せば十分である．$s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$（$k \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B$）と k が最小になる方法で表示すると，補題 1.46 より $s(\alpha_k)$ は負ルートだから，特に $s(B) \neq B$ である．これで，主張が示された．

$(2')$　$(1')$ より，R のすべての基底の合併が R の割れないルート全体に等しいことを示せばよい．R の基底の元がすべて割れないルートであることは，基底の定義から明らかである．任意の割れないルート $\alpha \in R$ が R のある基底に含まれることを示す．点 $v_0 \in V$ を

$$\langle v_0, \alpha \rangle = 0, \qquad \langle v_0, \beta \rangle \neq 0 \quad (\beta \in R \setminus \mathbb{R}\alpha)$$

となるようにとり，さらに $\epsilon > 0$ を十分小さくとって

$$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle > 0, \qquad |\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta \rangle| > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle \quad (\beta \in R \setminus \mathbb{R}\alpha)$$

が成り立つようにする．すると，$v_0 + \epsilon\alpha \in V \setminus \bigcup_{\beta \in R} \operatorname{Ker} \mathit{\Pi}_\beta$ だから，$v_0 + \epsilon\alpha$ を含む Weyl チャンバー C がとれる．以下，定理 1.40 の記号 $R_+(C)$, $B(C)$ を用いる．$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle > 0$ だから，$\alpha \in R_+(C)$ である．また，$\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_k$（$k \geq 1$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \in R_+(C)$）とすると，$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle = \langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta_1 \rangle + \cdots + \langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta_k \rangle$ だが，任意の $\beta \in R_+(C) \setminus \mathbb{R}\alpha$ に対して $\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta \rangle > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle$ だから，$\beta_1, \ldots, \beta_k \in R_+(C) \cap \mathbb{R}\alpha$ でなければならない．さらに，α は割れないルートだから，$k = 1$ かつ $\beta_1 = \alpha$ でなければならない．よって，$\alpha \in B(C)$ である．これで，主張が示された．

(3)　任意の割れないルート $\alpha \in R$ に対して，$(2')$ よりある $t \in W'(R)$ が存在して $t(\alpha) \in B$ となり，このとき，$s_\alpha = t^{-1} s_{t(\alpha)} t \in W'(R)$ である（補題 1.12）．よって，$W'(R) = W(R)$ である．　□

系 1.48　R_1, R_2 をそれぞれ有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V_1, V_2 上の被約ルート系とし，B_1, B_2 をそれぞれ R_1, R_2 の基底とする．全単射 $\phi\colon B_1 \to B_2$ が，任意の α, $\beta \in B_1$ に対して $n(\phi(\beta), \phi(\alpha)) = n(\beta, \alpha)$ を満たすならば，ϕ はルート系 R_1 から R_2 への同型に一意に拡張される．

証明　B_1, B_2 はそれぞれ V_1, V_2 の基底だから，ϕ は線型同型写像 $\mathit{\Phi}\colon V_1 \to V_2$ に一意に拡張される．仮定よ

り，$\alpha, \beta \in B_1$ に対して

$$\begin{aligned}\varPhi(s_\alpha(\beta)) &= \varPhi(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) \\ &= \phi(\beta) - n(\beta, \alpha)\phi(\alpha) \\ &= \phi(\beta) - n(\phi(\beta), \phi(\alpha))\phi(\alpha) \\ &= s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))\end{aligned}$$

だから，$\alpha \in B_1$ に対して

$$\varPhi \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \varPhi$$

である．したがって，線型同型写像 $\varPhi$ を通して Weyl 群 $W(R_1)$ と $W(R_2)$ が対応するから（定理 1.40 (3)），定理 1.47 (2) と合わせて，

$$\varPhi(R_1) = \varPhi(W(R_1)B_1) = W(R_2)B_2 = R_2$$

を得る．よって，$\varPhi$ はルート系 R_1 から R_2 への同型である． □

命題 1.49　R をルート系とし，B をその基底とする．次の 2 条件は同値である．

(a) R は既約である．
(b) $B \neq \emptyset$ であり，B を互いに直交する二つの空でない部分に分割することはできない．

証明　明らかに，$R = \emptyset$ と $B = \emptyset$ とは同値である．以下，これ以外の場合を考える．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．R が可約であるとして，ルート系の直和分解 $R = R_1 \sqcup R_2$ であって R_1, R_2 が空でないものをとる．$i = 1, 2$ に対して $B_i = B \cap R_i$ と置くと，これらは空でなく，R_1 と R_2 は直交する（命題 1.17）から B_1 と B_2 も直交する．これで，主張の対偶が示された．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　対偶を示す．B が互いに直交する二つの空でない部分 B_1, B_2 に分割されているとする．$i = 1, 2$ に対して $R_i = W(R)B_i \neq \emptyset$ と置く．すると，定理 1.47 (2) より $R = R_1 \cup R_2$ である．また，$\alpha \in B_1$ に対して s_α は $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_1$ を安定にし，$\beta \in B_2$ に対して s_β は $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_1$ の点を動かさないから（B_1 と B_2 が直交することによる），定理 1.47 (3) と合わせて $R_1 \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_1$ を得る．同様に，$R_2 \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_2$ である．よって，$R = R_1 \sqcup R_2$ はルート系の直和分解である．これで，主張の対偶が示された． □

1.9　正ルート全体の集合の特徴付け

命題 1.50　R をルート系とする．部分集合 $P \subseteq R$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) R の基底 B であって，$P = R_+(B)$ を満たすものが存在する．
(b) $\alpha, \beta \in P$ かつ $\alpha + \beta \in R$ ならば $\alpha + \beta \in P$ であり，P と $-P$ は R の分割を与える．

さらに，これらの条件の下で，条件 (a) の基底 B は一意に定まり，

$$B = \{\alpha \in P \mid \alpha \text{ は } P \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\}$$

によって与えられる．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　基底の定義から明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　基底 B を，$\#(P \cap R_+(B))$ が最大となるようにとる．$\alpha \in B$ が P に属さないと仮定すると，$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ は $P \cap R_+(s_\alpha(B))$ に属する．次に，$\beta \in P \cap R_+(B)$ を任意にとる．α は割れないルートだか

ら $\beta \neq \alpha/2$ であり，また $\beta = 2\alpha$ とすると $-\alpha,\ 2\alpha \in P$ より $\alpha = 2\alpha - \alpha \in P$ となって仮定に反するから，$\beta \notin \mathbb{K}\alpha$ である（系 1.25）．したがって，補題 1.44 より $s_\alpha(\beta) \in R_+(B)$ だから，$\beta \in P \cap R_+(s_\alpha(B))$ である．以上より，$\#(P \cap R_+(s_\alpha(B))) > \#(P \cap R_+(B))$ となるが，これは B のとり方に反する．よって，背理法より，$B \subseteq P$ である．

$B \subseteq P$ より $R_+(B) \subseteq P$ だが，$R_+(B)$ と $-R_+(B)$, P と $-P$ はともに R の分割を与えるから，$R_+(B) = P$ が成り立つ．これで，主張が示された．

<u>最後の主張</u>　基底の定義から明らかである．□

加法群 A 上の半順序 $\leq$ が**平行移動不変**であるとは，任意の $a,\ b,\ c \in A$ に対して，$a \leq b$ ならば $a+c \leq b+c$ であることをいう．容易に確かめられるように，平行移動不変な半順序 $\leq$ について，$a,\ b \geq 0$ ならば $a+b \geq 0$ であり，また，$a \geq 0$ と $-a \leq 0$ とは同値である．

系 1.51　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$\leq$ を V 上の平行移動不変な全順序とすると，R の基底 B であって，$R_+(B) = \{\alpha \in R \mid \alpha \geq 0\}$ を満たすものが一意に存在する．

証明　上記の注意と命題 1.50 から従う．□

2　分類

2.1　Cartan 行列と Dynkin 図形

定義 2.1（Cartan 行列）　R をルート系とし，B をその基底とする．行列 $(n(\beta,\alpha))_{(\beta,\alpha)\in B\times B}$ を，(R,B) の **Cartan 行列**（Cartan matrix）という．

命題 2.2　ルート系 R とその基底 B に対して，(R,B) の Cartan 行列は正則である．

証明　$W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を固定すると，$\alpha,\ \beta \in R$ に対して $n(\beta,\alpha) = 2\langle \beta,\alpha \rangle/\langle \alpha,\alpha \rangle$ である（系 1.8）．B が V の基底であることより，行列 $(\langle \beta,\alpha \rangle)_{(\beta,\alpha)\in B\times B}$ は正則だから，Cartan 行列 $(n(\beta,\alpha))_{(\beta,\alpha)\in B\times B}$ も正則である．□

Cartan 行列を視覚的に表すものとして，Dynkin 図形を導入する．そのための準備として，多重グラフに「不等号」を与えた「不等号付き多重グラフ」を定義する．

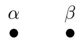
定義 2.3（不等号付き多重グラフ）　**不等号付き多重グラフ**[*2] とは，次の 2 条件を満たす組 $(\mathit{\Gamma}, c)$ をいう．

(i) $\mathit{\Gamma}$ は多重グラフである．
(ii) c は，$\mathit{\Gamma}$ において 2 重以上の辺で結ばれている 2 頂点の集合 $\{\alpha,\beta\}$ に対して，α と β のいずれかを対応させる写像である．

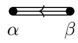
不等号付き多重グラフ $(\mathit{\Gamma}, c)$ は，多重グラフ $\mathit{\Gamma}$ を表す図において，2 重以上の辺に，c によって選ばれた頂点のほうが「大きい」とする不等号を書き込むことで表される．たとえば，頂点 α と β が $\mathit{\Gamma}$ において 3 重辺で結ばれており，$c(\{\alpha,\beta\}) = \beta$ であるとき，不等号付き多重グラフ $(\mathit{\Gamma}, c)$ における頂点 α と β は，次のよう

*2 本稿だけの用語である．

表 1　Dynkin 図形の辺と不等号

$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	Dynkin 図形における頂点 α と β
0	0	
-1	-1	
-1	-2	
-2	-1	
-1	-3	
-3	-1	

に表される．



R をルート系とし，B をその基底とする．異なる二つの単純ルート $\alpha,\beta\in B$ に対して，$(n(\alpha,\beta),n(\beta,\alpha))$ は $(0,0)$，$(-1,-1)$，$(-1,-2)$，$(-2,-1)$，$(-1,-3)$，$(-3,-1)$ のいずれかだから（定理 1.23，命題 1.37），$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ は 0, 1, 2, 3 のいずれかである．また，定理 1.23 と注意 1.24 (1) より，

$$\begin{aligned}\alpha \text{ と } \beta \text{ が直交しない} &\iff n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)\geq 1,\\ \alpha \text{ と } \beta \text{ が直交せず，異なる長さをもつ} &\iff n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)\geq 2\end{aligned}$$

である（「異なる長さをもつ」の意味については，系 1.27 を参照のこと）．以上を踏まえて，次のように定義する．

定義 2.4（Dynkin 図形）　ルート系 R とその基底 B に対して，次のように定まる不等号付きグラフ $(\mathit{\Gamma},c)$ を，(R,B) の **Dynkin 図形**（Dynkin diagram）という（表 1 も参照のこと）．

(i) $\mathit{\Gamma}$ は，B を頂点集合とし，異なる二つの単純ルート $\alpha,\beta\in B$ を $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ 本の辺で結んで得られる多重グラフである．
(ii) c は，$\mathit{\Gamma}$ において 2 重以上の辺で結ばれている 2 頂点の集合 $\{\alpha,\beta\}$ に対して，α と β のうち長いほうを対応させる写像である．

命題 2.5　ルート系 R とその基底 B に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) R は既約である．
(b) (R,B) の Dynkin 図形は連結である．

証明　命題 1.49 のいいかえにすぎない．□

定理 1.47 と系 1.48 より，被約なルート系の同型類は Cartan 行列の同型類と一対一に対応し，したがって，Dynkin 図形の同型類とも一対一に対応する．さらに，命題 2.5 より，その中で，被約な既約ルート系の同型類と連結 Dynkin 図形の同型類が一対一に対応する．よって，被約な既約ルート系を分類するためには，連結 Dynkin 図形としてありうるものを絞り込んだ上で，それらの連結 Dynkin 図形に対応する既約ルート系が構成できるかどうかを考えればよい．

2.2 Dynkin 図形の分類

R は有限次元実内積空間 V 上のルート系であり，その内積は $W(R)$-不変であるとする．B を R の基底とすると，

- B は V の基底だから，特に線型独立である．
- 任意の $\alpha,\ \beta \in B$ に対して，$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ である（命題 1.37）．
- (R, B) の Dynkin 図形において，α と β を結ぶ辺の本数は

$$n(\alpha, \beta) n(\beta, \alpha) = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \cdot \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 4\left\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|} \right\rangle^2$$

  であり（系 1.8 (2)），これは 0, 1, 2, 3 のいずれかである（定理 1.23）．

これを踏まえて，次のように定義する．

定義 2.6（許容可能なベクトルの集合） V を有限次元実内積空間とする．単位ベクトルの集合 S が**許容可能**（admissible）であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(i) S は線型独立である．

(ii) 任意の異なる 2 元 $v,\ w \in S$ に対して，$\langle v, w \rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である（あるいは同値だが，$\angle(v, w) \in \{90°, 120°, 135°, 150°\}$ である）．

定義 2.7（許容可能な多重グラフ） 許容可能な単位ベクトルの集合 S に対して，多重グラフ $\Gamma(S)$ を，S を頂点集合とし，異なる 2 頂点 $v,\ w \in S$ が $4\langle v, w \rangle^2$ 本の辺で結ばれるものとして定める．多重グラフ Γ は，ある許容可能な単位ベクトルの集合 S に対する $\Gamma(S)$ に同型であるとき，**許容可能**（admissible）であるという．

注意 2.8 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，B をその基底とし，(Γ, c) を (R, B) の Dynkin 図形とする．R を有限次元実線型空間 $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$（$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} R$）上のルート系とみなし（命題 1.7），$V_{\mathbb{R}}$ 上の $W(R)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ を固定する（系 1.8 (1)）．このとき，

$$S = \left\{ \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \;\middle|\; \alpha \in B \right\}$$

は許容可能な単位ベクトルの集合であり，対応する多重グラフ $\Gamma(S)$ は Γ に等しい．よって，Γ は許容可能である．

以下，許容可能な連結多重グラフを分類する．

補題 2.9 許容可能な多重グラフは，（長さ 3 以上の）サイクルを含まない．

証明 S を許容可能な単位ベクトルの集合とし，$\Gamma(S)$ において $S_0 \subseteq S$ がサイクルをなすとする．$v,\ w \in S_0$ を異なる 2 頂点とすると $\langle v, w \rangle \leq 0$ だが，S_0 に属する頂点どうしを結ぶ辺は少なくとも $\# S_0$ 本あるから，このうち少なくとも $2\# S_0$ 組の (v, w)（順序を考慮するため 2 倍になる）に対して $\langle v, w \rangle \leq -1/2$ である．したがって，

$$\left\| \sum_{v \in S_0} v \right\|^2 = \# S_0 + \sum_{v, w \in S_0,\ v \neq w} \langle v, w \rangle \leq \# S_0 + 2\# S_0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0$$

であり，$\sum_{v \in S_0} v = 0$ を得るが，これは S が線型独立であることに反する．よって，背理法より，$\Gamma(S)$ はサイクルを含まない． □

補題 2.10　許容可能な多重グラフにおいて，各頂点の次数（その頂点から伸びている辺の本数）は 3 以下である．

証明　S を許容可能な単位ベクトルの集合とする．$v \in S$ とし，$\Gamma(S)$ において v と辺で結ばれている頂点全体の集合を S_v と置く．補題 2.9 より，S_v に属するどの 2 頂点も辺で結ばれていないから，S_v は正規直交系をなす．S が線型独立であることより $v \notin \operatorname{span}_{\mathbb{R}} S_v$ だから，

$$4 \sum_{w \in S_v} \langle v, w \rangle^2 < 4\|v\|^2 = 4$$

である．頂点 v と w は $4\langle v, w \rangle^2$ 本の辺で結ばれているから，上式は，頂点 v の次数が 3 以下であることを示す． □

補題 2.11　Γ を許容可能な多重グラフとする．v_0，…，v_k（$k \in \mathbb{N}$）は Γ の異なる頂点の列であり，各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して，v_i は v_{i-1} および v_{i+1} とそれぞれちょうど 1 本の辺で結ばれ，それ以外の頂点とは辺で結ばれていないとする．このとき，v_0，…，v_k を一つの頂点に潰して得られる多重グラフ Γ' は，また許容可能である．

証明　Γ は，許容可能な単位ベクトルの集合 S に対応する多重グラフ $\Gamma(S)$ であるとしてよい．$v = v_0 + \cdots + v_k$，$S' = (S \setminus \{v_0, \ldots, v_k\}) \cup \{v\}$ と置く（S は線型独立だから，$v \notin S$ である）．すると，

- S は線型独立だから，S' も線型独立である．
- $\|v\|^2 = \sum_{0 \leq i,j \leq k} \langle v_i, v_j \rangle = k - (k-1) = 1$ である．
- 任意の $w \in S' \setminus \{v\}$ について，仮定より $\langle v_i, w \rangle = 0$（$1 \leq i \leq k-1$）であり，補題 2.9 より $\langle v_0, w \rangle$ と $\langle v_k, w \rangle$ のうち少なくとも一方は 0 である．したがって，$\langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^{k} \langle v_k, w \rangle$ は 0 または $\langle v_0, w \rangle$ または $\langle v_k, w \rangle$ に等しく，いずれにしても $\langle v, w \rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である．

よって，S' は許容可能な単位ベクトルの集合であり，対応する多重グラフ $\Gamma(S')$ は Γ' に同型である．よって，Γ' は許容可能である． □

定理 2.12（許容可能な連結多重グラフの分類）　許容可能な連結多重グラフは，表 2 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である．

証明　S を許容可能な単位ベクトルの集合とし，$\Gamma = \Gamma(S)$ と置く．Γ は連結であるとする．

(I)　Γ が 3 重辺をもつ場合，補題 2.10 より，Γ は G_2 に同型である．

(II)　Γ が 3 重辺をもたず 2 重辺をもつ場合，2 重辺はただ一つであり，2 重辺の両端以外に次数 3 以上の頂点は存在しない（存在するとすると，補題 2.11 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ，補題 2.10 に反する）．したがって，Γ は次の形である（$1 \leq p \leq q$）．

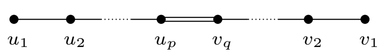
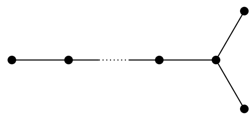
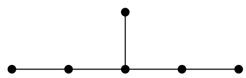
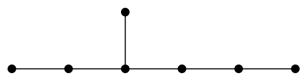
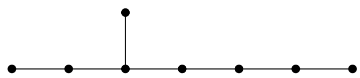


表 2　許容可能な連結多重グラフの分類

型（l は頂点数）	多重グラフ
A_l $(l \geq 1)$	
$\mathrm{B}_l = \mathrm{C}_l$ $(l \geq 2)$	
D_l $(l \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

ここで，

$$u = \sum_{i=1}^{p} i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{q} i v_i$$

と置くと，

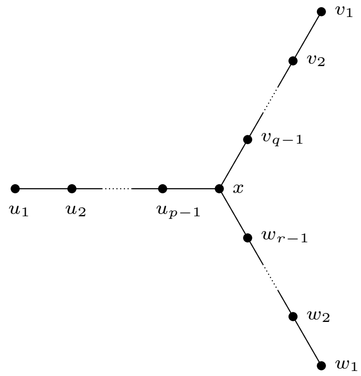
$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}, \qquad \text{同様に } \|v\|^2 = \frac{q(q+1)}{2},$$
$$\langle u, v\rangle^2 = \frac{p^2 q^2}{2}$$

である．u と v が線型独立であることと Cauchy–Schwarz の不等式より $\langle u, v\rangle^2 < \|u\|^2\|v\|^2$ だから，

$$\frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2}$$

である．これを整理すると $pq < p + q + 1$ となり，これを満たす (p, q) は，$(1, l-1)$（$l \geq 2$ は任意），$(2, 2)$ のみである．それぞれの場合，$\mathit{\Gamma}$ は $\mathrm{B}_l = \mathrm{C}_l$, F_4 に同型である．

(III)　$\mathit{\Gamma}$ が 1 重辺のみをもつ場合，次数 3 以上の頂点はたかだか一つである（二つ以上あるとすると，補題 2.11 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ，補題 2.10 に反する）．次数 3 の頂点が存在しなければ，$\mathit{\Gamma}$ はある A_l（$l \geq 1$）に同型である．次数 3 の頂点が存在すれば，$\mathit{\Gamma}$ は次の形である（$2 \leq p \leq q \leq r$）．



ここで，

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} iu_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{q-1} iv_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{r-1} iw_i$$

と置くと，u, v, w は直交系であり，(II) と同じ計算により

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \frac{p(p-1)}{2}, & \|v\|^2 &= \frac{q(q-1)}{2}, & \|w\|^2 &= \frac{r(r-1)}{2}, \\ \langle u, x\rangle^2 &= \frac{(p-1)^2}{4}, & \langle v, x\rangle^2 &= \frac{(q-1)^2}{4}, & \langle w, x\rangle^2 &= \frac{(r-1)^2}{4} \end{aligned}$$

を得る．したがって，$x \notin \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{u, v, w\}$ と合わせて，

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|^2 &> \left\langle \frac{u}{\|u\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{v}{\|v\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{w}{\|w\|}, x \right\rangle^2 \\ &= \frac{(p-1)^2/4}{p(p-1)/2} + \frac{(q-1)^2/4}{q(q-1)/2} + \frac{(r-1)^2/4}{r(r-1)/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

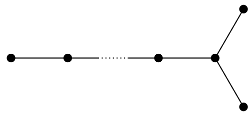
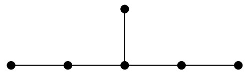
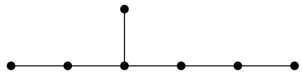
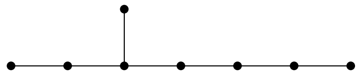
を得る．これを整理すると $1/p + 1/q + 1/r > 1$ となり，これを満たす (p, q, r) は，$(2, 2, l-2)$（$l \geq 4$ は任意），$(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ のみである．それぞれの場合，Γ は D_l, E_6, E_7, E_8 に同型である． □

定理 2.13（連結 Dynkin 図形の分類） 許容可能な連結多重グラフは，表 3 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である．

証明 (Γ, c) を連結 Dynkin 図形とすると，Γ は許容可能な連結多重グラフである（注意 2.8）．許容可能な連結多重グラフ Γ は定理 2.12 で分類されており，対応する c としてありうるものは，同型を除いて，表 3 に挙げたもので尽くされる．よって，連結 Dynkin 図形は，表 3 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である． □

表 3 に従って，A_l $(l \geq 1)$, B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 3)$, D_l $(l \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型の Dynkin 図形を定める．便宜上，A_1 型を B_1, C_1 型，B_2 型を C_2 型，A_1 型の二つの直和を D_2 型，A_3 型を D_3 型ともいう．A_l $(l \geq 1)$, B_l $(l \geq 1)$, C_l $(l \geq 1)$, D_l $(l \geq 2)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型のルート系とは，被約なルート系であって，対応する型の Dynkin 図形をもつものをいう．これらは，D_2 型のルート系を除いては，既約である．

表 3　連結 Dynkin 図形の分類

型（l は頂点数）	Dynkin 図形
A_l $(l \geq 1)$	
B_l $(l \geq 2)$	
C_l $(l \geq 3)$	
D_l $(l \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

2.3　被約な既約ルート系の構成と分類

本節では，定理 2.13 で示した連結 Dynkin 図形に対応する被約な既約ルート系を，具体的に構成する．以下，$\mathbb{K}^n$ の標準基底を $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ と書く．構成は，$\mathbb{K}^n$ あるいはその部分線型空間上で行い，標準的な対称双線型形式 $(\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i, \sum_{i=1}^n b_i\epsilon_i) \mapsto \sum_{i=1}^n a_ib_i$ が Weyl 群 $W(R)$ に関して不変となるようにする．

A_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系

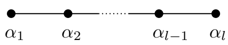
$V = \{\sum_{i=1}^{l+1} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^{l+1} \mid t_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{l+1} t_i = 0\}$ の部分集合

$$R = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$$

は，$l(l+1)$ 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，A_l 型の既約ルート系である．実際，

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq l)$$

と置くと，$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

B_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系

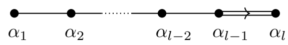
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$R = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は，$2l^2$ 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，B_l 型の既約ルート系である．実際，

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \le i \le l-1), \qquad \alpha_l = \epsilon_l$$

と置くと，$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

C_l 型（$l \ge 1$）の既約ルート系

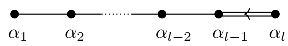
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$R = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \le i < j \le l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \le i \le l\}$$

は，$2l^2$ 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，C_l 型の既約ルート系である．実際，

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \le i \le l-1), \qquad \alpha_l = 2\epsilon_l$$

と置くと，$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

D_l 型（$l \ge 2$）の（既約）ルート系

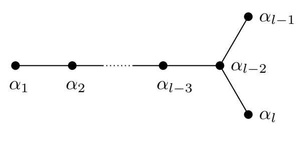
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$R = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \le i < j \le l\}$$

は，$2l(l-1)$ 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，D_l 型の（$l \ge 3$ ならば既約）ルート系である．実際，

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \le i \le l-1), \qquad \alpha_l = \epsilon_{l-1} + \epsilon_l$$

と置くと，$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

E_6 型の既約ルート系

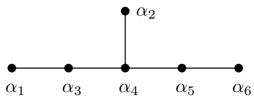
$V = \{\sum_{i=1}^{8} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^8 \mid t_i \in \mathbb{K},\ t_6 + t_8 = t_7 + t_8 = 0\}$ の部分集合

$$\begin{aligned} R = {} & \{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 5\} \\ & \cup \left\{ \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)}\epsilon_i - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8 \right) \,\middle|\, \nu(i) \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \in 2\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

は，72 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，E_6 型の既約ルート系である．実際,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\
&\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \quad \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4
\end{aligned}$$

と置くと，$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

E_7 型の既約ルート系

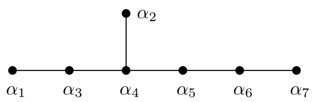
$V = \{\sum_{i=1}^{8} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^8 \mid t_i \in \mathbb{K},\ t_7 + t_8 = 0\}$ の部分集合

$$\begin{aligned}
R = &\{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(-\epsilon_7 + \epsilon_8)\} \\
&\cup \left\{ \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i - \epsilon_7 + \epsilon_8\right) \,\middle|\, \nu(i) \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{6}\nu(i) \in 2\mathbb{Z}+1 \right\}
\end{aligned}$$

は，126 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，E_7 型の既約ルート系である．実際,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\
&\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \quad \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \quad \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5
\end{aligned}$$

と置くと，$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

E_8 型の既約ルート系

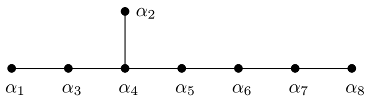
$V = \mathbb{K}^8$ の部分集合

$$\begin{aligned}
R = &\{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 8\} \\
&\cup \left\{ \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i + \epsilon_8\right) \,\middle|\, \nu(i) \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{7}\nu(i) \in 2\mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

は，240 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，E_8 型の既約ルート系である．実際,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\
&\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \\
&\alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \quad \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5, \quad \alpha_8 = \epsilon_7 - \epsilon_6
\end{aligned}$$

と置くと，$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

F$_4$ 型の既約ルート系

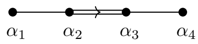
$V=\mathbb{K}^4$ の部分集合

$$R=\{\pm\epsilon_i \mid 1\le i\le 4\}\cup\{\pm(\epsilon_i\pm\epsilon_j)\mid 1\le i<j\le 4\}\cup\left\{\pm\frac{1}{2}(\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\pm\epsilon_4)\right\}$$

は，48 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，F_4 型の既約ルート系である．実際，

$$\alpha_1=\epsilon_2-\epsilon_3,\quad \alpha_2=\epsilon_3-\epsilon_4,\quad \alpha_3=\epsilon_4,\quad \alpha_4=\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\epsilon_4)$$

と置くと，$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は



である．

G$_2$ 型の既約ルート系

$V=\{\sum_{i=1}^3 t_i\epsilon_i\in\mathbb{K}^3 \mid t_i\in\mathbb{K},\ t_1+t_2+t_3=0\}$ の部分集合

$$R=\{\pm(\epsilon_1-\epsilon_2),\pm(-\epsilon_1+\epsilon_3),\pm(-\epsilon_2+\epsilon_3),\pm(-2\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3),\pm(\epsilon_1-2\epsilon_2+\epsilon_3),\pm(-\epsilon_1-\epsilon_2+2\epsilon_3)\}$$

は，12 個のルートからなる V 上のルート系である．R は，G_2 型の既約ルート系である．実際，

$$\alpha_1=\epsilon_1-\epsilon_2,\qquad \alpha_2=-2\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3$$

と置くと，$B=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ は R の基底であり，対応する Dynkin 図形は

である．

2.4 被約でない既約ルート系の構成と分類

R を被約でない既約ルート系とすると，定理 1.35 より，

(1) R の各ルートの最短ルートに対する長さの比は $1,\ \sqrt{2},\ 2$ のいずれかであり，

それぞれの比をもつルートの全体を $A,\ B,\ C$ と置くと，

(2) $2A=C$ であり，
(3) A に属する異なる二つのルートは直交し，

(4) $R' = A \cup B$ と $R'' = B \cup C$ は V 上の被約な既約ルート系である．

長さの比の条件と (3), (4) より，$R' = A \cup B$ は，B_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系でなければならない．したがって，R は，線型同型を除いて，$\mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i, \pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

と同一視できる．

逆に，R を上記の $V = \mathbb{K}^l$ の部分集合と定めると，容易に確かめられるように，これは V 上の $2l(l+1)$ 個のルートからなる被約でないルート系である．さらに，割れないルートの全体

$$R' = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は B_l 型の既約ルート系だから，R も既約である（命題 1.32 (1)）．なお，$R'' = \{\alpha \in R \mid 2\alpha \notin R\}$（注意 1.33）は

$$R'' = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

となり，これは C_l 型の既約ルート系である．

以上より，各整数 $l \geq 1$ に対して，階数 l の被約でない既約ルート系が同型を除いて一意に存在する．これを，BC_l 型のルート系という．

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 4–6*, Springer, 2002.

[2] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.