

「局所コンパクト性」は開連続像で保たれるか？

箱 (@o_ccah)

2020 年 3 月 15 日

位相空間 X が「局所コンパクト」であることの定義には、いくつか流儀があります。思いつく限り挙げてみます。

- (1) X の各点がコンパクトな近傍をもつ。
- (2) X の各点がコンパクトな閉近傍をもつ。
- (3) X の各点が「あるコンパクト集合に含まれる開近傍」をもつ。
- (4) X の各点が「閉包がコンパクトな開近傍」をもつ。
- (5) X の各点において、コンパクトな近傍全体が基本近傍系をなす。
- (6) X の各点において、コンパクトな閉近傍全体が基本近傍系をなす。
- (7) X の各点において、「あるコンパクト集合に含まれる開近傍」全体が基本近傍系をなす。
- (8) X の各点において、「閉包がコンパクトな開近傍」全体が基本近傍系をなす。
- (9) X の各点において、「閉包がコンパクトな開近傍の閉包」の全体が基本近傍系をなす。

コンパクト空間の開集合がコンパクトであることなどに注意すると、(1) と (3) と (7)、(2) と (4) と (8)、(6) と (9) がそれぞれ同値であることがわかります。この記事では、(1) と (3) と (7) を局所コンパクト、(2) と (4) と (8) を強局所コンパクト、(5) を真局所コンパクト、(6) と (9) を強真局所コンパクトということにします*1。明らかに、強真局所コンパクトならば強局所コンパクトかつ真局所コンパクトであり、強局所コンパクトまたは真局所コンパクトならば局所コンパクトです。

Hausdorff な位相空間だけを考えれば、これらの「局所コンパクト性」はすべて同値ですが、一般には前述の含意以外のことはいえません。反例として：

- \mathbb{N} に補有限位相（空集合と、補集合が有限な部分集合の全体を開集合とする位相）を入れた位相空間は、強局所コンパクトかつ真局所コンパクトですが、強真局所コンパクトではありません。
- \mathbb{Q} の 1 点コンパクト化（たとえば内田 [1, pp. 124–125] を参照のこと）は、強局所コンパクトですが、真局所コンパクトではありません。
- \mathbb{N} に「空集合と、0 を含む集合全体を開集合とする位相」を入れた位相空間は、真局所コンパクトですが、強局所コンパクトではありません。
- 上 2 つの位相空間の直和は、局所コンパクトですが、強局所コンパクトでも真局所コンパクトでもありません。

さて、これらの「局所コンパクト性」が開連続像で保たれるかどうかを考えましょう。すなわち、

*1 一般的な用語ではありません。

X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を開連続全射とする. X が局所コンパクト・強局所コンパクト・真局所コンパクト・強真局所コンパクトならば, Y も同じ性質をもつか?

という問題を考えます.

局所コンパクト性と真局所コンパクト性については, 答えは YES です. これは, コンパクト集合の連続像がコンパクトであることと, 開連続写像が近傍を近傍に, 基本近傍系を基本近傍系にうつすことからわかります.

では, 強局所コンパクト性と強真局所コンパクト性についてはどうでしょうか? こちらは自分で考えてもわからなかったなので, あるコミュニティで質問しました^{*2}. するとすぐに (!), ろろ (@ma_ro_ro_ro) さんが解決してくれました^{*3}. 以下に, ろろさんによる解答を (許可を得て) 掲載します.

強局所コンパクト性と強真局所コンパクト性については, 答えは NO です. $\{0, 1\}$ に $\{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$ を開集合系とする位相を入れたものを考え, それを可算無限個だけ直和した空間を X とします. Y は, X の可算無限個の 0 たちを 1 点に潰して得られる商空間とし, $f: X \rightarrow Y$ は自然な全射とします. すると,

- f は開連続全射です.
- 各 $\{0\}$ や $\{0, 1\}$ は X の開かつ閉なコンパクト集合なので, X の各点はコンパクトな閉近傍からなる基本近傍系をもちます. すなわち, X は強真局所コンパクトです (したがって, 強局所コンパクトでもあります).
- $\{0\} \subseteq Y$ の閉包は Y となり, Y はコンパクトではないので, Y は強局所コンパクトではありません (したがって, 強真局所コンパクトでもありません).

参考文献

[1] 内田 伏一, 『集合と位相』, 裳華房, 1986.

[2] Wikipedia 「局所コンパクト空間」. (2020 年 3 月 15 日アクセス)

<https://ja.wikipedia.org/wiki/局所コンパクト空間>

^{*2} 2018 年 9 月 14 日 02:46.

^{*3} 2018 年 9 月 14 日 13:48.