無限和のノート

箱（@o_ccah）

2019 年 8 月 12 日

概要

可換 Hausdorff 位相群における無限和について解説する．無限和は「先頭 n 項の部分和の極限」として定式化されることが多いが，本稿では Bourbaki [1] に倣い，項を並べる順序に依存しない「総和可能性」という定式化を採用する．また，本稿の後半では，非負実数の族が総和可能性について特によい性質をもつことに着目して，ノルム化可能な位相線型空間の元の族に対して「絶対総和可能性」を定義し，その性質を調べる．

目次

記号と用語

- 集合 A の有限部分集合全体がなす集合を，$\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ と書く．
- 位相群とは，位相構造をもつ群であって，群の 2 項演算および逆元をとる操作が連続であるものをいう．本稿で扱う抽象的な位相群は，すべて可換 Hausdorff 位相群であり，その演算は加法的に書く．
- 体とは，可換とは限らない単位的環であって，零環ではなく，0 以外の元がすべて乗法に関する逆元をもつものをいう．体 K 上の絶対値とは，K から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像であって，非退化，乗法的，かつ三角不等式を満たすものをいう．体にその上の絶対値を 1 つ固定して考えたものを，付値体という．
- 付値体の絶対値は $|{-}|$ で，付値体上のノルム空間のノルムは $\|{-}\|$ で表すことが多い．これらの記号の使用については，いちいち断らない．
- 順序集合 $(X, \leq)$ に対して，その切片 $\{x \in X \mid x \geq a\}$（$a \in X$）の全体が生成する X 上のフィルタを，この順序集合の切片フィルタという．これが真フィルタであるための条件は，$(X, \leq)$ が上に有向である（任意の $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ に対してある $b \in A$ が存在して $a_0, \ldots, a_{n-1} \leq b$ となる）ことである．

1　可換 Hausdorff 位相群における無限和

定義 1.1（無限和） G を可換 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族とする．写像

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to G; \quad I' \mapsto \sum_{i\in I'} x_i$$

の，$(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I), \subseteq)$ の切片フィルタ（これは真フィルタである）による極限値が存在するとき，$\{x_i\}_{i\in I}$ は（G において）総和可能であるという．このとき，その極限値を $\{x_i\}_{i\in I}$ の和といい，$\sum_{i\in I} x_i$ と書く．

すなわち，$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能でその極限値が $s \in G$ であるとは，$0 \in G$ の任意の近傍 U に対してある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在し，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I' \supseteq I_0$ ならば $\sum_{i\in I'} x_i \in s + U$ が成り立つことをいう．

定理 1.2（Cauchy の判定法） G を可換 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族とする．次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，G が完備ならば，2 条件は同値となる．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能である．

(b) $0 \in G$ の任意の近傍 U に対してある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在し，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I_0 \cap I' = \emptyset$ ならば $\sum_{i\in I'} x_i \in U$ が成り立つ．

証明 (b) は，$\{x_i\}_{i\in I}$ の有限部分和をとる写像 $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to G$ による $(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I), \subseteq)$ の切片フィルタの像が Cauchy であるということに他ならない．よって，主張は Cauchy フィルタの一般論から従う．□

系 1.3 G を可換 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の無限族とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，写像 $I \to G; i \mapsto x_i$ は I 上の補有限フィルタに関して $0 \in G$ に収束する．

証明 結論は，$0 \in G$ の各近傍が有限個の $i \in I$ を除いて x_i を含む，ということに他ならない．これは，Cauchy の判定法（定理 1.2）の (a) $\Longrightarrow$ (b) から従う．□

2　部分和と結合性

命題 2.1 可換完備 Hausdorff 位相群において，総和可能な族の任意の部分族は総和可能である．

証明 Cauchy の判定法（定理 1.2）から従う．□

注意 完備でない可換 Hausdorff 位相群においては，総和可能な族の部分族が総和可能であるとは限らない．たとえば，有理数の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ と $I' \subseteq I$ を，$\mathbb{R}$ において，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能で $\sum_{i\in I} x_i = 2$，$\{x_i\}_{i\in I'}$ は総和可能で $\sum_{i\in I'} x_i = \sqrt{2}$ となるようにとる．すると，$\mathbb{Q}$ において，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能だが $\{x_i\}_{i\in I'}$ は総和可能でない．

定理 2.2（無限和の結合性） G を可換完備 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族，$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ を I の分割とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能であり，さらに $\{\sum_{i\in I_j} x_i\}_{j\in J}$ も総和可能であって，

$$\sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} x_i = \sum_{i\in I} x_i$$

が成り立つ．

証明　$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとし，その和を $s \in G$ と置く．まず命題 2.1 より，各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能である．その和を s_j と置く．$\{s_j\}_{j\in J}$ が総和可能で，その和が s であることを示したい．

$0 \in G$ の近傍 U を任意にとる．$\sum_{i\in I} x_i = s$ だから，$I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ であって，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I' \supseteq I_0$ ならば $\sum_{i\in I'} x_i \in s + U$ となるものがとれる．

$$J_0 = \{j \in J \mid I_j \cap I_0 \neq \emptyset\}$$

と置くと，$J_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(J)$ である．

$J' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(J)$ であって $J' \supseteq J_0$ を満たすものを任意にとる．また，$0 \in G$ の近傍 V を任意にとる．各 $j \in J'$ に対して，$\sum_{i\in I_j} x_i = s_j$ だから，$I'_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ を

(i) $s_j - \sum_{i\in I'_j} x_i \in V$
(ii) $I_j \cap I_0 \subseteq I'_j$

が成り立つようにとれる．$I' = \bigsqcup_{j\in J'} I'_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ と置くと，(ii) および $J' \supseteq J_0$ より $I' \supseteq I_0$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J'} s_j &= \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'_j} x_i + \sum_{j\in J'}\left(s_j - \sum_{i\in I'_j} x_i\right)\\ &= \sum_{i\in I'} x_i + \sum_{j\in J'}\left(s_j - \sum_{i\in I'_j} x_i\right)\\ &\in s + U + V + \cdots + V \qquad\qquad (V \text{ は } J' \text{ の元の個数だけ並ぶ})\end{aligned}$$

である．V は $0 \in G$ の任意の近傍だったから，

$$\sum_{j\in J'} s_j \in s + \overline{U}$$

を得る．よって，$\{s_j\}_{j\in J}$ は総和可能で，その和は s である．□

命題 2.3　G を可換 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族，$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ を I の有限分割（J は有限集合）とする．各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ が総和可能ならば，$\{x_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} x_i$$

が成り立つ．

証明　$J = \{0,\ldots,n-1\}$ としてよい．各 $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能で，その和は $s_j \in G$ であるとする．$0 \in G$ の近傍 U を任意にとる．$V + \cdots + V \subseteq U$（$V$ は n 項）を満たす $0 \in G$ の近傍 V がとれる．各 $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ に対して，$I'_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ をとり，任意の $I''_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ に対して，$I''_j \supseteq I'_j$ ならば $\sum_{i\in I''_j} x_i \in s_j + V$ となるようにできる．ここで $I' = I'_0 \sqcup \cdots \sqcup I'_{n-1}$ と置くと，任意の $I'' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I'' \supseteq I'$ ならば

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I''} x_i &= \sum_{i\in I''\cap I_0} x_i + \cdots + \sum_{i\in I''\cap I_{n-1}} x_i\\ &\in (s_0 + V) + \cdots + (s_{n-1} + V)\\ &\subseteq (s_0 + \cdots + s_{n-1}) + U\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能であり，その和は $s_0+\cdots+s_{n-1}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}x_i$ である． □

注意　J が有限集合でない場合，各 $j\in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ が総和可能かつ $\{\sum_{i\in I_j}x_i\}_{j\in J}$ が総和可能であっても，$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとは限らない．たとえば，$j\in\mathbb{N}$ に対して $x_{j,0}=1$，$x_{j,1}=-1$ と置くと，各 $j\in\mathbb{N}$ に対して $\{x_{j,b}\}_{b\in\{0,1\}}$ は総和可能かつ $\{x_{j,0}+x_{j,1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ は総和可能だが，$\{x_{j,b}\}_{j\in\mathbb{N},\,b\in\{0,1\}}$ は総和可能ではない．ただし，系 5.3 も参照のこと．

3　無限和と連続準同型

命題 3.1　$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を可換 Hausdorff 位相群の族，$G=\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ をその積位相群とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族とし，x_i の λ-成分を $x_{i,\lambda}$ と書く．このとき，次の 2 条件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は G において総和可能である．
(b) 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して，$\{x_{i,\lambda}\}_{i\in I}$ は G_λ において総和可能である．

これらの条件が成り立つとき，

$$\sum_{i\in I}x_i=\left(\sum_{i\in I}x_{i,\lambda}\right)_{\lambda\in\Lambda}$$

が成り立つ．

証明　積空間における収束の一般論から従う． □

命題 3.2　G,H を可換 Hausdorff 位相群，$f\colon G\to H$ を連続準同型，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が G において総和可能ならば，$\{f(x_i)\}_{i\in I}$ は H において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}f(x_i)=f\left(\sum_{i\in I}x_i\right)$$

が成り立つ．

証明　$\{x_i\}_{i\in I}$ の有限部分和をとる写像を $S\colon\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\to G$，$\{f(x_i)\}_{i\in I}$ の有限部分和をとる写像を $T\colon\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\to H$ とすると，f が準同型であることより，$T=f\circ S$ が成り立つ．$\{x_i\}_{i\in I}$ が G において総和可能であり，その和が $s\in G$ であるとすると，$(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I),\subseteq)$ の切片フィルタの S による像は s に収束する．これと f の連続性より，$(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I),\subseteq)$ の切片フィルタの $T=f\circ S$ による像は $f(s)$ に収束する．すなわち，$\{f(x_i)\}_{i\in I}$ は H において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}f(x_i)=f\left(\sum_{i\in I}x_i\right)$$

が成り立つ． □

系 3.3　G を可換 Hausdorff 位相群とする．

(1) G の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$，$\{y_i\}_{i\in I}$ がともに総和可能ならば，$\{x_i+y_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}(x_i+y_i)=\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}y_i$$

が成り立つ．

(2) $n \in \mathbb{Z}$ とする．G の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，$\{nx_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} nx_i = n\sum_{i\in I} x_i$$

が成り立つ．

証明 (1) 命題 3.1 に注意して，連続準同型 $G\times G \to G;\, (x,y)\mapsto x+y$ に対して命題 3.2 を適用すればよい．

(2) 連続準同型 $G\to G;\, x\mapsto nx$ に対して命題 3.2 を適用すればよい． □

K を付値体，E を K-ノルム空間，$\lambda\in K$ とする．系 3.3 (2) とまったく同様にして，E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，$\{\lambda x_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda\sum_{i\in I} x_i$$

が成り立つことがわかる．

4 可換収束

定義 4.1（可換収束） G を可換 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の可算無限族とする．任意の全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ に対して極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)}$ が存在するとき，$\{x_i\}_{i\in I}$ は（G において）**可換収束**するという．

定理 4.2 G を可換 Hausdorff 位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の可算無限族とする．次の 2 条件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能である．
(b) $\{x_i\}_{i\in I}$ は可換収束する．

これらの条件が成り立つとき，任意の全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)} = \sum_{i\in I} x_i$$

が成り立つ．特に，左辺の極限値は全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ のとり方によらない．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとし，その和を s と置く．任意の全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ に対して $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)} = s$ を示そう．$0\in G$ の近傍 U を任意にとる．$\sum_{i\in I} x_i = s$ だから，ある $I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して，任意の $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I'\supseteq I_0$ ならば $\sum_{i\in I'} x_i\in s+U$ が成り立つ．このとき，$\sigma(\{0,\dots,n-1\})\supseteq I_0$ となるような任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)}\in s+U$ が成り立つ．よって，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)} = s$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 背理法で示す．$\{x_i\}_{i\in I}$ は可換収束するが，総和可能ではないと仮定する．全単射 $\sigma\colon\mathbb{N}\to I$ を 1 つ固定し，写像 $\mathbb{N}\to G;\, n\mapsto\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)}$ による $\mathbb{N}$ 上の補有限フィルタの像を $\mathfrak{F}_\sigma$ とする．また，$\{x_i\}_{i\in I}$ の部分和をとる写像 $I\to G$ による $(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I),\subseteq)$ の切片フィルタの像を $\mathfrak{F}$ とする．すると，

- $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F}_\sigma$ よりも粗い．
- 仮定より，$\mathfrak{F}_\sigma$ は収束するが，$\mathfrak{F}$ は収束しない．

したがって，Cauchy フィルタの性質から，$\mathfrak{F}$ は Cauchy ではない．すなわち，ある $0\in G$ の近傍 U が存在して，どんな $I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対してもある $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して，$I_0\cap I'=\emptyset$ かつ $\sum_{i\in I'} x_i\notin U$ を満たす．そこで，I を $I=\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$（$I_j\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$）と分割し，無限個の $j\in\mathbb{N}$ に対して $\sum_{i\in I_j} x_i\notin U$ となるようにするこ

とができる．小さい自然数から $I_0, I_1, \ldots$ の順番に対応をつける全単射 $\tau\colon \mathbb{N} \to I$ をとると，明らかに極限値 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x_{\tau(k)}$ は存在しない．これは，$\{x_i\}_{i\in I}$ が可換収束するという仮定に反する． □

注意 $\{x_i\}_{i\in I}$（I は可算無限集合）が可換収束しない場合，もし 2 つの全単射 $\sigma, \tau\colon \mathbb{N} \to I$ に対して極限値 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)}$，$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x_{\tau(k)}$ がともに存在したとしても，それらの値は等しいとは限らない．例として，実数の族 $\{(-1)^k/(k+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考えよう．よく知られているように，先頭 n 項の部分和の極限の意味で

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2$$

が成り立つ．一方で，正の項 2 個と負の項 1 個を交互に並べると，

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \log 2$$

となる．詳しくは，杉浦 [6, p. 374] を参照のこと．

5 非負実数の族の無限和

定理 5.1 $\{x_i\}_{i\in I}$ を非負実数の族とする．次の 2 条件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は（$\mathbb{R}$ において）総和可能である．
(b) $\{\sum_{i\in I'} x_i \mid I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\}$ は上に有界である．

これらの条件が成り立つとき，

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}$$

が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとして，その和を $s \in \mathbb{R}$ と置く．$\sum_{i\in I} x_i = s$ だから，ある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して，任意の $I'' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I'' \supseteq I_0$ ならば $|\sum_{i\in I''} x_i - s| \leq 1$ が成り立つ．したがって，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して

$$\sum_{i\in I'} x_i \leq \sum_{i\in I'\cup I_0} x_i \leq s + 1$$

が成り立つ．よって，$\{\sum_{i\in I'} x_i \mid I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\}$ は上に有界である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\{\sum_{i\in I'} x_i \mid I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\}$ が上に有界であるとして，その上界を s とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能であり，その和は s であることを示す．$\epsilon > 0$ を任意にとる．$\sup\{\sum_{i\in I'} x_i \mid I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\} = s$ だから，ある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して $\sum_{i\in I_0} x_i \geq s - \epsilon$ が成り立つ．このとき，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I' \supseteq I_0$ ならば

$$\sum_{i\in I'} x_i \geq \sum_{i\in I_0} x_i \geq s - \epsilon$$

が成り立つ．また，$\sum_{i\in I'} x_i \leq s$ である．よって，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能であり，その和は s に等しい． □

系 5.2 $\{x_i\}_{i\in I}$，$\{y_i\}_{i\in I}$ を非負実数の族とする．任意の $i \in I$ に対して $x_i \leq y_i$ であり，$\{y_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，$\{x_i\}_{i\in I}$ も $\mathbb{R}$ において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i$$

が成り立つ．

証明　任意の $i \in I$ に対して $x_i \leq y_i$ であるとする．すると，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して $\sum_{i \in I'} x_i \leq \sum_{i \in I'} y_i$ が成り立つ．したがって，$\{\sum_{i \in I'} y_i \mid I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\}$ が上に有界ならば $\{\sum_{i \in I'} x_i \mid I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\}$ も上に有界であり，

$$\sup \left\{ \sum_{i \in I'} x_i \,\middle|\, I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{i \in I'} y_i \,\middle|\, I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \right\}$$

が成り立つ．よって，結論は定理 5.1 から従う．□

系 5.3　$\{x_i\}_{i \in I}$ を非負実数の族，$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ を I の分割とする．各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i \in I_j}$ が総和可能かつ $\{\sum_{i \in I_j} x_i\}_{j \in J}$ が総和可能ならば，$\{x_i\}_{i \in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$$

が成り立つ．

証明　各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i \in I_j}$ が総和可能かつ $\{\sum_{i \in I_j} x_i\}_{j \in J}$ が総和可能であるとする．$I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ を任意にとり，$J' = \{j \in J \mid I_j \cap I' \neq \emptyset\}$ と置く．各 $j \in J'$ に対して，$\sum_{i \in I_j} x_i$ は $\{x_i\}_{i \in I}$ の有限部分和全体の上限だから（定理 5.1），

$$\sum_{i \in I_j \cap I'} x_i \leq \sum_{i \in I_j} x_i$$

がである．また，$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$ は $\{\sum_{i \in I_j} x_i\}_{j \in J}$ の有限部分和全体の上限だから（定理 5.1），

$$\sum_{j \in J'} \sum_{i \in I_j} x_i \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$$

がである．したがって，

$$\sum_{i \in I'} x_i = \sum_{j \in J'} \sum_{i \in I_j \cap I'} x_i \leq \sum_{j \in J'} \sum_{i \in I_j} x_i \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$$

が成り立つ．よって，$\{x_i\}_{i \in I}$ の有限部分和全体は上に有界だから，定理 5.1 より，$\{x_i\}_{i \in I}$ は総和可能である．$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$ が成り立つことは，定理 2.2 からわかる．□

6　ノルム化可能な位相線型空間における無限和

定義 6.1（絶対総和可能性）　K を付値体，E をノルム化可能な K-位相線型空間，$\{x_i\}_{i \in I}$ を E の元の族とする．$\{x_i\}_{i \in I}$ が（E において）**絶対総和可能**であるとは，E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ をとったとき，$\{\|x_i\|\}_{i \in I}$ が $\mathbb{R}$ において総和可能であることをいう．

同じ位相を定めるノルムはたかだか定数倍程度しか違わないから，上の定義は，E の位相と整合するノルムのとり方によらない．

命題 6.2　付値体 K 上のノルム化可能な位相線型空間 E において，絶対総和可能な族の任意の部分族は絶対総和可能である．

証明　$\mathbb{R}$ の完備性に注意すれば，結論は命題 2.1 から従う．□

命題 6.3 K を付値体，E をノルム化可能な K-位相線型空間とする．

(1) E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば，$\{x_i + y_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である．
(2) $\lambda \in K$ とする．E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば，$\{\lambda x_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である．

証明 E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ を固定しておく．

(1) $\{\|x_i\|\}_{i\in I}, \{\|y_i\|\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，系 3.3 (1) より $\{\|x_i\| + \|y_i\|\}_{i\in I}$ も総和可能である．三角不等式より $\|x_i + y_i\| \leq \|x_i\| + \|y_i\|$ だから，このとき $\{\|x_i + y_i\|\}_{i\in I}$ も総和可能である（系 5.2）．すなわち，$\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば，$\{x_i + y_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である．

(2) $\{\|x_i\|\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，系 3.3 (2) の後の補足より，$\{|\lambda|\|x_i\|\}_{i\in I}$ も総和可能である．すなわち，$\{x_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば，$\{\lambda x_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である． □

命題 6.4 K を付値体，E を K-ノルム空間，$\{x_i\}_{i\in I}$ を E の元の族，$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ を I の分割とする．

- 各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ が絶対総和可能，かつ
- E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ をとると，$\{\sum_{i\in I_j} \|x_i\|\}_{j\in J}$ が（$\mathbb{R}$ において）総和可能[*1]

ならば，$\{x_i\}_{i\in I}$ は絶対総和可能である．

証明 系 5.3 から従う． □

命題 6.5 K を付値体，E を K-ノルム空間，$\{x_i\}_{i\in I}$ を E の元の族とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能かつ絶対総和可能であれば，

$$\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|$$

が成り立つ．

証明 有限和に対する三角不等式と，不等式延長の原理から結論を得る． □

命題 6.6 付値体 K 上の完備かつノルム化可能な位相線型空間 E において，絶対総和可能な族は総和可能である．

証明 E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ を固定しておく．$\{x_i\}_{i\in I}$ を E の点の絶対総和可能な族とする．$\epsilon > 0$ を任意にとる．Cauchy の判定法（定理 1.2）より，ある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I_0 \cap I' = \emptyset$ ならば $\sum_{i\in I'} \|x_i\| \leq \epsilon$ が成り立つ．このとき，三角不等式より $\|\sum_{i\in I'} x_i\| \leq \epsilon$ である．E は完備だから，ふたたび Cauchy の判定法（定理 1.2）より，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能である． □

注意 完備でないノルム空間においては，絶対総和可能な族が総和可能であるとは限らない．たとえば，コンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数のなす空間 $C_0(\mathbb{R})$ を，一様ノルムによって $\mathbb{R}$-ノルム空間とみなし，$n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \in C_0(\mathbb{R})$ を $\|f_n\| = 2^{-n}$ かつ $\operatorname{supp} f_n = [n, n+1]$ となるようにとる．すると，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能だが総和可能ではない．

命題 6.7 E を有限次元のノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間とする[*2]．E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条

[*1] 同じ位相を定めるノルムはたかだか定数倍程度しか違わないから，この総和可能性は，E の位相と整合するノルムのとり方によらない．

[*2] 一般に，離散でない付値体 K に対して，n（有限）次元の Hausdorff な K-位相線型空間はすべて（位相線型空間として）K^n に同

件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能である．

(b) $\{x_i\}_{i\in I}$ は絶対総和可能である．

事実 有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間上のノルムは，すべて同値である．すなわち，E を有限次元 $\mathbb{R}$-線型空間，p, q を E 上のノルムとすると，定数 $a, b > 0$ が存在して，任意の $x \in E$ に対して

$$ap(x) \le q(x) \le bp(x)$$

が成り立つ．

命題 6.7 の証明 (b) $\Longrightarrow$ (a) 命題 6.6 の特別な場合である．

(a) $\Longrightarrow$ (b) まず，$E = \mathbb{R}$（位相は通常のもの）の場合に示す．対偶を示そう．$\{x_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能でないとする．すると，$\{|x_i|\}_{i\in I}$ の有限部分和全体は上に非有界である（定理 5.1）．したがって，$I_+ = \{i \in I \mid x_i \ge 0\}$，$I_- = \{i \in I \mid x_i < 0\}$ と置くと，$\{x_i\}_{i\in I_+}$ または $\{x_i\}_{i\in I_-}$ の有限部分和全体が非有界である．どちらでも同様だから，$\{x_i\}_{i\in I_+}$ の有限部分和全体が非有界であるとする．このとき，どんな $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対しても，$I_+ \setminus I_0$ の十分大きい有限部分集合 I' をとれば，$\sum_{i\in I'} x_i \ge 1$ が成り立つ．よって，Cauchy の判定法（定理 1.2）より，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能ではない．

次に，E が有限次元のノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間の場合に示す．$E = \mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$ 上の任意のノルム $\|{-}\|$ に対して示せば十分である．上の事実より，定数 $b > 0$ が存在して，任意の $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|x\| \le b(|x_0| + \cdots + |x_{n-1}|) \tag{$*$}$$

が成り立つ．以下，このような b を固定する．

$\mathbb{R}^n$ の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとする．すると，各 $k \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して $\{x_{i,k}\}_{i\in I}$（$x_{i,k}$ は x_i の k-成分）は $\mathbb{R}$ において総和可能だから（命題 3.1），前段の結果より，$\{x_{i,k}\}_{i\in I}$ は絶対総和可能である．したがって，$\{b(|x_{i,0}| + \cdots + |x_{i,n-1}|)\}_{i\in I}$ は総和可能である（系 3.3 およびその後の補足）．ここで，($*$) より，$\{\|x_i\|\}_{i\in I}$ は総和可能である（系 5.2）．すなわち，$\{x_i\}_{i\in I}$ は絶対総和可能である． □

注意 命題 6.7 は，一般の完備ノルム空間では成り立たない．すなわち，完備ノルム空間において，総和可能な族が絶対総和可能であるとは限らない．たとえば，無限遠で消える $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数のなす空間 $C_\infty(\mathbb{R})$ を一様ノルムによって完備 $\mathbb{R}$-ノルム空間とみなし，$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$ を $\|f_n\| = 1/n$ かつ $\operatorname{supp} f_n \subseteq [n, n+1]$ となるようにとる．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は総和可能だが絶対総和可能ではない．

定理 6.8 K を離散でない付値体，$E_0, \dots, E_{n-1}, F$ をノルム化可能な K-位相線型空間，$f\colon E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \to F$ を連続 n 重線型写像，$\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ を E_k の元の族（$k = 0, \dots, n-1$）とする．$I = I_0 \times \cdots \times I_{n-1}$ と置き，$i \in I$ の成分を $i_0, \dots, i_{n-1}$ のように書く．各 $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ が E_k において絶対総和可能であれば，$\{f(x_{0,i_0}, \dots, x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において絶対総和可能である．さらに，F が完備であれば，$\{f(x_{0,i_0}, \dots, x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} f(x_{0,i_0}, \dots, x_{n-1,i_{n-1}}) = f\left(\sum_{i_0\in I_0} x_{0,i_0}, \dots, \sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)$$

が成り立つ．

型である（証明は，たとえば Bourbaki [4, p. 16] を参照のこと）．したがって特に，「有限次元のノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間」は「有限次元の Hausdorff な $\mathbb{R}$-位相線型空間」といっても同じである．

事実　K を離散でない付値体，$E_0, \ldots, E_{n-1}, F$ を K-ノルム空間，$f\colon E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \to F$ を n 重線型写像とする．次の 2 条件は同値である．

(a) f は連続である．

(b) 定数 $a \geq 0$ が存在して，任意の $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in E_0 \times \cdots \times E_{n-1}$ に対して
$$\|f(x_0, \ldots, x_{n-1})\| \leq a\|x_0\| \cdots \|x_{n-1}\|$$
が成り立つ．

証明は，たとえば Bourbaki [3, pp. 40–41] を参照のこと．

定理 6.8 の証明　$E_0, \ldots, E_{n-1}, F$ の位相と整合するノルムを固定しておき，それらをすべて $\|{-}\|$ で表す．

$f\colon E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \to F$ は連続 n 重線型写像だから，上の事実より，定数 $a \geq 0$ が存在して，任意の $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in E_0 \times \cdots \times E_{n-1}$ に対して
$$\|f(x_0, \ldots, x_{n-1})\| \leq a\|x_0\| \cdots \|x_{n-1}\|$$
が成り立つ．以下，このような a を固定する．

各 $\{x_{k,i}\}_{i \in I_k}$ が E_k において絶対総和可能であるとする．$I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ を任意にとる．$k = 0, \ldots, n-1$ に対して $I'_k \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_k)$ を選んで，$I' \subseteq I'_0 \times \cdots \times I'_{n-1}$ となるようにする．すると，
$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I'} \|f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}})\| &\leq \sum_{(i_0, \ldots, i_{n-1}) \in I'_0 \times \cdots \times I'_{n-1}} \|f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}})\| \\
&\leq \sum_{(i_0, \ldots, i_{n-1}) \in I'_0 \times \cdots \times I'_{n-1}} a\|x_{0,i_0}\| \cdots \|x_{n-1,i_{n-1}}\| \\
&\leq a\left(\sum_{i_0 \in I'_0} \|x_{0,i_0}\|\right) \cdots \left(\sum_{i_{n-1} \in I'_{n-1}} \|x_{n-1,i_{n-1}}\|\right) \\
&\leq a\left(\sum_{i_0 \in I_0} \|x_{0,i_0}\|\right) \cdots \left(\sum_{i_{n-1} \in I_{n-1}} \|x_{n-1,i_{n-1}}\|\right)
\end{aligned}$$
が成り立つ．ここで，最右辺の $a\left(\sum_{i_0 \in I_0} \|x_{0,i_0}\|\right) \cdots \left(\sum_{i_{n-1} \in I_{n-1}} \|x_{n-1,i_{n-1}}\|\right)$ は I' によらない有限の値だから，定理 5.1 より，$\{f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i \in I}$ は F において絶対総和可能である．

さらに，F が完備であるとする．すると，命題 6.6 より $\{f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i \in I}$ は F において総和可能である．さらに，定理 2.2 と命題 3.2 を繰り返し用いて，
$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}}) &= \sum_{i_{n-1} \in I_{n-1}} \cdots \sum_{i_0 \in I_0} f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}}) \\
&= f\left(\sum_{i_0 \in I_0} x_{0,i_0}, \ldots, \sum_{i_{n-1} \in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$
を得る．　□

系 6.9　$E_0, \ldots, E_{n-1}, F$ を有限次元のノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，$f\colon E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \to F$ を連続 n 重線型写像，$\{x_{k,i_k}\}_{i_k \in I_k}$ を E_k の元の族（$k = 0, \ldots, n-1$）とする．$I = I_0 \times \cdots \times I_{n-1}$ と置き，$i \in I$ の成分を i_0,

$\ldots, i_{n-1}$ のように書く．各 $\{x_{k,i_k}\}_{i_k \in I_k}$ が E_k において総和可能であれば，$\{f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i \in I}$ は F において総和可能であり，

$$\sum_{i \in I} f(x_{0,i_0}, \ldots, x_{n-1,i_{n-1}}) = f\left(\sum_{i_0 \in I_0} x_{0,i_0}, \ldots, \sum_{i_{n-1} \in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)$$

が成り立つ．

証明　有限次元のノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間は完備であり，また有限次元のノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間の元の族に関して総和可能性と絶対総和可能性は同値だから（命題 6.7），主張は定理 6.8 から従う． □

系 6.10　$\{x_{k,i_k}\}_{i_k \in I_k}$ を実数の族（$k = 0, \ldots, n-1$）とする．$I = I_0 \times \cdots \times I_{n-1}$ と置き，$i \in I$ の成分を $i_0, \ldots, i_{n-1}$ のように書く．各 $\{x_{k,i_k}\}_{i_k \in I_k}$ が $\mathbb{R}$ において総和可能であれば，$\{x_{0,i_0} \cdots x_{n-1,i_{n-1}}\}_{i \in I}$ は $\mathbb{R}$ において総和可能であり，

$$\sum_{i \in I} x_{0,i_0} \cdots x_{n-1,i_{n-1}} = \left(\sum_{i_0 \in I_0} x_{0,i_0}\right) \cdots \left(\sum_{i_{n-1} \in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)$$

が成り立つ．

証明　系 6.9 の特別な場合である． □

参考文献

[1] N. Bourbaki（著），森 毅（編），土川 真夫，村田 全（訳），『ブルバキ数学原論 位相 2』，東京図書，1968.

[2] N. Bourbaki（著），森 毅（編），笠原 晧司，清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 3』，東京図書，1968.

[3] N. Bourbaki（著），森 毅（編），山崎 泰郎，清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 4』，東京図書，1969.

[4] N. Bourbaki（著），小針 晛宏（編・訳），『ブルバキ数学原論 位相線型空間 1』，東京図書，1986.

[5] J. Dieudonné（著），森 毅（訳），『現代解析の基礎 1』，東京図書，1971.

[6] 杉浦 光夫，『解析入門 I』，東京大学出版会，1980.