確率過程

箱

2024 年 5 月 22 日

概要

確率過程，特にマルチンゲールの理論について解説する．

目次

記号と用語

- 自然数, 有理数, 実数全体の集合を, それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ と書く．0 は自然数に含める．また, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, \infty]$ と書く．
- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間とし，$p \in [1, \infty]$ とするとき，Ω 上の p 乗可積分な実可測関数全体のなす空間を $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ と書く．その「ほとんどいたるところで一致する関数を同一視する」同値関係に関する同値類全体のなす空間を $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ と書く．
- 可測関数の「ほとんどいたるところで一致する関数を同一視する」同値関係に関する同値類を，しばし

ば関数そのもののように扱う．

1　条件付き期待値

1.1　条件付き期待値

命題 1.1　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．任意の $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ に対して，$X' \in L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ であって，任意の $A \in \mathfrak{G}$ に対して

$$E[1_A X'] = E[1_A X]$$

を満たすものが，一意に存在する．

証明　$A \in \mathfrak{G}$ に $E[1_A X]$ を対応させる写像は，可測空間 $(\Omega, \mathfrak{G})$ 上の有限実測度である．よって，Radon–Nikodym の定理より，主張の条件を満たす $X' \in L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ が一意に存在する．　□

定義 1.2（条件付き期待値）　命題 1.1 の状況で，X' を，X（あるいはその任意の代表元）の $\mathfrak{G}$ に関する**条件付き期待値**（conditional expectation）といい，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ と書く．

条件付き期待値 $E[X \mid \mathfrak{G}]$ は，厳密には確率変数の同値類だが，しばしばこれを確率変数そのもののように扱う．条件付き期待値を含む等式や不等式はすべて，関数の同値類のなす空間においてその等式や不等式が成立する，という意味である．

$\mathfrak{G} = \{\emptyset, X\}$ に関する条件付き期待値 $E[X \mid \mathfrak{G}]$ は，定値 $E[X]$ をとる確率変数（の同値類）である．

1.2　条件付き期待値の基本的性質

命題 1.3（条件付き期待値の線型性，順序保存性，L^1 連続性）　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]\colon L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ は，線型，順序保存，かつノルム減少である．

証明　$E[- \mid \mathfrak{G}]$ が線型かつ順序保存であることは，定義から明らかである．$E[- \mid \mathfrak{G}]$ がノルム減少であることを示す．$X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ とすると，$-|X| \le X \le |X|$ だから，順序保存性より，$-E[|X| \mid \mathfrak{G}] \le E[X \mid \mathfrak{G}] \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$，すなわち $|E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} \|E[X \mid \mathfrak{G}]\|_1 &= E[|E[X \mid \mathfrak{G}]|] \\ &\le E[E[|X| \mid \mathfrak{G}]] \\ &= E[|X|] \\ &= \|X\|_1 \end{aligned}$$

である．　□

系 1.4　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．任意の $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ に対して，$|E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$ である．

証明　命題 1.3 の証明の中で示されている．　□

命題 1.5（条件付き期待値の推移性） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数であって $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ を満たすものとする．$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数 X に対して，$E[E[X \mid \mathfrak{G}] \mid \mathfrak{H}] = E[X \mid \mathfrak{H}]$ である．

証明 条件付き確率の定義から明らかである． □

命題 1.6 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数とする．

(1) X が $\mathfrak{G}$-可測ならば，$E[X \mid \mathfrak{G}] = X$ である．

(2) X が $\mathfrak{G}$ と独立ならば，$E[X \mid \mathfrak{G}] = E[X]$ である．

証明 (1) 条件付き確率の定義から明らかである．

(2) X が $\mathfrak{G}$ と独立であるとすると，任意の $A \in \mathfrak{G}$ に対して $E[1_A X] = E[1_A]E[X] = E[1_A E[X]]$ が成り立つから，$E[X \mid \mathfrak{G}] = E[X]$ である． □

命題 1.7（条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X_n（$n \in \mathbb{N}$）と X は $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数であり，$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は X に概収束し，かつある $Y \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してほとんど確実に $|X_n| \le Y$ を満たすとする．このとき，条件付き期待値の列 $(E[X_n \mid \mathfrak{G}])_{n \in \mathbb{N}}$ は，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ に L^1 収束かつ概収束する．

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$Z_n = \sup_{k \ge n}|X_k - X|$ と置くと，

$$|E[X_n \mid \mathfrak{G}] - E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X_n - X| \mid \mathfrak{G}] \le E[Z_n \mid \mathfrak{G}]$$

である（系 1.4）．そこで，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n \in \mathbb{N}}$ が 0 に L^1 収束かつ概収束することを示せばよい．

仮定より，$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に概収束し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してほとんど確実に $|Z_n| \le 2Y$ を満たす．このことと通常の Lebesgue の収束定理より，$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に L^1 収束するから，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に L^1 収束する（命題 1.3）．一方で，$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は非負確率変数の減少列だから，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n \in \mathbb{N}}$ も非負確率変数（の同値類）の減少列である（命題 1.3）．したがって，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n \in \mathbb{N}}$ はある非負確率変数 Z に概収束する．ところが，一般に，測度空間上の実可測関数列が L^1 収束極限と概収束極限をもつとき，それらの極限はほとんどいたるところで一致する．よって，ほとんど確実に $Z = 0$ であり，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n \in \mathbb{N}}$ が 0 に概収束することもわかる． □

命題 1.8 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ 上の可積分な実確率変数，Y を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数とし，これらの積 XY も可積分であるとする．このとき，

$$E[XY \mid \mathfrak{G}] = XE[Y \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．

証明 まず，$X = 1_A$（$A \in \mathfrak{G}$）である場合を考える．このとき，$1_A E[Y \mid \mathfrak{G}] \in L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ であり，任意の $B \in \mathfrak{G}$ に対して

$$E[1_B 1_A E[Y \mid \mathfrak{G}]] = E[1_{A \cap B} E[Y \mid \mathfrak{G}]] = E[1_{A \cap B} Y] = E[1_B 1_A Y]$$

（第二の等号は，条件付き期待値 $E[Y \mid \mathfrak{G}]$ の定義から従う）が成り立つから，$1_A E[Y \mid \mathfrak{G}]$ は条件付き期待値 $E[1_A Y \mid \mathfrak{G}]$ に等しい．

次に，一般の場合を考える．$(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ 上の可積分な実確率変数 X に対して，X に各点収束する $\mathfrak{G}$-可測単関数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|X_n| \le |X|$ を満たすものをとる．前段の結果より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E[X_nY \mid \mathfrak{G}] = X_nE[Y \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすると，上式の右辺は $XE[Y \mid \mathfrak{G}]$ に概収束し，一方で，条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）より，上式の左辺は $E[XY \mid \mathfrak{G}]$ に概収束する．よって，$E[XY \mid \mathfrak{G}] = XE[Y \mid \mathfrak{G}]$ を得る． □

次の命題は，本稿では用いないが，条件付き期待値を具体的に計算するためには有用である．

命題 1.9 X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上のそれぞれ可測空間 E, F に値をとる互いに独立な確率変数，$\phi\colon E \times F \to \mathbb{R}$ を可測写像とし，$\phi(X,Y)$ は可積分であるとする．このとき，次が成り立つ．

(1) 確率変数 $\phi(X(\omega), Y)$ が可積分であるような $\omega \in \Omega$ の全体は可測集合であり，その補集合は無視可能である．

(2) X が生成する σ-代数を $\sigma(X)$ と書くと，

$$E[\phi(X,Y) \mid \sigma(X)] = E[\phi(x,Y)]|_{x=X}$$

が成り立つ．ここで，上式の右辺は，$\omega \in \Omega$ に対して，確率変数 $\phi(X(\omega), Y)$ が可積分ならばその期待値を，そうでなければ 0 を対応させる確率変数とする．

証明 (1) X と Y が独立であることより，X, Y の分布をそれぞれ μ, ν と書くと，(X,Y) の分布は $\mu \otimes \nu$ である．確率変数 $\phi(X,Y)$ が可積分であることより，$E \times F$ 上の可測関数 ϕ は $(\mu \otimes \nu)$-可積分である．したがって，Fubini の定理より，F 上の可測関数 $\phi(x, -)$ が ν-可積分であるような $x \in E$ の全体は可測集合であり，その補集合は μ-無視可能である．すなわち，確率変数 $\phi(X(\omega), Y)$ が可積分であるような $\omega \in \Omega$ の全体は可測集合であり，その補集合は無視可能である．

(2) まず，$\phi = 1_{A\times B}$（A, B はそれぞれ E, F の可測集合）である場合を考える．このとき，任意の可測集合 $A' \subseteq E$ に対して

$$E[1_{X\in A'}1_{A\times B}(X,Y)] = P(X \in A \cap A')P(Y \in B) = E[1_{X\in A'}1_{A\in X}P(B)]$$

が成り立つから，

$$E[1_{A\times B}(X,Y) \mid \sigma(X)] = 1_{A\in X}P(B)$$

である．上式の右辺は $E[1_{A\times B}(x,Y)]|_{x=X}$ に等しいから，主張が成り立つ．

$\phi = 1_C$ に対して主張が成り立つような可測集合 $C \subseteq E \times F$ の全体を $\mathfrak{C}$ と置く．明らかに，$C, C' \in \mathfrak{C}$ かつ $C' \subseteq C$ ならば $C \setminus C' \in \mathfrak{C}$ である．また，$(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{C}$ の元の増加列として，$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ と置くと，等式

$$E[1_{C_n}(X,Y) \mid \sigma(X)] = E[1_{C_n}(x,Y)]|_{x=X}$$

において $n \to \infty$ とすることで，

$$E[1_C(X,Y) \mid \sigma(X)] = E[1_C(x,Y)]|_{x=X}$$

を得る（左辺の収束は条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）から，右辺の収束は単調収束定理から従う）．すなわち，$C \in \mathfrak{C}$ である．以上より，$\mathfrak{C}$ は Dynkin 族である．前段の結果より，任意の可

測集合 $A \subseteq E$ と $B \subseteq F$ に対して $A \times B \in \mathfrak{C}$ だから，Dynkin 族補題より，$\mathfrak{C}$ は $E \times F$ の可測集合の全体に一致する．すなわち，$\phi = 1_C$（C は $E \times F$ の可測集合）である場合，主張は成り立つ．

次に，一般の場合を考える．可測写像 $\phi\colon E \times F \to \mathbb{R}$ であって $\phi(X, Y)$ が可積分であるものに対して，ϕ に各点収束する可測単関数の列 $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\phi_n| \leq |\phi|$ を満たすものをとる．前段の結果より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E[\phi_n(X, Y) \mid \sigma(X)] = E[\phi_n(x, Y)]|_{x=X}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすると，条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）より，上式の右辺は $E[\phi(X, Y) \mid \sigma(X)]$ に概収束する．また，Lebesgue の収束定理より，$\phi(X(\omega), Y)$ が可積分であるような $\omega \in \Omega$ に対しては，$E[\phi_n(X(\omega), Y)] \to E[\phi(X(\omega), Y)]$ となる．よって，

$$E[\phi(X, Y) \mid \sigma(X)] = E[\phi(x, Y)]|_{x=X}$$

が成り立つ． □

1.3 条件付き期待値に対する Jensen の不等式

命題 1.10（条件付き期待値に対する Jensen の不等式） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数，$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とし，$\phi(X)$ も可積分であるとする．このとき，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) \leq E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．

証明 ϕ が凸であることより，各点 $x_0 \in \mathbb{R}$ において右微分係数

$$D^+\phi(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

が存在し，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi(x_0) + D^+\phi(x_0)(x - x_0) \leq \phi(x)$$

が成り立つ．上式において，x_0 に $E[X \mid \mathfrak{G}]$ を，x に X を代入すると，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) + D^+\phi(E[X \mid \mathfrak{G}])(X - E[X \mid \mathfrak{G}]) \leq \phi(X) \tag{$*$}$$

を得る．

まず，X が有界である場合を考える．このとき，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ も有界であり（命題 1.3），したがって，($*$) の両辺は可積分である．そこで，両辺の条件付き期待値をとれば，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) \leq E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$$

を得る（命題 1.3）．

次に，一般の場合を考える．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n = \{|X| \leq n\}$ と置くと，$1_{A_n} X$ は有界だから，前段の結果より，

$$\phi(E[1_{A_n} X \mid \mathfrak{G}]) \leq E[\phi(1_{A_n} X) \mid \mathfrak{G}]$$

である．$n \to \infty$ とすると，条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）より，$E[1_{A_n} X \mid \mathfrak{G}]$ は $E[X \mid \mathfrak{G}]$ に概収束し，$E[\phi(1_{A_n} X) \mid \mathfrak{G}]$ は $E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$ に概収束する（後者については，$|\phi(1_{A_n} X)| \le |\phi(X)| \vee |\phi(0)|$ であり，$\phi(X)$ が可積分であることに注意する）．よって，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) \le E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$$

を得る． □

系 1.11（条件付き期待値の L^p 連続性） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の p 乗可積分な実確率変数（$p \in [1, \infty)$）とすると，

$$|E[X \mid \mathfrak{G}]|^p \le E[|X|^p \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．特に，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]$ は，$L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ から $L^p(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ へのノルム減少な線型写像を定める．

証明 前半の不等式は，条件付き期待値に対する Jensen の不等式（命題 1.10）で $\phi(x) = |x|^p$ としたものである．また，この不等式より

$$\begin{aligned} \|E[X \mid \mathfrak{G}]\|_p^p &= E[|E[X \mid \mathfrak{G}]|^p] \\ &\le E[E[|X|^p \mid \mathfrak{G}]] \\ &= E[|X|^p] \\ &= \|X\|_p^p \end{aligned}$$

だから，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]$ は，$L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ から $L^p(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ へのノルム減少な線型写像を定める． □

命題 1.12 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．$L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ を $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ の閉部分空間とみなすと，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]\colon L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ は，直交射影である．

証明 $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ とすると，任意の $Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle X - E[X \mid \mathfrak{G}] | Y \rangle_2 &= E[(X - E[X \mid \mathfrak{G}])Y] \\ &= E[E[(X - E[X \mid \mathfrak{G}])Y \mid \mathfrak{G}]] \\ &= E[E[X - E[X \mid \mathfrak{G}] \mid \mathfrak{G}]Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ（条件付き期待値の推移性（命題 1.5）と命題 1.8 を用いた）．よって，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]\colon L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ は，直交射影である． □

1.4 条件付き期待値と一様可積分性

命題 1.13 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数 X に対して，$\mathfrak{G}$ が $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数の全体を動くときの条件付き期待値 $E[X \mid \mathfrak{G}]$ の全体は，一様可積分である．

証明 $\mathfrak{F}$ の任意の部分 σ-代数 $\mathfrak{G}$ に対して，$|E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$ だから（系 1.4），必要ならば $|X|$ を改めて X と置くことで，はじめから $X \ge 0$ と仮定してよい．このとき，$E[X \mid \mathfrak{G}] \ge 0$ である（命題 1.3）．C_1，

$C_2 > 0$ とすると，$\mathfrak{F}$ の任意の部分 σ-代数 $\mathfrak{G}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[X \mid \mathfrak{G}]] &= E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[1_{X>C_2} X \mid \mathfrak{G}]] + E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[1_{X\leq C_2} X \mid \mathfrak{G}]] \\
&\leq E[E[1_{X>C_2} X \mid \mathfrak{G}]] + E\left[\frac{1}{C_1} E[X \mid \mathfrak{G}] \cdot C_2\right] \\
&= E[1_{X>C_2} X] + \frac{C_2}{C_1} E[X]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．そこで，任意の $\epsilon > 0$ に対して，定数 $C_2 > 0$ を十分大きくとって $E[1_{X>C_2} X] \leq \epsilon$ となるようにし，これに対して定数 $C_1 > 0$ を十分大きくとって $(C_2/C_1)E[X] \leq \epsilon$ となるようにすれば，

$$
E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[X \mid \mathfrak{G}]] \leq 2\epsilon
$$

が成り立つ．よって，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ の全体は，一様可積分である． $\square$

2 確率過程

2.1 確率過程とフィルトレーション

定義 2.1（確率過程） 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可測空間 E に値をとる**確率過程**（stochastic process）とは，全順序集合 I で添字付けられた，$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の E 値確率変数の族 $X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ をいう．

定義 2.2（フィルトレーション） 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の**フィルトレーション**（filtration）とは，全順序集合 I で添字付けられた $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数の族 $\mathfrak{F}_\bullet = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ であって，増加である（すなわち，$s \leq t$ ならば $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$ である）ものをいう．このとき，組 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ を，**フィルトレーション付き確率空間**（filtered probability space）という．

定義 2.3（適合，発展的可測な確率過程） $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可測空間 E に値をとる確率過程とする．$t \in I$ に対する $(-\infty, t] = \{s \in I \mid s \leq t\}$ の全体が生成する σ-代数によって，I を可測空間とみなす．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$ **に適合する**（be adapted to $\mathfrak{F}_\bullet$），あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-適合**であるとは，任意の $t \in I$ に対して，X_t が $\mathfrak{F}_t$-可測であることをいう．

(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$ **に関して発展的可測**（progressively measurable with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$）である，あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-発展的可測**であるとは，任意の $t \in I$ に対して，$(-\infty, t] \times \Omega$ から E への写像 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ が可測であることをいう．

2.2 停止時刻

定義 2.4（停止時刻） $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathfrak{F}_\bullet$ **に関する停止時刻**（stopping time with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$），あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-停止時刻**とは，写像 $T\colon \Omega \to I$ であって，任意の $t \in I$ に対して $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ を満たすものをいう．

注意 2.5 I を全順序集合とし，これに新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．このとき，フィルトレーション $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$ に関する停止時刻の定義は，$\mathfrak{F}_\infty$ によらず，$(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ だけから定

まる．したがって，$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とするとき，「$\overline{I}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻」が曖昧さなく定義される．

命題 2.6 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．

(1) Ω から I への定値写像は，$\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である．

(2) I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻の空でない可算族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，各 $\omega \in \Omega$ に対して $T_{\max}(\omega) = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda(\omega) \in I$ が存在するとき，$T_{\max}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である．

(3) I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻の空でない有限族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$T_{\min} = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である．

証明 (1) 定義から明らかである．

(2) 各 $t \in I$ に対して $\{T_{\max} \le t\} = \bigcap_{\lambda\in\lambda}\{T_\lambda \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから，$T_{\max}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である．

(3) 各 $t \in I$ に対して $\{T_{\min} \le t\} = \bigcup_{\lambda\in\lambda}\{T_\lambda \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから（Λ が有限であることを用いた），$T_{\min}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である． □

停止時刻の典型例は，次の命題によって得られる．

命題 2.7 I を $\mathbb{R}_{\ge 0}$ の閉集合とし，I に新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を位相空間 E に値をとる $\mathfrak{F}_\bullet$-適合かつ連続な確率過程とする．F を E の閉集合であって，E 上のある実連続関数の零点集合として書ける[*1] 写像 $T_F \colon \Omega \to \overline{I}$ を

$$T_F = \inf\{t \in I \mid X_t \in F\}$$

と定めると，T_F は $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である．

証明 連続関数 $f \colon E \to [0,1]$ であって，$F = f^{-1}(\{0\})$ を満たすものをとる．$t \in I$ とする．$\omega \in \Omega$ を固定するとき，$T_F(\omega) \le t$ であるための必要十分条件は，関数 $s \mapsto f(X_s(\omega))$ が $I \cap [0,t]$ 上で最小値 0 をとることである．ここで，関数 $s \mapsto f(X_s(\omega))$ は連続だから，コンパクト集合 $I \cap [0,t]$ 上で必ず最小値をとる．したがって，この条件は，$\inf_{s\in I\cap[0,t]} f(X_s(\omega)) = 0$ といいかえられる．さらに，ふたたび連続性より，$I \cap [0,t]$ をその可算稠密部分集合 D_t で置き換えても，条件は変わらない．よって，

$$\{T_F \le t\} = \left\{\inf_{s\in D_t} f(X_s) = 0\right\} \in \mathfrak{F}_t$$

である．これが任意の $t \in I$ に対して成り立つから，T_F は $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である． □

定義 2.8（停止時刻に伴う σ-代数） $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．**I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻 T に伴う σ-代数 $\mathfrak{F}_T$** を，

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{F} \mid \text{任意の } t \in I \text{ に対して } A \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t\}$$

と定める．

注意 2.9 I を全順序集合とし，これに新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}, P)$ フィルトレーション付き確率空間とするとき，$\overline{I}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻（注意 2.5 で述べたように，この定義は，$\mathfrak{F}_\infty$ によらない）T に伴う σ-代数 $\mathfrak{F}_T$ の定義は，$(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ だけでなく，$\mathfrak{F}_\infty$ にもよる．

[*1] E が完全正規空間（距離化可能空間はこれに含まれる）ならば，すべての閉集合がこの性質を満たす．

命題 2.10 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．

(1) $t \in I$ に対する $(-\infty, t] = \{s \in I \mid s \leq t\}$ の全体が生成する σ-代数によって，I を可測空間とみなす．このとき，I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻 T は，$\mathfrak{F}_T$-可測である．

(2) I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻 S, T について，$S \leq T$ ならば，$\mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$ である．

(3) I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻の空でない有限族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，$T_{\min} = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ と置くと，$\mathfrak{F}_{T_{\min}} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ である．

(4) I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻 S, T について，$\{S \leq T\}$, $\{S = T\}$, $\{S \geq T\}$ は $\mathfrak{F}_{S\wedge T}$ に属する（命題 2.6 (3) より，$S \wedge T$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻であることに注意する）．

証明 (1) $s \in I$ とすると，任意の $t \in I$ に対して $\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\} \in \mathfrak{F}_{s\wedge t} \subseteq \mathfrak{F}_t$ だから，$\{T \leq s\}$ は $\mathfrak{F}_T$-可測である．よって，T は $\mathfrak{F}_T$-可測である．

(2) 定義から明らかである．

(3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$T_{\min} \leq T_\lambda$ だから，(1) より $\mathfrak{F}_{T_{\min}} \subseteq \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ である．よって，$\mathfrak{F}_{T_{\min}} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ である．一方で，$A \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ とすると，任意の $t \in I$ に対して

$$A \cap \{T_{\min} \leq t\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A \cap \{T_\lambda \leq t\}) \in \mathfrak{F}_t$$

だから，$A \in \mathfrak{F}_{T_{\min}}$ である．よって，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda} \subseteq \mathfrak{F}_{T_{\min}}$ である．これで，$\mathfrak{F}_{T_{\min}} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ が示された．

(4) $t \in I$ とすると，容易に確かめられるように，$S \wedge t$ と $T \wedge t$ は $\mathfrak{F}_t$-可測である．したがって，

$$\begin{aligned}\{S \leq T\} \cap \{S \leq t\} &= \{S \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t,\\ \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t\end{aligned}$$

である．これが任意の $t \in I$ に対して成り立つから，$\{S \leq T\} \in \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_{S\wedge T}$ である（(2) を用いた）．

同様にして，$\{S \geq T\} \in \mathfrak{F}_{S\wedge T}$ がわかり，$\{S = T\} = \{S \leq T\} \cap \{S \geq T\} \in \mathfrak{F}_{S\wedge T}$ を得る． □

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とするとき，可測空間 E に値をとる確率過程 $X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ と写像 $T\colon \Omega \to I$ に対して，写像 $X_T\colon \Omega \to E$ を，

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

と定める．本稿の以下の部分では，この記号を断りなく用いる．

命題 2.11 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を可測空間 E に値をとる $\mathfrak{F}_\bullet$-発展的可測な確率過程とし，T を I 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻とすると，写像 $X_T\colon \Omega \to E$ は $\mathfrak{F}_T$-可測である．

証明 $A \subseteq E$ を可測集合として，$\{X_T \in A\} \in \mathfrak{F}_T$ を示したい．$t \in I$ を任意にとり，$\Omega_t = \{T \leq t\}$ を $\mathfrak{F}_t$ の制限によって可測空間とみなす．写像 $\Phi_t\colon \Omega_t \to \Omega_t \times (-\infty, t]$ を $\Phi_t(\omega) = (\omega, T(\omega))$ と定めると，停止時刻の定義より，Φ_t は可測である．また，写像 $\Psi_t\colon \{T \leq t\} \times (-\infty, t] \to E$ を $\Psi_t(\omega, s) = X_s(\omega)$ と定めると，$X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-発展的可測であることより，Ψ_t は可測である．よって，

$$\{X_T \in A\} \cap \{T \leq t\} = \Phi_t^{-1}(\Psi_t^{-1}(A)) \in \mathfrak{F}_t$$

である．これが任意の $t \in T$ に対して成り立つから，X_T は $\mathfrak{F}_T$-可測である． □

2.3 マルチンゲール

定義 2.12（マルチンゲール，劣・優マルチンゲール） $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程とする．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$ **に関するマルチンゲール**（martingale with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$），あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-マルチンゲール**であるとは，すべての X_t が可積分であり，$s \leq t$ を満たす任意の s, $t \in I$ に対して

$$X_s = E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$$

が成り立つことをいう．

(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$ **に関する劣マルチンゲール**（submartingale with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$），あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-劣マルチンゲール**であるとは，すべての X_t が可積分であり，$s \leq t$ を満たす任意の s, $t \in I$ に対して

$$X_s \leq E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$$

が成り立つことをいう．

(3) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$ **に関する優マルチンゲール**（supermartingale with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$），あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-優マルチンゲール**であるとは，すべての X_t が可積分であり，$s \leq t$ を満たす任意の s, $t \in I$ に対して

$$X_s \geq E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$$

が成り立つことをいう．

命題 2.13 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程，$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とし，実確率過程 $\phi(X_\bullet) = (\phi(X_t))_{t\in I}$ を考える．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールであり，すべての $\phi(X_t)$ が可積分ならば，$\phi(X_\bullet)$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．

(2) ϕ が単調増加であるとする．このとき，$X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであり，すべての $\phi(X_t)$ が可積分ならば，$\phi(X_\bullet)$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．

証明 (1) または (2) の仮定の下で，$s \leq t$ を満たす任意の s, $t \in I$ に対して，

$$\phi(X_s) \leq \phi(E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]) \leq E[\phi(X_t) \mid \mathfrak{F}_s]$$

である（条件付き期待値に対する Jensen の不等式（命題 1.10）を用いた）．よって，$\phi(X_\bullet)$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである． □

系 2.14 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程とする．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールならば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$(X_\bullet - a)^+ = ((X_t - a)^+)_{t\in I}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．

(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールならば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-(X_\bullet - a)^- = (-(X_t - a)^-)_{t\in I}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．

証明 (1) 命題 2.13 (2) で $\phi(x) = (x-a)^+$ としたものである．

(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールならば，$-X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールだから，(1) より $(-X_\bullet + a)^+ = (X_\bullet - a)^-$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．よって，$-(X_\bullet - a)^-$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである． □

系 2.15 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールまたは非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであり，すべての X_t が p 乗可積分 ($p \in [1,\infty)$) ならば，$|X_\bullet|^p = (|X_t|^p)_{t\in I}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．

証明 命題 2.13 で $\phi(x) = |x|^p$ としたものである． □

命題 2.16 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールまたは $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールとすると，I において有界な（すなわち，上界と下界をもつ）部分集合 J について，

$$\sup_{t\in J} E[|X_t|] < \infty$$

が成り立つ．

証明 優マルチンゲール $X_\bullet$ については，$-X_\bullet$ を考えれば，劣マルチンゲールの場合に帰着する．そこで，以下では，$X_\bullet$ が劣マルチンゲールである場合を考える．

$X_\bullet$ と $X_\bullet^+ = (X_t^+)_{t\in I}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールだから（系 2.14 (1)），$E[X_t]$ と $E[X_t^+]$ は t に関して増加である．よって，J の I における下界 a と上界 b をとれば，任意の $t \in J$ に対して，

$$E[|X_t|] = 2E[X_t^+] - E[X_t] \leq 2E[X_b] - E[X_a] < \infty$$

となる． □

定義 2.17（独立増分過程） $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程 $X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ が **$\mathfrak{F}_\bullet$ に関する独立増分過程**（independent increments process with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$）である，あるいは **$\mathfrak{F}_\bullet$-独立増分過程**であるとは，$s \leq t$ を満たす任意の $s,\, t \in I$ に対して，$X_t - X_s$ が $\mathfrak{F}_s$ と独立であることをいう．

命題 2.18 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-独立増分過程とする．

(1) すべての X_t が可積分であり，$E[X_t]$ が $t \in I$ によらず一定ならば，$X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．
(2) すべての X_t が可積分であり，$E[X_t]$ が $t \in I$ に関して増加ならば，$X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．
(3) すべての X_t が可積分であり，$E[X_t]$ が $t \in I$ に関して減少ならば，$X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．

証明 すべての X_t が可積分であるとする．このとき，独立増分性より，$s \leq t$ を満たす任意の $s,\, t \in I$ に対して，

$$E[X_t \mid \mathfrak{F}_s] - X_s = E[X_t - X_s \mid \mathfrak{F}_s] = E[X_t - X_s] = E[X_t] - E[X_s]$$

が成り立つ（命題 1.6 (2)）．主張はここから従う． □

3　離散時間マルチンゲール

3.1　離散時間マルチンゲールの基本的性質

定義 3.1（予測可能な確率過程）　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．確率過程 $X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が $\mathfrak{F}_\bullet$ **に関して予測可能**（predictable with respect to $\mathfrak{F}_\bullet$）である，あるいは $\mathfrak{F}_\bullet$**-予測可能**であるとは，$X_0 = 0$ であり，かつ任意の整数 $t \geq 1$ に対して X_t が $\mathfrak{F}_{t-1}$-可測であることをいう．

定理 3.2（Doob 分解定理）　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathfrak{F}_\bullet$-適合かつ可積分な実確率過程 $X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲール $M_\bullet = (M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ と $\mathfrak{F}_\bullet$-予測可能かつ増加な実確率過程 $A_\bullet = (A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ であって，任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して

$$X_t = M_t + A_t$$

を満たすものが，無視可能な集合上の違いを除いて一意に存在する．さらに，この $M_\bullet$ と $A_\bullet$ は，

$$M_t = X_0 + \sum_{s=0}^{t-1}(X_{s+1} - E[X_{s+1} \mid \mathfrak{F}_s]), \qquad A_t = \sum_{s=0}^{t-1} E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s]$$

で与えられる．（これを，$X_\bullet$ の **Doob 分解**（Doob decomposition）という．）

証明　$M_\bullet$ と $A_\bullet$ が主張の条件を満たす $X_\bullet$ の分解を与えるとすると，各 $s \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s] = E[M_{s+1} - M_s \mid \mathfrak{F}_s] + E[A_{s+1} - A_s \mid \mathfrak{F}_s] = A_{s+1} - A_s$$

である．したがって，任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して，

$$A_t = \sum_{s=0}^{t-1} E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s]$$

および

$$\begin{aligned} M_t &= X_t - A_t \\ &= X_0 + \sum_{s=0}^{t-1}((X_{s+1} - X_s) - E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s]) \\ &= X_0 + \sum_{s=0}^{t-1}(X_{s+1} - E[X_{s+1} \mid \mathfrak{F}_s]) \end{aligned}$$

が成り立つ．逆に，$M_\bullet$ と $A_\bullet$ をこのように定めれば，主張の条件は明らかに満たされる．　□

注意 3.3　Doob 分解定理（定理 3.2）の状況で，$X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであるための必要十分条件は，$A_\bullet$ がほとんど確実に増加であることであり，$\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであるための必要十分条件は，$\mathfrak{A}_\bullet$ がほとんど確実に減少であることである．

命題 3.4　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程，各 $t \in \mathbb{N}$ に対して H_t を $\mathfrak{F}_t$-可測な有界実確率変数，Y_0 を $\mathfrak{F}_0$-可測かつ可積分な実確率変数として，実確率過程 $Y_\bullet = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を

$$Y_t = Y_0 + \sum_{s=0}^{t-1} H_s(X_{s+1} - X_s)$$

と定める．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールならば，$Y_\bullet$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．
(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであり，任意の $t \in \mathbb{N}$ に対してほとんど確実に $H_t \geq 0$ ならば，$Y_\bullet$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．
(3) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであり，任意の $t \in \mathbb{N}$ に対してほとんど確実に $H_t \geq 0$ ならば，$Y_\bullet$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．

証明　定義から明らかに，Y_t は $\mathfrak{F}_t$-可測である．また，各 $t \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[Y_{t+1} - Y_t \mid \mathfrak{F}_t] = E[H_t(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = H_t E[X_{t+1} - X_t \mid \mathfrak{F}_t]$$

であり，上式の最右辺は，(1) の場合 0，(2) の場合 0 以上，(3) の場合 0 以下となる．すなわち，それぞれの場合，$Y_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲール，$\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲール，$\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．□

系 3.5　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程，T を $\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻とし，実確率過程 $X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ を考える．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールならば，$X_{\bullet\wedge T}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．
(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールならば，$X_{\bullet\wedge T}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．
(3) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールならば，$X_{\bullet\wedge T}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．

証明　命題 3.4 で $H_t = 1_{t<T}$ としたものである．□

3.2　マルチンゲールに関する不等式

補題 3.6　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,n\}}, P)$（$n \in \mathbb{N}$）をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲール $X_\bullet = (X_t)_{t\in\{0,\dots,n\}}$ と $\{0,\dots,n\}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻 T に対して，

$$E[X_0] \leq E[X_T] \leq E[X_n]$$

が成り立つ．

証明　$(\mathfrak{F}_{t\wedge T})_{t\in\{0,\dots,n\}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールだから（系 3.5 (2)），

$$E[X_0] = E[X_{0\wedge T}] \leq E[X_{n\wedge T}] = E[X_T]$$

である．また，$X_T = \sum_{t=0}^{n} 1_{T=t} X_t$ であり，$\{T = t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから，

$$\begin{aligned} E[X_T] &= \sum_{t=0}^{n} E[1_{T=t} X_t] \\ &\leq \sum_{t=0}^{n} E[1_{T=t} E[X_n \mid \mathfrak{F}_t]] \\ &\leq \sum_{t=0}^{n} E[1_{T=t} X_n] \\ &= E[X_n] \end{aligned}$$

である．□

注意 3.7　補題 3.6 は，後に示す任意停止定理（定理 3.29）の系としても得られる．ここでは，極大不等式（命題 3.8）の証明に必要な部分だけを示した．

命題 3.8（極大不等式）　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとする．

(1) $X_n^* = \max_{t\in\{0,\dots,n\}}|X_t|$（$n \in \mathbb{N}$）と置くと，任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$P(X_n^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}(2E[X_n^+] - E[X_0])$$

が成り立つ．

(2) $X^* = \sup_{t\in\mathbb{N}}|X_t|$ と置くと，任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$P(X^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\left(2\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] - E[X_0]\right)$$

が成り立つ．

証明　(1)　まず，$A = \{\max_{t\in\{0,\dots,n\}} X_t \geq \lambda\}$ と置き，$P(A)$ を評価する．関数 $S\colon \Omega \to \{0,\dots,n\}$ を

$$S = \begin{cases} \min\{t \in \{0,\dots,n\} \mid X_t \geq \lambda\} & (\text{on } A) \\ n & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，S は $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻だから，補題 3.6 より

$$\begin{aligned} E[X_n] &\geq E[X_S] \\ &= E[1_A X_S] + E[1_{\Omega\setminus A} X_S] \\ &\geq \lambda P(A) + E[1_{\Omega\setminus A} X_n] \end{aligned}$$

であり，これを移項すれば

$$P(A) \leq \frac{1}{\lambda}(E[X_n] - E[1_{\Omega\setminus A} X_n]) = \frac{1}{\lambda}E[1_A X_n] \leq \frac{1}{\lambda}E[X_n^+] \tag{$*$}$$

を得る．

次に，$B = \{\min_{t\in\{0,\dots,n\}} X_t \leq -\lambda\}$ と置き，$P(B)$ を評価する．関数 $T\colon \Omega \to \{0,\dots,n\}$ を

$$T = \begin{cases} \min\{t \in \{0,\dots,n\} \mid X_t \leq -\lambda\} & (\text{on } B) \\ n & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，T は $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻だから，補題 3.6 より

$$\begin{aligned} E[X_0] &\leq E[X_T] \\ &= E[1_B X_T] + E[1_{\Omega\setminus B} X_T] \\ &\leq -\lambda P(B) + E[1_{\Omega\setminus B} X_n] \end{aligned}$$

であり，これを移項すれば

$$P(B) \leq \frac{1}{\lambda}(E[1_{\Omega\setminus B} X_n] - E[X_0]) \leq \frac{1}{\lambda}(E[X_n^+] - E[X_0]) \tag{$**$}$$

を得る．

$(*)$ と $(**)$ より，

$$P(X_n^*) \leq P(A) + P(B) \leq \frac{1}{\lambda}(2E[X_n^+] - E[X_0])$$

である．

(2)　事象 $\{X^* \geq \lambda\}$ は事象の増加列 $(\{X_n^* \geq \lambda\})_{n\in\mathbb{N}}$ の合併に含まれるから，(1) より，

$$P(X^* \geq \lambda) \leq \lim_{n\to\infty} P(X_n^* \leq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\left(2\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] - E[X_0]\right)$$

である．□

補題 3.9　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\ldots,n\}}, P)$（$n \in \mathbb{N}$）をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\{0,\ldots,n\}}$ を非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとし，$X_n^* = \max_{t\in\{0,\ldots,n\}} X_t$ と置く．関数 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は増加であり，$f(0) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$E\left[\int_0^{X_n^*} t\,df(t)\right] \leq E[X_n f(X_n^*)]$$

が成り立つ．

証明　一般性を失わず，$X_0 = 0$ と仮定する．各 $t \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$X_t^* = X_t$ ならば $\int_{X_{t-1}^*}^{X_t^*} t\,df(t) \leq X_t^*(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*)) = X_t(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))$ であり，そうでなければ $X_{t-1}^* = X_t^*$ より $\int_{X_{t-1}^*}^{X_t^*} t\,df(t) = 0$ である．いずれにしても

$$\int_{X_{t-1}^*}^{X_t^*} t\,df(t) \leq X_t(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))$$

だから，

$$E\left[\int_{X_{t-1}^*}^{X_t^*} t\,df(t)\right] \leq E[X_t(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))] \tag{$*$}$$

である．一方で，$X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールだから，

$$\begin{aligned} E[X_t(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))] &\leq E[E[X_n \mid \mathfrak{F}_t](f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))] \\ &= E[E[X_n(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*)) \mid \mathfrak{F}_t]] \\ &= E[X_n(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))] \end{aligned} \tag{$**$}$$

である．以上 $(*)$ と $(**)$ より，

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^{X_n^*} t\,df(t)\right] &= \sum_{t=1}^n E\left[\int_{X_{t-1}^*}^{X_t^*} t\,df(t)\right] \\ &\leq \sum_{t=1}^n E[X_n(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))] \\ &= E[X_n f(X_t^*)] \end{aligned}$$

を得る．□

命題 3.10（Doob の不等式）　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールまたは非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとする．$p \in (1, \infty)$ とする．

(1) $X_n^* = \max_{t\in\{0,\dots,n\}}|X_t|$（$n\in\mathbb{N}$）と置くと，

$$\|X_n^*\|_p \le \frac{p}{p-1}\|X_n\|_p$$

が成り立つ．

(2) $X^* = \sup_{t\in\mathbb{N}}|X_t|$ と置くと，

$$\|X^*\|_p \le \frac{p}{p-1}\limsup_{n\to\infty}\|X_n\|_p$$

が成り立つ．

証明　(1)　$X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールでも非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールでも，$|X_\bullet|$ は非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである（系 2.15）．そこで，$|X_\bullet|$ に対して補題 3.9 を適用し，$f(x)=x^{p-1}$ とすれば，

$$\frac{p-1}{p}\|X_n^*\|_p^p \le E[|X_n|(X_n^*)^{p-1}]$$

を得る．上式の左辺は，Hölder の不等式を用いて

$$E[|X_n|(X_n^*)^{p-1}] \le \|X_n\|_p\|(X_n^*)^{p-1}\|_{p/(p-1)} = \|X_n\|_p\|X_n^*\|_p^{p-1}$$

と評価できるから，

$$\frac{p-1}{p}\|X_n^*\|_p^p \le \|X_n\|_p\|X_n^*\|_p^{p-1}$$

である．上式の両辺を $\|X_n^*\|_p^{p-1}$ で割り，左辺の係数を右辺に移項すれば，主張の不等式を得る．

(2)　確率変数の増加列 $(X_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ の各点収束極限が X^* だから，単調収束定理と (1) より，

$$\|X^*\|_p = \lim_{n\to\infty}\|X_n^*\|_p \le \frac{p}{p-1}\limsup_{n\to\infty}\|X_n\|_p$$

である．□

3.3　マルチンゲール収束定理

$a,b\in\mathbb{R}$ かつ $a<b$ とするとき，全順序集合 I で添字付けられた実数列 $(x_t)_{t\in I}$ の a から b への**上渡回数**（upcrossing number）$U_{a,b}(x_0,\dots,x_n)\in\overline{\mathbb{N}}$ を，条件

> I の元の狭義増加列 $s_1<t_1<\dots<s_k<t_k$ であって，任意の $i\in\{1,\dots,k\}$ に対して $x_{s_i}\le a$ かつ $x_{t_i}\ge b$ を満たすものが存在する

を満たす $k\in\mathbb{N}$ の上限と定義する．

補題 3.11　無限実数列 $(x_0,x_1,\dots)$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $(x_0,x_1,\dots)$ は $\overline{\mathbb{R}}$ において収束する．
(b) $a<b$ を満たす任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して，$U_{a,b}(x_0,x_1,\dots)<\infty$ である．
(c) $\mathbb{R}$ のある稠密部分集合 D が存在して，$a<b$ を満たす任意の $a,b\in D$ に対して，$U_{a,b}(x_0,x_1,\dots)<\infty$ である．

証明　容易に確かめられる．□

補題 3.12（上渡回数不等式） $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとする．$a, b \in \mathbb{R}$ かつ $a < b$ とする．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，上渡回数を与える確率変数 $U_{a,b}(X_0, \dots, X_n)$ は $\mathfrak{F}_n$-可測であり，

$$E[U_{a,b}(X_0, \dots, X_n)] \leq \frac{1}{b-a}(E[(X_n - a)^+] - E[(X_0 - a)^+])$$

を満たす．

(2) 上渡回数を与える確率変数 $U_{a,b}(X_0, X_1, \dots)$ は $\mathfrak{F}$-可測であり，

$$E[U_{a,b}(X_0, X_1, \dots)] \leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E[(X_n - a)^+] - E[(X_0 - a)^+]\right)$$

を満たす．

証明 (1) $Y_t = (X_t - a)^+/(b-a)$ と置くと，$Y_\bullet = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである（系 2.14）．$U_{a,b}(X_0, \dots, X_n) = U_{0,1}(Y_0, \dots, Y_n)$ だから，示すべき不等式は，

$$E[U_{0,1}(Y_0, \dots, Y_n)] \leq E[Y_n] - E[Y_0]$$

と書き換えられる．以下，これを示す．

写像 $S_i, T_i \colon \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$（$i \in \mathbb{N}$）を再帰的に

$$\begin{aligned} S_i &= \inf\{t \in \mathbb{N} \mid t > T_{i-1}\text{（}i = 0\text{ のときはこの条件は考えない）かつ } X_t \leq b\}, \\ T_i &= \inf\{t \in \mathbb{N} \mid t > S_i \text{ かつ } X_t \geq a\} \end{aligned}$$

と定めると，容易に確かめられるように，これらは $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻である．次に，各 $t \in \mathbb{N}$ に対して，

$$H_t = \begin{cases} 1 & (t \in \bigcup_{i=0}^\infty [S_i, T_i)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，これは $\bigcup_{i=0}^\infty (\{S_i \leq t\} \setminus \{T_i \leq t\}) \in \mathfrak{F}_t$ の定義関数だから，$\mathfrak{F}_t$-可測である．以上の準備の下で，上渡回数 $U_{0,1}(Y_0, \dots, Y_n)$ は

$$\begin{aligned} U_{0,1}(Y_0, \dots, Y_n) &\geq \sum_{i=0}^\infty (Y_{T_i\wedge n} - Y_{S_i\wedge n}) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} H_t(Y_{t+1} - Y_t) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (Y_{t+1} - Y_t) - \sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t) \\ &= Y_n - Y_0 - \sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t) \end{aligned}$$

と評価でき，この両辺の期待値をとれば，

$$E[U_{0,1}(Y_0, \dots, Y_n)] \leq E[Y_n] - E[Y_0] - E\left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t)\right]$$

を得る．一方で，命題 3.4 より $(\sum_{t=0}^{n-1}(1-H_t)(Y_{t+1}-Y_t))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールだから，

$$E\left[\sum_{t=0}^{n-1}(1-H_t)(Y_{t+1}-Y_t)\right] \geq 0$$

である．これら 2 式から，示すべき不等式を得る．

(2) $(U_{a,b}(X_0,\dots,X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{F}$-可測関数の増加列であり，その各点収束極限が $U_{a,b}(X_0,X_1,\dots)$ である．よって，$U_{a,b}(X_0,X_1,\dots)$ は $\mathfrak{F}$-可測であり，単調収束定理と (1) より，

$$\begin{aligned}E[U_{a,b}(X_0,X_1,\dots)] &= \lim_{n\to\infty} E[U_{a,b}(X_0,\dots,X_n)] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E[(X_n-a)^+] - E[(X_0-a)^+]\right)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 3.13（マルチンゲール収束定理） $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}}\mathfrak{F}_t$ と置く．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとし，$(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ は L^1 有界であるとする．このとき，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に概収束する．

証明 $a<b$ を満たす任意の $a,\, b\in\mathbb{R}$ に対して，上渡回数不等式（補題 3.12 (2)）と $(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ の L^1 有界性より

$$\begin{aligned}E[U_{a,b}(X_0,X_1,\dots)] &\leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E[(X_n-a)^+] - E[(X_0-a)^+]\right) \\ &\leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] + |a|\right) \\ &< \infty\end{aligned}$$

だから，$U_{a,b}(X_0,X_1,\dots)$ はほとんど確実に有限である．したがって，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，$a<b$ を満たす任意の $a,\, b\in\mathbb{Q}$ に対して $U_{a,b}(X_0(\omega),X_1(\omega),\dots)<\infty$ となる．補題 3.11 より，このような ω については，$(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{N}}$ は $\overline{\mathbb{R}}$ において収束する．よって，$X=\liminf_{t\to\infty}X_t$ と置けば，X は $\mathfrak{F}_\infty$-可測であり，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は X に概収束する．

Fatou の補題と $(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ の L^1 有界性より，

$$E[X^+] \leq \liminf_{t\to\infty} E[X_t^+] < \infty$$

である．また，Fatou の補題，任意の $t\in\mathbb{N}$ に対して $E[X_t]\geq E[X_0]$ であること，$(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ の L^1 有界性を順に用いて，

$$\begin{aligned}E[X^-] &\leq \liminf_{n\to\infty} E[X_t^-] \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}(E[X_t^+]-E[X_t]) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} E[X_t^+]-E[X_0] \\ &< \infty\end{aligned}$$

を得る．よって，$E[|X|]=E[X^+]+E[X^-]<\infty$ だから，X はほとんど確実に有限であり，X の値 ∞ を適当な有限値（たとえば 0）で置き換えれば，$X\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ となる． □

マルチンゲール収束定理（定理 3.13）の状況で，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が X に L^1 収束する，あるいは L^p 収束するための必要十分条件を考える．

命題 3.14 $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty=\bigvee_{t\in\mathbb{N}}\mathfrak{F}_t$ と置く．$X_\bullet=(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールまたは $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールとする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である．

(b) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束かつ概収束する．

(c) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束する．

証明 優マルチンゲール $X_\bullet$ については，$-X_\bullet$ を考えれば，劣マルチンゲールの場合に帰着する．そこで，以下では，$X_\bullet$ が劣マルチンゲールである場合を考える．

(a) $\Longrightarrow$ (b) マルチンゲール収束定理（定理 3.13）より，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in L^1(\Omega,\mathfrak{F},P)$ に概収束する．$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が一様可積分であるとすると，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は X に L^1 収束もする．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) 一般に，L^1 収束する確率変数列は，一様可積分である． □

命題 3.15 $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty=\bigvee_{t\in\mathbb{N}}\mathfrak{F}_t$ と置く．$X_\bullet=(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールまたは非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとし，すべての X_t は p 乗可積分($p\in(1,\infty)$)であるとする．このとき，次の 4 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は L^p 有界である．

(b) $X^*=\sup_{t\in\mathbb{N}}|X_t|$ は p 乗可積分である．

(c) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^p 収束かつ概収束する．

(d) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^p 収束する．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が L^p 有界であるとすると，Doob の不等式（命題 3.10 (2)）より，

$$\|X^*\|_p\leq\frac{p}{p-1}\limsup_{n\in\mathbb{N}}\|X_n\|_p<\infty$$

が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (c) X^* が p 乗可積分であるとする．このとき，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は L^p 有界であり，特に L^1 有界だから，マルチンゲール収束定理（定理 3.13）より，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X\in L^1(\Omega,\mathfrak{F},P)$ に概収束する．任意の $t\in\mathbb{N}$ に対して $|X_t-X|\leq 2X^*$ だから，Lebesgue の収束定理より，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は X に L^p 収束もする．

(c) $\Longrightarrow$ (d) 明らかである．

(d) $\Longrightarrow$ (a) 一般に，L^p 収束する確率変数列は，L^p 有界である． □

系 3.16 $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールまたは非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲール $X_\bullet=(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が L^p 有界（$p\in(1,\infty)$）ならば，T を $\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻に対して，$X_{\bullet\wedge T}=(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ も L^p 有界である．

証明 命題 3.15 の (a) $\Longleftrightarrow$ (b) から従う． □

注意 3.17 後に系 3.27 や系 3.31 で示すように，系 3.16 において「L^p 有界」を「一様可積分」に置き換えた主張も成り立つ．

（劣）マルチンゲール $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ に対して，X_∞ を適当に定めて $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ が（劣）マルチンゲールとなるようにできるための必要十分条件を考える．

命題 3.18 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールとする．このとき，次の 4 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である．
(b) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．
(c) $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束する．
(d) ある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールとなる．

さらに，これらの条件の下で，(b), (c), (d) の X_∞ は共通であり，無視可能な集合上の違いを除いて一意に定まる．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)　命題 3.14 ですでに示した．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が X_∞ に L^1 収束するとする．$s \in \mathbb{N}$ を固定すると，$t \geq s$ を満たす任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して $E[X_t \mid \mathfrak{F}_s] = X_s$ だから，$E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_s] = X_s$ である（命題 1.3）．よって，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールであるとすると，任意の $t \in \mathbb{N}$ に対して $X_t = E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_t]$ が成り立つ．よって，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である（命題 1.13）．

<u>最後の主張</u>　(b), (c) の条件を満たす X_∞ が無視可能な集合上の違いを除いて一意に定まることは明らかである．また，(b) の条件を満たす X_∞ が (c) の条件も満たすことは明らかであり，(c) の条件を満たす X_∞ が (d) の条件も満たすことは，(c) $\Longrightarrow$ (d) の証明で示されている．あとは，X_∞ が (d) の条件を満たすとして，これが (b) の条件も満たすことを示せばよい．

$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールであるとすると，すでに示した主張より，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．$s \in \mathbb{N}$ と $A \in \mathfrak{F}_s$ を固定すると，$t \geq s$ を満たす任意の $t \in \overline{\mathbb{N}}$ に対して，

$$E[1_A X_t] = E[E[1_A X_t \mid \mathfrak{F}_s]] = E[1_A E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]] = E[1_A X_s]$$

となる．特に，$E[1_A X_\infty] = E[1_A X_s]$ である．一方で，$t \to \infty$ とすれば，$E[1_A X] = E[1_A X_w]$ を得る．したがって，

$$E[1_A X_\infty] = E[1_A X]$$

である．上式は任意の $A \in \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_s$ に対して成り立つが，Dynkin 族補題より，任意の $A \in \mathfrak{F}_\infty$ に対しても成り立つことがわかる．X_∞ と X はともに $\mathfrak{F}_\infty$-可測だから，これより，$X_\infty = X$ である．よって，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は X_∞ に L^1 収束かつ概収束する．□

系 3.19 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．X を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数とすると，$(E[X \mid \mathfrak{F}_t])_{t\in\mathbb{N}}$ は $E[X \mid \mathfrak{F}_\infty]$ に L^1 収束かつ概収束する．

証明 $(E[X \mid \mathfrak{F}_t])_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールだから，主張は命題 3.18 から従う．□

命題 3.20 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとする．このとき，次の 4 条件は同値である．

(a) $(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である．

(b) $(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．

(c) $(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束する．

(d) ある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとなる．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)　命題 3.14 ですでに示した．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ が X_∞ に L^1 収束するとする．$s\in\mathbb{N}$ を固定すると，$t\geq s$ を満たす任意の $t\in\mathbb{N}$ に対して $E[X_t^+ \mid \mathfrak{F}_s] \geq E[X_t \mid \mathfrak{F}_s] \geq X_s$ だから，$E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_s] \geq X_s$ である（命題 1.3）．よって，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであるとすると，$(X_t^+)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとなるから（系 2.14 (1)），任意の $t\in\mathbb{N}$ に対して $0\leq X_t^+ \leq E[X_\infty^+ \mid \mathfrak{F}_t]$ が成り立つ．$(E[X_\infty^+ \mid \mathfrak{F}_t])_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分だから（命題 1.13），$(X_t^+)_{t\in\mathbb{N}}$ も一様可積分である． □

3.4　逆向きマルチンゲール収束定理

本小節では，$-\mathbb{N}$ で添字付けられた（劣・優）マルチンゲールに関する収束定理を示す．

補題 3.21（逆向き上渡回数不等式）　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in-\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとする．$a<b$ を満たす a, $b\in\mathbb{R}$ に対して，上渡回数を与える確率変数 $U_{a,b}(\dots, X_{-1}, X_0)$ は $\mathfrak{F}$-可測であり，

$$E[U_{a,b}(\dots, X_{-1}, X_0)] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_0 - a)^+]$$

を満たす．

証明　$(U_{a,b}(X_n, \dots, X_0))_{n\in-\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{F}$-可測関数の減少列（n が小さくなるほど増加する列）であり，その $n\to-\infty$ における各点収束極限が $U_{a,b}(\dots, X_{-1}, X_0)$ である．よって，$U_{a,b}(\dots, X_{-1}, X_0)$ は $\mathfrak{F}$-可測であり，単調収束定理と上渡回数不等式（補題 3.12 (1)）より，

$$\begin{aligned}
E[U_{a,b}(\dots, X_{-1}, X_0)] &= \lim_{n\to-\infty} E[U_{a,b}(X_n, \dots, X_0)] \\
&\leq \frac{1}{b-a}\left(E[(X_0 - a)^+] - \inf_{n\in-\mathbb{N}} E[(X_n - a)^+]\right) \\
&\leq \frac{1}{b-a} E[(X_0 - a)^+]
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 3.22（逆向きマルチンゲール収束定理）　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in-\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_{-\infty} = \bigwedge_{t\in-\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．$X_\bullet = (X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとする．このとき，次の 5 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ は一様可積分である．

(b) $(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ は L^1 有界である．

(c) $\inf_{t\in-\mathbb{N}} E[X_t] > -\infty$ である．

(d) $(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ はある $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_{-\infty}, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．

(e) $(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ はある $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_{-\infty}, P)$ に L^1 収束する．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) $\inf_{t\in-\mathbb{N}} E[X_t] > -\infty$ であると仮定する．$\epsilon > 0$ を任意にとる．定数 $C > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} E[1_{|X_t|>C}|X_t|] &= E[1_{X_t>C}X_t] - E[1_{X_t<-C}X_t] \\ &= E[1_{X_t>C}X_t] + E[1_{X_t\geq -C}X_t] - E[X_t] \end{aligned}$$

である．この 3 項をそれぞれ評価する．まず，仮定より，十分小さい $t_0 \in -\mathbb{N}$ をとれば，任意の $t \leq t_0$ に対して

$$E[X_t] \geq E[X_{t_0}] - \epsilon$$

が成り立つ．一方で，任意の $t \leq t_0$ に対して，$X_t \leq E[X_{t_0} \mid \mathfrak{F}_t]$ だから，

$$\begin{aligned} E[1_{X_t>C}X_t] &\leq E[1_{X_t>C}X_{t_0}], \\ E[1_{X_t\geq -C}X_t] &\leq E[1_{X_t\geq -C}X_{t_0}] \end{aligned}$$

である．これらの不等式から，任意の $t \leq t_0$ に対して，$E[1_{|X_t|>C}|X_t|]$ は

$$\begin{aligned} E[1_{|X_t|>C}|X_t|] &= E[1_{X_t>C}X_t] + E[1_{X_t\geq -C}X_t] - E[X_t] \\ &\leq E[1_{X_t>C}X_{t_0}] + E[1_{X_t\geq -C}X_{t_0}] - E[X_{t_0}] + \epsilon \\ &= E[1_{X_t>C}X_{t_0}] - E[1_{X_t<-C}X_{t_0}] + \epsilon \\ &\leq E[1_{|X_t|>C}|X_{t_0}|] + \epsilon \end{aligned} \tag{$*$}$$

と評価できる．一方で，

- L^1 関数の絶対連続性より，ある $\delta > 0$ が存在して，$P(A) \leq \delta$ を満たす任意の $A \in \mathfrak{F}$ の対して，$E[1_A|X_{t_0}|] \leq \epsilon$ が成り立つことと，
- 仮定より，$C \to \infty$ のとき

  $$\sup_{t\in-\mathbb{N}} P(|X_t| > C) = \frac{1}{C} \sup_{t\in-\mathbb{N}} E[|X_t|] \to 0$$

  であること

から，C が十分大きければ，任意の $t \in -\mathbb{N}$ に対して

$$E[1_{|X_t|>C}|X_{t_0}|] \leq \epsilon \tag{$**$}$$

が成り立つ．以上 ($*$) と ($**$) より，C が十分大きければ，任意の $t \leq t_0$ に対して

$$E[1_{|X_t|>C}|X_t|] \leq 2\epsilon$$

が成り立つ．よって，$(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ は一様可積分である．

(a) $\Longrightarrow$ (d) $(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ が一様可積分であるとする．このとき，$(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ がある $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる $\mathfrak{F}_{-\infty}$-可測な確率変数 X に概収束することがわかれば，X が可積分（特に，ほとんど確実に有限）であり，$(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ が X に L^1 収束することが自動的に従う．そこで，以下ではこの概収束を示す．

$a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，逆向き上渡回数不等式（補題 3.21）より

$$E[U_{a,b}(\ldots, X_{-1}, X_0)] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_0 - a)^+] < \infty$$

だから，$U_{a,b}(\dots,X_{-1},X_0)$ はほｔんど確実に有限である．したがって，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，$a<b$ を満たす任意の $a,b\in\mathbb{Q}$ に対して $U_{a,b}(\dots,X_{-1}(\omega),X_0(\omega))<\infty$ となる．補題 3.11 より，このような ω については，$(X_t(\omega))_{t\in-\mathbb{N}}$ は $\overline{\mathbb{R}}$ において収束する．よって，$X=\liminf_{t\to-\infty}X_t$ と置けば，X は $\mathfrak{F}_{-\infty}$-可測であり，$(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ は X に概収束する．

(d) $\Longrightarrow$ (e)　明らかである．

(e) $\Longrightarrow$ (a)　一般に，L^1 収束する確率変数列は，一様可積分である．□

系 3.23　$(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in-\mathbb{N}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_{-\infty}=\bigwedge_{t\in-\mathbb{N}}\mathfrak{F}_t$ と置く．このとき，$\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲール $X_\bullet=(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ は，ある $X\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_{-\infty},P)$ に L^1 収束かつ概収束する．

証明　$\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲール $X_\bullet$ は，任意の $t\in-\mathbb{N}$ に対して $E[X_t]=E[X_0]$ を満たすから，主張は逆向きマルチンゲール収束定理（定理 3.22）から従う．□

3.5　マルチンゲールに対する任意停止定理

補題 3.24　$(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet=(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程，T を $\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻とする．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールならば，$X_T=E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_T]$ である．
(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールならば，$X_T\le E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_T]$ である．
(3) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールならば，$X_T\ge E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_T]$ である．

証明　(1)　各 $t\in\overline{\mathbb{N}}$ について，$1_{T=t}X_t$ と $1_{T=t}E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_T]=E[1_{T=t}X_\infty\mid\mathfrak{F}_T]$（命題 2.10 (1) より，$\{T=t\}$ が $\mathfrak{F}_T$-可測であることを用いた）が等しいことを示したい．そのためには，任意の $A\in\mathfrak{F}_T$ に対して，$E[1_A1_{T=t}X_t]=E[1_{A\cap\{T=t\}}X_t]$ と $E[1_A1_{T=t}X_\infty]=E[1_{A\cap\{T=t\}}X_\infty]$ が等しいことをいえばよい．ところが，$A\cap\{T=t\}\in\mathfrak{F}_t$ だから，$X_t=E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_t]$ より $E[1_{A\cap\{T=t\}}X_t]=E[1_{A\cap\{T=t\}}X_\infty]$ である．

(2), (3)　(1) と同様の議論で証明できる．□

定理 3.25（マルチンゲールに対する任意停止定理）　$(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet=(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールとする．$\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻 S,T に対して，X_T は可積分であり，

$$X_{S\wedge T}=E[X_T\mid\mathfrak{F}_S]$$

が成り立つ．

証明　X_T が可積分であることは，補題 3.24 (1) から従う．以下，主張の等式を示す．

まず，S が定値 $s\in\overline{\mathbb{N}}$ である場合の主張，すなわち，$X_{s\wedge T}=E[X_T\mid\mathfrak{F}_s]$ であることを示す．そのためには，任意の $A\in\mathfrak{F}_s$ に対して，$E[1_AX_{s\wedge T}]=E[1_AX_T]$ であることをいえばよい．$E[1_AX_T]$ を

$$E[1_AX_T]=E[1_{A\cap\{T\le s\}}X_T]+E[1_{A\cap\{T>s\}}X_T]$$

と分割する．まず，$1_{A\cap\{T\le s\}}X_T=1_{A\cap\{T\le s\}}X_{s\wedge T}$ だから，

$$E[1_{A\cap\{T\le s\}}X_T]=E[1_{A\cap\{T\le s\}}X_{s\wedge T}]\tag{$*$}$$

である．次に，$E[1_{A\cap\{T>s\}}X_T]$ を変形する．A, $\{T>s\}\in\mathfrak{F}_s$ だから，$A\cap\{T>s\}\in\mathfrak{F}_s$ である．また，$t\in\overline{\mathbb{N}}$ について，$t\le s$ ならば $A\cap\{T>s\}\cap\{T\le t\}=\emptyset$ であり，$t>s$ ならば $A\cap\{T>s\}\in\mathfrak{F}_s\subseteq\mathfrak{F}_t$ か

つ $\{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ であることより $A \cap \{T > s\} \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから，$A \cap \{T > s\} \in \mathfrak{F}_T$ である．したがって，$A \cap \{T > s\} \in \mathfrak{F}_s \cap \mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_{s\wedge T}$（命題 2.10 (3)）だから，

$$\begin{aligned} E[1_{A\cap\{T>s\}} X_T] &= E[E[1_{A\cap\{T>s\}} X_T \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}]] \\ &= E[1_{A\cap\{T>s\}} E[X_T \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}]] \end{aligned}$$

となる．さらに，補題 3.24 (1) より，

$$E[X_T \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}] = E[E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_T] \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}] = E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}] = X_{s\wedge T}$$

が成り立つ[*2]．これら 2 式より，

$$E[1_{A\cap\{T>s\}} X_T] = E[1_{A\cap\{T>s\}} X_{s\wedge T}] \tag{$**$}$$

を得る．以上 $(*)$ と $(**)$ より，$E[1_A X_T] = E[1_A X_{s\wedge T}]$ が成り立つ．

次に，一般の場合の主張を示す．系 3.5 (1) と前段の結果より，$X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．よって，$X_{\bullet\wedge T}$ に補題 3.24 (1) を適用して，

$$E[X_T \mid \mathfrak{F}_S] = X_{S\wedge T} = E[X_{\infty\wedge T} \mid \mathfrak{F}_S]$$

を得る． □

系 3.26 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X_\bullet = (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールとし，T を $\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻とすると，$X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである．

証明 任意停止定理（定理 3.25）より，$s \le t$ を満たす任意の $s, t \in \overline{\mathbb{N}}$ に対して，$X_{s\wedge T} = E[X_{t\wedge T} \mid \mathfrak{F}_s]$ である．すなわち，$X_{\bullet\wedge T}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールである． □

系 3.27 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲール $X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が一様可積分ならば，T を $\mathbb{N}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻に対して，$X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ も一様可積分である．

証明 $\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が一様可積分ならば，命題 3.18 より，ある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールとなる．系 3.26 より，$(X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールだから，ふたたび命題 3.18 より，$(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である． □

3.6 劣・優マルチンゲールに対する任意停止定理

補題 3.28 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ は非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであり，$X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に概収束するとする．このとき，次が成り立つ．

(1) $E[X_T] \le E[X_0]$ である．特に，X_T は可積分である．

(2) $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．

[*2] $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである場合，同様に補題 3.24 (2) を使おうとすると，$E[X_T \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}] \le E[E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_T] \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}] = E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_{s\wedge T}] \ge X_{s\wedge T}$ となってしまい，全体としての不等式が示せない．優マルチンゲールについても同様である．そのため，劣・優マルチンゲールに対する任意停止定理（定理 3.29）を示すためには，この証明とは別の議論が必要になる．

証明　(1)　$(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ は $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$-優マルチンゲールだから（系 3.5 (3)），任意の $t\in\mathbb{N}$ に対して，

$$E[X_{t\wedge T}] \leq E[X_{0\wedge T}] = E[X_0]$$

である．$(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ は X_T に概収束するから，Fatou の補題より，

$$E[X_T] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_{n\wedge T}] \leq E[X_0]$$

を得る．

(2)　$s\in\mathbb{N}$ とする．任意の $A\in\mathfrak{F}_s$ に対して，$t\geq s$ ならば $E[X_t \mid \mathfrak{F}_s] \leq X_s$ より $E[1_A X_t] \leq E[1_A X_s]$ だから，Fatou の補題と合わせて

$$E[1_A X_\infty] \leq \liminf_{t\to\infty} E[1_A X_t] \leq E[1_A X_s]$$

を得る．したがって，$E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_s] \leq X_s$ である．よって，$(X_s)_{s\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．□

定理 3.29（劣・優マルチンゲールに対する任意停止定理）　$(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程，S, T を $\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻とする．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールならば，X_T は可積分であり，$X_{S\wedge T} \leq E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つ．

(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールならば，X_T は可積分であり，$X_{S\wedge T} \geq E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つ．

証明　(I)　$X_\bullet$ が非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであり，かつ $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が X_∞ に概収束するとして，X_T が可積分であり，$X_{S\wedge T} \geq E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つことを示す．

X_T が可積分であることは，補題 3.28 (1) ですでに示した．$(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであり（系 3.5 (3)），$X_T \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に概収束するから，補題 3.28 (2) より，$(X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．よって，補題 3.24 (3) より，

$$E[X_T \mid \mathfrak{F}_S] = E[X_{\infty\wedge T} \mid \mathfrak{F}_S] \geq X_{S\wedge T}$$

である．

(II)　$X_\bullet$ が非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであるとして，X_T が可積分であり，$X_{S\wedge T} \geq E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つことを示す．

まず，S が定値 $s\in\overline{\mathbb{N}}$ である場合の主張，すなわち，$X_{s\wedge T} \geq E[X_T \mid \mathfrak{F}_s]$ であることを示す．$\mathfrak{F}'_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．マルチンゲール収束定理（定理 3.13）を $-X_\bullet$ に適用すれば，$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ がある $X'_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}'_\infty,P)$ に概収束することがわかる．$t\in\mathbb{N}$ に対しては $\mathfrak{F}'_t = \mathfrak{F}_t$ かつ $X'_t = X_t$ と定めると，$X'_\bullet = (X'_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}'_\bullet$-優マルチンゲールだから（補題 3.28 (2)），(I) より

$$X'_T \text{ は可積分}\quad \text{かつ}\quad X'_{s\wedge T} \geq E[X'_T \mid \mathfrak{F}_s] \tag{$*$}$$

である．$|X_T| \leq |X'_T| \vee |X_\infty|$ だから，X_T も可積分である．一方で，$X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールだから，任意の $t\in\mathbb{N}$ に対して $E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_t] \leq X_t$ であり，$t\to\infty$ とすれば，$E[X_\infty \mid \mathfrak{F}'_\infty] \leq X'_\infty$ を得る．これより，任意の $A\in\mathfrak{F}'_\infty$ に対して

$$\begin{aligned} E[1_A X_T] &= E[1_{A\cap\{T<\infty\}} X_T] + E[1_{A\cap\{T=\infty\}X_T}] \\ &\leq E[1_{A\cap\{T<\infty\}} X'_T] + E[1_{A\cap\{T=\infty\}X'_T}] \\ &= E[1_A X'_T] \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$E[X_T \mid \mathfrak{F}'_\infty] \le X'_T \tag{$**$}$$

である．以上 ($**$) と ($*$) を順に用いれば，

$$\begin{aligned} E[X_T \mid \mathfrak{F}_s] &= E[E[X_T \mid \mathfrak{F}'_\infty] \mid \mathfrak{F}_s] \\ &\le E[X'_T \mid \mathfrak{F}_s] \\ &\le X'_{s\wedge T} \\ &= X_{s\wedge T} \end{aligned}$$

を得る．

次に，一般の場合の主張を示す．系 3.5 (3) と前段の結果より，$X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．よって，$X_{\bullet\wedge T}$ に補題 3.24 (3) を適用して，

$$E[X_T \mid \mathfrak{F}_S] = E[X_{\infty\wedge T} \mid \mathfrak{F}_S] \le X_{S\wedge T}$$

を得る．

(III)　$X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであるとして，X_T が可積分であり，$X_{S\wedge T} \le E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つことを示す（優マルチンゲールに関する主張は，-1 倍すれば，劣マルチンゲールに関する主張に帰着する）．

実確率過程 $M_\bullet = (M_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ と $Y_\bullet = (Y_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を

$$M_t = E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_t], \qquad Y_t = E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_t] - X_t$$

と定める．すると，$M_\bullet$ は定義より $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールだから，マルチンゲールに対する任意停止定理（定理 3.25）より，

$$M_T \text{ は可積分} \quad \text{かつ} \quad M_{S\wedge T} = E[M_T \mid \mathfrak{F}_S] \tag{$***$}$$

である．また，$M_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-マルチンゲールであり，$X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールであることから，$Y_\bullet = M_\bullet - X_\bullet$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールであり，さらに $Y_t = E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_t] - X_t \ge 0$ である．したがって，(II) より，

$$Y_T \text{ は可積分} \quad \text{かつ} \quad Y_{S\wedge T} \ge E[Y_T \mid \mathfrak{F}_S] \tag{$****$}$$

である．以上 ($***$) と ($****$) より，

$$X_T \text{ は可積分} \quad \text{かつ} \quad X_{S\wedge T} \le E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$$

であることを得る．　□

系 3.30　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X_\bullet = (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を $\mathfrak{F}_\bullet$-適合な実確率過程，T を $\overline{\mathbb{N}}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻として，実確率過程 $X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ を考える．

(1) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールならば，$X_{\bullet\wedge T}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．
(2) $X_\bullet$ が $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールならば，$X_{\bullet\wedge T}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-優マルチンゲールである．

証明　(1)　定理 3.25 より，$s \le t$ を満たす任意の $s, t \in \overline{\mathbb{N}}$ に対して，$X_{s\wedge T} \le E[X_{t\wedge T} \mid \mathfrak{F}_s]$ である．すなわち，$X_{\bullet\wedge T}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールである．

(2)　$X_\bullet$ の代わりに $-X_\bullet$ を考えれば，(1) に帰着する．　□

系 3.31　$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．非負の $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲール $X_\bullet = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が一様可積分ならば，T を $\mathbb{N}$ 値 $\mathfrak{F}_\bullet$-停止時刻に対して，$X_{\bullet\wedge T} = (X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ も一様可積分である．

証明　$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置く．$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が一様可積分ならば，命題 3.20 より，ある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ は $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールとなる．系 3.30 より，$(X_{t\wedge T})_{t\in\overline{\mathbb{N}}}$ も $\mathfrak{F}_\bullet$-劣マルチンゲールだから，ふたたび命題 3.20 より，$(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である．□

参考文献

[1] Jean-François Le Gall, *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, Springer, 2018.
[2] 風巻紀彦,『Martingale の理論』，確率論セミナー，1981.
[3] 佐々田槙子,「確率過程論」講義資料，2023.