

ホモロジー論

箱

2024 年 4 月 10 日

概要

ホモロジー論について解説する．最初に，ホモロジー理論を公理的に定義し，公理からさまざまな性質を導出する．次に，特異ホモロジー群を定義し，これがホモロジー理論の公理を満たしていることを示す．最後に，(相対) CW 複体の胞体ホモロジー群を定義し，その計算例を見る．

目次

1	公理的ホモロジー	3
1.1	ホモロジー理論	3
1.2	三対のホモロジー完全列	5
1.3	切除対	6
1.4	被約ホモロジー	8
1.5	Mayer-Vietoris 完全列	10
1.6	商空間のホモロジー	15
1.7	ホモロジーと帰納極限	19
2	特異ホモロジー	21
2.1	細分対	21
2.2	特異チェイン複体と特異ホモロジー群	22
2.3	特異チェイン複体と特異ホモロジー群の関手性	25
2.4	特異ホモロジー完全列	27
2.5	特異ホモロジーのホモトピー不変性	28
2.6	重心細分と切除定理	29
2.7	特異ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列	37
2.8	特異ホモロジーと帰納極限	38
2.9	普遍係数定理	39
2.10	Euler 標数	40
2.11	応用：レトラクションの非存在，Brouwer の不動点定理	43
2.12	応用：連結成分定理，Jordan の分離定理，領域不変性定理	44
3	写像度	46
3.1	特異ホモロジーによる写像度の定義	46

3.2	余 Hopf 空間とホモロジー	49
3.3	公理的ホモロジーと写像度	51
3.4	応用：レトラクションの非存在，代数学の基本定理，つむじの定理	53
4	胞体ホモロジー	54
4.1	胞体の接着とホモロジー	54
4.2	ホモロジー群のなすチェイン複体	55
4.3	胞体チェイン複体と胞体ホモロジー群	57
4.4	胞体写像が誘導する準同型	61
4.5	有限胞体複体の Euler 標数	64
4.6	胞体ホモロジー群の計算例	64
付録 A	ホモトピー論からの準備	69
A.1	ホモトピー	69
A.2	レトラクトと変位レトラクト	70
A.3	コファイブレーション	71
A.4	CW 複体	72
付録 B	ホモロジー代数の結果	74
B.1	加群の完全列に関する結果	74
B.2	チェイン複体とそのホモロジー	77
B.3	チェインホモトピー	79
B.4	ホモロジー完全列	79
B.5	普遍係数定理	81

記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} と書く． 0 は自然数に含める．
- 1 点空間を pt と書く．単位閉区間 $[0, 1]$ を \mathbb{I} と書く． $n \in \mathbb{N}$ に対して， \mathbb{R}^n の原点を中心とする単位閉球を \mathbb{D}^n ，単位球面を \mathbb{S}^{n-1} と書く ($\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ である)．
- 位相空間 X とその部分空間 $A \subseteq X$ との組 (X, A) を，空間対という．位相空間 X とその部分空間 $B \subseteq A \subseteq X$ からなる組 (X, A, B) を，空間三対という．
- 位相空間 X とその点 $*$ との組 $(X, *)$ を，点付き空間といい， $*$ をこの点付き空間の基点という．点付き空間 $(X, *)$ を，しばしば，空間対 $(X, \{*\})$ と同一視する．
- $(X, A), (Y, B)$ を空間対とする．連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が $f(A) \subseteq B$ を満たすとき， $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と書く．点付き空間については，このような（すなわち，基点を保つ）連続写像を，点付き連続写像という．
- 位相空間 X の部分集合族 \mathcal{U} であって， $\{U^\circ \mid U \in \mathcal{U}\}$ が X を被覆するものを， X の本質的開被覆という．
- 射の族 $(\phi_i)_{i \in I}$ から積の普遍性によって誘導される射を $(\phi_i)_{i \in I}$ と書き，余積の普遍性によって誘導される射を $\langle \phi_i \rangle_{i \in I}$ と書く． I の元が列挙されている場合には， $(\phi_1, \dots, \phi_n), \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$ などとも書く．

- 本稿を通して、特に断らない限り、 R を可換環とする。

1 公理的ホモロジー

1.1 ホモロジー理論

空間対 (X, A) に対して空間対 (A, \emptyset) を与え、空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に対して連続写像 $f|_A: (A, \emptyset) \rightarrow (B, \emptyset)$ を与える対応は、空間対の圏 $\mathbf{Top}^{(2)}$ から自身への関手であり、また空間対のホモトピー圏 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}^{(2)})$ から自身への関手を誘導する。これらの関手を、 J と書く。

定義 1.1 (ホモロジー理論) R -係数の**ホモロジー理論** (homology theory) $h_* = ((h_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ とは、

- 関手 $h_n: \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}^{(2)}) \rightarrow R\text{-Mod}$,
- 自然変換 $\partial_n: h_n \Rightarrow h_{n-1} \circ J$

からなる族であって、次の 2 条件を満たすものをいう。以下、 $h_n(X, \emptyset)$ を単に $h_n(X)$ と書く。

(H1) **完全列公理** (exact sequence axiom) : 任意の空間対 (X, A) に対して、列

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} h_n(A) \longrightarrow h_n(X) \longrightarrow h_n(X, A) \\ \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(A) \longrightarrow h_{n-1}(X) \longrightarrow h_{n-1}(X, A) \\ \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \end{aligned}$$

は完全である（これを、空間対 (X, A) に対する**ホモロジー完全列**という）。ここで、表示のない矢印は、包含写像が誘導する準同型を表す。

(H2) **切除公理** (excision axiom) : X が位相空間、 A, B がその部分空間で $\overline{B} \subseteq A^\circ$ を満たすとき、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、包含写像が誘導する準同型 $h_n(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow h_n(X, A)$ は同型である。

さらに、

- 各 h_n が余積を保つとき、 h_* は**加法的** (additive) であるという。すなわち、 h_* が加法的であるとは、任意の $n \in \mathbb{Z}$ と空間対の族 $((X_\lambda, A_\lambda))_{\lambda \in A}$ に対して、 $(X, A) = \coprod_{\lambda \in A} (X_\lambda, A_\lambda)$ と置くとき、包含写像が誘導する準同型を構造射として

$$h_n(X, A) \cong \bigoplus_{\lambda \in A} h_n(X_\lambda, A_\lambda)$$

となることをいう。

- 任意の $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して $h_n(\text{pt}) = 0$ であるとき、 h_* は**次元公理** (dimension axiom) を満たすという。次元公理を満たすホモロジー理論を**常ホモロジー理論** (ordinary homology theory) といい、満たさないホモロジー理論を**超常ホモロジー理論** (extraordinary homology theory) という。

ホモロジー理論 h_* を固定するとき、加群 $h_n(X, A)$ を、空間対 (X, A) の n **次ホモロジー群** (n -th homology group) という。また、各準同型 $\partial_n: h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$ を、**連結準同型** (connecting homomorphism) という。

以下、連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ の対ホモトピー類 $[f]$ が誘導するホモロジー群の間の準同型 $h_n([f]): h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B)$ を、 f_* と書く。また、ホモロジー理論の連結準同型は、特に明示しなくても、 ∂_n あるいは単に ∂ と書く。

完全列公理から、次のことがただちに従う。

命題 1.2 h_* をホモロジー理論とする。空間対 (X, A) について、包含写像 $i: A \rightarrow X$ がホモトピー同値ならば、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $h_n(X, A) = 0$ である。

証明 i がホモトピー同値ならば i_* は同型だから、ホモロジー完全列

$$h_n(A) \xrightarrow{i_*} h_n(X) \rightarrow h_n(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} h_{n-1}(X)$$

より $h_n(X, A) = 0$ である。 □

命題 1.3 h_* をホモロジー理論とする。 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を空間対の間の連続写像とする。 $n \in \mathbb{Z}$ とするとき、 $k = n, n-1$ に対して $f_*: h_k(X) \rightarrow h_k(Y)$ および $f_*: h_k(A) \rightarrow h_k(B)$ が同型ならば、 $f_*: h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B)$ も同型である。

証明 ホモロジー完全列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} h_n(A) & \rightarrow & h_n(X) & \rightarrow & h_n(X, A) & \rightarrow & h_{n-1}(A) & \rightarrow & h_{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_n(B) & \rightarrow & h_n(Y) & \rightarrow & h_n(Y, B) & \rightarrow & h_{n-1}(A) & \rightarrow & h_{n-1}(Y) \end{array}$$

を考えると、主張は五項補題（命題 B.2）から従う。 □

注意 1.4 命題 1.3 より特に、 f が X から Y への連続写像としてホモトピー同値であり、かつ A から B への連続写像としてホモトピー同値ならば、すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f_*: h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B)$ は同型である。しかし、このとき、 f が (X, A) から (Y, B) への連続写像として対ホモトピー同値であるとは限らない（注意 A.5）。

ホモロジー理論が自動的に有限加法的となることを示す。

命題 1.5（ホモロジー理論の有限加法性） 任意のホモロジー理論 h_* について、各 h_n は有限余積を保つ。すなわち、任意の空間対の有限族 $((X_\lambda, A_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、 $(X, A) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, A_\lambda)$ と置くと、包含写像が誘導する準同型を構造射として

$$h_n(X, A) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} h_n(X_\lambda, A_\lambda)$$

となる。

証明 命題 1.2 より、 $h_n(\emptyset) = 0$ である。あとは、空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して、包含写像が誘導する準同型を構造射として

$$h_n(X \sqcup Y, A \sqcup B) \cong h_n(X, A) \oplus h_n(Y, B)$$

であることを示せばよい。

まず, $A = B = \emptyset$ とする. 包含写像が誘導する準同型がなす可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 h_n(X) & & & & h_n(Y) \\
 \downarrow & \searrow & & \swarrow & \downarrow \\
 & h_n(X \sqcup Y) & & & \\
 \downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
 h_n(X \sqcup Y, Y) & & & & h_n(X \sqcup Y, X)
 \end{array}$$

について, 切除公理より二つの縦の矢印は同型であり, また完全列公理より左上から右下に向かう列は完全である. よって, 和の補題 (補題 B.1 (2)) より, 包含写像が誘導する準同型を構造射として

$$h_n(X \sqcup Y) \cong h_n(X) \oplus h_n(Y)$$

である.

次に, 一般の場合を考える. ホモロジー完全列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 h_n(A) \oplus h_n(B) & \rightarrow & h_n(X) \oplus h_n(Y) & \rightarrow & h_n(X, A) \oplus h_n(Y, B) & \rightarrow & h_{n-1}(A) \oplus h_{n-1}(B) & \rightarrow & h_{n-1}(X) \oplus h_{n-1}(Y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 h_n(A \sqcup B) & \longrightarrow & h_n(X \sqcup Y) & \longrightarrow & h_n(X \sqcup Y, A \sqcup B) & \longrightarrow & h_{n-1}(A \sqcup B) & \longrightarrow & h_{n-1}(X \sqcup Y)
 \end{array}$$

において, 前段の結果より中央を除く四つの縦の矢印は同型だから, 五項補題 (命題 B.2) より中央の縦の矢印も同型である. これで, 主張が示された. \square

1.2 三対のホモロジー完全列

以下, ホモロジー理論 h_* と空間三対 (X, A, B) に対して, 連結準同型 $\partial = \partial_n: h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$ と包含写像が誘導する準同型 $h_{n-1}(A) \rightarrow h_{n-1}(A, B)$ との合成をまた連結準同型といい, これをそのまま $\partial = \partial_n: h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A, B)$ と書く.

命題 1.6 (三対のホモロジー完全列) h_* をホモロジー理論とする. 任意の空間三対 (X, A, B) に対して, 準同型の列

$$\begin{array}{l}
 \cdots \xrightarrow{\partial} h_n(A, B) \longrightarrow h_n(X, B) \longrightarrow h_n(X, A) \\
 \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(A, B) \longrightarrow h_{n-1}(X, B) \longrightarrow h_{n-1}(X, A) \\
 \xrightarrow{\partial} \cdots
 \end{array}$$

は完全である. ここで, 表示のない矢印は, 包含写像が誘導する準同型を表す.

証明 包含写像が誘導する準同型と連結準同型からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & & \xrightarrow{\quad \partial \quad} \\
 & \xrightarrow{\quad \quad} & h_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & h_n(A, B) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & h_{n-1}(B) \\
 h_{n+1}(A) & \nearrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & \xrightarrow{\quad \quad} & h_{n+1}(X, B) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & h_n(A) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & h_n(X, B) \\
 & \searrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 & \xrightarrow{\quad \quad} & h_{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & h_n(B) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & h_n(X)
 \end{array}$$

に組紐の補題 (命題 B.4) を適用すればよい. \square

1.3 切除対

定義 1.7 (切除対) h_* をホモロジー理論とする. 位相空間 X の部分集合 U, V について, 包含写像が誘導する準同型 $h_n(U, U \cap V) \rightarrow h_n(U \cup V, V)$ がすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して同型であるとき, (U, V) はホモロジー理論 h_* に関する**切除対** (excisive pair) である, あるいは $(U \cup V; U, V)$ はホモロジー理論 h_* に関する**切除系** (excisive system) であるという. 切除対に伴うホモロジー群の間の同型を, **切除同型** (excisive isomorphism) という.

ホモロジー理論の定義 (定義 1.1) における切除公理は, 「 X の本質的開被覆 (U, V) は切除対である」といいかえられる ($U = X \setminus B, V = A$ と対応する). これを少し一般化したものが次の命題であり, 切除対は, 典型的にはこのようにして得られる.

命題 1.8 X を位相空間とする. (U, V) は X の被覆, (\tilde{U}, \tilde{V}) は X の本質的開被覆であり, $U \subseteq \tilde{U}$ かつ $V \subseteq \tilde{V}$ を満たし, かつ包含写像 $U \rightarrow \tilde{U}, V \rightarrow \tilde{V}, U \cap V \rightarrow \tilde{U} \cap \tilde{V}$ はすべてホモトピー同値であるとする. このとき, (U, V) は, 任意のホモロジー理論 h_* に関する切除対である.

証明 命題 1.3 より, 包含写像が誘導する準同型 $h_n(U, U \cap V) \rightarrow h_n(\tilde{U}, \tilde{U} \cap \tilde{V}), h_n(X, V) \rightarrow h_n(X, \tilde{V})$ は同型である. よって, 主張は可換図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(U, U \cap V) & \longrightarrow & h_n(X, V) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ h_n(\tilde{U}, \tilde{U} \cap \tilde{V}) & \longrightarrow & h_n(X, \tilde{V}) \end{array}$$

から従う. □

命題 1.9 h_* をホモロジー理論とする. 位相空間 X の部分集合 U, V に対して, 次の 4 条件は同値である.

- (a) (U, V) は切除対である.
- (b) (V, U) は切除対である.
- (c) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 包含写像が誘導する準同型の組 $h_n(U, U \cap V) \rightarrow h_n(U \cup V, U \cap V) \leftarrow h_n(V, U \cap V)$ は余積の図式である.
- (d) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 包含写像が誘導する準同型の組 $h_n(U \cup V, U) \leftarrow h_n(U \cup V, U \cap V) \rightarrow h_n(X, V)$ は積の図式である.

証明 包含写像が誘導する準同型がなす可換図式

$$\begin{array}{ccccc} h_n(U, U \cap V) & & & & h_n(V, U \cap V) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & h_n(U \cup V, U \cap V) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ h_n(U \cup V, V) & & & & h_n(U \cup V, U) \end{array}$$

を考える. 完全列公理より, 左上から右下に向かう列, および右上から左下に向かう列は, それぞれ完全である.

- (a) \iff (b) (U, V) が切除対である, すなわち包含写像 $(U, U \cap V) \rightarrow (U \cup V, V)$ がすべての次数のホモ

ロジ群の間に同型を誘導するとする。この包含写像は

$$(U, U \cap V) \longrightarrow (U \cup V, U \cap V) \longrightarrow (U \cup V, V)$$

と分解されるから、包含写像 $(U, U \cap V) \rightarrow (U \cup V, U \cap V)$ はすべての次数のホモロジー群の間に単射を誘導し、包含写像 $(U \cup V, U \cap V) \rightarrow (U \cup V, V)$ はすべての次数のホモロジー群の間に全射を誘導する。ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_n(U \cup V, U \cap V) \longrightarrow h_n(U \cup V, U) \longrightarrow h_{n-1}(U, U \cap V) \longrightarrow h_{n-1}(U \cup V, U \cap V)$$

において、第三の準同型は単射だから、第二の準同型は 0 であり、したがって第一の準同型は全射である。また、ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{n+1}(U \cup V, U \cap V) \longrightarrow h_{n+1}(U \cup V, V) \longrightarrow h_n(V, U \cap V) \longrightarrow h_n(U \cup V, U \cap V)$$

において、第一の準同型は全射だから、第二の準同型は 0 であり、したがって第三の準同型は単射である。これらのことと和の補題 (補題 B.1 (1)) より、包含写像が誘導する準同型 $h_n(V, U \cap V) \rightarrow h_n(U \cup V, U)$ は同型である。これが任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つから、 (V, U) は切除対である。 U と V を入れ替えれば、逆の含意もわかる。

(a) かつ (b) \implies (c) かつ (d) 和の補題 (補題 B.1 (2)) から従う。

(c) \implies (a) (c) が成り立つとする。ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_n(U \cup V, U \cap V) \longrightarrow h_n(U \cup V, V) \longrightarrow h_n(V, U \cap V) \longrightarrow h_{n-1}(U \cup V, U \cap V)$$

において、仮定より第三の準同型は単射だから、第二の準同型は 0 であり、したがって第一の準同型は全射である。よって、和の補題 (補題 B.1 (3)) より、包含写像が誘導する準同型 $h_n(U, U \cap V) \rightarrow h_n(U \cup V, V)$ は同型である。これが任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つから、 (U, V) は切除対である。

(d) \implies (a) (d) が成り立つとする。ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{n+1}(U \cup V, U \cap V) \longrightarrow h_{n+1}(U \cup V, U) \longrightarrow h_n(U, U \cap V) \longrightarrow h_n(U \cup V, U \cap V)$$

において、仮定より第一の準同型は全射だから、第二の準同型は 0 であり、したがって第三の準同型は単射である。よって、和の補題 (補題 B.1 (4)) より、包含写像が誘導する準同型 $h_n(U, U \cap V) \rightarrow h_n(U \cup V, V)$ は同型である。これが任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つから、 (U, V) は切除対である。 \square

例 1.10 (懸垂同型) ここまでの結果から、空間対 $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ ($n \geq 0$) のホモロジー群の間の同型が構成できる。これは、**懸垂同型** (suspension isomorphism) と呼ばれ、4 節でも用いられる。以下、 h_* をホモロジー理論とする。

\mathbb{S}^n の二つの部分集合 D_+^n, D_-^n を、

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \geq 0\}, \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \leq 0\} \end{aligned}$$

と定める。各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して、次の二つのホモロジー群の間の同型が考えられる。

- $i(x) = (x, -\sqrt{1 - \|x\|^2})$ ($x \in \mathbb{D}^n$) で定まる写像 i は、空間対 $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ から $(D_-^n, D_+^n \cap D_-^n)$ への同相である。 (D_+^n, D_-^n) は切除対だから (命題 1.8)、 i が誘導する準同型

$$i_*: h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow h_k(\mathbb{S}^n, D_+^n)$$

は同型である.

- ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{k+1}(\mathbb{D}^{n+1}, D_+^n) \longrightarrow h_{k+1}(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} h_k(\mathbb{S}^n, D_+^n) \longrightarrow h_k(\mathbb{D}^{n+1}, D_+^n)$$

と $h_{k+1}(\mathbb{D}^{n+1}, D_+^n) = h_k(\mathbb{D}^{n+1}, D_+^n) = 0$ より $(\mathbb{D}^{n+1}, D_+^n)$ が可縮であることと命題 1.2 から従う), 連結準同型

$$\partial: h_{k+1}(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \rightarrow h_k(\mathbb{S}^n, D_+^n)$$

は同型である.

これらを合成して, 懸垂同型

$$\sigma = \partial^{-1} \circ i_*: h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow h_{k+1}(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$$

を得る. これを繰り返し用いることで, $h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong h_{k-n}(\mathbb{D}^0, \mathbb{S}^{-1}) = h_{k-n}(\text{pt})$ がわかる. 特に, h_* が常ホモロジー理論で $h_0(\text{pt}) = M$ ならば,

$$h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} M & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である.

1.4 被約ホモロジー

定義 1.11 (被約ホモロジー群) h_* をホモロジー理論とする. 位相空間 X と $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 1 点空間への唯一の写像 $X \rightarrow \text{pt}$ が誘導する準同型の核を,

$$\tilde{h}_n(X) = \text{Ker}(h_n(X) \rightarrow h_n(\text{pt}))$$

と書く. 加群 $\tilde{h}_n(X)$ を, X の **n 次被約ホモロジー群** (n -th reduced homology group) という.

$h_n(\text{pt}) = 0$ ならば, n 次被約ホモロジー群 $\tilde{h}_n(X)$ は n 次ホモロジー群 $h_n(X)$ に等しい. 特に, 常ホモロジー理論 h_* に対しては, 任意の整数 $n \neq 0$ に対して $\tilde{h}_n(X) = h_n(X)$ である.

$f: X \rightarrow Y$ を位相空間の間の連続写像とし, 1 点空間への唯一の写像を $r_X: X \rightarrow \text{pt}$, $r_Y: Y \rightarrow \text{pt}$ と書く. $r_X = r_Y \circ f$ より $r_{X*} = r_{Y*} \circ f_*$ だから, $f_*(\tilde{h}_n(X)) \subseteq \tilde{h}_n(Y)$ である. よって, n 次被約ホモロジー群を与える対応は, 関手

$$\tilde{h}_n: \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \rightarrow R\text{-Mod}$$

をなす.

命題 1.12 h_* をホモロジー理論とする.

- (1) 位相空間 X が可縮ならば, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\tilde{h}_n(X) = 0$ である.
- (2) 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が定値写像にホモトピックならば, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して準同型 $f_*: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(Y)$ は 0 である.

証明 (1) 明らかに $\tilde{h}_n(\text{pt}) = 0$ だから, X が可縮ならば $\tilde{h}_n(X) \cong \tilde{h}_n(\text{pt}) = 0$ である.

(2) 定値写像は 1 点空間 pt を経由するから, それが誘導する準同型は $\tilde{h}_n(\text{pt}) = 0$ を経由し, したがって 0 である. よって, 定値写像にホモトピックな連続写像が誘導する準同型も 0 である. \square

命題 1.13 h_* をホモロジー理論とする. 空間対 (X, A) について, A が X のレトラクトならば, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 包含写像が誘導する準同型の列

$$0 \longrightarrow h_n(A) \longrightarrow h_n(X) \longrightarrow h_n(X, A) \longrightarrow 0$$

は完全である. さらに, レトラクション $r: X \rightarrow A$ が誘導する準同型 $r_*: h_n(X) \rightarrow h_n(A)$ は, 上記の短完全列の左分裂である.

証明 包含写像を $i: A \rightarrow X$, $j: X \rightarrow (X, A)$ と書く. $r: X \rightarrow A$ をレトラクションとすると, $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_{h_n(A)}$ である. 特に, i_* は単射である. ホモロジー完全列

$$h_n(A) \xrightarrow{i_*} h_n(X) \xrightarrow{j_*} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} h_{n-1}(X)$$

より, i_* の単射性から $\partial = 0$ と j_* の全射性が順にわかる. よって, 与えられた列は完全であり, r_* はその左分裂である. \square

系 1.14 h_* をホモロジー理論とする. (X, x_0) を点付き空間とし, 写像 $i: \text{pt} \rightarrow X$ を $i(*) = x_0$ と定め, 1 点空間への唯一の写像を $r: X \rightarrow \text{pt}$ と書く. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) $i_*: h_n(\text{pt}) \rightarrow h_n(X)$ は単射であり, $r_*: h_n(X) \rightarrow h_n(\text{pt})$ は全射である.
- (2) $i_*: h_n(\text{pt}) \rightarrow h_n(X)$ の像は, $\tilde{h}_n(X)$ の $h_n(X)$ における補空間である.
- (3) 包含写像 $j: X \rightarrow (X, x_0)$ が誘導する準同型 $j_*: h_n(X) \rightarrow h_n(X, x_0)$ は, 同型 $\tilde{h}_n(X) \cong h_n(X, x_0)$ を誘導する.

証明 X から pt への唯一の写像を $r: X \rightarrow \text{pt}$ と書く. 命題 1.13 より

$$0 \longrightarrow h_n(\text{pt}) \xrightarrow{i_*} h_n(X) \xrightarrow{j_*} h_n(X, A) \longrightarrow 0$$

は短完全列であり, $r_*: h_n(X) \rightarrow h_n(A)$ はその左分裂である. よって, i_* は単射, r_* は全射であり, i_* の像は $\text{Ker } r_* = \tilde{h}_n(X)$ の補空間であり, j_* は同型 $\tilde{h}_n(X) \cong h_n(X, x_0)$ を与える. \square

定理 1.15 (被約ホモロジー完全列) h_* をホモロジー理論とする. (X, A) を空間対とし, 包含写像を $i: A \rightarrow X$, $j: X \rightarrow (X, A)$ と書く.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\tilde{h}_n(A) = (i_*)^{-1}(\tilde{h}_n(X))$ である.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 連結準同型 $\partial: h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$ の像は $\tilde{h}_{n-1}(A)$ に含まれる.

以下では, さらに, $A \neq \emptyset$ と仮定する.

- (3) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $j_*(\tilde{h}_n(X)) = j_*(h_n(X))$ である.

(4) 準同型の列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{j_*} & h_n(X, A) \\ & & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{h}_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} h_{n-1}(X, A) \\ & & \xrightarrow{\partial} & \cdots & & & \end{array}$$

は完全である。ここで、連結準同型 $\partial: h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$ の終域を $\tilde{h}_{n-1}(A)$ に制限した ((2) よりこれは可能である) ものを、そのまま ∂ と書いた。

証明 1 点空間への唯一の写像を $r: X \rightarrow \text{pt}$, $r': A \rightarrow \text{pt}$ と書く。二つのホモロジー完全列がなす可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} h_n(A) & \xrightarrow{i_*} & h_n(X) & \xrightarrow{j_*} & h_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & h_{n-1}(A) \\ \downarrow r'_* & & \downarrow r_* & & \downarrow & & \downarrow r'_* \\ h_n(\text{pt}) & \xlongequal{\quad} & h_n(\text{pt}) & \longrightarrow & h_n(\text{pt}, \text{pt}) & \xrightarrow{\partial} & h_{n-1}(\text{pt}) \end{array} \quad (*)$$

に注意する。

- (1) $(*)$ の左側の四角より, $(i_*)^{-1}(\tilde{h}_n(X)) = (i_*)^{-1}(\text{Ker } r_*) = \text{Ker } r'_* = \tilde{h}_n(A)$ である。
- (2) $(*)$ の右側の四角と $h_n(\text{pt}, \text{pt}) = 0$ より, $\text{Im } \partial \subseteq \text{Ker } r'_* = \tilde{h}_{n-1}(A)$ である。
- (3) $u \in h_n(X)$ を任意にとる。 $r_*(u) \in h_n(\text{pt})$ であり, $A \neq \emptyset$ と系 1.14 (1) より r'_* は全射だから, $v \in h_n(A)$ を $r'_*(v) = r_*(u)$ となるようにとれる。このとき, $u - i_*(v) \in \tilde{h}_n(X)$ であり, したがって

$$j_*(u) = j_*(u - i_*(v)) \in j_*(\tilde{h}_n(X))$$

である。よって, $j_*(\tilde{h}_n(X)) = j_*(h_n(X))$ が成り立つ。

- (4) 完全列公理と (1), (2), (3) から, それぞれ $\tilde{h}_n(X)$, $\tilde{h}_{n-1}(A)$, $\tilde{h}_n(X, A)$ における完全性が従う。 \square

1.5 Mayer–Vietoris 完全列

定理 1.16 (Mayer–Vietoris 完全列) h_* をホモロジー理論とする。 $(X; X_1, X_2)$ を切除系とし, $X_{12} = X_1 \cap X_2$ と置き, A を X_{12} の部分空間とする。 $i_k: X_{12} \rightarrow X_k$, $j_k: X_k \rightarrow X$ ($k = 1, 2$) を包含写像とする。このとき, 準同型の列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\text{MV}} & h_n(X_{12}, A) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & h_n(X_1, A) \oplus h_n(X_2, A) & \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} & h_n(X, A) \\ & & \xrightarrow{\text{MV}} & h_{n-1}(X_{12}, A) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & h_{n-1}(X_1, A) \oplus h_{n-1}(X_2, A) & \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} h_{n-1}(X, A) \\ & & \xrightarrow{\text{MV}} & \cdots & & & \end{array}$$

は完全である。ここで, 準同型 MV は, 包含写像が誘導する準同型, 切除同型, 連結準同型を用いて

$$\text{MV}: h_n(X, A) \longrightarrow h_n(X, X_2) \xleftarrow{\cong} h_n(X_1, X_{12}) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(X_{12}, A)$$

と定義される。

証明 ホモロジー完全列 (命題 1.6) の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
h_n(X_{12}, A) & \rightarrow & h_n(X_1, A) & \rightarrow & h_n(X_1, X_{12}) & \xrightarrow{\partial} & h_{n-1}(X_{12}, A) & \rightarrow & h_{n-1}(X_1, A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\
h_n(X_2, A) & \rightarrow & h_n(X, A) & \rightarrow & h_n(X, X_2) & \xrightarrow{\partial} & h_{n-1}(X_2, A) & \rightarrow & h_{n-1}(X, A)
\end{array}$$

に Barratt–Whitehead の補題 (命題 B.5) を適用すればよい. \square

系 1.17 (被約 Mayer–Vietoris 完全列) h_* をホモロジー理論とする. $(X; X_1, X_2)$ を切除系とし, $X_{12} = X_1 \cap X_2$ は空でないとする. $i_k: X_{12} \rightarrow X_k$, $j_k: X_k \rightarrow X$ ($k = 1, 2$) を包含写像とする. このとき, 準同型の列

$$\begin{aligned}
& \dots \xrightarrow{\text{MV}} \tilde{h}_n(X_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \tilde{h}_n(X_1) \oplus \tilde{h}_n(X_2) \xrightarrow{(j_{1*}, -j_{2*})} \tilde{h}_n(X) \\
& \xrightarrow{\text{MV}} \tilde{h}_{n-1}(X_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \tilde{h}_{n-1}(X_1) \oplus \tilde{h}_{n-1}(X_2) \xrightarrow{(j_{1*}, -j_{2*})} \tilde{h}_{n-1}(X) \\
& \xrightarrow{\text{MV}} \dots
\end{aligned}$$

は完全である. ここで, 準同型 MV は, 包含写像が誘導する準同型, 切除同型, 連結準同型を用いて

$$\text{MV}: \tilde{h}_n(X) \rightarrow h_n(X, X_2) \xleftarrow{\cong} h_n(X_1, X_{12}) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{n-1}(X_{12})$$

と定義される.

証明 Mayer–Vietoris 完全列 (定理 1.16) で A を X_{12} の 1 点部分集合とし, 系 1.14 (3) の同型を用いればよい. \square

注意 1.18 Mayer–Vietoris 完全列 (定理 1.16) において, 準同型 MV は包含写像が誘導する準同型, 切除同型, 連結準同型を用いて定義されているから, 自然性を満たす. すなわち, 切除系 $(X; X_1, X_2)$ と $X_{12} = X_1 \cap X_2$ の部分空間 A , 切除系 $(Y; Y_1, Y_2)$ と $Y_{12} = Y_1 \cap Y_2$ の部分空間 B を考えるとき, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ であって X_1, X_2, A をそれぞれ Y_1, Y_2, B の中に移すものについて, 図式

$$\begin{array}{ccc}
h_n(X, A) & \xrightarrow{\text{MV}} & h_{n-1}(X_{12}, A) \\
f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\
h_n(Y, B) & \xrightarrow{\text{MV}} & h_{n-1}(Y_{12}, B)
\end{array}$$

は可換である. 被約 Mayer–Vietoris 完全列 (系 1.17) においても同様に, 切除系 $(X; X_1, X_2)$ であって $X_{12} = X_1 \cap X_2$ が空でないもの, 切除系 $(Y; Y_1, Y_2)$ であって $Y_{12} = Y_1 \cap Y_2$ が空でないもの, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ であって X_1, X_2 をそれぞれ Y_1, Y_2 の中に移すものについて, 図式

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{\text{MV}} & \tilde{h}_{n-1}(X_{12}) \\
f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\
\tilde{h}_n(Y) & \xrightarrow{\text{MV}} & \tilde{h}_{n-1}(Y_{12})
\end{array}$$

は可換である.

例 1.19 (球面の被約ホモロジー群) 例 1.10 と同様に, \mathbb{S}^n ($n \geq 0$) の二つの部分集合 D_+^n, D_-^n を

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \geq 0\}, \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \leq 0\} \end{aligned}$$

と定める. 埋め込み $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, $x \mapsto (x, 0)$ によって \mathbb{S}^n を \mathbb{S}^{n+1} の部分空間とみなすと, $D_+^{n+1} \cap D_-^{n+1} = \mathbb{S}^n$ である. そこで, 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 切除系 $(\mathbb{S}^{n+1}; D_+^{n+1}, D_-^{n+1})$ (命題 1.8) から被約 Mayer–Vietoris 完全列 (系 1.17)

$$\tilde{h}_{k+1}(D_+^{n+1}) \oplus \tilde{h}_{k+1}(D_-^{n+1}) \longrightarrow \tilde{h}_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \xrightarrow{\text{MV}} \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \tilde{h}_k(D_+^{n+1}) \oplus \tilde{h}_k(D_-^{n+1})$$

が得られるが, D_+^{n+1} と D_-^{n+1} は可縮だからその被約ホモロジー群は 0 である (命題 1.12 (1)). よって, MV は同型

$$\text{MV}: \tilde{h}_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n)$$

を与える. これを繰り返し用いることで, $\tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{h}_{k-n}(\mathbb{S}^0)$ がわかる.

h_* が常ホモロジー理論で $h_0(\text{pt}) = M$ であるとする. すると, $k \neq 0$ に対しては $\tilde{h}_k(\mathbb{S}^0) = h_k(\mathbb{S}^0) \cong h_k(\text{pt}) \oplus h_k(\text{pt}) = 0$ であり, また容易に確かめられるように $\tilde{h}_0(\mathbb{S}^0) \cong M$ である. よって, 前段の結果より,

$$\tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} M & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である. 被約でないホモロジー群は, $n = 0$ のとき

$$h_k(\mathbb{S}^0) \cong \begin{cases} M \oplus M & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

であり, $n \geq 1$ のとき

$$h_k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} M & (k = 0, n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.

上記の Mayer–Vietoris 完全列における A を切除系に置き換えた, より一般の形の完全列を構成することもできる. 以下の議論は, Steiner [6] による. なお, 特異ホモロジーについては, ホモロジー代数を利用した簡明な証明がある (定理 2.32).

補題 1.20 h_* をホモロジー理論とする. 位相空間の包含写像の可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

に対して, $D \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ の部分空間

$$\begin{aligned} L &= (A \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cup (B \times \{1\} \times \mathbb{I}) \cup (C \times \mathbb{I} \times \{1\}) \cup (D \times \{1\} \times \{1\}), \\ M &= (A \times \mathbb{I} \times \{0\}) \cup (A \times \{0\} \times \mathbb{I}) \cup (B \times \{1\} \times \{0\}) \cup (C \times \{0\} \times \{1\}) \end{aligned}$$

を考える.

(1) 準同型の列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow h_n(B, A) \longrightarrow h_n(D, C) \longrightarrow h_n(L, M) \\ &\longrightarrow h_{n-1}(B, A) \longrightarrow h_{n-1}(D, C) \longrightarrow h_{n-1}(L, M) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

は完全である．ここで，準同型 $h_n(B, A) \rightarrow h_n(D, C)$ は包含写像が誘導するものであり，その他の準同型は証明の中で構成される．

(2) 準同型の列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow h_n(C, A) \longrightarrow h_n(D, B) \longrightarrow h_n(L, M) \\ &\longrightarrow h_{n-1}(C, A) \longrightarrow h_{n-1}(D, B) \longrightarrow h_{n-1}(L, M) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

は完全である．ここで，準同型 $h_n(C, A) \rightarrow h_n(D, B)$ は包含写像が誘導するものであり，その他の準同型は証明の中で構成される．

証明 L の部分空間 N_{AB}, N_{AC}, N_{CD} を

$$\begin{aligned} N_{AB} &= (A \times \mathbb{I} \times \{0\}) \cup (B \times \{1\} \times \{0\}), \\ N_{AC} &= (A \times \{0\} \times \mathbb{I}) \cup (C \times \{0\} \times \{1\}), \\ N_{CD} &= (C \times \{0\} \times \mathbb{I}) \cup (D \times \{1\} \times \{1\}) \end{aligned}$$

と定める．

(1) ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{n+1}(L, M) \xrightarrow{\partial} h_n(M, N_{AC}) \longrightarrow h_n(L, N_{AC}) \xrightarrow{\partial} h_n(L, M)$$

において，中央の 2 項 $h_n(M, N_{AC}) \rightarrow h_n(L, N_{AC})$ を $h_n(B, A) \rightarrow h_n(D, C)$ に置き換えることを考える．

まず，連続写像 $i: (N_{AB}, A \times \{0\} \times \{0\}) \rightarrow (N_{CD}, C \times \{0\} \times \{1\})$ を $i(x, 0, 0) = i(x, 0, 1)$ と定めると，位相空間の図式

$$\begin{array}{ccc} (M, N_{AC}) & \longrightarrow & (L, N_{AC}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (N_{AB}, A \times \{0\} \times \{0\}) & \xrightarrow{i} & (N_{CD}, C \times \{0\} \times \{1\}) \end{array}$$

は対ホモトピー可換だから (表示のない矢印は，包含写像を表す)，ホモロジー群の可換図式を誘導する．ここで， (N_{AB}, N_{AC}) は切除対 (命題 1.8) だから左の包含写像はホモロジー群の間の同型を誘導し，右の包含写像は対ホモトピー同値だからホモロジー群の間の同型を誘導する．次に， $p_{AB}: (N_{AB}, A \times \{0\} \times \{0\}) \rightarrow (B, A)$ ， $p_{CD}: (N_{CD}, C \times \{0\} \times \{1\}) \rightarrow (D, C)$ を射影とすると，位相空間の図式

$$\begin{array}{ccc} (N_{AB}, A \times \{0\} \times \{0\}) & \xrightarrow{i} & (N_{CD}, C \times \{0\} \times \{1\}) \\ p_{AB} \downarrow & & \downarrow p_{CD} \\ (B, A) & \longrightarrow & (D, C) \end{array}$$

は可換だから (表示のない矢印は，包含写像を表す)，ホモロジー群の可換図式を誘導する．ここで，射影 $N_{AB} \rightarrow B$ と $A \times \{0\} \times \{0\} \rightarrow A$ はともにホモトピー同値だから p_{AB} はホモロジー群の間の同型を誘導し

(命題 1.3), 同様に p_{CD} もホモロジー群の間の同型を誘導する. 以上より, 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
h_n(M, N_{AC}) & \longrightarrow & h_n(L, N_{AC}) \\
\cong \uparrow & & \uparrow \cong \\
h_n(N_{AB}, A \times \{0\} \times \{0\}) & \xrightarrow{i_*} & h_n(N_{CD}, C \times \{0\} \times \{1\}) \\
p_{AB*} \downarrow \cong & & \cong \downarrow p_{CD*} \\
h_n(B, A) & \longrightarrow & h_n(D, C)
\end{array}$$

が得られ, これによって上記のホモロジー完全列における $h_n(M, N_{AC}) \rightarrow h_n(L, N_{AC})$ を $h_n(B, A) \rightarrow h_n(D, C)$ に置き換えれば, 主張の完全列を得る.

(2) (1) と同様である. □

注意 1.21 証明の中の構成からわかるように, 補題 1.20 の完全列は自然性を満たす.

定理 1.22 (Mayer–Vietoris 完全列) h_* をホモロジー理論とする. $(X; X_1, X_2), (A; A_1, A_2)$ は切除系であって A, A_1, A_2 はそれぞれ X, X_1, X_2 の部分空間であるとし, $X_{12} = X_1 \cap X_2, A_{12} = A_1 \cap A_2$ と置く. $i_k: (X_{12}, A_{12}) \rightarrow (X_k, A_k), j_k: (X_k, A_k) \rightarrow (X, A)$ ($k = 1, 2$) を包含写像とする. このとき, 準同型の列

$$\begin{aligned}
& \cdots \xrightarrow{\text{MV}} h_n(X_{12}, A_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} h_n(X_1, A_1) \oplus h_n(X_2, A_2) \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} h_n(X) \\
& \xrightarrow{\text{MV}} h_{n-1}(X_{12}, A_{12}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} h_{n-1}(X_1, A_1) \oplus h_{n-1}(X_2, A_2) \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} h_{n-1}(X, A) \\
& \xrightarrow{\text{MV}} \cdots
\end{aligned}$$

は完全である. 準同型 MV は, 証明の中で構成される.

証明 A_{12}, A_1, X_{12}, X_1 がなす包含写像の可換図式に対して補題 1.20 のとおり L, M を定義し, 同様に A_2, A, X_2, X がなす包含写像の可換図式に対して L', M' を定義する. 補題 1.20 (1) と注意 1.21 より完全列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
h_n(A_{12}, A_{12}) & \rightarrow & h_n(X_1, X_{12}) & \rightarrow & h_n(L, M) & \rightarrow & h_{n-1}(A_{12}, A_{12}) & \rightarrow & h_{n-1}(X_1, X_{12}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
h_n(A, A_2) & \rightarrow & h_n(X, X_2) & \rightarrow & h_n(L', M') & \rightarrow & h_{n-1}(A, A_2) & \rightarrow & h_{n-1}(X, X_2)
\end{array}$$

が得られるが, $(X; X_1, X_2)$ と $(A; A_1, A_2)$ が切除系であることより中央を除く四つの縦の矢印は同型だから, 五項補題 (命題 B.2) より中央の縦の矢印も同型である. そこで, 補題 1.20 (2) と注意 1.21 より得られる完全列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
h_n(X_{12}, A_{12}) & \rightarrow & h_n(X_1, A_1) & \rightarrow & h_n(L, M) & \rightarrow & h_{n-1}(X_{12}, A_{12}) & \rightarrow & h_{n-1}(X_1, A_1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\
h_n(X_2, A_2) & \rightarrow & h_n(X, A) & \rightarrow & h_n(L', M') & \rightarrow & h_{n-1}(X_2, A_2) & \rightarrow & h_{n-1}(X, A)
\end{array}$$

に Barratt–Whitehead の補題 (命題 B.5) を適用すれば, 主張の完全列を得る. □

注意 1.23 Mayer–Vietoris 完全列 (定理 1.22) において, 証明の中の構成からわかるように, 準同型 MV は自然性を満たす. すなわち, $(X; X_1, X_2)$ と $(A; A_1, A_2)$ の他に同じ仮定を満たす切除系 $(Y; Y_1, Y_2)$ と

$(B; B_1, B_2)$ を考え、 $Y_{12} = Y_1 \cap Y_2$, $B_{12} = B_1 \cap B_2$ と置くと、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ であって X_1, X_2, A, A_1, A_2 をそれぞれ Y_1, Y_2, B, B_1, B_2 の中に移すものについて、図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(X, A) & \xrightarrow{\text{MV}} & h_{n-1}(X_{12}, A_{12}) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ h_n(Y, B) & \xrightarrow{\text{MV}} & h_{n-1}(Y_{12}, B_{12}) \end{array}$$

は可換である。

1.6 商空間のホモロジー

本小節では、コファイブレーション対 (定義 A.10) (X, A) について、 X/A のホモロジーを調べる。まず、 A が可縮ならば、次が成り立つ。

補題 1.24 (X, A) がコファイブレーション対であり、 A が可縮ならば、等化写像

$$p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$$

は対ホモトピー同値である。

証明 包含写像を $i: A \rightarrow X$ と書く。 A は可縮だから、1 点 $x_0 \in A$ を固定すると、 id_A から定値写像 x_0 へのホモトピー $F: A \times \mathbb{I} \rightarrow A$ がとれる。さらに、 (X, A) はコファイブレーション対だから、連続写像 $\tilde{F}: X \times \mathbb{I} \rightarrow X$ であって図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{(-,0)} & A \times \mathbb{I} & & \\ \downarrow i & & \swarrow i \circ F & \searrow i \times \text{id}_{\mathbb{I}} & \\ & X & & & \\ \downarrow \text{id}_X & \nearrow & \nwarrow \tilde{F} & \downarrow & \\ X & \xrightarrow{(-,0)} & X \times \mathbb{I} & & \end{array}$$

を可換にするものが存在する。 $\tilde{F}(-, 1): X \rightarrow X$ は A を 1 点 x_0 に移すから、連続写像

$$g: (X/A, *) \rightarrow (X, x_0) \rightarrow (X, A)$$

を誘導する。この g が p の対ホモトピー逆を与えることを示す。まず、 $\tilde{F}: (X, A) \times \mathbb{I} \rightarrow (X, A)$ が id_X から $g \circ p$ への対ホモトピーを与える。次に、 $p \times \text{id}_{\mathbb{I}}: X \times \mathbb{I} \rightarrow X/A \times \mathbb{I}$ は沈め込みだから^{*1}、 $p \circ \tilde{F}: (X, A) \times \mathbb{I} \rightarrow (X/A, *)$ は連続写像 $\bar{F}: (X/A, *) \times \mathbb{I} \rightarrow (X/A, *)$ を誘導する：

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\tilde{F}} & X \\ p \times \text{id}_{\mathbb{I}} \downarrow & & \downarrow p \\ (X/A) \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\bar{F}} & X/A. \end{array}$$

この \bar{F} が、 $\text{id}_{X/A}$ から $p \circ g$ への対ホモトピーを与える。 □

^{*1} 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が沈め込みであるとは、 X 上の同値関係 \sim を $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ によって定めるとき、 f が商空間 X/\sim から Y への同相写像を誘導することをいう（普及している用語ではないかもしれない）。沈め込み $f: X \rightarrow Y$ と局所コンパクト Hausdorff 空間 Z に対して、 $f \times \text{id}_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ も沈め込みであることが知られている。証明は、服部 [12, §3.2, 補助定理 3.10] を参照のこと。

次に、 A が可縮であるとは限らない場合を考える。

準備として、錐と写像錐を定義する。位相空間 A を底面とする**錐** (cone) を、 $\text{Cone}(A) = (A \times \mathbb{I}) / (A \times \{0\})$ と定め、その基点を**頂点**という。どんな位相空間 A に対しても、錐 $\text{Cone}(A)$ は可縮である。また、位相空間の間の連続写像 $i: A \rightarrow X$ に対して、 i を $A \times \{1\}$ から X への連続写像とみなしたものによって X を $\text{Cone}(A)$ に接着して得られる接着空間を、 i の**写像錐** (mapping cone) といい、 $\text{Cone}(i)$ と書く。 X から $\text{Cone}(i)$ への自然な写像は常に埋め込みであり、これにより、 X を $\text{Cone}(i)$ の部分空間とみなす。 $i: A \rightarrow X$ が埋め込みならば、 $\text{Cone}(A)$ から $\text{Cone}(i)$ への自然な写像は埋め込みであり、これにより、 $\text{Cone}(A)$ を $\text{Cone}(i)$ の部分空間とみなす。

命題 1.25 (商空間のホモロジー) h_* をホモロジー理論とする。 (X, A) をコファイブレーション対とすると、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、等化写像 $p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ が誘導する準同型

$$p_*: h_n(X, A) \rightarrow h_n(X/A, *) \cong \tilde{h}_n(X/A)$$

は同型である (右側の同型は、系 1.14 (3) による)。

証明 錐 $\text{Cone}(A)$ の頂点を e と書く。等化写像 $p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ は、

$$\begin{aligned} (X, A) &\xrightarrow{j_1} (\text{Cone}(i) \setminus \{e\}, \text{Cone}(A) \setminus \{e\}) \\ &\xrightarrow{j_2} (\text{Cone}(i), \text{Cone}(A)) \\ &\xrightarrow{\tilde{p}} (\text{Cone}(i) / \text{Cone}(A), *) \\ &\xrightarrow{\phi} (X/A, *) \end{aligned}$$

と分解できる。ここで、 j_1, j_2 は包含写像、 \tilde{p} は等化写像、 ϕ は自然な同相写像である。容易に確かめられるように j_1 は対ホモトピー同値であり、補題 1.24 より \tilde{p} は対ホモトピー同値であり、 ϕ は同相だから、これらはホモロジー群の間に同型を誘導する。また、切除公理より、 j_2 はホモロジー群の間に同型を誘導する。よって、 p はホモロジー群の間に同型を誘導する。 \square

注意 1.26 h_* をホモロジー理論とする。 $(X, A), (Y, B)$ をコファイブレーション対とし、 $p: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$, $q: (Y, B) \rightarrow (Y/B, *)$ を等化写像とする。連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は連続写像 $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ を誘導するが、これらは $f \circ p = q \circ \bar{f}$ を満たすから、命題 1.25 の同型について、図式

$$\begin{array}{ccccc} h_n(X, A) & \xrightarrow[p_*]{\cong} & h_n(X/A, *) & \xrightarrow[\cong]{} & \tilde{h}_n(X/A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ h_n(Y, B) & \xrightarrow[q_*]{\cong} & h_n(Y/B, *) & \xrightarrow[\cong]{} & \tilde{h}_n(Y/B) \end{array}$$

は可換である。

系 1.27 h_* をホモロジー理論とする。 (X, A) はコファイブレーション対、 (Y, B) は空間対、 $\Phi: X \rightarrow Y$ と $\phi: A \rightarrow B$ は連続写像であり、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Phi} & Y \end{array}$$

は押し出しの図式であるとする（縦の矢印は、包含写像を表す）。このとき、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\Phi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が誘導する準同型

$$\Phi_*: h_n(X, A) \rightarrow h_n(Y, B)$$

は同型である。

証明 (X, A) と $(Y \cup_f X, Y)$ はコファイブレーション対だから（命題 A.15），自然な同型 $h_n(X, A) \cong \tilde{h}_n(X/A)$ と $h_n(Y \cup_f X, Y) \cong \tilde{h}_n((Y \cup_f X)/Y)$ が得られ（命題 1.25），これらの同型について図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(X, A) & \xrightarrow{\Phi_*} & h_n(Y, B) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\bar{\Phi}_*} & \tilde{h}_n(Y/B) \end{array}$$

は可換である（注意 1.26）。ここで、 $\bar{\Phi}: X/A \rightarrow (Y \cup_f X)/Y$ は、 Φ が誘導する連続写像である。容易に確かめられるように、 $\bar{\Phi}$ は同相だから、上の図式における $\bar{\Phi}_*$ は同型である。よって、 Φ_* も同型である。□

系 1.28 (X, A) を相対 CW 複体とし、 X_1 と X_2 をその相対部分複体とする。このとき、 (X_1, X_2) は、任意のホモロジー理論 h_* に関する切除対である。

証明 $(X_1, X_1 \cap X_2)$ と $(X_1 \cup X_2, X_2)$ は相対 CW 複体はコファイブレーション対だから（命題 A.23，命題 A.20），自然な同型 $h_n(X_1, X_1 \cap X_2) \cong \tilde{h}_n(X/(X_1 \cap X_2))$ と $h_n(X_1 \cup X_2, X_2) \cong \tilde{h}_n((X_1 \cup X_2)/X_2)$ が得られ（命題 1.25），これらの同型について図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(X_1, X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i_*} & h_n(X_1 \cup X_2, X_2) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \tilde{h}_n(X_1/(X_1 \cap X_2)) & \xrightarrow{\bar{i}_*} & \tilde{h}_n((X_1 \cup X_2)/X_2) \end{array}$$

は可換である（注意 1.26）。ここで、 $i: (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ は包含写像であり、 $\bar{i}: X_1/(X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2)/X_2$ は i が誘導する連続写像である。 \bar{i} は同相だから（命題 A.24），上の図式における \bar{i}_* は同型である。よって、 i_* も同型である。□

系 1.29（商空間を用いた被約ホモロジー完全列） h_* をホモロジー理論とする。 (X, A) はコファイブレーション対であって A は空でないとし、 $i: A \rightarrow X$ を包含写像、 $p: X \rightarrow X/A$ を等化写像とする。このとき、準同型の列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{h}_n(X/A) \\ & & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{h}_{n-1}(X) & \xrightarrow{p_*} \tilde{h}_{n-1}(X/A) \\ & & \xrightarrow{\partial} & \cdots & & & \end{array}$$

は完全である。ここで、命題 1.25 の同型の逆写像 $\tilde{h}_n(X/A) \rightarrow h_n(X, A)$ と連結準同型 $\partial: h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A)$ との合成を、そのまま ∂ と書いた。

証明 包含写像 $j: X \rightarrow (X, A)$ が誘導する準同型 $j_*: \tilde{h}_n(X) \rightarrow h_n(X, A)$ は、命題 1.25 の同型 $h_n(X, A) \cong$

$\tilde{h}_n(X/A)$ を通して、等化写像が誘導する準同型 $p_*: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(X/A)$ に対応する。このことは、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{j_*} & h_n(X, A) \\ \parallel & & \downarrow p_* \\ & & h_n(X/A, *) \\ & & \uparrow \cong \\ \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{h}_n(X/A) \end{array}$$

からわかる。よって、命題 1.25 の同型 $h_n(X, A) \cong \tilde{h}_n(X/A)$ を用いて被約ホモロジー完全列 (定理 1.15) における $h_n(X, A)$ を $\tilde{h}_n(X/A)$ に置き換えれば、主張の完全列を得る。□

応用として、ウェッジ和のホモロジーについて述べる。

命題 1.30 (ウェッジ和のホモロジー) h_* をホモロジー理論とする。 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は点付き空間の族であって、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、基点からの包含写像 $\text{pt} \rightarrow X_\lambda$ はコファイブレーションであるとする。 $X = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置き、 $i_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ を包含写像、 $p_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ を射影とする。 h_* が加法的または Λ が有限ならば、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、二つの準同型

$$\begin{aligned} \langle i_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \tilde{h}_n(X_\lambda) &\rightarrow \tilde{h}_n(X), \\ (p_{\lambda*})_{\lambda \in \Lambda}: \tilde{h}_n(X) &\rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \tilde{h}_n(X_\lambda) \end{aligned}$$

は、互いに他の逆を与える同型である。

証明 $\tilde{X} = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置き、基点全体の集合を $A \subseteq \tilde{X}$ と書き、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\tilde{i}_\lambda: X_\lambda \rightarrow \tilde{X}$ を包含写像とする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して包含写像 $\text{pt} \rightarrow X_\lambda$ はコファイブレーションだから、包含写像 $A \rightarrow \tilde{X}$ もコファイブレーションである (命題 A.14)。したがって、同型 $h_n(X_\lambda, *) \cong \tilde{h}_n(X_\lambda)$ 、 $h_n(\tilde{X}, A) \cong \tilde{h}_n(X)$ が自然に得られ (命題 1.25)、これらの同型について図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(X_\lambda, *) & \xrightarrow{\tilde{i}_{\lambda*}} & h_n(\tilde{X}, A) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \tilde{h}_n(X_\lambda) & \xrightarrow{i_{\lambda*}} & \tilde{h}_n(X) \end{array}$$

は可換である (注意 1.26)。ここから、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} h_n(X_\lambda, *) & \xrightarrow{\langle \tilde{i}_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}} & h_n(\tilde{X}, A) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \tilde{h}_n(X_\lambda) & \xrightarrow{\langle i_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}} & \tilde{h}_n(X) \end{array}$$

が得られる。ここで、 h_* の加法的性、あるいは Λ が有限であることとホモロジー理論の有限加法的性 (命題 1.5) より、上記の可換図式における $\langle \tilde{i}_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ は同型である。よって、 $\langle i_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ も同型である。

$\lambda, \mu \in \Lambda$ とする。 $\lambda = \mu$ ならば $p_\mu \circ i_\lambda = \text{id}_{X_\lambda}$ であり、 $\lambda \neq \mu$ ならば $p_\mu \circ i_\lambda$ は 1 点空間を経由するから、

$$p_{\mu*} \circ i_{\lambda*} = \begin{cases} \text{id}_{\tilde{h}_n(X_\lambda)} & (\lambda = \mu) \\ 0 & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

である。よって、 $(p_{\lambda*})_{\lambda \in \Lambda}$ は前段の同型 $\langle i_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ の逆を与える。 \square

注意 1.31 本小節では、 (X, A) がコファイブレーション対であるという仮定の下で、商空間などのホモロジーに関する命題を示した。一方で、 A が X の閉集合であり、 A の X における近傍 U であって A を変位レトラクトにもつものが存在するという仮定（このとき、 (X, A) を、Hatcher [2, p. 114] では good pair, 服部 [12, p. 93] ではカラー付き空間対と呼んでいる^{*2}）の下でも、これらの命題は成立する。この仮定の下での命題 1.25 の証明が Hatcher [2, Proposition 2.22] にあり、ほかの命題は、ここから本稿と同じ議論で導ける。

なお、 A が X の閉集合であっても、 (X, A) がコファイブレーション対であることと Hatcher のいう good pair であることは、どちらも他を含意しない。詳しくは、Mathematics Stack Exchange [15] を参照のこと。

1.7 ホモロジーと帰納極限

本小節では、一定の良い状況において、ホモロジーが帰納極限を保つことを示す。この結果は、のちに胞体ホモロジーを扱う際に用いられる（命題 4.2）。なお、特異ホモロジーについては、より一般的な命題をより簡明に示すことができる（命題 2.33）。

補題 1.32 (X, A) を相対 CW 複体とし、 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を (X, A) の部分複体の増加列であって X を被覆するものとする。このとき、

$$T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times [n, n+1]) \subseteq X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

は、 $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ の変位レトラクトである。

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $T_n = T \cup (X_n \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ と置く。包含写像 $X_n \rightarrow X_{n+1}$ はコファイブレーションだから、 $(X_n \times \mathbb{I}) \cup (X_{n+1} \times \{0\})$ は $X_{n+1} \times \mathbb{I}$ の変位レトラクトであり、したがって、 T_n は T_{n+1} の変位レトラクトである。 T_{n+1} から T_n の上への変位レトラクション $R_n: T_{n+1} \times \mathbb{I} \rightarrow T_n$ をとる。

各 $n \in \mathbb{N}$ に対する連続写像 $f_n: X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $F_n: X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{I} \rightarrow X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ を、次のように再帰的に定める。

- $f_0 = \text{id}_{X \times \mathbb{R}_{\geq 0}}$ と定める。
- f_n が定まったとする。容易に確かめられるように、 $(X, A) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ にを適当な胞体分割によって相対 CW 複体とみなせば、 T_{n+1} は $(X, A) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ の相対部分複体になるから、 T_{n+1} から $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ への包含写像はコファイブレーションである（命題 A.23, 命題 A.20）。したがって、連続写像 $F_n: X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{I} \rightarrow X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって

$$F_n(-, 0) = f_n \quad \text{かつ} \quad F_n|_{T_{n+1} \times \mathbb{I}} = f_n \circ R_n$$

を満たすものがとれる。さらに、 $f_{n+1} = F_n(-, 1)$ と定める。

すると、 F_n は f_n から f_{n+1} へのホモトピーであり、任意の整数 $m \geq n$ と $t \in \mathbb{I}$ に対して T_n 上では $F_m(-, t) = f_n$ である。そこで、写像 $F: X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \rightarrow X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$F(x, s, t) = \begin{cases} F_n(x, s, t - n) & (t \in [n, n+1], n \in \mathbb{N}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, s) & (t = \infty) \end{cases}$$

^{*2} 正確には、服部では U を A の開近傍としている。

と定義できる．次のとおり，この F （正確には， \mathbb{I} から $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ への単調増加な同相写像を固定して， F を $X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{I}$ から $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像とみなしたものは， $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ から T の上への変位レトラクトである．

- $F(-, 0) = f_0 = \text{id}_{X \times \mathbb{R}_{\geq 0}}$ である．
- 各 f_n は T_n を T の中に移すから， $F(-, \infty)$ は $X \times \mathbb{R}_{\geq 0} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ を T の中に移す．
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{I}$ に対して $F_n(-, t)$ は T の点を動かさないから，任意の $t \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ に対して $F(-, t)$ は T の点を動かさない．
- F が連続であることを示す．点 $(x, s) \in T_n$ に対して， $t \in [m, m+1]$ (m は 0 以上 n 未満の整数) ならば $F(x, s, t) = F_l(x, s, t-m)$ であり， $t \geq n$ ならば $F(x, s, t) = f_n(x, s)$ だから， F は $T_n \times \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 上で連続である． $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ は $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関して終位相をもち，したがって， $X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ は $(T_n \times \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})_{n \in \mathbb{N}}$ に関して終位相をもつから*3， F は全体で連続である． \square

次の命題において，位相空間 X の部分集合族 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が **CW 的** であるとは，ある部分集合 $A \subseteq X$ と空間対 (X, A) 上の相対 CW 構造が存在して，すべての X_λ がその相対 CW 構造に関して (X, A) の部分複体になることをいう．

命題 1.33 h_* を加法的ホモロジー理論とする． (X, A) を空間対とし， $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の部分集合の CW 的な増加列であって X を被覆するもの， $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を A の部分集合の CW 的な増加列であって A を被覆するものとする．このとき，任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して，列

$$h_k(X_0, A_0) \xrightarrow{i_{0*}} h_k(X_1, A_1) \xrightarrow{i_{1*}} h_k(X_2, A_2) \xrightarrow{i_{2*}} \cdots$$

の帰納極限は， j_{n*} たちを構造射として $h_n(X, A)$ に同型である．

証明 まず， $A = \emptyset$ の場合を考える． $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ の部分集合 T, P, Q を

$$T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times [n, n+1]),$$

$$P = T \setminus \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}} \left(X_n \times \left\{ n + \frac{1}{2} \right\} \right), \quad Q = T \setminus \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}+1} \left(X_n \times \left\{ n + \frac{1}{2} \right\} \right)$$

と定め， $i_P: P \cap Q \rightarrow P$ ， $i_Q: P \cap Q \rightarrow Q$ ， $j_P: P \rightarrow T$ ， $j_Q: Q \rightarrow T$ を包含写像とする． (P, Q) は T の開被覆であり，特に $(T; P, Q)$ は切除系だから，Mayer–Vietoris 完全列 (定理 1.16)

$$h_k(P \cap Q) \xrightarrow{(i_{P*}, -i_{Q*})} h_k(P) \oplus h_k(Q) \xrightarrow{(j_{P*}, j_{Q*})} h_k(T) \xrightarrow{\text{MV}} h_{k-1}(P \cap Q) \xrightarrow{(i_{P*}, -i_{Q*})} h_{k-1}(P) \oplus h_{k-1}(Q) \quad (*)$$

が得られる．これを， X_n や X のホモロジー群と関連付けよう． h_* は加法的であり，包含写像 $\coprod_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times \{n\}) \rightarrow T$ はホモトピー同値だから，同型 $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \cong h_k(T)$ が得られる．同様に，同型 $\bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}} h_k(X_n) \cong h_k(P)$ ， $\bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}+1} h_k(X_n) \cong h_k(Q)$ が得られる．これらの同型に関して，容易に確かめられるように，図式

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) & \xrightarrow{\phi} & \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}} h_k(X_n) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ h_k(P \cap Q) & \xrightarrow{i_{P*}} & h_k(P), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) & \xrightarrow{\psi} & \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}+1} h_k(X_n) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ h_k(P \cap Q) & \xrightarrow{i_{Q*}} & h_k(Q) \end{array}$$

*3 脚注*1 で述べた事実から従う．

は可換である．ここで、 ϕ と ψ は、それぞれ

$$\phi(a) = \begin{cases} a & (n \text{ は偶数}) \\ i_{n*}(a) & (n \text{ は奇数}), \end{cases} \quad \psi(a) = \begin{cases} i_{n*}(a) & (n \text{ は偶数}) \\ a & (n \text{ は奇数}) \end{cases} \quad (a \in h_k(X_n))$$

によって定まる準同型である．これより、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) & \xrightarrow{(\phi, -\psi)} & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ h_k(P \cap Q) & \xrightarrow{(i_{P*}, -i_{Q*})} & h_k(P) \oplus h_k(Q) \end{array} \quad (**)$$

を得る．一方で、包含写像 $T \rightarrow X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ と射影 $X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ との合成を $p: T \rightarrow X$ と書くと、補題 1.32 と命題 A.8 より p はホモトピー同値であり、図式

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) & \xrightarrow{\langle j_{n*} \rangle_{n \in \mathbb{N}}} & h_k(X) \\ \cong \downarrow & & \cong \uparrow p_* \\ h_k(P) \oplus h_k(Q) & \xrightarrow{\langle j_{P*}, j_{Q*} \rangle} & h_k(T) \end{array} \quad (***)$$

は可換である．完全列 (*) と可換図式 (**), (***) から完全列

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \xrightarrow{(\phi, -\psi)} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \xrightarrow{\langle j_{n*} \rangle_{n \in \mathbb{N}}} h_k(X) \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_{k-1}(X_n) \xrightarrow{(\phi, -\psi)} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_{k-1}(X_n)$$

を得るが、容易に確かめられるように準同型 $(\phi, -\psi)$ は単射だから、結局、短完全列

$$0 \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \xrightarrow{(\phi, -\psi)} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \xrightarrow{\langle j_{n*} \rangle_{n \in \mathbb{N}}} h_k(X) \rightarrow 0$$

を得る．したがって、 $h_k(X)$ は準同型 $(\phi, -\psi): \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} h_k(X_n) \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n)$ の余核に自然に同型となるが、この準同型は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \in h_k(X_n)$ を $(-1)^n(a - i_{n*}(a))$ に移すものだから、その余核は帰納極限 $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n)$ に自然に同型である．これで、 $A = \emptyset$ の場合の主張が示された．

次に、一般の場合を考える．ホモロジー完全列とその帰納極限（命題 B.6 よりこれも完全である）、および j_{n*} たちが誘導する帰納極限からの準同型のなす可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_k(A_n) & \rightarrow & \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n) & \rightarrow & \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_k(X_n, A_n) & \rightarrow & \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_{k-1}(A_n) \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_{k-1}(X_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_k(A) & \longrightarrow & h_k(X) & \longrightarrow & h_k(X, A) & \longrightarrow & h_{k-1}(A) \longrightarrow h_{k-1}(X) \end{array}$$

において、前段の結果より中央を除く四つの縦の矢印は同型だから、五項補題（命題 B.2）より中央の縦の矢印も同型である．これで、主張が示された． \square

2 特異ホモロジー

2.1 細分対

本節の結果を一般的に述べるために、いくつか用語を準備する*4．

*4 本小節で定義する用語は、「細分（する）」を除いて、すべて本稿だけのものである．

定義 2.1 (細分対, 細分三対) X を集合とする.

- (1) $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}$ を X の部分集合族とする. 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対してある $U \in \mathfrak{U}$ が存在して $A \subseteq U$ となるとき, \mathfrak{A} は \mathfrak{U} を**細分する** (refine), あるいは \mathfrak{A} は \mathfrak{U} の**細分** (refinement) であるという. また, このとき, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を X 上の**細分対**という.
- (2) X の部分集合族の組 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ であって, \mathfrak{A} が \mathfrak{U} を細分し, \mathfrak{B} が \mathfrak{A} を細分するものを, X 上の**細分三対**という.

しばしば, 部分集合族 \mathfrak{U} を細分対 $(\mathfrak{U}, \{\emptyset\})$ と同一視し, 細分対 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を細分三対 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \{\emptyset\})$ と同一視する.

定義 2.2 (細分対を細分対の中に移す写像) X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ をそれぞれ X, Y の部分集合族とする. $f(\mathfrak{U}) = \{f(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ が \mathfrak{V} を細分するとき, f は \mathfrak{U} を \mathfrak{V} の中に**移す**という.
- (2) $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ をそれぞれ X, Y 上の細分対とする. f が \mathfrak{U} を \mathfrak{V} の中に移し, かつ \mathfrak{A} を \mathfrak{B} の中に移すとき, f は $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に**移す**という.

定義 2.3 (細分対と整合するホモトピー) X, Y を位相空間, $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする.

- (1) $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ をそれぞれ X, Y の部分集合族とし, f, g は \mathfrak{U} を \mathfrak{V} の中に移すとする. f から g へのホモトピー $\phi: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ は, $\mathfrak{U} \times \mathbb{I} = \{U \times \mathbb{I} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ を \mathfrak{V} の中に移すとき, $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ と**整合する**という. $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ と整合する f から g へのホモトピーが存在するとき, f と g は $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ と**整合的にホモトピック**であるという.
- (2) $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ をそれぞれ X, Y 上の細分対とし, f, g は $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に移すとする. f から g へのホモトピー $\phi: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ は, $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ と整合し, かつ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ と整合するとき, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ と**整合する**という. $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ と整合する f から g へのホモトピーが存在するとき, f と g は $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ と**整合的にホモトピック**であるという.

2.2 特異チェイン複体と特異ホモロジー群

整数 $n \geq 0$ に対して, **標準 n -単体** (standard n -simplex) を,

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{k=0}^n t_k e_k \mid t_0, \dots, t_n \geq 0, \sum_{k=0}^n t_k = 1 \right\}$$

と定める. ここで, (e_0, \dots, e_n) は Euclid 空間 \mathbb{R}^{n+1} の標準基底である.

定義 2.4 (特異単体) X を位相空間とし, \mathfrak{U} を X の部分集合族とする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\text{Sing}_n(\mathfrak{U}) = \begin{cases} \{\sigma: \Delta^n \rightarrow X \mid \text{連続, 像はある } U \in \mathfrak{U} \text{ に含まれる}\} & (n \geq 0) \\ \emptyset & (n < 0) \end{cases}$$

と定め, その元を \mathfrak{U} 上の**特異 n -単体** (singular n -simplex) という. $\text{Sing}_n(\{X\})$ を単に $\text{Sing}_n(X)$ と書き, その元を X 上の特異 n -単体という.

$(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ が位相空間 X 上の細分対ならば, $\text{Sing}_n(\mathfrak{A}) \subseteq \text{Sing}_n(\mathfrak{U})$ である.

定義 2.5 (特異チェイン) M を R -加群とする. X を位相空間とし, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を X 上の細分対とする.

(1) R -加群 $S_n(\mathfrak{U}; M)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を

$$S_n(\mathfrak{U}; M) = M^{\oplus \text{Sing}_n(\mathfrak{U})} = \left\{ \sum_{\sigma \in \text{Sing}_n(\mathfrak{U})} m_\sigma \sigma \mid m_\sigma \in M, \text{ 有限個を除き } 0 \right\}$$

と定め, その元を \mathfrak{U} 上の M -係数の**特異 n -チェイン** (singular n -chain) という. $S_n(\{X\}; M)$ を単に $S_n(X; M)$ と書き, その元を X 上の M -係数の特異 n -チェインという.

(2) R -加群 $S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を

$$S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) = S_n(\mathfrak{U}; M) / S_n(\mathfrak{A}; M)$$

と定める ($\text{Sing}_n(\mathfrak{A}) \subseteq \text{Sing}_n(\mathfrak{U})$ より $S_n(\mathfrak{A}; M)$ が $S_n(\mathfrak{U}; M)$ の部分加群であることに注意する). A が X の部分集合であるとき, $S_n(\{X\}, \{A\}; M)$ を単に $S_n(X, A; M)$ と書く.

$S_n(\{\emptyset\}; M) = 0$ だから, $S_n(\mathfrak{U}, \{\emptyset\}; M)$ は $S_n(\mathfrak{U}; M)$ と同一視できる. 特に, $S_n(X, \emptyset; M)$ は $S_n(X; M)$ と同一視できる.

定義 2.6 (境界準同型) M を R -加群とする. X を位相空間とする. 整数 $n \geq 1$ に対して, **境界準同型** (boundary homomorphism) と呼ばれる準同型

$$\partial = \partial_n: S_n(X; M) \rightarrow S_{n-1}(X; M)$$

を, $M = R$ の場合は $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n]}$$

とすることで定め, 一般の場合は $M = R$ の場合の準同型と id_M とのテンソル積として定める. さらに, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ が X 上の細分対であるとき, 上記の準同型が誘導する準同型をそのまま

$$\partial = \partial_n: S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M)$$

と書き, これも境界準同型という.

命題 2.7 M を R -加群とする. X を位相空間とし, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を X 上の細分対とすると,

$$S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M): \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

は R -加群のチェイン複体である. すなわち, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ である.

証明 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$S_n(X; R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X; R)$$

が 0 であることを示せば十分である. $n \leq 1$ ならば明らかだから, $n \geq 2$ とする. $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n]} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l} \sigma|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n]}|_{[0, \dots, \widehat{l}, \dots, n-1]} \\ &= \sum_{0 \leq l < k \leq n} ((-1)^{k+l} \sigma|_{[0, \dots, \widehat{l}, \dots, \widehat{k}, \dots, n]} + (-1)^{l+k-1} \sigma|_{[0, \dots, \widehat{l}, \dots, \widehat{k}, \dots, n]}) \\ &= 0\end{aligned}$$

だから, $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ である. □

定義 2.8 (特異チェイン複体, 特異ホモロジー群) M を R -加群とする. X を位相空間とし, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を X 上の細分対とする. R -加群のチェイン複体

$$S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M): \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

を, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ の M -係数の**特異チェイン複体** (singular chain complex) という. また, このチェイン複体の n 次ホモロジー群を, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ の M 係数の n 次**特異ホモロジー群** (n -th singular homology group) といい,

$$H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) = H_n(S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M))$$

と書く. $\mathfrak{A} = \{\emptyset\}$ ならば \mathfrak{A} を省略する. A が X の部分集合であるとき, 「 $(\{X\}, \{A\})$ の……」の代わりに単に「 (X, A) の……」といい, $H_n(\{X\}, \{A\}; M)$ の代わりに単に $H_n(X, A; M)$ と書く. $A = \emptyset$ ならば A を省略する.*5

例 2.9 (0 次特異ホモロジー群) M を R -加群とする. 定義から容易に確かめられるように, 位相空間 X の M -係数の 0 次特異ホモロジー群 $H_0(X; M)$ は, $M^{\oplus \pi_0(X)}$ と自然に同一視できる. ここで, $\pi_0(X)$ は, X の弧状連結成分全体のなす集合である.

例 2.10 (1 点空間の特異チェイン複体, 特異ホモロジー群) M を R -加群とする. 整数 $n \geq 0$ に対して, 標準 n -単体 Δ^n から 1 点空間 pt への唯一の写像を σ_n と書くと, $\text{Sing}_n(\text{pt}) = \{\sigma_n\}$ だから,

$$S_n(\text{pt}; M) \cong \begin{cases} M & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

である. また, 整数 $n \geq 1$ に対して

$$\partial(\sigma_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} \sigma_{n-1} & (n \text{ は正の偶数}) \\ 0 & (n \text{ は正の奇数}) \end{cases}$$

だから, 連結準同型 $\partial: S_n(\text{pt}; M) \rightarrow S_{n-1}(\text{pt}; M)$ は, n が正の偶数ならば同型であり, それ以外ならば 0 である. よって, 1 点空間の M -係数の特異ホモロジー群は,

$$H_n(\text{pt}; M) \cong \begin{cases} M & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

である.

*5 \mathbb{Z} -係数の特異チェイン複体・特異ホモロジー群を, 単に特異チェイン複体・特異ホモロジー群といい, 記号においても単に $H_n(X)$ などと書くことが多い.

2.3 特異チェイン複体と特異ホモロジー群の関手性

連続写像が特異チェイン複体の間のチェイン準同型を誘導し、したがって、特異ホモロジー群の間の準同型を誘導することを見る。

定義 2.11 (連続写像が誘導するチェイン準同型) M を R -加群とする. X, Y を位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 準同型

$$f_{\#}: S_n(X; M) \rightarrow S_n(Y; M)$$

を, $M = R$ の場合は $\text{Sing}_n(X)$ から $\text{Sing}_n(Y)$ への写像 $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ を線型に拡張して定め, 一般の場合は $M = R$ の場合の準同型と id_M とのテンソル積として定める. さらに, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ がそれぞれ X, Y 上の細分対で f が $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に移すとき, 上記の準同型が誘導する準同型をそのまま

$$f_{\#}: S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_n(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M)$$

と書く.

命題 2.12 M を R -加群とする. X, Y を位相空間, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ をそれぞれ X, Y 上の細分対, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像であって $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に移すものとする. このとき, 準同型の族

$$(f_{\#}: S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_n(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M))_{n \in \mathbb{Z}}$$

は, R -加群のチェイン複体 $S_{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M)$ から $S_{\bullet}(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M)$ へのチェイン準同型である.

証明 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} S_n(X; R) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X; R) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ S_n(Y; R) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(Y; R) \end{array}$$

が可換であることを示せばよいが, これは, 定義から容易に確かめられる. □

命題 2.12 より, $S_{\bullet}(-; M)$ は, 細分対の圏から R -加群のチェイン複体の圏 $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ への関手となる.

定義 2.13 (連続写像が誘導する特異ホモロジー群の間の準同型) M を R -加群とする. X, Y を位相空間, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ をそれぞれ X, Y 上の細分対, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像であって $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に移すものとする. チェイン準同型 $f_{\#}: S_{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_{\bullet}(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M)$ が誘導する特異ホモロジー群の間の準同型を,

$$f_{*}: H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow H_n(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M)$$

と書く.

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $H_n(-; M)$ は, 細分対の圏から R -加群の圏 $R\text{-}\mathbf{Mod}$ への関手となり, 空間対だけを考えれば, 空間対の圏 $\mathbf{Top}^{(2)}$ から R -加群の圏 $R\text{-}\mathbf{Mod}$ への関手となる.

係数加群の間の準同型が特異チェイン複体の間のチェイン準同型を誘導し, したがって, 特異ホモロジー群の間の準同型を誘導することを見る.

定義 2.14 (係数加群の間の準同型が誘導するチェイン準同型) M, N を R -加群とし, $\phi: M \rightarrow N$ を準同型とする. X を位相空間とする. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 準同型 $\phi_{\#}: S_n(X; M) \rightarrow S_n(X; N)$ を

$$\phi_{\#} = \phi \oplus \text{Sing}_n(X)$$

と定める. さらに, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ が X 上の細分対であるとき, 上記の準同型が誘導する準同型をそのまま $\phi_{\#}: S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; N)$ と書く.

命題 2.15 M, N を R -加群とし, $\phi: M \rightarrow N$ を準同型とする. X を位相空間とし, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ をその上の細分対とする. このとき, 準同型の族

$$(\phi_{\#}: S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; N))_{n \in \mathbb{Z}}$$

は, R -加群のチェイン複体 $S_{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M)$ から $S_{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; N)$ へのチェイン準同型である.

証明 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} S_n(X; M) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X; M) \\ \phi_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ S_n(X; N) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X; N) \end{array}$$

が可換であることを示せばよいが, これは, 定義から容易に確かめられる. \square

命題 2.15 より, $S_{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; -)$ は, R -加群の圏 $R\text{-Mod}$ から R -加群のチェイン複体の圏 $\mathbf{C}(R\text{-Mod})$ への関手となる.

定義 2.16 (係数加群の間の準同型が誘導する特異ホモロジー群の間の準同型) M, N を R -加群とし, $\phi: M \rightarrow N$ を準同型とする. X を位相空間とし, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ をその上の細分対とする. チェイン準同型 $(\phi_{\#}: S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; N))_{n \in \mathbb{Z}}$ が誘導する特異ホモロジー群の間の準同型を,

$$\phi_*: H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; N)$$

と書く.

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; -)$ は, R -加群の圏 $R\text{-Mod}$ から自身への関手となる.

特異ホモロジーは弧状連結成分ごとに考えればよいことを見る.

命題 2.17 M を R -加群とする. (X, A) を空間対とし, X は集合として $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$ と分割され, 各 X_{λ} は X の弧状連結成分のいくつかの合併であるとする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $A_{\lambda} = A \cap X_{\lambda}$ と置く. このとき, 包含写像が誘導するチェイン準同型を構造射としてチェイン複体の同型

$$S_{\bullet}(X, A; M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_{\bullet}(X_{\lambda}, A_{\lambda}; M)$$

が成り立ち, したがって, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 包含写像が誘導する準同型を構造射として同型

$$H_n(X, A; M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_{\lambda}, A_{\lambda}; M)$$

が成り立つ.

証明 標準 n -単体 Δ^n は弧状連結だから、 X 上の特異 n -単体はただ一つの X_λ に含まれる。すなわち、集合としての分割 $\text{Sing}_n(X) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Sing}_n(X_\lambda)$ が成り立つ。同様に、集合としての分割 $\text{Sing}_n(A) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Sing}_n(A_\lambda)$ が成り立つ。よって、包含写像が誘導する準同型を構造射として同型

$$\begin{aligned} S_n(X, A; M) &= S_n(X; M)/S_n(A; M) \\ &\cong \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda; M) \right) / \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(A_\lambda; M) \right) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda; M)/S_n(A_\lambda; M) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\bullet(X_\lambda, A_\lambda; M) \end{aligned}$$

が成り立ち、したがって特異チェイン複体に関する主張が成り立つ。ホモロジー群に関する主張は、特異チェイン複体に関する主張から従う。 \square

系 2.18 (特異ホモロジーの加法性) M を R -加群とする。 $((X_\lambda, A_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ を空間対の族とし、 $(X, A) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, A_\lambda)$ と置く。このとき、包含写像が誘導するチェイン準同型を構造射としてチェイン複体の同型

$$S_\bullet(X, A; M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\bullet(X_\lambda, A_\lambda; M)$$

が成り立ち、したがって、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、包含写像が誘導する準同型を構造射として同型

$$H_n(X, A; M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda; M)$$

が成り立つ。

証明 命題 2.17 の特別な場合である。 \square

2.4 特異ホモロジー完全列

M を R -加群とし、 X を位相空間、 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ を X 上の細分三対とすると、定義から明らかに、包含写像が誘導するチェイン準同型の列

$$0 \longrightarrow S_\bullet(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; M) \longrightarrow S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}; M) \longrightarrow S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \longrightarrow 0$$

は完全である。この短完全列から、特異ホモロジー群の間に連結準同型

$$\partial = \partial_n: H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow H_{n-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; M)$$

が定義される (定義 B.15)。明示的に書けば、 ∂_n は

$$\partial_n([a + S_n(\mathfrak{A}; M)]) = \partial a + S_{n-1}(\mathfrak{B}; M) \quad (a + S_n(\mathfrak{A}; M) \in Z_n(S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M)))$$

で与えられる準同型である ($[-]$ はホモロジー類を表す)。この連結準同型を用いて、次のホモロジー完全列が得られる (定理 B.16)。

定理 2.19 (特異ホモロジー完全列) M を R -加群とし, X を位相空間, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ を X 上の細分三対とする. R -加群と準同型の列

$$\begin{aligned} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; M) \longrightarrow H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}; M) \longrightarrow H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \\ & \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}; M) \longrightarrow H_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}; M) \longrightarrow H_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \\ & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \end{aligned}$$

は完全である. ここで, 表示のない矢印は, 包含写像が誘導する準同型を表す. \square

連結準同型の自然性より, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 特異ホモロジー群の間の連結準同型 ∂_n は, 空間対の圏 $\mathbf{Top}^{(2)}$ から R -加群の圏 $R\text{-Mod}$ への関手 $H_n(-; M)$ から $H_{n-1}(J(-); M)$ ($J: \mathbf{Top}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(2)}$ は (X, A) を (A, \emptyset) に移す関手である) への自然変換をなす.

2.5 特異ホモロジーのホモトピー不変性

定理 2.20 (特異ホモロジーのホモトピー不変性) M を R -加群とし, X, Y を位相空間, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ をそれぞれ X, Y 上の細分対, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像であって $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に移すものとする. f と g が細分対 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ と整合的にホモトピックならば, チェイン写像

$$f_\#, g_\#: S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow S_\bullet(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M)$$

はチェインホモトピックであり, したがって各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_* = g_*: H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow H_n(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; M)$$

である.

証明 後半は前半から従うから (命題 B.13), 前半を示す. $M = R$ の場合に示せば十分である. f と g が $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ と整合的にホモトピックであるとして, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ と整合する f から g へのホモトピー $F: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ をとる. すると, F は $(\mathfrak{U} \times \mathbb{I}, \mathfrak{A} \times \mathbb{I})$ を $(\mathfrak{V}, \mathfrak{B})$ の中に移すから, チェイン準同型

$$F_\#: S_\bullet(\mathfrak{U} \times \mathbb{I}, \mathfrak{A} \times \mathbb{I}; R) \rightarrow S_\bullet(\mathfrak{V}, \mathfrak{B}; R)$$

を誘導する. また, $t \in \mathbb{I}$ に対して写像 $i_t: X \rightarrow X \times \mathbb{I}$ を $i_t(x) = (x, t)$ と定めると, これは $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を $(\mathfrak{U} \times \mathbb{I}, \mathfrak{A} \times \mathbb{I})$ の中に移す連続写像だから, チェイン準同型

$$i_{t\#}: S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R) \rightarrow S_\bullet(\mathfrak{U} \times \mathbb{I}, \mathfrak{A} \times \mathbb{I}; R)$$

を誘導する. チェイン準同型 $f_\#, g_\#$ は, これらを用いて $f_\# = F_\# \circ i_{0\#}$, $g_\# = F_\# \circ i_{1\#}$ と書ける. そこで, $i_{0\#}$ と $i_{1\#}$ がチェインホモトピックであることを示せばよい.

まず,

$$i_{0\#}, i_{1\#}: S_\bullet(X; R) \rightarrow S_\bullet(X \times \mathbb{I}; R)$$

がチェインホモトピックであることを示す. そのために, $i_{0\#}$ から $i_{1\#}$ へのチェインホモトピーを構成する. $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して $\tilde{\sigma} = \sigma \times \text{id}_\mathbb{I}: \Delta^n \times \mathbb{I} \rightarrow X \times \mathbb{I}$ と書くことにする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して準同型 $P_n: S_n(X; R) \rightarrow S_{n+1}(X \times \mathbb{I}; R)$ を, $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$P_n(\sigma) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{k}, \dots, n]}$$

として定める^{*6}. すると, 任意の $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\partial P_n(\sigma) &= \partial \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \bar{n}]} \right) \\
&= \sum_{l=0}^n (-1)^l \left(\sum_{k=0}^l (-1)^k \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \bar{n}]} + \sum_{k=l}^n (-1)^{k+1} \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \widehat{k}, \dots, \bar{n}]} \right) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} (-1)^{k+l} \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \bar{n}]} - \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k+l} \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \widehat{k}, \dots, \bar{n}]} \\
P_n \partial(\sigma) &= P_n \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n]} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \widehat{k}, \dots, \bar{n}]} + \sum_{l=k+1}^n (-1)^{l-1} \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \bar{n}]} \right) \\
&= \sum_{0 \leq l < k \leq n} (-1)^{k+l} \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \widehat{k}, \dots, \bar{n}]} - \sum_{0 \leq k < l \leq n} (-1)^{k+l} \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, \underline{l}, \bar{l}, \dots, \bar{n}]}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\partial P_n(\sigma) + P_n \partial(\sigma) &= \sum_{k=0}^n \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{k-1}, \bar{k}, \dots, \bar{n}]} - \sum_{k=0}^n \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{k}, \bar{k+1}, \dots, \bar{n}]} \\
&= \tilde{\sigma}|_{[\bar{0}, \dots, \bar{n}]} - \tilde{\sigma}|_{[0, \dots, \underline{n}]} \\
&= i_{1\sharp}(\sigma) - i_{0\sharp}(\sigma)
\end{aligned}$$

である. よって, $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $i_{0\sharp}$ から $i_{1\sharp}$ へのチェインホモトピーである.

前段で構成した準同型 $P_n: S_n(X; R) \rightarrow S_{n+1}(X \times \mathbb{I}; R)$ は任意の $A \subseteq X$ に対して $P_n(S_n(A; R)) \subseteq S_{n+1}(A \times \mathbb{I}; R)$ を満たすから, $S_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R)$ から $S_{n+1}(\mathfrak{U} \times \mathbb{I}, \mathfrak{A} \times \mathbb{I}; R)$ への準同型を誘導し, これは一般の場合の $i_{0\sharp}$ から $i_{1\sharp}$ へのチェインホモトピーを与える. これで, 主張が示された. \square

2.6 重心細分と切除定理

X を実位相線型空間の凸集合とすると, 点 $x \in X$ と $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して, $x \cdot \sigma \in \text{Sing}_{n+1}(X)$ を

$$(x \cdot \sigma)(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) = t_0 x + (1 - t_0) \sigma \left(\frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{n+1}}{1 - t_0} \right) \quad ((t_0, \dots, t_{n+1}) \in \Delta^{n+1})$$

と定める ($t_0 = 1$ のとき, 右辺の第二項は 0 とみなす). さらに, M を R -加群とすると, 上で定まる写像 $\sigma \mapsto x \cdot \sigma$ ($n < 0$ のときは空写像である) を線型に拡張して id_M とのテンソル積をとることで, 準同型

$$S_n(X; M) \rightarrow S_{n+1}(X; M), \quad a \mapsto x \cdot a$$

が定まる. 本小節では, この準同型を用いる.

^{*6} この準同型 $P_n: S_n(X; R) \rightarrow S_{n+1}(X \times \mathbb{I}; R)$ を, **プリズム作用素** (prism operator) という.

補題 2.21 M を R -加群とする. X を実位相線型空間の凸集合とすると, 点 $x \in X$ と $a \in S_n(X; M)$ に対して,

$$\partial(x \cdot a) = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ a - \epsilon(a)x & (n = 0) \\ a - x \cdot \partial a & (n > 0) \end{cases}$$

である. ここで, ϵ は $S_0(X; M)$ から M への準同型であり,

$$\epsilon \left(\sum_{\sigma \in \text{Sing}_0(X)} m_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in \text{Sing}_0(X)} m_\sigma$$

と定義される^{*7}.

証明 $M = R$ の場合に, $a = \sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して主張を示せば十分である. $n = 0$ ならば

$$\partial(x \cdot \sigma) = (x \cdot \sigma)(1) - (x \cdot \sigma)(0) = \sigma - x$$

であり, $n > 0$ ならば

$$\begin{aligned} \partial(x \cdot \sigma) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (x \cdot \sigma)|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n+1]} \\ &= \sigma + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k x \cdot (\sigma|_{[0, \dots, \widehat{k-1}, \dots, n]}) \\ &= \sigma - \sum_{k=0}^n (-1)^k x \cdot (\sigma|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n]}) \\ &= \sigma - x \cdot \partial(\sigma) \end{aligned}$$

だから, 主張は成り立つ. □

標準 n -単体 Δ^n 上の恒等写像は Δ^n 上の特異 n -単体だが, これを ι_n と書く. また, Δ^n の重心を

$$b_n = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) \in \Delta^n$$

と書く. 本小節の以下の部分では, これらの記号を用いる.

定義 2.22 (重心細分) M を R -加群とする. X を位相空間とする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, X 上の**重心細分** (barycentric subdivision) と呼ばれる準同型

$$\text{Sd}_n: S_n(X; M) \rightarrow S_n(X; M)$$

を, 次のように定める. $M = R$ の場合は, $n < 0$ については $\text{Sd}_n = 0$ とし, $n \geq 0$ については $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$\text{Sd}_n(\sigma) = \begin{cases} \sigma & (n = 0) \\ \sigma_{\sharp}(b_n \cdot \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n)) & (n > 0) \end{cases}$$

として n に関して再帰的に定める. 一般の場合は, $M = R$ の場合の準同型と id_M とのテンソル積を Sd_n と定める.

^{*7} この準同型 $\epsilon: S_0(X; M) \rightarrow M$ を, **添加写像** (augmentation map) という.

容易にわかるように、重心細分は連続写像が誘導する準同型と可換である．すなわち、 $f: X \rightarrow Y$ を位相空間の間の連続写像とすると、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} S_n(X; M) & \xrightarrow{f_\#} & S_n(Y; M) \\ \text{Sd}_n \downarrow & & \downarrow \text{Sd}_n \\ S_n(X; M) & \xrightarrow{f_\#} & S_n(Y; M) \end{array}$$

は可換である．

定理 2.23 M を R -加群とする．位相空間 X 上の重心細分 Sd_\bullet は、 $S_\bullet(X; M)$ から自身へのチェイン写像であり、 $\text{id}_{S_\bullet(X; M)}$ にチェインホモトピックである．

証明 $M = R$ の場合に示せば十分である．まず、 Sd_\bullet が $S_\bullet(X; R)$ から自身へのチェイン写像であること、すなわち任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial \text{Sd}_n = \text{Sd}_{n-1} \partial \quad (*)$$

であることを、 n に関する帰納法で示す． $n \leq 0$ のとき、 $(*)$ の両辺はともに 0 である． $n = 1$ のとき、 $\sigma \in \text{Sing}_1(X)$ に対して

$$\begin{aligned} \partial \text{Sd}_1(\sigma) &= \partial \sigma_\#(b_1 \cdot \partial(\iota_1)) \\ &= \sigma_\# \partial(b_1 \cdot \partial(\iota_1)) \\ &= \sigma_\# \partial(\iota_1) \\ &= \partial(\sigma) \\ &= \text{Sd}_0 \partial(\sigma) \end{aligned}$$

だから、 $(*)$ は成り立つ． $n \geq 2$ とし、 $(*)$ は $n-1$ まで成り立つとする． $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$\begin{aligned} \partial \text{Sd}_n(\sigma) &= \partial \sigma_\#(b_n \cdot \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n)) \\ &= \sigma_\# \partial(b_n \cdot \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n)) \\ &= \sigma_\#(\text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n) - b_n \cdot \partial \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n)) \end{aligned}$$

だが（最後の等号で補題 2.21 を用いた）、帰納法の仮定より $\partial \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n) = \text{Sd}_{n-1} \partial \partial(\iota_n) = 0$ だから、

$$\partial \text{Sd}_n(\sigma) = \sigma_\# \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n) = \text{Sd}_{n-1} \partial(\sigma)$$

である．よって、 $(*)$ は n のときも成り立つ．これで、帰納法が完成した．

次に、 Sd_\bullet から $\text{id}_{S_\bullet(X; R)}$ へのチェインホモトピーを構成する． $n \in \mathbb{Z}$ に対する準同型

$$T_n: S_n(X; R) \rightarrow S_{n+1}(X; R)$$

を、 $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$T_n(\sigma) = \begin{cases} 0 & (n \leq 0) \\ \sigma_\#(b_n \cdot (\iota_n - T_{n-1} \partial(\iota_n))) & (n > 0) \end{cases}$$

として、 n に関して再帰的に定める．容易にわかるように、 T_n は連続写像が誘導する準同型と可換である．

以下、この $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が Sd_\bullet から $\text{id}_{S_\bullet(X; M)}$ へのチェインホモトピーであること、すなわち任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial T_n + T_{n-1} \partial = \text{id}_{S_n(X; R)} - \text{Sd}_n \quad (**)$$

であることを, n に関する帰納法で示す. $n < 0$ のとき, $(**)$ の両辺はともに 0 である. $n = 0$ のとき, $x \in X = \text{Sing}_0(X)$ に対して $T_0(x) = x_\#(b_0 \cdot \iota_0)$ は x に値をとる定値写像だから $\partial T_0(x) = 0$ であり, $(**)$ の両辺はともに 0 である. $n \geq 1$ とし, $(**)$ は $n-1$ まで成り立つとする. $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して

$$\begin{aligned}\partial T_n(\sigma) &= \partial \sigma_\#(b_n \cdot (\iota_n - T_{n-1} \partial(\iota_n))) \\ &= \sigma_\# \partial(b_n \cdot (\iota_n - T_{n-1} \partial(\iota_n))) \\ &= \sigma_\#(\iota_n - T_{n-1} \partial(\iota_n) - b_n \cdot (\partial(\iota_n) - \partial T_{n-1} \partial(\iota_n)))\end{aligned}$$

だが (最後の等号で補題 2.21 を用いた), 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}\partial(\iota_n) - \partial T_{n-1} \partial(\iota_n) &= (\text{id} - \partial T_{n-1}) \partial(\iota_n) \\ &= (\text{Sd}_{n-1} + T_{n-2} \partial) \partial(\iota_n) \\ &= \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n)\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}\partial T_n(\sigma) &= \sigma_\#(\iota_n - T_{n-1} \partial(\iota_n) - b_n \cdot \text{Sd}_{n-1} \partial(\iota_n)) \\ &= \sigma_\#(\iota_n - T_{n-1} \partial(\iota_n) - \text{Sd}_n(\iota_n)) \\ &= \sigma - T_{n-1} \partial(\sigma) - \text{Sd}_n(\sigma)\end{aligned}$$

である. よって, $(**)$ は n のときも成り立つ. これで, 帰納法が完成した. \square

注意 2.24 定理 2.23 の証明において, Sd_\bullet から $\text{id}_{S_\bullet(X;R)}$ へのチェインホモトピー $(T_n: S_n(X;R) \rightarrow S_{n+1}(X;R))_{n \in \mathbb{Z}}$ を構成した. ここから, $m \in \mathbb{N}$ に対して, Sd_\bullet^m から $\text{id}_{S_\bullet(X;R)}$ へのチェインホモトピー $(T_n^{(m)}: S_n(X;R) \rightarrow S_{n+1}(X;R))_{n \in \mathbb{Z}}$ が,

$$T_n^{(m)} = T_n + T_n \text{Sd}_n + \cdots + T_n \text{Sd}_n^{m-1}$$

として得られる. すぐ下で述べる定理 2.26 の証明で, この $T_n^{(m)}$ を用いる.

補題を一つ準備する. 実位相線型空間の凸集合 X 上の特異 n -単体 σ のうち, 任意の $\sum_{i=0}^n t_i e_i \in \Delta^n(\mathbb{R}^{n+1})$ の標準基底を (e_0, \dots, e_n) と書いた) に対して $\sigma(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i \sigma(e_i)$ を満たすものを, X 上の**アフィン n -単体**という. n に関する帰納法で容易に確かめられるように, アフィン n -単体 σ の重心細分 $\text{Sd}_n(\sigma)$ (\mathbb{Z} -係数で考える) に現れる特異 n -単体 τ は, またアフィン n -単体である.

補題 2.25 σ を \mathbb{R}^N 上のアフィン n -単体とし, τ を重心細分 $\text{Sd}_n(\sigma)$ (\mathbb{Z} -係数で考える) に現れるアフィン n -単体とすると,

$$\text{diam}(\tau) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma)$$

である. ここで, 記号 diam は, 特異単体の像の Euclid 距離に関する直径を表す.

証明 $n \geq 0$ に関する帰納法で主張を示す. $n = 0$ のとき, 主張は明らかである. $n \geq 1$ とし, $n-1$ のときは主張が成り立つとする. τ はアフィン n -単体だから, τ の任意の 2 頂点の間の距離が $(n/(n+1)) \text{diam}(\sigma)$ 以下であることを示せばよい. 重心細分の定義より, σ のある面 $\sigma' = \sigma|_{[0, \dots, \widehat{i}, \dots, n]}$ の重心細分 $\text{Sd}_{n-1}(\sigma')$ に現れるアフィン $(n-1)$ -単体 τ' が存在して, $\tau = \sigma(b_n) \cdot \tau'$ となっている. τ' の 2 頂点 v, w に対しては, 帰納法の仮定より

$$\|v - w\| \leq \text{diam}(\tau') \leq \frac{n-1}{n} \text{diam}(\sigma') \leq \frac{n-1}{n} \text{diam}(\sigma)$$

である。一方で, $p \in \Delta^n$ と $b_n = (1/(n+1), \dots, 1/(n+1))$ より

$$-\frac{1}{n}v + \frac{n+1}{n}\sigma(b_n) = \sigma\left(-\frac{1}{n}p + \frac{n+1}{n}b_n\right) \in \sigma(\Delta^n)$$

であることに注意すれば, τ' の頂点 $v = \sigma(p)$ と $\sigma(b_n)$ との距離は

$$\|v - \sigma(b_n)\| = \frac{n}{n+1} \left\| v - \left(-\frac{1}{n}v + \frac{n+1}{n}\sigma(b_n) \right) \right\| \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma)$$

と評価できる。これで, 帰納法が完成した。 \square

定理 2.26 M を R -加群とする。 X を位相空間とし, \mathfrak{U} を X の本質的開被覆とする。このとき, 包含写像が誘導するチェイン写像

$$i_\# : S_\bullet(\mathfrak{U}; M) \rightarrow S_\bullet(X; M)$$

は, チェインホモトピー同値である。

証明 $M = R$ の場合に示せば十分である。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 準同型

$$D_n : S_n(X; R) \rightarrow S_{n+1}(X; R)$$

を, 次のように定める。

- $n < 0$ のとき, $D_n = 0$ とする。
- $n \geq 0$ のとき, $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して,

$$m(\sigma) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \text{Sd}_n^m(\sigma) \in S_n(\mathfrak{U}; R)\}$$

と置く。 $\sigma^{-1}(\mathfrak{U}) = \{\sigma^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ は Δ^n の本質的開被覆だから, 補題 2.25 と Lebesgue の被覆補題より, 十分大きい $m \in \mathbb{N}$ に対しては $\text{Sd}_n^m(\iota_n) \in S_n(\sigma^{-1}(\mathfrak{U}); R)$ であり, このとき $\text{Sd}_n^m(\sigma) \in S_n(\mathfrak{U}; R)$ である。したがって, $m(\sigma) < \infty$ である。これを用いて,

$$D_n(\sigma) = T_n^{(m(\sigma))}(\sigma)$$

と定める。ここで, $T_n^{(m)} : S_n(X; R) \rightarrow S_{n+1}(X; R)$ は注意 2.24 で定義した準同型である。

これを用いて,

$$\psi_n = \text{id}_{S_n(X; R)} - \partial D_n - D_{n-1} \partial : S_n(X; R) \rightarrow S_n(X; R)$$

と定める。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \partial \psi_n &= \partial - \partial \partial D_n - \partial D_{n-1} \partial \\ &= \partial - \partial D_{n-1} \partial \\ &= \partial - \partial D_{n-1} \partial - D_{n-2} \partial \partial \\ &= \psi_{n-1} \partial \end{aligned}$$

だから, ψ_\bullet は $S_\bullet(X; R)$ から自身へのチェイン写像である。

任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\psi_n(S_n(X; R)) \subseteq S_n(\mathfrak{U}; R)$ であり、したがって ψ_\bullet が $S_\bullet(X; R)$ から $S_\bullet(\mathfrak{U}; R)$ へのチェイン写像とみなせることを示す. $n \leq 0$ ならば明らかだから、 $n > 0$ とする. $\sigma \in \text{Sing}_n(X)$ に対して、

$$\begin{aligned}\psi_n(\sigma) &= \sigma - \partial D_n(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma) \\ &= \sigma - \partial T_n^{(m(\sigma))}(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma) \\ &= (\text{id}_{S_n(X; R)} - \partial T_n^{(m(\sigma))})(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma) \\ &= (\text{Sd}_n^{m(\sigma)} + T_{n-1}^{(m(\sigma))}\partial)(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma) \\ &= \text{Sd}_n^{m(\sigma)}(\sigma) + T_{n-1}^{(m(\sigma))}\partial(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma)\end{aligned}$$

である. $m(\sigma)$ の定義より、 $\text{Sd}_n^{m(\sigma)}(\sigma) \in S_n(\mathfrak{U}; R)$ である. また、各 i に対して $\sigma_i = \sigma|_{[0, \dots, \widehat{i}, \dots, n]}$ と置き、 $m(\sigma_i) \leq m(\sigma)$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}& T_{n-1}^{(m(\sigma))}\partial(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i (T_{n-1}^{(m(\sigma))}(\sigma_i) - T_{n-1}^{m(\sigma_i)}(\sigma_i)) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i (T_{n-1} \text{Sd}_{n-1}^{m(\sigma_i)}(\sigma_i) + T_{n-1} \text{Sd}_{n-1}^{m(\sigma_i)+1}(\sigma_i) + \dots + T_{n-1} \text{Sd}_{n-1}^{m(\sigma)}(\sigma_i))\end{aligned}$$

を得る. $m \geq m(\sigma_i)$ ならば $\text{Sd}_{n-1}^{m(\sigma_i)}(\sigma_i) \in S_{n-1}(\mathfrak{U}; R)$ であり、 T_{n-1} が連続写像が誘導する準同型と可換であることからわかるように $T_{n-1}(S_{n-1}(\mathfrak{U}; R)) \subseteq S_{n-1}(\mathfrak{U}; R)$ だから、

$$T_{n-1}^{(m(\sigma))}\partial(\sigma) - D_{n-1}\partial(\sigma) \in S_{n-1}(\mathfrak{U}; R)$$

である. よって、 $\psi_n(\sigma) \in S_{n-1}(\mathfrak{U}; R)$ である. これで、 $\psi_n(S_n(X; R)) \subseteq S_n(\mathfrak{U}; R)$ が示された.

ψ_\bullet を $S_\bullet(X; R)$ から $S_\bullet(\mathfrak{U}; R)$ へのチェイン写像とみなす. $\sigma \in \text{Sing}_n(\mathfrak{U})$ に対しては $m(\sigma) = 0$ だから、

$$\psi_\bullet i_\# = \text{id}_{S_\bullet(\mathfrak{U}; R)}$$

である. また、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial D_n + D_{n-1}\partial = \text{id}_{S_n(X; R)} - i_\# \psi_n$$

だから、 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $i_\# \psi_\bullet$ から $\text{id}_{S_\bullet(\mathfrak{U}; R)}$ へのチェインホモトピーである. よって、 ψ_\bullet は $i_\#$ のチェインホモトピー逆である. これで、主張が示された. \square

系 2.27 M を R -加群とする. (X, A) を空間対、 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ を X 上の細分対とし、 $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}$ はそれぞれ X, A の本質的開被覆であるとする. このとき、包含写像が誘導する準同型

$$i_*: H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \rightarrow H_n(X, A; M)$$

は、同型である.

証明 $\mathfrak{A} = \{\emptyset\}$ (したがって $A = \emptyset$) の場合は、定理 2.26 とチェインホモトピー同値がホモロジー群の同型を誘導すること (系 B.14) との結果である. 一般の場合は、ホモロジー完全列 (定理 2.19) の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(\mathfrak{A}; M) & \longrightarrow & H_n(\mathfrak{U}; M) & \longrightarrow & H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathfrak{A}; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathfrak{U}; M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A; M) & \longrightarrow & H_n(X; M) & \longrightarrow & H_n(X, A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X; M) \end{array}$$

を考えると、先の場合の結果と五項補題（命題 B.2）から従う。 \square

系 2.28（切除定理） M を R -加群とする。 X を位相空間、 A, B を X の部分空間とし、 $\overline{B} \subseteq A^\circ$ を満たすとする。 このとき、 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 包含写像が誘導する準同型

$$i_*: H_n(X \setminus B, A \setminus B; M) \rightarrow H_n(X, A; M)$$

は、同型である。

証明 (U, V) が X の本質的開被覆であるとして、 包含写像が誘導する準同型

$$i_*: H_n(U, U \cap V; M) \rightarrow H_n(X, V; M)$$

が同型であることを示せばよい ($U = X \setminus B$, $V = A$ と対応する)。 $S_n(U; M)$, $S_n(V; M)$, $S_n(U \cap V; M)$ を $S_n(X; M)$ の部分加群とみなすと $S_n(U \cap V; M) = S_n(U; M) \cap S_n(V; M)$ かつ $S_n(\{U, V\}; M) = S_n(U; M) + S_n(V; M)$ だから、 第二同型定理と合わせて同型

$$\begin{aligned} S_n(U, U \cap V; M) &= S_n(U; M) / (S_n(U; M) \cap S_n(V; M)) \\ &\cong (S_n(U; M) + S_n(V; M)) / S_n(V; M) \\ &= S_n(\{U, V\}, V; M) \end{aligned}$$

を得るが、これは包含写像が誘導するものである。これより、包含写像はチェイン同型 $S_\bullet(U, U \cap V; M) \cong S_\bullet(\{U, V\}, V; M)$ を誘導し、したがって同型

$$H_n(U, U \cap V; M) \cong H_n(\{U, V\}, V; M)$$

を誘導する。また、定理 2.26 より、包含写像は同型

$$H_n(\{U, V\}, V; M) \cong H_n(X, V; M)$$

を誘導する。これら二つを合わせて、主張を得る。 \square

以上で、次のことが証明できた。

定理 2.29 M を R -加群とする。 M -係数の特異ホモロジー群を与える関手の族 $(H_n(-; M))_{n \in \mathbb{Z}}$ と連結準同型を与える自然変換の族 $(\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ との組は、加法的な R -係数の常ホモロジー理論である。

証明 特異ホモロジーがホモトピー不変性、完全列公理、切除公理、加法性、次元公理を満たすことを、それぞれ、定理 2.20, 定理 2.19, 系 2.28, 系 2.18, 例 2.10 で見た。 \square

定理 2.29 より、1 節の結果はすべて、特異ホモロジーに対しても成り立つ。特異ホモロジーから定義される被約ホモロジー群を、 $\tilde{H}_n(X; M)$ のように書く。

例 2.30 M を R -加群とする。例 1.10 と例 1.19 より、 $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ (整数 $n \geq 0$) の特異ホモロジー群および球面 \mathbb{S}^n の被約特異ホモロジー群は、

$$H_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}; M) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n; M) \cong \begin{cases} M & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である。また、球面 \mathbb{S}^n の特異ホモロジー群は、 $n = 0$ のとき

$$H_k(\mathbb{S}^0; M) \cong \begin{cases} M \oplus M & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

であり、 $n \geq 1$ のとき

$$H_k(\mathbb{S}^n; M) \cong \begin{cases} M & (k = 0, n) \\ 0 & (k \neq 0, n) \end{cases}$$

である。

例 2.31 空間対 $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ (整数 $n \geq 0$) は $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ に同相だから、例 2.30 より、

$$H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong \begin{cases} R & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

である。

$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong R$ の生成元を具体的に与えよう。標準 n -単体 Δ^n 上の恒等写像は Δ^n 上の特異 n -単体だが、これを ι_n と書く。 $\iota_n + S_n(\partial\Delta^n; R)$ は特異チェイン複体 $S_\bullet(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$ の n 次サイクルであり、ホモロジー類

$$e_n = [\iota_n + S_n(\partial\Delta^n; R)] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$$

を定める。

上記のホモロジー類 e_n が $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$ の生成元であることを、 n に関する帰納法で示す。 $n = 0$ のときは明らかである。次に、 $n \geq 0$ として、

$$A_{n+1} = \partial\Delta^{n+1} \setminus \left\{ (t_0, \dots, t_n, 0) \mid t_0, \dots, t_n > 0, \sum_{k=0}^n t_k = 1 \right\}$$

と置く。空間三対 $(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}, A_{n+1})$ のホモロジー完全列 (定理 2.19)

$$H_{n+1}(\Delta^{n+1}, A_{n+1}; R) \longrightarrow H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}; R) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial\Delta^{n+1}, A_{n+1}; R) \longrightarrow H_n(\Delta^{n+1}, A_{n+1}; R)$$

を考える。 Δ^{n+1} と A_{n+1} は可縮だから空間対 (Δ^{n+1}, A_{n+1}) のホモロジー群はすべて 0 であり (命題 1.2), したがって境界準同型 $\partial: H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}; R) \rightarrow H_n(\partial\Delta^{n+1}, A_{n+1}; R)$ は同型である。また、写像 $i: (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (\partial\Delta^{n+1}, A_{n+1})$, $x \mapsto (x, 0)$ は空間対の埋め込みであり、すべてのホモロジー群の間に切除同型を誘導する (命題 1.8)。これらを合わせて同型

$$H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}; R) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial\Delta^{n+1}, A_{n+1}; R) \xleftarrow{i_*} H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$$

を得るが、境界準同型の定義 (2.4 節) より

$$\begin{aligned} \partial(e_{n+1}) &= [\partial(\iota_{n+1}) + S_n(A_{n+1}; R)] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \iota_{n+1}|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n+1]} + S_n(A_{n+1}; R) \right] \\ &= (-1)^{n+1} [\iota_{n+1}|_{[0, \dots, n]} + S_n(A_{n+1}; R)] \\ &= (-1)^{n+1} i_*(e_n) \end{aligned}$$

だから ($k \in \{0, \dots, n\}$ に対して $\iota_{n+1}|_{[0, \dots, \widehat{k}, \dots, n+1]} \in S_n(A_{n+1}; R)$ であることを用いた), この同型を通して e_{n+1} と e_n は符号を除いて対応する。よって、 e_n が $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$ の生成元ならば、 e_{n+1} は $H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}; R)$ の生成元である。これで、帰納法が完成した。

2.7 特異ホモロジーの Mayer–Vietoris 完全列

定理 1.22 で一般のホモロジー理論に対する Mayer–Vietoris 完全列の一般形を証明したが、特異ホモロジーについては、ホモロジー代数を利用した簡明な証明がある。本小節では、それを紹介する。

定理 2.32 (特異ホモロジーの Mayer–Vietoris 完全列) M を R -加群とする。 $(X; X_1, X_2)$, $(A; A_1, A_2)$ は切除系であって、 A , A_1 , A_2 はそれぞれ X , X_1 , X_2 の部分空間であるとし、 $X_{12} = X_1 \cap X_2$, $A_{12} = A_1 \cap A_2$ と置く。 $i_k: (X_{12}, A_{12}) \rightarrow (X_k, A_k)$, $j_k: (X_k, A_k) \rightarrow (X, A)$ ($k = 0, 1$) を包含写像とする。このとき、準同型の列

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\text{MV}} H_n(X_{12}, A_{12}; M) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X_1, A_1; M) \oplus H_n(X_2, A_2; M) \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} H_n(X, A; M) \\ &\xrightarrow{\text{MV}} H_{n-1}(X_{12}, A_{12}; M) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_{n-1}(X_1, A_1; M) \oplus H_{n-1}(X_2, A_2; M) \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} H_{n-1}(X, A; M) \\ &\xrightarrow{\text{MV}} \cdots \end{aligned}$$

は完全である。準同型 MV は、証明の中で構成される。^{*8}

証明 R -加群のチェイン複体の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_\bullet(A_{12}; M) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & S_\bullet(A_1; M) \oplus S_\bullet(A_2; M) & \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} & S_\bullet(\{A_1, A_2\}; M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_\bullet(X_{12}; M) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & S_\bullet(X_1; M) \oplus S_\bullet(X_2; M) & \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} & S_\bullet(\{X_1, X_2\}; M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_\bullet(X_{12}, A_{12}; M) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & S_\bullet(X_1, A_1; M) \oplus S_\bullet(X_2, A_2; M) & \xrightarrow{\langle j_{1*}, -j_{2*} \rangle} & S_\bullet(\{X_1, X_2\}, \{A_1, A_2\}; M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

を考えると、三つの列は定義より完全であり、上と中央の行が完全であることも容易に確かめられる。したがって、九項補題（命題 B.3）より、下の行も完全である。このチェイン複体の短完全列から得られるホモロジー完全列は、 $H_n(X, A; M)$ の代わりに $H_n(\{X_1, X_2\}, \{A_1, A_2\}; M)$ が現れること以外は主張の完全列と一致する。さらに、ホモロジー完全列（定理 2.19）の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(\{A_1, A_2\}; M) & \longrightarrow & H_n(\{X_1, X_2\}; M) & \longrightarrow & H_n(\{X_1, X_2\}, \{A_1, A_2\}; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(\{A_1, A_2\}; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(\{X_1, X_2\}; M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A; M) & \longrightarrow & H_n(X; M) & \longrightarrow & H_n(X, A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X; M) \end{array}$$

において、 $(X; X_1, X_2)$ と $(A; A_1, A_2)$ が切除系であることより中央を除く四つの縦の矢印は同型だから、五項補題（命題 B.2）より中央の縦の矢印も同型である。よって、上記のホモロジー完全列にこの同型を組み合わせることで、主張の完全列を得る。 \square

^{*8} 定理 1.22 と定理 2.32 の証明でそれぞれ構成した準同型 MV が（少なくとも符号を除いて）一致することは、確かめるべきことだが、面倒くさくて考えていない。誰かわかったら教えてください。

2.8 特異ホモロジーと帰納極限

本小節では、 X を位相空間とすると、有向集合 Λ で添字付けられた X の被覆 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ であって、 $\lambda \leq \mu$ ならば $X_\lambda \subseteq X_\mu$ であり、任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対してある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $K \subseteq X_\lambda$ となるものを、 X の**強被覆**ということにする。たとえば、開被覆は強被覆である。

命題 2.33 M を R -加群とする。 (X, A) を空間対とし、 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (Λ は有向集合) をそれぞれ X , A の強被覆とする。 $i_{\mu\lambda}: (X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow (X_\mu, A_\mu)$ ($\lambda \leq \mu$), $j_\lambda: (X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow (X, A)$ を包含写像とする。

- (1) 包含写像が誘導するチェイン準同型 $i_{\mu\lambda\#}: S_\bullet(X_\lambda, A_\lambda; M) \rightarrow S_\bullet(X_\mu, A_\mu; M)$ たちによって $(S_\bullet(X_\lambda, A_\lambda; M))_{\lambda \in \Lambda}$ を R -加群のチェイン複体の帰納系とみなすとき、その帰納極限は、包含写像が誘導するチェイン準同型 $j_{\lambda\#}: S_\bullet(X_\lambda, A_\lambda; M) \rightarrow S_\bullet(X, A; M)$ たちを構造射として $S_\bullet(X, A; M)$ に同型である。
- (2) $n \in \mathbb{Z}$ とする。包含写像が誘導する準同型 $i_{\mu\lambda*}: H_n(X_\lambda, A_\lambda; M) \rightarrow H_n(X_\mu, A_\mu; M)$ たちによって $(H_n(X_\lambda, A_\lambda; M))_{\lambda \in \Lambda}$ を R -加群の帰納系とみなすとき、その帰納極限は、包含写像が誘導する準同型 $j_{\lambda*}: H_n(X_\lambda, A_\lambda; M) \rightarrow H_n(X, A; M)$ たちを構造射として $H_n(X, A; M)$ に同型である。

証明 (1) まず、 $A = \emptyset$ の場合を考える。このとき、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $S_\bullet(X_\lambda; M)$ は $S_\bullet(X; M)$ の部分チェイン複体とみなせる。さらに、 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が X の強被覆であることより、 X 上の任意の特異 n -単体 σ に対してある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_\lambda$ となるから、 $S_n(X; M) = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda; M)$ である。よって、帰納極限 $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} S_\bullet(X_\lambda; M)$ は $j_{\lambda\#}$ たちを構造射として $S_\bullet(X; M)$ に同型である。

次に、一般の場合を考える。包含写像が誘導する準同型からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} S_\bullet(A_\lambda; M) & \rightarrow & \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} S_\bullet(X_\lambda; M) & \rightarrow & \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} S_\bullet(X_\lambda, A_\lambda; M) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_\bullet(A; M) & \longrightarrow & S_\bullet(X; M) & \longrightarrow & S_\bullet(X, A; M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

において、二つの行はともに完全である (命題 B.6)。前段の結果より左と中央の縦の矢印は同型だから、右の矢印も同型である。これで、主張が示された。

(2) (1) と命題 B.10 から従う。 □

命題 2.33 の例を見るために、補題を準備する。

補題 2.34 位相空間と埋め込みの列

$$X_0 \xrightarrow{i_0} X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \xrightarrow{i_2} \cdots$$

を考え、 $X = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} X_k$ と置く。各 $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $j_k: X_k \rightarrow X$ を自然な写像とする。

- (1) 各 $j_k: X_k \rightarrow X$ は埋め込みである。
- (2) 各 X_k が T_1 空間であるとする。このとき、 $(j_k(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ は X の強被覆である。

証明 (1) j_k が単射連続写像であることは明らかである。 U_k を X_k の開集合として、 $j_k(U_k)$ が $j_k(X_k)$ の開集合であることを示す。各 i_l は埋め込みだから、 $l > k$ に対して再帰的に X_l の開集合 U_l をとって、任意の

$l \geq k$ に対して $i_l(U_l) = U_{l+1} \cap i_l(X_l)$ となるようにできる. これを用いて

$$U = \bigcup_{l=k}^{\infty} j_l(U_l) \subseteq X$$

と置くと, 任意の $l \geq k$ に対して $j_l^{-1}(U) = U_l$ は X_l の開集合だから U は X の開集合であり, また $U \cap j_k(X_k) = j_k(U_k)$ である. よって, $j_k(U_k)$ は $j_k(X_k)$ の開集合である.

(2) 埋め込み j_k によって, X_k を X の部分空間とみなす. 任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ がある X_k に含まれることを示せばよい. K がどの X_k にも含まれないとすると, 各 $k \geq 0$ に対して点 $x_k \in K \setminus X_k$ がとれる. $S = \{x_k \mid k \geq 0\}$ と置く. $S' \subseteq S$ とすると, 任意の $k \geq 0$ に対して $S' \cap X_k$ は有限だから X_k の閉集合であり (X_k の T_1 性を用いた), これは S' が X の (したがって K の) 閉集合であることを意味する. 特に, S は K の離散閉集合である. ところが, S は無限だから, これは K のコンパクト性に矛盾する. よって, 背理法より, K はある X_k に含まれる. \square

以下, 補題 2.34 の状況で, 各 $j_k: X_k \rightarrow X$ を**自然な埋め込み**という.

系 2.35 T_1 空間と埋め込みの列

$$X_0 \xrightarrow{i_0} X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \xrightarrow{i_2} \cdots$$

を考え, $X = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} X_k$ と置く. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, $j_k: X_k \rightarrow X$ を自然な埋め込みとする.

(1) R -加群のチェイン複体とチェイン準同型の列

$$S_\bullet(X_0; M) \xrightarrow{i_{0\#}} S_\bullet(X_1; M) \xrightarrow{i_{1\#}} S_\bullet(X_2; M) \xrightarrow{i_{2\#}} \cdots$$

の帰納極限は, 自然な埋め込みが誘導するチェイン準同型 $j_{k\#}: S_\bullet(X_k; M) \rightarrow S_\bullet(X; M)$ たちを構造射として $S_\bullet(X; M)$ に同型である.

(2) $n \in \mathbb{Z}$ とする. R -加群と準同型の列

$$H_n(X_0; M) \xrightarrow{i_{0*}} H_n(X_1; M) \xrightarrow{i_{1*}} H_n(X_2; M) \xrightarrow{i_{2*}} \cdots$$

の帰納極限は, 自然な埋め込みが誘導する準同型 $j_{k*}: H_n(X_k; M) \rightarrow H_n(X; M)$ たちを構造射として $H_n(X; M)$ に同型である.

証明 命題 2.33 と補題 2.34 から従う. \square

2.9 普遍係数定理

定理 2.36 (特異ホモロジーに対する普遍係数定理) R を単項イデアル整域とし, M を R -加群とする. 位相空間 X 上の細分対 $(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 自然に構成される準同型の列

$$0 \longrightarrow H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R) \otimes_R M \longrightarrow H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R), M) \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列である. 特に, $H_{n-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R)$ または M が平坦ならば, 自然な準同型

$$H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R) \otimes_R M \rightarrow H_n(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; M)$$

は同型である.

証明 ホモロジー代数における普遍係数定理 (定理 B.17) で $N_\bullet = S_\bullet(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}; R)$ としたものである. \square

系 2.37 (被約特異ホモロジーに対する普遍係数定理) R を単項イデアル整域とし, M を R -加群とする. 空でない位相空間 X に対して, 自然に構成される準同型の列

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(X; R) \otimes_R M \longrightarrow \tilde{H}_n(X; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(\tilde{H}_{n-1}(X; R), M) \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列である. 特に, $\tilde{H}_{n-1}(X; R)$ または M が平坦ならば, 自然な準同型

$$\tilde{H}_n(X; R) \otimes_R M \rightarrow \tilde{H}_n(X; M)$$

は同型である.

証明 1 点 $x_0 \in X$ を固定すると, 包含写像 $j: X \rightarrow (X, x_0)$ が誘導する準同型 $j_*: H_n(X; M) \rightarrow H_n(X, x_0; M)$ は, 同型 $H_n(X; M) \cong H_n(X, x_0; M)$ を誘導する (系 1.14). 図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X; R) \otimes_R M & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X; M) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(\tilde{H}_{n-1}(X; R), M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow j_* \otimes \mathrm{id}_M & & \downarrow j_* & & \downarrow \mathrm{Tor}_1^R(j_*, M) \\ 0 & \longrightarrow & H_n(X, x_0; R) \otimes_R M & \longrightarrow & H_n(X, x_0; M) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(X, x_0; R), M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

は可換であり, 定理 2.36 より下の行は分裂短完全列だから, 上の行も分裂短完全列である. \square

2.10 Euler 標数

本小節では, 特異ホモロジーを用いて, 位相空間 (あるいは空間対) の不変量である Euler 標数を定義する.

第一の準備として, 整域上の加群の階数の定義と性質を確認しておく. 整域 R 上の加群 M の **階数** (rank) は, R の分数体 $\mathrm{Frac}(R)$ への係数拡大を用いて,

$$\mathrm{rank}_R M = \dim_{\mathrm{Frac}(R)}(M \otimes_R \mathrm{Frac}(R))$$

と定義される. 明らかに, 有限生成 R -加群の階数は有限である^{*9}. また, R -加群の短完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

は $\mathrm{Frac}(R)$ に係数拡大してもなお短完全列をなすから (局所化をとる操作が完全であることによる. 松村 [14, 定理 4.5] を参照のこと), このとき, 基数の等式

$$\mathrm{rank}_R M = \mathrm{rank}_R L + \mathrm{rank}_R N$$

が成り立つ.

第二の準備として, チェイン複体の有限性に関する定義を確認しておく. 一般に, 可換環 R 上の加群の族 $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が **有限型** (of finite type) であるとは各 M_λ が有限生成であることをいい, **有限生成** (finitely generated) であるとは直和 $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ が有限生成である (あるいは同値だが, 有限型であり, かつ有限個を除いて $M_\lambda = 0$ である) ことをいう. R -加群のチェイン複体 M_\bullet が **有限型・有限生成** であるとは, それぞれ,

^{*9} この逆は成り立たない. すなわち, 整域 R 上の加群 M が有限階数であっても有限生成とは限らない. たとえば, Λ を無限集合とすると, $R = \mathbb{Z}$ 上の加群 $M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus \Lambda}$ は階数 0 だが有限生成でない.

R -加群の族 $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が有限型・有限生成であることをいう。また、 M_\bullet が**有限型・有限生成のホモロジーをもつ**とは、それぞれ、 R -加群の族 $(H_n(M_\bullet))_{n \in \mathbb{Z}}$ が有限型・有限生成であることをいう。

第三の準備として、チェイン複体の Euler 標数を定義して、その性質を見る。

定義 2.38 (チェイン複体の Euler 標数) 整域 R 上の有限生成のホモロジーをもつチェイン複体 M_\bullet の **Euler 標数** (Euler characteristic) を、

$$\chi(M_\bullet) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R H_n(M_\bullet)$$

と定める。

補題 2.39 Noether 整域 R 上の加群の有限生成なチェイン複体 M_\bullet は、有限生成のホモロジーをもち、その Euler 標数について

$$\chi(M_\bullet) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R M_n$$

が成り立つ。

証明 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 M_n が有限生成ならば $H_n(M_\bullet)$ も有限生成であり (R の Noether 性を用いた)、 $M_n = 0$ ならば $H_n(M_\bullet) = 0$ となる。したがって、 R -加群のチェイン複体 M_\bullet が有限生成ならば、 M_\bullet は有限生成のホモロジーをもつ。

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、短完全列 $0 \rightarrow B_n(M_\bullet) \rightarrow Z_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(M_\bullet) \rightarrow 0$ より

$$\operatorname{rank}_R H_n(M_\bullet) = \operatorname{rank}_R Z_n(M_\bullet) - \operatorname{rank}_R B_n(M_\bullet)$$

だから、交代和をとって

$$\chi(M_\bullet) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R H_n(M_\bullet) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n (\operatorname{rank}_R Z_n(M_\bullet) - \operatorname{rank}_R B_n(M_\bullet)) \quad (*)$$

を得る。一方で、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、短完全列 $0 \rightarrow Z_n(M_\bullet) \rightarrow M_n \rightarrow B_{n+1}(M_\bullet) \rightarrow 0$ より

$$\operatorname{rank}_R M_n = \operatorname{rank}_R Z_n(M_\bullet) + \operatorname{rank}_R B_{n+1}(M_\bullet)$$

だから、交代和をとって

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R M_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n (\operatorname{rank}_R Z_n(M_\bullet) + \operatorname{rank}_R B_{n+1}(M_\bullet)) \quad (**)$$

を得る。(*) と (**) の右辺は等しいから、主張の等式を得る。 \square

系 2.40 Noether 整域 R 上の加群の完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow L_n \longrightarrow M_n \longrightarrow N_n \\ &\longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow N_{n-1} \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

について、 R -加群の三つの族 $(L_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ のうち二つが有限生成ならば、残りの一つも有限生成であり、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R M_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R L_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{rank}_R N_n$$

が成り立つ。

証明 一般に, R -加群の完全列 $A \rightarrow B \rightarrow C$ について, A と C が 0 ならば B もそうであり, A と C が有限生成ならば B もそうである (R の Noether 性を用いた). したがって, R -加群の三つの族 $(L_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ のうち二つが有限生成ならば, 残りの一つも有限生成である. さらに, 与えられた完全列を (すべてのホモロジー群が 0 の) チェイン複体とみなして補題 2.39 を適用すれば

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{3n} \text{rank}_R L_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{3n+1} \text{rank}_R M_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{3n+2} \text{rank}_R N_n$$

が得られ, これを移項すれば主張の等式となる. \square

以上を踏まえて, 位相空間 (あるいは空間対) の Euler 標数を定義する. 以下, 空間対 (X, A) が **有限型・有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつ** とは, それぞれ, 特異チェイン複体 $S_\bullet(X, A; R)$ が有限型・有限生成のホモロジーをもつことをいう. 空間対 (X, \emptyset) が有限型・有限生成のホモロジーをもつとき, それぞれ, 位相空間 X は有限型・有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつという.

定義 2.41 (位相空間の Euler 標数) R を整域とする. 有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつ空間対 (X, A) の R -係数の **Euler 標数** (Euler characteristic) を,

$$\chi(X, A; R) = \chi(S_\bullet(X, A; R)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}_R H_n(X, A; R)$$

と定める. 空間対 (X, \emptyset) の R -係数の Euler 標数を, 位相空間 X の R -係数の Euler 標数といい, $\chi(X; R)$ と書く. ^{*10}

命題 2.42 R を Noether 整域とする. 空間三対 (X, A, B) について, 三つの空間対 (X, B) , (A, B) , (X, A) のうち二つが有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつならば, 残りの一つも有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもち,

$$\chi(X, B; R) = \chi(X, A; R) + \chi(A, B; R)$$

が成り立つ.

証明 ホモロジー完全列 (定理 2.19) に系 2.40 を適用すればよい. \square

命題 2.43 $(X; X_1, X_2)$, $(A; A_1, A_2)$ は切除系であって, A, A_1, A_2 はそれぞれ X, X_1, X_2 の部分空間であるとし, $X_{12} = X_1 \cap X_2$, $A_{12} = A_1 \cap A_2$ と置く. 四つの空間対 (X, A) , (X_1, A_2) , (X_2, A_2) , (X_{12}, A_{12}) のうち, (X, A) と (X_{12}, A_{12}) の二つか, (X_1, A_1) と (X_2, A_2) を含む三つが有限生成のホモロジーをもつならば, 残りも有限生成のホモロジーをもち,

$$\chi(X, A; R) = \chi(X_1, A_1; R) + \chi(X_2, A_2; R) - \chi(X_{12}, A_{12}; R)$$

が成り立つ.

証明 Mayer-Vietoris 完全列 (定理 2.32) に系 2.40 を適用すればよい. \square

係数環 R のとりかえに関する命題を述べる. そのために, ホモロジー代数の補題の一つ準備する.

^{*10} \mathbb{Z} -係数の Euler 標数を, 単に Euler 標数といい, 記号においても単に $\chi(X)$ などと書くことが多い.

補題 2.44 R を単項イデアル整域とする．自由 R -加群のチェイン複体 M_\bullet が有限型のホモロジーをもつならば，自由 R -加群の有限型の複体 M'_\bullet であって， M_\bullet とチェインホモトピー同値であるものが存在する．さらに， M_\bullet が有限生成のホモロジーをもつならば， M'_\bullet は有限生成にとれる．

証明 中岡 [11, §2.5, 補題 2] を参照のこと． □

命題 2.45 R を単項イデアル整域， R' を整域とし， $\phi: R \rightarrow R'$ を環準同型とする．空間対 (X, A) が有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつならば，有限生成の R' -係数の特異ホモロジーをもち， $\chi(X, A; R) = \chi(X, A; R')$ である．

証明 空間対 (X, A) が有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつとすると，自由 R -加群の有限生成なチェイン複体 F_\bullet であって $S_\bullet(X, A; R)$ にチェインホモトピー同値であるものがとれる（補題 2.44）．これに環準同型 $\phi: R \rightarrow R'$ による係数拡大を施して得られる自由 R' -加群の有限生成なチェイン複体 $F_\bullet \otimes_R R'$ は， $S_\bullet(X, A; R')$ にチェインホモトピー同値である．よって，補題 2.39 より， (X, A) は有限生成の R' -係数の特異ホモロジーをもち，

$$\begin{aligned}\chi(X, A; R') &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{rank}_{R'}(F_n \otimes_R R') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{rank}_R F_n \\ &= \chi(X, A; R)\end{aligned}$$

が成り立つ（自由加群の階数が係数拡大によって保たれることを用いた^{*11}）． □

系 2.46 空間対 (X, A) が有限生成の \mathbb{Z} -係数の特異ホモロジーをもつならば， (X, A) はすべての整域 R' に対して有限生成の R' -係数の特異ホモロジーをもち，その Euler 標数 $\chi(X, A; R')$ は R' によらない．

証明 命題 2.45 で $R = \mathbb{Z}$ とすればよい． □

2.11 応用：レトラクションの非存在，Brouwer の不動点定理

定理 2.47 \mathbb{D}^n （整数 $n \geq 0$ ）は \mathbb{S}^{n-1} をレトラクトにもたない．

証明 $i: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$ を包含写像とする．レトラクション $r: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ が存在するとすると， i と r が誘導する準同型について $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \operatorname{id}$ であり，特に $i_*: \tilde{H}_n(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{D}^n; \mathbb{Z})$ は単射となる．ところが， $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ （例 2.30）かつ $\tilde{H}_n(\mathbb{D}^n; \mathbb{Z}) = 0$ （命題 1.12 (1)）だから，これは不可能である．よって，背理法より， \mathbb{D}^n は \mathbb{S}^{n-1} をレトラクトにもたない． □

後に，写像度を用いて定理 2.47 の別証明を与える（定理 3.20）．

定理 2.48 (Brouwer の不動点定理) X を \mathbb{D}^n （整数 $n \geq 0$ ）に同相な位相空間とすると，任意の連続写像 $f: X \rightarrow X$ は不動点をもつ．

^{*11} $\phi: R \rightarrow R'$ を整域の間の環準同型とすると，自由でない R -加群 M に対しては， $\operatorname{rank}_R M = \operatorname{rank}_{R'}(M \otimes_R R')$ が成り立つとは限らない．たとえば， $R = \mathbb{Z}$ ， $R' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ， $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のとき， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の \mathbb{Z} 上の階数は 0 だが， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の階数は 1 である．

証明 任意の連続写像 $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ が不動点をもつことを示せばよい. $n = 0$ ならば明らかだから, $n \geq 1$ とする. f が不動点をもたないとする. 各点 $x \in \mathbb{D}^n$ に対して $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ を「 $f(x)$ から x に向かって引いた半直線が $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ と交わる点」と定めることで, レトラクト $r: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ が得られる. ところが, これは定理 2.47 に反する. よって, 背理法より, f は不動点をもつ. \square

2.12 応用：連結成分定理, Jordan の分離定理, 領域不変性定理

補題 2.49 h_* をホモロジー理論とする. \mathbb{R}^n (整数 $n \geq 0$) の閉集合 A と任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$h_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \cong h_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\}))$$

である.

証明 \mathbb{R}^{n+1} の開集合 U_+, U_- を

$$\begin{aligned} U_+ &= (A \times (0, \infty)) \cup ((\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, \infty)), \\ U_- &= (A \times (-\infty, 0)) \cup ((\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty, 1)) \end{aligned}$$

と定めると,

$$\begin{aligned} U_+ \cap U_- &= (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1), \\ U_+ \cup U_- &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\}) \end{aligned}$$

である. これより, 同型

$$\begin{aligned} h_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) &\cong h_k(U_+, U_+ \cap U_-) \\ &\cong h_k(U_+ \cup U_-, U_-) \\ &\cong h_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}, U_+ \cup U_-) \\ &= h_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\})) \end{aligned}$$

を得る. ここで, 第一の同型はホモトピー不変性から, 第二の同型は切除公理から, 第三の同型はホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}, U_-) \longrightarrow h_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}, U_+ \cup U_-) \xrightarrow{\partial} h_k(U_+ \cup U_-, U_-) \longrightarrow h_k(\mathbb{R}^{n+1}, U_-)$$

と $h_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1}, U_-)$, $h_k(\mathbb{R}^{n+1}, U_-) = 0$ (\mathbb{R}^{n+1} と U_- は可縮だから命題 1.2 から従う) から得られる. \square

補題 2.50 A, B をそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ (整数 $m, n \geq 0$) の閉集合とし, $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を同相写像とする. このとき, 同相写像 $\Phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ であって, ϕ を $A \times \{0\}$ から $\{0\} \times B$ への同相写像とみなしたものの拡張であるものが存在する.

証明 Tietze の拡張定理より, $\phi: A \rightarrow B$ の連続な拡張 $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, および $\psi = \phi^{-1}: B \rightarrow A$ の連続な拡張 $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ がとれる. $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ から自身への二つの同相写像 $(x, y) \mapsto (x, y + \tilde{\phi}(x))$ と $(x', y') \mapsto (x' - \tilde{\psi}(y'), y')$ をこの順で合成したものを Φ と置けばよい. \square

命題 2.51 h_* をホモロジー理論とする. \mathbb{R}^n ($n \geq 0$) の閉集合 A と B が同相ならば,

$$h_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \cong h_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$$

である.

証明 A と B が同相であるとする、補題 2.50 より $(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n} \setminus (A \times \{0\}))$ と $(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n} \setminus (\{0\} \times B))$ は同相だから、

$$h_{k+n}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n} \setminus (A \times \{0\})) \cong h_{k+n}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n} \setminus (\{0\} \times B))$$

である。この式の両辺に補題 2.49 をそれぞれ n 回用いれば、主張を得る。 \square

定理 2.52 (連結成分定理) \mathbb{R}^n (整数 $n \geq 0$) の真の閉集合 A と B が同相ならば、 $\mathbb{R}^n \setminus A$ と $\mathbb{R}^n \setminus B$ の連結成分の個数 (を表す基数) は等しい。^{*12}

証明 $\mathbb{R}^n \setminus A$ と $\mathbb{R}^n \setminus B$ はともに \mathbb{R}^n の開集合だから、これらの空間については連結成分と弧状連結成分が一致することに注意する。

ホモロジー完全列 (定理 2.19)

$$H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$$

において、 $H_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ かつ $H_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であり、 $\mathbb{R}^n \setminus A \neq \emptyset$ より $H_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ は全射だから、短完全列

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

を得る。 A を B に置き換えても同様である。したがって、

$$\begin{aligned} \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) &= \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) + 1, \\ \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_0(\mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{Z}) &= \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{Z}) + 1 \end{aligned}$$

だが、命題 2.51 より $H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) \cong H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{Z})$ だから

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} H_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_0(\mathbb{R}^n \setminus B; \mathbb{Z})$$

が成り立つ。これは、 $\mathbb{R}^n \setminus A$ と $\mathbb{R}^n \setminus B$ の弧状連結成分の個数が等しいことを示している (例 2.9)。 \square

定理 2.53 (Jordan の分離定理) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (整数 $n \geq 1$) は \mathbb{S}^{n-1} に同相であるとする。このとき、次が成り立つ。

- (1) $\mathbb{R}^n \setminus S$ の連結成分はちょうど二つである。
- (2) $\mathbb{R}^n \setminus S$ の二つの連結成分のうち、一方は有界であり、他方は非有界である。
- (3) $\mathbb{R}^n \setminus S$ の各連結成分の \mathbb{R}^n における境界は S である。

証明 (1) 連結成分定理 (定理 2.52) より、 $\mathbb{R}^n \setminus S$ の連結成分の個数は $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ の連結成分の個数に等しく、ちょうど二つである。

(2) S はコンパクトだから、 S を含む閉球 B が存在する。 $\mathbb{R}^n \setminus B$ は $\mathbb{R}^n \setminus S$ に含まれる連結集合だから、 $\mathbb{R}^n \setminus S$ の二つの連結成分のうちどちらか一方のみに含まれる。 $\mathbb{R}^n \setminus B$ を含む連結成分は非有界であり、含まない連結成分は有界である。

(3) U を $\mathbb{R}^n \setminus S$ の連結成分の一つとして、その \mathbb{R}^n における境界 ∂U が S に等しいことを示す。まず、 V は \mathbb{R}^n の開集合だから $\overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus V$ であり、したがって

$$\partial U = \overline{U} \setminus U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus (U \cup V) = S$$

^{*12} すぐ下で示す領域不変性定理 (定理 2.54) より、 \mathbb{R}^n の真の閉集合が \mathbb{R}^n と同相になることはない。よって、定理 2.52 において「真の閉集合」を「閉集合」で置き換えても、主張はなお正しい。

である。次に、 $S \subseteq \partial U$ を示す。 $S \cap U = \emptyset$ は明らかだから、 $S \subseteq \overline{U}$ をいえばよい。もしこれが成り立たないとすると、開集合 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ を S と交わるが U とは交わらないようにとれる。 $W \cap S \neq \emptyset$ より $S \setminus W$ は \mathbb{S}^{n-1} の真の開集合に同相だから、連結成分定理 (定理 2.52) より $\mathbb{R}^n \setminus (S \setminus W)$ は連結である。一方で、 $W \cap U = \emptyset$ より $\mathbb{R}^n \setminus (S \setminus W)$ は二つの空でない開集合 U と $V \cup W$ に分割される。これらは矛盾する。よって、背理法より、 $S \subseteq \overline{U}$ が成り立つ。これで、 $S = \partial U$ が示された。□

定理 2.54 (領域不変性定理) \mathbb{R}^n ($n \geq 0$) の開集合 U から \mathbb{R}^n への写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ が単射かつ連続ならば、 $f(U)$ は \mathbb{R}^n の開集合であり、 f は U から $f(U)$ への同相を与える。

証明 与えられた状況で、 f が開写像であることを示せばよい。 U の各点において U に含まれる閉球の全体が近傍基をなすことから、そのためには、単射連続写像 $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ について、 $f(\mathbb{D}^n)$ が $f(0)$ を内点にもつことをいえばよい。以下、この状況を考える。 $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$ はコンパクトで f は単射かつ連続だから、 f は \mathbb{S}^{n-1} から $f(\mathbb{S}^{n-1})$ への同相を与える。したがって、Jordan の分離定理 (定理 2.53) より、 $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ はちょうど二つの連結成分 U, V をもつ。 $\text{int } \mathbb{D}^n$ は連結だから $f(\text{int } \mathbb{D}^n)$ も連結であり、したがって U または V に含まれる。また、上と同じ理由で $f(\mathbb{D}^n)$ は \mathbb{D}^n に同相だから、連結成分定理 (定理 2.52) より $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ は連結であり、したがって U または V に含まれる。ところが、 \mathbb{R}^n は集合として $f(\mathbb{S}^{n-1}), f(\text{int } \mathbb{D}^n), \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ の三つに分割されるから、 $f(\text{int } \mathbb{D}^n)$ と $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{D}^n)$ の一方が U 、他方が V でなければならない。よって、 $f(\text{int } \mathbb{D}^n)$ は開集合だから、 $f(\mathbb{D}^n)$ は $f(0)$ を内点にもつ。これで、主張が示された。□

系 2.55 $m, n \geq 0$ を整数とする。空でない開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ と空でない開集合 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ が同相ならば、 $m = n$ である。

証明 一般性を失わず $m \geq n$ と仮定し、 0 を補う写像 $x \mapsto (x, 0)$ によって \mathbb{R}^n を \mathbb{R}^m の部分空間とみなす。空でない開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ から空でない開集合 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ への同相写像が存在したとすると、これに包含写像 $V \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を合成することで単射連続写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ が得られ、領域不変性定理 (定理 2.54) より f は開写像である。特に、 $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の空でない開集合だから、 $m = n$ でなければならない。□

3 写像度

3.1 特異ホモロジーによる写像度の定義

定義 3.1 (写像度) X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とする。連続写像 $f: X \rightarrow X$ に対して、 $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (例 2.30) の自己準同型 f_* の倍率 (すなわち、 f_* が a 倍写像であるような整数 a) を、 f の**写像度** (mapping degree) といい、 $\deg f$ と書く。

命題 3.2 X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とする。

- (1) 連続写像 $f, g: X \rightarrow X$ がホモトピックならば、 $\deg f = \deg g$ である。
- (2) $\deg \text{id}_X = 1$ である。
- (3) 連続写像 $f, g: X \rightarrow X$ について、 $\deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f)$ である。

証明 (1) 特異ホモロジーのホモトピー不変性 (定理 2.20) の結果である。

(2), (3) 特異ホモロジーの関手性の結果である。□

写像度の計算例を示す.

例 3.3 \mathbb{S}^0 の 2 点 $+1, -1$ に対応する 0 次特異チェインをそれぞれ σ_+, σ_- と書くと, 定義から確かめられるように,

$$H_0(\mathbb{S}^0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\sigma_+ \oplus \mathbb{Z}\sigma_-, \quad \tilde{H}_0(\mathbb{S}^0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(\sigma_+ - \sigma_-)$$

である. よって, 写像 $f: \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$ に対して,

$$\deg f = \begin{cases} 1 & (f(\pm 1) = \pm 1) \\ -1 & (f(\pm 1) = \mp 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.

例 3.4 X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とする. 連続写像 $f: X \rightarrow X$ が全射でないとして, f の像に属さない点 $x \in X$ をとると, 準同型 $f_*: \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ は $\tilde{H}_n(X \setminus \{x\}) = 0$ (命題 1.12 (1)) を経由するから, $\deg f = 0$ である.

次の計算例を見るため, 補題を一つ準備する.

補題 3.5 \mathbb{S}^{n+1} (整数 $n \geq 0$) の二つの部分集合 D_+^n, D_-^n を

$$\begin{aligned} D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \geq 0\}, \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \leq 0\} \end{aligned}$$

と定め, 埋め込み $x \mapsto (x, 0)$ によって \mathbb{S}^n を $D_+^n \cap D_-^n \subseteq \mathbb{S}^{n+1}$ と同一視する. 連続写像 $F: \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ と $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ が, $F|_{\mathbb{S}^n} = f$ を満たし, F が D_+^n, D_-^n をそれぞれ自身の中に移すならば, $\deg F = \deg f$ である.

証明 切除系 $(\mathbb{S}^{n+1}; D_+^n, D_-^n)$ の被約 Mayer-Vietoris 完全列から得られる球面の被約ホモロジー群の間の同型 (例 1.19) とその自然性 (注意 1.18) より, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\text{MV}} & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \\ F_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\text{MV}} & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \end{array}$$

を得る. 主張はここから従う. □

例 3.6 直交行列 $A \in O(n+1)$ (整数 $n \geq 0$) が定める \mathbb{S}^n の自己同相写像 $f_A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ の写像度が $\det A$ に等しいことを示す.

A と B が $O(n+1)$ の同じ連結成分に属するならば, f_A と f_B の自己同相写像はホモトピックだから, $\deg f_A = \deg f_B$ である (命題 3.2 (1)). $O(n+1)$ の連結成分は行列式 1 の部分と行列式 -1 の部分の二つであり, 単位行列 I_n が定める自己同相写像 $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ の写像度は 1 である. 次に, 行列式 -1 の直交行列 $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ が定める自己同相写像

$$r_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$$

を考える. r_0 は S^0 の 2 点を入れ替える写像だから, $\deg r_0 = -1$ である (例 3.3). また, 整数 $n \geq 0$ に対して, 補題 3.5 の記号と同一視で, r_{n+1} は D_+^n, D_-^n をそれぞれ自身の中に移し $r_{n+1}|_{S^n} = r_n$ を満たすから, 同命題より $\deg r_{n+1} = \deg r_n$ である. よって, すべての整数 $n \geq 0$ に対して, $\deg r_n = -1$ である. これで, 主張が示された.

例 3.7 U を点 $0 \in \mathbb{R}^n$ (整数 $n \geq 0$) の開近傍とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を U から \mathbb{R}^n の開集合への C^1 級同相写像であって $f(0) = 0$ を満たすものとする. このとき, 切除同型と f が誘導する準同型との合成

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong H_n(U, U \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \quad (*)$$

が, $\det f'(0) > 0$ ならば恒等写像であり, $\det f'(0) < 0$ ならば -1 倍写像であることを示す.

まず, 正則行列 $A \in GL(n, \mathbb{R})$ が定める写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ について示す. $n = 0$ の場合は明らかだから, $n \geq 1$ とする. A と B が $GL(n)$ の同じ連結成分に属するならば, これらが定める $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の自己同相写像は対ホモトピックであり, これらが誘導する $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$ の自己準同型は等しい. ここで, 一般性を失わず, $A \in O(n)$ と仮定する. 簡約ホモロジー完全列 (定理 1.15)

$$\tilde{H}_n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$$

において, \mathbb{R}^n が可縮であることより $\tilde{H}_n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ と $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ は 0 だから (命題 1.12 (1)), 連結準同型 $\partial: H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$ は同型である. また, 包含写像 $i: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ はホモトピー同値だから, ホモロジー群の間に同型を誘導する. 図式

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow f_{A*} & & \downarrow f_{A*} & & \downarrow f_{A*} \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

は可換であり, いちばん右の f_{A*} は $\det A$ 倍写像だから (例 3.6), いちばん左の f_{A*} も $\det A$ 倍写像である.

次に, 一般の場合に示す. $A = f'(0) \in GL(n, \mathbb{R})$ と置き, 写像 $F: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $F(x, t) = (1-t)f_A(x) + tf(x)$ ($x \in U, t \in \mathbb{R}$) と定めると, 微分係数 $F'(0, t)$ は

$$\begin{pmatrix} f'(0) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という形の正則行列だから, 逆写像定理より, F は各点 $(0, t)$ において局所 C^1 級同相である. 特に, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, ある $\epsilon_t > 0$ と点 $0 \in \mathbb{R}^n$ の開近傍 $V_t \subseteq U$ が存在して, 任意の $s \in [t - \epsilon_t, t + \epsilon_t]$ に対して, $F(-, s)$ は V_t から \mathbb{R}^n の開集合への C^1 級微分同相を与える. \mathbb{I} のコンパクト性より, ここから, 点 $0 \in \mathbb{R}^n$ の開近傍 $V \subseteq U$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{I}$ に対して, $F(-, t)$ が V から \mathbb{R}^n の開集合への C^1 級微分同相を与えることがわかる. 特に, $F((V \setminus \{0\}) \times \mathbb{I}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ だから, F は $f_A: (V, V \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ から $f: (V, V \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ への対ホモトピーを与える. よって, 前段の結果より, 準同型例 3.7 は, $\det A > 0$ ならば恒等写像であり, $\det A < 0$ ならば -1 倍写像である.

注意 3.8 命題 3.10 や定理 3.19 を踏まえて例 3.7 と同じ議論をすることで, 任意の R -加群 M を係数とする特異ホモロジー群 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; M)$ や任意のホモロジー理論 h_* に関するホモロジー群 $h_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ についても, 同じ結論が得られる.

例 3.9 X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とすると、不動点をもたない連続写像 $f: X \rightarrow X$ について、 $\deg f = (-1)^{n+1}$ であることを示す。 $X = \mathbb{S}^n$ としてよい。連続写像 $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ が不動点をもたなければ、連続写像

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (x, t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

が定義でき、これは f から対蹠写像 $x \mapsto -x$ へのホモトピーである。例 3.6 より、対蹠写像の写像度は $(-1)^{n+1}$ だから、 f の写像度も $(-1)^{n+1}$ である。

X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とし、 $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする。写像度の定義より、準同型 $f_*: \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ は $\deg f$ 倍写像だが、次に述べるとおり、このことは任意の係数で成り立つ。なお、任意のホモロジー理論に対してもこれがいえることを、定理 3.19 で示す。

命題 3.10 X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とし、 $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする。任意の R -加群 M に対して、 f が誘導する準同型 $f_*: \tilde{H}_n(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n(X; M)$ は、 $\deg f$ 倍写像である。

証明 M を \mathbb{Z} -加群とみなす。 $\tilde{H}_{n-1}(X; \mathbb{Z}) = 0$ だから (例 2.30)、被約特異ホモロジーに対する普遍係数定理 (系 2.37) より、 $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ から $\tilde{H}_n(X; M)$ への自然な準同型は、同型である。図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(X; M) \\ f_* \otimes \text{id}_M \downarrow & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(X; M) \end{array}$$

は可換であり、写像度の定義より $f_*: \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ は $\deg f$ 倍写像だから、 $f_*: \tilde{H}_n(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n(X; M)$ もそうである。 \square

3.2 余 Hopf 空間とホモロジー

定義 3.11 (余 Hopf 空間) $(S, *)$ とし、ウェッジ和 $S \vee S$ を考え、 $p_1, p_2: S \vee S \rightarrow S$ をそれぞれ左、右の成分への射影とする。点付き空間 $(S, *)$ 上の**余 Hopf 構造** (co-Hopf structure) とは、点付き連続写像 $\mu: (S, *) \rightarrow (S \vee S, *)$ であって、図式

$$\begin{array}{ccccc} & (S, *) & & & \\ \text{id}_S \swarrow & \downarrow \mu & \searrow \text{id}_S & & \\ (S, *) & \xleftarrow{p_1} (S \vee S, *) & \xrightarrow{p_2} & (S, *) & \end{array}$$

が点付きホモトピー可換 (すなわち、 $p_1 \circ \mu$ と $p_2 \circ \mu$ が id_S に点付きホモトピック) であるものをいう。点付き空間とその上の余 Hopf 構造との組 $((S, *), \mu)$ を、**余 Hopf 空間** (co-Hopf space) という。

定義 3.12 (余 Hopf 構造が定める演算) $((S, *), \mu)$ を余 Hopf 空間、 $(X, *)$ を点付き空間とする。点付き連続写像全体のなす集合 $C((S, *); (X, *))$ 上の 2 項演算 $*$ を、 $f, g \in C((S, *); (X, *))$ に対して

$$f * g: (S, *) \xrightarrow{\mu} (S \vee S, *) \xrightarrow{\langle f, g \rangle} (X, *)$$

と定める。また、 $[(S, *), (X, *)]$ 上の 2 項演算 \cdot を、 $[f], [g] \in [(S, *), (X, *)]$ に対して

$$[f] \cdot [g] = [f * g]$$

と定める.

例 3.13 写像 $\mu: \mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n \vee \mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n$ (整数 $n \geq 1$) を

$$\mu(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \begin{cases} i_1(2t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) & (0 \leq t_0 \leq 1/2) \\ i_0(2t_0 - 1, t_1, \dots, t_{n-1}) & (1/2 \leq t_0 \leq 1) \end{cases}$$

と定めると, これは点付き空間 $(\mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n, *)$ 上の余 Hopf 構造である. さらに, $(X, *)$ を点付き空間とすると, 余 Hopf 構造 μ が定める 2 項演算によって, 点付きホモトピー集合 $[(\mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n, *), (X, *)]$ は群をなす. この群を, X の n 次ホモトピー群 (n -th homotopy group) といい, $\pi_n(X, *)$ と書く.

$(S, *)$ が \mathbb{S}^n に同相な (したがって $\mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n$ にも同相な) 点付き空間ならば, $(\mathbb{I}^n/\partial\mathbb{I}^n, *)$ から $(S, *)$ への点付き同相写像を一つ固定することで上記の余 Hopf 構造を $(S, *)$ 上に移すことができ, これが定める 2 項演算によって, 点付き空間 $(X, *)$ に対して点付きホモトピー集合 $[(S, *), (X, *)]$ は群をなす.

命題 3.14 h_* を R -係数のホモロジー理論とする. $((S, *), \mu)$ を余 Hopf 空間であって基点からの包含写像 $\text{pt} \rightarrow S$ がコファイブレーションであるものとし, $(X, *)$ を点付き空間とする. このとき, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 写像

$$\tilde{h}_n: [(S, *), (X, *)] \rightarrow \text{Hom}_R(\tilde{h}_n(S), \tilde{h}_n(X)), \quad [f] \mapsto f_*$$

は, $[(S, *), (X, *)]$ の基点 (常に X の基点 $*$ に値をとる定値写像の点付きホモトピー類) を 0 に, 余 Hopf 構造が定める $[(S, *), (X, *)]$ の 2 項演算を $\text{Hom}_R(\tilde{h}_n(S), \tilde{h}_n(X))$ の加法に移す.

証明 前半は明らかだから, 後半を示す. $i_1, i_2: S \rightarrow S \vee S$ をそれぞれ左, 右の成分への包含写像, $j_1, j_2: X \rightarrow X \vee X$ をそれぞれ左, 右の成分への包含写像 $p_1, p_2: S \vee S \rightarrow S$ をそれぞれ左, 右の成分への射影とする. 点付き連続写像 $f, g: (S, *) \rightarrow (X, *)$ に対して,

$$(f * g)_* = f_* + g_*: \tilde{h}_n(S) \rightarrow \tilde{h}_n(X)$$

を示したい. $\delta = \langle \text{id}_X, \text{id}_X \rangle: (X \vee X, *) \rightarrow (X, *)$ と定めると

$$f * g: (S, *) \xrightarrow{\mu} (S \vee S, *) \xrightarrow{f \vee g} (X \vee X, *) \xrightarrow{\delta} (X, *)$$

だから, 図式

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{h}_n(S) & \xrightarrow{\mu_*} & \tilde{h}_n(S \vee S) & \xrightarrow{(f \vee g)_*} & \tilde{h}_n(X \vee X) & \xrightarrow{\delta_*} & \tilde{h}_n(X) \\ & \searrow \text{diag} & \downarrow (p_{1*}, p_{2*}) & & \uparrow \langle j_{1*}, j_{2*} \rangle & \nearrow + & \\ & & \tilde{h}_n(S) \oplus \tilde{h}_n(S) & \xrightarrow{f_* \oplus g_*} & \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(X) & & \end{array}$$

の可換性をいえばよい. 余 Hopf 構造の定義より $p_k \circ \mu$ は id_S にホモトピックだから $p_{k*} \circ \mu_* = \text{id}_{\tilde{h}_n(S)}$ であり ($k = 1, 2$), したがって, 左側の三角は可換である. $\delta \circ j_k = \text{id}_X$ より $\delta_* \circ j_{k*} = \text{id}_{\tilde{h}_n(X)}$ だから ($k = 1, 2$), 右側の三角は可換である. (p_{1*}, p_{2*}) は同型でその逆は $\langle i_{1*}, i_{2*} \rangle$ だから (命題 1.30), 中央の四角の可換性を示すためには, 図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_n(S \vee S) & \xrightarrow{(f \vee g)_*} & \tilde{h}_n(X \vee X) \\ \uparrow \langle i_{1*}, i_{2*} \rangle & & \uparrow \langle j_{1*}, j_{2*} \rangle \\ \tilde{h}_n(S) \oplus \tilde{h}_n(S) & \xrightarrow{f_* \oplus g_*} & \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(X) \end{array}$$

の可換性をいえばよいが, これは, $(f \vee g) \circ i_1 = j_1 \circ f$ かつ $(f \vee g) \circ i_2 = j_2 \circ g$ であることから従う. \square

例 3.15 (写像度と回転数) $(\mathbb{I}/\partial\mathbb{I}, *)$ から $(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ への点付き同相写像 $[t] \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ を通して $(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ 上の余 Hopf 構造を考え, 点付きホモトピー集合 $[(\mathbb{S}^1, (1, 0)), (\mathbb{S}^1, (1, 0))]$ に群構造を入れる (例 3.13). 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して点付き連続写像 $f_k: (\mathbb{S}^1, (1, 0)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, (1, 0))$ を

$$f_k(\cos t, \sin t) = (\cos kt, \sin kt)$$

と定めると, 容易に確かめられるように, $[(\mathbb{S}^1, (1, 0)), (\mathbb{S}^1, (1, 0))]$ の群演算に関して $[f_1]^k = [f_k]$ である. $\deg f_1 = \deg \text{id}_{\mathbb{S}^1} = 1$ だから, 命題 3.14 より $\deg f_k = k$ である.

\mathbb{S}^1 の普遍被覆空間を用いた議論でわかるように, 連続写像 $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ は, ただ一つの $k \in \mathbb{Z}$ に対する f_k とホモトピックである. この k を, f の**回転数** (winding number) という. 前段の結果より, f の写像度と回転数は等しい.

3.3 公理的ホモロジーと写像度

補題 3.16 $(X, *)$ を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 1$) に同相な点付き空間とすると, 点付きホモトピー集合からホモトピー集合への基点の忘却写像 $[(X, *), (X, *)] \rightarrow [X, X]$ は全単射である.

証明 $(X, *) = (\mathbb{S}^n, e_0)$ ($e_0 = (1, 0, \dots, 0)$) の場合に示せばよい.

基点の忘却写像 $[(\mathbb{S}^n, e_0), (\mathbb{S}^n, e_0)] \rightarrow [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ が全射であることを示す. $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ を連続写像とする. 連続写像 $A: \mathbb{I} \rightarrow SO(n+1)$ を $A(0) = I_{n+1}$ (単位行列) かつ $A(1)f(e_0) = e_0$ となるようにとると, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{I}$ から \mathbb{S}^n への連続写像 $(x, t) \mapsto A(t)f(x)$ は $t=0$ のとき f となり, $t=1$ のとき (\mathbb{S}^n, e_0) から自身への点付き連続写像となる. よって, 基点の忘却写像は全射である.

基点の忘却写像 $[(\mathbb{S}^n, e_0), (\mathbb{S}^n, e_0)] \rightarrow [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ が単射であることを示す. $f, g: (\mathbb{S}^n, e_0) \rightarrow (\mathbb{S}^n, e_0)$ を点付き連続写像とし, $H: \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^n$ を f から g への (点付きとは限らない) ホモトピーとする. 連続写像 $A: \mathbb{I} \rightarrow SO(n+1)$ を, $A(0) = A(1) = I_{n+1}$ (単位行列) かつ $A(t)H(e_0, t) = e_0$ ($t \in \mathbb{I}$) となるようにとると, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{I}$ から \mathbb{S}^n への連続写像 $(x, t) \mapsto A(t)H(x, t)$ は, f から g への点付きホモトピーである. よって, 基点の忘却写像は単射である. \square

注意 3.17 補題 3.16 を, より一般的な視点から説明する.

$(S, *)$ を点付き空間であって基点からの包含写像 $\text{pt} \rightarrow S$ がコファイブレーションであるものとする. このとき, 任意の位相空間 X に対して, 基本亜群 $\Pi(X)$ が点付きホモトピー集合の族 $[(S, *), (X, x)]_{x \in X}$ に作用し (すなわち, $\Pi(X)$ の対象 x に対して点付き集合の圏 \mathbf{Set}^* の対象 $[(S, *), (X, x)]$ を対応させる関手が自然に定まり), 連続写像 $f, g: S \rightarrow X$ に対して

$$f \text{ と } g \text{ が (点付きとは限らない) ホモトピック} \iff f(*) \text{ から } g(*) \text{ へのある道 } l \text{ が存在して } [l] \cdot [f] = [g]$$

となる^{*13}. したがって, X の基点 $*$ を固定するとき, 基本群 $\pi_1(X, *)$ が点付きホモトピー集合 $[(S, *), (X, *)]$ に作用し, 基点の忘却写像は $[S, X]$ から軌道空間 $[(S, *), (X, *)]/\pi_1(X, *)$ への単射を誘導する. X が弧状連結ならば, これは全単射になる.

$(S, *) = (X, *)$ が \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 1$) に同相な点付き空間であるとする. $n \geq 2$ ならば X は単連結だから, 上記の群作用は自明である. $n = 1$ ならば, 上記の群作用は基本群 $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_0)$ の自身への共役作用と同型であ

^{*13} 基本群 $\pi_1(X, x)$ の点付きホモトピー集合 $[(S, *), (X, x)]$ への作用については, Kammeyer [3, Remark 5.43] に説明がある. 基本亜群の作用も, 基本群の作用と同様に定義される

ることが確かめられ、 $\pi_1(X, e_0) \cong \mathbb{Z}$ は可換だから、この場合も群作用は自明である。よって、いずれにしても、補題 3.16 のとおり基点の忘却写像は全単射である。

定理 3.18 (Hopf の定理) X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 1$) に同相な位相空間とする。連続写像のホモトピー類 $[f] \in [X, X]$ に対して写像度 $\deg f$ を与える写像

$$\deg: [X, X] \rightarrow \mathbb{Z}$$

は、全単射である。

証明 $[(X, *), (X, *)]$ から $[X, X]$ への基点の忘却写像は全単射であり (補題 3.16), 図式

$$\begin{array}{ccc} [(X, *), (X, *)] & \xrightarrow{\tilde{H}_n} & \text{End}_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})) \\ \downarrow & & \uparrow \\ [X, X] & \xrightarrow{\tilde{H}_n} & \end{array}$$

は可換である。例 3.13 で述べたとおり $[(X, *), (X, *)]$ には適当な群構造が入り、命題 3.14 より、この群構造に関して写像 $\tilde{H}_n: [(X, *), (X, *)] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}))$ は群準同型である。したがって、 $[(X, *), (X, *)]$ の群構造を基点の忘却写像によって $[X, X]$ に移すと、写像 $\tilde{H}_n: [X, X] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}))$ は群準同型である。また、恒等写像を 1 に対応させることで、群同型 $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})) \cong \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を得る。これら二つを合成したものが、写像度を与える写像 $\deg: [X, X] \rightarrow \mathbb{Z}$ であり、これも群準同型となる。

$\deg \text{id}_X = 1$ だから、この群準同型 \deg は全射である。単射性を示すためには、写像度が 0 である連続写像 $f: X \rightarrow X$ が定値写像にホモトピックであることをいえばよい。これについては、次の文献を参照のこと。

- Hatcher [2, Corollary 4.25]: ホモトピー論的な証明。
- Kammeyer [3, Corollary 5.42]: 単体近似定理を用いた証明。
- Milnor [5, p. 51]: 微分トポロジー的な証明。この本では、写像度が微分トポロジー的に定義されている。 □

定理 3.19 X を \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) に同相な位相空間とし、 $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする。任意のホモロジー理論 h_* に対して、 f が誘導する準同型 $f_*: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(X)$ は、 $\deg f$ 倍写像である。

証明 $[(X, *), (X, *)]$ から $[X, X]$ への基点の忘却写像は全単射であり (補題 3.16), 図式

$$\begin{array}{ccc} [(X, *), (X, *)] & \xrightarrow{\tilde{h}_n} & \text{End}_R(\tilde{h}_n(X)) \\ \downarrow & & \uparrow \\ [X, X] & \xrightarrow{\tilde{h}_n} & \end{array}$$

は可換である。例 3.13 で述べたとおり $[(X, *), (X, *)]$ には適当な群構造が入り、命題 3.14 より、この群構造に関して写像 $\tilde{h}_n: [(X, *), (X, *)] \rightarrow \text{End}_R(\tilde{h}_n(X))$ は群準同型である。したがって、 $[(X, *), (X, *)]$ の群構造を基点の忘却写像によって $[X, X]$ に移すと、写像 $\tilde{h}_n: [X, X] \rightarrow \text{End}_R(\tilde{h}_n(X))$ は群準同型である。一方で、Hopf の定理 (定理 3.18) の証明で見たように、この群構造に関して写像 $\deg: [X, X] \rightarrow \mathbb{Z}$ は群同型である。群の生成元 $1 \in \mathbb{Z}$ には恒等写像のホモトピー同値類 $[\text{id}_X]$ が対応し、 $\tilde{h}_n([\text{id}_X]) = \text{id}_{X_*}$ は 1 倍写像だから、準同型性から主張が従う。 □

3.4 応用：レトラクションの非存在，代数学の基本定理，つむじの定理

定理 3.20 (定理 2.47 と同じ) \mathbb{D}^n (整数 $n \geq 0$) は \mathbb{S}^{n-1} をレトラクトにもたない。

証明 レトラクション $r: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ が存在するとすると， $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I}$ から \mathbb{S}^{n-1} への写像 $(x, t) \mapsto r(tx)$ は，定値写像 $r(0)$ から $r|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ へのホモトピーである。ところが，定値写像の写像度は 0，恒等写像の写像度は 1 だから，これは写像度のホモトピー不変性に矛盾する。よって，背理法より， \mathbb{D}^n は \mathbb{S}^{n-1} をレトラクトにもたない。 \square

定理 3.21 (代数学の基本定理) 定数でない 1 変数複素係数多項式は，必ず複素数根をもつ。

証明 d 次の 1 変数複素係数多項式 $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d$ ($a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$) が複素数根をもたないとして， $d = 0$ を示す。 \mathbb{S}^1 を $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同一視して，連続写像 $F: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{S}^1$ を

$$F(z, t) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|}$$

と定める。 $t > 0$ に対して

$$F(z, t^{-1}) = \frac{t^d P(t^{-1}z)}{t^d |P(t^{-1}z)|} = \frac{z^d + ta_1 z^{d-1} + \cdots + t^d a_d}{|z^d + ta_1 z^{d-1} + \cdots + t^d a_d|}$$

だから， $F(z, \infty) = z^d$ と定めることで， F は $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ から \mathbb{S}^1 への連続関数に拡張される。 $F(-, 0)$ は定値写像 $P(0)/|P(0)|$ でその写像度は 0 であり， $F(-, \infty)$ は写像 $z \mapsto z^d$ でその写像度は d だから (例 3.15)，写像度のホモトピー不変性 (命題 3.2 (1)) より $d = 0$ である。 \square

定理 3.22 (つむじの定理) \mathbb{S}^n (整数 $n \geq 0$) 上にいたるところで消えない連続接ベクトル場が存在するための必要十分条件は， n が奇数であることである。

証明 規格化することで， \mathbb{S}^n 上にいたるところノルム 1 の連続接ベクトル場，すなわち連続写像 $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ であって任意の $x \in \mathbb{S}^n$ に対して $x \perp f(x)$ を満たすもの，が存在するための必要十分条件を考えればよい。 n が奇数 $2m - 1$ ならば，

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2m-2}, x_{2m-1}) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2, \dots, -x_{2m-1}, x_{2m-2})$$

で定まる写像 f が条件を満たす。逆に，条件を満たす f が存在したとすると，写像

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (x, t) \mapsto (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)f(x)$$

は $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ から $-\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ へのホモトピーになる。したがって，写像度のホモトピー不変性 (命題 3.2 (1)) と例 3.6 より

$$1 = \deg \text{id}_{\mathbb{S}^n} = \deg(-\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$$

だから， n は奇数である。これで，主張が示された。 \square

4 胞体ホモロジー

4.1 胞体の接着とホモロジー

命題 4.1 h_* を加法的ホモロジー理論とする. (X, A) は空間対, $(\Phi_\lambda: \mathbb{D}^n \rightarrow X)_{\lambda \in \Lambda}$ と $(\phi_\lambda: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X)_{\lambda \in \Lambda}$ ($n \in \mathbb{N}$) は連続写像の族であり,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\langle \phi_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}^{n-1} & \xrightarrow{\langle \Phi_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}} & X \end{array}$$

は押し出しの図式であるとする (縦の矢印は、包含写像を表す). 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $e_\lambda = \Phi_\lambda(\text{int } \mathbb{D}^n)$ と置く. このとき, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) Φ_λ たちが誘導する準同型

$$\langle \Phi_{\lambda*} \rangle_{\lambda \in \Lambda}: h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})^{\oplus \Lambda} \rightarrow h_k(X, A)$$

は同型である.

(2) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$\Phi_{\lambda*}: h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow h_k(X, X \setminus e_\lambda)$$

は同型である.

(3) (1) の同型の逆写像 $h_k(X, A) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ の λ -成分は, 包含写像が誘導する準同型と (2) の同型 $\Phi_{\lambda*}$ の逆写像との合成

$$h_k(X, A) \longrightarrow h_k(X, X \setminus e_\lambda) \xrightarrow{(\Phi_{\lambda*})^{-1}} h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$$

に等しい.

証明 (1) h_* の加法性と系 1.27 から同型

$$h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})^{\oplus \Lambda} \cong h_k\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{D}^n, \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{S}^{n-1}\right) \cong h_k(X, A)$$

が得られ, これが主張の同型に他ならない.

(2) 容易に確かめられるように,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\phi_\lambda} & X \setminus e_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^n & \xrightarrow{\Phi_\lambda} & X \end{array}$$

は押し出しの図式である. よって, 主張は (1) から従う.

(3) 包含写像が誘導する準同型 $h_k(X, A) \rightarrow h_k(X, X \setminus e_\lambda)$ と $(\Phi_{\lambda*})^{-1}: h_k(X, X \setminus e_\lambda) \rightarrow h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ との合成を α_λ と書く. $\mu \in \Lambda$ に対して

$$\alpha_\mu \circ \Phi_{\lambda*} = \begin{cases} \text{id}_{h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})} & (\lambda = \mu) \\ 0 & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

を示せばよいが、これらはそれぞれ可換図式

$$\begin{array}{ccc} h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\Phi_{\lambda*}} & h_k(X, A) \\ & \searrow \Phi_{\lambda*} & \downarrow \\ & & h_k(X, X \setminus e_\lambda), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\Phi_{\lambda*}} & h_k(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n) = 0 & \xrightarrow{\Phi_{\lambda*}} & h_k(X, X \setminus e_\mu), \end{array}$$

から従う。 \square

命題 4.2 h_* を加法的な常ホモロジー理論とする。 (X, A) を相対 CW 複体とし、その胞体の次元として現れる整数全体の集合を S と置く。このとき、任意の $k \in \mathbb{Z} \setminus S$ に対して、 $h_k(X, A) = 0$ である。

証明 命題 1.33 より $h_k(X, A) \cong \varinjlim_n h_k(X^{(n)}, A)$ だから、任意の整数 $n \geq -1$ に対して $h_k(X^{(n)}, A) = 0$ であることを示せばよい。

帰納法で示す。まず、 $h_k(X^{(-1)}, A) = h_k(A, A) = 0$ である。次に、 $n \geq 0$ とする。 (X, A) の n 次元胞体の個数（を表す濃度）を q_n と置くと、命題 4.1 より

$$h_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})^{\oplus q_n}$$

である。ところが、 $n \neq k$ のとき $h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$ であり（例 1.10. ここで次元公理が必要である）、 $n = k \notin S$ のとき $q_n = 0$ だから、いずれにしても $h_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0$ である。したがって、ホモロジー完全列（命題 1.6）

$$h_k(X^{(n-1)}, A) \longrightarrow h_k(X^{(n)}, A) \longrightarrow h_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0$$

より包含写像が誘導する準同型 $h_k(X^{(n-1)}, A) \rightarrow h_k(X^{(n)}, A)$ は全射だから、 $h_k(X^{(n-1)}, A) = 0$ ならば $h_k(X^{(n)}, A) = 0$ である。これで、帰納法が完成した。 \square

系 4.3 h_* を加法的な常ホモロジー理論とする。 (X, A) を相対 CW 複体とし、その胞体の次元として現れる整数全体の集合を S と置く。このとき、任意の部分集合 $B \subseteq A$ に対して、包含写像が誘導する準同型 $h_k(A, B) \rightarrow h_k(X, B)$ は、 $k \notin S$ ならば全射であり、 $k + 1 \notin S$ ならば単射である。

証明 ホモロジー完全列（命題 1.6）

$$h_{k+1}(X, A) \longrightarrow h_k(A, B) \longrightarrow h_k(X, B) \longrightarrow h_k(X, A)$$

と命題 4.2 から従う。 \square

4.2 ホモロジー群のなすチェイン複体

命題 4.4 h_* をホモロジー理論とする。 X を位相空間とし、 $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を X の部分空間の増加列とする。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して三対 (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}) のホモロジー完全列（命題 1.6）における連結準同型 $\partial_n: h_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ を考えるとき、列

$$h_\bullet(X_\bullet, X_{\bullet-1}): \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} h_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

は R -加群のチェイン複体である。

証明 $\partial_{n-1}\partial_n$ は

$$\begin{aligned} h_n(X_n, X_{n-1}) &\xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(X_{n-1}) \longrightarrow h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\ &\xrightarrow{\partial_{n-1}} h_{n-2}(X_{n-2}) \longrightarrow h_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-3}) \end{aligned}$$

と分解できるが、第二・第三の準同型は空間対 (X_{n-1}, X_{n-2}) に対するホモロジー完全列の一部だから、それらの合成は 0 である。よって、主張の列は、チェイン複体である。 \square

定理 4.5 h_* を加法的な常ホモロジー理論とする。 (X, A) を相対 CW 複体とし、命題 4.4 の方法でチェイン複体 $h_\bullet(X(\bullet), X(\bullet-1))$ を考える。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、次が成り立つ。

- (1) 包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ は、同型

$$h_n(X^{(n)}, A) \cong Z_n(h_\bullet(X(\bullet), X(\bullet-1)))$$

を与える。

- (2) 包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow h_n(X, A)$ は全射であり、これによって $h_n(X, A)$ を $h_n(X^{(n)})$ の商加群とみなすと、(1) の同型は、同型

$$h_n(X, A) \cong H_n(h_\bullet(X(\bullet), X(\bullet-1)))$$

を誘導する。

証明 (1) ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_n(X^{(n-1)}, A) \longrightarrow h_n(X^{(n)}, A) \longrightarrow h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(X^{(n-1)}, A)$$

と $h_n(X^{(n-1)}, A) = 0$ (命題 4.2) より、包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ は単射でその像は $\partial: h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, A)$ の核に等しい。また、ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{n-1}(X^{(n-2)}, A) \longrightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, A) \longrightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

と $h_{n-1}(X^{(n-2)}, A) = 0$ (命題 4.2) より、包含写像が誘導する準同型 $h_{n-1}(X^{(n-1)}, A) \rightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ は単射である。以上より、同型

$$\begin{aligned} h_n(X^{(n)}) &\cong \text{Ker}(\partial: h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, A)) \\ &= \text{Ker}(\partial: h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})) \\ &= Z_n(h_\bullet(X(\bullet), X(\bullet-1))) \end{aligned}$$

を得る。

- (2) ホモロジー完全列 (命題 1.6)

$$h_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \xrightarrow{\partial} h_n(X^{(n)}, A) \longrightarrow h_n(X^{(n+1)}, A) \longrightarrow h_n(X^{(n+1)}, X^{(n)})$$

と $h_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}) = 0$ (命題 4.2) より、包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow h_n(X^{(n+1)}, A)$ は全射でその核は $\partial: h_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow h_n(X^{(n)}, A)$ の像に等しい。また、包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n+1)}, A) \rightarrow h_n(X, A)$ は同型である (系 4.3)。したがって、包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow$

$h_n(X, A)$ は全射でその核は $\partial: h_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow h_n(X^{(n)}, A)$ の像に等しいが、この像は (1) の同型を通して $\partial: h_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow h_n(X^{(n)}, X^{(n+1)})$ の像、すなわち $B_n(h_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)}))$ に対応する。よって、(1) の同型は同型

$$\begin{aligned} h_n(X, A) &\cong Z_n(h_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)}))/B_n(h_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})) \\ &= H_n(h_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})) \end{aligned}$$

を誘導する。 □

定理 4.6 h_* を加法的な常ホモロジー理論とする。 $(X, A), (Y, B)$ を相対 CW 複体とし、命題 4.4 の方法でチェイン複体 $h_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})$, $h_\bullet(Y^{(\bullet)}, Y^{(\bullet-1)})$ を考える。相対胞体写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & h_n(Y, B) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_n(h_\bullet(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})) & \xrightarrow{H_n(f_*)} & H_n(h_\bullet(Y^{(\bullet)}, Y^{(\bullet-1)})) \end{array}$$

は可換である。ここで、縦の矢印は、定理 4.5 (2) の同型を表す。

証明 定理 4.5 (2) の同型は包含写像が誘導する準同型 $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ と $h_n(X^{(n)}, A) \rightarrow h_n(X, A)$ を用いて定義されているから、主張は図式

$$\begin{array}{ccc} h_n(X^{(n)}, A) & \xrightarrow{f_*} & h_n(Y^{(n)}, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{f_*} & h_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} h_n(X^{(n)}, A) & \xrightarrow{f_*} & h_n(Y^{(n)}, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & h_n(Y, B) \end{array}$$

の可換性から従う。 □

4.3 胞体チェイン複体と胞体ホモロジー群

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、同相写像 $\kappa: \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ を、

$$\kappa([x]) = (2\sqrt{1-|x|^2}x, 2|x|^2-1)$$

と定める ($[x]$ は点 $x \in \mathbb{D}^n$ の同値類を表す)。

補題 4.7 h_* をホモロジー理論とする。 $n \in \mathbb{N}$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_k(\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}) \\ \sigma \downarrow \cong & & \downarrow \cong \kappa_* \\ h_k(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

は可換である。ここで、

- 上の行の矢印は命題 1.25 による同型を、
- σ は懸垂同型 (例 1.10) を、

- κ_* は上記の同相写像 κ が誘導する同型を,
- ∂ は空間対 $(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$ の被約ホモロジー完全列 (定理 1.15) の境界準同型 (被約ホモロジー完全列, および \mathbb{D}^{n+1} が可縮であることと命題 1.12 (1) より, これは同型である) を

表す.

証明 例 1.10 と同様に, $D_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \geq 0\}$ と置く. 懸垂同型 σ は, 埋め込み $i: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{S}^n, D_+^n)$ が誘導する同型と境界準同型を用いて

$$\sigma: h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{i_*} h_k(\mathbb{S}^n, D_+^n) \xleftarrow[\cong]{\partial} h_k(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$$

と書けるが, 後者は境界準同型 $\partial: h_k(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n)$ と包含写像が誘導する準同型 $\tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \rightarrow h_k(\mathbb{S}^n, D_+^n)$ とに分解できる. したがって, 主張の図式における $\partial \circ \sigma$ は, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} h_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_k(\mathbb{S}^n, D_+^n) & \xleftarrow{\quad} & \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel \\ \tilde{h}_k(\mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\bar{i}_*} & \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n / D_+^n) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{h}_k(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

の上の列に等しい. ここで, 縦の矢印は命題 1.25 による同型を表し, $\bar{i}: \mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n / D_+^n$ は i が誘導する同相写像であり, $q: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / D_+^n$ は等化写像である. ところが, 容易にわかるように $\kappa: \mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ は $\bar{i}^{-1} \circ p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1}$ のホモトピー逆だから, κ_* は上記の可換図式の下の列に等しい. これで, 主張が示された. \square

h_* を加法的ホモロジー理論とし, $M = h_0(\text{pt})$ と置く. (X, A) を相対 CW 複体とし, その相対胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書く. 整数 $n \geq 0$ に対して, 懸垂同型 $\sigma^n: M = h_0(\mathbb{D}^0, \mathbb{S}^{-1}) \rightarrow h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ と命題 4.1 から, 同型

$$M^{\oplus \Lambda_n} = h_0(\mathbb{D}^0, \mathbb{S}^{-1})^{\oplus \Lambda_n} \cong h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})^{\oplus \Lambda_n} \cong h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \quad (*)$$

が得られる. 整数 $n < 0$ に対しても, $\Lambda_n = \emptyset$ と置けば, $h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0 = M^{\oplus \Lambda_n}$ となる.

命題 4.8 上記の状況で, 連結準同型

$$\partial_n: h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

の, $(*)$ で示した同型 $h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong M^{\oplus \Lambda_n}$ と $h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \cong M^{\oplus \Lambda_{n-1}}$ に関する (λ', λ) -成分 $(\lambda \in \Lambda_n, \lambda' \in \Lambda_{n-1})$

$$\partial_{n, \lambda' \lambda}: M \rightarrow M$$

は,

$$\deg \left(\mathbb{D}^{n-1} / \mathbb{S}^{n-2} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\phi_\lambda} X^{(n-1)} \xrightarrow{q} X^{(n-1)} / (X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'}) \xrightarrow{\bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1}} \mathbb{D}^{n-1} / \mathbb{S}^{n-2} \right) \quad (**)$$

倍写像である. ここで,

- $\kappa: \mathbb{D}^{n-1} / \mathbb{S}^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ は上記の同相写像,
- $\phi_\lambda: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ は Φ_λ の制限,
- $q: X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n-1)} / (X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'})$ は等化写像,

- $\bar{\Phi}_{\lambda'}: \mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2} \rightarrow X^{(n-1)}/(X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'})$ は $\Phi_{\lambda'}: (\mathbb{D}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-2}) \rightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'})$ が誘導する同相写像

である。

証明 $n \leq 0$ ならば $\Lambda_{n-1} = \emptyset$ だから、示すべきことは何もない。 $n > 0$ のとき、 $\partial_{n,\lambda'\lambda}$ は懸垂同型と命題 4.1 を用いて

$$\begin{aligned} \partial_{n,\lambda'\lambda}: M &\xrightarrow{\sigma^n} h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\Phi_{\lambda*}} h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial} h_n(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\ &\rightarrow h_n(X^{(n-1)}, X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'}) \xrightarrow{(\Phi_{\lambda'*})^{-1}} h_n(\mathbb{D}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-2}) \xrightarrow{(\sigma^{n-1})^{-1}} M \end{aligned}$$

と定義される準同型である（表示のない矢印は、包含写像が誘導する準同型を表す）。 よって、主張は可換図式

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sigma^{n-1}} & h_{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2}) \\ & \downarrow \sigma & \downarrow \sigma & & \downarrow \kappa_* \\ & h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \\ & \downarrow \Phi_{\lambda*} & & \downarrow \phi_{\lambda*} & \\ & h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & & & \\ & \downarrow \partial & & & \\ & \tilde{h}_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xlongequal{\quad} & \tilde{h}_{n-1}(X^{(n-1)}) & \\ & \downarrow & & \downarrow q_* & \\ & h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_{n-1}(X^{(n-1)}/(X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'})) & \\ & \downarrow (\Phi_{\lambda'*})^{-1} & & \downarrow (\bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1})_* & \\ M & \xrightarrow{\sigma^{n-1}} & h_{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2}) \end{array}$$

から従う。ここで、矢印 $h_n(X^{(n-1)}) \rightarrow h_n(X^{(n-1)}, X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'})$ は包含写像が誘導する準同型を表し、2 列目から 3 列目に伸びる横向きの矢印のうち \cong と表示のあるものは命題 1.25 による同型を表す。また、右側の四つの四角の可換性は、上から一つ目は補題 4.7 から、上から二つ目は連結準同型の自然性から、残りの二つは注意 1.26 から従う。 \square

命題 4.8 における整数 $(**)$ は、特性写像にはよるが、ホモロジー理論にはよらない。これを踏まえて、次のように定義する。

定義 4.9 (結合係数) (X, A) を相対 CW 複体とし、その相対胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書く。 $n \in \mathbb{Z}$ と $\lambda \in \Lambda_n$, $\lambda' \in \Lambda_{n-1}$ に対して、命題 4.8 における整数 $(**)$ を**結合係数** (incidence number) といい、 $[e_{\lambda'}: e_\lambda]$ と書く。 すなわち、

$$[e_{\lambda'}: e_\lambda] = \deg \left(\mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\phi_\lambda} X^{(n-1)} \xrightarrow{q} X^{(n-1)}/(X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'}) \xrightarrow{\bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1}} \mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2} \right)$$

である。

注意 4.10 位相空間の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1} \circ q \circ \phi_{\lambda} \circ \kappa} & \mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2} \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa \\ \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\kappa \circ \bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1} \circ q \circ \phi_{\lambda}} & \mathbb{S}^{n-1} \end{array}$$

から \mathbb{Z} -加群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1} \circ q \circ \phi_{\lambda} \circ \kappa)_*} & H_{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2}; \mathbb{Z}) \\ \kappa_* \downarrow & & \downarrow \kappa_* \\ H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\kappa \circ \bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1} \circ q \circ \phi_{\lambda})_*} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

が誘導されるが、 κ は同相だから κ_* は同型である。よって、結合係数は、

$$[e_{\lambda'} : e_{\lambda}] = \deg \left(\mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\phi_{\lambda}} X^{(n-1)} \xrightarrow{q} X^{(n-1)} / (X^{(n-1)} \setminus e_{\lambda'}) \xrightarrow{\bar{\Phi}_{\lambda'}^{-1}} \mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{S}^{n-1} \right)$$

とも書ける。

Λ, Λ' を集合とすると、 $\Lambda' \times \Lambda$ で添字付けられた可換環 R の元の族 $(r_{\lambda'\lambda})_{(\lambda',\lambda) \in \Lambda' \times \Lambda}$ を、 **R 上の (Λ', Λ) 型の行列**という。 $r_{\lambda'\lambda}$ を、この行列の (λ', λ) -成分という。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $r_{\lambda'\lambda} \neq 0$ となる $\lambda' \in \Lambda'$ が有限個であるとき、この行列は**有限型**であるという。 R 上の (Λ', Λ) 型の有限型行列と $R^{\oplus \Lambda}$ から $R^{\oplus \Lambda'}$ への R -加群の準同型とは一対一に対応する。 R -加群の準同型 $\phi: R^{\oplus \Lambda} \rightarrow R^{\oplus \Lambda'}$ に対応する行列を、 ϕ の**行列表示**という。

$\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ を集合とし、 $(r_{\lambda'\lambda})_{(\lambda',\lambda) \in \Lambda' \times \Lambda}, (s_{\lambda''\lambda'})_{(\lambda'',\lambda') \in \Lambda'' \times \Lambda'}$ をそれぞれ R 上の (Λ', Λ) 型、 (Λ'', Λ') 型の有限型行列とすると、これらの行列の**積**を

$$(s_{\lambda''\lambda'})_{(\lambda'',\lambda') \in \Lambda'' \times \Lambda'} (r_{\lambda'\lambda})_{(\lambda',\lambda) \in \Lambda' \times \Lambda} = \left(\sum_{\lambda' \in \Lambda'} s_{\lambda''\lambda'} r_{\lambda'\lambda} \right)_{(\lambda'',\lambda) \in \Lambda'' \times \Lambda}$$

と定義する。これは、 R 上の (Λ'', Λ) 型の有限型行列である。行列の積は、 R -加群の準同型の合成に対応する。

命題 4.11 (X, Λ) を相対 CW 複体とし、その相対胞体分割を $(e_{\lambda})_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書く（整数 $n < 0$ に対しては、 $\Lambda_n = \emptyset$ とする）。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、次が成り立つ。

- (1) \mathbb{Z} 上の行列 $([e_{\lambda'} : e_{\lambda}])_{(\lambda',\lambda) \in \Lambda_{n-1} \times \Lambda_n}$ は有限型である。
- (2) \mathbb{Z} 上の行列の等式

$$([e_{\lambda''} : e_{\lambda'}])_{(\lambda'',\lambda') \in \Lambda_{n-2} \times \Lambda_{n-1}} ([e_{\lambda'} : e_{\lambda}])_{(\lambda',\lambda) \in \Lambda_{n-1} \times \Lambda_n} = 0$$

が成り立つ（右辺は、すべての成分が 0 である (Λ'', Λ) 型の行列である）。

証明 \mathbb{Z} -係数の特異ホモロジーを考える。命題 4.8 より、連結準同型

$$\mathbb{Z}^{\oplus \Lambda_n} \cong H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus \Lambda_{n-1}}$$

の行列表示は、 $([e_{\lambda'} : e_{\lambda}])_{(\lambda',\lambda) \in \Lambda_{n-1} \times \Lambda_n}$ である。よって、主張は命題 4.4 から従う。 □

命題 4.11 を踏まえて、次のように定義する。

定義 4.12 (胞体チェイン複体, 胞体ホモロジー群) M を R -加群とする. (X, A) を相対 CW 複体とし, その相対胞体分割を $(e_\lambda)_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in A_n}$ と書く (整数 $n < 0$ に対しては, $A_n = \emptyset$ とする).

(1) 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, R -加群 $C_n(X, A; M)$ を

$$C_n(X, A; M) = M^{\oplus A_n} = \left\{ \sum_{\lambda \in A_n} m_\lambda e_\lambda \mid m_\lambda \in M, \text{有限個を除き } 0 \right\}$$

と定める ($n < 0$ に対しては $C_n(X, A; M) = 0$ である).

(2) 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, R -加群の準同型

$$\partial = \partial_n : C_n(X, A; M) \rightarrow C_{n-1}(X, A; M)$$

を, $M = R$ の場合は $([e_{\lambda'} : e_\lambda])_{(\lambda', \lambda) \in A_{n-1} \times A_n}$ (命題 4.11 (1) よりこれは \mathbb{Z} 上の有限型行列であり, したがって R 上の有限型行列とみなせる) を行列表示にもつ準同型として定め, 一般の場合は $M = R$ の場合の準同型と id_M とのテンソル積として定める.

(3) 命題 4.11 (2) より, (2) の準同型は R -加群のチェイン複体

$$C_\bullet(X, A; M) : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A; M) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A; M) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

を定める. このチェイン複体を X の M -係数の**胞体チェイン複体** (cellular chain complex) といい, その n 次ホモロジー群 $H_n(C_\bullet(X, A; M))$ を X の M -係数の n 次**胞体ホモロジー群** (n -th cellular homology group) という.

定理 4.5 より, h_* が加法的な常ホモロジー理論であって $h_0(\text{pt}) = M$ を満たすとする, 任意の相対 CW 複体 (X, A) に対して, 同型

$$h_n(X, A) \cong H_n(C_\bullet(X, A; M)) \quad (***)$$

が成り立つ.

4.4 胞体写像が誘導する準同型

命題 4.13 h_* を加法的ホモロジー理論とし, $M = h_0(\text{pt})$ と置く. $(X, A), (Y, B)$ を相対 CW 複体とし, それらの相対胞体分割をそれぞれ $((e_\lambda^X, \Phi_\lambda^X))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in A_n}, ((e_\mu^Y, \Phi_\mu^Y))_{n \in \mathbb{N}, \mu \in M_n}$ と書く (整数 $n < 0$ に対しては, $A_n, M_n = \emptyset$ とする). 相対胞体写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が誘導する準同型

$$f_* : h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow h_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)})$$

の, (*) で示した同型 $h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong M^{\oplus A_n}, h_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}) \cong M^{\oplus M_n}$ に関する (μ, λ) -成分 ($\lambda \in A_n, \mu \in M_n$)

$$f_{*, \mu\lambda} : M \rightarrow M$$

は,

$$\deg \left(\mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\bar{\Phi}_\lambda^X} X^{(n)} / X^{(n-1)} \xrightarrow{\bar{f}} Y^{(n)} / Y^{(n-1)} \xrightarrow{q} Y^{(n)} / (Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y) \xrightarrow{(\bar{\Phi}_\mu^Y)^{-1}} \mathbb{D}^n / \mathbb{S}^{n-1} \right) \quad (***)$$

倍写像である. ここで,

- $\bar{\Phi}_\lambda^X: \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{(n)}/X^{(n-1)}$ は $\Phi_\lambda^X: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)})$ が誘導する連続写像,
- $\bar{f}: X^{(n)}/X^{(n-1)} \rightarrow Y^{(n)}/Y^{(n-1)}$ は $f: (X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow (Y^{(n)}, Y^{(n-1)})$ が誘導する連続写像,
- $q: Y^{(n)}/Y^{(n-1)} \rightarrow Y^{(n)}/(Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y)$ は等化写像,
- $\bar{\Phi}_\mu^Y: \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y^{(n)}/(Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y)$ は $\Phi_\mu^Y: (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (Y^{(n)}, Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y)$ が誘導する同相写像

である.

証明 $n < 0$ の場合は明らかだから, $n \geq 0$ とする. このとき, 準同型 $f_{*, \mu\lambda}: M \rightarrow M$ は, 懸垂同型と命題 4.1 を用いて

$$\begin{aligned} f_{*, \mu\lambda}: M &\xrightarrow{\sigma^n} h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\Phi_\lambda^X} h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{f_*} h_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}) \\ &\longrightarrow h_n(Y^{(n)}, Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y) \xrightarrow{(\Phi_\mu^Y)^{-1}} h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{(\sigma^n)^{-1}} M \end{aligned}$$

と定義される (表示のない矢印は, 包含写像が誘導する準同型を表す). よって, 主張は可換図式

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sigma^n} & h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_n(\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}) \\ & & \downarrow \Phi_\lambda^X & & \downarrow \bar{\Phi}_\lambda^X \\ & & h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_n(X^{(n)}/X^{(n-1)}) \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ f_{*, \mu\lambda} \downarrow & & h_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_n(Y^{(n)}/Y^{(n-1)}) \\ & & \downarrow & & \downarrow q_* \\ & & h_n(Y^{(n)}, Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_n(Y^{(n)}/(Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y)) \\ & & \downarrow (\Phi_\mu^Y)^{-1} & & \downarrow ((\bar{\Phi}_\mu^Y)^{-1})_* \\ M & \xrightarrow{\sigma^n} & h_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{h}_n(\mathbb{D}^{n-1}/\mathbb{S}^{n-2}) \end{array}$$

から従う. ここで, 矢印 $h_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}) \rightarrow h_n(Y^{(n)}, Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y)$ は包含写像が誘導する準同型を表し, 2 列目から 3 列目に伸びる横向きの矢印は命題 1.25 による同型を表す. また, 右側の四つの四角の可換性は注意 1.26 から従う. \square

命題 4.13 における整数 (***) は, 特性写像にはよるが, ホモロジー理論にはよらない. これを踏まえて, 次のように定義する.

定義 4.14 $(X, A), (Y, B)$ を相対 CW 複体とし, それらの相対胞体分割をそれぞれ $((e_\lambda^X, \Phi_\lambda^X))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}, ((e_\mu^Y, \Phi_\mu^Y))_{n \in \mathbb{N}, \mu \in M_n}$ と書く. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を相対胞体写像とする. $n \in \mathbb{Z}$ と $\lambda \in \Lambda_n, \mu \in M_n$ に対して, 命題 4.13 における整数 (***) を, $[f]_{e_\mu^Y, e_\lambda^X}$ あるいは単に $[f]_{\mu\lambda}$ と書く^{*14}. すなわち,

$$[f]_{e_\mu^Y, e_\lambda^X} = [f]_{\mu\lambda} = \deg \left(\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\bar{\Phi}_\lambda^X} X^{(n)}/X^{(n-1)} \xrightarrow{\bar{f}} Y^{(n)}/Y^{(n-1)} \xrightarrow{q} Y^{(n)}/(Y^{(n)} \setminus e_\mu^Y) \xrightarrow{(\bar{\Phi}_\mu^Y)^{-1}} \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \right)$$

である.

^{*14} 「 $[f]_{e_\mu^Y, e_\lambda^X}$ 」や「 $[f]_{\mu\lambda}$ 」は, 本稿だけの記号である.

命題 4.15 $(X, A), (Y, B), (Z, C)$ を相対 CW 複体とし、それらの相対胞体分割をそれぞれ $(e_\lambda^X)_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in A_n}, (e_\mu^Y)_{n \in \mathbb{N}, \mu \in M_n}, (e_\nu^Z)_{n \in \mathbb{N}, \nu \in N_n}$ と書く (整数 $n < 0$ に対しては, $A_n, M_n, N_n = \emptyset$ とする). $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ を相対胞体写像とすると、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、次が成り立つ.

(1) \mathbb{Z} 上の行列 $([f]_{\mu\lambda})_{(\mu,\lambda) \in M_n \times A_n}$ は有限型である.

(2) \mathbb{Z} 上の行列の等式

$$\begin{aligned} & ([f]_{\mu'\lambda'})_{(\mu',\lambda') \in M_{n-1} \times A_{n-1}} ([e_{\lambda'}^X : e_\lambda^X])_{(\lambda',\lambda) \in A_{n-1} \times A_n} \\ &= ([e_{\mu'}^Y : e_\mu^Y])_{(\mu',\mu) \in M_{n-1} \times M_n} ([f]_{\mu\lambda})_{(\mu,\lambda) \in M_n \times A_n} \end{aligned}$$

が成り立つ.

(3) \mathbb{Z} 上の行列の等式

$$([g]_{\nu\mu})_{(\nu,\mu) \in N_n \times M_n} ([f]_{\mu\lambda})_{(\mu,\lambda) \in M_n \times A_n} = ([g \circ f]_{\nu\lambda})_{(\nu,\lambda) \in N_n \times A_n}$$

が成り立つ.

証明 \mathbb{Z} -係数の特異ホモロジーを考える. 整数 $n \geq 0$ に対して、命題 4.13 より、相対胞体写像が誘導する準同型

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{\oplus A_n} &\cong H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus M_n}, \\ \mathbb{Z}^{\oplus M_n} &\cong H_n(Y^{(n)}, Y^{(n-1)}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} H_n(Z^{(n)}, Z^{(n-1)}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus N_n} \end{aligned}$$

の行列表示は、それぞれ $([f]_{\mu\lambda})_{(\mu,\lambda) \in M_n \times A_n}, ([g]_{\nu\mu})_{(\nu,\mu) \in N_n \times M_n}$ である. 主張はここから従う. \square

命題 4.15 を踏まえて、次のように定義する.

定義 4.16 (胞体写像が誘導する準同型) M を R -加群とする. $(X, A), (Y, B)$ を相対 CW 複体とし、それらの相対胞体分割をそれぞれ $(e_\lambda^X)_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in A_n}, (e_\mu^Y)_{n \in \mathbb{N}, \mu \in M_n}$ と書く (整数 $n < 0$ に対しては, $A_n, M_n = \emptyset$ とする). $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を相対胞体写像とする.

(1) $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 R -加群の準同型

$$f_\# : C_n(X, A; M) \rightarrow C_n(Y, B; M)$$

を、 $M = R$ の場合は、 $([f]_{\mu\lambda})_{(\mu,\lambda) \in M_n \times A_n}$ (命題 4.15 (1) よりこれは \mathbb{Z} 上の有限型行列であり、したがって、 R 上の有限型行列とみなせる) を行列表示にもつ準同型として定め、一般の場合は、 $M = R$ の場合の準同型と id_M とのテンソル積として定める. 命題 4.15 (2) より、これは、チェイン準同型

$$f_\# : C_\bullet(X, A; M) \rightarrow C_\bullet(Y, B; M)$$

を定める.

(2) (1) のチェイン準同型が誘導する胞体ホモロジー群の間の準同型を、

$$f_* : H_n(C_\bullet(X, A; M)) \rightarrow H_n(C_\bullet(Y, B; M))$$

と書く.

命題 4.17 相対 CW 複体の間の相対胞体写像 $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が対ホモトピックならば、 f と g が (任意の係数の) 胞体ホモロジー群の間に誘導する準同型は等しい.

証明 命題 4.13 と特異ホモロジーのホモトピー不変性 (定理 2.20) から従う. \square

M を R -加群とし, $(X, A), (Y, B), (Z, C)$ を相対 CW 複体, $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ を相対胞体写像とすると, 命題 4.15 (3) より

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}: C_{\bullet}(X, A; M) \rightarrow C_{\bullet}(Z, C; M)$$

であり, したがって,

$$(g \circ f)_{*} = g_{*} \circ f_{*}: H_n(C_{\bullet}(X, A; M)) \rightarrow H_n(C_{\bullet}(Z, C; M))$$

である. すなわち, 胞体チェイン複体をとる操作 $C_{\bullet}(-; M)$ は相対 CW 複体と相対胞体写像のなす圏から R -加群のチェイン複体の圏 $\mathbf{C}(R\text{-Mod})$ への関手をなし, 胞体ホモロジー群をとる操作 $H_n(C_{\bullet}(-; M))$ は相対 CW 複体と相対胞体写像のなす圏から R -加群の圏 $R\text{-Mod}$ への関手をなす.

定理 4.6 より, 同型 (***) は, 相対 CW 複体 (X, A) に関する自然性を満たす. すなわち, $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を相対 CW 複体の間の相対胞体写像とすると, f が誘導する h_{*} に関するホモロジー群の間の準同型と胞体ホモロジー群の間の準同型が, 同型 (***) を通して対応する.

4.5 有限胞体複体の Euler 標数

有限 (相対) 胞体複体の Euler 標数は, その各次元の胞体の個数から簡単に計算できる.

命題 4.18 有限相対胞体複体 (X, A) は, 任意の整域 R に対して, 有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもつ. (X, A) の n 次元胞体の個数を q_n と書くと, Euler 標数について

$$\chi(X, A; R) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n$$

が成り立つ.

証明 特異ホモロジー群 $H_n(X, A; R)$ は胞体ホモロジー群 $H_n(C_{\bullet}(X, A; R))$ に同型であり, $C_n(X, A; R)$ は階数 q_n の自由 R -加群である. よって, 補題 2.39 より, (X, A) は有限生成の R -係数の特異ホモロジーをもち,

$$\begin{aligned} \chi(X, A; R) &= \chi(C_{\bullet}(X, A; R)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}_R C_n(X, A; R) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

4.6 胞体ホモロジー群の計算例

本小節では, M を R -加群とする.

例 4.19 (球面の胞体ホモロジー群) $n \geq 0$ を整数とする. \mathbb{S}^n の開集合と \mathbb{S}^n への連続写像を

$$\begin{aligned} e^{\text{pt}} &= \{(0, \dots, 0, 1)\}, & \Phi^{\text{pt}}: \mathbb{D}^0 &\rightarrow \mathbb{S}^n, & 0 &\mapsto (0, \dots, 0, 1), \\ e^n &= \mathbb{S}^n \setminus e^{\text{pt}}, & \Phi^n: \mathbb{D}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n, & x &\mapsto (2\sqrt{1-|x|^2}x, 2|x|^2-1) \end{aligned}$$

と定めると, $(e^{\text{pt}}, \Phi^{\text{pt}})$ は \mathbb{S}^n 上の 0 次元胞体, (e^n, Φ^n) は \mathbb{S}^n 上の n 次元胞体であり, \mathbb{S}^n はこれらによって有限胞体複体をなす. 特に, 命題 4.18 より, \mathbb{S}^n の Euler 標数は, n が偶数のとき 2, 奇数のとき 0 である.

胞体チェーン複体は, $n = 0$ のとき

$$C_k(\mathbb{S}^0; M) = \begin{cases} Me^{\text{pt}} \oplus Me^0 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

であり, $n \geq 1$ のとき

$$C_k(\mathbb{S}^n; M) = \begin{cases} Me^{\text{pt}} & (k = 0) \\ Me^n & (k = n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. 胞体チェーン複体の境界準同型のうち, その定義域も終域も 0 でないのは, $n = 1$ のときの $\partial: C_1(\mathbb{S}^1; M) \rightarrow C_0(\mathbb{S}^1; M)$ だけだが, 容易に確かめられるように, これは 0 である. よって, 胞体ホモロジー群は, $n = 0$ のとき

$$H_k(C_\bullet(\mathbb{S}^0; M)) \cong \begin{cases} M \oplus M & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

であり, $n \geq 1$ のとき

$$H_k(C_\bullet(\mathbb{S}^n; M)) \cong \begin{cases} M & (k = 0, n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. この結果は, 例 1.19 (一般の常ホモロジー理論 h_* に関する球面のホモロジー群 $h_k(\mathbb{S}^n)$) と整合する.

例 4.20 (向き付け可能な閉曲面の胞体ホモロジー群) $g \geq 1$ を整数とする. 閉円板 \mathbb{D}^2 の周を等分して $4g$ 個の辺を作り, 正の向き (反時計回り) の順に各辺に記号 $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ を割り当てる. $x = a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ のそれぞれについて, 記号 x と x^{-1} が割り当てられた辺を逆向きに貼り合わせることで, \mathbb{D}^2 の商空間を得る. この商空間を, **種数 g の向き付け可能な閉曲面**といい, Σ_g と書く. Σ_1 は 2 次元トーラスに同相である.

\mathbb{D}^2 から Σ_g への等化写像は, Σ_g 上の 2 次元胞体 (e^2, Φ^2) を定める. また, $x = a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ のそれぞれについて, 記号 x が割り当てられた辺を正の向きになぞることで, Σ_g 上の 1 次元胞体 (e_x^1, Φ_x^1) が得られる. 最後に, 円周を区切る $4g$ 個の点は上記の貼り合わせによって 1 点に潰れ, Σ_g 上の 0 次元胞体 (e^0, Φ^0) を定める. Σ_g はこれらによって有限胞体複体をなす. 特に, 命題 4.18 より, Σ_g の Euler 標数は $2 - 2g$ である.

胞体チェーン複体は,

$$C_k(\Sigma_g; M) = \begin{cases} Me^0 & (k = 0) \\ Me_{a_1}^1 \oplus Me_{b_1}^1 \oplus \dots \oplus Me_{a_g}^1 \oplus Me_{b_g}^1 & (k = 1) \\ Me^2 & (k = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。結合係数を計算すると $[e^2 : e_x^1] = 0$, $[e_x^1 : e^0] = 0$ となるから、胞体チェイン複体の境界準同型はすべて 0 である。よって、胞体ホモロジー群は、

$$H_k(C_\bullet(\Sigma_g; M)) \cong \begin{cases} M & (k=0) \\ M^{\oplus 2g} & (k=1) \\ M & (k=2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。

例 4.21 (向き付け不可能な閉曲面の胞体ホモロジー群) $g \geq 1$ を整数とする。閉円板 \mathbb{D}^2 の周を等分して $2g$ 個の辺を作り、正の向き（反時計回り）の順に各辺に記号 $a_1, a_1, \dots, a_g, a_g$ を割り当てる。 $x = a_1, \dots, a_g$ のそれぞれについて、記号 x が割り当てられた二つの辺を同じ向きに貼り合わせることで、 \mathbb{D}^2 の商空間を得る。この商空間を、**種数 g の向き付け不可能な閉曲面** といい、 N_g と書く。 N_1 は実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ に、 N_2 は Klein の壺に同相である。

商写像 $\mathbb{D}^2 \rightarrow N_g$ は、 N_g 上の 2 次元胞体 (e^2, Φ^2) を定める。また、 $x = a_1, \dots, a_g$ のそれぞれについて、記号 x が割り当てられた辺を正の向きになぞることで、 N_g 上の 1 次元胞体 (e_x^1, Φ_x^1) が得られる。最後に、円周を区切る $2g$ 個の点は上記の貼り合わせによって 1 点に潰れ、 N_g 上の 0 次元胞体 (e^0, Φ^0) を定める。 N_g はこれらによって有限胞体複体をなす。特に、命題 4.18 より、 N_g の Euler 標数は $2 - g$ である。

胞体チェイン複体は、

$$C_k(N_g; M) = \begin{cases} Me^0 & (k=0) \\ Me_{a_1}^1 \oplus \dots \oplus Me_{a_g}^1 & (k=1) \\ Me^2 & (k=2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。結合係数を計算すると $[e^2 : e_x^1] = 2$, $[e_x^1 : e^0] = 0$ となるから、胞体チェイン複体の境界準同型は、

$$\partial(e^2) = 2(e_{a_1}^1 + \dots + e_{a_g}^1), \quad \partial(e_x^1) = 0$$

で与えられる。よって、胞体ホモロジー群は、

$$H_k(C_\bullet(N_g; M)) \cong \begin{cases} M & (k=0) \\ M^{\oplus (g-1)} \oplus M/2M & (k=1) \\ \{m \in M \mid 2m = 0\} & (k=2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。

注意 4.22 例 1.19, 例 4.20, 例 4.21 で計算したホモロジー群が同型でないことから、

- 球面 \mathbb{S}^2 ,
- 種数 $g \geq 1$ の向き付け可能な閉曲面 Σ_g ,
- 種数 $g \geq 1$ の向き付け不可能な閉曲面 N_g

のうちどの二つも同相でないことがわかる。実は、任意の閉曲面（境界をもたない 2 次元コンパクト位相多様体）がこれらのいずれかに同相であることが知られている（閉曲面の分類定理）。証明は、次の文献を参照のこと。

- Lee [4, Theorem 6.15]: 閉曲面が単体分割可能であることを認めて証明している.
- Thomassen [7]: 閉曲面が単体分割可能であることまで含めて証明している.

例 4.23 (複素射影空間の胞体ホモロジー群) $n \geq 0$ を整数とする. 各 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の開集合と $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ への連続写像を

$$e^{2k} = \{[z_0 : \dots : z_k : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_k \neq 0\},$$

$$\Phi^{2k}: \mathbb{D}^{2k} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \quad z = (z_0, \dots, z_{k-1}) \mapsto [z_0 : \dots : z_{k-1} : \sqrt{1 - |z|^2} : 0 : \dots : 0]$$

と定めると, 各 (e^{2k}, Φ^{2k}) は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の $2k$ 次元胞体であり, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ はこれらによって有限胞体複体をなす. 特に, 命題 4.18 より, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の Euler 標数は $n + 1$ である.

胞体チェーン複体は,

$$C_l(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); M) = \begin{cases} Me^l & (l = 0, 2, \dots, 2n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり, したがって, 胞体ホモロジー群は

$$H_l(C_\bullet(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); M)) \cong \begin{cases} M & (l = 0, 2, \dots, 2n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.

例 4.24 (四元射影空間の胞体ホモロジー群) $n \geq 0$ を整数とする. 複素射影空間の場合 (例 4.23) と同様にして, 各 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して $\mathbb{P}^n(\mathbb{H})$ 上の $4k$ 次元胞体 (e^{4k}, Φ^{4k}) が定義でき, $\mathbb{P}^n(\mathbb{H})$ はこれらによって有限胞体複体をなす. 特に, 命題 4.18 より, $\mathbb{P}^n(\mathbb{H})$ の Euler 標数は $n + 1$ である.

胞体チェーン複体は

$$C_l(\mathbb{P}^n(\mathbb{H}); M) = \begin{cases} Me^{4k} & (l = 0, 4, \dots, 4n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり, したがって, 胞体ホモロジー群は

$$H_l(C_\bullet(\mathbb{P}^n(\mathbb{H}); M)) \cong \begin{cases} M & (l = 0, 4, \dots, 4n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.

例 4.25 (実射影空間の胞体ホモロジー群) $n \geq 0$ を整数とする. 実射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ についても, 複素・四元射影空間の場合 (例 4.23, 例 4.24) と同様にして胞体分割が得られるが, 実の場合は胞体ホモロジー群を計算するために結合係数について考える必要がある.

準備として, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ の 2 重被覆空間である \mathbb{S}^n の, 例 4.19 とは別の胞体分割を与える. 各 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して \mathbb{S}^n の開集合と \mathbb{S}^n への連続写像を, 複号同順で

$$e_\pm^k = \{(x_0, \dots, x_{k-1}, \pm\sqrt{1 - |x|^2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x = (x_0, \dots, x_{k-1}) \in \text{int } \mathbb{D}^k\},$$

$$\Phi_\pm^k: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad x = (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1}, \pm\sqrt{1 - |x|^2}, 0, \dots, 0)$$

と定めると, 各 (e_\pm^k, Φ_\pm^k) は \mathbb{S}^n 上の k 次元胞体であり, \mathbb{S}^n はこれらによって有限胞体複体をなす.

胞体チェーン複体は,

$$C_k(\mathbb{S}^n; M) = \begin{cases} Me_+^k \oplus Me_-^k & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. 各 $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して, 結合係数 $[e_{\pm}^{k-1} : e_{\pm}^k]$ と $[e_{\pm}^{k-1} : e_{\mp}^k]$ を, 符号を除いて求めよう. 二つの連続写像 $\Phi_{\pm}^k: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ の \mathbb{S}^{k-1} への制限はどちらも埋め込み $i_{k-1}: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $(x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1}, 0, \dots, 0)$ だから, 結合定数の定義より $[e_{\pm}^{k-1} : e_{\pm}^k] = [e_{\pm}^{k-1} : e_{\mp}^k]$ (複合同順) である. そこで,

$$a = [e_+^{k-1} : e_+^k] = [e_+^{k-1} : e_-^k], \quad b = [e_-^{k-1} : e_+^k] = [e_-^{k-1} : e_-^k]$$

と置くと, \mathbb{Z} -係数の胞体チェイン複体において

$$\partial(e_+^k) = \partial(e_-^k) = ae_+^{k-1} + be_-^{k-1} \quad (*)$$

である. 結合定数の定義より

$$a = \deg \left(\mathbb{D}^{k-1}/\mathbb{S}^{k-2} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{S}^{k-1} \xrightarrow{i_{k-1}} (\mathbb{S}^n)^{(k-1)} \xrightarrow{q} (\mathbb{S}^n)^{(k-1)} / ((\mathbb{S}^n)^{(k-1)} \setminus e_+^{k-1}) \xrightarrow{(\bar{\Phi}_+^{k-1})^{-1}} \mathbb{D}^{k-1}/\mathbb{S}^{k-2} \right)$$

だが (各写像の定義については, 命題 4.8 を参照のこと), $\kappa, i_{k-1}, (\bar{\Phi}_+^{k-1})^{-1}$ は同相であり, 補題 1.24 より q はホモトピー同値だから, これらの合成はホモトピー同値である. したがって, a は ± 1 のいずれかである. また, $T: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ を対蹠写像 $x \mapsto -x$ とすると, 例 3.6 からわかるように, 各整数 $l \in \{0, \dots, n\}$ に対して

$$T_{\#}(e_{\pm}^l) = (-1)^l e_{\mp}^l \quad (**)$$

である. (*) と (**) より

$$\begin{aligned} T_{\#}\partial(e_+^k) &= T_{\#}(ae_+^{k-1} + be_-^{k-1}) = (-1)^{k-1}(be_+^{k-1} + ae_-^{k-1}), \\ \partial T_{\#}(e_+^k) &= (-1)^k \partial(e_-^k) = (-1)^k (ae_+^{k-1} + be_-^{k-1}) \end{aligned}$$

だが, $T_{\#}$ がチェイン写像であることよりこれらは等しいから, $b = -a$ である. よって, (a, b) は $(\pm 1, \mp 1)$ (複号同順) のいずれかである.

以上を踏まえて, 実射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ の胞体ホモロジー群を計算する. $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ を等化写像とする. 各 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ の開集合と $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ への連続写像を

$$e^k = p(e_+^k) = p(e_-^k), \quad \Phi^k = p \circ \Phi_+^k: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

と定めると, 各 (e^k, Φ^k) は $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ 上の k 次元胞体であり, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ はこれらによって有限胞体複体をなす. 特に, 命題 4.18 より, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ の Euler 標数は, n が偶数のとき -1 , n が奇数のとき 0 である.

胞体チェイン複体は,

$$C_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); M) = \begin{cases} Me^k & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. 各 $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して, 結合係数 $[e^{k-1} : e^k]$ を, 符号を除いて求めよう. 上で与えた \mathbb{S}^n と $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ の CW 構造に関して, $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ は胞体写像である. これが誘導するチェイン写像 $p_{\#}: C_{\bullet}(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{\bullet}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ について, 各 $l \in \{0, \dots, k\}$ に対して, 明らかに

$$p_{\#}(e_+^l) = e^l \quad (***)$$

であり, (**), (***) と $p \circ T = p$ であることより,

$$p_{\#}(e_-^l) = (-1)^l p_{\#}T_{\#}(e_+^l) = (-1)^l p_{\#}(e_+^l) = (-1)^l e^l \quad (****)$$

である. (***)、(****) と $p_{\#}$ がチェイン写像であること、および前段の結果より

$$\partial(e^k) = \partial p_{\#}(e_+^k) = p_{\#}\partial(e_+^k) = \pm p_{\#}(e_+^{k-1} - e_-^{k-1}) = \pm(1 + (-1)^k)e^{k-1}$$

だから、結合係数は

$$[e^{k-1} : e^k] = \begin{cases} \pm 2 & (k \text{ は偶数}) \\ 0 & (k \text{ は奇数}) \end{cases}$$

である. よって、胞体ホモロジー群は、 n が偶数のとき

$$H_k(C_{\bullet}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); M)) \cong \begin{cases} M & (k = 0, n) \\ M/2M & (k = 1, 3, \dots, n-1) \\ \{m \in M \mid 2m = 0\} & (k = 2, 4, \dots, n-2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり、 n が奇数のとき

$$H_k(C_{\bullet}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); M)) \cong \begin{cases} M & (k = 0) \\ M/2M & (k = 1, 3, \dots, n) \\ \{m \in M \mid 2m = 0\} & (k = 2, 4, \dots, n-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である.

付録 A ホモトピー論からの準備

A.1 ホモトピー

定義 A.1 (ホモトピー) X, Y を位相空間とし、 $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 連続写像 $\sigma: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ であって、 $\sigma(-, 0) = f$ かつ $\sigma(-, 1) = g$ を満たすものを、 f から g への**ホモトピー** (homotopy) という. f から g へのホモトピーが存在するとき、 f と g は**ホモトピック** (homotopic) であるという.

容易に確かめられるように、「ホモトピックである」という関係は、同値関係である. この同値関係に関する連続写像 f の同値類を、 f の**ホモトピー類** (homotopy class) といい、 $[f]$ と書く. 位相空間 X から Y への連続写像のホモトピー類全体のなす集合を、**ホモトピー集合** (homotopy set) といい、 $[X, Y]$ と書く.

位相空間を対象とし、連続写像のホモトピー同値類を射とする圏 **Ho(Top)** が自然に定まる.

定義 A.2 (ホモトピー同値) 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ について、 $g \circ f$ が id_X にホモトピックであり、 $f \circ g$ が id_Y にホモトピックであるとき、 f と g は互いに他の**ホモトピー逆** (homotopy inverse) であるという. ホモトピー逆をもつ連続写像を、**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalence) という. 位相空間 X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき、 X と Y は**ホモトピー同値** (homotopy equivalent) であるという.

位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がホモトピー同値写像であるとは、ホモトピー類 $[f]$ が **Ho(Top)** の同型射であるということにほかならない.

次に、以上の概念の「空間対版」を定義する^{*15}.

^{*15} 本小節の以下の部分で定義する用語は、すべて本稿だけのものである.

定義 A.3 (対ホモトピー) $(X, A), (Y, B)$ を空間対とし, $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を連続写像とする. 連続写像 $\sigma: (X, A) \times \mathbb{I} \rightarrow (Y, B)$ であって, $\sigma(-, 0) = f$ かつ $\sigma(-, 1) = g$ を満たすものを, f から g への**対ホモトピー**という. f から g への対ホモトピーが存在するとき, f と g は**対ホモトピック**であるという.

容易に確かめられるように, 「対ホモトピックである」という関係は, 同値関係である. この同値関係に関する連続写像 f の同値類を, f の**対ホモトピー類**といい, $[f]$ と書く^{*16}. 空間対 (X, A) から (Y, B) への連続写像の対ホモトピー類全体のなす集合を, **対ホモトピー集合**といい, $[(X, A), (Y, B)]$ と書く.

点付き空間 $(X, *)$ から $(Y, *)$ への点付き連続写像の間の対ホモトピーを扱うときには, 対ホモトピーの代わりに**点付きホモトピー**, 対ホモトピックの代わりに**点付きホモトピック**, 対ホモトピー類の代わりに**点付きホモトピー類**, 対ホモトピー集合の代わりに**点付きホモトピー集合**という.

空間対を対象とし, 連続写像の対ホモトピー同値類を射とする圏 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}^{(2)})$ が自然に定まる.

定義 A.4 (対ホモトピー同値) 空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ について, $g \circ f$ が id_X に対ホモトピックであり, $f \circ g$ が id_Y に対ホモトピックであるとき, f と g は互いに他の**対ホモトピー逆**であるという. 対ホモトピー逆をもつ連続写像を, **対ホモトピー同値写像**という. 空間対 (X, A) から (Y, B) への対ホモトピー同値写像が存在するとき, (X, A) と (Y, B) は**対ホモトピー同値**であるという.

点付き空間 $(X, *)$ から $(Y, *)$ への点付き連続写像の間の対ホモトピーを扱うときには, 対ホモトピー逆の代わりに**点付きホモトピー逆**, 対ホモトピー同値写像の代わりに**点付きホモトピー同値写像**, 対ホモトピー同値の代わりに**点付きホモトピー同値**という.

空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が対ホモトピー同値写像であるとは, 対ホモトピー類 $[f]$ が $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}^{(2)})$ の同型射であるということにほかならない.

注意 A.5 空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ について, f が X から Y への連続写像としてホモトピー同値であり, かつ A から B への連続写像としてホモトピー同値であっても, f が (X, A) から (Y, B) への連続写像として対ホモトピー同値であるとは限らない. たとえば, 整数 $n \geq 1$ に対して, 包含写像 $\mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ および $\mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ はホモトピー同値だが, 包含写像 $(\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ は対ホモトピー同値でない.

A.2 レトラクトと変位レトラクト

定義 A.6 (レトラクト) X を位相空間, A をその部分空間とし, $i: A \rightarrow X$ を包含写像とする. 連続写像 $r: X \rightarrow A$ であって $r \circ i = \text{id}_A$ を満たすものを, X から A の上への**レトラクション** (retraction) という. これが存在するとき, A は X の**レトラクト** (retract) であるという.

X が Hausdorff 空間ならば, X のレトラクトは閉集合である.

定義 A.7 (変位レトラクト) X を位相空間とし, A をその部分空間とする. 次の 3 条件を満たす連続写像 $R: X \times \mathbb{I} \rightarrow X$ を, X から A の上への**変位レトラクション** (deformation retraction) という.

- (i) $R(-, 0) = \text{id}_X$ である.

^{*16} $[f]$ が f のホモトピー類と対ホモトピー類のどちらを表しているかは, 文脈で区別する.

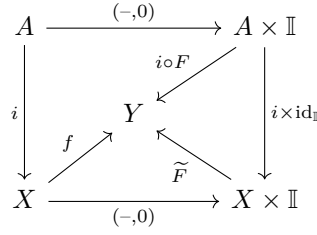


図1 ホモトピー拡張性質

(ii) $R(-, 1)$ は, X から A の上へのレトラクションである.

(iii) 任意の $(x, t) \in A \times \mathbb{I}$ に対して, $R(x, t) = x$ である.

X から A の上への変位レトラクションが存在するとき, A は X の**変位レトラクト** (deformation retract) であるという.

定義より, 変位レトラクトはレトラクトである.

命題 A.8 位相空間 X がその部分空間 A を変位レトラクトにもつならば, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ はホモトピー同値である.

証明 X から A の上への変位レトラクション $R: X \times \mathbb{I} \rightarrow X$ をとり, $r = R(-, 1): X \rightarrow A$ と置く. すると, r は X から A の上へのレトラクションであり, R は id_X から $i \circ r$ へのホモトピーだから, r は i のホモトピー逆である. \square

A.3 コファイブレーション

定義 A.9 (ホモトピー拡張性質) 位相空間の間の連続写像 $i: A \rightarrow X$ が位相空間 Y に対して**ホモトピー拡張性質** (homotopy extension property) をもつとは, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ と $F: A \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ であって $f \circ i = F(-, 0)$ を満たすものに対して, 連続写像 $\tilde{F}: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ であって $\tilde{F}(-, 0) = f$ かつ $\tilde{F} \circ (i \times \text{id}_{\mathbb{I}})$ を満たすものが存在することをいう (図 1).

定義 A.10 (コファイブレーション) 位相空間の間の連続写像 $i: A \rightarrow X$ は, すべての位相空間 Y に対してホモトピー拡張性質をもつとき, **コファイブレーション** (cofibration) であるという.

空間対 (X, A) であって, 包含写像 $A \rightarrow X$ がコファイブレーションであるものを, **コファイブレーション対** (cofibration pair) という.

命題 A.11 位相空間 X とその閉部分空間 A について, 次の 4 条件は同値である.

- (a) (X, A) はコファイブレーション対である.
- (b) $(X \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{I})$ は $X \times \mathbb{I}$ のレトラクトである.
- (c) $(X \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{I})$ は $X \times \mathbb{I}$ の変位レトラクトである.

証明 Tom Dieck [1, (5.1.2), (5.1.3)] を参照のこと. \square

例 A.12 容易に確かめられるように, 整数 $n \geq 0$ に対して, $(\mathbb{D}^n \times \{0\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{I})$ は $\mathbb{D}^n \times \mathbb{I}$ のレトラク

トである．よって，命題 A.11 より， $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ はコファイブレーション対である．

命題 A.13 位相空間の間の連続写像 $i: A \rightarrow X$ がコファイブレーションであるとする．このとき， i は埋め込みである．さらに， X が Hausdorff ならば， i は閉埋め込みである．

証明 Tom Dieck [1, §5.1, Problem 1] を参照のこと． □

命題 A.14 $(i_\lambda: A_\lambda \rightarrow X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の間の連続写像の族とし， $i = \coprod_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda$ ， $A = \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ ， $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置く．すべての $i_\lambda: A_\lambda \rightarrow X_\lambda$ が位相空間 Y に対してホモトピー拡張性質をもつならば， $i: A \rightarrow X$ も Y に対してホモトピー拡張性質をもつ．特に，すべての $i_\lambda: A_\lambda \rightarrow X_\lambda$ がコファイブレーションならば， $i: A \rightarrow X$ もコファイブレーションである．

証明 容易に確かめられる． □

命題 A.15 位相空間の押し出しの図式

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \longrightarrow & B \end{array}$$

について， $i: A \rightarrow X$ が位相空間 Z に対してホモトピー拡張性質をもつならば， $j: B \rightarrow Y$ も Z に対してホモトピー拡張性質をもつ．特に， $i: A \rightarrow X$ がコファイブレーションならば， $j: B \rightarrow Y$ もコファイブレーションである．

証明 Tom Dieck [1, (5.1.8)] を参照のこと． □

命題 A.16 位相空間と連続写像の列

$$X_0 \xrightarrow{i_0} X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \xrightarrow{i_2} \cdots$$

を考え， $X = \varinjlim_k X_k$ と置く．すべての $i_k: X_k \rightarrow X_{k+1}$ がコファイブレーションならば，すべての自然な写像 $j_k: X_k \rightarrow X$ もコファイブレーションである．

証明 容易に確かめられる． □

A.4 CW 複体

定義 A.17 (胞体，特性写像) X を位相空間とする．

- (1) X の部分空間であって単位開円板 $\text{int } \mathbb{D}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) に同相であるものを， X 上の n **次元胞体** (n -dimensional cell) という．
- (2) e を X 上の n 次元胞体 ($n \in \mathbb{N}$) とする．連続写像 $\phi: \mathbb{D}^n \rightarrow X$ であって， $\text{int } \mathbb{D}^n$ から e への同相を与えるものを， e に対する**特性写像** (characteristic map) という．このとき，用語の濫用で，組 (e, ϕ) のことも X 上の n 次元胞体 (特性写像を固定していることを明示したい場合には，特性写像付き n 次元胞体) という．

定義 A.18 (胞体複体) 空間対 (X, A) の**相対胞体分割** (relative cell decomposition) とは， X 上の特性写像付き n 次元胞体からなる集合 \mathcal{C}_n の族 $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，次の条件を満たすものをいう．

$n \in \mathbb{Z}$ に対して $X^{(n)} = A \cup \bigcup_{k \leq n} \bigcup_{(e, \Phi) \in \mathcal{E}_k} e$ と書くと、任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(e, \Phi) \in \mathcal{E}_n$ に対して、 $\Phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$ である。

(X, A) の相対胞体分割 $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が定まっているとき、 (X, A) を**相対胞体複体** (relative cell complex) という。このとき、 $X^{(n)}$ を、相対胞体複体 (X, A) の n **次元骨格** (n -dimensional skelton) という。また、各 $(e, \Phi) \in \mathcal{E}_n$ を、 (X, A) の n **次元胞体** という。集合 $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ が有限であるとき、相対胞体複体 (X, A) は**有限** (finite) であるという。

位相空間 X について、空間対 (X, \emptyset) の相対胞体分割を、 X の**胞体分割** (cell decomposition) という。 X の胞体分割が定まっているとき、 X を**胞体複体** (cell complex) という。相対胞体複体に対する用語は、胞体複体に対しても同様に用いる。

胞体複体 X または相対胞体複体 (X, A) の n 次元骨格を表す記号 $X^{(n)}$ は、特に断らずに用いる。

記法の便宜上、 \mathcal{E}_n の元を列挙する添字集合 Λ_n ($m \neq n$ ならば $\Lambda_m \neq \Lambda_n$ であるとする) を用意して、(相対) 胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ のように書くことが多い。

定義 A.19 (CW 複体) 相対胞体複体 (X, A) であって、その相対胞体分割 $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ が次の 2 条件を満たすものを、**相対 CW 複体** (relative CW complex) という。以下、各 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して、 $\phi_\lambda = \Phi_\lambda|_{\mathbb{S}^{n-1}}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ と書く。

(CW1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\langle \phi_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda_n}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \mathbb{D}^{n-1} & \xrightarrow{\langle \Phi_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda_n}} & X^{(n)} \end{array}$$

は押し出しの図式である。ここで、縦の矢印は、包含写像を表す。

(CW2) $X = \bigcup_{n \geq -1} X^{(n)}$ であり、 X は $(X^{(n)})_{n \geq -1}$ に関して終位相をもつ (したがって、 $X = \varinjlim_n X^{(n)}$ とみなせる)。

胞体複体 X であって、相対胞体複体として上の条件を満たすものを、**CW 複体** (CW complex) という。

命題 A.20 相対 CW 複体 (X, A) は、コファイブレーション対である。

証明 整数 $n \geq 0$ に対して、 \mathbb{S}^{n-1} から \mathbb{D}^n への包含写像はコファイブレーションだから (例 A.12)、その任意個の和もコファイブレーションである (命題 A.14)。したがって、 $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ はコファイブレーション対である (命題 A.15)。このことと命題 A.16 より、 (X, A) はコファイブレーション対である。□

命題 A.21 (X, A) を相対胞体複体とし、その胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書く。 $q: X \rightarrow X/A$ を等化写像とすると、 $(q(e_\lambda), q \circ \Phi_\lambda)$ の全体と X/A の基点が定める 0 次元胞体は、 X/A の胞体分割をなす。さらに、 (X, A) が相対 CW 複体ならば、 X/A はこの胞体分割によって CW 複体をなす。

証明 容易に確かめられる。□

定義 A.22 (部分複体) (X, A) を相対胞体複体とし、その胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書く。 (X, A) の**相対部分複体** (relative subcomplex) とは、 A を含む部分集合 $X' \subseteq X$ であって、任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \Lambda_n$ に対して $\Phi_\lambda(\mathbb{D}^n) \subseteq X'$ または $X' \cap e_\lambda = \emptyset$ を満たすものをいう。

胞体複体の**部分複体** (subcomplex) も、同様に定める.

明らかに、(相対) 部分複体の族の合併と交叉は、ふたたび (相対) 部分複体である.

命題 A.23 (X, A) を相対胞体複体とし、その胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書く. X', A' が (X, A) の相対部分複体で $A' \subseteq X'$ を満たすとき、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Lambda'_n = \{\lambda \in \Lambda_n \mid \Phi_\lambda(\mathbb{D}^n) \subseteq X' \text{ かつ } A' \cap e_\lambda = \emptyset\}$$

と置けば、 $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda'_n}$ は (X', A') の胞体分割である. さらに、 (X, A) が相対 CW 複体ならば、 (X', A') はこの胞体分割によって相対 CW 複体をなす.

証明 容易に確かめられる. □

(X, A) を相対胞体複体、 X' をその部分相対複体とすると、命題 A.23 より特に、 (X', A) は自然に相対 CW 複体をなす. この相対 CW 複体 (X', A) が有限であるとき、 X' は (X, A) の**有限相対部分複体**であるという. 胞体複体の**有限部分複体**も同様に定める.

命題 A.24 (X, A) を相対 CW 複体とし、 X_1 と X_2 をその相対部分複体とする. このとき、包含写像 $i: (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ が誘導する連続写像 $\bar{i}: X_1/(X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2)/X_2$ は、同相である.

証明 (X, A) の相対胞体分割を $((e_\lambda, \Phi_\lambda))_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda_n}$ と書き、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Lambda'_n = \{\lambda \in \Lambda_n \mid \Phi_\lambda(\mathbb{D}^n) \subseteq X_1 \text{ かつ } X_2 \cap e_\lambda = \emptyset\}$$

と置く. 命題 A.23 と命題 A.21 より、 $q: X_1 \rightarrow X_1/(X_1 \cap X_2)$ を等化写像とすると、 $(q(e_\lambda), q \circ \Phi_\lambda)$ ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda'_n$) の全体と $X_1/(X_1 \cap X_2)$ の基点が定める 0 次元胞体によって、 $X_1/(X_1 \cap X_2)$ は CW 複体をなす. 同様に、 $q': X_1 \cup X_2 \rightarrow (X_1 \cup X_2)/X_2$ を等化写像とすると、 $(q'(e_\lambda), q' \circ \Phi_\lambda)$ ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda'_n$) の全体と $(X_1 \cup X_2)/X_2$ の基点が定める 0 次元胞体によって、 $(X_1 \cup X_2)/X_2$ は CW 複体をなす. $\bar{i}: X_1/(X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2)/X_2$ は全単射であり、これら二つの胞体分割を対応させるから、 \bar{i} は同相である. □

定義 A.25 (胞体写像) 相対胞体複体 (X, A) から (Y, B) への**相対胞体写像** (relative cellular map) とは、連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ であって、任意の整数 $n \geq 0$ に対して $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ を満たすものをいう.

胞体複体の間の**胞体写像** (cellular map) も、同様に定める.

付録 B ホモロジー代数の結果

本小節では、本稿で必要なホモロジー代数の結果を述べる. 証明の多くは、参照のみを示す.

B.1 加群の完全列に関する結果

補題 B.1 (和の補題) R -加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} L & & & & L' \\ & \searrow f & & \swarrow f' & \\ & & M & & \\ & \swarrow g & & \searrow g' & \\ N & & & & N' \\ & \downarrow \phi & & \downarrow \phi' & \end{array}$$

について、次が成り立つ。

- (1) ϕ が同型で $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g'} N' \rightarrow 0$ および $0 \rightarrow L' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{g} N$ が完全ならば、 ϕ' は同型である。
- (2) ϕ, ϕ' が同型で $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g'} N'$ または $L' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{g} N$ が完全ならば、 $\langle f, f' \rangle: L \oplus L' \rightarrow M$ および $(g, g'): M \rightarrow N \oplus N'$ は同型である。
- (3) $\langle f, f' \rangle: L \oplus L' \rightarrow M$ が同型で $L' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ が完全ならば、 ϕ は同型である^{*17}。
- (4) $(g, g'): M \rightarrow N \oplus N'$ が同型で $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g'} N'$ が完全ならば、 ϕ は同型である^{*18}。

証明 (1) $x' \in \text{Ker } \phi'$ とすると、 $g'(f'(x')) = \phi'(x') = 0$ より $f'(x') \in \text{Ker } g' = \text{Im } f$ だから、ある $x \in L$ が存在して $f'(x') = f(x)$ となる。ところが、 $\phi(x) = g(f(x)) = g(f'(x')) = 0$ だから、 ϕ が単射であることより、 $x = 0$ である。したがって、 $f'(x') = f(x) = 0$ であり、 f' は単射だから、 $x' = 0$ である。よって、 ϕ' は単射である。

$z' \in N'$ を任意にとる。 g' は全射だから、ある $y \in M$ が存在して $z' = g'(y)$ となる。さらに、 ϕ' は全射だから、ある $x \in L$ が存在して $g(y) = \phi(x)$ となる。このとき、 $g(y - f(x)) = g(y) - \phi(x) = 0$ より $y - f(x) \in \text{Ker } g = \text{Im } f'$ だから、ある $x' \in L'$ が存在して $y - f(x) = f'(x')$ となる。この x' について、 $\phi'(x') = g'(f'(x')) = g'(y - f(x)) = g'(y) = z'$ が成り立つ。よって、 ϕ' は全射である。

- (2) 対称性より、 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g'} N'$ が完全である場合だけを考えれば十分である。可換図式

$$\begin{array}{ccc} L \oplus L' & & \\ \phi \oplus \phi' \downarrow \cong & \begin{array}{c} \nearrow \langle f, f' \rangle \\ \searrow (g, g') \end{array} & M \\ N \oplus N' & & \end{array}$$

において、 $\phi \oplus \phi'$ は同型だから、 $\langle f, f' \rangle$ は単射であり、 (g, g') は全射である。あとは、 $\langle f, f' \rangle$ が全射であることをいえば、 $\langle f, f' \rangle$ と (g, g') が同型であることが示される。

$y \in M$ を任意にとる。すると、 $g(z - f(\phi^{-1}(g(z)))) = g(z) - \phi(\phi^{-1}(g(z))) = 0$ より $z - f(\phi^{-1}(g(z))) \in \text{Ker } g = \text{Im } f'$ だから、ある $x' \in L'$ が存在して $z - f(\phi^{-1}(g(z))) = f'(x')$ となる。したがって、 $z = f(\phi^{-1}(g(z))) + f'(x') \in \text{Im } \langle f, f' \rangle$ である。よって、 $\langle f, f' \rangle$ は全射である。

- (3) $x \in \text{Ker } \phi$ とすると、 $g(f(x)) = \phi(x) = 0$ より $f(x) \in \text{Ker } g = \text{Im } f'$ だから、ある $x' \in L'$ が存在して $f(x) = f'(x')$ 、すなわち $f(x) - f'(x') = 0$ となる。 $\langle f, f' \rangle$ は単射だから、これより $x = 0$ を得る。よって、 ϕ は単射である。

$z \in N$ を任意にとる。 g は全射だから、ある $y \in M$ が存在して $z = g(y)$ となる。さらに、 $\langle f, f' \rangle$ は全射だから、ある $x \in L$ と $x' \in L'$ が存在して $y = f(x) + f'(x')$ となる。このとき、 $z = g(y) = g(f(x) + f'(x')) = \phi(x)$ である。よって、 ϕ は全射である。

- (4) $x \in \text{Ker } \phi$ とすると、 $g(f(x)) = \phi(x) = 0$ かつ $g'(f(x)) = 0$ だから、 (g, g') が単射であることより、 $f(x) = 0$ である。 f は単射だから、 $x = 0$ である。よって、 ϕ は単射である。

$z \in N$ を任意にとる。 (g, g') は全射だから、ある $y \in M$ が存在して $g(y) = z$ かつ $g'(y) = 0$ となる。この y について、 $y \in \text{Ker } g' = \text{Im } f$ だから、ある $x \in L$ が存在して $y = f(x)$ となる。このとき、 $z = g(y) = g(f(x)) = \phi(x)$ である。よって、 ϕ は全射である。□

^{*17} この主張には、 g' と ϕ' は関係しない。

^{*18} この主張には、 f' と ϕ' は関係しない。

命題 B.2 (五項補題) R -加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\
 N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5
 \end{array}$$

において, 二つの行はそれぞれ完全であるとする.

- (1) h_2, h_4 が単射で h_1 が全射ならば, h_3 は単射である.
- (2) h_2, h_4 が全射で h_5 が単射ならば, h_3 は全射である.
- (3) h_1, h_2, h_4, h_5 が同型ならば, h_3 も同型である.

証明 河田 [8, 例 1.7 (v)] を参照のこと. □

命題 B.3 (九項補題) R -加群の可換図式

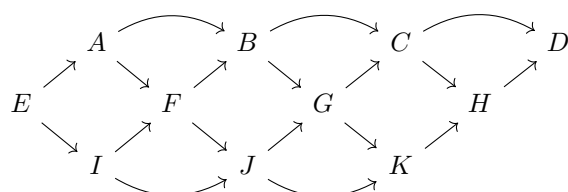
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

において, 三つの列はすべて完全であるとする.

- (1) 上と中央の行が完全ならば, 下の行も完全である.
- (2) 下と中央の行が完全ならば, 上の行も完全である.

証明 河田 [8, 例 1.9] を参照のこと. □

命題 B.4 (組紐の補題) R -加群の可換図式



において, 列

- (i) $E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow K$
- (ii) $E \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow D$
- (iii) $A \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow D$
- (iv) $I \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow H$

のうち (i), (ii), (iii) が完全で (iv) の中の隣接する二つの準同型の合成がすべて 0 ならば, (iv) も完全である.

証明 Kammeyer [3, Lemma 5.1] を参照のこと. \square

命題 B.5 (Barratt–Whitehead の補題) R -加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5 \end{array}$$

において, 二つの行がそれぞれ完全で h_2 が同型ならば, 列

$$M_1 \xrightarrow{\langle f_1, h_1 \rangle} M_2 \oplus N_1 \xrightarrow{\langle h_2, -g_1 \rangle} N_2 \xrightarrow{f_3 \circ h_3^{-1} \circ g_2} M_4 \xrightarrow{\langle f_4, h_4 \rangle} M_5 \oplus N_4 \xrightarrow{\langle h_5, -g_4 \rangle} N_5$$

は完全である.

証明 図式追跡により確かめられる. \square

命題 B.6 A を有向集合とし, 各 $\lambda \in A$ に対して R -加群の短完全列

$$L_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} N_\lambda$$

が, $\lambda \leq \mu$ を満たす $\lambda, \mu \in A$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccc} L_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & M_\lambda & \xrightarrow{g_\lambda} & N_\lambda \\ \downarrow \phi_{\mu\lambda} & & \downarrow \psi_{\mu\lambda} & & \downarrow \chi_{\mu\lambda} \\ L_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & M_\mu & \xrightarrow{g_\mu} & N_\mu \end{array}$$

を可換にする準同型 $\phi_{\mu\lambda}, \psi_{\mu\lambda}, \chi_{\mu\lambda}$ が与えられ, これらは帰納系をなすとする. このとき, 帰納極限をとって得られる列

$$\varinjlim_{\lambda \in A} L_\lambda \xrightarrow{\varinjlim_{\lambda \in A} f_\lambda} \varinjlim_{\lambda \in A} M_\lambda \xrightarrow{\varinjlim_{\lambda \in A} g_\lambda} \varinjlim_{\lambda \in A} N_\lambda$$

も完全である.

証明 河田 [8, 例 1.9 (iv)] から従う. \square

B.2 チェイン複体とそのホモロジー

定義 B.7 (チェイン複体) R -加群の**チェイン複体** (chain complex) とは, R -加群と準同型の列

$$M_\bullet = (M_\bullet, \partial_\bullet): \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

であって, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ であるものをいう.

以下, チェイン複体を構成する準同型は, 特に明示しなくても, ∂_n あるいは単に ∂ と書く.

定義 B.8 (チェイン準同型) R -加群のチェイン複体 M_\bullet から N_\bullet への**チェイン準同型** (chain homomorphism) とは, R -加群の準同型の族

$$f_\bullet = (f_n: M_n \rightarrow N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

であって, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{\partial_n} & M_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow g_n \\ N_n & \xrightarrow{\partial_n} & N_{n-1} \end{array}$$

を可換にするものをいう. f_\bullet が M_\bullet から N_\bullet へのチェイン準同型であるとき, $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ と書く.

R -加群のチェイン複体とその間のチェイン準同型は圏 $\mathbf{C}(R\text{-Mod})$ をなす.

定義 B.9 (チェイン複体のホモロジー) M_\bullet を R -加群のチェイン複体とする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} Z_n(M_\bullet) &= \text{Ker}(\partial_n: M_n \rightarrow M_{n-1}), \\ B_n(M_\bullet) &= \text{Im}(\partial_{n+1}: M_{n+1} \rightarrow M_n) \end{aligned}$$

と定め, $Z_n(M_\bullet)$ の元を M_\bullet の n -**サイクル** (n -cycle), $B_n(M_\bullet)$ の元を M_\bullet の n -**バウンダリ** (n -boudnary) という. さらに, M_\bullet の n **次ホモロジー群** (n -th homology group) を,

$$H_n(M_\bullet) = Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet)$$

と定める. $a \in Z_n(M_\bullet)$ が定める $H_n(M_\bullet)$ の元を, a の**ホモロジー類** (homology class) といい, $[a]$ と書く.

f_\bullet を R -加群のチェイン複体 M_\bullet から N_\bullet へのチェイン準同型とすると, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f_n(Z_n(M_\bullet)) \subseteq Z_n(N_\bullet)$ かつ $f_n(B_n(M_\bullet)) \subseteq B_n(N_\bullet)$ であり, したがって f_n はホモロジー群 $H_n(M_\bullet)$ から $H_n(N_\bullet)$ への準同型を誘導する. この準同型を,

$$H_n(f_\bullet): H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$$

と書く. これにより, n 次ホモロジー群を与える対応 H_n は, R -加群の複体の圏 $\mathbf{C}(R\text{-Mod})$ から R -加群の圏 $R\text{-Mod}$ への関手となる.

有向集合 A で添字付けられた R -加群のチェイン複体の**帰納系**とは, チェイン複体の族とその間のチェイン準同型の族との組 $((M_{\lambda,\bullet})_{\lambda \in A}, (f_{\mu\lambda,\bullet}: M_{\lambda,\bullet} \rightarrow M_{\mu,\bullet})_{\lambda \leq \mu})$ であって, 各次数において R -加群の帰納系をなすものをいう. チェイン準同型を省略して, 「 $(M_{\lambda,\bullet})_{\lambda \in A}$ を帰納系とする」などともいう. R -加群のチェイン複体の帰納系の帰納極限が, 各次数において R -加群の帰納極限をとることと定まる.

命題 B.10 $(M_{\lambda,\bullet})_{\lambda \in A}$ を有向集合 A で添字付けられた R -加群のチェイン複体の帰納系とし, その帰納極限を M_\bullet と置く. このとき, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, R -加群の帰納系 $(H_n(M_{\lambda,\bullet}))_{\lambda \in A}$ の帰納極限は, 自然に $H_n(M_\bullet)$ に同型である.

証明 一般に, R -加群のチェイン複体 N_\bullet について, その n -サイクルの空間 $Z_n(N_\bullet)$ は完全列

$$0 \longrightarrow Z_n(N_\bullet) \longrightarrow N_n \xrightarrow{\partial_n} N_{n+1}$$

によって定まり, その n 次ホモロジー群は完全列

$$N_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} Z_n(N_\bullet) \longrightarrow H_n(N_\bullet) \longrightarrow 0$$

によって定まる. よって, 主張は, 完全列の帰納極限がまた完全であること (命題 B.6) から従う. □

B.3 チェインホモトピー

定義 B.11 (チェインホモトピー) M_\bullet, N_\bullet を R -加群のチェイン複体, $f_\bullet, g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ をチェイン準同型とする. f_\bullet から g_\bullet への**チェインホモトピー** (chain homotopy) とは, R -加群の準同型の族

$$(\phi_n: M_n \rightarrow N_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

であって, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial_{n+1} \circ \phi_n + \phi_{n-1} \circ \partial_n = g_n - f_n$$

を満たすものをいう. f_\bullet から g_\bullet へのチェインホモトピーが存在するとき, f_\bullet と g_\bullet は**チェインホモトピック** (chain homotopic) であるという.

定義 B.12 (チェインホモトピー同値) $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet, g_\bullet: N_\bullet \rightarrow M_\bullet$ を R -加群のチェイン複体の間のチェイン準同型とする. $g_\bullet \circ f_\bullet, f_\bullet \circ g_\bullet$ がそれぞれ $\text{id}_{M_\bullet}, \text{id}_{N_\bullet}$ にチェインホモトピックであるとき, f_\bullet と g_\bullet は互いに他の**チェインホモトピー逆** (chain homotopy inverse) であるという. チェイン準同型 f_\bullet がチェインホモトピー逆をもつとき, f_\bullet は**チェインホモトピー同値** (chain homotopy equivalence) であるという. R -加群のチェイン複体 M_\bullet から N_\bullet へのチェインホモトピー同値が存在するとき, M_\bullet と N_\bullet は**チェインホモトピー同値** (chain homotopy equivalent) であるという.

チェインホモトピックであるという関係は, チェイン準同型の間の同値関係である. チェイン準同型 f_\bullet と f'_\bullet, g_\bullet と g'_\bullet がそれぞれチェインホモトピックならば, $g_\bullet \circ f_\bullet$ と $g'_\bullet \circ f'_\bullet$ もチェインホモトピックである. また, これより, チェインホモトピー同値であるという関係は, チェイン複体の間の同値関係である.

命題 B.13 R -加群のチェイン複体の間のチェイン準同型 $f_\bullet, g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ がチェインホモトピックならば, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet): H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$$

である. □

証明 河田 [8, §2.1.c, 定理 2.5] を参照のこと. □

系 B.14 R -加群のチェイン複体の間のチェイン準同型 $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ がチェインホモトピー同値ならば, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $H_n(f_\bullet): H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$ は同型である. □

証明 $g_\bullet: N_\bullet \rightarrow M_\bullet$ を f_\bullet のチェインホモトピー逆とすると, 命題 B.13 より $H_n(g_\bullet)$ は $H_n(f_\bullet)$ の逆を与えるから, $H_n(f_\bullet)$ は同型である. □

B.4 ホモロジー完全列

R -加群のチェイン複体とチェイン準同型の列が**完全**であるとは, 各次数において完全であることをいう. R -加群のチェイン複体の短完全列も同様に定義される.

R -加群のチェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \longrightarrow 0$$

が与えられているとする。このとき、 $c \in Z_n(N_\bullet)$ ($n \in \mathbb{Z}$) に対して、次のように $a \in L_{n-1}$ を定めることができる。

1. 完全性より $g_n: M_n \rightarrow N_n$ は全射だから、 $b \in M_n$ を $g_n(b) = c$ となるようにとれる。
2. $\partial(b) \in M_{n-1}$ は $g_{n-1}\partial(b) = \partial g_n(b) = \partial(c) = 0$ を満たすから、完全性より $a \in L_{n-1}$ を $f_{n-1}(a) = \partial b$ となるようにとれる。

この対応は、準同型 $\partial = \partial_n: H_n(N_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(L_\bullet)$ を矛盾なく一意に定める。これを示すためには、次の二つのことをいえばよい。

- $c \in Z_n(N_\bullet)$ に対して上記のように $a \in L_{n-1}$ を定めるとき、 $a \in Z_{n-1}(L_\bullet)$ である。
- $c, c' \in Z_n(N_\bullet)$ のそれぞれに対して上記のように $a, a' \in L_{n-1}$ を定めるとき、 $c - c' \in B_n(N_\bullet)$ ならば $a - a' \in B_{n-1}(L_\bullet)$ である。

これらのことは、図式追跡により確かめられる。

定義 B.15 (連結準同型) 上記の状況で、準同型

$$\partial = \partial_n: H_n(N_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(L_\bullet)$$

を、**連結準同型** (connecting homomorphism) という。

定義から容易に確かめられるように、連結準同型は次の自然性を満たす。 R -加群のチェイン複体の短完全列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_\bullet & \xrightarrow{f_\bullet} & M_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet} & N_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_\bullet & & \downarrow \psi_\bullet & & \downarrow \chi_\bullet \\ 0 & \longrightarrow & L'_\bullet & \xrightarrow{f'_\bullet} & M'_\bullet & \xrightarrow{g'_\bullet} & N'_\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

があるとき、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} H_n(N_\bullet) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(L_\bullet) \\ H_n(\chi_\bullet) \downarrow & & \downarrow H_{n-1}(\phi_\bullet) \\ H_n(N'_\bullet) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(L_\bullet) \end{array}$$

は可換である。

定理 B.16 (ホモロジー完全列) R -加群の複体の短完全列

$$0 \longrightarrow L_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} N_\bullet \longrightarrow 0$$

に対して、準同型の列

$$\begin{aligned} \cdots & \xrightarrow{\partial} H_n(L_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(M_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(N_\bullet) \\ & \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(L_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(f_\bullet)} H_{n-1}(M_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(g_\bullet)} H_{n-1}(N_\bullet) \\ & \xrightarrow{\partial} \cdots \end{aligned}$$

は完全である。

証明 河田 [8, 定理 2.2] を参照のこと。

□

B.5 普遍係数定理

定理 B.17 (普遍係数定理) R を単項イデアル整域とし, M を R -加群, L_\bullet を自由 R -加群からなるチェイン複体とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 自然に構成される準同型の列

$$0 \longrightarrow H_n(L_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(L_\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(L_\bullet), M) \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列である. 特に, $H_{n-1}(L_\bullet)$ または M が平坦ならば, 自然な準同型

$$H_n(L_\bullet) \otimes_R M \rightarrow H_n(L_\bullet \otimes_R M)$$

は同型である.

証明 河田 [8, 定理 3.22] を参照のこと. □

参考文献

全体を通して, tom Dieck [1] を参考にした. 一般のホモロジー理論に対する Mayer–Vietoris 完全列の一般形 (定理 1.22) の証明は, Steiner [6] による. 本質的開被覆からの包含写像が誘導するチェイン写像がチェインホモトピー同値であること (定理 2.26) の証明は, Hatcher [2, Proposition 2.21] を参考にした.

ウェブページは, 2024 年 4 月 10 日にアクセスし, 内容を確認した.

- [1] T. tom Dieck, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, 2008.
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [3] H. Kammeyer, *Introduction to Algebraic Topology*, Birkhäuser, 2022.
- [4] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds* (2nd edition), Springer, 2011.
- [5] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, revised edition, Princeton University Press, 1997.
- [6] R. Steiner, “The relative Mayer–Vietoris sequence”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **95.3** (1984): 423–425.
- [7] C. Thomassen, “The Jordan–Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces”, *The American Mathematical Monthly* **99** (1992): 116–130.
- [8] 河田敬義, 『ホモロジー代数』, 岩波書店, 1990.
- [9] 河澄響矢, 『トポロジーの基礎 上・下』, 東京大学出版会, 2022.
- [10] 志甫淳, 『層とホモロジー代数』, 共立出版, 2016.
- [11] 中岡稔, 『位相幾何学 ホモロジー論』 (復刊), 共立出版, 1999.
- [12] 服部晶夫, 『位相幾何学』, 岩波書店, 1991.
- [13] 枘田幹也, 『代数的トポロジー』, 朝倉書店, 2002.
- [14] 松村英之, 『可換環論』 (復刊), 共立出版, 2000.
- [15] Mathematics Stack Exchange: ‘Good pair vs. cofibration’
<https://math.stackexchange.com/q/854281>