decepções básicas

santi

<2021-02-23 Tue>

Contents

1 tristezas e mais tristezas

ah! que belo o mundo seria se

$$77+33=100$$

mas infelizmente não é o que acontece. vivemos num mundo falho e imperfeito, a vida é arbitrária e sem sentido, não há motivo para sequer procurar estender nossa estada aqui, tudo é fútil e inócuo e devemos todos cometer suicídio.

ou será que não acontece?

bases numéricas são um assunto extremamente arbitrário: na maior parte do tempo usamos bases decimais, mas inconscientemente utilizamos outras bases em outros contextos, seja para o tempo (já reparou como 0.5 horas são 30 minutos?), seja para contar ovos (de 12 em 12) ou mesmo na linguagem mística dos computadores: binário.

fato é que, para toda base numérica x, podemos calcular o valor de seus digitos com a formula geral:

$$valor = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

ou, simplificando

$$valor = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$$

para o caso decepcionante supracitado, podemos dissecá-lo como

$$7 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 1 \cdot 10^3$$

e, interessantemente re-agrupá-lo como

$$7(10^1 + 10^0) + 3(10^1 + 10^0) = 1(10^2)$$

curiosamente, ou não curiosamente, muitos alunos do *ótimo* sistema de educação brasileiro já se encontraram de frente com a expressão entre parênteses: sim, é a soma de uma progressão geométrica. e para os que não lembram, podemos facilmente achar a fórmula fechada para tal com:

$$S_{pg} = x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x^2 + x^1 + x^0$$

$$x \cdot S_{pg} = x^{k+1} + x^k + x^{k-1} + ... + x^3 + x^2 + x^1$$

$$x \cdot S_{pg} - S_{pg} = x^{k+1} - x^0$$

$$S_{pg} = \frac{x^{k+1} - x^0}{x - 1}$$

E vemos que, não surpreendentemente,

$$\frac{10^2 - 1}{10 - 1} = \frac{99}{9} = (10^1 + 10^0) = 11$$

ok, entendi, matemática chata, e dai?

acalme-se jovem padawan, estamos apenas começando.

2 subvertendo a realidade

quando a verdade dói, ignore-a e crie a sua própria

provavelmente ninguém nunca disse isso. mas é verdade: quando os fatos não estão a seu favor, apenas os ignore. é simples assim. portanto, definemos aqui a base b tal que

$$77_b + 33_b = 100_b$$

onde a notação $nmero_b$ indica que $nmero$ é calculado na base b. sabemos que, para nossa base ser válida, precisa satisfazer

$$7(b^1 + b^0) + 3(b^1 + b^0) = b^2$$

$$(b^1 + b^0)(7 + 3) = b^2$$

e, portanto, pela fórmula da soma de pg,

$$10\left(\frac{b^2 - 1}{b - 1}\right) = b^2$$

resolvendo um pouco mais,

$$10b^2 - 10 = b^3 - b^2$$

$$b^3 - 11b^2 + 10 = 0$$

essa fórmula nos dá, então, três possíveis valores para b. um deles é trivial: $b = 1$, visto que $1 + 11 - 10$ realmente *é igual* a 0. entretanto, as outras duas soluções são muito mais interessantes: $b = 5 \pm \sqrt{35}$ e, ainda mais entusiasticamente, *apenas um* desses valores é de fato positivo: $5 + \sqrt{35}$, e portanto sabemos que

$$77_{5+\sqrt{35}} + 33_{5+\sqrt{35}} = 100_{5+\sqrt{35}}$$

eureka!

3 generalizando...

por que parar com $77 + 33 = 100$? por quê não $777 + 333 = 1000$? ou $7777 + 3333 = 10000$? realmente, não precisamos parar nessas quantidades de dígitos arbitrários, podemos ir **além**. Portanto, seja $B(n)$ a base necessária para que

$$77...7_{B(n)}(n\ digitos) + 33...3_{B(n)}(n\ digitos) = 10....0_{B(n)}(n + 1\ digitos)$$

sabemos que a fórmula

$$7(B(n)^n + ... + B(n)^1 + B(n)^0) + 3(B(n)^n + ... + B(n)^1 + B(n)^0) = B(n)^{n+1}$$

deve ser satisfeita. portanto

$$10\left(\frac{B(n)^{n+1}-1}{B(n)-1}\right)=B(n)^{n+1}$$

logo, organizando a equação, e usando a fórmula da soma de pg, achamos nossa fórmula geral para $B(n)$:

$$B(n)^{n+2}-11B(n)^{n+1}+10=0$$

eureka![2]

desse modo, para qualquer quantidade de dígitos n, podemos calcular, *dada suficiente quantidade de magia negra*, sua respectiva **base ideal**. por essa fórmula, podemos, por exemplo, achar a resposta para a $B(2)$:

$$B(2)=\frac{1}{3}\left(10+\sqrt[3]{1585-15\sqrt{1401}}+\sqrt[3]{5(317+3\sqrt{1401})}\right)$$

para o caso $B(3)$, apesar de o wolfram alpha encontrar *de maneira mística* a solução exata, não irei incluí-la pois é **enorme**

e não respondo para o caso de $B(4)$ em diante pois nem o wolframalpha foi capaz de empregar *magia negra* suficiente para encontrar a solução exata, apesar de serem equações relativamente simples.

4 adendos finais

alguns podem já ter notado que a base b não funcionará *apenas* para o caso $77_b+33_b=100_b$. de fato, quaisquer dois números que somem para 10 irão funcionar nessa equação, portanto $66_b+44_b=100_b$ ou $88_b+22_b=100_b$.

outro caso curioso é para $B(0)$: vemos que $B(0)^2-11B(0)+10=0$ tem duas soluções interessantes $B(0)_1=1$ e $B(0)_2=10$. enquanto ainda não sei direito como interpretar o caso onde 1 é o resultado, $B(0)=10$ nos diz que

$$7\cdot 10^0+3\cdot 10^0=10^1$$

ou, simplesmente,

$$7+3=10$$

além disso, deixei propositalmente escondido um fato bem importante: as equações possuirão graus cada vez maiores e eu não provei que $B(n)$ será sempre um número real (pois pode muito bem acontecer que todas as soluções de $B(n)$ sejam imaginárias, até então). pois bem, apesar de acreditar que tal fato seja verdadeiro, **eu não sei como provar isso**, e portanto deixo aqui a **conjectura de santi**:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, $\exists! k \in \mathbb{R}, k > 0$ tal que

$$k^{n+2} - 11k^{n+1} + 10 = 0$$

onde k é a *única* solução real positiva para a fórmula geral de $B(n)$. apesar de não saber provar, realmente acredito que essa afirmação seja verdadeira.

e sim, eu também ainda não sei bem como definir *uma base não inteira*, mas isso fica como dever de casa para àqueles que acreditam que matemática deve sempre ser aplicável à vida real.