1

# Mecânica e Campo Eletromagnético

2018/2019 – parte 4

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

2

## Tópicos

- **Movimento de um sistema de partículas**
  - **Momento linear do sistema**
  - **Conservação do momento linear**
  - **Centro de massa**
  - **Colisões**
  - **Sistema de massa variável**

## Momento linear (recordar)

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

**direção e sentido: velocidade**

**Unidades fundamental do S.I: (kg .m / s)**

**Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.**



## Força (resultante) e momento linear

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F}^{R}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}^{R}_{ext} = m\vec{a}$$

**Na mecânica clássica,**

**para uma partícula isolada,**

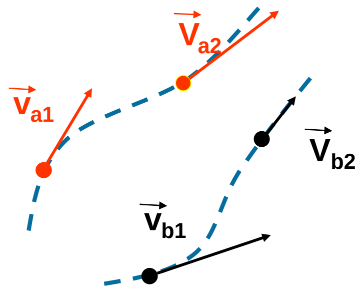
$\vec{F}^{R}_{ext} = m\vec{a}$ **e** $\vec{F}^{R}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

**são completamente equivalentes**

**A variação temporal do momento linear de um corpo é igual à força resultante que atua sobre o corpo.**

## Princípio da conservação do momento linear

**Sistema: partícula a + partícula b**




$$\boxed{\vec{P}_{sistema} = \vec{p}_a + \vec{p}_b}$$

Instante $t_1$ $\boxed{\vec{P}^1_{sistema} = \vec{p}_{a1} + \vec{p}_{b1}}$

Instante $t_2$ $\boxed{\vec{P}^2_{sistema} = \vec{p}_{a2} + \vec{p}_{b2}}$

**O MOMENTO LINEAR TOTAL DE UM SISTEMA COMPOSTO POR DUAS PARTÍCULAS SUJEITAS APENAS ÀS SUAS INTERAÇÕES MÚTUAS PERMANECE CONSTANTE**

$$\boxed{\vec{P}^1_{SISTEMA} = \vec{P}^2_{SISTEMA}}$$

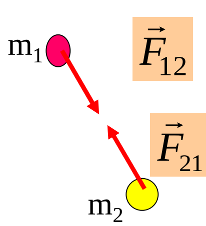


## Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

Consideremos um sistema isolado constituído por duas partículas.

Ser isolado significa que não há forças exteriores aplicadas (ou resultante nula)

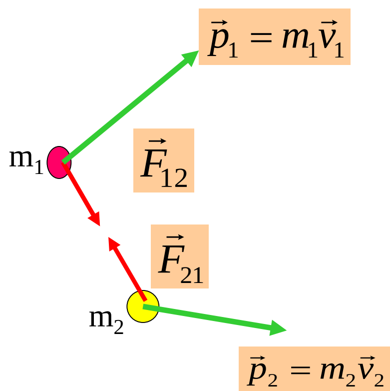
Assim cada partícula estará apenas sujeita à interação com a outra partícula.

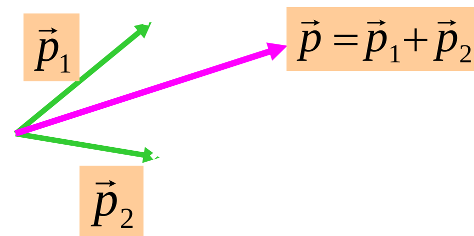



De acordo com a 3ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

## Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear




O que acontece ao momento linear de cada partícula?

E do conjunto?



## Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

Para cada partícula temos

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Então:

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

O momento linear de cada partícula varia

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$$

O momento linear do conjunto NÃO varia

## Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

O momento linear total de um sistema, composto por várias partículas sujeitas somente às suas interações mútuas, permanece constante

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

**Princípio da Conservação do Momento Linear num Sistema Isolado**

O princípio de conservação do momento linear é um dos conceitos mais importantes na física



## Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = const.$$

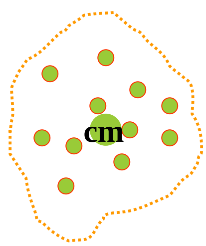
A três dimensões:

$$P_{x_i} = P_{x_f}$$
$$P_{y_i} = P_{y_f}$$
$$P_{z_i} = P_{z_f}$$

## Centro de massa

Vamos ver que:

Para qualquer sistema de partículas existe um ponto que se move sob a ação das forças aplicadas ao sistema como se toda a sua massa desse sistema estivesse concentrada nesse ponto: o centro de massa (cm)



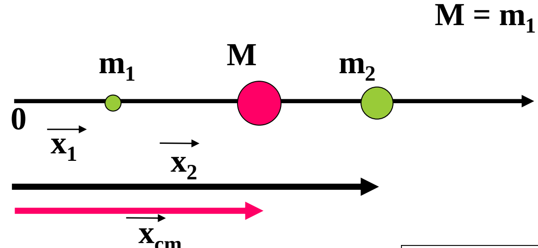

**Independentemente dos movimentos individuais neste grupo de partículas, a dinâmica do centro de massa obedece à 2ª Lei de Newton**

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm.}$$



## Centro de massa a 1D

$$\mathbf{M = m_1 + m_2}$$




$$M\vec{x}_{cm} = (m_1 x_1 + m_2 x_2)\hat{i}$$

$$\vec{x}_{cm} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{cm}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}}\sum \mathbf{m_i}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}}$$

**Para N partículas**

## Centro de massa a 3D

Posição do centro de massa para um sistema de partículas

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$com \quad \vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \;\; e \;\; M = \sum m_i$$

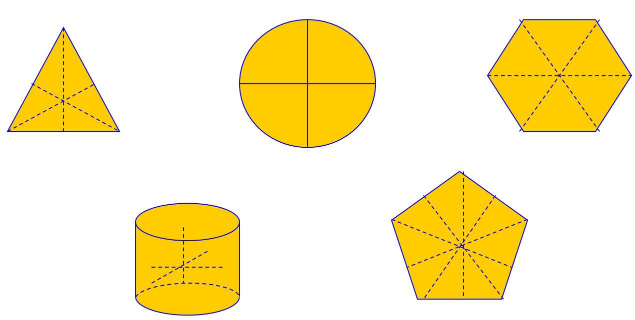
Posição do centro de massa para uma distribuição contínua de massa

$$\vec{r}_{c.m.} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$



## Centro de massa a 3D

**No caso de objectos simétricos com densidade uniforme o centro geométrico do corpo coincide com o centro de massa do mesmo.**



## Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$\boxed{M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}}$$

**O momento linear total de um sistema de várias partículas é igual ao de uma partícula de massa M deslocando-se com velocidade $\vec{v}_{cm}$**



## Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

**$\vec{F}_i$ são as forças exteriores aplicadas sobre cada uma das partículas componentes do sistema.**

Note que as forças internas (entre os componentes) não contribuem para a variação da quantidade do movimento do sistema.

## Movimento de um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero: $a_{cm} = 0 \Rightarrow$

o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{c.m.} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = M\vec{v}_{cm} = const.$$

O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema sujeito à ação de uma força externa aplicada ao sistema



## Colisões

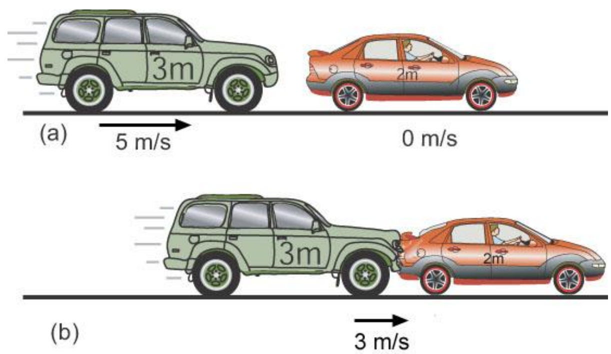
- Numa colisão há forte interação entre as massas
- As forças impulsivas são normalmente muito superiores a qualquer força externa
- Poderá ou não existir contato físico

De acordo com a 3ª Lei de Newton:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 \Rightarrow -\Delta\vec{p}_2 \\ \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0} \end{array}}$$

**A variação do momento linear do sistema devido à colisão é zero**

## Colisões



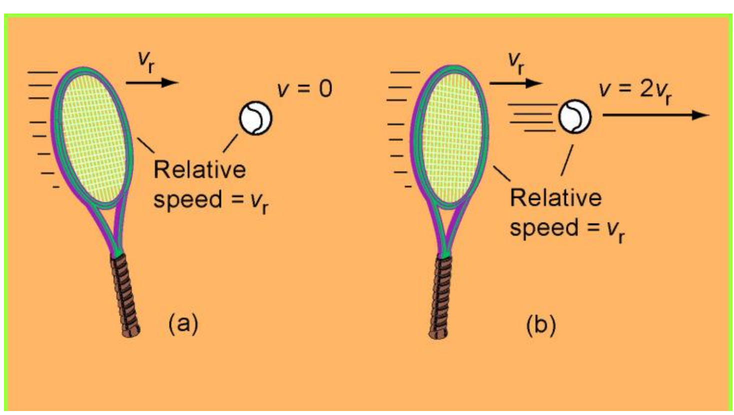

O momento é conservado nesta colisão?

Sim, o momento inicial é 3m x 5 m/s = 15 kgm/s

E o momento final é 5m x 3 m/s = 15 kgm/s

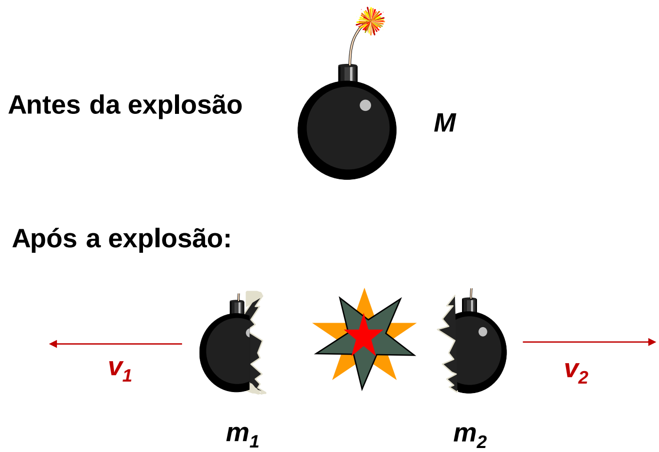


## Colisão elástica




Numa colisão elástica a velocidade relativa entre os objetos mantém-se antes e após a colisão

## Explosão a 1D: uma só componente






## Explosão a 1D: uma só componente

- ***P*** é conservado (forças externas são nulas).
- Antes da explosão: $\boldsymbol{P} = 0$

- Após a explosão: $\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 0$

$$m_1\boldsymbol{v}_1 = - m_2\boldsymbol{v}_2$$

## Colisões

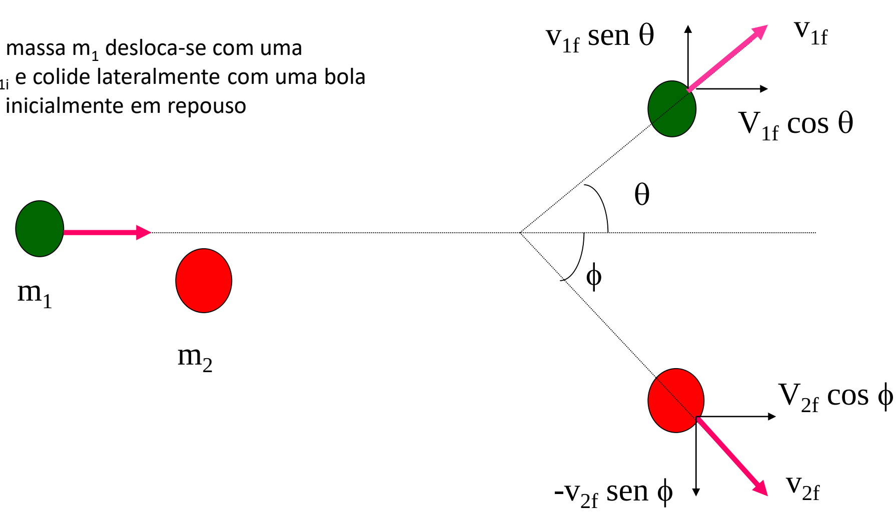
A conservação do momento linear diz que, na ausência de forças externas, o vetor momento total antes da colisão é o mesmo após a colisão

- Colisões elásticas:  colisões que conservam momento e energia cinética
- Colisões inelásticas:  colisões que só conservam momento
- Colisões perfeitamente inelásticas:  os objetos mantêm-se juntos após a colisão



## Exemplo

Uma bola de massa $m_1$ desloca-se com uma velocidade $v_{1i}$ e colide lateralmente com uma bola de massa $m_2$ inicialmente em repouso



## Conservação do momento linear

**Lei da conservação do momento linear : $\vec{P}_i = \vec{P}_f$**

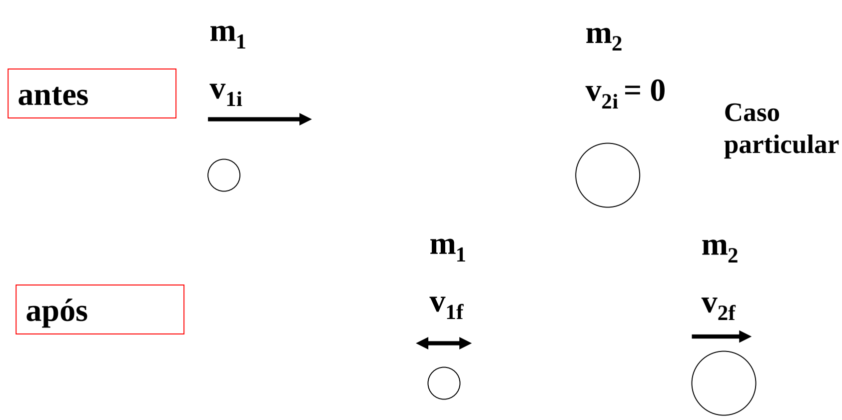
$$
\begin{array}{ll}
x & \\
y &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
P_{x\,i} = P_{x\,f} \\
P_{y\,i} = P_{y\,f}
\end{array}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \\
0 = m_1 v_{1f} \,\mathrm{sen}\,\theta - m_2 v_{2f} \,\mathrm{sen}\,\phi
\end{array}
\right.
$$

Se a colisão for elástica : $Ec_i = Ec_f$

$$1/2\ m_1 v_{1\,i}^{2} = 1/2\ m_1 v_{1\,f}^{2} + 1/2\ m_2 v_{2\,f}^{2}$$



## Colisão elástica a uma dimensão



## Colisão elástica a uma dimensão

Conservação do momento $m_1v_{1i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$...(1)

$m_2v_{2f} = m_1(v_{1i} - v_{1f})$.........(2)

Conservação de Energia $1/2m_1v_{1f}^2 + 1/2m_2v_{2f}^2 = 1/2m_1v_{1i}^2$

$1/2m_2v_{2f}^2 = 1/2m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$

$m_2v_{2f}^2 = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$ ......(3)

Dividindo a Eq. (3) pela (2) ➔ $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f}$ .......(4)



## Colisão elástica a uma dimensão

$V_{1i}$ geralmente é dado, pelo que para calcular $v_{2f}$ precisamos de uma expressão para $v_{1f}$. A partir da Eq. (1):

$m_1v_{1f} = m_1v_{1i} - m_2v_{2f}$

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1v_{1i} - m_2v_{2f}}{m_1} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1}v_{2f}}$$

Substituindo na Eq. (4) $v_{2f} = v_{1i} + v_{1i} - m_2/m_1\, v_{2f}$

$$\boxed{v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}}$$

$$\boxed{v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}}$$

## Colisão elástica a uma dimensão

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

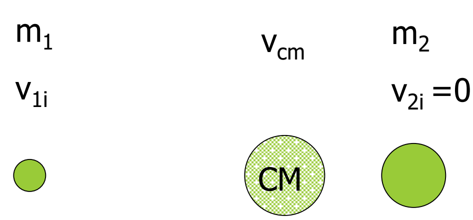
Se $m_1 >> m_2$ $\quad v_{2f} \rightarrow 2v_{1i}$ $\quad v_{1f} \rightarrow v_{1i}$

Se $m_2 >> m_1$ $\quad v_{2f} \rightarrow 0$ $\quad v_{1f} \rightarrow -v_{1i}$

Se $m_1 = m_2$ $\quad v_{2f} \rightarrow v_{1i}$ $\quad v_{1f} \rightarrow 0$



## Velocidade do centro de massa (CM)



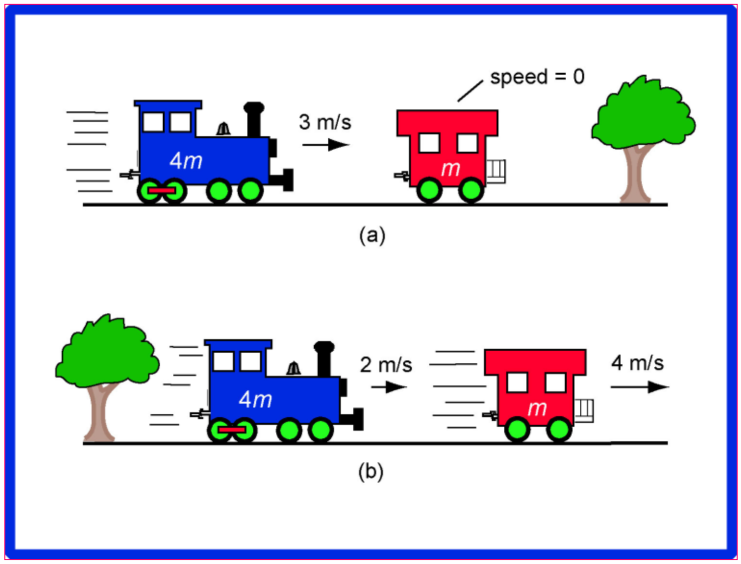

**Velocidade do centro de massa (CM)**

Momento linear do CM = momento de $m_1$ + momento de $m_2$ : $(m_1 + m_2)\, V_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$

$$V_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

**É constante!**

## Colisão inelástica

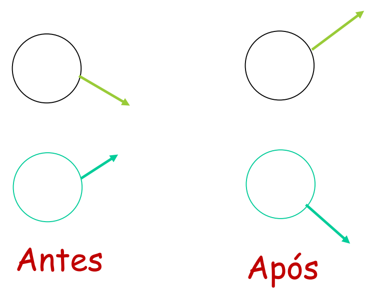





## Colisão perfeitamente inelástica


Após a colisão a velocidade relativa entre os objetos é zero

## Colisões a duas dimensões




$P_{total,x}$ e $P_{total,y}$ conservam-se individualmente

$$P_{total,x,antes} = P_{total,x,após}$$

$$P_{total,y,antes} = P_{total,y,após}$$



## Sistemas de massa variável

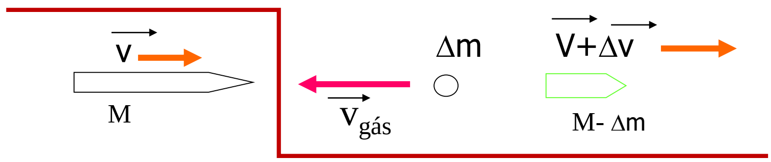
Porque se movimenta um foguete? Porque um balão de borracha cheio de ar se escapa?

No espaço livre, o movimento de um foguete pode ser compreendido pela conservação do momento linear do sistema (foguete + gases) pois é um sistema isolado.

O efeito da gravidade para um foguete **em movimento vertical**, perto da Terra p. ex., pode ser acrescentado, à parte, na força resultante sobre o foguete.

## Sistemas de massa variável: Movimento de um foguete

Consideremos o movimento horizontal de um foguete e analisemos a variação do momento linear do sistema (foguete + gases).




Num certo instante t o sistema de massa M (foguete mais combustível) desloca-se à velocidade v.

Num instante posterior, o foguete liberta uma quantidade de combustível $\Delta$m que se escapa à velocidade $v_{gás}$.

O sistema (foguete mais combustível que ainda resta) de massa M-$\Delta$m adquire uma velocidade v+ $\Delta$v.



## Sistemas de massa variável: Movimento de um foguete

**No instante t:** $M\vec{v}$

**No instante posterior t+ $\Delta$t :** $(M - \Delta M)(v + \Delta\vec{v}) + \Delta M\vec{v}_{gás}$

$$\vec{F}_{ext} \cong \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ext} \cong \frac{\vec{P}_f - \vec{P}_i}{\Delta t} = \frac{(M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta M\vec{v}_{gás} - M\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ext} \cong M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \underbrace{(\vec{v}_{gás} - (\vec{v} + \Delta\vec{v}))}\frac{\Delta M}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}\vec{v}_e$$

Se passarmos ao limite
$\Delta t \to 0$: $\Delta v \to dv$ e $\Delta M / \Delta t \to -dM/dt$

**Onde $\vec{v}_e$ é a velocidade da massa de gás expelida, medida em relação ao foguete**

## Sistemas de massa variável: Força de Reação

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}\vec{v}_e$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \frac{dM}{dt}\vec{v}_e$$

**A massa expelida pelo foguete na unidade de tempo deve ser a maior possível, e a velocidade desta relativamente ao foguete deve ser a maior possível**

**Força de reação: força que os gases expelidos exercem sobre o foguete**

$$\vec{F}_{reacção} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_e$$



## Sistemas de massa variável: Força de Reação

Se $\vec{F}_{ext}$ for nula então

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_e$$

Podemos determinar a velocidade do foguete integrando a equação, considerando $M_i$ e $M_f$ a massa inicial e final do foguete mais combustível

$$\int_{v_i}^{v_f} d\vec{v} = \vec{v}_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{M}\,dM$$

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_e \ln\frac{M_f}{M_i}$$

A velocidade final não depende da taxa (dM/dt) com que os gases são expelidos (consumo de combustível). Só depende de $v_e$ e das massas inicial e final.

Atenção, $M_f$ não deverá ser zero! Deve sobrar sempre o foguete, quando acaba o combustível...