1

Mecânica e Campo Eletromagnético

2018/2019 – parte 7

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

2

Tópicos

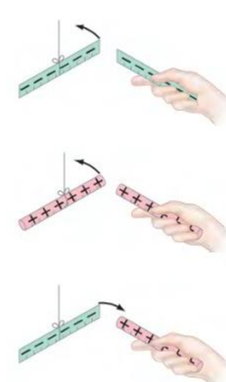
- **Campo elétrico**
- **Potencial elétrico**
- **Lei de Gauss**

Conceitos básicos de eletrostática

- A palavra eletricidade vem da palavra grega elektron, o que significa "âmbar".
- Sabia-se que esfregando um pedaço de âmbar com um pano, o âmbar atrai pequenos pedaços de folhas ou poeira.
- Uma vareta de vidro ou uma régua de plástico friccionada com um pano também vai exibir este "efeito âmbar," ou eletricidade estática, como o chamamos hoje.
- Dizemos que possuem uma carga elétrica líquida.

Conceitos básicos de eletrostática

- Mas é mesma carga elétrica? Na verdade, existem dois tipos de carga
- Um plástico é esfregado com um pano para carregá-lo. Quando um outro plástico, que foi carregado da mesma forma, é aproximado repelem-se.
- Se uma vareta de vidro é carregada e aproximada do plástico carregado, verifica-se que eles se atraem
- A carga sobre o vidro deve, portanto, ser diferente da do plástico.
- Com efeito, verifica-se experimentalmente que todos os objetos eletricamente carregados ou são atraídos ou são repelidos
- Assim, parece haver dois, e apenas dois, tipos de carga elétrica.
- Cargas iguais repelem-se; cargas diferentes atraem-se.
- Os dois tipos de carga elétrica foram referidos como positivo e negativo por Benjamin Franklin e foi arbitrário.
- A carga sobre a vareta de vidro é positiva, e no plástico negativa.



Conceitos básicos de eletrostática

- Franklin argumentava que, sempre que uma certa quantidade de carga é produzido em um objeto, uma quantidade igual de o tipo oposto de carga é produzido em outro objeto.
- Portanto, durante qualquer processo, a alteração líquida no volume de carga produzida é zero. Por exemplo, quando um plástico é esfregado com um pano, o plástico fica negativo e o pano fica com uma quantidade igual de carga positiva. A soma dos dois é zero.
- Este é um exemplo de uma lei bem conhecida: **a lei da conservação de carga elétrica, que afirma que o valor líquido de carga elétrica produzida em qualquer processo é zero**;

Nenhuma carga elétrica líquida pode ser criada ou destruída.

Lei de Coulomb

- Força elétrica entre duas cargas q_1 e q_2

$$\boxed{\vec{F}_{21} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r}$$

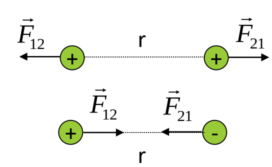
Em que

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \, Nm^2C^{-2}$$

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \, C^2 N^{-1} m^{-2}$$

↘ permitividade do vazio

C= Coulomb (unidade S.I. de carga)



Pela 3ª lei de Newton
(princípio da ação-reação)
=>

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Campo elétrico

- O campo elétrico (campo vetorial) define-se como sendo

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{q_0}$$

Em que F é a força sentida por uma carga q_0 na posição r do espaço

- Pelo principio da sobreposição, o campo elétrico devido a uma distribuição discreta de cargas é:

$$\vec{E}(r) = K_e \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i}$$

Campo elétrico

- Numa distribuição contínua de carga

  N $\rightarrow \infty$ e $q_i \rightarrow$ dq

$$\vec{E}(r) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ q_i \to dq}} K_e \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i} = K_e \int \frac{\vec{e}_r}{r^2} dq$$

Numa distribuição volumétrica de carga (ρ - densidade volúmica de carga = carga / volume) $$dq = \rho\, dV$$

Numa distribuição superficial de carga (σ - densidade superficial de carga = carga / área) $$dq = \sigma\, dV$$

Numa distribuição linear de carga(λ - densidade linear de carga = carga / comprimento) $$dq = \lambda\, dV$$

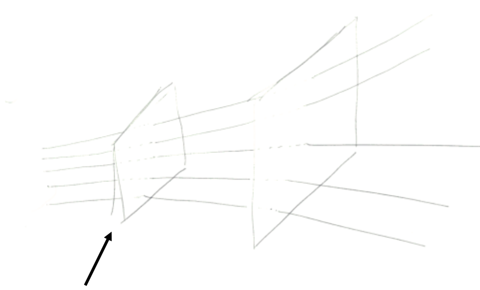
Campo elétrico e linhas de campo

- Força elétrica numa carga causada pela presença e uma dada distância de outra carga ⇐ uma carga determina um campo de força no espaço (ação à distância) ⇐ CAMPO ELÉTRICO

- **O campo elétrico é uma grandeza vetorial que dá em cada ponto do espaço a força que atuará numa carga positiva colocada nesse ponto**

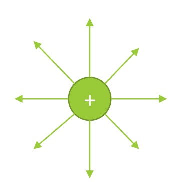
- As linhas de campo descrevem o vetor campo elétrico de acordo com:
  - A direção das linhas no espaço é a mesma da direção do campo em cada ponto ⇐ a tangente em cada ponto aponta na direção do campo nesse ponto
  - Nenhuma linha de campo pode ser fechada (o campo elétrico é conservativo)
  - A densidade de linhas é proporcional à magnitude do campo nesse ponto
  - As linhas de campo nunca se podem cruzar (o campo seria indefinido!)

Campo elétrico e linhas de campo

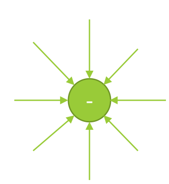


Maior densidade de linhas -> maior intensidade do campo elétrico

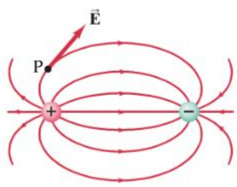
Cargas positivas



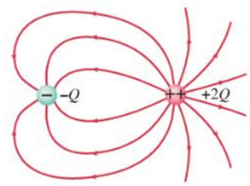
Cargas negativas



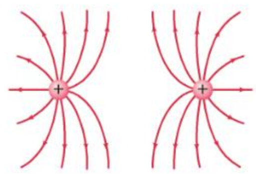
Campo elétrico e linhas de campo



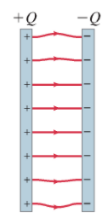
linhas de campo elétrico devido a duas cargas mas de sinal diferente, **dipolo elétrico**



linhas, para duas cargas Q e + 2Q. Notar que +2Q tem o dobro de linhas de -Q (número de linhas é proporcional à magnitude da carga)



linhas de campo elétrico para duas cargas positivas iguais



linhas de campo entre duas placas paralelas com cargas iguais, mas opostas. Notar que as linhas do campo elétrico entre as duas placas iniciam-se sempre na perpendicular à superfície das placas de metal

Energia potencial

O trabalho realizado pela força elétrica quando uma carga q_0 sofre um deslocamento ds é

$$\boxed{dw = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

como o campo eletrostático é conservativo define-se energia potencial U como:

$$\boxed{dU = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Para um deslocamento da carga q_0 entre A e B, a variação da energia potencial é

$$\boxed{\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Potencial elétrico

Define-se diferença de potencial entre os pontos A e B como

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

A diferença de potencial entre dois pontos é igual ao trabalho por unidade de carga que uma força externa realizaria para deslocar carga sem variação de energia cinética

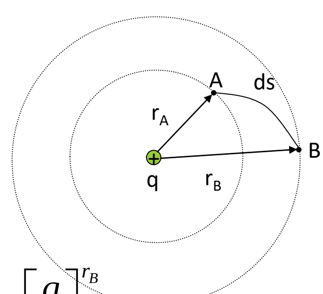
Unidades: 1Volt= 1 Joule/Coulomb

Se, convencionarmos o potencial nulo no infinito, o potencial num ponto P é

$$V_P = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Potencial elétrico

Cálculo do potencial a partir de um campo elétrico de uma carga pontual



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

como $\vec{E} = K_e \dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$

$$\vec{e}_r \cdot d\vec{s} = ds\cos\theta = dr$$

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} E_r dr = -K_e q\int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{r^2}dr = K_e\left[\frac{q}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = K_e q\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Potencial elétrico

Se tomarmos como referencia o infinito como potencial nulo ($r_A \rightarrow \infty$, $V_A=0$), o potencial de um ponto situado a uma distancia $r_B=r$ de uma carga é

$$\boxed{V = K_e \frac{q}{r}}$$

Pelo princípio de sobreposição, o potencial elétrico devido a uma distribuição de cargas é

$$\boxed{V = K_e \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}}$$

Potencial elétrico

Potencial elétrico criado por distribuições continuas de carga

1º método: Por integração de elementos de carga

$$dV = K_e \frac{dq}{r} \quad \Rightarrow \quad V = K_e \int \frac{dq}{r}$$

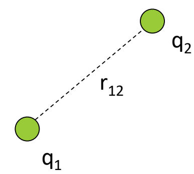
2º método: Por integração do integral de linha do campo

$$V_p = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Energia Potencial

A energia potencial de duas partículas carregadas

$$U_{12} = q_2 V_1 = K_e \frac{q_2 q_1}{r_{12}}$$



Se V_1 é o potencial elétrico num ponto P devido à carga q_1 então o trabalho necessário para trazer uma carga q_2 desde o infinito até P é q_2V_1

Por definição este trabalho é igual à energia potencial do U do sistema de partículas

Energia Potencial

Genericamente: A energia potencial de uma distribuição de cargas:

$$\boxed{U = K_e \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = K_e \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

A energia potencial eletrostática de um conjunto de cargas
é igual à energia necessária para formar esse conjunto.

Relação entre E e V

Sendo $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Resulta $dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$

como $dV = \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz$

Podemos escrever $E_x = -\frac{dV}{dx} \quad E_y = -\frac{dV}{dy} \quad E_z = -\frac{dV}{dz}$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

Lei de Gauss

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é igual à carga elétrica total presente no interior da superfície dividida por ε_0.

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Resultado útil no cálculo do campo elétrico em situações de elevada simetria !

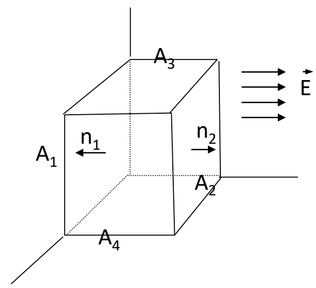
Lei de Gauss

Exemplo: Cálculo do fluxo de um campo elétrico uniforme que atravessa um cubo

O fluxo total é a soma dos fluxos de campo através de cada uma das faces

$$d\Phi_i = \vec{E}\cdot\vec{n}_i \; dA_i$$

Só não é nulo se $\vec{E} \perp \vec{n}_i$



Apenas as faces 1 e 2 têm fluxo não nulo

$$\Phi_1 = \int \vec{E}\cdot\vec{n}_i \; dA_i = \int_1 E \; dA\cos 180^\circ = -El^2$$

$$\Phi_2 = \int \vec{E}\cdot\vec{n}_2 \; dA_2 = \int_2 E \; dA\cos 0^\circ = El^2$$

Logo o fluxo total é nulo, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$
e portanto não há carga no interior do cubo

A soma das linhas de campo que entram no cubo pela face 1 é igual à soma das linhas de campo que saem do cubo pela face 2!

Lei de Gauss

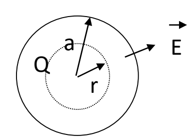
Exemplo: distribuição esférica de carga:

Calcular o campo elétrico devido a uma distribuição esférica e uniforme de carga

Resolução: como a distribuição de carga tem simetria esférica, o campo elétrico também deve ter simetria esférica e portanto escolhemos superfícies gaussianas de raio r concêntricas com a esfera

No interior $0 \le r \le a$

$$q_{\text{int}} = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$



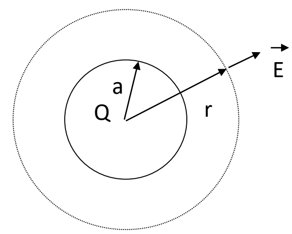
$$\oint E_r dA = E_r \oint dA = E_r 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$ (Lei de Gauss)

$$E_r = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \Rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{K_e Q}{a^3} r$$

Lei de Gauss

Exemplo: distribuição esférica de carga:

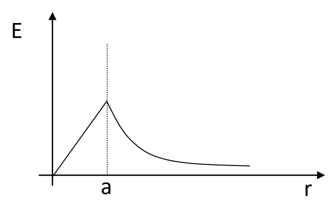
No exterior $r > a$



$$q_{\text{int}} = Q$$

$$\oint E_r dA = E_r \oint dA = E_r 4\pi r^2 \quad = \quad \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$ (Lei de Gauss)

$$\Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{K_e Q}{r^2}$$



Aplicabilidade da Lei de Gauss

- Para a aplicação da Lei de Gauss a fim de se calcular um campo elétrico, é necessária a existência de uma simetria na distribuição de carga de forma a termos uma superfície equipotencial (o valor de V é igual em todos os pontos)
- De outra forma, não é possível determinar corretamente o integral do fluxo

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

- Isto ocorre devido ao fato de, ao não se ter uma superfície equipotencial, não se conseguir resolver o produto interno $\vec{E} \cdot \vec{n}$ e assim o integral do mesmo na superfície fechada

Forma diferencial da Lei de Gauss

- A forma integral da Lei de Gauss é já conhecida

$$\int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

- sendo ρ a densidade local de carga elétrica
- A forma diferencial da Lei de Gauss é dada recorrendo ao teorema da divergência

$$div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

- A divergência do campo é uma propriedade deste em cada ponto do espaço e depende simplesmente da densidade de carga ρ em cada ponto do espaço. Por ex. $div\vec{E} = 0$ implica que não há cargas nesse ponto do espaço (ou melhor dizendo, o balanço é zero)

Forma diferencial da Lei de Gauss

- Assim temos que

$$\int div\vec{E} \cdot dV = \int \frac{1}{\varepsilon_0}\rho dV$$

- E uma vez que esta relação é válida para qualquer volume, a conclusão é que em qualquer ponto do espaço temos que verificar que

$$div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$