1

Mecânica e Campo Eletromagnético

2018/2019 – parte 6

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

2

Tópicos

- **Sistemas oscilatórios**
  - **Movimento harmónico simples (M.H.S.)**

Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

O corpo tem movimento **periódico**, **harmónico**, **oscilatório** ou **vibracional**

Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc..

Massa presa a uma mola: M.H.S.

2ª Lei

de

Newton

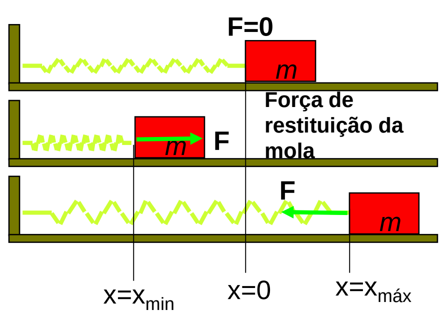
$$F = -kx$$

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



F: Força restauradora

***k*: constante da mola**

$$a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω é a frequência angular (radianos)

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$a = \frac{dx^2}{dt} = -\omega^2 x$$

Qual será a solução, x, desta equação diferencial ?

Tipicamente é uma função do tipo:

$$x = A\cos(\omega t)$$

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d[A\cos(\omega t)]}{dt} = -\omega A\sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d[-\omega A\sin(\omega t)]}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

É solução !

Mas haverá outras soluções ?

Massa presa a uma mola: M.H.S.

SIM! $$x = A\sin(\omega t)$$ Também é solução

$$x = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$$

(Verifique que é solução)

$x = A\cos(\omega t + \phi)$ é equivalente a $x = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$

$x = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t)\cos\phi - A\sin(\omega t)\sin\phi$

$x = C\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ Onde $C = A\cos(\phi)$ e $B = -A\sin(\phi)$

Portanto, podemos usar $x = A\cos(\omega t + \phi)$ como solução geral

Massa presa a uma mola: M.H.S.

A solução é:

$$x(t) = A\cos(\overbrace{\omega t + \phi}^{\text{Fase}})$$

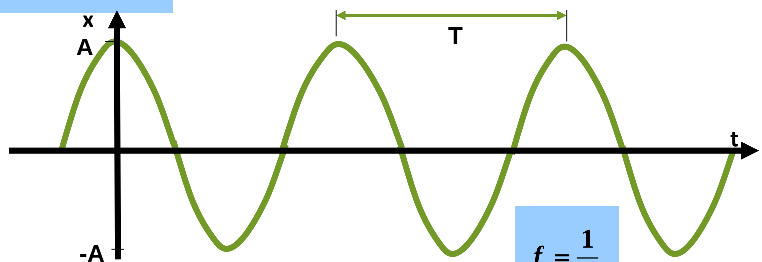
As 2 constantes de integração são: Amplitude (deslocamento máximo) e Fase inicial

- ω é determinada pelas propriedades do sistema (k e m)
- A e ϕ são determinados pelas condições iniciais

Este movimento designa-se Movimento Harmónico Simples (M.H.S.)

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$x(t) = A\cos\omega t$$



$$f = \frac{1}{T}$$

frequência (Hz) – nº de oscilações por segundo

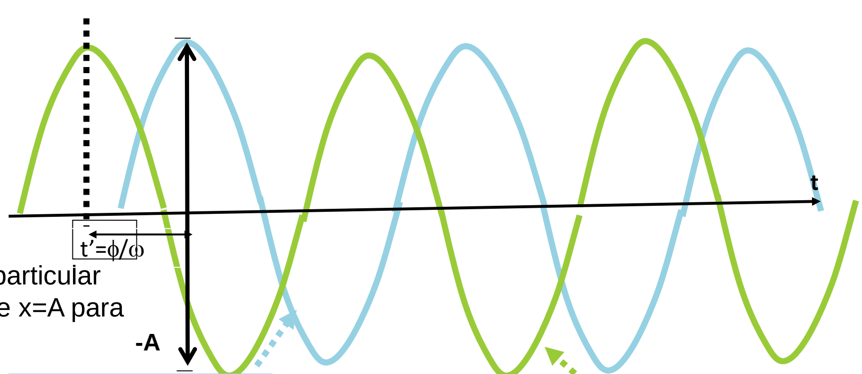
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\boxed{T}}$$

Período (s) – tempo de uma oscilação completa

Massa presa a uma mola: M.H.S. – Fase inicial



Caso particular em que x=A para t=0

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega(t+t'))$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \omega t')$$

Φ **fase inicial**

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Caso geral

Massa presa a uma mola: M.H.S. – Velocidade

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \phi)$$

$$v_{máx} = \omega A$$

- v está desfasada 90° em relação a x.
- v é zero quando x é máximo ou mínimo.
- v é máximo quando x = 0

Massa presa a uma mola: M.H.S. - Aceleração

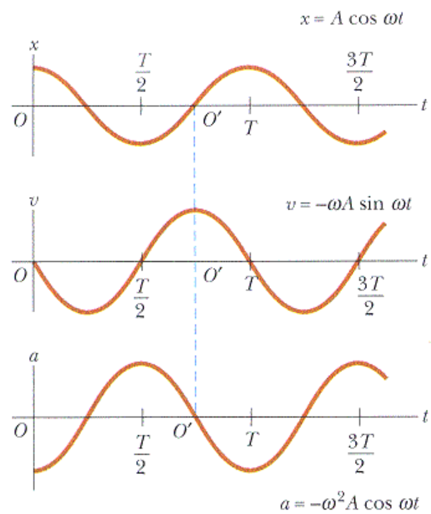
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{x} = -\omega^2 x$$

a tem sentido contrário a ***x***
(relembrar Lei de Hooke)

$$a_{máx} = \omega^2 A$$

- a está desfasada 180° em relação a x
- a está desfasada 90° em relação a v
- a é zero quando x =0
- a é máxima quando x é mínimo (e vice-versa)

Massa presa a uma mola: M.H.S.- gráficos



Massa presa a uma mola: M.H.S. - condições iniciais

Conhecendo *x* e *v* no instante inicial, t_i=0:

$$x_i = A\cos(\omega.0+\phi)$$

$$v_i = -\omega A sen(\omega.0+\phi)$$

Dividindo v_i por x_i:

$$\frac{v_i}{x_i} = \frac{-\omega A sen\phi}{A\cos\phi} = -\omega tg\phi$$

$$tg\phi = -\frac{v_i}{\omega x_i}$$

Massa presa a uma mola: M.H.S. - condições iniciais

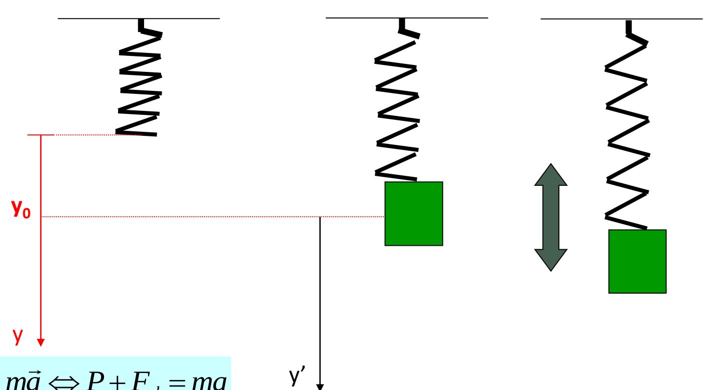
Utilizando as mesmas equações para x_i e v_i, obtém-se:

$$A = \sqrt{x_i^{\,2} + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)^2}$$

Para um ω determinado:

A **fase inicial,** ϕ, e a **amplitude**, A são determinadas pelas **condições iniciais,** x_i e v_i

Mola vertical



$$\vec{P} + \vec{F}_{el} = m\vec{a} \Leftrightarrow P + F_{el} = ma$$

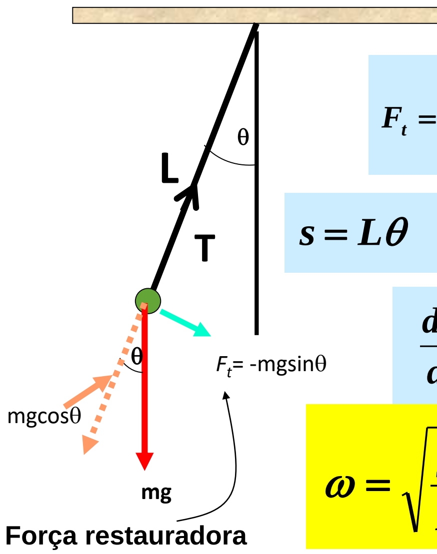
$$\Leftrightarrow ky_0 - ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \Leftrightarrow -k(y - y_0) = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow -ky' = m\frac{d^2y'}{dt^2} \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = 0$$

Nova posição de equilíbrio (não coincide com o tamanho natural da mola)

Mesmo período (e frequência)

M.H.S. - Pêndulo Simples



Aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$F_t = -mgsen\,\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$s = L\theta \qquad sen\,\theta \approx \theta$$

→ Válido para θ pequenos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\theta$$

$\frac{g}{L} \rightarrow \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Semelhante a:

$$\frac{dx^2}{dt} = -\omega^2 x$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

M.H.S. - Pêndulo

- Portanto: o Pêndulo também executa M.H.S.!
- A sua frequência (e o período) só depende do seu comprimento

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Deslocamento angular máximo

Deslocamento angular

M.H.S.

Os sistemas mecânicos têm uma **frequência natural** de oscilação que depende de:

$$\sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mola

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Pêndulo simples

M.H.S. – Energia no M.H.S

Relembrando :

Como F é conservativa:

$$F_{ex} = -\frac{dE_{Pe}}{dx} = -kx$$

Energia potencial elástica

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow k = \omega^2 m$$

$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

M.H.S. – Energia no M.H.S

Energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\omega A sen(\omega t+\phi)\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t+\phi)$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow sen^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

Obtém-se:

$$\Leftrightarrow E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[1-\cos^2(\omega t+\phi)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2-x^2\right)$$

M.H.S. – Energia no M.H.S

Energia mecânica

$$E = E_{Pe} + E_c = \frac{1}{2}k\left(\overbrace{\boxed{A\cos\left(\omega t+\phi\right)}}^{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\overbrace{\boxed{m\omega^2}}^{k}\left(A sen\left(\omega t+\phi\right)\right)^2$$

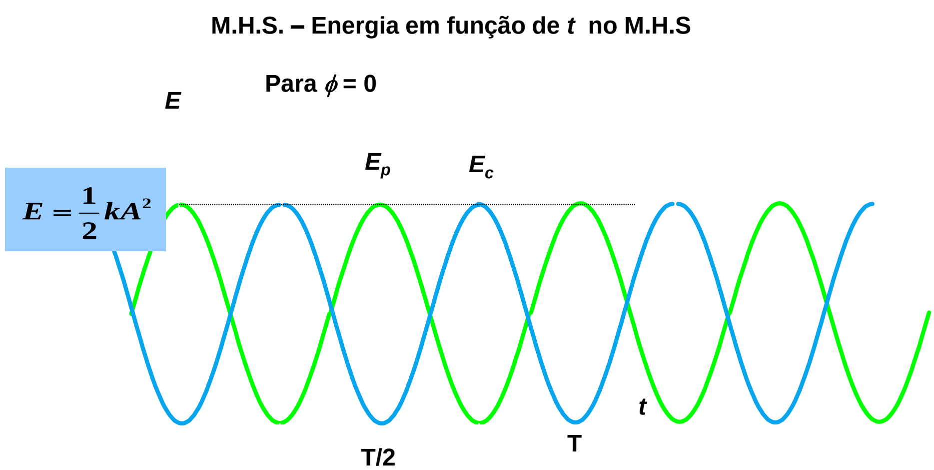
Utilizando de novo a identidade trigonométrica

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow sen^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

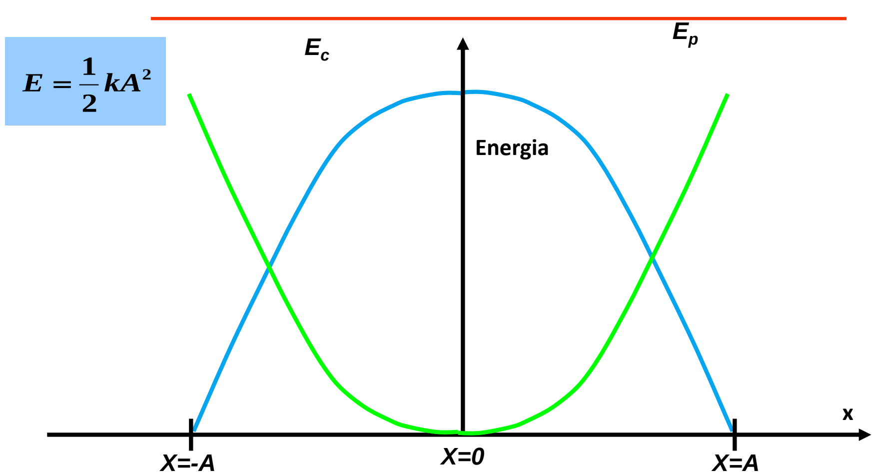
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Num M.H.S. a Energia mecânica é constante!!

M.H.S. – Energia em função de t no M.H.S



M.H.S. – Energia em função de x no M.H.S

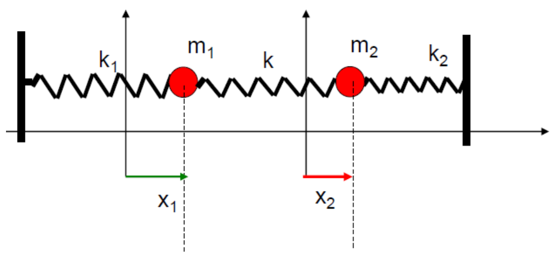


Oscilações livres - M.H.S. Mola

Oscilações livres - M.H.S. Pêndulo

Energia no M.H.S.

Oscilações acopladas



Podemos escrever a equação do movimento para casa oscilador

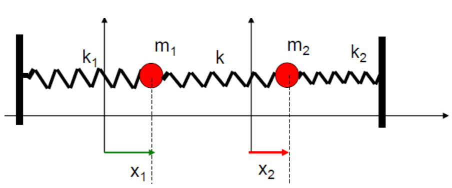
$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Analisando a dinâmica de cada uma das massa supondo que a outra está fixa na posição de equilíbrio

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{k_1+k}{m_1}x_1 = \dfrac{k}{m_1}x_2 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \dfrac{k_2+k}{m_2}x_2 = \dfrac{k}{m_2}x_1 \end{cases}$$

Termos de acoplamento

Oscilações acopladas



Vejamos as seguinte soluções:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t) \\ x_2 = B\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 A\cos(\omega t) + \dfrac{k_1+k}{m_1}A\cos(\omega t) = \dfrac{k}{m_1}B\cos(\omega t) \\ -\omega^2 B\cos(\omega t) + \dfrac{k_2+k}{m_2}B\cos(\omega t) = \dfrac{k}{m_2}A\cos(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right)A - \dfrac{k}{m_1}B = 0 \\ -\dfrac{k}{m_2}A - \left(\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right)B = 0 \end{cases}$$

Resolução do sistema utilizando matrizes !

Determinação das frequências normais de vibração

$$\begin{cases}\left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right)A-\dfrac{k}{m_1}B=0\\ -\dfrac{k}{m_1}A+\left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right) & -\dfrac{k}{m_1}\\ -\dfrac{k}{m_2} & \left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=0$$

As soluções não triviais são aquelas em que o determinante da matriz dos coeficientes $A=[(a_{ij})]$ é nulo !

$$\begin{vmatrix}\left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right) & -\dfrac{k}{m_1}\\ -\dfrac{k}{m_2} & \left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\left(-\omega^2+\frac{k_1+k}{m_1}\right)\times\left(-\omega^2+\frac{k_2+k}{m_2}\right)-\left(-\frac{k}{m_1}\times\left(-\frac{k}{m_2}\right)\right)=0$$

Determinação das frequências normais de vibração

No caso em que m1 = m2 = m e K1 = K2 = K, temos

$$\left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right)\times\left(-\omega^2+\frac{2k}{m}\right)-\left(\frac{k^2}{m^2}\right)=0$$

$$\omega^4-4\omega^2\frac{k}{m}+3\frac{k^2}{m^2}=0$$

como $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$

$$\omega^2=\frac{\omega_0^2(4\pm 2)}{2}$$

O sistema tem duas frequências próprias de vibração

i) $\omega_1{}^2=\omega_0^2$

ii) $\omega_1{}^2=3\omega_0^2$

A relação com as amplitudes de cada movimento (A e B) são:

Se A = B, as massas oscilam em fase
Se A = -B, as massas oscilam em oposição de fase

Coordenadas normais: graus de liberdade e modos de vibração

- As coordenadas normais conduzem a equações do movimento que tomam a forma de um conjunto de equações diferenciais com coeficientes constantes em que cada equação tem apenas uma variável dependente.
- Uma vibração que envolve apenas uma variável dependente X ou Y é designada de modo normal de vibração e tem a sua frequência própria de vibração. Em cada modo normal de vibração cada componente oscila com a mesma frequência.
- A importância do modo normal de vibração é que cada um é inteiramente independente do outro. A energia de um modo normal nunca é transferida para o outro modo norma de vibração.
- Cada processo independente pelo qual o sistema adquire energia é designado de grau de liberdade . O número destes processos define o nº de graus de liberdade e o nº de coordenadas normais de vibração.
  - Cada oscilador harmónico tem dois processos independentes de adquirir energia por energia potencial (coordenada x); por energia cinética (derivada da coordenada x)