Alonso & Finn

FÍSICA

um curso universitário

VOLUME I MECÂNICA

Alonso & Finn

um curso universitário

VOLUME I

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

edição estudantil

07104

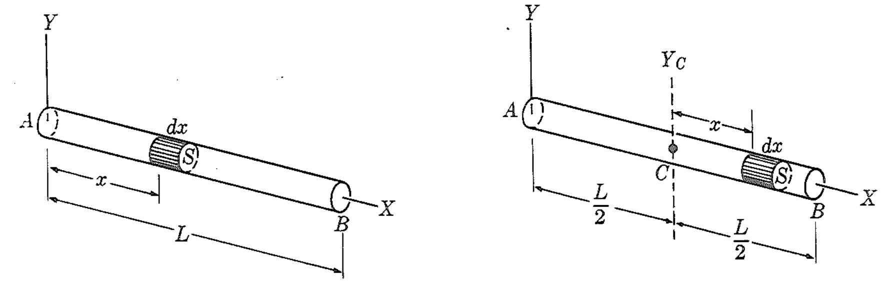

Figura 10-11

Mas SL é o volume da haste e ρSL é sua massa. Portanto

$$I_A = \tfrac{1}{3}ML^2.$$

Uma comparação com a Eq. (10.10) mostra que o raio de giração é $K^2 = \tfrac{1}{3}L^2$.

(b) Para calcular o momento de inércia relativamente ao eixo Y_C passando pelo centro de massa C, podemos proceder de três maneiras diferentes. Uma forma muito simples é supor a haste dividida em duas, cada uma das quais de massa $\tfrac{1}{2}M$ e comprimento $\tfrac{1}{2}L$, com as extremidades tocando-se em C, e usar então o resultado anterior para cada parte. Então

$$I_C = 2(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}M)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{12}ML^2.$$

Outro método seria proceder como anteriormente para a extremidade A, mas integrar de $-\tfrac{1}{2}L$ a $+\tfrac{1}{2}L$, desde que a origem está agora no centro da barra. Deixamos para você essa solução. Um terceiro modo de resolver é pela aplicação do teorema de Steiner, Eq. (10.8), que, nesse caso, escreve-se $I_A = I_C + M(\tfrac{1}{2}L)^2$, desde que $a = \tfrac{1}{2}L$. Portanto

$$I_C = I_A - \tfrac{1}{4}ML^2 = \tfrac{1}{12}ML^2.$$

EXEMPLO 10.3. Determine o momento de inércia de um disco homogêneo relativamente a (a) um eixo perpendicular ao disco passando pelo seu centro, (b) um eixo coincidente com um diâmetro.

Solução: (a) Da Fig. 10-12 vemos que a simetria do problema sugere que usemos, como elemento de volume, um anel de raio r e espessura dr. Assim, se chamamos de h a altura do disco, o volume do anel é $dV = (2\pi r)(dr)h = 2\pi hr\,dr$. Todos os pontos do anel estão a uma distância r do eixo Z. Portanto, usando a Eq. (10.6), obtemos

$$I = \int_0^R \rho r^2(2\pi hr\,dr)$$

$$= 2\pi\rho h \int_0^R r^3\,dr = \tfrac{1}{2}\pi\rho hR^4.$$

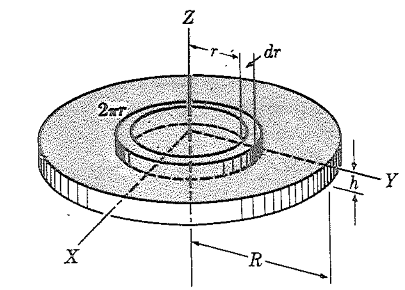

Figura 10-12

Mas $\pi R^2 h$ é o volume do disco e $M = \rho(\pi R^2 h)$ é a sua massa total. Assim,

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2,$$

de tal modo que o raio de giração é $K^2 = \tfrac{1}{2}R^2$.

(b) Para obter os momentos de inércia com respeito aos eixos X e Y, podemos proceder a uma integração direta (sugere-se que sejam usadas faixas paralelas ou perpendiculares aos eixos correspondentes como elementos de volume), mas a simetria do problema permite um procedimento mais simples. Òbviamente, nesse caso, $I_x = I_y$ e portanto, da fórmula para uma placa fina, temos $I_z = I_x + I_y = 2I_x$ e

$$I_x = \tfrac{1}{2}I_z = \tfrac{1}{4}MR^2.$$

10.4 *Equação de Movimento para a Rotação de um Corpo Rígido*

Na Eq. (9.21) estabelecemos uma relação entre o momento angular total de um sistema de partículas e o torque total das fôrças aplicadas às partículas quando, tanto o torque como o momento angular, são referidos a um ponto em repouso num referencial inercial. Isto é,

$$\frac{dL}{dt} = \tau \qquad (10.11)$$

onde $L = \Sigma_i L_i$ é o momento angular total e $\tau = \Sigma_i \tau_i$ é o torque total devido às fôrças externas. Òbviamente essa equação vale também para um corpo rígido, que é um caso especial de um sistema de partículas. A Eq. (10.11) constitui, assim, a equação básica para discutir o movimento de rotação de um corpo rígido. Vamos aplicá-la primeiramente ao caso de um corpo rígido que gira ao redor de um eixo principal tendo um ponto fixo num sistema inercial. Então, de acôrdo com a Eq. (10.4), $L = I\omega$. O torque externo τ deve ser o torque em tôrno do ponto fixo no eixo principal. A Eq. (10.11) fica então

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = \tau. \qquad (10.12)$$

Se o eixo permanece fixo, relativamente ao corpo rígido, o momento de inércia permanece constante. Então

$$I\frac{d\omega}{dt} = \tau \quad \text{ou} \quad I\alpha = \tau, \qquad (10.13)$$

onde $\alpha = d\omega/dt$ é a aceleração angular do corpo rígido. Uma comparação das Eqs. (10.12) e (10.13) com as Eqs. (7.14) e (7.15) sugere uma grande semelhança entre a rotação de um corpo rígido em tôrno de um eixo principal e o movimento de uma partícula. A massa m é substituída pelo momento de inércia I, a velocidade $\boldsymbol{v}$ pela velocidade angular ω, a aceleração $\boldsymbol{a}$ pela aceleração angular α, e a fôrça $\boldsymbol{F}$ pelo torque τ.

Por exemplo, se $\tau = 0$, então a Eq. (10.12) indica que $I\omega$ = const.; e se o momento de inércia é constante, então ω também é constante. Isto é, *um corpo rígido que gira em tôrno de um eixo principal move-se com velocidade angular constante* *quando não é aplicado torque externo.* Isso poderia ser considerado como a lei de inércia para o movimento rotacional. [Quando o momento de inércia é variável, o que pode acontecer quando o corpo não é rígido, a condição $I\omega$ = const. requer que, se I cresce (ou decresce) então ω decresce (ou cresce), fato êsse que teñ múltiplas aplicações.]

No caso de um corpo que *não* está girando em tôrno de um eixo principal, temos ainda, da Eq. (10.3) que $dL_z/dt = \tau_z$ ou, se a orientação do eixo é fixa, relativamente ao corpo, de tal modo que I é constante,

$$I\frac{d\omega}{dt} = \tau_z, \tag{10.14}$$

um resultado que difere da Eq. (10.13) pelo fato de que τ_z refere-se à componente do torque total externo ao longo do eixo de rotação e não ao torque total. Além da componente τ_z do torque, poderá haver outros torques necessários para manter o corpo numa posição fixa relativamente ao eixo de rotação (veja o Ex. 10.7).

Quando o eixo de rotação não tem um ponto fixo num referencial inercial, não podemos usar a Eq. (10.11) e por isso devemos calcular o momento angular e o torque relativamente ao centro de massa do corpo. Assim, devemos usar a Eq. (9.25), em que

$$\frac{dL_{CM}}{dt} = \tau_{CM}. \tag{10.15}$$

Se a rotação é em tôrno de um eixo principal, essa equação torna-se $I_C(d\omega/dt) = \tau_{CM}$. Se $\tau_{CM} = 0$, que é o caso em que a única fôrça externa aplicada sôbre o corpo é o seu próprio pêso, segue-se que ω é constante (ver Fig. 10-3).

EXEMPLO 10.4. Um disco com 0,5 m de raio e 20 kg de massa gira livremente em tôrno de um eixo horizontal fixo passando pelo seu centro. Aplica-se-lhe uma fôrça de 9,8 N puxando-se um fio enrolado em sua borda. Determine a aceleração angular do disco e sua velocidade angular após 2 s.

Solução: Da Fig. 10-13 vemos que as únicas fôrças externas que agem sôbre o disco são o seu pêso Mg, a tração F para baixo e as fôrças F' nos suportes. O eixo ZZ' é um eixo principal. Considerando os torques com relação ao centro de massa C, verificamos que o torque

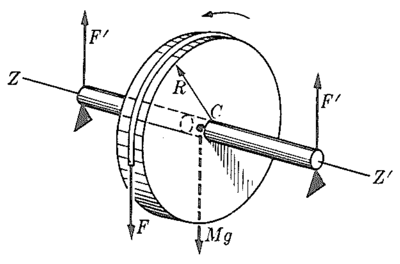

Figura 10-13

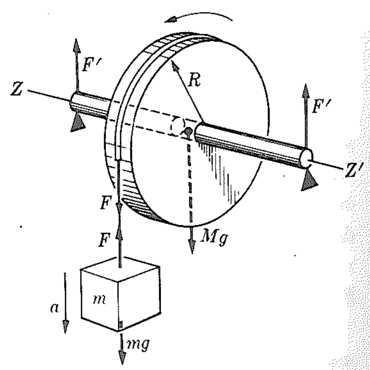

Figura 10-14

devido à fôrça do pêso é zero. O torque combinado das fôrças F' também é zero. Então $\tau = FR$. Aplicando a Eq. (10.14) com $I = \frac{1}{2}MR^2$, temos $FR = (\frac{1}{2}MR^2)\alpha$ ou $F = \frac{1}{2}MR\alpha$, dando uma aceleração angular de

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9,8\text{ N})}{(20\text{ kg})(0,5\text{ m})} = 1,96\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}.$$

De acôrdo com a Eq. (5.54), a velocidade angular depois de 2 s, se o disco partiu do repouso, é

$$\omega = \alpha t = (1,96\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2})(2\text{ s}) = 3,92\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Desde que o centro de massa C é fixo, sua aceleração é zero; devemos ter então

$$2F' - Mg - F = 0 \quad \text{ou} \quad F' = 102,9\text{ N}.$$

EXEMPLO 10.5. Determine a aceleração angular do sistema ilustrado na Fig. 10-14 para um corpo cuja massa é de 1 kg. Os dados para o disco são os mesmos do Ex. 10.4. O eixo ZZ' é fixo e é um eixo principal.

Solução: Desde que a massa do corpo é 1 kg, seu pêso é mg = 9,8 N, que tem o mesmo valor da fôrça F da Fig. 10-13. Conseqüentemente, seríamos tentados a considerar êsse caso como idêntico ao anterior e supor os mesmos resultados. Entretanto isso não é correto! A massa m, quando em queda, exerce uma fôrça F, para baixo, sôbre o disco, e, pela lei de ação e reação, o disco exerce uma tração F para cima sôbre a massa m. Uma vez que a massa m está caindo com movimento acelerado, a fôrça resultante sôbre ela não pode ser zero. Então F não é igual a mg, mas sim menor.

Portanto, o disco está sujeito também a um torque menor.

A equação de movimento para a massa m é

$$mg - F = ma = mR\alpha,$$

onde a relação $a = R\alpha$ foi usada. A equação de movimento do disco é $I\alpha = FR$ ou (desde que $I = \frac{1}{2}MR^2$) $F = \frac{1}{2}MR\alpha$. Eliminando F dessas duas equações, achamos que a aceleração angular é

$$\alpha = \frac{mg}{(m + \frac{1}{2}M)R} = 1,78\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2},$$

que é menor do que o resultado anterior. A aceleração de m, para baixo, é

$$a = R\alpha = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M} = 0,89\text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

que é menor do que $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, valor conhecido para a queda livre. A fôrça F' nos suportes pode ser encontrada como no exemplo anterior.

EXEMPLO 10.6. Determine a aceleração angular do disco da Fig. 10-15, assim como a aceleração para baixo do seu centro de massa. Considere os mesmos dados do disco do Ex. 10.4.

Solução: O eixo de rotação é o eixo principal Z_0Z_0'. Êsse problema difere dos exemplos anteriores, porque o centro de massa do disco não está fixo, uma vez que o movimento do disco é semelhante ao de um ioiô, e, assim, deve ser usada agora a Eq. (10.15). A rotação do disco em tôrno do eixo Z_0Z_0' é dada pela equação $I\alpha = FR$, desde que o torque do pêso Mg relativo a C é zero. Assim, com $I = \frac{1}{2}MR^2$, podemos escrever (depois de cancelar o fator comum R), $F = \frac{1}{2}MR\alpha$.

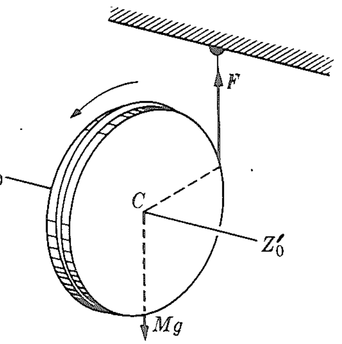

Figura 10-15

O movimento do centro de massa para baixo tem aceleração $a = R\alpha$, e, se levamos em consideração o fato de que a fôrça externa resultante é $Mg - F$, temos, usando a Eq. (9.9),

$$Mg - F = Ma = MR\alpha.$$

Eliminando a fôrça F desta equação e da precedente, e notando que a massa M se cancela, obtemos da equação resultante $\alpha = 2g/3R = 13{,}16\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$. A aceleração para baixo do seu centro de massa é $a = R\alpha = \frac{2}{3}g = 6{,}53\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, que é muito menor do que a aceleração em queda livre e independente do tamanho e da massa do disco.

EXEMPLO 10.7. Determine o torque necessário para girar o sistema da Fig. 10-7(b) com velocidade angular constante.

Solução: Nesse caso, a velocidade angular ω ao redor do eixo fixo Z não varia, portanto $d\omega/dt = 0$. São tiradas imediatamente duas condições. Primeira: sabemos que o momento angular total $L = (2mR^2 \operatorname{sen}\phi)\omega$ permanece constante em módulo, e que a componente, ao longo do eixo Z, $L_z = (2mR^2 \operatorname{sen}^2\phi)\omega$ é também constante. Segunda: o torque ao longo do eixo Z, dado por $\tau_z = I\,d\omega/dt$, é zero. À primeira vista, seríamos tentados a dizer que não é necessário torque algum para manter o sistema em movimento. Entretanto, êsse não é o caso. O momento angular L gira com o sistema em tôrno do eixo Z (êsse movimento é chamado *precessão*, conforme mencionado no fim do Ex. 10.1), e é necessário um torque para produzir essa variação na direção de L. A situação é inteiramente análoga àquela encontrada no movimento circular uniforme: a velocidade permanece constante em módulo, mas é necessária uma fôrça para mudar sua direção.

O torque τ deve estar no plano XY, desde que $\tau_z = 0$. Êle deve também ser perpendicular ao plano Z_0Z, determinado pela direção de L (ou eixo Z_0) e do eixo Z (Figs. 10-16 e 10-17), e deve ter o sentido do eixo Y_0. Isso pode ser visto como segue. A Eq. (10.11), $dL = \tau\,dt$, indica que dL e τ são vetores paralelos (do mesmo modo que dv e F são paralelos no caso de uma partícula). Mas, desde que L é constante em módulo, dL é perpendicular a êle e, portanto, τ também é perpendicular a L. Como o vetor L mantém um ângulo constante $\pi/2 - \phi$ com o eixo Z, sua extremidade se move sôbre um círculo de raio $AB = L \operatorname{sen}(\pi/2 - \phi) = L\cos\phi$, e dL é tangente ao círculo. Isso, por outro lado, implica em que dL é perpendicular ao plano Z_0Z (ou paralelo a Y_0), significando que τ também o é. Para encontrar o módulo de dL, notamos na Fig. 10-17 que

$$|dL| = AB\,d\theta = (L\cos\phi)\omega\,dt,$$

desde que $\omega = d\theta/dt$. Igualando a $\tau\,dt$ e introduzindo o valor de L, achamos

$$\tau = (2mR^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi)\omega^2.$$

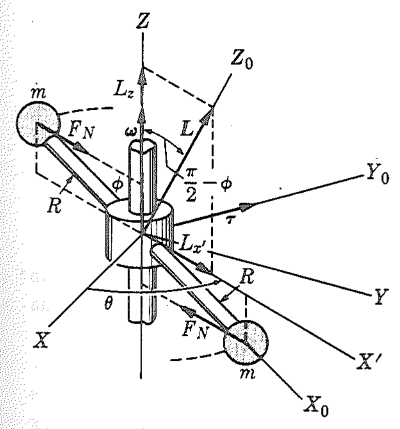

Figura 10-16. Rotação de um corpo em tôrno de um eixo arbitrário

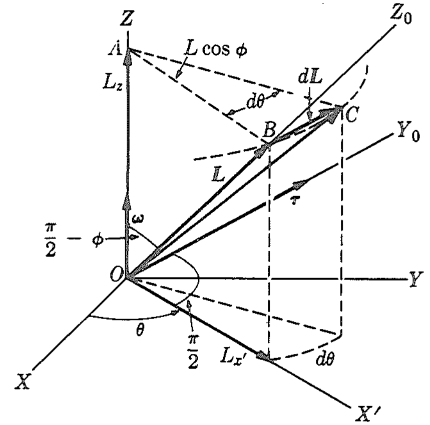

Figura 10-17. Precessão do momento angular do corpo ilustrado na Fig. 10-16

É instrutivo ver a necessidade física dêsse torque. Na Fig. 10-16 notamos que as esferas, cada uma de massa m, têm movimento circular uniforme e cada uma requer uma fôrça centrípeta $F_N = m\omega^2 R \operatorname{sen}\phi$ para descrever o círculo de raio $R\operatorname{sen}\phi$. Essas duas fôrças formam um binário, cujo braço é $2R\cos\phi$. Assim, o torque do binário é $\tau = (mR\omega^2 \operatorname{sen}\phi)(2R\cos\phi)$, que coincide com o nosso resultado anterior. Assim, o torque é necessário para manter as esferas em suas posições fixas relativamente ao eixo de rotação.

Deixamos a você a verificação de que, no caso representado na Fig. 10-7(a), onde a rotação é em tôrno de um eixo principal e a velocidade angular é constante, êsse torque não é necessário. Por essa razão, e para evitar torques transversais como os do exemplo acima, as partes girantes de qualquer mecanismo devem ser montadas segundo eixos principais.

Uma alternativa para a solução do problema seria encontrar as componentes de L paralelas aos eixos fixos XYZ e obter as componentes de τ pela aplicação direta da Eq. (10.11). Isso é deixado como um exercício para você (Prob. 10.50).

EXEMPLO 10.8. Analise o movimento geral de um corpo rígido sem a ação de torques externos.

Solução: Neste exemplo examinaremos o movimento geral de um corpo rígido quando não há torques externos aplicados sôbre êle, isto é, $\tau = 0$. Então a Eq. (10.11) dá $dL/dt = 0$ ou $L =$ const. Portanto o momento angular permanece constante em módulo direção e sentido relativamente ao referencial inercial XYZ usado pelo observador.

Como torques e momentos angulares são sempre calculados com relação a um ponto, devemos descobrir em relação a que ponto o torque é zero. Há duas possibilidades: um caso é quando o ponto é fixo no referencial inercial, sendo, então, o momento angular calculado em relação a êsse ponto; o outro caso ocorre quando o torque em relação ao centro de massa é zero. Êsse é, por exemplo, o caso de uma bola que foi chutada por um jogador de futebol. Quando a bola está no ar, a única fôrça externa que age sôbre ela é o seu pêso, que age no centro de massa, e portanto não há nenhum torque com relação ao centro de massa. Nessa situação, o momento angular é relativo ao centro de massa, que permanece constante. O movimento do centro de massa não nos preocupa agora, pois é devido à fôrça externa resultante e o movimento é regido pela Eq. (9.9). É a rotação em tôrno do centro de massa que nos interessa.