Mecânica e Campo Eletromagnético

2018/2019 – parte 5

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

Tópicos

- **Movimento de rotação**
  - **Cinemática e Energia de Rotação**
  - **Momento de Inércia: Teorema dos eixos paralelos**
  - **Rotação e Momento de uma força**
  - **Momento angular: conservação do momento angular**

Corpo Rígido

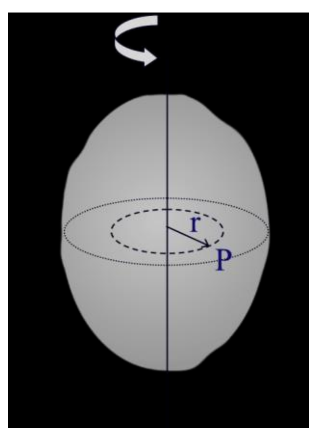
Um corpo rígido é um sistema de partículas cujas distâncias relativas, ao longo do tempo, permanecem constantes, mantendo a forma. O movimento de um corpo rígido pode ser descrito, em geral, como a combinação de um movimento de Translação (normalmente analisado em termos do Centro de Massa) e um movimento de Rotação

Corpo Rígido: Rotação

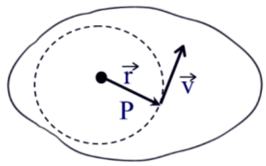
Vejamos a situação mais simples, em que o movimento é apenas de rotação, em torno de um eixo.

A trajetória de cada partícula vai ser circular.

A trajetória de P é uma circunferência de raio r, a uma distância de P ao EIXO de ROTAÇÃO



Cinemática de rotação



Vendo de topo, ao longo do eixo de rotação, temos o plano perpendicular ao eixo e que contém o ponto P

Como vimos anteriormente, num movimento circular de raio r existem relações entre as grandezas linear e circular:

Distância e ângulo descrito	$s = r\theta$
Velocidade linear e Velocidade angular	$v = r\omega$
Aceleração centrípeta e velocidade angular	$a_c = r\omega^2$
Aceleração tangencial e aceleração angular	$a_t = r\alpha$

Energia Cinética de Rotação

Num corpo rígido em rotação, a velocidade linear de cada ponto é tanto maior quanto mais afastado estiver do eixo.

Para calcular a energia cinética de rotação do corpo teremos que somar a energia cinética de cada partícula

$E_C(i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ **Somando:**

$$E_c = \sum_i E_c(i) = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

A velocidade angular é a mesma para todas as partículas

À grandeza entre parêntesis chamamos MOMENTO DE INÉRCIA DO SÓLIDO

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad \left(kgm^2\right)$$

Energia Cinética de Rotação

Vem então:

$$E_c = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

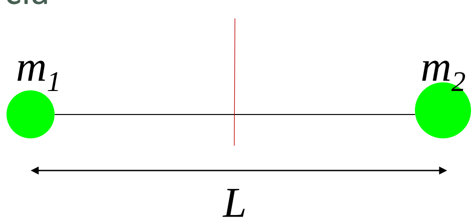
A Energia Cinética total é dada por uma expressão análoga à de uma partícula com movimento de translação

$$\tfrac{1}{2} mv^2 \leftrightarrow \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

No caso de um corpo rígido extenso com uma distribuição contínua de massa temos que calcular um integral:

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int_{\substack{Todo\\ volume}} r^2 dm$$

Momento de inércia



Calcular o momento de inércia dos dois corpos relativamente a um eixo vertical, que passa pelo centro**:**

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)L^2$$

Que se escreve em função da massa total do sistema:

$$I = \tfrac{1}{4} ML^2$$

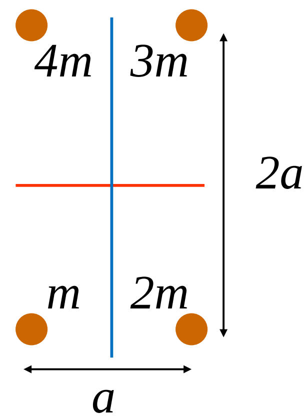
Momento de inércia

Calcular o momento de inércia relativamente um eixo horizontal:

$$I = \sum m_i r_i^2 = ma^2 + 2ma^2 + 3ma^2 + 4ma^2$$
$$= 10ma^2 = M_T a^2$$

um eixo Vertical:

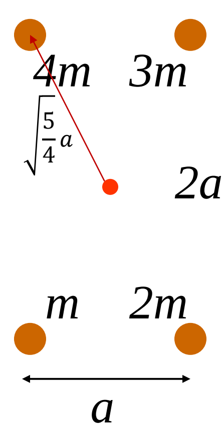
$$I = m\frac{a^2}{4} + 2m\frac{a^2}{4} + 3m\frac{a^2}{4} + 4m\frac{a^2}{4}$$
$$= 10m\frac{a^2}{4} = M_T\frac{a^2}{4}$$



Momento de inércia

Relativamente a um eixo perpendicular:

$$I = \sum m_i r_i^2$$
$$= (m + 2m + 3m + 4m)\left(\sqrt{\frac{5}{4}}a\right)^2$$
$$= 10m\left(\frac{5}{4}a^2\right) = M_T\left(\frac{5}{4}a^2\right)$$



Cálculo de momentos de inércia

No caso de corpos extensos:

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

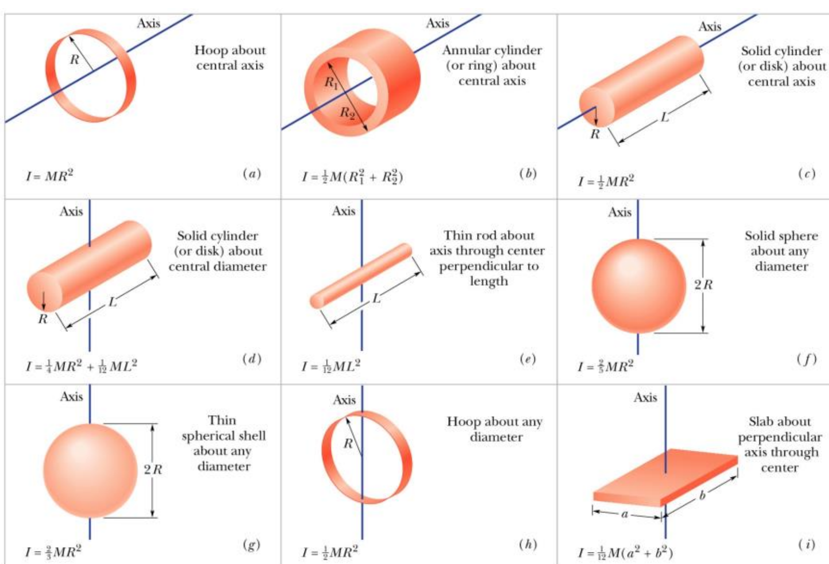
Para calcular concretamente os momentos de inércia temos que relacionar a variável massa com as coordenadas espaciais (a 3D o volume e a massa volúmica)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\, dV$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Vamos ver casos simples:

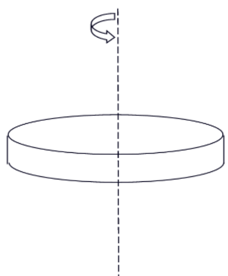
Alguns Momentos de Inércia



Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)

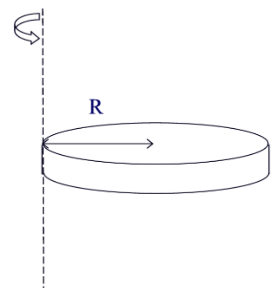
Vamos relacionar o momento de inércia I de um corpo em relação a um dado eixo com o momento de inércia I_{CM} relativamente a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa.

Queremos relacionar, por exemplo, num disco (ou cilindro maciço).



Momento de Inércia em relação ao C.M.

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = ?$$

Teorema dos eixos paralelos

O Resultado do Teorema é

$$I = I_{CM} + Md^2$$

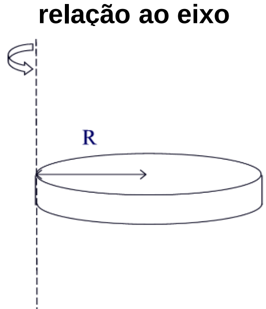
Momento de Inércia em relação ao eixo

Momento de Inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo C. M.

d: é a distância do C.M. ao eixo

M: Massa do corpo

(C.M. como partícula)



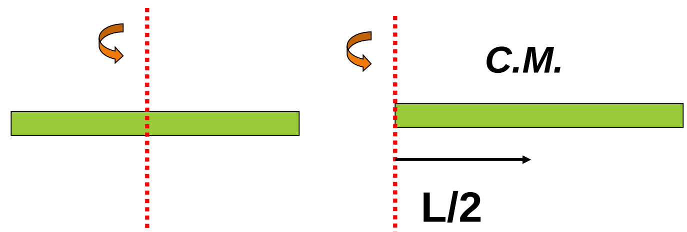
No exemplo, vem

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

Teorema dos eixos paralelos

Os cálculos que fizemos para a barra verificam o Teorema

$$I = I_{CM} + Md^2$$



$$I_c = \frac{ML^2}{12}$$

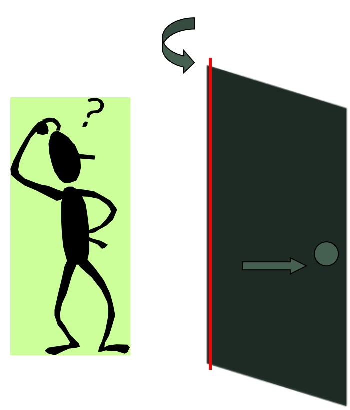
Eixo no centro

$$I_E = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Eixo na extremidade

Rotação e Momento de uma força

Todos sabemos que quando queremos abrir uma porta devemos empurrá-la junto ao puxador e não junto às dobradiças, no eixo de rotação.

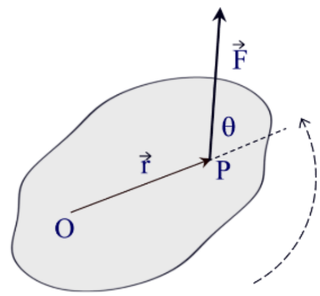


Esta diferença de efeitos é traduzida pelo momento da força aplicada em relação ao eixo

Rotação e Momento de uma força

O momento τ de uma força F aplicada num ponto P relativamente a um ponto O é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



O momento da força é um vetor perpendicular a F e a r.

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|.|\vec{F}|.sin(\theta)$$

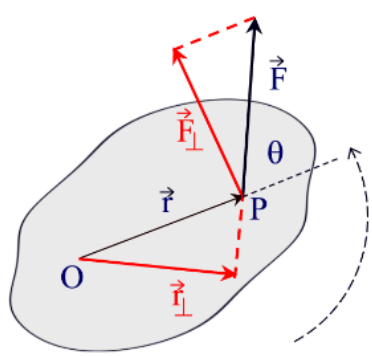
$$\vec{r} = P - O$$

θ é o ângulo entre F e r.

Rotação e Momento de uma força

O momento τ de uma força F aplicada num ponto P relativamente a um ponto O é assim:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



O momento da força pode ser calculado usando as componentes de r (ou F) perpendiculares a F (ou r).

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|.|\vec{F}|.sin(\theta) = |\vec{r}_\perp|.|\vec{F}| = |\vec{r}|.|\vec{F}_\perp|$$

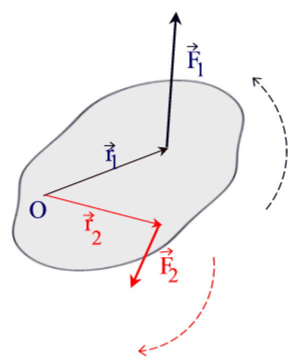
Rotação e Momento de uma força

O que acontece se tivermos mais do que uma força aplicada?

Como analisar o efeito do conjunto?

O Movimento do sistema vai ser determinado pelo momento resultante, que é a soma dos momentos das várias forças

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



Neste exemplo, os dois vetores têm sentidos opostos.

Em que sentido vai rodar o corpo em torno de O?

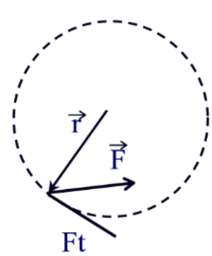
Rotação e Momento de uma força

Vejamos como o momento das forças aplicadas determina o movimento de rotação dum corpo rígido (em torno dum eixo)

Comecemos por ver o caso simples, duma partícula de massa m, com movimento circular de raio r e sujeita a uma força F.

A aceleração tangencial da partícula vem: $F_t = ma_t$

O momento de F resulta apenas da componente tangencial de F (porquê?) $|\vec{\tau}| = rF_t = ma_t r$



Relacionando com a aceleração angular, vem

$$\tau = mr^2\alpha$$

Usando o momento de inércia da partícula: $\tau = I\alpha$

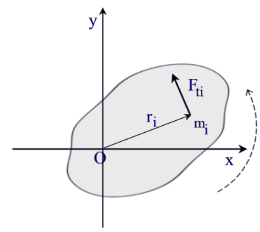
Rotação e Momento de uma força

A expressão anterior é generalizável para um sólido constituído por muitas partículas, rodando em torno dum eixo Z

Para cada partícula de massa m_i temos

$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$

O momento (componente Z) aplicado a cada uma é



$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas, e como todas têm a mesma aceleração e velocidade angulares

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = I\alpha$$

Rotação e Momento de uma força

Nesta soma, só contribuem as forças exteriores aplicadas ao corpo, pois as forças entre partículas (interiores) dão contribuições que cancelam aos pares, devido à lei de ação-reação.

A lei de movimento para a rotação em torno dum eixo tem uma forma que é análoga à da 2ª lei de Newton para a translação, trocando as grandezas correspondentes

$$F = ma \leftrightarrow \tau = I\alpha$$

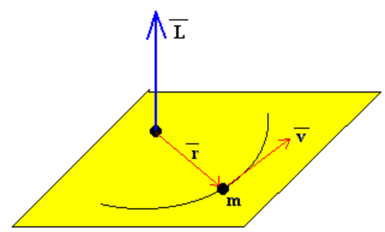
Em cada caso, F e τ são as resultantes das forças e momentos exteriores.

Momento angular

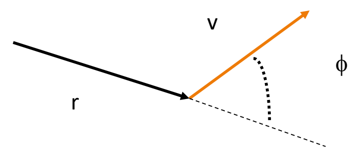
O momento angular de uma partícula em relação a um ponto O é definido como o momento do vetor momento linear (p)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

As unidades SI são kgm^2s^{-1}



$$\left|\vec{L}\right| = mvr\,sen\phi$$

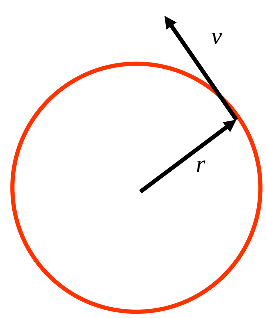


Momento Angular: exemplos

Movimento circular

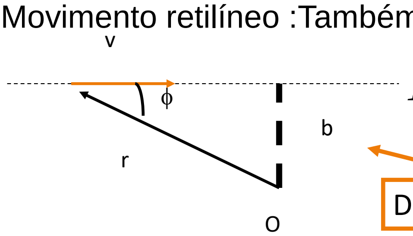
Neste caso ϕ=90º e fica

$$L = mvr = m\omega r^2$$



L é “para cima”

Movimento retilíneo :Também tem momento angular!



$$L = mvr\,sen\phi = mvb$$

Distância entre O e a reta

Variação do Momento Angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}_{\vec{v}\times\vec{p}=\vec{0}} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

O momento da força resultante aplicada a uma partícula é igual à variação do momento angular com o tempo

Note-se que o momento da força e o momento angular são calculados em relação ao mesmo ponto

Momento Angular: sistema de partículas

Se tivermos um sistema de partículas, o resultado é generalizado. Cada partícula está sujeita a forças exteriores e interiores ao sistema. A contribuição destas, somada sobre todas as partículas é nula (devido à lei de ação-reação).

$$\sum\vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_{i\,ext} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

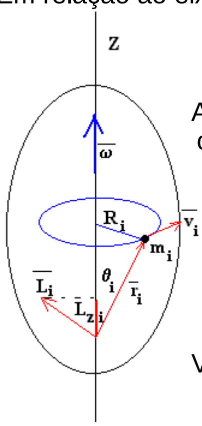
Num sistema isolado (forças exteriores = 0), o momento angular é CONSTANTE.

Se r e F são colineares, L também é constante (FORÇAS CENTRAIS)

Momento Angular: corpo rígido

Para o caso dum corpo rígido em rotação em torno dum eixo fixo, vamos obter uma expressão que relaciona diretamente L com a velocidade angular ω.

Em relação ao eixo, o movimento de cada partícula é circular, portanto

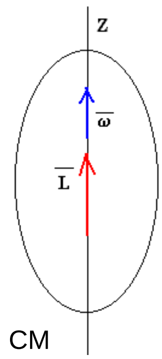


$$L_i = m_i v_i r_i = m_i \omega r_i^2$$

A soma sobre todas as partículas só terá componente segundo o eixo de rotação (Z)

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \left(m_i r_i^2\right)\omega = I\omega_z$$

$$\boxed{L_z = I\omega_z}$$



Vale para um eixo de simetria que passe pelo CM

Numa situação geral, a relação é muito mais complexa

Conservação do momento angular

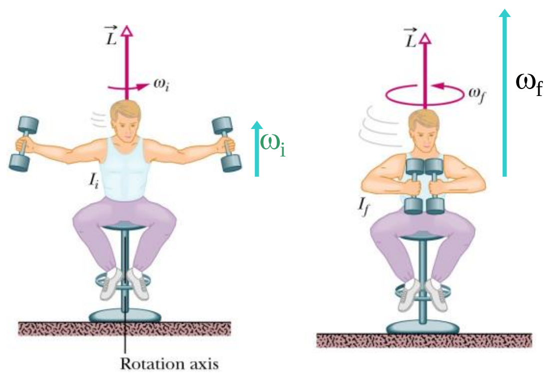
Num sistema isolado, o momento angular mantém-se constante.
Uma situação interessante ocorre quando o momento de inércia varia.

Conservação do momento angular

Momento Angular (L) constante, pois o momento das $F_{ext}=0$

$L=I\omega$ ==> $\omega=L/I$

$\omega_i=L/I_i$



$\omega_f=L/I_f$

$I_f< I_i$

então

$\omega_f> \omega_i$

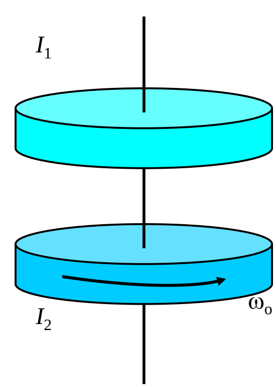
Conservação do momento angular

Deixar cair um disco parado sobre outro que roda. Ficam ambos a rodar em conjunto (atrito)

$$L_i = I_2\omega_o$$

$$L_f = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_2}{I_1 + I_2}\omega_o$$



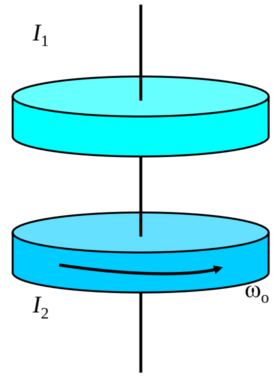
Conservação do momento angular

Qual a diminuição de energia cinética?

$$KE_i = \tfrac{1}{2} I_2 \omega_o^2$$

$$KE_f = \tfrac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega_f^2$$

$$KE_f = \tfrac{1}{2} I_2 \omega_o^2 \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$



Colisão perfeitamente inelástica

Momento angular: centro de massa

Para um sistema de partículas temos:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Escrevemos a posição e a velocidade de cada partículas relativamente ao centro de massa:

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM} \quad \vec{v}_i^{\,*} = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM} \Leftrightarrow \vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^{\,*} \quad \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^{\,*}$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i \left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i^{\,*}\right)\times\left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^{\,*}\right)\\ &= \sum_i m_i \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i\, \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_i^{\,*} + \sum_i m_i\, \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i\, \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{v}_i^{\,*}\end{aligned}$$

Momento angular: centro de massa

Que se transcreve assim:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} \sum_i m_i}_{\vec{L}_{CM}} + \vec{R}_{CM} \times \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i^*\right)}_{= M_T V_{CM}^* = 0} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^*\right)}_{= M_T R_{CM}^* = 0} \times \vec{V}_{CM} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^*}_{\vec{L}^*}$$

Momento angular do centro de massa em relação ao ponto/eixo considerado

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^*}$$

Momento angular do sistema relativamente ao CM.

Momento angular: centro de massa

O momento angular de um sistema de partícula relativamente a um eixo é a soma:

(a) do momento angular do centro de massa relativamente a este eixo e

(b) do momento angular do sistema relativamente a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^*}$$

Momento angular

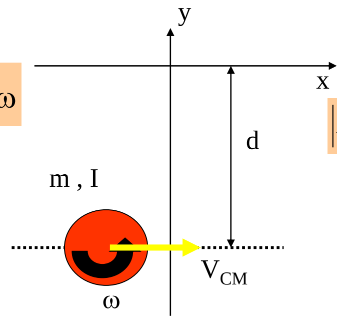
momento angular em relação ao eixo zz de um corpo que roda em torno do CM e tem também movimento de translação

Rotação do corpo em torno do CM.

Movimento do CM.

$$L^* = \sum m_i r_i^{*2} \omega = I\omega$$

$$\boxed{\vec{L}^* = I\omega\hat{k}}$$



$$\left|\vec{L}_{CM}\right| = \left|m\vec{r}_{CM} \times \vec{V}_{CM}\right| = mdV_{CM}$$

$$\boxed{\vec{L}_{CM} = mdV_{CM}\,\hat{k}}$$

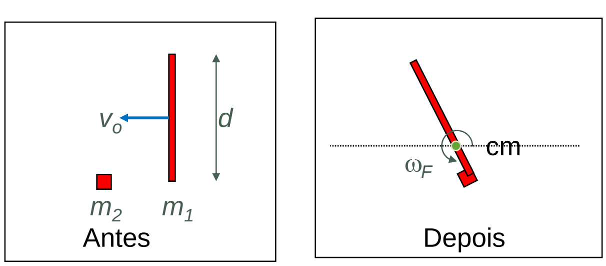
$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^* = \left(mdV_{CM} + I\omega\right)\hat{k}}$$

Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Uma barra de comprimento d e massa m_1=2m , que tem um movimento retilíneo uniforme, v_0 e não roda sobre si própria, colide, de maneira <u>perfeitamente inelástica</u>, com uma massa m_2=m inicialmente em repouso, como na figura.

Qual é a velocidade de rotação final, ω_F ?

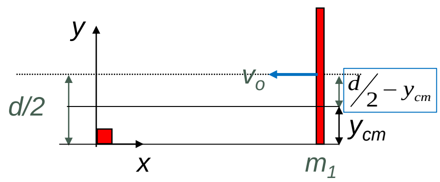


Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Escolhemos a posição da massa m_2 como origem. Podemos então escrever a posição do CM do sistema, imediatamente antes da colisão:

$$y_{CM} = \frac{d}{2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = \frac{d}{3}$$



O momento angular antes da colisão calculado relativamente ao ponto $(0,y_{CM})$ é devido unicamente ao movimento do centro de massa da barra porque a barra não roda.

$$\vec{L}_i = \vec{L}_{CM,i} + \vec{L}_i^{\,*} = m_1 v_0\left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right)\hat{k}$$

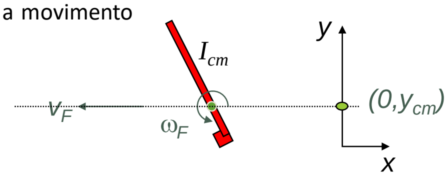
$$\vec{L}_i = \frac{m v_0 d}{3}\,\hat{k}$$

Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Depois da colisão, o momento angular é devido unicamente a movimento de rotação em torno do CM do sistema massa+barra.

$$\vec{L}_f = \vec{L}_{CM,f} + \vec{L}_f^{\,*} = I_{CM}\,\omega_f\,\hat{k}$$

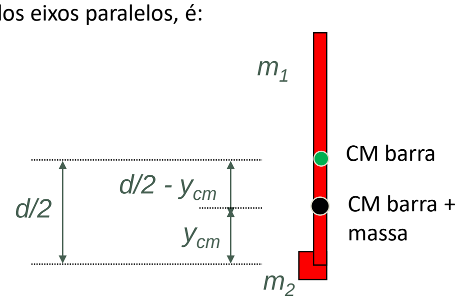


O momento de inércia do sistema relativamente ao CM, é a soma dos momentos da barra e da massa, e utilizando o teorema dos eixos paralelos, é:

$$I_{CM} = I_{barra} + I_{m2}$$

$$= \frac{m_1}{12}d^2 + m_1\left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right)^2 + m_2 y_{CM}^2$$

$$I_{CM} = \frac{m}{3}d^2$$



Momento angular

colisão entre uma barra e uma massa

Utilizando a conservação do momento angular:

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i$$

$$I_{CM}\,\omega_f\,\hat{k} = m_1 v_0 \left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right)\hat{k}$$

$$\omega_f = \frac{m_1 v_0}{I_{CM}} \frac{d}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Ou seja $\omega_f = \frac{v_0}{d}$