灰色预测

GM(1, 1)

适用情况

- 少量数据，通常为 $4-10$ 个
- 模型的本质是回归，以最小二乘确定参数
- 适用于**准指数规律**的数据
- 每种灰色预测模型，都对应独特的预测函数，只能反映固定的规律

模型前提

- 数据非负
- 无季节性效应
- 自变量间隔相等

步骤

1. 判断是否适合灰色预测（季节性，准指数...）
2. 计算1次累加序列，均值生成序列
3. 基于最小二乘求解模型参数
4. 用前面的参数求解含参微分方程，得到预测方程
5. 残差检验，评估模型效果

变量定义

已知自变量 $t=1,2,\cdots,n$

定义： 数据列 $x^{(0)}=\left(x^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n)\right)$，$x^{(0)}(k)$为$t=k$时的数据。

定义： 一次累加序列 $x^{(1)}=\left(x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n)\right)$，$x^{(1)}(k)=\sum_{t=1}^{k}x^{(0)}(t)$

定义： 均值生成序列 $z^{(1)}=\left(z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)\right)$，$z^{(1)}(k)=0.5\left(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)\right)$

若将 $x^{(1)}(k)$ 视为关于k 的连续可导函数，则

$$x^{(0)}(k)\approx\int_{k-1}^{k}\left(x^{(1)}(t)\right)'dt$$

$$z^{(1)}(k) \approx \int_{k-1}^{k} x^{(1)}(t)\, dt$$

模型事前检验

定义： 级比

$$\sigma(k) = \frac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)} \quad (k = 2, \cdots, n)$$

定义： 光滑比

$$\rho(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$$

若光滑比逐项递减，后面几项值在 $[0, 0.5]$ 之间，则可认为适合 $GM(1,1)$ 模型。

灰色微分方程

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (k = 2, \cdots, n)$$

通过积分近似，得出**白化微分方程**

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

确定参数（最小二乘法）

对全体 $k = 2, \cdots, n$，参数 a, b 使得 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k)$ 与 b 之间的总误差最小。即

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

方程为

$$Bu = Y$$

可得**最小二乘解**为

$$\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

解得微分方程为

$$x^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)e^{-\hat{a}k}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}$$

其中，$k=0,1,\cdots,n,\cdots$

差分 $x^{(1)}$ 即得 $x^{(0)}$

事后检验（残差）

设 $GM(1,1)$ 模型的预测结果为 $\hat{x}^{(0)}$

定义： 残差

$$\varepsilon(k)=\frac{\left|x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)\right|}{x^{(0)}(k)}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$

若 $\varepsilon_{max}(k)<0.2$，则检验通过，若$\varepsilon_{max}(k)<0.1$，则预测效果较好。

灰色 Verhulst 模型

适用条件

- S 型规律：$Sigmoid$ 函数（$y=\frac{1}{1+e^{-x}}$）
- 适用于**先繁荣，后衰退**
  - 生物种群（考虑天敌，环境容纳量）

灰色微分方程

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b\left(z^{(1)}(k)\right)^2 \quad (k=2,\cdots,n)$$

白化微分方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b\left(x^{(1)}\right)^2$$

确定参数

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & \left(z^{(1)}(2)\right)^2 \\ -z^{(1)}(3) & \left(z^{(1)}(3)\right)^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & \left(z^{(1)}(n)\right)^2 \end{bmatrix}$$

最小二乘解为

$$\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

预测函数

$$x^{(1)}(k+1) = \frac{\hat{a} x^{(0)}(1)}{\hat{b} x^{(0)}(1) + \left[\hat{a} - \hat{b} x^{(0)}(1)\right] e^{\hat{a}k}}$$

再做差分。

GM(2, 1)

定义：1 次累减序列 $\alpha^{(1)} x^{(0)} = \left(\alpha^{(1)} x^{(0)}(2), \cdots, \alpha^{(1)} x^{(0)}(n)\right)$，其中 $\alpha^{(1)} x^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)$，即对原始序列差分。

可以通过积分近似为

$$\alpha^{(1)} x^{(0)}(k) \approx \int_{k-1}^{k} \frac{d^2 x^{(1)}(t)}{dt}\, dt$$

灰色微分方程

$$\alpha^{(1)} x^{(0)}(k) + a_1 x^{(0)}(k) + a_2 z^{(1)}(k) = b \quad (k = 2, \cdots, n)$$

白化微分方程

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2 x^{(1)} = b$$

确定参数

$$u=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\b\end{bmatrix}\quad Y=\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}x^{(0)}(2)\\\alpha^{(1)}x^{(0)}(3)\\\vdots\\\alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1\\-x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\-x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

最小二乘解为

$$\hat{u}=(B^TB)^{-1}B^TY$$

解微分方程

写出特征方程 $x^2+a_1x+a_2=0$，看 Δ 的情况解不同方程。

DGM(2, 1)

灰色微分方程

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+ax^{(0)}(k)=b\quad(k=2,\cdots,n)$$

白化微分方程

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a\frac{dx^{(1)}}{dt}=b$$

确定参数

$$u=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}\quad Y=\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}x^{(0)}(2)\\\alpha^{(1)}x^{(0)}(3)\\\vdots\\\alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & 1\\-x^{(0)}(3) & 1\\\vdots & \vdots\\-x^{(0)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

最小二乘解为

$$\hat{u} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

预测函数

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(\frac{\hat{b}}{\hat{a}} - \frac{x^{(0)}(1)}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}} k + \frac{1+\hat{a}}{\hat{a}} x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2}$$