第一章　Lebesgue 积分

1.1　非负简单函数的 Lebesgue 积分

设 D 是可测集, $\{E_k\}$ 是 D 的有限或可数个两两不交的可测子集, 使得 $\cup E_k = D$, 则 $\{E_k\}$ 为 D 的一个**分划**.

设 f 是可测集 D 上的非负简单函数. 于是有 D 的分划 $\{E_i\}_{1\le i\le S}$ 及非负实数组 $\{a_i\}_{1\le i\le S}$ 使

$$f(x)=\sum_{i=1}^{S} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x), \quad x\in D.$$

定义 1.1.1. f 在 D 上的 ***Lebesgue* 积分**为

$$\int_D f(x)dx=\sum_{i=1}^{S} a_i m(E_i) \tag{1.1}$$

且当 $\int_D f(x)dx<\infty$ 时, 称 f 在 D 上 L **可积**.

定理 1.1.1. 设 f 和 g 都是可测集 D 上的非负简单函数,

- 1). 若它们在 D 上几乎处处相等. 则有 $\int_D f=\int_D g$.
- 2). 若在 D 上几乎处处有 $f\le g$, 则 $\int_D f\le\int_D g$.
- 3). 若 $\lambda,\mu\ge 0$, 则 $\int_D(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_D f+\mu\int_D g$.
- 4). 若 A,B 是 D 的不相交的可测子集, 则 $\int_{A\cup B} f=\int_A f+\int_B f$.

引理 1.1.2. 设 g 和 f_n 都是可测集 D 上的非负简单函数, 它们满足以下两个条件:

- 1). 对几乎所有 $x \in D$, $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 单增.
- 2). $0 \leq g(x) \leq \lim_{n\to\infty f_n(x)}$(几乎处处与 D).

则有

$$\int_D g \leq \lim_{n\to\infty} \int_D f_n$$

定理 1.1.3. 设 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 都是可测集 D 上的非负简单函数, 且对所有 $x \in D$, $\{f_n\}, \{g_n\}$ 单增收敛与相同极限, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n$$

1.2 非负可测函数的 Lebesgue 积分

设 f 是可测集 D 上的非负可测函数, 则可取 D 上的非负简单函数列 $\{f_n\}$, 使对每一 $x \in D$, $\{f_n(x)\}$ 单增收敛于 $f(x)$.

定义 1.2.1. f 在 D 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_D f = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \tag{1.2}$$

并称 f 的积分由 $\{f_n\}$ 定义, 当 $\int_D f < \infty$ 时, 称 f 在 D 上L **可积**.

注. 由上述 *Lebesgue* 积分的定义可知, 对几乎处处单增收敛的函数列而言, 极限和积分被定义为可交换. 与 *Riemann* 积分不同, 极限和积分可交换的必要条件是函数列一致收敛且每一项都连续.

定理 1.2.1. 设 f 和 g 都是可测集 D 上的非负可测函数,

- 1). 若它们在 D 上几乎处处相等. 则有 $\int_D f = \int_D g$.
- 2). 若 $\lambda, \mu \geq 0$, 则 $\int_D(\lambda f + \mu g) = \lambda \int_D f + \mu \int_D g$.
- 3). 若 A, B 是 D 的不相交的可测子集, 则 $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

定理 1.2.2 (Levi's theorem)**.** 设 f 和 $\{f_n\}$ 是可测集 D 上的非负可测函数, 且对几乎所有 $x \in D$, $\{f_n\}$ 单增收敛于 $f(x)$, 则

$$\int_D f = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n$$

推论 1.2.3 (逐项积分)**.** 设 $\{u_k\}$ 是可测集 D 上的非负可测函数, 则

$$\int_D (\sum_{k=1}^{\infty} u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D u_k$$

证明. 对每一 $n > 1$, 有

$$\int_D (\sum_{k=1}^{n} u_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_D u_k$$

现在 $f = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 满足定理 1.2.2 条件, 因此

$$\int_D (\sum_{k=1}^{\infty} u_k) = \lim_{n\to\infty} \int_D (\sum_{k=1}^{n} u_k)$$

□

定理 1.2.4 (Fatou)**.** 设 $\{f_n\}$ 是可测集 D 上的非负可测函数, 则

$$\int_D \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_D f_n \tag{1.3}$$

证明. 对每一 $n > 1$, 令

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad x \in D$$

则对每一 $x \in D$, $\{g_n(x)\}$ 单增收敛于 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$, 从而由单增收敛定理 1.2.2, 有

$$\int_D \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n \tag{1.4}$$

因为 $g_n \leq f_n$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \int_D g_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_D f_n \tag{1.5}$$

结合1.4和1.5, 即得1.3. □

1.3 一般可测函数的 Lebesgue 积分

设 f 是可测集 D 上的可测函数, f_+, f_-, 分别称为 f 的正部和负部, 它们都是非负可测函数

定义 1.3.1. 若 $\int_D f_+$ 和 $\int_D f_-$ 不同时为 ∞, 则 f 在 D 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_D f = \int_D f_+ - \int_D f_-$$

当 $\int_D f$ 有限时, 称 f 在 D 上 L **可积**, 记为 $f \in L(D)$.

定理 1.3.1. 设 f 和 g 都是可测集 D 上的可测函数,

- 1). $f \in L(D)$ 的充要条件是 $|f| \in L(D)$, 且

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$$

- 2). 若 $f \in L(D)$, 则 f 在 D 上几乎处处有限.
- 3). 若在 D 上几乎处处有 $f = g$, 则其一在 D 上可积, 另一也可积, 且积分值相等.

注. *Lebesgue* 积分可积与绝对可积等价, *Riemann* 积分不一定.

定理 1.3.2. 设 $f, g \in L(D)$, 则

- 1). 若 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in L(D)$, 且
$$\int_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_D f + \mu \int_D g$$
- 2). 若 A, B 是 D 的不相交的可测子集, 则 $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$
- 3). 对任意 $\varepsilon > 0$, 有 D 上的有理值的简单函数 h, 使 $\int_D |f - h| < \varepsilon$.

定理 1.3.3 (控制收敛定理)**.** 设 f, f_n 都是可测集 D 上的可测函数, 若满足

- 1). 存在 $g \in L(D)$, 使对每一 $n \geq 1$, 在 D 上几乎处处有 $|f_n(x)| \leq g(x)$.
- 2). 在 D 上 f_n 几乎处处收敛于 f.

则, $f, f_n \in L(D)$, 且
$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n = \int_D f$$

证明. 由 $|f_n(x)| \leq g(x)$, 由 $|f(x)| \leq g(x)$, 则通过 $g \in L(D)$ 可知, $f, f_n \in L(D)$. 其次, 再由 $|f_n(x)| \leq g(x)$ 知,
$$g \pm f_n \geq 0, \quad n \geq 1$$
由 Fatou 定理1.2.4,
$$\int_D \varliminf_{n\to\infty} (g \pm f_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_D (g \pm f_n)$$
由 $g \in L(D)$, 上式等价于
$$\pm \int_D f \leq \varliminf_{n\to\infty} \left[\pm \int_D f_n\right]$$
从而
$$\int_D f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_D f_n \tag{1.6}$$
$$-\int_D f \leq -\varlimsup_{n\to\infty} \int_D f_n \tag{1.7}$$
结合1.6和1.7得
$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_D f_n \leq \int_D f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_D f_n$$
□

例 1.3.1. 证明 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx}dx = 0$.

证明. 注意到对任意足够大的 n, $x \in (0,1]$ 内都有 $\frac{\sqrt{nx}}{1+nx} \le 1$. 且固定 x, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{nx}}{1+nx} = 0$$

由控制收敛定理1.3.3可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx}dx = \int_0^1 0dx = 0$$

□

例 1.3.2. $\lim_{n\to\infty}\int_0^2 (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}dx = \frac{10}{3}$.

证明. 注意到在 $x \in [0,2]$ 内, 有 $(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}} \le (1+4^n)^{\frac{1}{n}} < 5$, 且

$$(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}} \to \begin{cases} 1 & \text{if } x \le 0 \\ x^2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

可将积分分成两部分,

$$\int_0^2 (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}} = \int_0^1 (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}} + \int_1^2 (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 x^2dx = 1 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{10}{3}$$

□

例 1.3.3. $\lim_{n\to\infty}\int_R \frac{1}{1+e^{nf(x)}}dm = \frac{1}{2}m(\{f=0\}) + m(\{f<0\})$.

证明. 对任意的 n, x 都有, $\frac{1}{1+e^{nf(x)}} < 1$, 且对足够大的 n, 有 $e^{nx} \to \begin{cases} +\infty & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{1+e^{nf(x)}} \to \begin{cases} 0 & \text{if } f > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } f = 0 \\ 1 & \text{if } f < 0 \end{cases}$$

则,

$$\lim_{n\to\infty}\int_R \frac{1}{1+e^{nf(x)}}dm = \int_{\{f>0\}} 0 + \int_{\{f=0\}} \frac{1}{2} + \int_{\{f<0\}} 1$$

□

例 1.3.4. f 为 *Lebesgue* 可积, 证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+nx}dm = 0$$

证明. 提示: 因为 f 为 Lebesgue 可积, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处 $(a.e.)$ 有 $f < \infty$. □

例 1.3.5. 对任意 $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}\cdot sin^{\alpha}(nx)}{1+(nx)^2}dx = 0$$

证明. 提示: 暂无. □

1.4 概率

定义 1.4.1. 设 Ω 为一样本空间, $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的事件域. 若对任意事件 $A \in \mathscr{F}$, 定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数 $P(A)$ 满足:

- **非负性** 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $P(A) \geq 0$.
- **正则性** $P(\Omega) = 1$.
- **可列可加** 若 $A_1, A_2, .., A_n, ..$ 互不相容, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

.

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**, 称三元素 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为**概率空间**.

定义 1.4.2. 若 X 是一个 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的可测函数, 则称 X 为**随机变量**.

定义 1.4.3. 若 X 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量, 定义 $E(X) = \int XdP$ 为其**期望**.

定理 1.4.1 (Markov's Inequality)**.** 对任意非负可测函数 $f \geq 0$, 任意 $\lambda \in (0, +\infty)$, 有

$$m(\{f \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int f$$

证明. 对任意 $\lambda > 0$, 因为 $f \geq 0$, 则有

$$\int f \geq \int_{\{f \geq \lambda\}} f \geq \lambda \cdot m(\{f \geq \lambda\})$$

□

定理 1.4.2 (Chebyshev's Inequality)**.** 对任意 $\lambda \in (0, +\infty)$, 有

$$m(\{|g(x) - a| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int |g - a|^2$$

证明. 由 Markov 不等式1.4.1, 有

$$m(\{|g - a| \geq \lambda\}) = m(\{|g - a|^2 \geq \lambda^2\}) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int |g - a|^2$$

□

注. 特别的, 令 $a = \int g$, 为 g 的期望, $\sigma^2 = \int |g - a|^2$ 为其方差, 有

$$m(\{|g - a| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

1.5 Riemann 积分与 Lebesgue 积分

定理 1.5.1 (广义控制收敛定理)**.** 设 f_n, f 为可测函数, $g_n, g \in L^1$ 满足 $|f_n| \leq g_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 若 $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, $g_n \overset{a.e.}{\to} g$, 且 $\int g_n \overset{a.e.}{\to} \int g$. 则有 $f_n, f \in L^1$, 且 $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

证明. 使用 Fatou 引理1.2.4. □

定理 1.5.2. 若 $f, g \in L^1$, 且有 $\int_A f = \int_A g, \quad \forall A \in \Omega$, 则有 $f \overset{a.e.}{=} g$.

证明. 令 $E_n = \{x : f > g + \frac{1}{n}\}$, $F_n = \{x : f < g - \frac{1}{n}\}$, 则有

$$E = \{f > g\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$F = \{f < g\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

由条件可得, $m(E_n) = m(F_n) = 0$, 则 $m(E) = m(F) = 0$, 即 $f \overset{a.e.}{=} g$. □

推论 1.5.3. 若 $h_n, h \in L^1(E)$, 且有 $h_n \overset{a.e.}{\to} h$, $\int_E |h_n| \overset{a.e.}{\to} \int_E |h|$, 则对任意可测集 $F \subset E$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_F h_n = \int_F h$$

证明. 令 $g_n = |h_n|\mathcal{X}_E$, $f_n = h_n\mathcal{X}_F$, $f = h\mathcal{X}_F$, 则有 $|f_n| < g$, $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, 由条件有 $g_n \overset{a.e.}{\to} g$, $\int g_n \to \int g$, 使用广义控制收敛定理1.5.1, 有 $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$, 即 $\lim_{n\to\infty} \int_F h_n = \int_F h$. □

定理 1.5.4. 若 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $\|\Delta\| \le \delta$ 时, 有

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$$

其中, S 为 Darboux 上和, s 为 Darboux 下和.

定理 1.5.5. 若 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 则 f 有界.

证明. 反证法: 假设 f 无界, 可证 $S_\Delta - s_\Delta \to +\infty$, 矛盾. □

定理 1.5.6. 若 f 在 $[0,1]$ 上有界, 则 f Riemann 可积当且仅当, 在分割 $\Delta_n = \{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]\}_{k=0}^{2^n-1}$ 下, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $S_\Delta - s_\Delta \to 0$

定理 1.5.7. 1). 若 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 则 $f \in L^1([0,1])$ Lebesgue 可积, 且

$$(L)\int_{[0,1]} f = (R)\int_0^1 f(x)dx$$

.

设 $I_n \in \Delta_n$ 为包含 x 的区间, 定义 $\omega_n(x) = \sup_{y\in I_n} f(y) - \inf_{y\in I_n} f(y)$, $\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x), \forall x \in [0,1] \backslash \{\frac{i}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{Z}}$

2). f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 当且仅当 f 有界且在 $[0,1]$ 上几乎处处连续, 即 $\omega(x) \overset{a.e.}{=} 0, x \in [0,1]$.

1.6　重积分, 累次积分, Fubini 定理

定义 1.6.1. $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f 称为有**紧支集**, 若 $\{f \neq 0\}$ 是有界集.

定理 1.6.1. 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在有紧支集的连续函数 g, 使得 $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| dx < \varepsilon$, 且 $\max_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

定义 1.6.2. 设 $n = p + q$, 则 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 定义 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分为 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的**重积分**.

定理 1.6.2 (Tonelli)**.** 设 $f(x, y)$ 是 $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数, 则:

- (i) 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^p, f(x, y)$ 作为 $y \in \mathbb{R}^q$ 的函数是非负可测的.
- (ii) $F(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)dy$ 作为 $x \in \mathbb{R}^p$ 的函数是非负可测的.
- (iii)
$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)dy\right] dx \tag{1.8}$$

证明. 先设 f 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 中的可测集 E 的特征函数, 即 $f(x, y) = \mathcal{X}_E(x, y)$. 分情况讨论
情形 1: $E = I_p \times I_q$, 其中 I_p, I_q 分别是 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$ 中的长方体.
此时当 $x \notin I_p$ 时, $f(x, y) = 0$, 当 $x \in I_p$ 时, 有

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y \in I_q, \\ 0 & y \notin I_q. \end{cases}$$

所以对所有 $x \in \mathbb{R}^p$, $f(x, y)$ 作为 $y \in \mathbb{R}^q$ 的函数是非负可测的, 且

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)dy = \begin{cases} \ell(I_q), & x \in I_p, \\ 0, & x \notin I_p. \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} F(x)dx = \int_{I_p} \ell(I_q)dx = \ell(I_p) \cdot \ell(I_q)$$

而上式右端即为 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的积分. 从而1.8成立.

情形 2: E 是开集. 此时由定理可知 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}I^{(k)}$, 其中 $\{I^{(k)}\}_{k\geq 1}$, 是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中两两不相交半开方体. 现每一 $I^{(k)}$ 可以表示为 $I^{(k)}=I_p^{(k)}\times I_q^{(k)}$, 其中 $I_p^{(k)},I_q^{(k)}$ 分别是 $\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q$ 中的方体. 令 $f_k(x,y)$ 是 $I_p^{(k)}\times I_q^{(k)}$ 的特征函数, 则

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,y)$$

由情形 1, 对每一 $f_k(x,y)$, 定理中的 (i) 到 (iii) 都满足. 则对一切 $x\in\mathbb{R}^p, f(x,y)$ 作为 $y\in\mathbb{R}^q$ 的函数非负可测, 且由单调收敛定理1.2.2,

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^q}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,y)dy=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy$$

在 $\mathbb{R}^p$ 上非负可测. 最后再用单调收敛定理1.2.2,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)dy&=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,y)dxdy\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy\right]dx\\&=\int_{\mathbb{R}^p}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy\right]dx=\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,y)dy\right]dx\\&=\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right]dx\end{aligned}$$

这样我们证明了 E 为开集时 (i) 到 (iii) 成立.

情形 3: E 为有界闭集. 此时令

$$G_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q: 0<d((x,y),E)<1\}$$

$$G_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q: d((x,y),E)<1\}$$

则 G_1,G_2 为 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 的有界开集, 且 $E=G_2-G_1, G_1\subset G_2$, 则有 $f(x,y)=f_2(x,y)-f_1(x,y)\geq 0$, 其中 f_1,f_2 分别是 G_1,G_2 的特征函数. 于是由情形 2, f_1,f_2 都满足 (i) 到 (iii). 所以对所有 $x\in\mathbb{R}^p, f(x,y)$ 作为 $y\in\mathbb{R}^q$ 的函数非负可积, 且

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^q}f_2(x,y)dy-\int_{\mathbb{R}^q}f_1(x,y)dy$$

在 $\mathbb{R}^p$ 上非负可积. 此时对 f 来说1.8成立.

情形 4: E 是零测集. 此时有 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中单减开集列 $\{G_k\}_{k\geq 1}$, 使 $E\subset G_k$, 且 $m(G_k)\to 0$. 令 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$, 则 $E\subset H$, 且 $m(H)=0$. 令 $f_k(x,y)$ 表示 G_k 的特征函数, 则由控制收敛定理1.3.3及情形 2 得.

$$
\begin{aligned}
0=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}\mathcal{X}_H(x,y)dxdy &\overset{(1)}{=}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dxdy\\
&\overset{(2)}{=}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy\right]dx\overset{(3)}{=}\int_{\mathbb{R}^p}\left[\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy\right]dx\\
&\overset{(4)}{=}\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)dy\right]dx=\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}\mathcal{X}_H(x,y)dy\right]dx
\end{aligned}
$$

(1): 由 $\mathcal{X}_H(x,y)=\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)$ 且 $f_k(x,y)\leq f_1(x,y)$, 由情形 2, $f_1(x,y)\in L^1(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$, 由控制收敛定理1.3.3得积分和极限号交换.

(2): 由情形 2, $f_k(x,y)$ 满足定理 (i) 到 (iii), 可累次积分.

(3): 同 (1), $F(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy\leq\int_{\mathbb{R}^q}f_1(x,y)dy=F_1(x)$, 且由情形 2 知, $F_1(x)\in L^1(\mathbb{R}^p)$, 由控制收敛定理可交换极限和积分号.

(4): $f_k(x,y)\leq f_1(x,y)$, 且 $f_1(x,y)\in L^1(\mathbb{R}^q)$, 同理交换极限与积分号.

由此得对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^p$ 有 $\int_{\mathbb{R}^q}\mathcal{X}_H(x,y)dy=0$, 从而对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^p$, $\mathcal{X}_H(x,y)$ 作为 $y\in\mathbb{R}^q$ 的函数几乎处处为 0. 但

$$
0\leq f(x,y)=\mathcal{X}_E(x,y)\leq\mathcal{X}_H(x,y)
$$

因此对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^p, f(x,y)$ 作为 $y\in\mathbb{R}^q$ 的函数几乎处处为 0. 因此对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^p$, 有

$$
F(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy=0
$$

显然1.8成立.

情形 5: E 是一般可测集. 此时 $E=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)\cup Z$, $\{F_k\}_{k\geq 1}$ 是单增有界闭集列, Z 是零测集, 且 $F_k\cap Z=\emptyset(k\geq 1)$. 分别用 f_0,f_k 表示 $Z,F_k(k\geq 1)$ 的特征函数, 则

$$
f(x,y)=\mathcal{X}_E(x,y)=\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)+f_0(x,y)
$$

由情形 3 和情形 4 知, 所有 $f_k(k\geq 0)$ 满足 (i) 到 (iii). 故 f 亦如此.

至此我们证明了 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中任何可测集 E 上的特征函数 f 满足 (i) 到 (iii). 从而易知任何非负简单函数和任何非负可测函数都满足 (i) 到 (iii). □

定理 1.6.3 (Fubini). 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可积, 则:

(i) 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^p, f(x,y)$ 作为 $y\in\mathbb{R}^q$ 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上可积.

(ii) $F(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$ 在 $x\in\mathbb{R}^p$ 上可积.

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right]dx \tag{1.9}$$

证明. 令 $f=f_+-f_-$, 则 f_+,f_- 都是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的非负可积函数. 于是利用 Tonelli 定理1.6.2即得. □

推论 1.6.4. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可积, 则

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right]dx=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^q}\left[\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx\right]dy$$

引理 1.6.5. 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f(x-y)$ 是 $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明. 对任意实数 $\alpha, E=\{f(z)>\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集. 现在

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n: f(x-y)>\alpha\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n: x-y\in E\}$$

上式右端是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 中的可测集. 从而左端亦是, 则 $f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

定义 1.6.3. 设 f,g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$, 积分 $\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy$ 存在, 则该积分作为的 x 的函数称为 f,g 的**卷积**, 记为 $f*g$.

定理 1.6.6. 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $(f * g)(x)$ 对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 有意义且是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数. 此外

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx$$

证明. 设 f, g 都非负, 此时由定理1.6.1知, $f(x-y)g(y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 故由 Tonelli 定理1.6.2,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dx \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx < \infty
\end{aligned}$$

这说明 $(f*g)(x)$ 几乎处处存在有限.

对一般情形, 只需注意 $|(f*g)(x)| \leq (|f| * |g|)(x)$. 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx < \infty$$

□

定理 1.6.7. 设 f 为可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 对每一 $\lambda > 0$, 令

$$g(\lambda) = m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) \tag{1.10}$$

则当 $1 \leq p < \infty$ 时,

$$\int_E |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} g(\lambda) d\lambda$$

证明. 令

$$F(\lambda x) = \begin{cases} 1, & |f(x)| > \lambda, \\ 0, & |f(x)| \leq \lambda. \end{cases}$$

当固定 $\lambda > 0$ 时, $F(\lambda, x)$ 作为 x 的函数是式1.10右端可测集的特征函数. 此时由 Tonelli 定

理1.6.2,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p dx &= \int_E dx \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda \\ &= \int_E dx \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} F(\lambda, x) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} d\lambda \int_E F(\lambda, x) dx \\ &= p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} g(\lambda) d\lambda\end{aligned}$$

式1.10中的函数 $g(\lambda)$ 称为 f 的**分布函数**. □