SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE ESTATÍSTICA

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Esta apostila contém uma compilação de textos de diversos autores, sendo elaborada com o objetivo exclusivo de ser um apoio didático para o aluno em sala de aula.

Profª Marina Y. Toma

BELÉM - PARÁ

2019

1. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

1.1 Modelo Matemático: determinístico ou não determinístico (probabilístico).

a) Modelo determinístico: as condições que um experimento ou o procedimento seja executado determinam o resultado do experimento. Por exemplo, as leis da física (de Ohm, de Kepler, etc).

b) Modelo não determinístico: as condições do experimento determinam somente o comportamento probabilístico do resultado possível.

Em um modelo determinístico empregamos “considerações físicas” para prever o resultado, enquanto em um modelo probabilístico empregamos a mesma espécie de considerações para especificar uma distribuição de probabilidade.

1.2 Introdução aos Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos, representado por letra maiúscula. Há três maneiras de descrever que objetos estão contidos no conjunto A:

a) Podemos fazer uma lista dos elementos de A. Por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ descreve o conjunto formado pelos inteiros positivos 1, 2, 3,4.

b) Por meio de palavras: A é formado de todos os números reais entre 0 e 1, inclusive.

c) Podemos escrever também: $A = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$; isto é, A é o conjunto de todos os valores de x, onde x é um número real entre 0 e 1, inclusive.

Os objetos que individualmente formam a coleção ou conjunto A são denominados membros ou elementos de A. Quando “a” for um elemento de A, escrevemos $a \in A$, e quando “a” não for um elemento de A escrevemos $a \notin A$.

Definimos o conjunto vazio ou nulo como o conjunto que não contenha qualquer elemento.

Definido o conjunto fundamental U considere dois conjuntos A e B, temos:

a) Ser elemento de A implique ser elemento de B, diremos que A é um subconjunto de B, e escrevemos $A \subset B$. Analogamente, $A \supset B$.

b) Dois conjuntos constituem o mesmo conjunto ($A = B$), se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. Assim, dois conjuntos serão iguais se, e somente se, eles contiverem os mesmos elementos.

c) Para todo conjunto A, temos que $\phi \subset A$.

d) Para todo conjunto A, considerado na composição de U, teremos $A \subset U$.

Combinação de Conjuntos: Sejam dois conjuntos A e B.

a) Definiremos C como a união de A e B (ou soma) como:

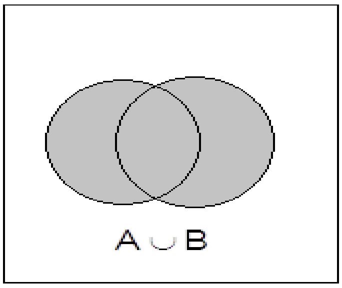
$C = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B \,(\text{ou ambos})\}$. Escrevemos $C = A \cup B$. Então, C será formado de todos os elementos que estão em A, ou em B, ou em ambos.

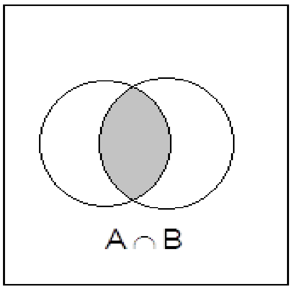
b) Definiremos D como a intersecção de A e B (ou produto de A e B) como:

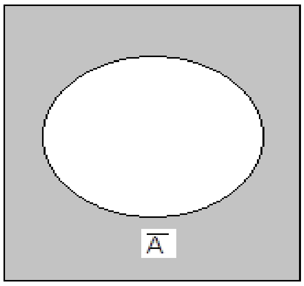
$D = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$. Escrevemos $D = A \cap B$. Então, C será formado de todos os elementos que estão em A e em B.

c) O conjunto denotado por $\overline{A}$ ou A^c constituído por todos os elementos que não estejam em A (mas que estejam no conjunto fundamental U) é denominado complemento de A. Isto é, $\overline{A} = \{x \,/\, x \notin A\}$.

Diagrama de Venn







Conjuntos Equivalentes:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) $A \cap \phi = \phi$

h) $A \cup \phi = A$

i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

j) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

k) $(A^C)^C = A$

Definição: Sejam dois conjuntos A e B. Denominamos produto cartesiano de A e B, AxB, o conjunto $\{(a, b), a \in A, b \in B\}$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados nos quais o primeiro elemento é tirado de A e o segundo de B.

Generalizando: Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem conjuntos, então:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i\}$, conjunto de todas as ênuplas ordenadas.

1.3 Experimento Aleatório (Ɛ): são aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Existem dois tipos de experimentos:

i) Determinísticos: Os resultados são sempre os mesmos e determinados pelas condições sob as quais o procedimento seja executado.

Exemplo: Ponto de ebulição da água, ponto de congelamento da água, Leis da Física.

ii) Não-Determinísticos (Probabilístico ou Aleatório): Os resultados podem variar, mesmo quando são executados sob as mesmas condições. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento em geral, conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar que chamamos ACASO.

Exemplos de Experimentos Aleatórios:

a) Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.

b) Lançar um dado e observar o número da face voltada para cima.

c) Lançar duas moedas e observar as sequências de caras e coroas obtidas.

d) Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas.

e) De um lote com 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas.

f) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor.

g) De um baralho com 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

h) Numa cidade onde 10% dos habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia.

i) Observar o tempo que certo aluno gasta para ir de ônibus, de sua casa até a escola.

1.4 ESPAÇO AMOSTRAL

Chamamos de ESPAÇO AMOSTRAL e indicamos por S, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos de Espaço Amostral

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima. S = {k, c}, onde k representa cara e c representa coroa.

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c) Lançar duas moedas e observar as sequências de caras e coroas obtidas.

S = { (k,k), (k,c), (c,k), (c,c)}

d) Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas. S = {0, 1, 2}

e) Uma moeda é lançada até que o resultado cara (k) ocorra pela primeira vez, observa-se em qual lançamento esse fato ocorre. S = {1, 2, 3, 4, ...}

1.5 EVENTO

Consideramos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é S. Chamamos de EVENTO todo subconjunto de S. Diremos que um evento A ocorre se realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a *A*. Os eventos que possuem um único elemento (A = 1) serão chamados eventos elementares.

Exemplos:

1) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Alguns eventos:

A = Ocorrência de um número ímpar.	A = {1, 3, 5}
B = Ocorrência de um número par.	B = {2, 4, 6}
C = Ocorrência de um número menor que 4.	C = {1, 2, 3}
D = Ocorrência de um número menor que 7.	D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = S
E = Ocorrência de um número maior que 7.	E = ∅

2) Uma moeda é lançada 3 vezes, e observa-se a sequência de caras (k) e coroas (c).

S = {(k, k, k); (k, k, c); (k, c, k); (c, k, k); (k, c, c); (c, k, c); (c, c, k); (c, c, c)}

Alguns eventos:

A = Ocorrência de cara no 1º lançamento.   A = {(k, k, k); (k, k, c); (k, c, k); (k, c, c)}

B = Ocorrência de exatamente uma coroa. B = {(k, k, c); (k, c, k); (c, k, k)}

COMBINAÇÕES DE EVENTOS

Se usarmos certas operações entre conjuntos (eventos), podemos combinar conjuntos (eventos), para formar novos conjuntos (eventos).

a) <u>União de dois eventos</u>: Sejam A e B dois eventos. Então, $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrem. Dizemos que $A \cup B$ é a união entre o evento A e o evento B.

b) <u>Intersecção de dois eventos</u>: Sejam A e B dois eventos. Então, $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrem simultaneamente. Dizemos que $A \cap B$ é a intersecção entre o evento A e o evento B.

Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, A e B são chamados mutuamente exclusivos, ou seja, eles não podem ocorrer juntos.

c) <u>Complementar de um evento</u>: Seja A um evento. Então A^c será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer. Dizemos que A^c é o evento complementar de A.

Exemplo: Um dado é lançado e observado o número da face de cima.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sejam os eventos:

A = Ocorrência de um número par.	$A = \{2, 4, 6\}$
B = Ocorrência de um número maior ou igual a 4.	$B = \{4, 5, 6\}$
C = Ocorrência de um número ímpar.	$C = \{1, 3, 5\}$

Então teremos:

i) Ocorrência de um número par ou maior ou igual a 4.	$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
ii) Ocorrência de um número par e maior ou igual a 4.	$A \cap B = \{4, 6\}$
iii) Ocorrência de um número par e de um número ímpar.	$A \cap C = \varnothing$
iv) Ocorrência de um número menor que 4.	$B^c = \{1, 2, 3\}$

d) <u>União de n eventos</u>: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uma sequência de eventos. Então:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, pelo menos um dos eventos A_i´s ocorrerem. Dizemos que $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

e) <u>Intersecção de n eventos</u>: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uma sequência de eventos. Então: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i´s ocorrerem simultaneamente. Note que:

$A^c \cup B)^c = A \cap B^c$	$A^c \cap B)^c = A \cup B^c$
$A \cup B^c)^c = A^c \cap B$	$A \cap B_c)^c = A^c \cup B$
$A^c \cup B^c)^c = A \cap B$	$A^c \cap B^c)^c = A \cup B$

1.6 FREQUÊNCIA RELATIVA

Num experimento aleatório, embora não saibamos qual o evento que irá ocorrer, sabemos que alguns eventos ocorrem frequentemente e outros, raramente. Desejamos então, associar aos eventos, números que deem uma indicação quantitativa da ocorrência dos mesmos, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições. Para isso vamos definir frequência relativa de um evento.

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral S finito, isto é, $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Suponhamos que o experimento seja repetido N vezes, nas mesmas condições. Seja n_i o número de vezes que ocorre o evento elementar a_i. Definimos frequência relativa do evento $\{a_i\}$ como sendo o número f_i , tal que $f_i = \frac{n_i}{N}$, $\forall_i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Por exemplo, se lançarmos um dado 100 vezes (N = 100) e observarmos o número 2 (evento 2) 18 vezes, então, a frequência relativa desse evento elementar será:

$$f_2 = \frac{n_2}{N} = \frac{18}{100} = 0{,}18.$$

A frequência relativa possui as seguintes propriedades:

a) $0 < f_i < 1 \quad \forall_i$, pois $0 < n_i / N < 1$

b) $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$ pois $n_1 / N + n_2 / N + ... + n_k / N = N/N = 1$

c) Se A é um evento de S ($A \neq \varnothing$), a frequência relativa do evento A (f_A) é o número de vezes que ocorre A, dividido por N.

d) Verifica-se experimentalmente que a frequência relativa tende a 'estabilizar' em torno de algum valor bem definido, quando o número de repetições do experimento é suficientemente grande.

1.7 NOÇÕES DE PROBABILIDADE

Probabilidade é o estudo de experimentos aleatórios ou não determinísticos. Se um dado é lançado ao ar, é certo que cairá, mas não é certo que, digamos, apareça um 6. Entretanto, suponha que repetimos esse experimento de lançar um dado; seja *s* o número de sucessos, isto é, o número de vezes em que o 6 aparece e n, o número de lançamentos. Então, observa-se, empiricamente, que a razão f = s/n, chamada de frequência relativa, tende a estabilizar-se, isto é, aproxima-se de um limite. Esta estabilidade é a base da teoria da probabilidade.

Historicamente, a teoria da probabilidade começou com o estudo de jogos de azar, como roleta e as cartas. A probabilidade p, de um evento A, foi definida assim: se A pode ocorrer de s maneiras diversas dentre um total de n maneiras igualmente prováveis, então: P= P(A) = s/n.

Por exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 "igualmente prováveis", portanto, p = 3/6 = 1/2. Essa definição clássica de probabilidade é dúbia, já que a ideia de "igualmente provável" é a mesma de “com probabilidade igual”, a qual não foi definida. O tratamento moderno da teoria da probabilidade é puramente axiomático. Isto significa que as probabilidades de nossos eventos podem ser arbitrárias, a menos que certos axiomas, enunciados abaixo, sejam satisfeitos. A teoria clássica corresponderá ao caso especial chamado de *espaços equiprováveis.*

As probabilidades são utilizadas para exprimir a chance de ocorrência de determinado evento:

i) Método Clássico: Quando os resultados são igualmente prováveis, a probabilidade de cada resultado é simplesmente uma função do número de resultados possíveis.

P(cada resultado) = 1/(nº de resultados possíveis).

Chance é apenas um método alternativo de exprimir as probabilidades. Chance e probabilidade acham-se estreitamente relacionadas.

Diferença:

A chance compara o nº de resultados favoráveis com o nº de casos não favoráveis.

$$\text{Chance} = \frac{\text{número de resultados na categoria A}}{\text{número de resultados não em A}}$$

A probabilidade compara o nº de resultados favoráveis com o nº total de resultados possíveis. $\text{Probabilidade} = \dfrac{\text{número de resultados na categoria A}}{\text{número total de resultados possíveis}}$

ii) Método Empírico: usado quando os resultados não são igualmente prováveis. Por exemplo, no caso de uma moeda não equilibrada, é claro que aparecer coroa e aparecer cara não são igualmente prováveis. Uma forma de lidar com situações como esta é obter alguns dados empíricos, numa tentativa de *estimar* as probabilidades.

Ex: Jogar 100 vezes uma moeda e obter 60 vezes cara será razoável estimar a probabilidade de cara em jogada futura, como sendo: 60/100 = 0,60.

- As probabilidades determinadas sejam pelo método clássico ou pelo empírico, dizem-se objetivas porque decorrem de fatos.
- A probabilidade subjetiva é uma avaliação pessoal do grau de viabilidade de um evento, é, portanto o resultado de um esforço para quantificar nossa crença a respeito de algo.

Ex: Qual a probabilidade de você se apaixonar na próxima semana? Que nota você receberá em sua avaliação de Cálculo das Probabilidades I? Quando se instalará uma greve de professores? Um enfermo se recuperará completamente?

Já vimos que a frequência relativa nos dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento, quando o experimento é realizado um grande número de vezes. Quando o nº de repetições do experimento é muito grande, a frequência relativa tende a se estabilizar 'próxima' a um nº. A esse número denominamos probabilidade do evento. [$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{f_A}{N}$].

Definição: Seja ε um experimento e S um espaço amostral associado a ε. A cada evento A associaremos um número real representado por P(A) e denominado probabilidade de A, que satisfaz as propriedades:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$,

2) $P(S) = 1$,

3) Se A e B forem eventos mutuamente excludentes (ou exclusivos):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4) Se A_1 , A_2 , ... , A_n forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Teorema 1: Se o evento $A = \emptyset$, então $P(A) = 0$.

Teorema 2: Se A^C for o evento complementar de A, então $P(A) = 1 - P(A^C)$.

Teorema 3: Se A e B forem dois eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Teorema 4: Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Generalizando: Sejam A_1, A_2, ... , A_n eventos quaisquer. Então:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Teorema 5: Se $A \subset B$, então: $P(A) \leq P(B)$.

2 - ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS

2.1 Espaço Amostral Finito

Nos ocuparemos unicamente de experimentos onde o espaço amostral S seja formado de um número finito de elementos. Isto é, admitiremos que S possa ser escrita como S =

$\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. A cada evento simples $\{a_i\}$ associaremos um número p_i , denominada a probabilidade de $\{a_i\}$ que satisfaça:

a) $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, ... , k$;

b) $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

2.2 Resultados Igualmente Prováveis (Verossímeis)

Se todos os k resultados possíveis forem igualmente verossímeis, segue-se cada probabilidade será $p_i = 1/k$. Assim, a condição $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$ torna-se $k\, p_i = 1$ para todo i. Disso decorre que, para qualquer evento A formado de r resultados, teremos $P(A) = r / k$.

Este método de avaliar P(A) é frequentemente anunciado da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{\text{numero total de casos favoraveis a A pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{numero total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}$$

2.3 Métodos de Enumeração

A - Regra da Multiplicação:

Suponha que o procedimento 1 possa ser realizado de n_1 maneiras e que o procedimento 2 possa ser realizado de n_2 maneiras. Suponha-se, também, que cada maneira de realizar 1 possa ser seguida por qualquer daquelas para realizar 2. Então, o procedimento formado por 1 seguido de 2 poderá ser realizado de $n_1 \times n_2$ maneiras.

Obs: Se existir k procedimentos e o i-ésimo procedimento pode ser executado de n_i maneiras, i = 1, 2, ... , k, então, o procedimento formado por 1, seguido por 2, ... , seguido por k, poderá ser executado de $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ maneiras.

Ex.: uma peça manufaturada deve passar por três etapas de controle. Em cada etapa, a peça é inspecionada para determinada característica e marcada adequadamente. Na primeira etapa, três classificações são possíveis, e nas últimas duas etapas quatro classificações são possíveis. Assim, existem 3 x 4 x 4 = 48 maneiras pelas quais uma peça pode ser marcada.

B - Regra da Adição:

Suponha que o procedimento 1 possa ser realizado de n_1 maneiras. Admita-se que o procedimento possa ser realizado de n_2 maneiras. Além disso, suponha que não seja possível que ambos os procedimentos 1 e 2 sejam realizados em conjunto. Então, o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou 1 ou 2 será $n_1 + n_2$.

Obs.: Se existem k procedimentos e o i-ésimo procedimento puder ser executado de n_i maneiras, i = 1, 2, ... , k, então, o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou o procedimento 1, ou o procedimento 2, ou ... , ou o procedimento k, é dado por $n_1+n_2+ ...+n_k$, supondo-se que dois quaisquer deles não se possam realizar conjuntamente.

Ex.: Suponha-se que para realizar uma viagem podemos escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existem três rodovias e duas ferrovias, então existirão 3 + 2 = 5 caminhos disponíveis para a viagem.

C - Permutações e Arranjos:

a) Permutar n objetos diferentes equivale a colocá-los dentro de uma caixa com n compartimentos, em alguma ordenação:

1	2	.	.	.	n

O primeiro compartimento pode ser ocupado por qualquer uma das n maneiras, o segundo por qualquer uma das (n - 1) maneiras, ... , e o último apenas por uma maneira. Portanto, aplicando-se a regra da multiplicação, a caixa poderá ser carregada de n.(n - 1).(n - 2) ...1 maneiras.

Definição: Sendo n um número inteiro positivo, definiremos n! = n (n -1) (n -2) ...1 e denominamos fatorial de n. Também definimos 0! = 1. Assim, o número de permutações de n objetos diferentes é dado por $_nP_n = n!$

b) Considere-se n objetos diferentes. Agora queremos escolher k desses objetos, $0 \leq k \leq n$ e permutar os escolhidos. Denotaremos o nº de maneiras de fazer isso (arranjos) por $_nA_k$. Pelo esquema acima, paramos após o compartimento de ordem k ter sido ocupado. Pela regra da multiplicação teremos: n(n -1)...(n - k + 1) maneiras. Notação matricial: $_nA_k = n!/(n -k)!$

D - Combinações:

Considere-se n objetos diferentes. Agora o objetivo é contar o número de maneiras de escolher k desses objetos sem considerarmos a ordem.

O número de maneiras de escolher k objetos dentre n, e permutá-los é n!/(n - k)!. Seja C o número de maneiras de escolher k dentre os n, não considerando a ordem. Observe-se que, uma vez que k objetos tenham sido escolhidos, existirão k! maneiras de permutá-los. Aplicando a regra da multiplicação, juntamente com esse resultado, obtemos:

$Ck! = n!(n-k)!$ Portanto, o número de maneiras de escolher k dentre n objetos diferentes, não considerando a ordem, é dada por:

$C = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$ somente para n inteiro positivo e k um nº inteiro tal que $0 \leq k \leq n$.

Obs.: a) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ b) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$

Ex.: a) Dentre 8 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas?

b) Um grupo de 8 pessoas é formado por 5 homens e 3 mulheres. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser constituídas, incluindo exatamente 2 homens?

Generalização: Suponha que temos N peças. Se escolhermos ao acaso n delas, sem reposição, teremos $\dbinom{N}{n}$ diferentes amostras possíveis, todas com a mesma probabilidade de serem escolhidas. Se as N peças forem formadas por tipo A e k_2 do tipo B (com $k_1 + k_2 = N$), então, a probabilidade de que as n peças sejam exatamente s_1 do tipo A e $(n-s_1)$ do tipo B será dada por:

$$P(X = s_1) = \frac{\dbinom{k_1}{s_1}\dbinom{k_2}{n-s_1}}{\dbinom{N}{n}}$$ (denominada probabilidade hipergeométrica).

3. PROBABILIDADE CONDICIONADA E INDEPENDÊNCIA

3.1 Probabilidade Condicionada

Definição: Sejam A e B dois eventos associados ao experimento ε. Definimos P(A/B), a probabilidade condicionada do evento A, quando B tiver ocorrido, como:

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, desde que P(B) > 0.

Analogamente, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, desde que P(A) > 0.

Propriedades:

1) $0 \leq P(A/B) \leq 1$;

2) P(S /A) = 1;

3) $P(B_1 \cup B_2 / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A)$ se $B_1 \cap B_1 = \varnothing$;

4) $P(B_1 \cup B_2 \cup ... / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A) + ...$ se $B_i \cap B_k = \varnothing$ para $i \neq k$.

Temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicionada P(B/A):

a) Diretamente, pela consideração da probabilidade de B em relação ao espaço amostral reduzido A.

b) Pela definição, onde $P(A \cap B)$ e P(A) são calculados em relação ao espaço amostral S.

Consequência: $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$ ou, equivalentemente, $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$ que é conhecido como o <u>teorema da multiplicação</u>.

Definição: Dizemos que $B_1, B_2, ..., B_k$, representam uma partição do espaço amostral S, quando: a) $B_i \cap B_k = \emptyset$ para $i \neq k$;

b) $\cup B_i = S$;

c) $P(B_i) > 0$ para todo i.

Isto é: quando o experimento é realizado um, e somente um, dos eventos B_i ocorre.

Considere A um evento qualquer referente a S, e $B_1, B_2, ..., B_k$ uma partição de S. Portanto podemos escrever $A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup ... \cup A \cap B_k$. Alguns dos conjuntos $A \cap B_i$ podem ser vazios e, todos os eventos são dois a dois mutuamente excludentes. Portanto, aplicando-se a propriedade da adição de eventos mutuamente excludentes teremos: $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$. Como cada termo $P(A \cap B_i)$ pode ser expresso na forma $P(A/B_i) \times P(B_i)$, obtemos o teorema da probabilidade total:

$$P(A) = P(A/B_1) \times P(B_1) + P(A/B_2) \times P(B_2) + ... + P(A/B_k) \times P(B_k)$$

3.2 Teorema de Bayes: Considere $B_1, B_2, ..., B_k$ uma partição de S e seja A um evento associado a ε. Aplicando-se a definição de probabilidade condicionada poderemos escrever: $$P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i) \times P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A/B_j) \times P(B_j)}$$ i = 1, 2, ... , k.

3.3 Eventos Independentes

Definição: Os eventos A e B serão independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Definição: Os eventos A, B e C são mutuamente independentes se, e somente se, todas as condições forem válidas:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\quad$ $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ $\quad$ $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$