UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO

Discente: **Luiz Jordany de Sousa Silva**
Matrícula: **202104940005**
Curso: **Bacharelado em Ciência da Computação**

Disciplina: **Matemática Concreta**

Código: **EN01211**

Carga Horária: **68h**

Professor: **Renato Hidaka Torres**

SIAPE: **1269902**

Lista 3

1- Para cada recorrência, encontre a fórmula fechada a partir do método de expansão e conjectura:

a) $T(0) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + n$ para $n \geq 1$

1º Passo: Expansão

- Para K=1, temos que:

$$T(n) = T(n-1) + n$$

- Para K=2, temos que:

$$T(n) = [T(n-1-1) + n-1] + n$$
$$T(n) = T(n-2) + n-1 + n$$

- Para K=3, temos que:

$$T(n) = [T(n-2-1) + n-2] + n-1 + n$$
$$T(n) = T(n-3) + n-2 + n-1 + n$$

2º Passo: Hipótese

$$T(n) = T(n-K) + \sum_{i=0}^{K-1} n-i$$

- Pelo passo base, temos que:

$$n-K = 0$$
$$n = K$$

- Logo,

$$T(n) = T(n-n) + \sum_{i=0}^{n-1} n-i$$

- Pela associatividade, temos que

$$T(n) = T(0) + \sum_{i=0}^{n-1} n - \sum_{i=0}^{n-1} i$$

- Pela decomposição, temos que

$$T(n) = 1 + n\sum_{i=0}^{n-1} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} i$$
$$T(n) = 1 + n \cdot (n-1-0+1) - \sum_{i=0}^{n-1} i$$

• Pela comutatividade, temos que

$$T(n) = 1 + n \cdot n - \sum_{i=1}^{n} i - 1$$

• Pela associatividade, temos que

$$T(n) = 1 + n^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$T(n) = 1 + n^2 - \frac{n.(n+1)}{2} + n$$

$$T(n) = 1 + n^2 - \frac{n^2 - n}{2} + n$$

$$T(n) = \frac{2 + 2n^2 - n^2 - n + 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

3º Passo:

$$T(n+1) = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2}$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = T(n+1-1) + n+1$$

$$T(n+1) = T(n) + n+1$$

$$T(n+1) = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1$$

$$T(n+1) = \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2}$$

$$T(n+1) = \frac{n^2 + 3n + 4}{2}$$

c.q.d.

b) $T(1) = 1$ e $T(n) = 2T(n-1) + 1$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para $K = 1$, temos que

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

• Para $K = 2$, temos que

$$T(n) = 2.[2T(n-1-1) + 1] + 1$$

$$T(n) = 4T(n-2) + 2 + 1$$

• Para $K = 3$, temos que

$$T(n) = 4[2T(n-2-1) + 1] + 2 + 1$$

$$T(n) = 8T(n-3) + 4 + 2 + 1$$

2º Passo: Hipótese

• Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 2^K T(n-K) + \sum_{i=0}^{K-1} 2^i$$

• Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 1$$

$$K = n - 1$$

• Logo,

$$T(n) = 2^{n-1}\, T(n-(n-1)) + \sum_{i=0}^{n-1-1} 2^i$$

$$T(n) = 2^{n-1}\, T(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i$$

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i - (2^{n-1} + 2^{n-2})$$

$$T(n) = \cancel{2^{n-1}} + 2^{n+1} - 1 - \cancel{2^{n-1}} + 2^{n-2}$$

$$T(n) = 2 \cdot 2^n - 1 + \frac{2^n}{4}$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 + \frac{2^{n+1}}{4}$$

$$T(n+1) = 4 \cdot 2^n - 1 + \frac{2^n}{2}$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(n+1) = 2T(n+1-1) + 1$$

$$T(n+1) = 2T(n) + 1$$

$$T(n+1) = 2 \cdot \left(2 \cdot 2^n - 1 + \frac{2^n}{4}\right) + 1$$

$$T(n+1) = 4 \cdot 2^n - 2 + \frac{2^n}{2} + 1$$

$$T(n+1) = 4 \cdot 2^n - 1 + \frac{2^n}{2}$$

c.q.d.

c) $T(0) = 1$ e $T(n) = 3T(n-1)$ para $n \geq 1$

1º Passo: Expansão

• Para $K=1$, temos que:

$$T(n) = 3T(n-1)$$

• Para $K=2$, temos que

$$T(n) = 3 \cdot [3T(n-1-1)]$$

$$T(n) = 9T(n-2)$$

• Para $K=3$, temos que

$$T(n) = 9[3T(n-1-2)]$$

$$T(n) = 27T(n-3)$$

2º Passo: Hipótese

• Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 3^K T(n-K)$$

• Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 0$$

$$n = K$$

• Logo:

$$T(n) = 3^n T(n-n)$$

$$T(n) = 3^n$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 3^{n+1} = 3 . 3^n$$

- Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = 3T(n+1-1)$$
$$T(n+1) = 3T(n)$$
$$T(n+1) = 3 . 3^n$$

c.q.d.

d) $T(1) = 0$ e $T(n) = T(n-1) + n - 1$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

- Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = T(n-1) + n - 1$$

- Para $K = 2$, temos que:

$$T(n) = [T(n-1-1) + (n-1) - 1] + n - 1$$
$$T(n) = T(n-2) + n - 2 + n - 1$$

- Para $K = 3$, temos que:

$$T(n) = [T(n-2-1) + (n-2) - 1] + n - 2 + n - 1$$
$$T(n) = T(n-3) + n - 3 + n - 2 + n - 1$$

2º Passo: Hipótese

- Conjecturando, temos que:

$$T(n) = T(n-K) + \sum_{i=1}^{n} n - i$$

- Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 1$$
$$K = n - 1$$

- Logo,

$$T(n) = T(n-(n-1)) + \sum_{i=1}^{n} n - i$$

- Pela associatividade, temos que:

$$T(n) = T(1) + \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i$$

- Pela distributividade, temos que:

$$T(n) = 0 + n \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{n.(n+1)}{2}$$
$$T(n) = n . n - \frac{n^2 - n}{2}$$
$$T(n) = n^2 - \frac{n^2 - n}{2}$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = (n+1)^2 - \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}$$
$$T(n+1) = n^2 + 2n + 1 - \frac{n^2 - 2n - 1 - n - 1}{2}$$
$$T(n+1) = n^2 + 2n + 1 - \frac{n^2 - 3n - 2}{2}$$
$$T(n+1) = \frac{2n^2 + 4n + 2 - n^2 - 3n - 2}{2}$$

$$T(n+1) = \frac{n^2+n}{2}$$

- Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = T(n+1-1) + (n+1) - 1$$
$$T(n+1) = T(n) + n$$
$$T(n+1) = \frac{n^2-n}{2} + n$$
$$T(n+1) = \frac{2n^2 - n^2 - n + 2n}{2}$$
$$T(n+1) = \frac{n^2+n}{2} \quad \text{c.q.d.}$$

e) $T(0) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + 2^n$ para $n \geq 1$

1º Passo: Expansão

- Para $K=1$, temos que:

$$T(n) = T(n-1) + 2^n$$

- Para $K=2$, temos que

$$T(n) = [T(n-1-1) + 2^{n-1}] + 2^n$$
$$T(n) = T(n-2) + 2^{n-1} + 2^n$$

- Para $K=3$, temos que

$$T(n) = [T(n-2-1) + 2^{n-2}] + 2^{n-1} + 2^n$$
$$T(n) = T(n-3) + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n$$

2º Passo: Hipótese

- Conjecturando, temos que:

$$T(n) = T(n-K) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i}$$

- Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 0$$
$$K = n$$

- Logo,

$$T(n) = T(n-n) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i}$$
$$T(n) = T(0) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i}$$
$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^n \cdot 1/2^i$$

- Pela distributividade, temos que:

$$T(n) = 1 + 2^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1/2^i$$

- Pela decomposição, temos que:

$$T(n) = 1 + 2^n \cdot \left(\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} \right)$$

$$T(n) = 1 + 2^n \cdot \left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \right) - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$T(n) = 1 + 2^n + 2^n \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) - \frac{2^n}{2^n}$$

- Sabemos que a soma dos n termos de uma P.G. é dado por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

- Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+2}}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = -2 \left(\frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+2}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{-2^2 + 2^{n+2}}{2^{n+2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\cancel{2^2}(-1 + 2^n)}{\cancel{2^2} \cdot 2^n} = \frac{-1 + 2^n}{2^n}$$

- Portanto,

$$T(n) = \cancel{1} + 2^n + \cancel{2^n} \left(\frac{-1 + 2^n}{\cancel{2^n}} \right) - \cancel{1}$$

$$T(n) = 2^n - 1 + 2^n$$

$$T(n) = 2^{n+1} - 1$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 2^{n+1+1} - 1$$

$$T(n+1) = 2^{n+2} - 1$$

- Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = T(n+1-1) + 2^{n+1}$$

$$T(n+1) = T(n) + 2^{n+1}$$

$$T(n+1) = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$T(n+1) = 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$

$$T(n+1) = 2^{n+2} - 1 \quad \text{c.q.d.}$$

f) $T(1) = 2$ e $T(n) = 2T(n-1)$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

- Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = 2T(n-1)$$

- Para $K = 2$, temos que:

$$T(n) = 2.[2T(n-1-1)]$$
$$T(n) = 4T(n-2)$$

- Para $K = 3$, temos que:

$$T(n) = 4[2T(n-2-1)]$$
$$T(n) = 8T(n-3)$$

2º Passo: Hipótese

- Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 2^K T(n-K)$$

- Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 1$$
$$K = n - 1$$

- Logo,

$$T(n) = 2^{n-1} T(n-(n-1))$$
$$T(n) = \frac{2^n}{2} T(1)$$
$$T(n) = \frac{2^n}{\cancel{2}} . \cancel{2}$$
$$T(n) = 2^n$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 2^{n+1}$$

- Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = 2T(n+1-1)$$
$$T(n+1) = 2T(n)$$
$$T(n+1) = 2.2^n$$
$$T(n+1) = 2^{n+1} \quad \text{c.q.d.}$$

g) $T(1) = 3$ e $T(n) = 3T(n-1) + 4$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

- Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = 3T(n-1) + 4$$

- Para $K = 2$, temos que:

$$T(n) = 3.[3T(n-1-1) + 4] + 4$$
$$T(n) = 9T(n-2) + 12 + 4$$

- Para $K = 3$, temos que:

$$T(n) = 9[3T(n-2-1) + 4] + 12 + 4$$
$$T(n) = 27T(n-3) + 36 + 12 + 4$$

2º Passo: Hipótese

- Conjecturando, temos que

$$T(n) = 3^K T(n-K) + \sum_{i=0}^{K-1} 4.3^i$$

• Pelo passo base, temos que

$$n - K = 1$$
$$K = n - 1$$

• Logo,

$$T(n) = 3^{n-1}\, T(n-(n-1)) + \sum_{i=0}^{n-1-1} 4 \cdot 3^i$$
$$T(n) = \frac{3^n}{3} \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 4 \cdot 3^i$$

• Pela distributividade, temos que:

$$T(n) = \frac{3^n}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 3^i$$
$$T(n) = 3^n + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 3^i$$

• Pela decomposição, temos que:

$$T(n) = 3^n + 4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{0} 3^i + \sum_{i=1}^{n-2} 3^i \right)$$
$$T(n) = 3^n + 4 + 4 \sum_{i=1}^{n-2} 3^i$$

• Sabemos que a soma dos n elementos de uma P.G. é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

• Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-2} 3^i = S_{n-2} = \frac{3 \cdot (3^{n-2} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{n-1} - 3}{2}$$

• Portanto,

$$T(n) = 3^n + 4 + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \left(\frac{3^{n-1} - 3}{\cancel{2}} \right)$$
$$T(n) = 3^n + 4 + 2 \cdot (3^{n-1} - 3)$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 3^{n+1} + 4 + 2 \cdot (3^{n+1-1} - 3)$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 4 + 2 \cdot (3^n - 3)$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 4 + 2 \cdot 3^n - 6$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 2 \cdot 3^n - 2$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(n+1) = 3T(n+1-1) + 4$$
$$T(n+1) = 3T(n) + 4$$
$$T(n+1) = 3 \cdot (3^n + 4 + 2 \cdot (3^{n-1} - 3)) + 4$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 12 + 6 \cdot (3^{n-1} - 3) + 4$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 16 + 6 \cdot 3^{n-1} - 18$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} - 2$$
$$T(n+1) = 3^{n+1} + 2 \cdot 3^n - 2$$

c.q.d.

h) $T(1) = 3$ e $T(n) = T(n-1) + 3$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para K = 1, temos que:

$$T(n) = T(n-1) + 3$$

• Para $K=2$, temos que:

$$T(n) = [T(n-1-1) + 3] + 3$$
$$T(n) = T(n-2) + 6$$

• Para $K = 3$, temos que

$$T(n) = [T(n-2-1) + 3] + 6$$
$$T(n) = T(n-3) + 9$$

2º Passo: Hipótese

• Conjecturando, temos que:

$$T(n) = T(n-K) + K.3$$

• Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 1$$
$$K = n - 1$$

• Logo,

$$T(n) = T(n-(n-1)) + (n-1).3$$
$$T(n) = T(1) + 3n - 3$$
$$T(n) = 3 + 3n - 3$$
$$T(n) = 3n$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 3.(n+1) = 3n+3$$

• Pela recarrência, temos que

$$T(n+1) = T(n+1-1) + 3$$
$$T(n+1) = T(n) + 3$$
$$T(n+1) = 3n + 3 \quad \text{c.q.d.}$$

i) $T(1) = 7$ e $T(n) = 2T(n-1) + 1$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

• Para $K = 2$, temos que:

$$T(n) = 2.[2T(n-1-1) + 1] + 1$$
$$T(n) = 4T(n-2) + 2 + 1$$

• Para $K = 3$, temos que:

$$T(n) = 4.[2T(n-2-1) + 1] + 2 + 1$$
$$T(n) = 8T(n-3) + 4 + 2 + 1$$

2º Passo: Hipótese

• Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 2^K T(n-K) + \sum_{i=0}^{K-1} 2^i$$

• Pelo passo base, temos que:

$$n - K = 1$$
$$K = n - 1$$

• Logo,

$$T(n) = 2^{n-1} T(n-(n-1)) + \sum_{i=0}^{n-1-1} 2^i$$

$$T(n) = \frac{2^n}{2} T(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i$$

$$T(n) = \frac{7 \cdot 2^n}{2} + \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i \right) - 2^n - 2^{n-1}$$

$$T(n) = \frac{7 \cdot 2^n}{2} + 2^{n+1} - 1 - 2^n - \frac{2^n}{2}$$

$$T(n) = \frac{7 \cdot 2^n}{2} + 2 \cdot 2^n - 1 - 2^n - \frac{2^n}{2}$$

$$T(n) = \frac{7 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n - 2 - 2 \cdot 2^n - 2^n}{2}$$

$$T(n) = \frac{8 \cdot 2^n - 2}{2}$$

$$T(n) = 4 \cdot 2^n - 1$$

3º Passo: Prova

$$T(n+1) = 4 \cdot 2^{n+1} - 1$$
$$T(n+1) = 8 \cdot 2^n - 1$$

- Pela recorrência, temos que

$$T(n+1) = 2T(n+1-1) + 1$$
$$T(n+1) = 2[4 \cdot 2^n - 1] + 1$$
$$T(n+1) = 8 \cdot 2^n - 2 + 1$$
$$T(n+1) = 8 \cdot 2^n - 1 \quad \text{c.q.d.}$$

j) $T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ $\longrightarrow T(n) = 2T(n/2) + n$

1º Passo: Expansão

- Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

- Para $K = 2$, temos que

$$T(n) = 2\left[2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n + n$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n$$

- Para $K = 3$, temos que

$$T(n) = 4 \cdot \left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right] + 2n$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + n + 2n$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n$$

2º Passo: Hipótese

- Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + K \cdot n$$

• Pelo passo base, temos que:

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$$n = 2^k$$

$$\log_2 n = \log_2 2^k$$

$$k = \log_2 n$$

• Logo,

$$T(n) = n\,T\left(\frac{n}{n}\right) + n.\log_2 n$$

$$T(n) = n.T(1) + n.\log_2 n$$

$$T(n) = 7n + n.\log_2 n$$

3º Passo: Prova

$$T(2n) = 7.2n + 2n.\log_2 2n$$

$$T(2n) = 14n + 2n(\log_2 2 + \log_2 n)$$

$$T(2n) = 14n + 2n(1 + \log_2 n)$$

$$T(2n) = 14n + 2n + 2n\log_2 n$$

$$T(2n) = 16n + 2n\log_2 n$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(2n) = 2T(2n/2) + 2n$$

$$T(2n) = 2T(n) + 2n$$

$$T(2n) = 2.(7n + n.\log_2 n) + 2n$$

$$T(2n) = 14n + 2n.\log_2(n) + 2n$$

$$T(2n) = 16n + 2n\log_2 n$$

c.q.d.

k) $T(1) = 1$ e $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para $k = 1$, temos que:

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

• Para $k = 2$, temos que:

$$T(n) = 8.\left[8T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n^2}{4}\right] + n^2$$

$$T(n) = 64T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n^2 + n^2 = 64T\left(\frac{n}{4}\right) + 3n^2$$

• Para $k = 3$, temos que:

$$T(n) = 64.\left[8.T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n^2}{16}\right] + 2n^2 + n^2$$

$$T(n) = 512T\left(\frac{n}{8}\right) + 4n^2 + 2n^2 + n^2 = 512T\left(\frac{n}{8}\right) + 7n^2$$

2º Passo: Hipótese

- Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 8^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + (2^K - 1).n^2$$

- Pelo passo base, temos que:

$$\frac{n}{2^K} = 1$$

$$n = 2^K$$

- Logo,

$$T(n) = (2^K)^3\, T\left(\frac{n}{n}\right) + (2^K - 1).n^2$$

$$T(n) = n^3.T(1) + (n-1).n^2$$

$$T(n) = n^3.1 + n^3 - n^2$$

$$T(n) = 2n^3 - n^2$$

3º Passo: Prova

$$T(2n) = 2.(2n)^3 - (2n)^2$$

$$T(2n) = 16n^3 - 4n^2$$

- Pela reconrência, temos que:

$$T(2n) = 8T\left(\frac{2n}{2}\right) + (2n)^2$$

$$T(2n) = 8.T(n) + 4n^2$$

$$T(2n) = 8[2n^3 - n^2] + 4n^2$$

$$T(2n) = 16n^3 - 8n^2 + 4n^2$$

$$T(2n) = 16n^3 - 4n^2 \quad \text{c.q.d.}$$

I) $T(1) = 1$ e $T(n) = 2T(n/4) + 1$ para $n \geq 2$

- 1º Passo: Expansão
  - Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = 2T(n/4) + 1$$

  - Para $K = 2$, temos que:

$$T(n) = 2.[2T(n/16) + 1] + 1$$

$$T(n) = 4T(n/16) + 2 + 1 = 4T(n/16) + 3$$

  - Para $K = 3$, temos que:

$$T(n) = 4[2T(n/64) + 1] + 2 + 1$$

$$T(n) = 8T(n/64) + 4 + 2 + 1 = 8T(n/64) + 7$$

- 2º Passo: Hipotése
  - Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 2^K\, T(n/4^K) + 2^K - 1$$

  - Pelo passo base, temos que:

$$\frac{n}{4^K} = 1$$

$$n = 4^K$$

$$\log_2 n = \log_2 2^{2k}$$
$$\log_2 n = 2k$$
$$k = \frac{1}{2} \cdot \log_2 n$$

• Logo,

$$T(n) = 2^{\frac{1}{2} \cdot \log_2 n}\, T\left(\frac{n}{n}\right) + 2^{\frac{1}{2} \cdot \log_2 n} - 1$$
$$T(n) = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot T(1) + \left(2^{\log_2 n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$
$$T(n) = n^{\frac{1}{2}} \cdot 1 + n^{\frac{1}{2}} - 1$$
$$T(n) = \sqrt{n} + \sqrt{n} - 1$$
$$T(n) = 2\sqrt{n} - 1$$

3º Passo: Prova

$$T(4n) = 2\sqrt{4n} - 1 = 4\sqrt{n} - 1$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(4n) = 2T\left(\frac{4n}{4}\right) + 1$$
$$T(4n) = 2T(n) + 1$$
$$T(4n) = 2 \cdot (2\sqrt{n} - 1) + 1$$
$$T(4n) = 4\sqrt{n} - 2 + 1$$
$$T(4n) = 4\sqrt{n} - 1$$

c.q.d.

m) $T(1) = 1$ e $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para $k = 1$, temos que:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

• Para $k = 2$, temos que:

$$T(n) = 2 \cdot \left[2T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n^2}{16}\right] + n^2$$
$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{2n^2}{16} + n^2$$
$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n^2}{8} + n^2$$

• Para $k = 3$, temos que:

$$T(n) = 4 \cdot \left[2T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n^2}{256}\right] + \frac{n^2}{8} + n^2$$
$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{4n^2}{256} + \frac{n^2}{8} + n^2$$
$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n^2}{64} + \frac{n^2}{8} + n^2$$

2º Passo: Hipótese

$$T(n) = 2^k\, T\left(\frac{n}{4^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^2}{8^i}$$

• Pela distributividade, temos que:

$$T(n) = 2^K \cdot T\left(\frac{n}{4^K}\right) + n^2 \cdot \sum_{i=0}^{K-1} \left(\frac{1}{8}\right)^i$$

• Pela decomposição, temos que:

$$T(n) = 2^K \cdot T\left(\frac{n}{4^K}\right) + n^2 \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{1}{8}\right)^i\right)$$

• Pela soma dos n termos de uma P.G. temos que:

$$T(n) = 2^K \cdot T\left(\frac{n}{4^K}\right) + n^2 + n^2 \cdot \left[\frac{1/8 \cdot ((1/8)^{K-1} - 1)}{1/8 - 1}\right]$$

$$T(n) = 2^K \cdot T\left(\frac{n}{4^K}\right) + n^2 + \frac{\frac{n^2}{8^K} - \frac{n^2}{8}}{-\frac{7}{8}}$$

$$T(n) = 2^K \cdot T\left(\frac{n}{4^K}\right) + n^2 + \left(\frac{n^2}{8^K} - \frac{n^2}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$$

$$T(n) = 2^K \cdot T\left(\frac{n}{4^K}\right) + n^2 - \frac{8n^2}{7 \cdot (2^K)^3} + \frac{n^2}{7}$$

• Pelo passo base, temos que:

$$\frac{n}{4^K} = 1$$

$$\boxed{n = 4^K}$$

$$\log_2 n = \log_2 4^K$$

$$\log_2 n = 2K$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} \log_2 n = \log_2 n^{1/2} = \log_2 \sqrt{n}}$$

• Logo,

$$T(n) = 2^{\log_2 \sqrt{n}} \cdot T\left(\frac{n}{n}\right) + n^2 - \frac{8n^2}{7 \cdot (2^{\log_2 \sqrt{n}})^3} + \frac{n^2}{7}$$

$$T(n) = \sqrt{n} \cdot T(1) + n^2 - \frac{8n^2}{7 \cdot n\sqrt{n}} + \frac{n^2}{7}$$

$$T(n) = \sqrt{n} + n^2 - \frac{8n^2}{7n\sqrt{n}} + \frac{n^2}{7}$$

$$T(n) = \frac{49n^2 + 49n^3\sqrt{n} - 56n^2 + 7n^3\sqrt{n}}{49n\sqrt{n}}$$

$$T(n) = \frac{56n^3\sqrt{n} - 7n^2}{49n\sqrt{n}}$$

3º Passo: Prova

$$T(4n) = \frac{3584n^3\sqrt{4n} - 7 \cdot 16n^2}{49 \cdot (4n) \cdot \sqrt{4n}}$$

$$T(4n) = \frac{7168n^3\sqrt{n} - 112n^2}{392n\sqrt{n}}$$

$$T(4n) = \frac{896n^3\sqrt{n} - 14n^2}{49n\sqrt{n}}$$

• Pela recorrência, temos que

$$T(4n) = 2\,T\left(\frac{\cancel{4}n}{\cancel{4}}\right) + (4n)^2$$

$$T(4n) = 2.\left[\frac{56n^3\sqrt{n} - 7n^2}{49n\sqrt{n}}\right] + 16n^2$$

$$T(4n) = \frac{112n^3\sqrt{n} - 14n^2}{49n\sqrt{n}} + 16n^2$$

$$T(4n) = \frac{112n^3\sqrt{n} - 14n^2 + 784n^3\sqrt{n}}{49n\sqrt{n}}$$

$$T(4n) = \frac{896n^3\sqrt{n} - 14n^2}{49n\sqrt{n}}$$

c.q.d.

n) $T(1) = 1$ e $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para $K = 1$, temos que:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

• Para $K = 2$, temos que:

$$T(n) = \left[T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right] + 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2$$

• Para $K = 3$, temos que:

$$T(n) = \left[T\left(\frac{n}{8}\right) + 1\right] + 2$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{8}\right) + 3$$

2º Passo: Hipótese

• Conjecturando, temos que:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^K}\right) + K$$

• Pelo passo base, temos que:

$$\frac{n}{2^K} = 1$$

$$n = 2^K$$

$$\log_2 n = \log_2 2^K$$

$$\boxed{\log_2 n = K}$$

• Logo,

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + \log_2 n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{n}\right) + \log_2 n$$

$$T(n) = T(1) + \log_2 n$$

$$T(n) = 1 + \log_2 n$$

3º Passo: Prova

$$T(2n) = 1 + \log_2 2n$$
$$T(2n) = 1 + \log_2 2 + \log_2 n$$

$$T(2n) = 1 + 1 + \log_2 n$$
$$T(2n) = 2 + \log_2 n$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(2n) = T\left(\frac{2n}{2}\right) + 1$$

$$T(2n) = T(n) + 1$$
$$T(2n) = 1 + \log_2 n + 1$$
$$T(2n) = 2 + \log_2 n$$

c.q.d.

o) $T(1) = 1$ e $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^4$ para $n \geq 2$

1º Passo: Expansão

• Para $K=1$, temos que:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^4$$

• Para $K=2$, temos que:

$$T(n) = 2.\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n^4}{16}\right] + n^4$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n^4}{8} + n^4$$

• Para $K=3$, temos que

$$T(n) = 4.\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n^4}{256}\right] + \frac{n^4}{8} + n^4$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n^4}{64} + \frac{n^4}{8} + n^4$$

2º Passo: Hipótese

• Conjecturando, temos que:

$$T(n) = 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \sum_{i=0}^{K-1} n^4/8^i$$

• Pela distributividade, temos que:

$$T(n) = 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 . \sum_{i=0}^{K-1} \left(1/8\right)^i$$

• Pela decomposição, temos que

$$T(n) = 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 . \left(1 + \sum_{i=1}^{K-1} \left(1/8\right)^i\right)$$

$$T(n) = 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 + n^4 \sum_{i=1}^{K-1} \left(1/8\right)^i$$

• Pela soma dos n termos de uma P.G., temos que

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 + n^4 \cdot \left(\frac{1/8 \cdot ((1/8)^{K-1} - 1)}{1/8 - 1}\right)$$

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 + \frac{\frac{n^4}{8^K} - \frac{n^4}{8}}{\frac{-7}{8}}$$

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 + \left(\frac{n^4}{8^K} - \frac{n^4}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$$

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + n^4 - \frac{8n^4}{7.((2^K)^3)} + \frac{n^4}{7}$$

• Pelo passo base, temos que:

$$\frac{n}{2^K} = 1$$

$$\boxed{n = 2^K}$$

• Logo

$$T(n) = n\, T\left(\frac{n}{n}\right) + n^4 - \frac{8n^4}{7.\, n^3} + \frac{n^4}{7}$$

$$T(n) = n.\, 1 + n^4 - \frac{8n^4}{7n^3} + \frac{n^4}{7}$$

$$T(n) = n + n^4 - \frac{8n^4}{7n^3} + \frac{n^4}{7}$$

$$T(n) = \frac{49n^4 + 49n^7 - 56n^4 + 7n^7}{49n^3}$$

$$T(n) = \frac{56n^7 - 7n^4}{49n^3}$$

3º Passo: Prova

$$T(2n) = \frac{56.(2n)^7 - 7(2n)^4}{49(2n)^3}$$

$$T(2n) = \frac{7168n^7 - 112n^4}{392n^3} = \frac{896n^7 - 14n^4}{49n^3}$$

• Pela recorrência, temos que:

$$T(2n) = 2 \cdot T\left(\frac{2n}{2}\right) + (2n)^4$$

$$T(2n) = 2 \cdot T(n) + 16n^4$$

$$T(2n) = 2 \cdot \left(\frac{56n^7 - 7n^4}{49n^3}\right) + 16n^4$$

$$T(2n) = \frac{112n^7 - 14n^4}{49n^3} + 16n^4$$

$$T(2n) = \frac{112n^7 - 14n^4 + 784n^7}{49n^3}$$

$$T(2n) = \frac{896n^7 - 14n^4}{49n^3}$$

c.q.d.