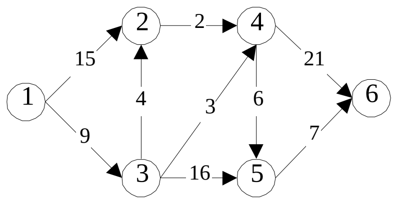
Capítulo 6

Exercícios de Caminho Mínimo Enunciados

Problema 1

Considere a seguinte rede:



(a) Usando o algoritmo de Dijkstra, determine a distância mínima do nó 1 ao nó 6 e indique o respectivo caminho.

(b) Pode, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), dizer qual é a distância mínima do nó 1 ao nó 4? Justifique.

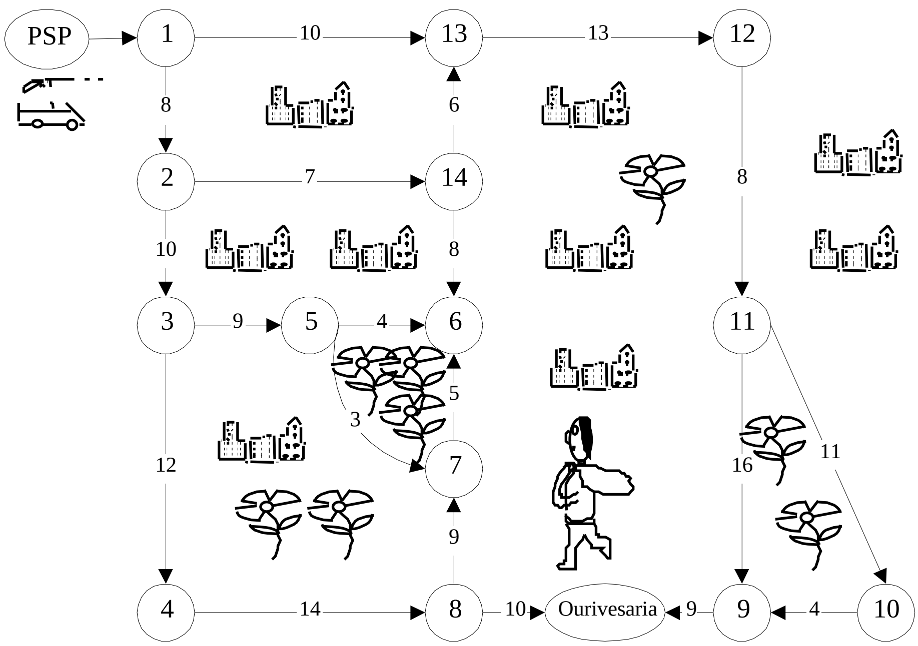
(c) Poderia, nas mesmas circunstâncias, indicar qual a distância mínima entre os nós 2 e 6? Justifique.

Problema 2

A esquadra da PSP de Cedofeita (Porto) recebeu um pedido muito urgente para intervir numa tentativa de assalto numa ourivesaria localizada numa rua próxima.

O Comando Operacional deseja conhecer qual será o melhor trajecto a tomar, por forma a minimizar o tempo da viagem até ao objectivo pretendido. Usando um mapa daquela zona da cidade, representado esquematicamente na figura, e conhecidos os tempos (médios, em segundos) necessários para percorrer cada um dos troços de rua representados, utilizaram então o algoritmo de Dijkstra para determinar esse caminho mais curto (e, entretanto os ladrões...).

Coloque-se no lugar do Comando, e, partindo da rede apresentada, encontre esse caminho mínimo.



Problema 3

Considere um tabuleiro com 3×4 quadrículas. Cada quadrícula contém um número:

0	4	3	6
7	8	6	8
2	3	1	8

O objectivo do jogo consiste em deslocar um peão desde o canto superior esquerdo até ao canto inferior direito, através de uma sequência de movimentos para a direita ou para baixo, de forma a minimizar o somatório dos pontos correspondentes às quadrículas por onde se passou.

(a) Formule este jogo como um problema de caminho mínimo.

(b) Resolva-o, usando uma das técnicas estudadas na cadeira.

Problema 4

O Sr. Ven de Dor, técnico de vendas, vai comprar um carro novo. Dadas as características da profissão do Sr. Ven de Dor, o veículo sofrerá uma utilização muito grande, o que implica que, apesar de o Sr. Ven de Dor se ir reformar daqui a 3 anos, possa ser economicamente mais favorável trocar de carro ao fim de 1 ou 2 anos, em vez de o manter durante os 3 anos. Isto sobretudo porque os custos de utilização e manutenção crescem muito rapidamente com o envelhecimento dos veículos.

O Sr. Ven de Dor sentou-se à sua secretária e calculou o custo total, preço de um carro novo menos o que o stand dá pelo usado, mais os custos de utilização e manutenção (oficina...), de comprar um carro novo no ano i e trocá-lo no fim do ano j (o ano 0 é agora). Na tabela seguinte estão representados (em milhares de escudos) os custos calculados pelo Sr. Ven de Dor.

		i		
		0	1	2
	1	800		
j	2	1800	1000	
	3	3100	2100	1200

Assim, por exemplo, trocar o carro agora comprado (fim do ano 0) no fim do ano 1 e depois manter o carro comprado no fim do ano 1 até ao fim do ano 3, corresponde a um custo de $800 + 2100 = 2900$.

O Sr. Ven de Dor tem que decidir quantas vezes deve trocar de carro (se alguma) de forma a minimizar a sua despesa total com carros durante estes 3 anos.

(a) Formule este problema como um problema de caminho mínimo.

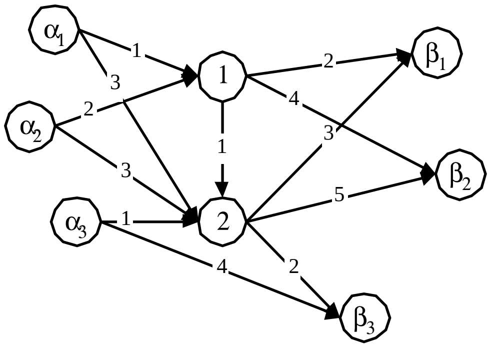
(b) Resolva o problema utilizando o algoritmo de Dijkstra.

Problema 5

O *País Azul* foi subitamente atacado pelas tropas do *País Verde*. O Estado-Maior das *Forças Azuis* reuniu de imediato para decidir sobre as movimentações de tropas que se deviam efectuar, de modo a fazer frente à invasão das *Forças Verdes*.

O Estado-Maior das *Forças Azuis* foi informado que o ataque se estava a processar em 3 frentes distintas, com nomes de código β_1, β_2 e β_3. Chegou-se de imediato à conclusão que seria necessário transportar duas divisões de combate para β_1, uma divisão para β_2 e uma outra para β_3. As *Forças Azuis* dispunham nessa altura de 5 divisões de combate nas cidades mais próximas da fronteira atacada, duas aquarteladas em α_1 (em código, claro!), duas em α_2 e uma aquartelada em α_3 . Essas divisões poderiam ser transportadas para os locais em perigo, contudo os *Aviões Verdes* já sobrevoavam o *País Azul*, e a movimentação das divisões teria que se fazer com o menor risco humano possível.

Após uma rápida inspecção do mapa do território fez-se o esquema da figura seguinte, onde se representam as estradas que podem ser utilizadas pelas divisões de combate das *Forças Azuis* (os valores representados nos troços dos percursos são distâncias em kilómetros).



Os generais das *Forças Azuis*, peritos em Investigação Operacional, precisavam de decidir de que aquartelamento deviam seguir as divisões necessárias em β_1, β_2 e β_3. O objectivo era a minimização das perdas humanas, relacionado directamente com o perigo de bombardeamento.

Durante a reunião do Estado-Maior das *Forças Azuis*, o general de 20 estrelas *Foj* (em código, como não podia deixar de ser) disse: "O perigo de bombardeamento das divisões em movimento pode ser considerado como directamente proporcional à distância entre cada α e cada β. Nesse caso devem-se usar essas distâncias como o perigo que uma divisão corre ao ser transportada de α_i para β_i e aplicar um algoritmo de afectação para resolver o problema". O general *Jac* acrescentou: "Podíamos também usar um algoritmo de transportes para resolver o problema, considerando também as distâncias como uma medida para o perigo". Por fim, o general *Soj* ordenou "A divisão que sobrar fica no aquartelamento respectivo".

Siga as instruções dos generais *Foj*, *Jac* e *Soj* e informe-nos quais foram as decisões tomadas pelo Estado-Maior das *Forças Azuis*, porque nós somos as *Forças Verdes*!!!!

Capítulo 6

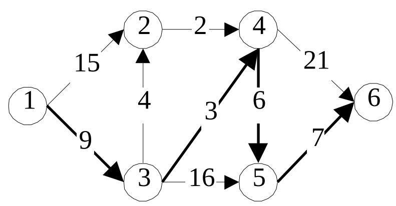
Exercícios de Caminho Mínimo Resoluções

Problema 1

(a) Usando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o seguinte quadro:

	Nós					
iter	1	2	3	4	5	6
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	15	9*	∞	∞	∞
2	0*	13	9*	12*	25	∞
3	0*	13*	9*	12*	18	33
4	0*	13*	9*	12*	18*	33
5	0*	13*	9*	12*	18*	25*

A distância mínima entre o nó 1 e o nó 6 é igual a 25. O caminho mínimo ($1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$) está representado na figura seguinte.

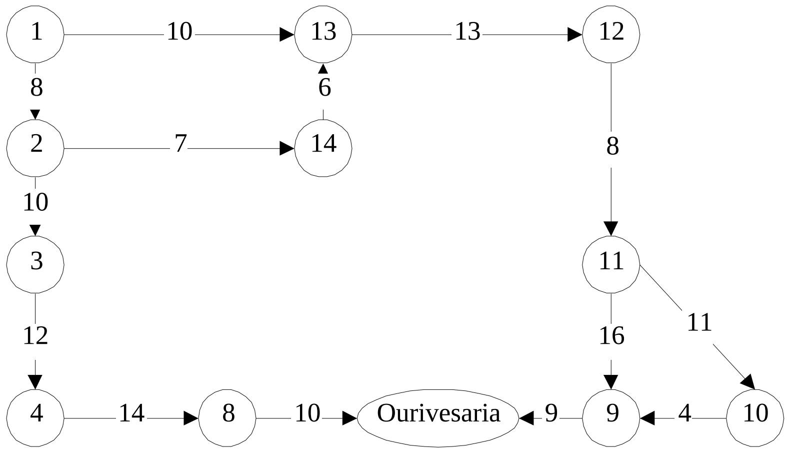


(b) É possível, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), dizer qual é a distância mínima do nó 1 ao nó 4, dado que essa distância seria igual ao valor da etiqueta definitiva do nó 4 (12), uma vez que, por definição, o valor da etiqueta definitiva do nó i é igual à distância mínima entre o nó i e a origem.

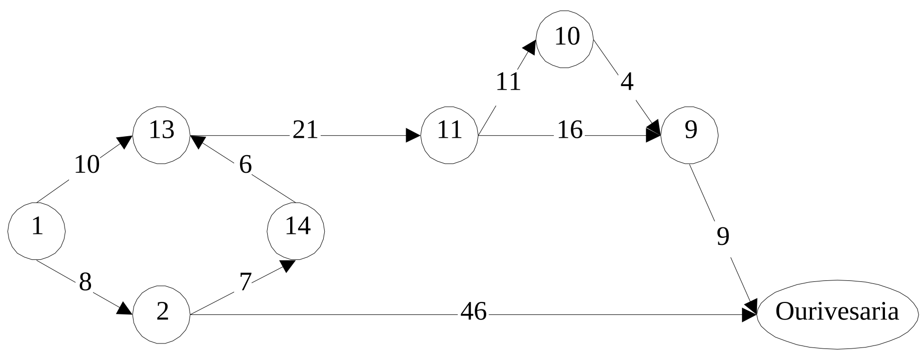
(c) Não é possível, apenas a partir dos cálculos feitos em (a), indicar qual a distância mínima entre os nós 2 e 6, dado que a distância mínima entre os dois nós não é igual à diferença entre as distâncias mínimas desses nós à origem.

Problema 2

Simplificando o mapa da zona da cidade referida, este pode ser representando esquematicamente tal como na figura seguinte. Repare que os nós 5, 6 e 7 do esquema inicial formam um beco sem saída.



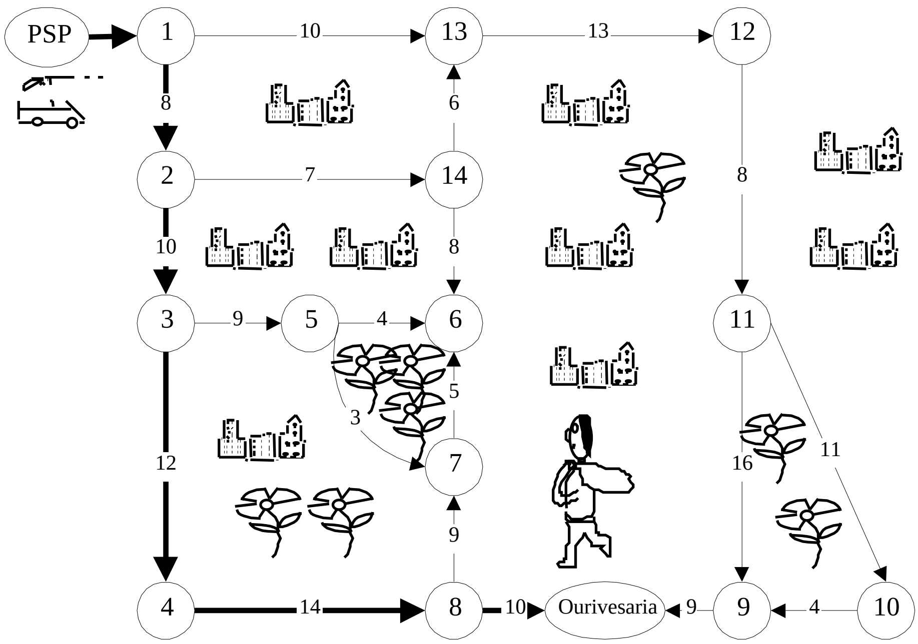
Simplificando ainda um pouco mais a rede da figura, obtém-se a seguinte rede:



Utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

	Nós							
iter	1	2	9	10	11	13	14	Our
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	8*	∞	∞	∞	10	∞	∞
2	0*	8*	∞	∞	∞	10*	15	54
3	0*	8*	∞	∞	31	10*	15*	54
4	0*	8*	∞	∞	31*	10*	15*	54
5	0*	8*	47	42*	31*	10*	15*	54
6	0*	8*	46*	42*	31*	10*	15*	54
7	0*	8*	46*	42*	31*	10*	15*	54*

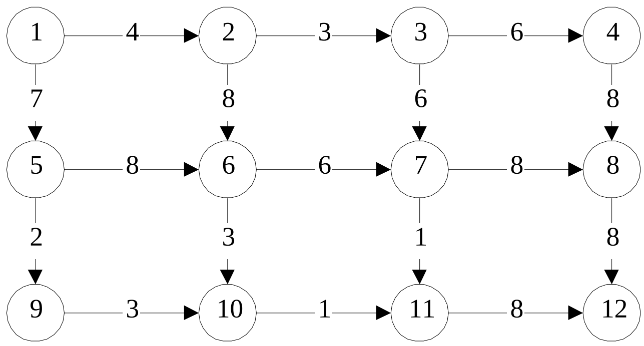
A distância mínima entre a esquadra e a ourivesaria será então igual a 54 e o caminho mínimo será $1 \rightarrow 2 \rightarrow$ *Ourivesaria*, ou seja, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow$ *Ourivesaria*.



Problema 3

(a) A formulação do jogo descrito como um problema de caminho mínimo passa por fazer corresponder a cada quadrícula um nó, que será numerado de cima para baixo e da esquerda para a direita: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... Entre quadrículas adjacentes existirão ramos, orientados de acordo com os movimentos no tabuleiro. A distância associada a cada ramo será o número constante na quadrícula correspondente ao nó de chegada.

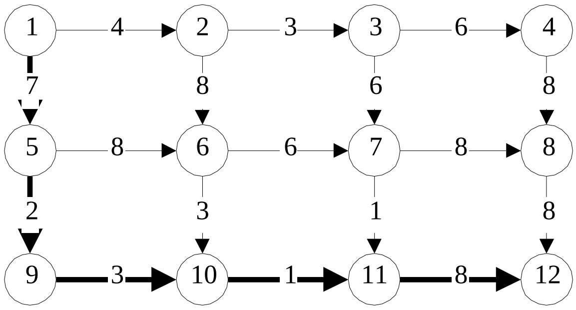
Na figura seguinte está representado o problema de caminho mínimo associado ao jogo descrito.



(b) A partir da figura e utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

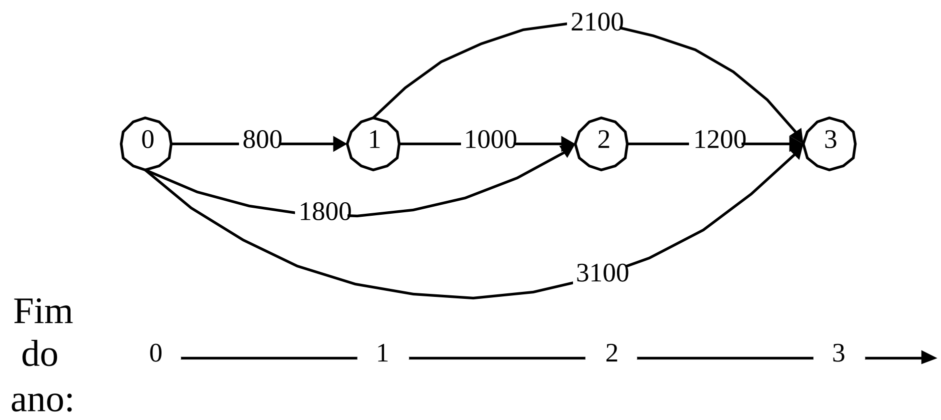
	Nós											
iter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	4*	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0*	4*	7*	∞	7	12	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	0*	4*	7*	13	7*	12	13	∞	∞	∞	∞	∞
4	0*	4*	7*	13	7*	12	13	∞	9*	∞	∞	∞
5	0*	4*	7*	13	7*	12*	13	∞	9*	12	∞	∞
6	0*	4*	7*	13	7*	12*	13	∞	9*	12*	∞	∞
7	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13	∞	9*	12*	13	∞
8	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13	∞
9	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13*	∞
10	0*	4*	7*	13*	7*	12*	13*	21	9*	12*	13*	21*

A solução mínima para o jogo descrito no enunciado é 21, e corresponde à distância mínima entre o nó 1 e o nó 12. O percurso óptimo está representado a traço grosso na figura seguinte:


1
4
2
3
3
6
4
7
8
6
8
5
8
6
6
7
8
8
2
3
1
8
9
3
10
1
11
8
12

Problema 4

(a) A representação do problema do Sr. Ven de Dor como um problema de caminho mínimo está na figura seguinte.



(b) Partindo da figura e utilizando o algoritmo de Dijkstra, obtém-se o quadro seguinte:

	Nós			
iter	0	1	2	3
0	0*	∞	∞	∞
1	0*	800*	1800	3100
2	0*	800*	1800*	2900
3	0*	800*	1800*	2900*

O caminho mínimo, que corresponde no problema ao custo mínimo para o Sr. Ven de Dor, será 2900. Esse custo corresponde à seguinte política óptima de aquisição de automóveis:

O Sr. Ven de Dor deve trocar de automóvel ao fim de 1 ano e deve manter esse automóvel até ao fim do período analisado.

Problema 5

Numa primeira fase, vai ser necessário determinar os caminhos mínimos entre os α_i e os β_j, para depois usar esses valores tanto no algoritmo de afectação sugerido pelo general *Foj* como no algoritmo de transportes sugerido pelo general *Jac*.

(a) Determinação dos caminhos mínimos entre α_1 e os β_j:

	Nós					
iter	α_1	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0^*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0^*	1^*	3	∞	∞	∞
2	0^*	1^*	2^*	3	5	∞
3	0^*	1^*	2^*	3^*	5	4
4	0^*	1^*	2^*	3^*	5	4^*
5	0^*	1^*	2^*	3^*	5^*	4^*

Resultados:

- caminho $\alpha_1 \to 1 \to \beta_1$, com "custo"3;
- caminho $\alpha_1 \to 1 \to \beta_2$, com "custo"5;
- caminho $\alpha_1 \to 1 \to 2 \to \beta_3$, com "custo"4.

(b) Determinação dos caminhos mínimos que partem de α_2 :

	Nós					
iter	α_2	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0^*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0^*	2^*	2	∞	∞	∞
2	0^*	2^*	2^*	4	6	∞
3	0^*	2^*	2^*	4^*	6	5
4	0^*	2^*	2^*	4^*	6	5^*
5	0^*	2^*	2^*	4^*	6^*	5^*

Resultados:

- caminho $\alpha_2 \to 1 \to \beta_1$, com "custo"4;
- caminho $\alpha_2 \to 1 \to \beta_2$, com "custo"6;
- caminho $\alpha_2 \to 2 \to \beta_3$, com "custo"5.

(c) Determinação dos caminhos mínimos que partem de α_3 :

	Nós					
iter	α_3	1	2	β_1	β_2	β_3
0	0^*	∞	∞	∞	∞	∞
1	0^*	∞	1^*	∞	∞	4
2	0^*	∞	1^*	4	6	3^*
3	0^*	∞	1^*	4^*	6	3^*
4	0^*	∞	1^*	4^*	6^*	3^*

Resultados:

- caminho $\alpha_3 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_1$, com "custo"4;
- caminho $\alpha_3 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_2$, com "custo"6;
- caminho $\alpha_3 \rightarrow 2 \rightarrow \beta_3$, com "custo"3.

(a) Seguindo a sugestão do general *Foj*: "O perigo de bombardeamento das divisões em movimento pode ser considerado como directamente proporcional à distância entre cada α e cada β. Nesse caso devem-se usar essas distâncias como o perigo que uma divisão corre ao ser transportada de α_i para β_i e aplicar um algoritmo de afectação para resolver o problema".

Utilizem-se então os valores obtidos pelo algoritmo de caminho mínimo, para o algoritmo de afectação. O destino X no quadro abaixo corresponde à ordem do general *Soj* "A divisão que sobrar fica no aquartelamento respectivo".

Divisões disponíveis		Divisões necessárias				
		β_1	β_1	β_2	β_3	
		1	2	3	4	X
α_1	1	3	3	5	4	0
α_1	2	3	3	5	4	0
α_2	3	4	4	6	5	0
α_2	4	4	4	6	5	0
α_3	5	4	4	6	3	0

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & X \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

4 traços < 5

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & X \\
\hline
1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\
5 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

5 traços, solução óptima com custo $3 + 3 + 6 + 3 + 0 = 15$.

A conclusão deste estudo é a seguinte:

- as duas divisões aquarteladas em α_1 devem ir para β_1 (passando por 1);
- uma das divisões aquarteladas em α_2 deve ir para β_2 (passando por 1) e a outra deve-se manter em α_1;
- a divisão aquartelada em α_3 deve ir para β_3 (passando por 2).

O custo (perigo) total da solução será 15.

(b) Seguindo a sugestão do general *Jac*: "Podíamos também tentar usar um algoritmo de transportes para resolver o problema, usando também as distâncias como uma medida para o perigo".

Utilização dos valores obtidos pelo algoritmo de caminho mínimo, para o algoritmo de transportes:

	β_1	β_2	β_3	X	
α_1	3	5	4	0	2
α_2	4	6	5	0	2
α_3	4	6	3	0	1
	2	1	1	1	

Obtenção da solução inicial pela regra dos custos mínimos:

1 $_{3}$	**--** $_{5}$	**--** $_{4}$	**1** $_{0}$	~~2~~ ~~1~~ 0
1 $_{4}$	**1** $_{6}$	**--** $_{5}$	**--** $_{0}$	~~2~~ ~~1~~ 0
-- $_{4}$	**--** $_{6}$	**1** $_{3}$	**0** $_{0}$	~~1~~ 0
~~2~~ ~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	

Primeiro quadro do algoritmo de transportes:

	0	2	0	-3
3	**1+θ** 3	**--** 0 5	**--** 1 4	**1-θ** 0
4	**1-θ** 4	**1** 6	**--** 1 5	**θ** -1 0
3	**--** 1 4	**--** 1 6	**1** 3	**0** 0

Do quadro anterior retira-se que $\theta = 1$ e pode-se obter segundo quadro do algoritmo de transportes:

	0	2	-1	-4
3	**2** 3	**--** 0 5	**--** 1 4	**--** 1 0
4	**0** 4	**1** 6	**--** 2 5	**1** 0
4	**--** 0 4	**--** 0 6	**1** 3	**0** 0

A conclusão deste estudo é igual à obtida pelo algoritmo de afectação (como seria de esperar):

- as duas divisões aquarteladas em α_1 devem ir para β_1 (passando por 1);
- uma das divisões aquarteladas em α_2 deve ir para β_2 (passando por 1) e a outra deve-se manter em α_1;
- a divisão aquartelada em α_3 deve ir para β_3 (passando por 2).

O custo (perigo) total da solução será $2 \times 3 + 1 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 3 = 15$.