Encontre uma solução em forma fechada para a relação de recorrência

$$S(n) = 2S(n-1) + 3 \text{ para } n \geq 2$$

sujeita à condição básica

$$S(1) = 4$$

Expansão:

$K = 1: \; S(n) = 2S(n-1) + 3$

$K = 2: \; S(n) = 2.[2S(n-2) + 3] + 3$

$= 4S(n-2) + 9$

$K = 3: \; S(n) = 4[2S(n-3) + 3] + 9$

$= 8S(n-3) + 21$

Conjectura:

$S(n) = 2^K S(n-K) + 2^K.3 - 3$

$= 2^K S(n-K) + 3.(2^K - 1)$

Passo base:

$n - K = 1$

$K = n - 1$

Logo:

$S(n) = 2^{n-1}.S(1) + 3.(2^{n-1} - 1)$

$= 2^{n-1}.4 + 3.(2^{n-1} - 1)$

$= 2^{n-1}.4 + 3.2^{n-1} - 3$

$= 7.2^{n-1} - 3$

INEQUAÇÕES

> Exemplo:

Prove as inequações:

a) $n < 2^n$ p/ $n \geq 1$

Passo base:

$P(1): \; 1 < 2^1$ OK

Passo indutivo:

$n + 1 < 2^{n+1}$?

Hip. indutivo

$K < 2^K$

$2K < 2^K.2$

$2K < 2^{K+1}$

$K + K < 2^{K+1}$

$K + 1 < 2^{K+1}$ c.q.d.

b) $n^2 > 3n$ p/ $n \geq 4$

Passo base:

$P(4): \; 4^2 > 3.4 \rightarrow 16 > 12$ OK

Passo indutivo:

$(n+1)^2 > 3.(n+1)$?

Hip. indutiva:

$K^2 > 3K$

$n^2 + 2n + 1 > 3n + 3$ ✓

$K^2 + 2K + 1 > 3K + 2K + 1$

$K^2 + 2K + 1 > 3K + 2.4 + 1$

$K^2 + 2K + 1 > 3K + 9$

$K^2 + 2K + 1 > 3K + 3$

c.q.d.

4. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \overline{(1 + 2 + \ldots + n)}^2, n \geq 1.$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 \rightarrow \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$$

Resposta:

Passo base:

$P(1) = 1^2 = 1$ OK

Passo indutivo:

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n + n + 1)^2 \rightarrow ? \rightarrow \left(\frac{(n+1).(n+2)}{2}\right)^2$

Hip. Ind.

Agr, é necessário provar que:

$1^3 + 2^3 + \ldots + K^3 + (K+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + K)^2 + (K+1)^3$

$= \left(\sum_{j=1}^{K} j\right)^2 + (K+1)^3$

$= \left(\frac{K.(K+1)}{2}\right)^2 + (K+1)^3$

$= \frac{K^2.(K+1)^2}{4} + (K+1)^2.(K+1)$

$= \left(\frac{K^2}{4} + (K+1)\right).(K+1)^2$

$\left(\frac{K^2 + 4K + 4}{4}\right).(K+1)^2$

$\left(\frac{(K+2)^2.(K+1)^2}{4}\right)$ c.q.d.

6. Prove por indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2.$$

Passo base:

$$P(2) = \frac{2.(2-1).(2+1)}{3} = 2$$

$$\sum_{i=1}^{2-1} i(i+1) = 1.(1+1) = 2$$

OK

Passo Indutivo:

$$\sum_{i=1}^{n} i.(i+1) = \frac{(n+1).n.(n+2)}{3}$$

Hip. Indutiva:

$$\sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \frac{K.(K-1).(K+1)}{3} + K.(K+1)$$

$$= K.\left(\frac{(K-1)}{3} + 1\right).(K+1)$$

$$= K . \frac{K+2}{3} . (K+1)$$

$$= \frac{(K+1).K.(K+2)}{3}$$

c.q.d.

Outra de inequações:

$n^2 < 2^n$ p/ $n \geq 5$

Passo base:

$n^2 < 2^n$

$5^2 < 2^5$

$25 < 32$ OK

Passo indutivo:

$(n+1)^2 < 2^{n+1}$

$n^2+2n+1 < 2^{n+1}$

é igual ao dobro de 2^K

Hipótese indutiva:

$2^K = 2^{K+1} - 2^K$

então se eu diminuir 2^K de 2^{K+1}, eu vou ficar com 2^K

ex.: $2^4 = 2^5 - 2^4$

$16 = 32 - 16$ ✓

$K^2 < 2^K$

$K^2+2K+1 < 2^K + 2K+1$

$K^2+2K+1 < 2^{K+1} - 2^K + 2K+1$

$K^2+2K+1 < 2^{K+1} - 2^5 + 2.5+1$

$K^2+2K+1 < 2^{K+1} - 43$

$K^2+2K+1 < 2^{K+1}$

c.q.d