1 Encontre a solução fechada para a sequência T definida por $T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + 3$ para $n \geq 2$.

Expansão:

$K=1: T(n) = T(n-1) + 3$

$K=2: T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 = T(n-2) + 6$

$K=3: T(n) = [T(n-3) + 3] + 6 = T(n-3) + 9$

Conjectura:

$T(n) = T(n-K) + 3K$

Passo base:

$n - K = 1$

$K = n - 1$

Logo:

$T(n) = T(1) + 3.(n-1)$

$= 1 + 3n - 3$

$= 3n - 2$ ✓

Provando...

Passo base:

$T(n) = 3n - 2$

$T(1) = 3.1 - 2 = 1$ ✓

Passo indutivo

$T(n) = 3n - 2$? → Hip. Indutiva

$T(n+1) = 3(n+1) - 2$

$= 3n + 3 - 2$

$= 3n + 1$

Logo, precisamos provar que:

$T((n+1) - 1) + 3 = 3n + 1$

$T(n) + 3 = 3n + 1$ → usando a H.I.

$3n - 2 + 3 = 3n + 1$

$3n + 1 = 3n + 1$

c.q.d. ✓

2 Encontre a solução fechada para a sequência T definida por $T(1) = 7$ e $T(n) = 2T(n-1) + 1$ para $n \geq 2$.

Expansão:

$K=1: T(n) = 2T(n-1) + 1$

$K=2: T(n) = 2[2T(n-2) + 1] + 1$

$= 4T(n-2) + 3$

$K=3: T(n) = 4[2T(n-3) + 1] + 3$

$= 8T(n-3) + 7$

Conjecturando:

$T(n) = 2^K T(n-K) + 2^K - 1$

Passo base:

$n - K = 1$

$K = n - 1$

Logo:

$T(n) = 2^{n-1} T(1) + 2^{n-1} - 1$

$= 7.2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$

$= 8.2^{n-1} - 1$ ✓

Provando...

Passo base:

$T(1) = 8.2^{1-1} - 1 = 8 - 1 = 7$ ✓

Passo indutivo:

$T(n) = 8.2^{n-1} - 1$ → Hip. indutiva

$T(n+1) = 8.2^{n+1-1} - 1$

$= 8.2^n - 1$?

Agora precisamos provar que:

$2.T(n+1-1) + 1 = 8.2^n - 1$

$2.T(n) + 1 = 8.2^n - 1$ → Aplicando a HI

$2.[8.2^{n-1} - 1] + 1 = 8.2^n - 1$

$16.2^{n-1} - 2 + 1 = 8.2^n - 1$

$16.2^n.2^{-1} - 1 = 8.2^n - 1$

$\cancel{16}^{8}.2^n.\frac{1}{\cancel{2}} - 1 = 8.2^n - 1$

$8.2^n - 1 = 8.2^n - 1$ ✓

c.q.d.

3 Encontre a solução fechada para a sequência T definida por $T(1) = 1$ e $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$ para $n \geq 2$.

Expansão:

$K=1: T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

$K=2: T(n) = \left[T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right] + 1$

$= T\left(\frac{n}{4}\right) + 2$

$K=3: T(n) = \left[T\left(\frac{n}{8}\right) + 1\right] + 2$

$= T\left(\frac{n}{8}\right) + 3$

Conjectura:

$T(n) = T\left(\frac{n}{2^K}\right) + K$

Passo base:

$\frac{n}{2^K} = 1$

$n = 2^K$

$\log n = \log 2^K$

$\log n = K$

Logo:

$T(n) = T(1) + \log n = 1 + \log n$ ✓

Provando...

Passo base:

$T(1) = 1 + \log 1$

$= 1 + 0$

$= 1$ ✓

Passo indutivo: ↑ Hip. Indutiva

$T(2n) = 1 + \log(2n)$?

Agora, precimos provar que:

$T\left(\frac{2n}{2}\right) + 1 = 1 + \log(2n)$

$T(n) + 1 = 1 + \log(2n)$ → Aplicando a H.I.

$1 + \log(n) + 1 = 1 + \log(2n)$

$1 + \log(n) + \log 2 = 1 + \log(2n)$

$1 + \log(2n) = 1 + \log(2n)$ ✓

c.q.d.

4 Defina recursivamente cada uma das sequências abaixo.

a) 1, 3, 5, 7, 9, ...

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1) + 2$ p/ $n \geq 2$

b) 1, 4, 9, 16, 25, ...

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1) + 2n - 1$ p/ $n \geq 2$

c) 1, 3, 7, 15, 31, 63.

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1).2 + 1$ p/ $2 \leq n \leq 6$

❺ Use indução matemática para provar que as proposições abaixo são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$

Passo Base:

$P(n) = n(n+1)$

$P(1) = 1(1+1) = 2$ OK

Passo indutivo:

$2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$ → Hip. Indutiva

Agora, é necessário provar que:

$2+4+6+\dots+2n+2.(n+1) = (n+1).(n+2) = n^2+3n+2$

Para isso, sabemos que tb é verdade que:

$2+4+6+\dots+2n+2.(n+1) = n.(n+1) + 2.(n+1)$

Logo:

$$\begin{aligned} 2+4+6+\dots+2n+2.(n+1) &= n.(n+1) + 2.(n+1) \\ &= n^2+n + 2n+2 \\ &= n^2+3n+2 \end{aligned}$$

C.q.d. ✓

a) $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

$2+4+6+\ldots+2K+2(K+1)=(K+1).(K+1+1)$
$(K+1).(K+2)$

$2+4+6+\ldots+2K+2(K+1)=K.(K+1)+2(K+1)$
$K^2+K+2K+2$
K^2+3K+2
$K^2+K(2+1)+2.1$
$(K+1).(K+2)$

$P(1)=1.(1+1)$
$=2$

c.q.d.

$2+6+10+\ldots+(4n-2)=2n^2.$

$2+6+10+\ldots+(4K-2)+(4(K+1)-2)=2(K+1)^2$
$2+6+10+\ldots+(4K-2)+(4K+2)=2K^2+4K+2$

P.I.:
$2+6+10+\ldots+(4K-2)+(4K+2)=2K^2+(4K+2)$
$=2K^2+4K+2$

c.q.d.

$P(1)=2.1^2=2$ ✓

c) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^2+2^2+\ldots+K^2+(K+1)^2=\frac{(K+1).(K+1+1).(2.(K+1)+1)}{6}$

$=\frac{(K+1).(K+2).(2K+3)}{6} \rightarrow \frac{(K^2+2K+K+2).(2K+3)}{6}$

$\frac{(K^2+3K+2).(2K+3)}{6}$

$\frac{2K^3+3K^2+6K^2+9K+4K+6}{6}$

$\frac{2K^3+9K^2+13K+6}{6}$

c.q.d.

P.I.:
$1^2+2^2+\ldots+K^2+(K+1)^2=\frac{K(K+1).(2K+1)}{6}+(K+1)^2$

$=\frac{K.(K+1).(2K+1)+6K^2+12K+6}{6}$

$=\frac{(K^2+K).(2K+1)+6K^2+12K+6}{6}$

$=\frac{2K^3+K^2+2K^2+K+6K^2+12K+6}{6}$

$=\frac{2K^3+9K^2+13K+6}{6}$

P.B
$P(1)=\frac{1.(1+1)(2.1+1)}{6}$

$=\frac{6}{6}=1$

d) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

$P(1)=\frac{1.(1+1).(2.1+7)}{6}=3$ ✓

P.Indutivo
$1.3+2.4+3.5+\ldots+n.(n+2)+(n+1).((n+1)+2)=\frac{(n+1).(n+2).(2n+9)}{6}$?

$\frac{(n^2+3n+2).(2n+9)}{6}$

$\frac{(2n^3+9n^2+6n^2+27n+4n+18)}{6}$

$\frac{2n^3+15n^2+31n+18}{6}$?

Hip. Indutiva
$1.3+2.4+3.5+\ldots+n.(n+2)+(n+1).(n+3)=\frac{n.(n+1).(2n+7)}{6}+(n+1).(n+3)$

$\frac{(n^2+n).(2n+7)+6(n^2+3n+n+3)}{6}$

$\frac{2n^3+7n^2+2n^2+7n+6n^2+18n+6n+18}{6}$

$\frac{2n^3+15n^2+31n+18}{6}$

c.q.d.

❻ Prove que $n^2 > 3n$ para todo número inteiro positivo $n \geq 4$.

$n^2 > 3n$

P.B.

$4^2 > 3.4$

$16 > 12$ OK

P. Indutivo:

$(n+1)^2 > 3.(n+1)$

$n^2 + 2n + 1 > 3n + 1$

Hip. Indutiva:

$n^2 > 3n$

$n^2 + 2n + 1 > 3n + 2n + 1$?

$n^2 + 2n + 1 > 3n + 2.4 + 1$

$n^2 + 2n + 1 > 3n + 9$

$n^2 + 2n + 1 > 3n + 1$ c.q.d.

❼ Use a indução matemática para demonstrar a fórmula abaixo para a soma de um número finito de termos de uma PG:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

quando $r \neq 1$, em que n é um número inteiro não negativo.

P.B.:

$P(0) = \frac{a.r^{0+1} - a}{r-1} = \frac{ar - a}{r-1} = \frac{a.(r-1)}{r-1} = a$ ✓

P. Indutivo:

$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+2} - a}{r-1}$

Hip. Indutiva:

$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1} + ar^{n+1}$

$= \frac{\cancel{ar^{n+1}} - a + ar^{n+2} - \cancel{ar^{n+1}}}{r-1}$

$= \frac{ar^{n+2} - a}{r-1}$

c.q.d.

❽ Use a indução matemática para demonstrar que $2^n < n!$ para todo número inteiro positivo $n \geq 4$. Note que essa inequação é falsa para $n = 1, 2$ e 3.

P.B.:

$2^n < n!$

$2^4 < 4!$

$16 < 24$ OK

P. Indutivo:

$2^{n+1} < (n+1)!$

Hip. Indutiva:

$2^n < n!$

$(2^n).(n+1) < n!.(n+1)$

$2^n.n + 2^n < (n+1)!$

$2^n.4 + 2^n < (n+1)!$

$2^n.1 + 2^n < (n+1)!$

$2.2^n < (n+1)!$

$2^{n+1} < (n+1)!$

c.q.d.

❾ Use indução matemática para demonstrar que a sequência T definida por $\{2^n\}$ para $n \geq 1$ também pode ser definida recursivamente por

$T(1) = 2$ e

$T(n) = 2T(n-1)$ para $n \geq 2$.

P.B.:

$T(1) = 2^1 = 2$ OK

P. Indutivo:

$T(n+1) = 2.T(n) = 2^{n+1}$?

2.2^n

2^{n+1} c.q.d.

Hip. Indutiva

$T(n) = 2^n$

10 Use indução matemática para demonstrar que a sequência T definida por $\{1 + log_2(n)\}$ para $n \geq 1$ também pode ser definida recursivamente por

$T(1) = 1$ e

$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$ para $n \geq 2$.

P.B.:

$T(1) = 1 + \log_2 1$
$= 1 + 0$
$= 1$

Hip. Indutiva:

$T(n) = 1 + \log_2 n$

$T\left(\frac{2n}{2}\right) + 1 = 1 + \log_2(2n)$

$T(n) + 1$

$1 + \log_2(n) + 1$

$1 + \log_2(n) + \log_2 2$

$1 + \log_2(2n)$ c.q.d.