

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Computação
Matemática Discreta

Lista de Exercícios
Sequências e Somatórios

Questão 1. Usando a notação de somatória, expresse a soma dos primeiros 100 termos da sequência $\{a_n\}$, em que $a_n = 1/n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Questão 2. Apresente uma função definida no conjunto dos inteiros não negativos que construa a seguinte sequência:

$$f(x) = \frac{(-1)^x}{2x+1} \quad 1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{11}, \dots$$

Questão 3. Como podemos construir os termos de uma sequência se os primeiros 10 termos são 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59?

$$a_n = 6n - 1$$

Questão 4. Encontre $\sum_{k=50}^{100} k^2$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2 \rightarrow \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6}$
 $\rightarrow 338350 - 40425 = 297925$

Questão 5. Determine k de modo que seja

$$\sum_{i=0}^{51} (i+k) = \left(\sum_{i=1}^{51} i \right) + 104.$$

$$\cancel{\sum_{i=0}^{51} i} + 52k = \cancel{\sum_{i=1}^{51} i} + 104$$

$$52k = 104$$

$$k = 2 //$$

Questão 6. Compute cada uma das somas duplas abaixo.

(a) $\sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^2 (3m+2n) \rightarrow \sum_{m=0}^3 (3m+3m+2+3m+4) \rightarrow 9 \sum_{m=0}^3 m + 6 \cdot 4 \rightarrow 9 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 78$

(b) $\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^3 m^2 n^3 \rightarrow \sum_{m=0}^2 (m^2 + 8m^2 + 27m^2) \rightarrow 36 \sum_{m=0}^2 m^2 \rightarrow 36 \cdot \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \right) = 180 //$

Questão 7. Há também uma notação especial para produtos. O produto de a_m, a_{m+1}, \dots, a_n é representado por

$$\prod_{j=m}^n a_j.$$

Quais são os valores dos produtos abaixo?

(a) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i \xrightarrow{\text{par}} = 1$ (b) $\prod_{i=1}^{10} 2 \rightarrow 2 \prod_{i=1}^{10} 1 = 2$

Questão 8. Verifique se as seguintes igualdades são verdadeiras ou falsas, onde c é uma constante.

(a) $\sum_{k=1}^n c = nc$ ✓

(b) $\prod_{i=1}^n i = n!$ ✓

(c) $\sum_{k=0}^{12} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{12} k \right)^3$

$\frac{12^2(12+1)^2}{4} \neq \left[\frac{12 \cdot 13}{2} \right]^3$
 $6084 \neq 474552$

Questão 9. Qual é o valor para cada uma das somas abaixo dos termos de uma progressão geométrica?

(a) $\sum_{j=0}^8 3 \cdot 2^j = \frac{3 \cdot 2^{8+1} - 3}{2 - 1} = \frac{1536 - 3}{1} = 1533$

(b) $\sum_{j=2}^8 (-3)^j \rightarrow \sum_{K=0}^6 (-3)^{K+2} \rightarrow 9 \sum_{K=0}^6 (-3)^K \rightarrow 9 \cdot \frac{(-3)^7 - 1}{-3 - 1} = 4923$

$K = j - 2$

$j = K + 2$