Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Computação
Análise de Algoritmos

Exercícios
Capítulos 1, 2 e 3 do Livro Texto

1. Considere duas funções $f(n) = 0,5n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$. Agora, usando a notação Big-O, mostre que $f(n)$ é $O(g(n))$.

2. Dado dois algoritmos A e B que resolvem o mesmo problema e possuem complexidade no tempo $8n^2$ e n^3, respectivamente, responda os itens abaixo:

   a. Qual é o maior valor de entrada n para o qual o algoritmo B é mais eficiente que o algoritmo A?

   b. Na sua opinião, qual algoritmo é mais eficiente?

3. Determine a complexidade no tempo do algoritmo abaixo que promete encontrar os elementos mínimo e máximo do vetor de entrada V de tamanho n e responda os itens a seguir. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas.

```
MaxMin (V, n)
max = V[1]
min = V[1]
para i = 2 até n faça
  se V[i] > max então max = V[i]
  se V[i] < min então min = V[i]
```

   a. Podemos dizer que o algoritmo $MaxMin$ para e é correto?

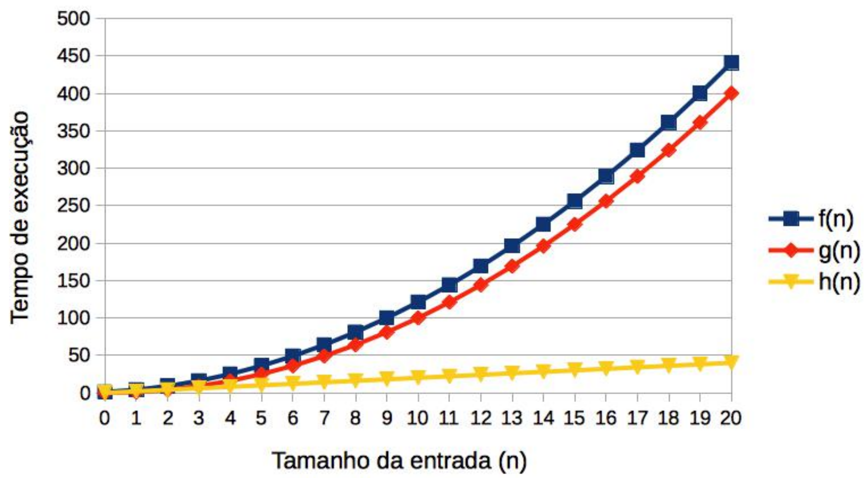
   b. Existe melhor e pior caso?

   c. O algoritmo $MaxMin$ é eficiente?

4. Usando notação assintótica, descreva a complexidade no tempo do algoritmo abaixo. Ele recebe dois vetores A e V de tamanhos n e w, respectivamente.

```
TESTE (A, V, n, w)
1. para i = 1 até n faça
2.   para j = 1 até w faça
3.     V[j] = A[i] + 2
4. max = V[1]
5. para j = 2 até w faça
6.   se max < V[j] então max = V[j]
```

5. Observe as funções $f(n) = n^2 + 2n$, $g(n) = n^2$ e $h(n) = 2n + 1$ representadas no gráfico abaixo.



Assinale a afirmativa correta sobre o crescimento assintótico dessas funções.

(a) $f(n) = O(h(n))$ e $f(n) = \omega(g(n))$.
(b) $g(n) = \Omega(f(n))$ e $f(n) = \Theta(h(n))$.
(c) $h(n) = \omega(g(n))$ e $g(n) = \Theta(f(n))$.
(d) $g(n) = O(f(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$.
(e) $h(n) = \Omega(f(n))$ e $h(n) = O(g(n))$.

6. Mostre que $7x^2$ é $O(x^3)$. Também é verdade que x^3 é $O(7x^2)$? Essas funções são assintoticamente equivalentes?

7. Mostre que x^2 é $\Omega(x)$. Também é verdade que x é $\Omega(x^2)$? Essas funções são assintoticamente equivalentes?

8. As afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas? Justifique.

a. $2n^2 + 1000$ é $\Omega(n^2)$.

b. $log(n^2)$ é $\omega(log(n))$.

c. 2^{n+1} é $O(2^n)$.

d. 2^{2n} é $O(2^n)$.

9. [POSCOMP 2010] Considere dois algoritmos $A1$ e $A2$, cujas funções de custo são, respectivamente, $T1(n) = n^2 - n + 1$ e $T2(n) = 6nlog_2 n + 2n$. Para simplificar a análise, assuma que $n > 0$ é sempre uma potência de 2. Com relação ao enunciado, assinale a alternativa correta.

(a) $T1(n) = \Theta(n^2)$ e $T2(n) = \Theta(nlogn)$, então $A2$ é sempre mais eficiente que $A1$.
(b) O limite superior $T1(n) = O(n^3)$ é correto e assintoticamente restrito.
(c) O limite inferior $T2(n) = \Omega(n^3)$ é correto e assintoticamente restrito.
(d) $T1$ e $T2$ são assintoticamente equivalentes.
(e) $A1$ é mais eficiente que $A2$, para n suficientemente pequeno.

10. [POSCOMP 2004] Um algoritmo é executado em 10 segundos para uma entrada de tamanho 50. Se o algoritmo é quadrático, quanto tempo em segundos ele gastará, aproximadamente, no mesmo computador, se a entrada tiver tamanho 100?

(a) 10.
(b) 20.
(c) 40.
(d) 100.
(e) 500.

11. [POSCOMP 2003] Qual é o número mínimo de comparações necessário para encontrar o menor elemento de um conjunto qualquer não ordenado de n elementos?

(a) 1.
(b) $n - 1$.
(c) n.
(d) $n + 1$.
(e) $n \; log \; n$.

12. Um algoritmo tradicional e muito utilizado possui complexidade $n^{1,5}$, enquanto um novo algoritmo proposto é da ordem de $nlogn$:

$f(n) = n^{1,5}$
$g(n) = nlogn$

Qual algoritmo adotar? Por quê?

13. A função SORT abaixo ordena de forma crescente um vetor A de n elementos.

```
SORT (A, n)
para j = 1 até n - 1 faça
    menor = j
    para i = j + 1 até n faça
        se A[i] < A[menor] então menor = i
    aux = A[menor]
    A[menor] = A[j]
    A[j] = aux
```

Dado que $T(n)$ é o tempo de execução da função SORT para as entradas A e n, é possível afirmar que a ordem de $T(n)$ é

(a) $T(n) = O(1)$.
(b) $T(n) = O(log(n))$.
(c) $T(n) = O(n)$.
(d) $T(n) = o(n^2)$.
(e) $T(n) = O(n^2)$.

14. Considerando $f \equiv f(n)$, $g \equiv g(n)$ e k uma constante, determine se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso sejam falsas reescreva corretamente.

a. $O(f+g) = O(f) + O(g)$.

b. $O(f.g) = O(f).O(g)$.

c. $O(k.g) = k.O(g) = O(g)$.

d. Se $f = O(g)$, então $g = \Omega(f)$.

e. Se $f = O(g)$ e $g = O(h)$, então $f = O(h)$.

15. Considerando que todos os logaritmos tem base 2, assinale a afirmativa abaixo que é **FALSA**.

(a) $n^2 + log(n) + 5 = o(n^3)$.

(b) $2nlog(n) + 4n + 10\sqrt{n} = 2nlog(n) + O(n^2)$.

(c) $n^2 + 2 = \Theta(4^{log(n)})$.

(d) $n^{\frac{1}{log(n)}} = \Theta(n)$.

(e) $log(n) + \sqrt{n} = O(n)$.

16. Sejam f, g e h funções reais positivas da variável inteira n, assinale a alternativa **INCORRETA** de acordo com os conceitos de notações assintóticas.

(a) Por exemplo, se $f = n^2 - 1$, $g = n^2$ e $h = n^3$, então f é $O(g)$, f é $O(h)$, g é $O(f)$, mas h não é $O(f)$. Consequentemente, f é $\Theta(g)$, mas f não é $\Theta(h)$.

(b) A notação Θ exprime o fato de que duas funções possuem a mesma ordem de grandeza assintótica.

(c) Por exemplo, se $f = 5 + 2log(n) + nlog(n)$ e $g = n^2$, então são válidas as igualdades $f = O(g)$ e $f = \Theta(n)$.

(d) Assim como a notação O é útil para descrever limites superiores assintóticos, a notação Ω é empregada para limites inferiores assintóticos.

(e) Por exemplo, se $f = n^2 - 1$, então são válidas as igualdades $f = \Omega(n^2)$, $f = \Omega(n)$ e $f = \Omega(1)$, mas não vale $f = \Omega(n^3)$.

17. [POSCOMP 2003] Quais das seguintes igualdades são verdadeiras?

I. $n^2 = O(n^3)$

II. $2n + 1 = O(n^2)$

III. $n^3 = O(n^2)$

IV. $3n + 5nlog(n) = O(n)$

V. $log(n) + \sqrt{n} = O(n)$

(a) Somente I e II.
(b) Somente II, III e IV.
(c) Somente III, IV e V.
(d) Somente I, II e V.
(e) Somente I, III e IV.

18. [POSCOMP 2002] Qual das seguintes afirmações sobre crescimento assintótico de funções **NÃO** é verdadeira?

(a) $2n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$.
(b) Se $f(n) = O(g(n))$, então $g(n) = O(f(n))$.
(c) $log(n^2) = O(log(n))$.
(d) Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, então $f(n) = O(h(n))$.
(e) $2^{n+1} = O(2^n)$.

19. [POSCOMP 2015] Sejam $T_1(n) = 100n + 15$, $T_2(n) = 10n^2 + 2n$ e $T_3(n) = 0,5n^3 + n^2 + 3$ as equações que descrevem a complexidade de tempo dos algoritmos $Alg1$, $Alg2$ e $Alg3$, respectivamente, para entradas de números inteiros de tamanho $n > 0$. Assinale a alternativa correta.

(a) As complexidades assintóticas de $Alg1$, $Alg2$ e $Alg3$ em notação Big-O estão, respectivamente, em $O(n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$.

(b) As complexidades assintóticas de $Alg1$, $Alg2$ e $Alg3$ em notação Big-O estão, respectivamente, em $O(n)$, $O(n^2)$, $O(n^2)$.

(c) As complexidades assintóticas de $Alg1$, $Alg2$ e $Alg3$ em notação Big-O estão, respectivamente, em $O(100)$, $O(10)$, $O(0,5)$.

(d) $Alg2$ e $Alg3$ pertencem às mesmas classes de complexidade assintótica.

(e) $Alg1$ e $Alg2$ pertencem às mesmas classes de complexidade assintótica.

20. [POSCOMP 2011] Sejam $T_A(n)$ e $T_B(n)$ os tempos de execução de pior caso de dois algoritmos A e B propostos para um mesmo problema computacional, em função de um certo parâmetro n. Dizemos que o algoritmo A é mais eficiente que o algoritmo B assintoticamente no pior caso quando

(a) $T_A(n) = o(T_B(n))$.
(b) $T_B(n) = o(T_A(n))$.
(c) $T_A(n) = O(T_B(n))$.
(d) $T_B(n) = O(T_A(n))$.
(e) $T_A(n) = \Theta(T_B(n))$.

21. [POSCOMP 2018] Para medir o custo de execução de um algoritmo, é comum definir uma função de complexidade f, em que $f(n)$ é a medida de tempo necessário para executar um algoritmo para um problema de tamanho n. Considere as afirmações abaixo sobre funções de complexidade:

I. Se $f(n)$ é uma medida de quantidade de tempo necessário para executar um algoritmo em um problema de tamanho n, então f é chamada função de complexidade de tempo.

II. Se $f(n)$ é uma medida de quantidade de memória necessária para executar um algoritmo de tamanho n, então f é chamada função de complexidade de espaço.

III. A complexidade de tempo não representa o tempo diretamente, contudo, é estimada pelo número de vezes que determinada operação relevante é executada.

Quais estão corretas?

(a) Apenas I.
(b) Apenas II.
(c) Apenas III.
(d) Apenas I e II.
(e) I, II e III.

22. [POSCOMP 2016] Um algoritmo tem complexidade $O(3m^3 + 2mn^2 + n^2 + 10m + m^2)$. Uma maneira simplificada de representar a complexidade desse algoritmo é

(a) $O(m^3 + mn^2)$.
(b) $O(m^3)$.
(c) $O(m^2)$.
(d) $O(mn^2)$.
(e) $O(m^3 + n^2)$.

23. [POSCOMP 2018] Dado o trecho de código

```
int i, j, c;
c = 1;
for (i = 1; i < n; i = i*2) {
      for (j = 1; j <= n; j++) {
            c = c + 1;
      }
}
```

Assumindo que a instrução $c = c + 1$ é $O(1)$, a expressão que melhor define a ordem de complexidade desse trecho é

(a) $O(n\ log\ n)$.
(b) $O(log\ n)$.
(c) $O(n)$.
(d) $O(n^2)$.
(e) $O(\sqrt{n})$.