

УДК 519.8

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ
РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ
ПОЛЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

**И.А. Джемесюк,
С.Г. Горбунов[@]**

*Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий
имени М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия*

[@]Автор для переписки, e-mail: gos-g@bk.ru

В статье рассмотрены дифференциальные уравнения теплопроводности в частных производных параболического типа для бесконечной пластины в области $x > 1$, возникающие в теории теплопроводности для различных режимов нагрева границы. Для нахождения закона распределения температуры по толщине пластины получены точные аналитические решения трех задач теплопроводности со следующими граничными условиями: 1) температура на границе меняется мгновенно, но однократно; 2) температура на границе изменяется плавно с учетом времени релаксации на левой границе; 3) температура на границе мгновенно периодически меняется. Краевые задачи сначала приводили к безразмерному виду, а потом решали операционным методом с помощью интегрального преобразования Лапласа. С помощью полученных аналитических решений построены графики, характеризующие распределение температуры в пластине с учетом процессов релаксации на левой границе.

Ключевые слова: время релаксации, уравнение теплопроводности, интегральное преобразование Лапласа.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE INFLUENCE
OF RELAXATION PROCESSES ON THE TEMPERATURE
FIELD IN AN ELASTIC HALF-SPACE**

**I.A. Dzhemesyuk,
S.G. Gorbunov[@]**

*Moscow Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies),
Moscow 119571, Russia*

[@]Corresponding author e-mail: gos-g@bk.ru

The article examines the relaxation processes that occur in an elastic solid medium when it is heated and cooled, especially their influence on the temperature field. Besides, we considered in this paper the heat equation of parabolic type arising in the theory of thermal conductivity for different modes of heating the border. We present a solution of the boundary value problem of nonstationary heat conduction for an infinite plate with the following regimes of loading the boundaries: a single slow temperature change at the border, a single instantaneous temperature variation at the border, and, finally, multiple instantaneous changes of temperature at the border. In order to solve these three heat problems, they were brought to a dimensionless form. Then the operational calculus method was applied. The essence of the method consists in the following. According to the obtained analytical solutions three-dimensional graphics characterizing the relaxations processes were built in the computer algebra system Wolfram Mathematica for different ranges of the Fourier criterion.

Keywords: relaxation time, mathematical modeling, dimensionless variables, integral Laplace transform.

Метод интегральных преобразований нашел широкое распространение при решении уравнения теплопроводности в конечных и бесконечных областях классического типа: бесконечные пластины, длинный тонкий однородный стержень и т.д. Он позволяет получать аналитические решения тепловых задач по стандартной схеме [1]:

1. Применение преобразования Лапласа: переход от известных и неизвестных функций их изображениям, запись уравнения в изображениях [1], соответствующих решаемой задаче Коши [2];
2. Решение полученного уравнения, т.е. нахождение изображения искомого решения;
3. Применение обратного преобразования Лапласа: нахождение оригинала [3] для полученного в п. 2 изображения решения.

Применим метод для решения ряда задач, представляющих интерес в технических приложениях.

В обычной феноменологической теории теплоты предполагается, что скорость распространения тепла в среде бесконечно велика. Однако тепло как одна из форм, равно как и механическая форма движения, имеет конечную скорость распространения. Вследствие сложной молекулярной структуры вещества, тепловой инерции, а также дефектов в материале, происходит запаздывание во времени изменения температуры. Этот промежуток времени – время релаксации.

Пусть в начальный момент времени распределение температуры по толщине бесконечной пластины $x > l$ равно $T(x, t)|_{t=0} = T_0$. На левой границе произошел скачок температуры, описываемый следующей функцией $T(x, t)|_{x=l} = T_0 + (T_c - T_0)\eta(t - t_0)$ [4, с. 199],

(рис. 1), где $\eta(t - t_0)$ – функция Хевисайда [5], которая определяется как: $\eta(t - t_0) := \begin{cases} 0, & t \leq t_0; \\ 1, & t > t_0. \end{cases}$

(доопределена значением 0 в точке t_0), $t_0 \neq 0$. Чтобы найти закон распределения температуры по толщине пластины, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & x > l, t > 0; \\ T(x, t)|_{t=0} = T_0, & x \geq l; \\ T(x, t)|_{x=l} = T_0 + (T_c - T_0)\eta(t - t_0), & t \geq 0; \\ |T(x, t)| < \infty, & t \geq 0, x \geq l; \end{cases}$$

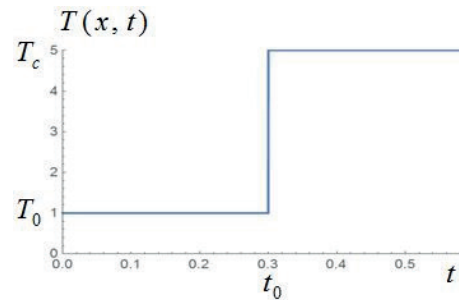


Рис. 1. График температурной функции (температура на границе изменяется мгновенно).

Используя замену: $z = \frac{x-l}{l}$, $Fo = \frac{at}{l^2}$ (критерий Фурье), $W(z, Fo) = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}$, получим

задачу в безразмерном виде (рис.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, & z > 0, Fo > 0; \\ W|_{Fo=0} = 0, & z \geq 0; \\ W|_{z=0} = \eta(t - t_0^*), & Fo \geq 0; \\ |W(z, Fo)| < \infty, & z \geq 0, Fo \geq 0; \end{cases}$$

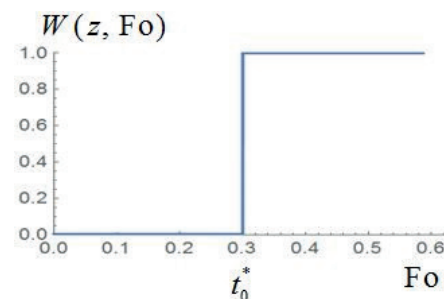


Рис. 2. График безразмерной температурной функции (температура на границе изменяется мгновенно).

Для решения этой краевой задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа. Необходимые формулы выпишем из таблиц, приведенных в [3]:

$$A \xrightarrow{\cdot} A \frac{1}{p}, \quad (1)$$

$$\frac{df}{dt} \xrightarrow{\cdot} p\bar{f}(p) - f(0), \quad (2)$$

$$\eta(t - t_0) \xrightarrow{\cdot} e^{-t_0 p}, \quad t > t_0, \quad (3)$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}\right) \xrightarrow{\cdot} \frac{e^{-z\sqrt{p}}}{p}, \quad (4)$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительная функция ошибок, которая определяется как [6]:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

Для перевода нашей безразмерной задачи в пространство изображений по Лапласу воспользуемся формулами (1) – (3). Операционная задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} - p \bar{W} = 0; z > 0; \\ \bar{W}|_{z=0} = \frac{1}{p} e^{-pt_0^*}; \\ |\bar{W}| < \infty, z \geq 0; \end{cases}$$

Таким образом, мы получили задачу Коши для однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами [2]. Её общее решение имеет вид: $\bar{W} = C_1 e^{-z\sqrt{p}} + C_2 e^{z\sqrt{p}}$; из условия ограниченности константу C_2 принимаем равной нулю.

Найдём константу C_1 , исходя из граничного условия: $\bar{W}|_{z=0} = \frac{1}{p} e^{-pt_0^*}$. Тогда $C_1 = \frac{1}{p} e^{-pt_0^*}$.

Подставив C_1 в выражение для общего решения однородного уравнения, получим операционное решение тепловой задачи [1]: $\bar{W}(z, p) = \frac{1}{p} e^{-pt_0^*} e^{-z\sqrt{p}}$;

Чтобы перевести полученное решение из пространства изображений в пространство оригиналов, нам понадобится формула (4) и теорема запаздывания (5) [1]:

$$f(t - t_0^*) \xrightarrow{\bullet} e^{-pt_0^*} \bar{f}(p) \quad (5)$$

В пространстве оригиналов [1] по Лапласу решение имеет вид:

$$W(z, Fo) = \begin{cases} 0 & (Fo \leq t_0^*) \\ \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Fo - t_0^*}}\right) & (Fo > t_0^*) \end{cases}$$

В системах компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* и *Mathcad* построена серия графических зависимостей $W(z, Fo)$ для различных сечений z и различных значений безразмерного времени Fo ($Fo \in [0; 1]$). Вид некоторых из них представлен ниже на рис. 3–5.

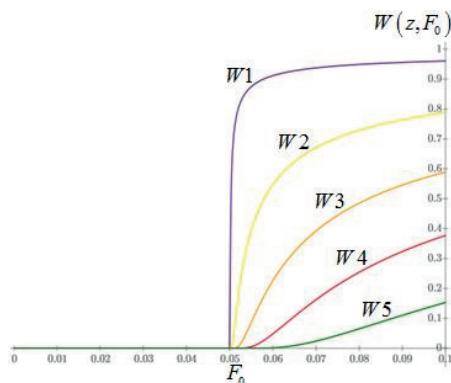


Рис. 3. График зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от Fo при фиксированных значениях z : $W_1 = W(0,01, Fo)$; $W_2 = W(0,085, Fo)$; $W_3 = W(0,18, Fo)$; $W_4 = W(0,27, Fo)$; $W_5 = W(0,45, Fo)$.

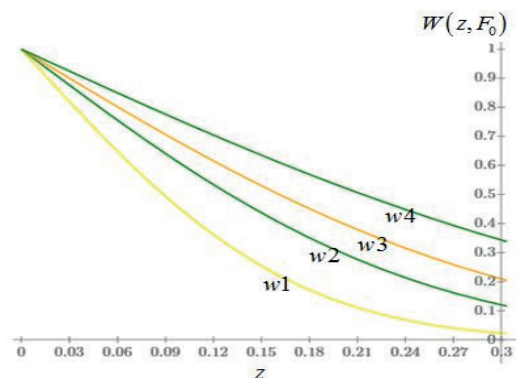


Рис. 4. График зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от z при фиксированных значениях Fo : $w_1 = W(z, 0,2)$; $w_2 = W(z, 0,5)$; $w_3 = W(z, 0,8)$; $w_4 = W(z, 0,1)$.

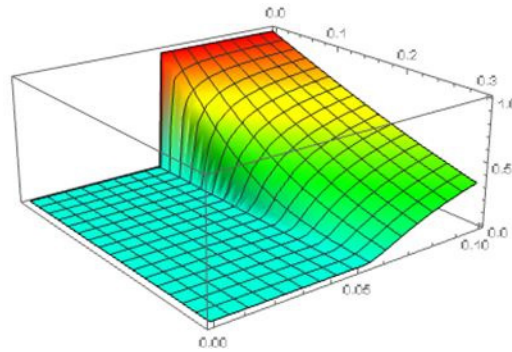


Рис. 5. Трехмерный график зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от z и Fo : $z \in [0; 1]$, $Fo \in [0; 0.4]$ (температура на границе изменяется мгновенно).

Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы:

1) при малых значениях критерия Фурье безразмерная температура имеет максимум на левой границе и постепенно убывает по толщине пластины, тем самым при больших z имеет наименьшее значение;

2) с ростом критерия Фурье (с увеличением времени) температура в пластине стремится к температуре на левой границе, т.е. выравнивается, причем выравнивание тем быстрее, чем меньше z .

Сравним случаи, когда на границе произошел резкий скачок температуры и температура на границе меняется плавно (по линейному закону) от T_0 до T_c за время t_0 (время релаксации [7]).

Пусть в начальный момент времени распределение температуры по толщине пластины равно $T(x, t)|_{t=0} = T_0$. Если на левой границе происходит плавное повышение температуры, описываемое следующей функцией [4, с. 199] $T(x, t)|_{x=l} = T_0 + \frac{T_c - T_0}{t_0} (t - (t - t_0)\eta(t - t_0))$, где $\eta(t - t_0)$ – функция Хевисайда [5] (рис. 6), тогда, чтобы найти закон распределения температуры по толщине пластины, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x > l, t > 0; \\ T(x, t)|_{t=0} = T_0, x \geq l; \\ T(x, t)|_{x=l} = T_0 + \frac{T_c - T_0}{t_0} (t - (t - t_0)\eta(t - t_0)), t \geq 0; \\ |T(x, t)| < \infty, t \geq 0, x \geq l. \end{cases}$$

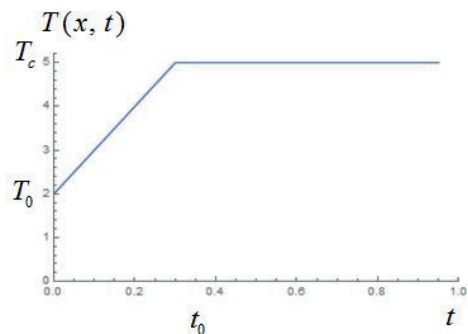


Рис. 6. График температурной функции на границе (температура изменяется плавно, с учетом времени релаксации).

Используя замену $z = \frac{x-l}{l}$, $Fo = \frac{at}{l^2}$ (критерий Фурье), $W(z, Fo) = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}$, имеем задачу в безразмерном виде (рис. 7):

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, z > 0, Fo > 0; \\ W|_{Fo=0} = 0, z \geq 0; \\ W|_{z=0} = \frac{Fo - (Fo - t_0^*)\eta(t - t_0)}{t_0^*}, Fo \geq 0; \\ |W(z, Fo)| < \infty, z \geq 0, Fo \geq 0, \end{cases}$$

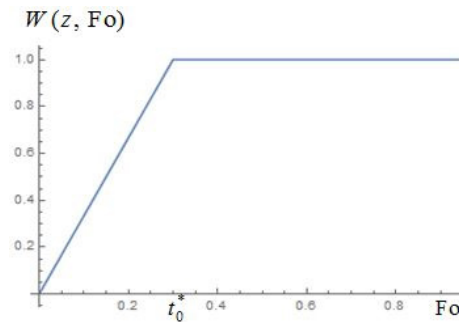


Рис. 7. График безразмерной температурной функции на границе (температура меняется плавно с учетом времени релаксации).

Воспользуемся здесь интегральным преобразованием Лапласа [1] (формулы 1–3). Операционная задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} - p\bar{W} = 0; z > 0; \\ \bar{W}|_{z=0} = \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{t_0^* p^2}; \\ |\bar{W}| < \infty, z \geq 0; \end{cases}$$

Очевидно, что мы получили задачу Коши для однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами [2]. Её общее решение имеет вид: $\bar{W} = C_1 e^{-z\sqrt{p}} + C_2 e^{z\sqrt{p}}$; из условия ограниченности константу C_2 положим равной нулю. Найдём C_1 , исходя из граничного условия: $\bar{W}|_{z=0} = \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{t_0^* p^2}$. $C_1 = \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{t_0^* p^2}$.

Подставив C_1 в выражение для общего решения однородного уравнения [2], получим решение тепловой задачи в пространстве изображений [1]: $\bar{W}(z, p) = \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{t_0^* p^2} e^{-z\sqrt{p}}$.

Чтобы перевести полученное решение из пространства изображений в пространство оригиналов, нам понадобится формула (6) и теорема запаздывания (5) (см. выше).

$$\frac{e^{-z\sqrt{p}}}{p^2} \xrightarrow{\cdot} \left(Fo + \frac{z^2}{2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{Fo}} \right) - z \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4Fo}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n \quad (7)$$

Оригинал полученного решения имеет следующий вид:

$$W'(z, Fo) = \frac{-1}{t_0^*} \left[\left(Fo + \frac{z^2}{2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{Fo}} \right) - z \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4Fo}} \right];$$

$$W(z, Fo) = \begin{cases} 0 & (Fo \leq 0) \\ W'(z, Fo) & (0 < Fo \leq t_0^*) \\ W'(z, Fo) - W'(z, Fo - t_0^*) & (t_0^* < Fo). \end{cases}$$

Серия графических зависимостей $W(z, Fo)$ для различных сечений z от безразмерного времени Fo ($Fo \in [0; 1]$) и наоборот (некоторые из них представлены ниже) построены в системах компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* и *Mathcad* (рис. 8–10).

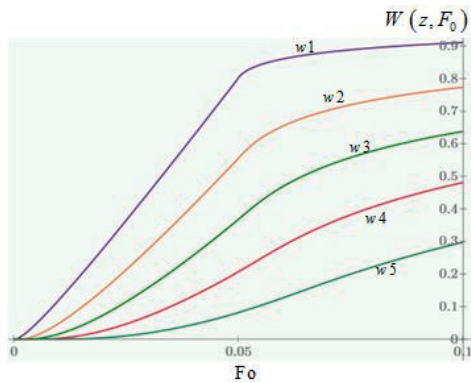


Рис. 8. График зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от Fo при фиксированных значениях z : $w_1=W(0.07, Fo)$, $w_2=W(0.1, Fo)$, $w_3=W(0.18, Fo)$, $w_4=W(0.27, Fo)$, $w_5=W(0.4, Fo)$.

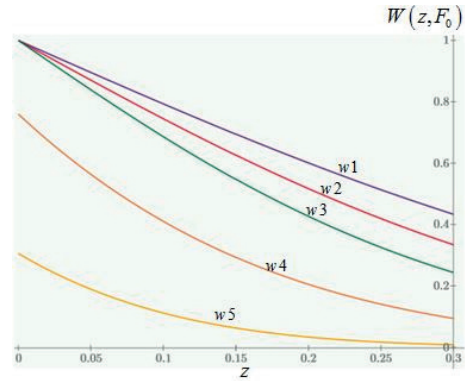


Рис. 9. График зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от z при фиксированных значениях Fo : $w_1=W(z, 0.1)$, $w_2=W(z, 0.075)$, $w_3=W(z, 0.06)$, $w_4=W(z, 0.04)$, $w_5=W(z, 0.01)$.

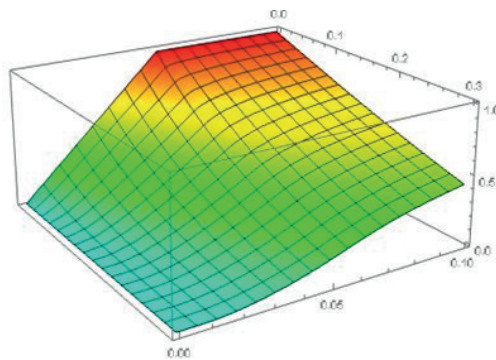


Рис. 10. Трехмерный график зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от z и Fo ; $z \in [0; 1]$, $Fo \in [0; 0.4]$

(температура на границе изменяется плавно с учетом времени релаксации).

Рассмотрение приведенных зависимостей позволяет заключить следующее:

- 1) при малых критериях Фурье безразмерная температура имеет максимум на левой границе и постепенно убывает по толщине пластины, и при больших z имеет наименьшее значение;
- 2) с ростом критерия Фурье (с течением времени) температура в пластине также стремится к температуре на левой границе;
- 3) сравнивая кривую w_5 на рис. 9 с кривой w_4 на рис. 5, можно заметить, что при плавном нагреве, т.е. с учетом времени релаксации на границе пластина прогревается до более высокой температуры.

Далее рассмотрим случай, когда температура на границе меняется мгновенно и многократно. Пусть в начальный момент времени распределение температуры по толщине пластины равно $T(x, t)|_{t=0} = T_0$. На левой границе периодически возникают скачки температуры, описываемые следующим рядом [4, с. 199]:

$$T(x, t)|_{\delta=l} = T_0 + 2(T_c - T_0)q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta(t - nt_0) - \eta(t),$$

где $\eta(t - t_0)$ функция Хевисайда [5].

Соответствующий график приведен на рис. 11.

Чтобы найти закон распределения температуры по толщине пластины, для начала рассмотрим математическую постановку следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x > l, t > 0; \\ T(x, t)|_{t=0} = T_0, x \geq l; \\ T(x, t)|_{x=l} = T_0 + 2q_0 (T_c - T_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta(t - nt_0) - \eta(t), t \geq 0; \\ |T(x, t)| < \infty, t \geq 0, x \geq l; \end{cases}$$

Используя замену $z = \frac{x-l}{l}$, $Fo = \frac{at}{l^2}$ (критерий Фурье), $W(z, Fo) = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}$, получим

эту задачу в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, z > 0, Fo > 0; \\ W|_{Fo=0} = 0, z \geq 0; \\ W|_{z=0} = 2q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta(F_0 - nt_0^*) - \eta(F_0), Fo \geq 0; \\ |W(z, Fo)| < \infty, z \geq 0, Fo \geq 0; \end{cases}$$

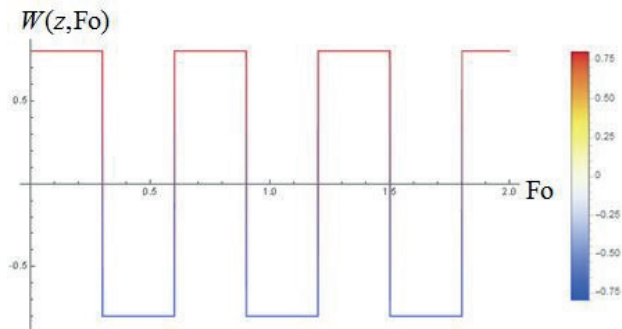


Рис. 11. График зависимости безразмерной температурной функции на границе от критерия Фурье (температура на границе изменяется мгновенно и многократно).

Воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа [1] и формулой (7). Преобразованная безразмерная задача в пространстве изображений имеет вид задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} - p \bar{W} = 0; z > 0; \\ \bar{W}|_{z=0} = \frac{q_0}{p} \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{1 + e^{-pt_0^*}}; \\ |\bar{W}| < \infty, z \geq 0; \end{cases}$$

Решаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид: $\bar{W} = C_1 e^{-z\sqrt{p}} + C_2 e^{z\sqrt{p}}$; из условия ограниченности константу мы берем равной нулю.

Найдём C_1 , исходя из граничного условия: $\bar{W}|_{z=0} = \frac{q_0}{p} \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{1 + e^{-pt_0^*}}$.

Подставив C_1, C_2 в выражение для общего решения однородного уравнения, получим решение тепловой задачи в пространстве изображений:

$$\overline{W}(z, p) = \frac{q_0}{p} \frac{1 - e^{-pt_0^*}}{1 + e^{-pt_0^*}} e^{-z\sqrt{p}};$$

Чтобы перевести полученное решение из пространства изображений в пространство оригиналов, нам понадобятся формулы (4), (5), (7) и следующая замена:

$$\mathcal{G}(z, \text{Fo} - t_0^*) = \begin{cases} 0 & (\text{Fo} \leq t_0^*) \\ \text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\text{Fo} - t_0^*}}\right) & (\text{Fo} > t_0^*) \end{cases}$$

Оригинал имеет вид:

$$\begin{aligned} W(z, \text{Fo}) &= 2q_0 \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathcal{G}(z, \text{Fo} - kt_0^*) - \mathcal{G}(z, \text{Fo}) = \\ &= q_0 \left[\mathcal{G}(z, \text{Fo}) - 2\mathcal{G}(z, \text{Fo} - t_0^*) + 2\mathcal{G}(z, \text{Fo} - 2t_0^*) - \dots - 2(-1)^n \mathcal{G}(z, \text{Fo} - nt_0^*) \right] \end{aligned}$$

В системах компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* и *Mathcad* построена серия графических зависимостей $W(z, \text{Fo})$ для различных сечений z и Фурье Fo ($\text{Fo} \in [0; 2]$). Вид некоторых из них представлен ниже (рис. 12–14).

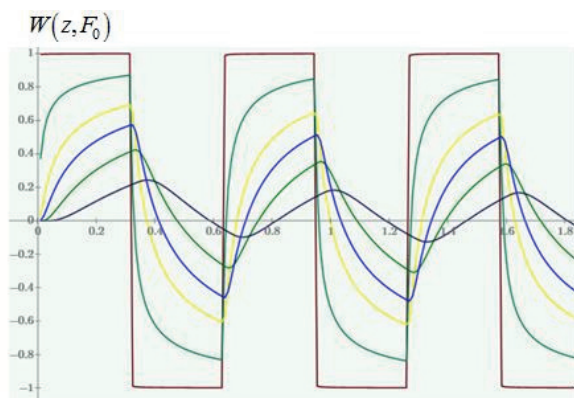


Рис. 12. График зависимости безразмерной температуры $W(z, \text{Fo})$ от Fo при фиксированных значениях: $z = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 0.9\}$.

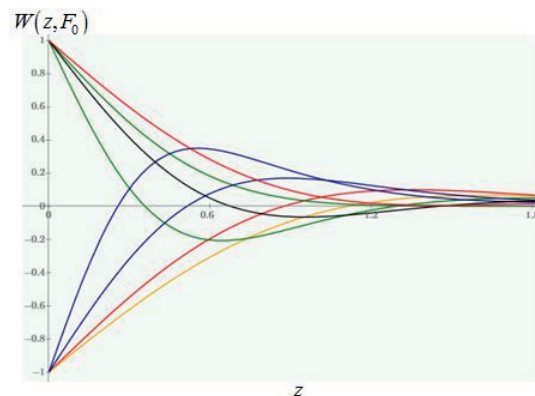


Рис. 13. График зависимости безразмерной температуры $W(z, \text{Fo})$ от z при фиксированных значениях: $\text{Fo} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 0.9\}$.

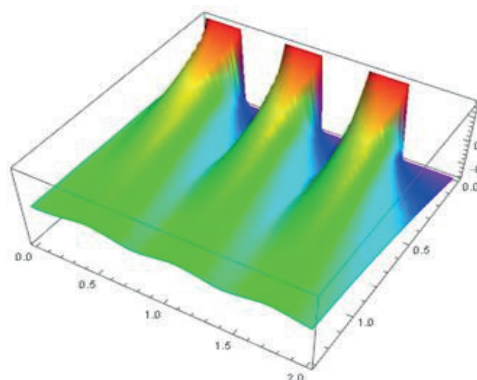


Рис. 14. Трехмерный график зависимости $W(z, \text{Fo})$ от z и Fo ; $z \in [0; 1.3]$, $\text{Fo} \in [0; 2]$ (температура на границе изменяется мгновенно и многократно).

Заключение

При импульсных нагрузках на левой границе безразмерная температура для различных небольших значений z может очень сильно различаться, но постепенно по толщине пластины она выравнивается, и для значений $z > 1.5$ практически не меняется с течением времени.

Литература:

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложениям. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1959. 179 с.
4. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Математические модели теплопроводности и термоупругости: 2-ое издание переработанное и дополненное. Самара: Самарский государственный технический университет, 2013. 877 с.
5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 228 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.
7. Чертищев В.В., Чертищев В.В. Расчет полей температур и тепловых потоков в неподвижной среде методом конечных элементов // Изв. Алтайского гос. ун-та. 2011. № 1-2 (69). С.176–180.

References:

1. Doetsch G. Guide to the practical application of Laplace transform and Z-transform. M.: Nauka Publ., 1971. 288 p. (in Russ.).
2. Filippov A.F. Collection of exercises on differential equations. Izhevsk: NIC «Regular and chaotic dynamics», 2000. 176 p. (in Russ.).
3. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Operational calculus in two variables and its applications. M.: State publishing house of physico-mathematical literature, 1959. 179 p. (in Russ.).
4. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Mathematical models of heat conduction and thermoelasticity: 2nd edition revised and expanded. Samara: Samara State Technical University, 2013. 877 p. (in Russ.).
5. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral transforms and operational calculus: Textbook for high schools / Under the editorship of B.C. Zarubin, A.P. Krishchenko. 2nd ed. M.: MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2002. 228 p. (in Russ.).
6. Korn G., Korn T. Reference book on mathematics (for scientists and engineers). M.: Nauka Publ., 1974. 832 p. (in Russ.).

7. Chertishev V.V., Chertishev V.V. Calculation of the temperature fields and heat fluxes in a stationary environment by finite element method // Izvestiya of Altai State University. 2011. № 1-2 (69). P. 176-180. (in Russ.).

Об авторах:

Джемесюк Ирина Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д.86).

Горбунوف Сергей Германович, студент кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д.86).

About authors:

Irina A. Dzhemesiuk, Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow, 119571, Russia).

Sergey G. Gorbunov, student, the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow, 119571, Russia).