

푸리에 변환

동의대학교 창의소프트웨어공학부
응용소프트웨어공학전공

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)



푸리에 이론(Fourier Theory)

목 차

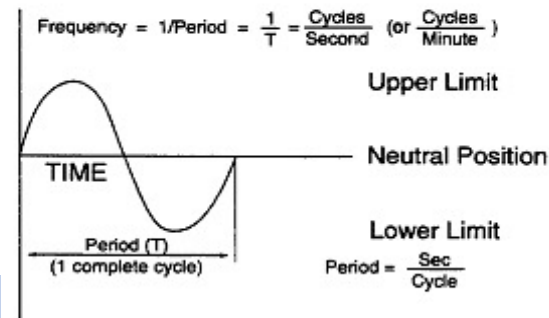
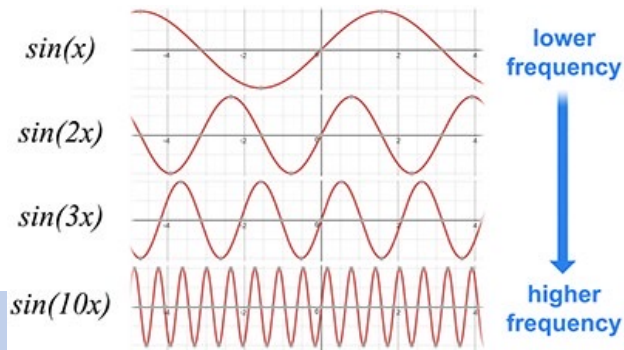
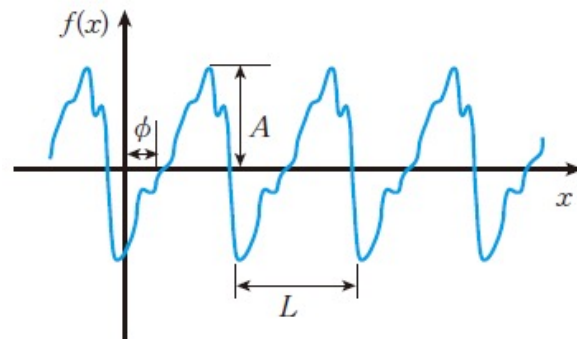
- 1) 푸리에 이론
- 2) 이산 푸리에 변환
- 3) 고속 푸리에 변환

주파수 영역(Frequency Domain)

- 디지털영상: 아날로그신호 → 디지털신호 (샘플링과 양자화)
- 아날로그 신호의 주파수 영역으로 변환하여 다룰 수 있음

- 주기 신호(Periodic Signal)

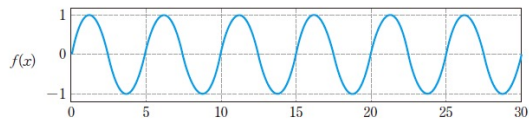
- $f(x + L) = f(x)$
- A: 진폭(Amplitude)
- ϕ : 위상(Phase)
- L or T : 주기(Period), 공간(cm, m, ...), 시간(sec, min, ...)
- 주파수(Frequency) : $1 / L$ (cycle/sec, cycle/meter ...)



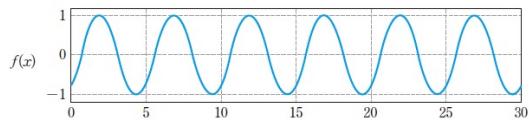
주기 신호 예

1차원 신호

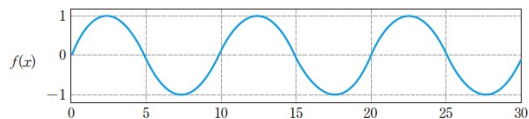
$$f(x) = C + A \sin\left\{\frac{2\pi ux}{N} + \phi\right\}$$



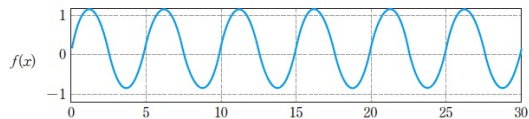
(a) $u=6, \phi=0, C=0, N=30$



(b) $u=6, \phi=-\pi/4, C=0, N=30$



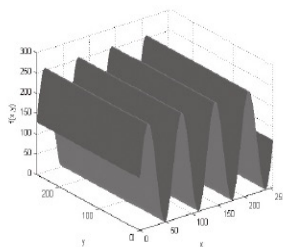
(c) $u=3, \phi=0, C=0, N=30$



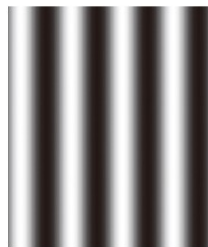
(d) $u=6, \phi=0, C=0.2, N=30$

2차원 신호

$$f(x, y) = C + A \sin\left\{\frac{2\pi(ux + vy)}{N} + \phi\right\}$$



(a) $u=4, v=0, \phi=0, N=256$ 일 때의 3차원 그래프



(b) (a)의 2차원 영상



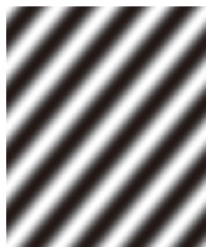
(c) $u=4, v=0, \phi=\pi/2, N=256$



(d) $u=8, v=0, \phi=\pi/2, N=256$



(e) $u=0, v=4, \phi=0, N=256$



(f) $u=4, v=4, \phi=0, N=256$

푸리에(Fourier)

- Jean Baptiste Joseph Fourier (03/21/1768-05/16/1830)

- French mathematician and physicist
- Orphaned: at nine
- Egyptian expedition with Napoleon I: 1798
- Permanent Secretary of the French Academy of Sciences: 1822
- Théorie analytique de la chaleur (The Analytic Theory of Heat) : 1822
- Fourier Series(푸리에 급수) and Fourier Transform(푸리에 변환)



- 푸리에 이론

- 주기적인 신호는 사인과 코사인 함수의 합으로 표현할 수 있다
- 매우 복잡한 신호라도 주기적이면 삼각함수의 급수로 표현할 수 있다
- 주기적인 현상은 물리와 공학에서 아주 빈번하게 발생하므로 적용 가능

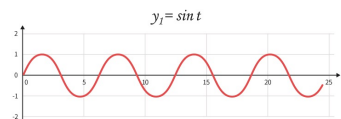
푸리에 급수(Fourier Series)

- 모든 주기 함수는 각기 다른 주파수의 sine 과 cosine에 각각 다른 계수를 곱한 합으로 표현할 수 있다

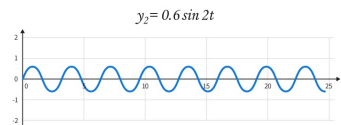
- 기저함수(basis function): 사인/코사인 함수 → 모든 시공간 함수는 기저함수의 선형 결합

Fourier series, sine-cosine form

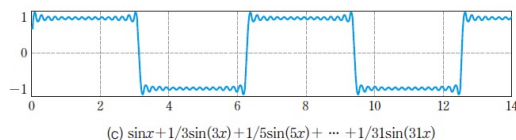
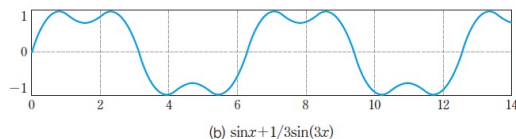
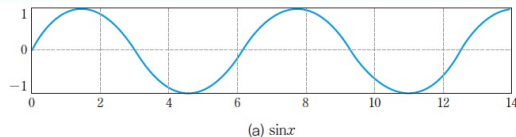
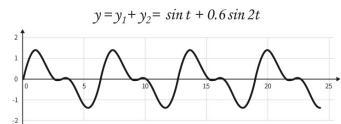
$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) \right)$$



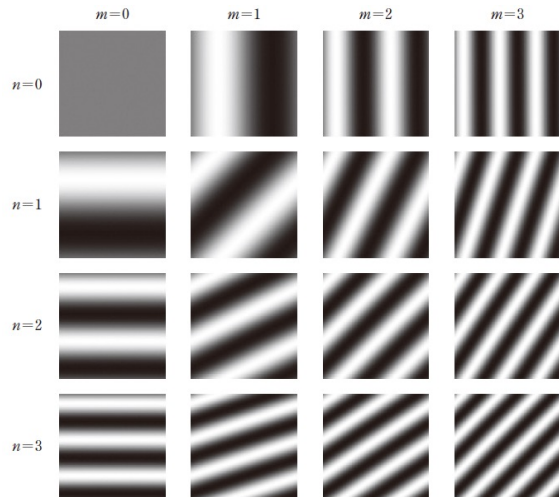
+



||



$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[a_{u,v} \cos(ux + vy) \omega_0 + b_{u,v} \sin(ux + vy) \omega_0 \right]$$



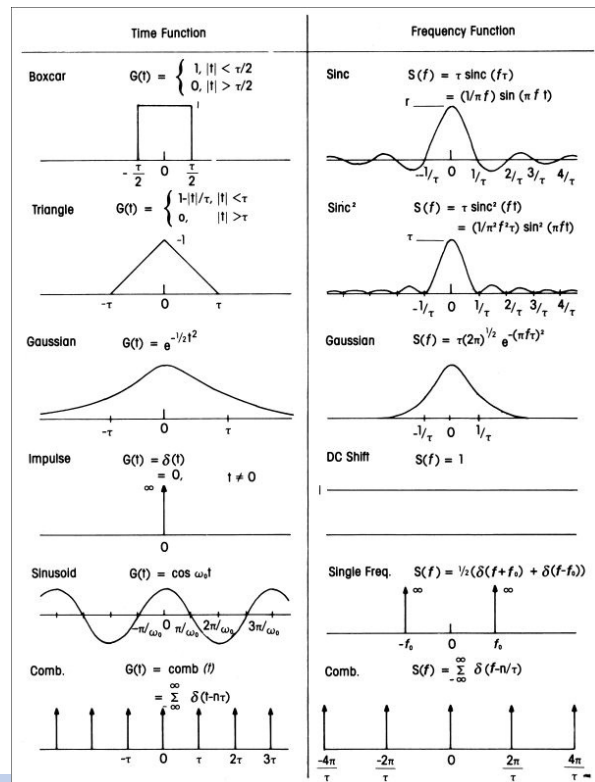
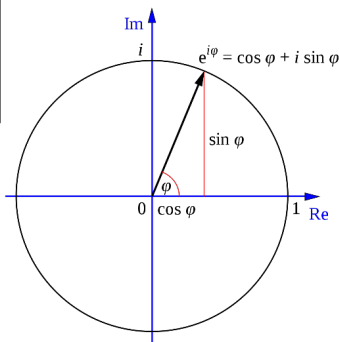
푸리에 변환(Fourier Transformation)

- 주기적이지 않은 함수들도 가중 함수로 곱해진 sine과 cosine들의 적분으로 표현될 수 있다
- 비주기적인 함수에 기저함수들의 공헌 정도를 결정하는 수단을 제공
- 공간 영역 \rightarrow 주파수 영역

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\{\cos(2\pi ux) - jsin(2\pi ux)\} dx$$

오일러 공식



푸리에 역변환

- 푸리에 역변환 : 주파수 영역 \rightarrow 공간 영역

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$ $= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\{\cos(2\pi ux) + j\sin(2\pi ux)\} du$	$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\{\cos(2\pi ux) - j\sin(2\pi ux)\} dx$
--	---

↑ 푸리에 변환쌍 ↑

- 푸리에 변환쌍 활용

- 공간 영상 \rightarrow 푸리에 변환 \rightarrow 주파수 영역에서의 필터링 \rightarrow 필터링된 주파수 \rightarrow 푸리에 역변환 \rightarrow 결과 공간 영상
- 공간 영역에서 결과 보다 아날로그적 신호 처리가 가능



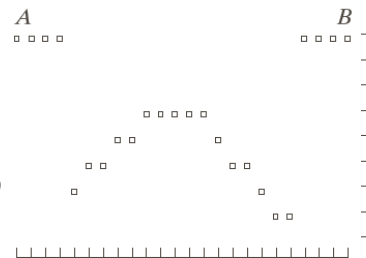
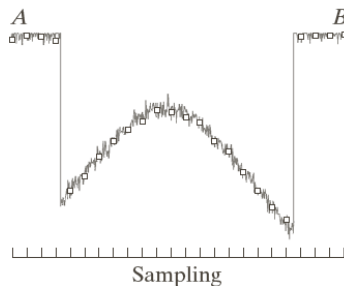
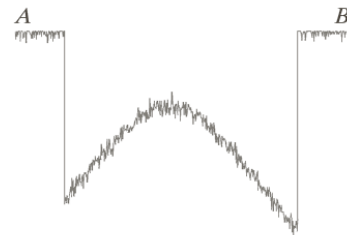
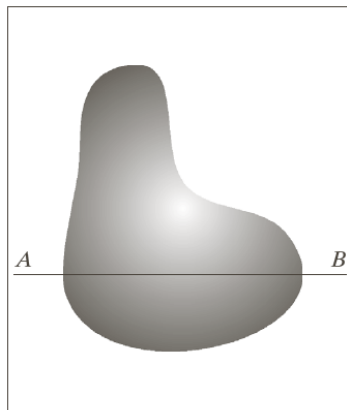
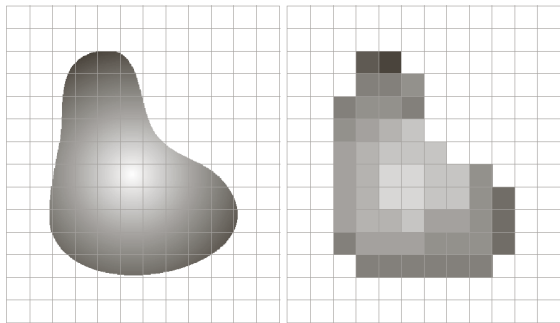
이산 푸리에 변환

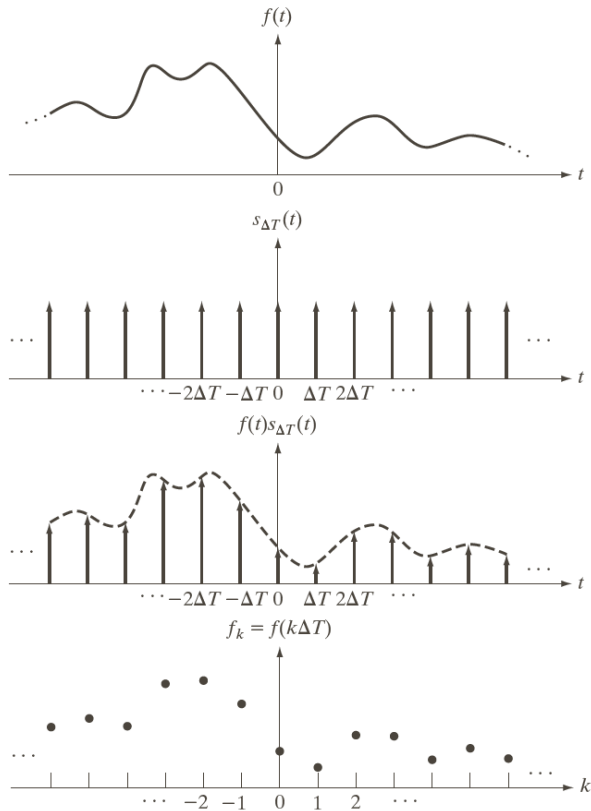
목 차

- 1) 푸리에 이론
- 2) 이산 푸리에 변환
- 3) 고속 푸리에 변환

• 샘플링(Sampling) 과 양자화(Quantization)

- 영상 노이즈
- 가로축 : 샘플링
- 세로축 : 양자화





$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

이산 푸리에 변환(Discrete FT)

- 샘플링된 함수의 연속적 변환으로 부터 DFT 유도

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}\end{aligned}$$

$$\tilde{f}(t) = f(t) s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T)$$

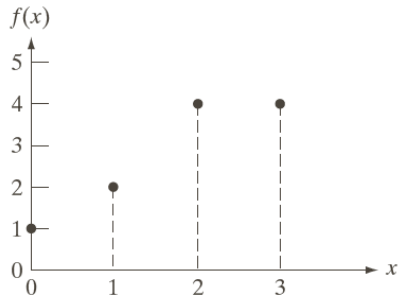
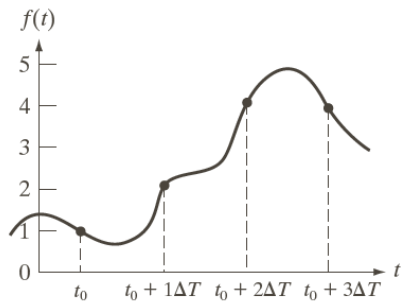
$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - k\Delta T) dt = f(k\Delta T)$$

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T}$$

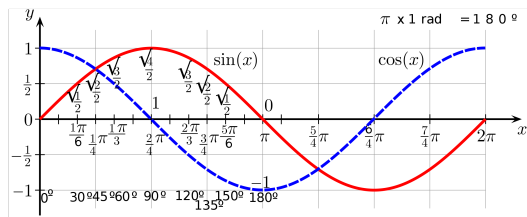
$$m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi n m / M}$$

DFT 예



$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x)e^{-j2\pi x(1)/4} = 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

$$F(2) = -(1 + 0j), F(3) = -(3 + 2j)$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u)e^{j2\pi u(0)} = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) = \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j] = 1$$

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi nm/M}$$

$$f(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} F_n e^{j2\pi nm/M}$$

이산 푸리에 변환 쌍

- M x N 크기의 f(x, y)의 DFT

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi (ux/M + vy/N)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

- M x N 크기의 F(u, v)의 inverse DFT

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi (ux/M + vy/N)}$$

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi nm/M}$$

$$f(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} F_n e^{j2\pi nm/M}$$

DFT 특징

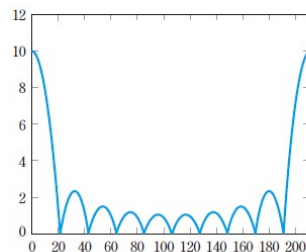
- $f(x,y)$ 는 실수 함수라도 $F(u,v)$ 는 일반적으로 복소수
- $F(u,v)$ 한쌍의 \cos, \sin 의 기저 함수가 $f(x,y)$ 에 공헌하는 정도를 나타냄

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} \right]$$

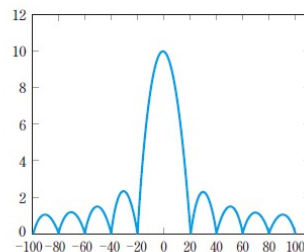
- 역 DFT를 이용해 $f(x,y)$ 를 구할 수 있고, $M=N$ 이면,
- DFT & 역DFT 는 N 주기성을 가짐 \rightarrow 원점 이동 가능

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux + vy)/N}$$

$$F(u,v) = F(u, v+N) = F(u+N, v+N)$$



(a) 원점을 옮기기 전의
푸리에 스펙트럼



(b) 원점을 $(N/2, N/2)$ 로 이동시킨
푸리에 스펙트럼

푸리에 변환 분석

- 실수 함수의 푸리에 변환은 일반적으로 복소수
- 실수부와 허수부 그 자체로는 특별한 정보를 제공하지 못함
- 크기와 위상이 훨씬 쓸모 있음.

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{uy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{uy}{N} \right) \right\} \right]$$

- 복소수에 대하여

- $j = \sqrt{-1}$, $C = R + jI$
- 켈레복소수: $C^* = R - jI$
- 크기: $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$
- 위상: $\theta = \arctan(I/R)$
- $C = |C|(\cos \theta + j \sin \theta)$
- $C = |C|e^{j\theta}$

DFT 관련 스펙트럼

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} \right]$$

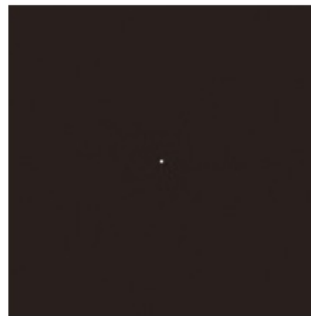
- 푸리에 스펙트럼: $|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{\frac{1}{2}}$

- 위상 스펙트럼: $\varphi(u,v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \right]$

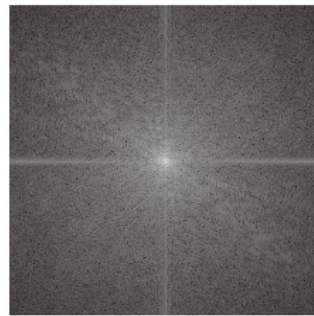
- 스펙트럼 사상(Projection)

- 선형사상: $G(u,v) = 255 \frac{|F(u,v)|}{|F(u,v)|_{\max}}$

- 대수/로그사상: $G(u,v) = C \log(|F(u,v)| + 1)$



(a) 선형 사상

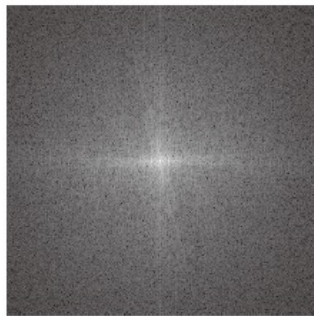


(b) 로그 사상

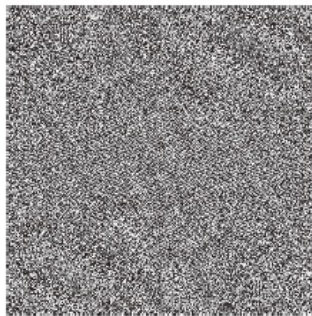
푸리에 스펙트럼 예)



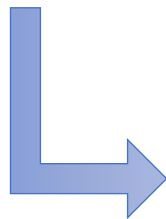
(a) 원영상



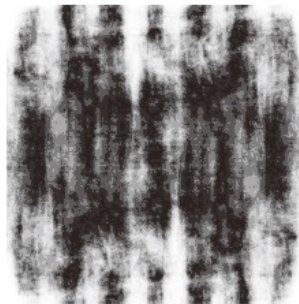
(b) 푸리에 스펙트럼



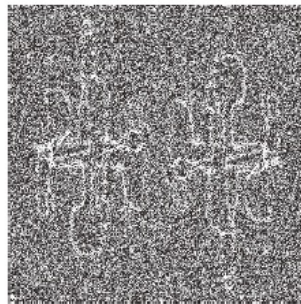
(c) 위상 스펙트럼



(a) 두 스펙트럼으로부터
복원한 영상



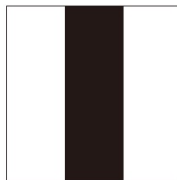
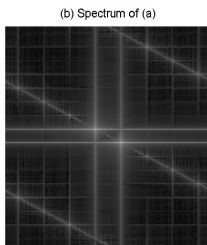
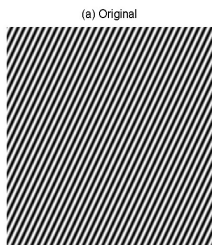
(b) 푸리에 스펙트럼만으로
복원한 영상



(c) 위상 스펙트럼만으로
복원한 영상

푸리에 스펙트럼의 해석

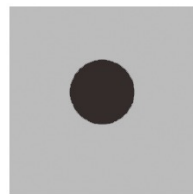
- 스펙트럼의 각 화소는 공간 주파수에 있어서 꼭 당 한 주기의 변화를 나타냄
- 원점에서 멀리 떨어진 화소는 더 높은 공간 주파수를 나타냄
- 원점은 직류 항이라고 불리는 상수 항임.
- 영상의 모든 화소가 같은 회색조 이면, 이 영상의 푸리에 스펙트럼은 오직 원점에서만 높은 값을 가짐.
- 대부분의 스펙트럼은 원점 근처에 높은 값들이 뭉쳐있거나, 축을 따라 높은 값들을 갖는다.



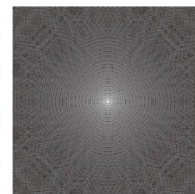
(a) 날카로운 모서리



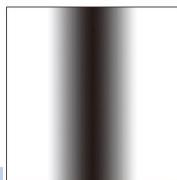
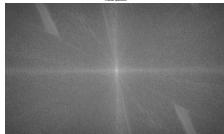
(b) (a)의 푸리에 스펙트럼



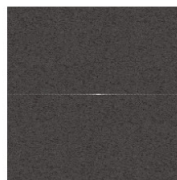
(a) 검은 원판



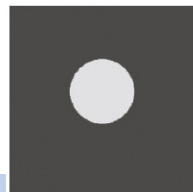
(b) (a)의 푸리에 스펙트럼



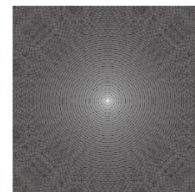
(c) 부드러운 모서리



(d) (c)의 푸리에 스펙트럼



(c) 흰 원판



(d) (c)의 푸리에 스펙트럼



고속 푸리에 변환

목 차

- 1) 푸리에 이론
- 2) 이산 푸리에 변환
- 3) 고속 푸리에 변환

DFT 속도 향상 → 고속 푸리에 변환(FFT)

- N 개의 데이터에 대한 1차원 DFT: N^2 복잡도

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M}$$

- $M \times N$ 크기의 영상에 대한 2차원 DFT: $M^2 \times N^2$ 의 복잡도 예) $1024 \times 1024 \rightarrow 2^{40}$
- 많은 시간이 소요되어 실시간으로 적용하기 어려움

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{uy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{uy}{N} \right) \right\} \right]$$

- 고속 푸리에 변환(FFT, Fast Fourier Transform)

- N 길이의 DFT는 $N/2$ 길이의 두 개의 DFT의 합과 같음
- 1차원 FFT: $N \log_2 N$
- 2차원 FFT: $\frac{MN}{2} \log_2 MN$ 예) $1024 \times 1024 \rightarrow 2^{20} \times 10$
- 영상의 크기를 나타내는 M과 N의 값이 2의 지수승이어야 함

1D FFT 알고리즘 (1/6)

- 입력 신호 값 : $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$
- 푸리에 변환 결과값 : $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi nm/M}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$W_N^{nk} = e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

- 짝수항과 홀수항 분리
$$X(k) = \sum_{n=0,2,\dots}^{N-2} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

- NO이 짝수: $n = 2r$

- NO이 홀수: $n = 2r+1$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) (W_N^2)^{rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{2rk} W_N^k \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) (W_N^2)^{rk} \end{aligned}$$

1D FFT 알고리즘 (2/6)

$$\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)(W_N^2)^{rk}$$



$$W_N^2 = e^{-j2\pi\frac{2}{N}} = e^{-j2\pi\frac{1}{(N/2)}} = W_{N/2}^1$$

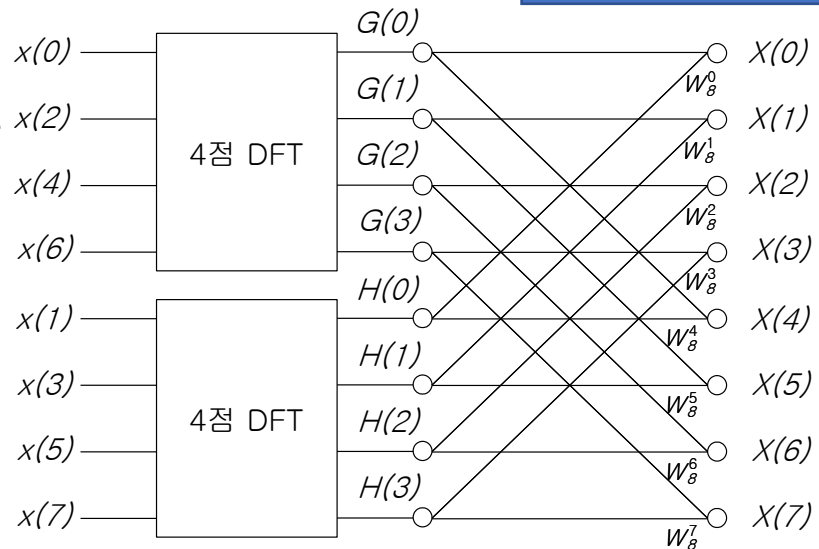
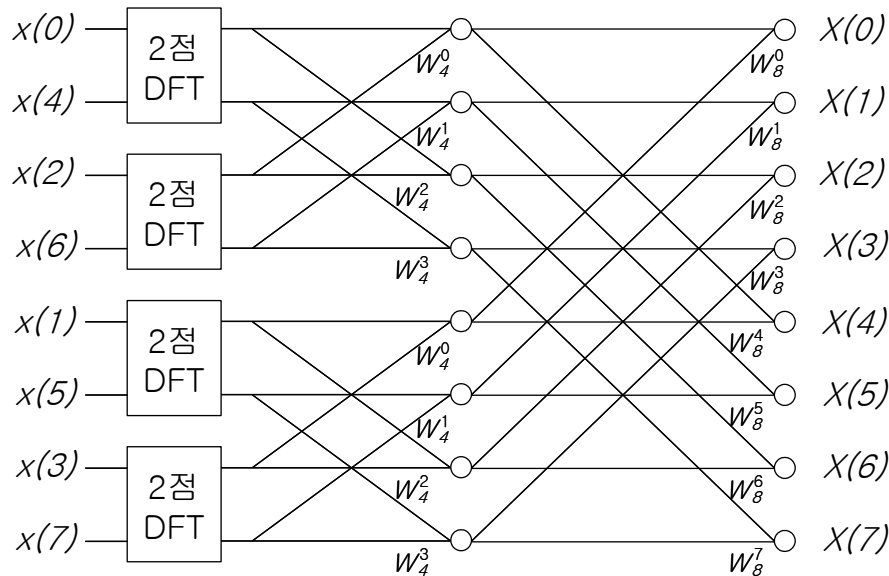
$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} \\ &= G(k) + W_N^k H(k) \end{aligned}$$

- $X(k)$: N 개의 데이터에 대한 1차원 DFT
- $G(k)$: $N/2$ 개의 데이터에 대한 1차원 DFT
- $H(k)$: $N/2$ 개의 데이터에 대한 1차원 DFT

1D FFT 알고리즘 (3/6)

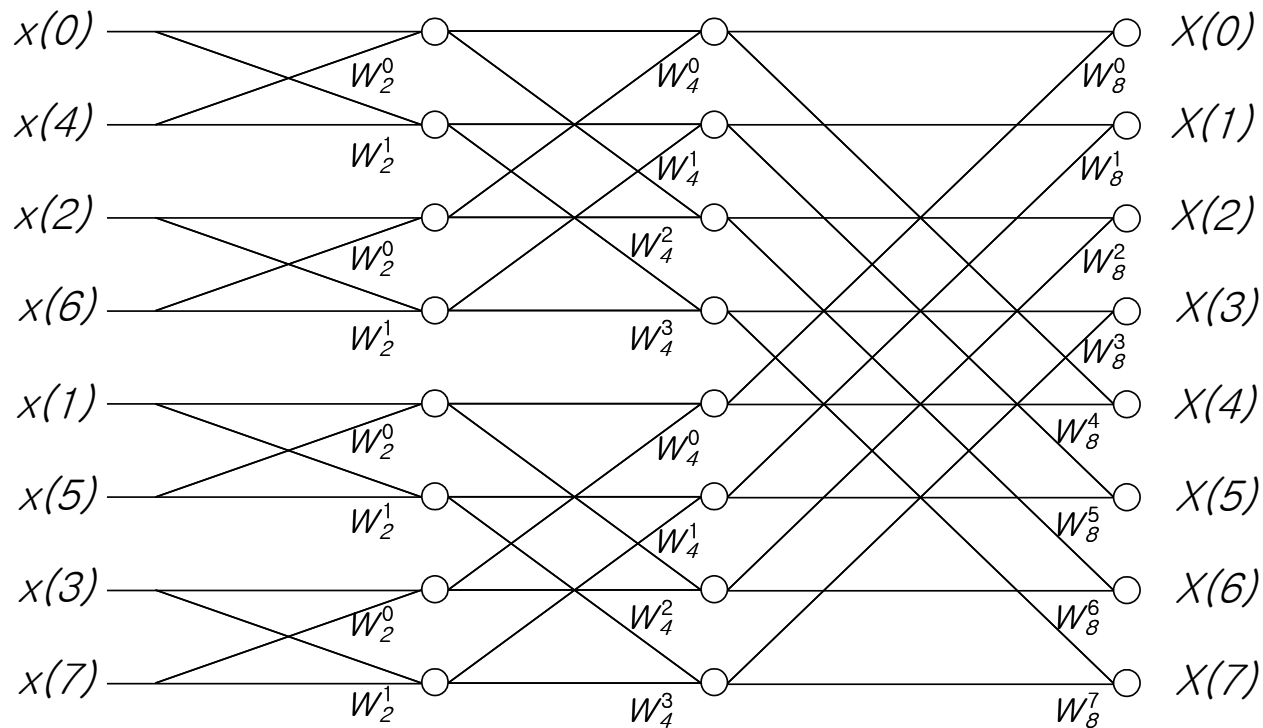
• N=8인 경우 1차분할 후의 $X(k)$ 연산에 대한 흐름도 $X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$

• N=8인 경우 2차분할 후의 $X(k)$ 연산에 대한 흐름도



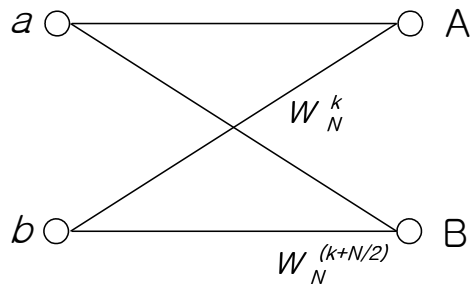
1D FFT 알고리즘 (4/6)

- N=8일 경우 최종 FFT 흐름도: 복잡도 $N \log_2 N$



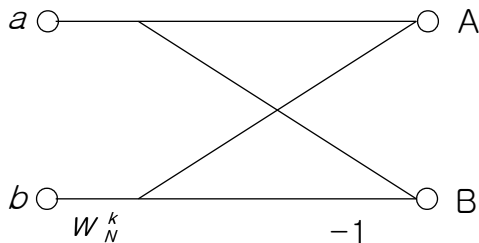
1D FFT 알고리즘 (5/6)

- 흐름도에서 각 노드는 다음 그림과 같이 나비 형태임



$$\begin{aligned} W_N^{(k+N/2)} &= W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-j2\pi(N/2)/N} \\ &= W_N^k e^{-j\pi} = W_N^k (\cos(\pi) - j\sin(\pi)) \\ &= -W_N^k \end{aligned}$$

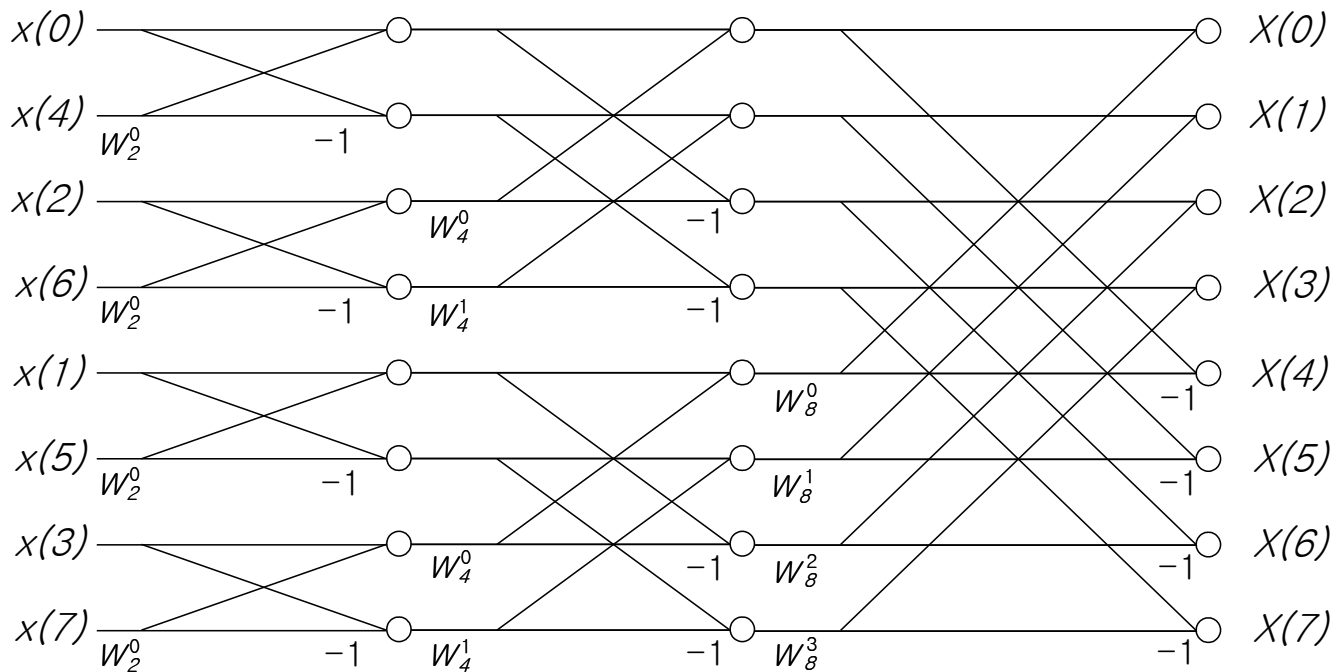
- 나비 흐름도의 계산 식은 다음과 같이 간략화 됨



$$\begin{aligned} A &= a + bW_N^k \\ B &= a + bW_N^{(k+N/2)} = a - bW_N^k \end{aligned}$$

1D FFT 알고리즘 (6/6)

- 간략화된 FFT 흐름도: 복잡도가 $(N/2)\log_2 N$

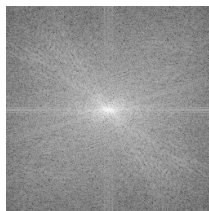
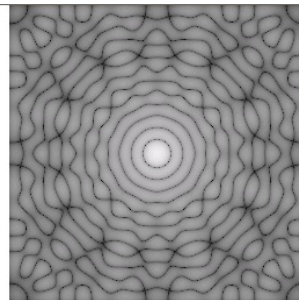
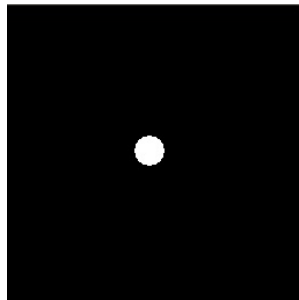
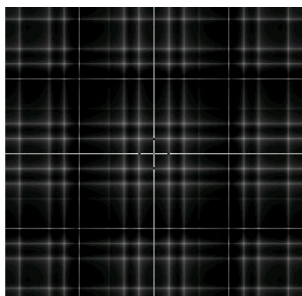
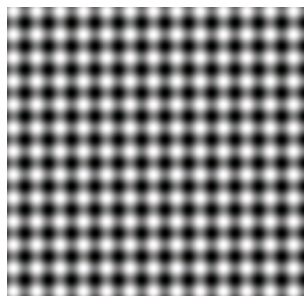
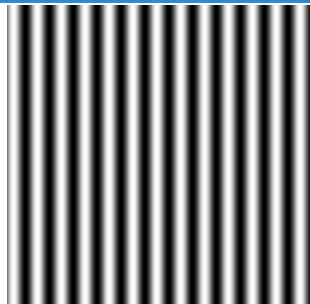
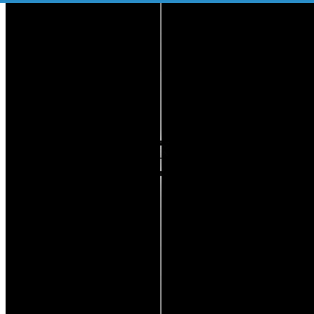
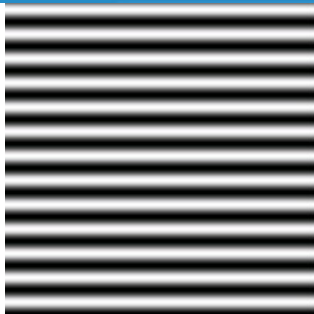


FFT의 구현

- $N=8$ 인 경우의 FFT 흐름도에서 입력 데이터의 순서
- $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$ 과 같이 순서가 일정하지 않음
- 각 인덱스의 이진수 비트들을 역순으로 표현하면 이러한 순서를 간단하게 생성할 수 있음

인덱스	이진수 표현	역순의 이진수	변환된 인덱스
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

FFT의 예



Q & A

동의대학교 응용소프트웨어공학전공

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)