

2주: 주파수 영역 필터링

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)

2주: 주파수 영역 필터링

1 푸리에 변환

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)

주파수 영역 (Frequency Domain)

- 아날로그신호 → 디지털신호 (샘플링과 양자화)

- 주기 신호 (Periodic Signal)

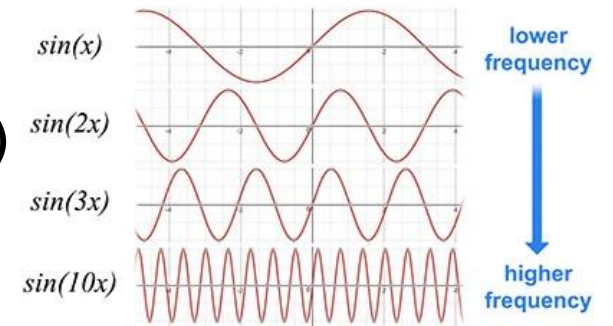
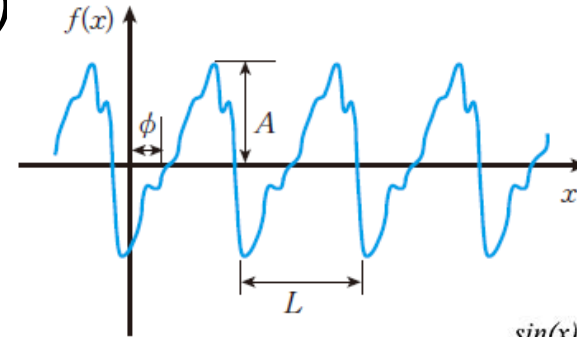
- $f(x + L) = f(x)$

- A: 진폭 (Amplitude)

- ϕ : 위상 (Phase)

- L or T: 주기 (Period), 공간 (cm, m, ...), 시간 (sec, min, ...)

- 주파수 (Frequency) : $1 / L$ (cycle/sec, cycle/meter ...)



- 푸리에이론: Fourier Series (푸리에 급수) and Fourier Transform (푸리에 변환)

- 주기적인 신호는 사인과 코사인 함수의 합으로 표현할 수 있다

- 매우 복잡한 신호라도 주기적이면 삼각함수의 급수로 표현할 수 있다

- 주기적이지 않은 함수들도 가중 함수로 곱해진 사인 코사인 적분으로 표현될 수 있다

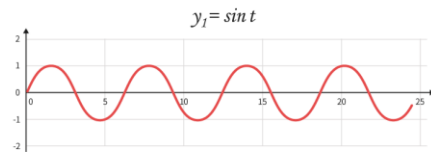
푸리에 급수(Fourier Series)

- 모든 주기 함수는 각기 다른 주파수의 사인 각각 다른 계수를 곱한 합으로 표현 가능
- 모든 시공간 함수는 기저함수(basis function, sine/cosine)의 선형 결합

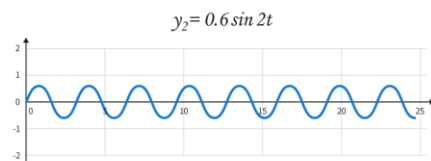
Fourier series, sine-cosine form

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{P}\right) \right)$$

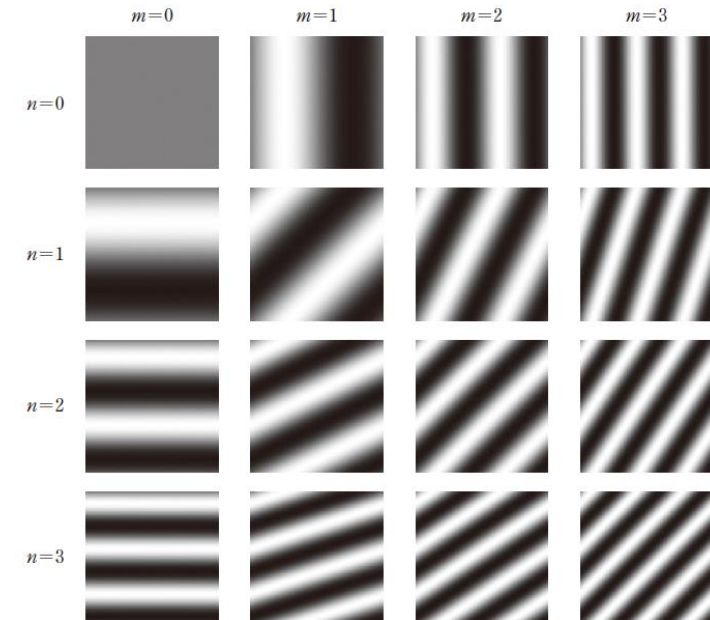
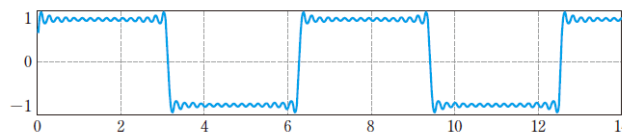
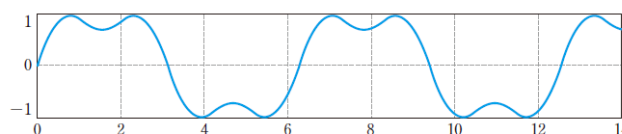
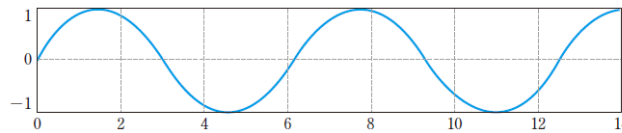
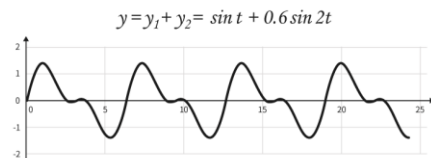
$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[a_{u,v} \cos(ux+vy)\omega_0 + b_{u,v} \sin(ux+vy)\omega_0 \right]$$



+



||

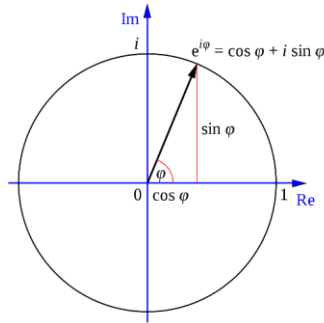


푸리에 변환(Fourier Transformation)

- 주기적이지 않은 함수들도 가중 함수로 곱해진 sine과 cosine들의 적분으로 표현 가능
- 비주기적인 함수에 기저함수들의 공헌 정도를 결정하는 수단을 제공
- 공간 영역 → 주파수 영역

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \{ \cos(2\pi ux) - j \sin(2\pi ux) \} dx$$

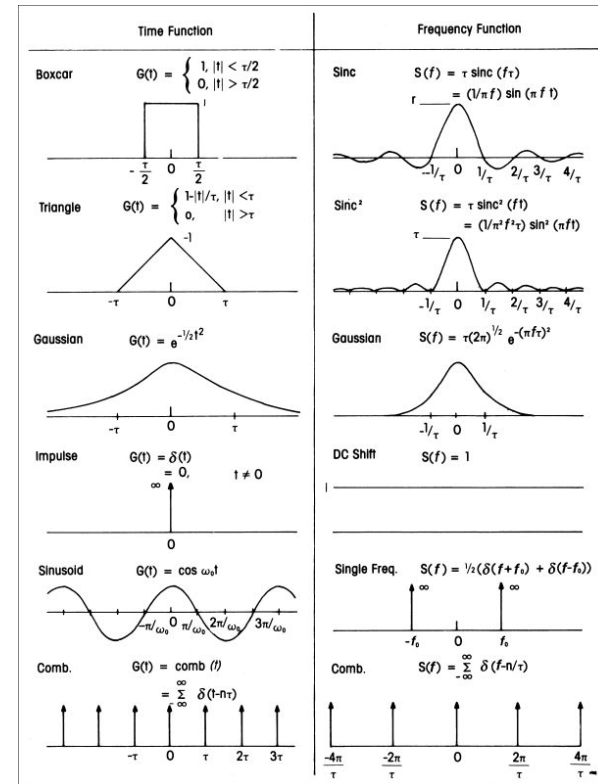


- 푸리에 역변환: 주파수 영역 → 공간 영역

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \{ \cos(2\pi ux) + j \sin(2\pi ux) \} du$$

- 푸리에 변환쌍 활용: 아날로그 신호 처리가 가능



이산 푸리에 변환(Discrete FT, DFT)

- 1D DFT

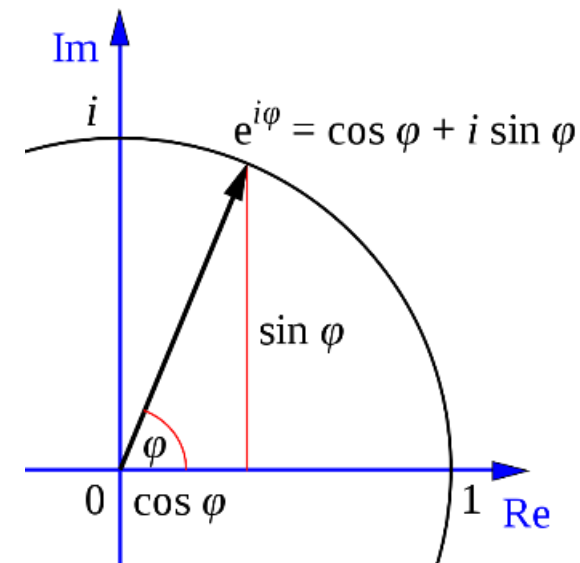
$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi nm/M}$$

$$f(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} F_n e^{j2\pi nm/M}$$

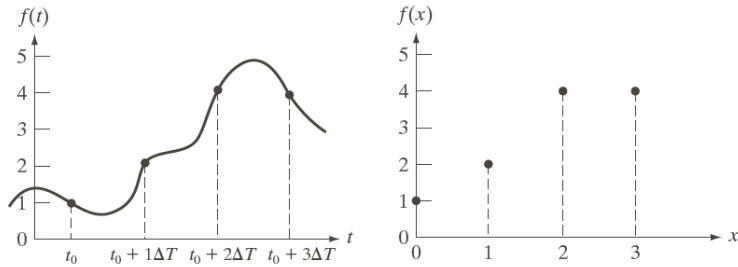
- 2D DFT

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi (ux/M + vy/N)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi (ux/M + vy/N)}$$



DFT 예



$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x)e^{-j2\pi x(1)/4} = 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

$$F(2) = -(1 + 0j), F(3) = -(3 + 2j)$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u)e^{j2\pi u(0)} = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) = \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j] = 1$$

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi nm/M}$$

$$f(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} F_n e^{j2\pi nm/M}$$

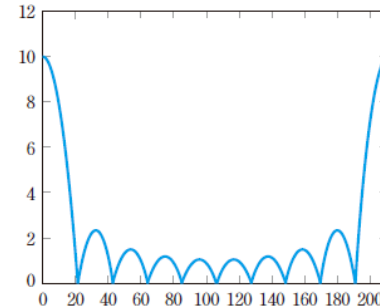
DFT 활용

- M=N 이면

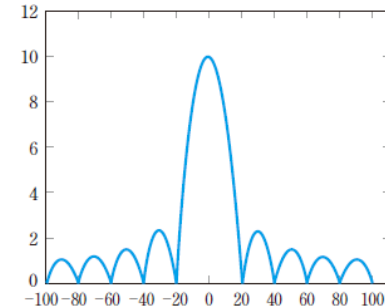
$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)/N}$$

- N 주기성을 가짐 → 원점 이동 가능

$$F(u,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$$



(a) 원점을 옮기기 전의 푸리에 스펙트럼



(b) 원점을 (N/2, N/2)로 이동시킨 푸리에 스펙트럼

- 실수 함수의 푸리에 변환은 일반적으로 복소수

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$$

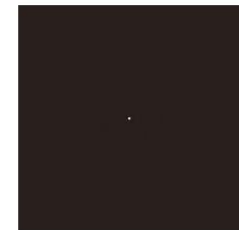
- 푸리에 스펙트럼 $|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{\frac{1}{2}}$

- 위상 스펙트럼

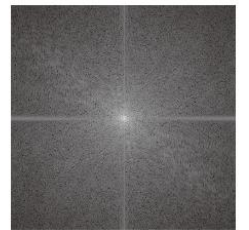
$$\phi(u,v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \right]$$

- 스펙트럼 사상(Projection): 선형, 대수/로그 사상

$$G(u,v) = 255 \frac{|F(u,v)|}{|F(u,v)|_{\max}}$$



(a) 선형 사상



(b) 로그 사상

$$G(u,v) = C \log(|F(u,v)| + 1)$$

DFT 속도 향상 → 고속 푸리에 변환(FFT)

- N 개의 데이터에 대한 1차원 DFT: N^2 복잡도
- $M \times N$ 크기의 영상에 대한 2차원 DFT: $M^2 \times N^2$ 의 복잡도 예) $1024 \times 1024 \rightarrow 2^{40}$
- 많은 시간이 소요되어 실시간으로 적용하기 어려움

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left[\cos \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{uy}{N} \right) \right\} - j \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{uy}{N} \right) \right\} \right]$$

- 고속 푸리에 변환(FFT, Fast Fourier Transform)
 - N 길이의 DFT는 N/2 길이의 두 개의 DFT의 합과 같음
 - 2차원 FFT: $\frac{MN}{2} \log_2 MN$, 예) $1024 \times 1024 \rightarrow 2^{20} \times 10$
 - 영상의 크기를 나타내는 M과 N의 값이 2의 지수승이어야 함

FFT 원리: 1D 예 (1/2)

- 입력 신호 값: $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$

- 짝수항과 홀수항 분리: $X(k) = \sum_{n=0,2,\dots}^{N-2} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$

$$W_N^{nk} = e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

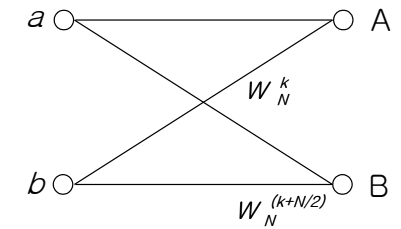
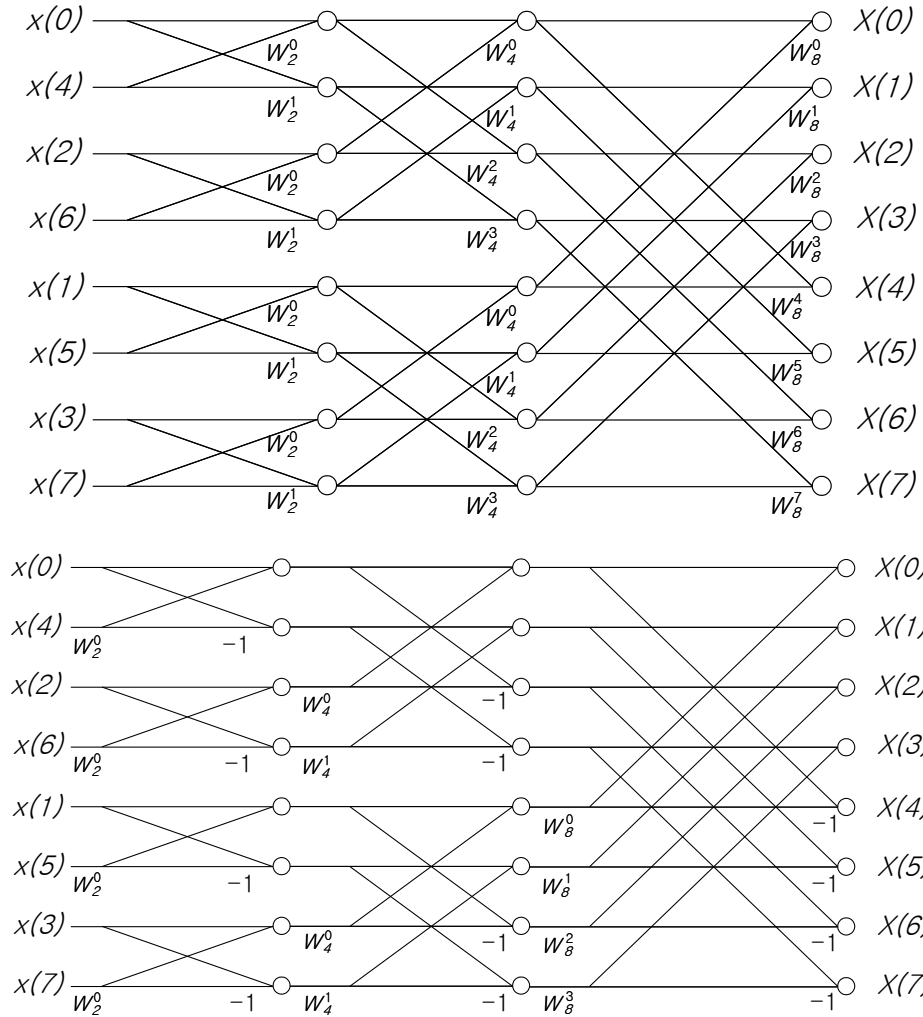
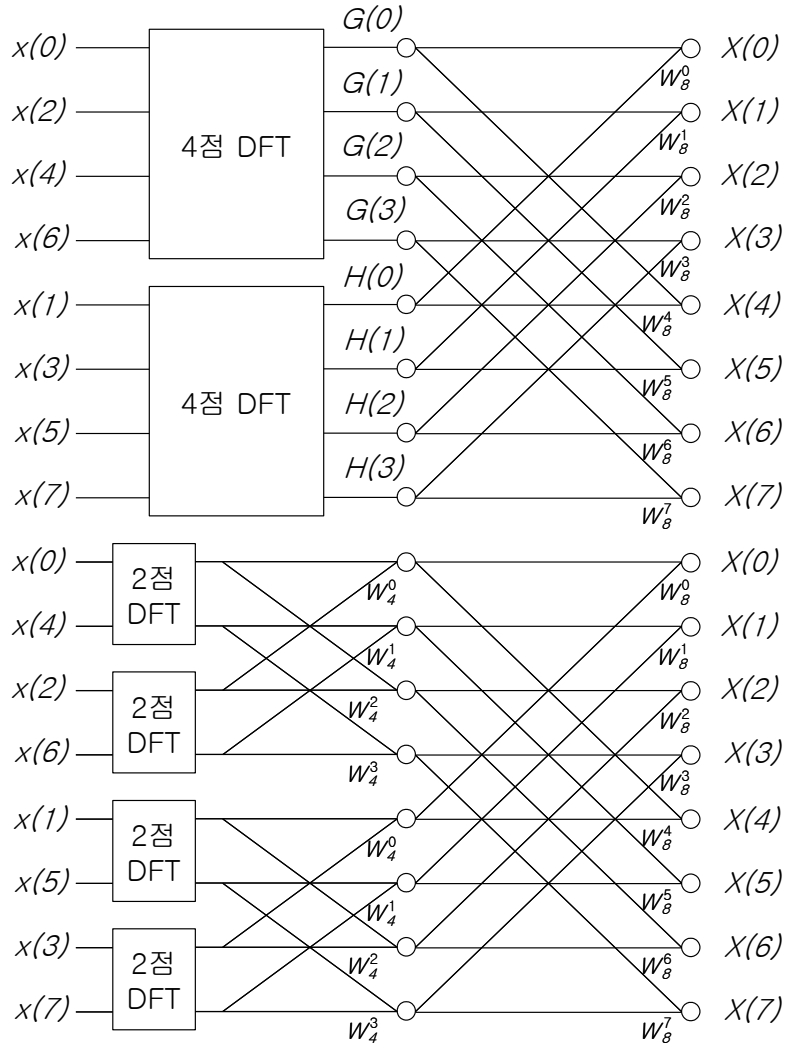
$$= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1) (W_N^2)^{rk}$$

$$W_N^2 = e^{-j2\pi \frac{2}{N}} = e^{-j2\pi \frac{1}{(N/2)}} = W_{N/2}^1$$

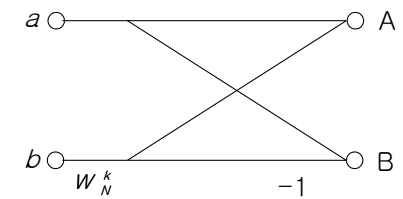
$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$$

$$= G(k) + W_N^k H(k)$$

FFT 원리: 1D 예 (2/2)



$$\begin{aligned} W_N^{(k+N/2)} &= W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-j2\pi(N/2)/N} \\ &= W_N^k e^{-j\pi} = W_N^k (\cos(\pi) - j\sin(\pi)) \\ &= -W_N^k \end{aligned}$$



$$A = a + b W_N^k$$

$$B = a + b W_N^{(k+N/2)} = a - b W_N^k$$

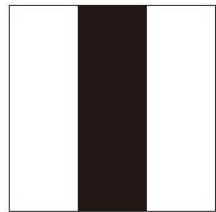
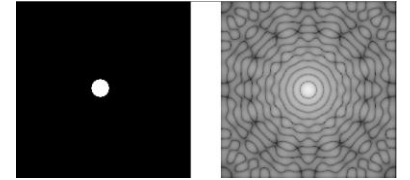
2주: 주파수 영역 필터링

2 푸리에 스펙트럼 관찰

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)

푸리에 스펙트럼 해석

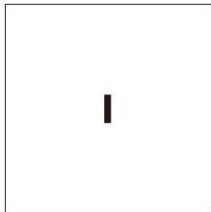
- 스펙트럼의 각 화소는 공간 주파수에 있어서 주기의 변화를 나타냄. (M/u , N/v)
- 원점에서 멀리 떨어진 화소는 더 높은 공간 주파수를 나타냄.
- 원점은 직류 항이라고 불리는 상수 항임.
- 영상의 모든 화소가 같은 회색조 이면, 푸리에 스펙트럼은 오직 원점에서만 높은 값을 가짐
- 대부분의 스펙트럼은 원점 근처에 높은 값들이 뭉쳐있거나, 축을 따라 높은 값들을 가짐.



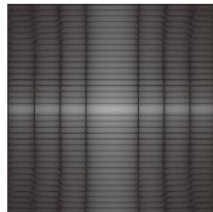
(a) 날카로운 모서리



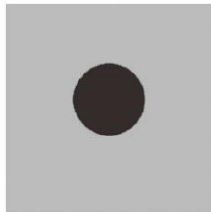
(b) (a)의 푸리에 스펙트럼



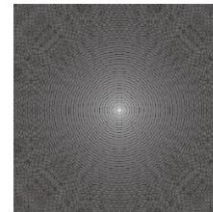
(a) 작은 직사각형



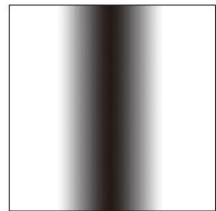
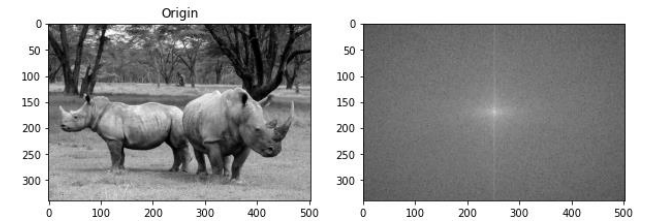
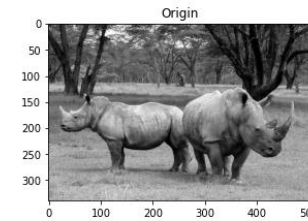
(b) (a)의 푸리에 스펙트럼



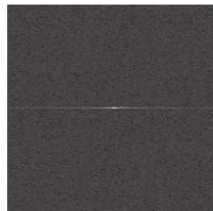
(a) 검은 원판



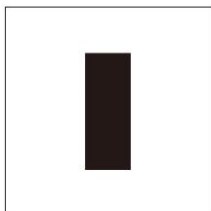
(b) (a)의 푸리에 스펙트럼



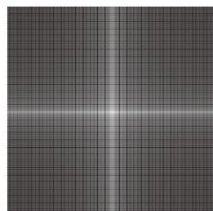
(c) 부드러운 모서리



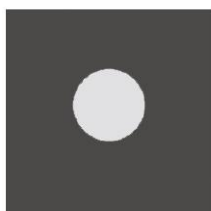
(d) (c)의 푸리에 스펙트럼



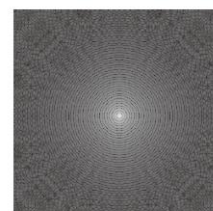
(c) 큰 직사각형



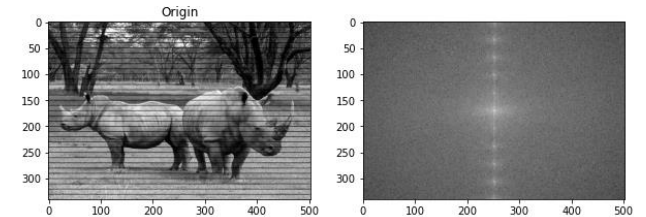
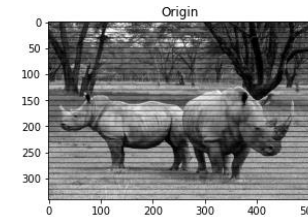
(d) (c)의 푸리에 스펙트럼



(c) 흰 원판



(d) (c)의 푸리에 스펙트럼



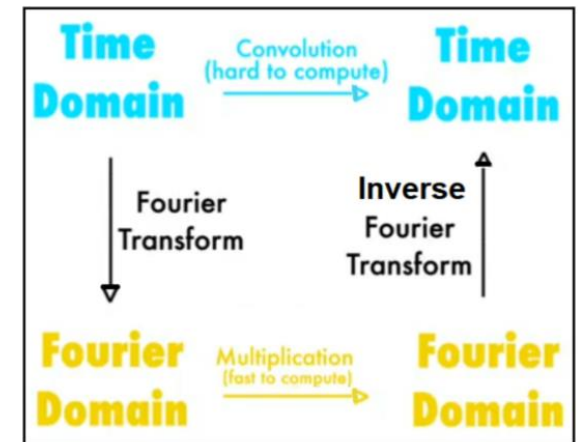
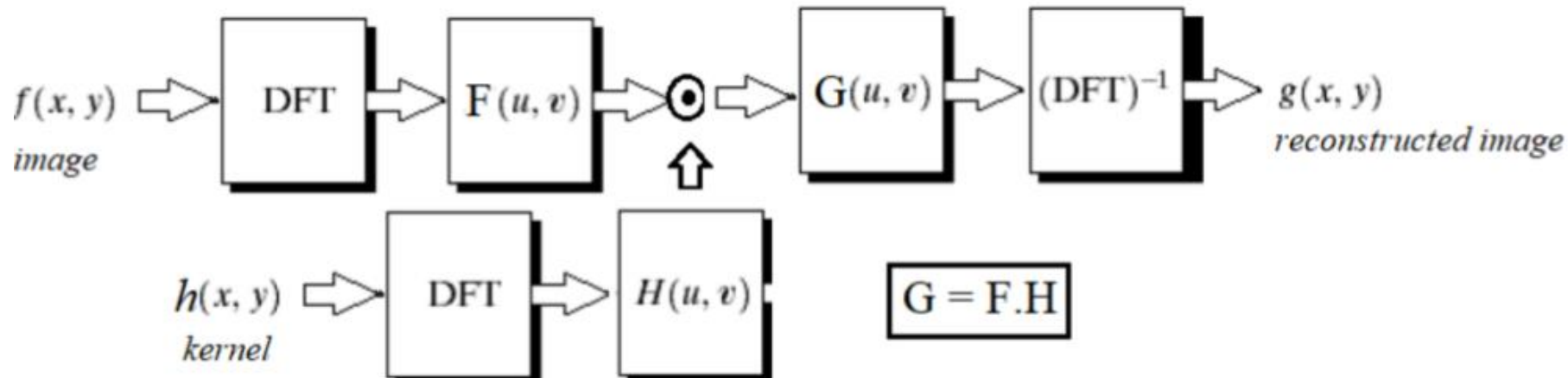
2주: 주파수 영역 필터링

3 주파수 영역 필터링

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)

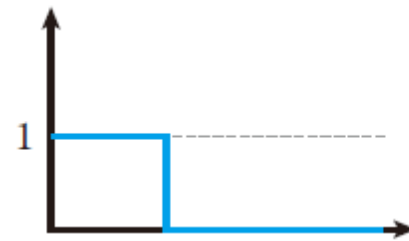
푸리에 변환과 역변환

- 영상의 푸리에 변환을 구함
- 마스크/필터링 함수의 푸리에 변환을 구함
- 두 변환 원소끼리 곱
- 곱의 역 푸리에 변환을 계산



주파수 영역 필터 종류: (필터, Filter, 여파기)

- 저주파 통과 필터 (Low-pass Filter, LPF):
고주파 성분을 감소시키고 저주파 성분은 통과
 - 고주파 통과 필터 (High-pass Filter, HPF):
저주파 성분을 감소시키고 고주파 성분은 통과
 - 대역 통과 필터 (Band-pass Filter, BPF):
특정 주파수 범위의 성분들만 통과
 - 대역 중지 필터 (Band-reject Filter, Notch):
특정 주파수 범위의 성분들을 감소
-
- 대역 통과/대역 중지 여파기는 저주파 통과 여파기와
고주파 통과 여파기의 주파수 응답을 적절히 빼거나 더함으로써 만듦



(a) 저주파 통과 필터



(b) 고주파 통과 필터



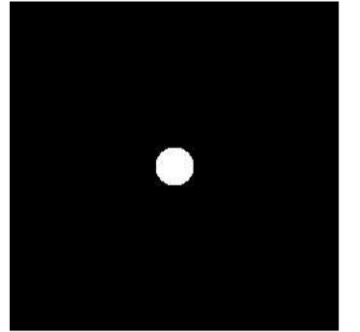
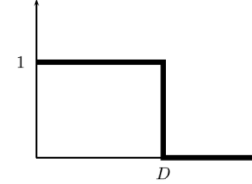
(c) 대역 통과 필터



(d) 대역 중지 필터

저주파 필터 (1/3)

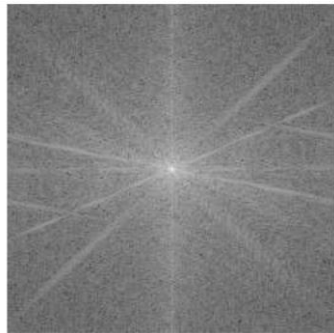
- 원점으로부터 일정 거리 내에 저주파 성분은 통과시키고 거리 밖의 고주파 성분은 감쇠
- 이상적인 저주파 필터
 - 원점으로부터 절단(cutoff)로 정의: $m(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{dist}(x, y) < D \\ 0 & \text{if } \text{dist}(x, y) \geq D \end{cases}$



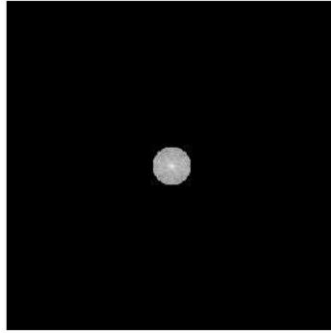
- 저주파 필터링 결과 영상: 급격한 신호 전이(transition)에 따른 Ring 효과 발생



소스 영상



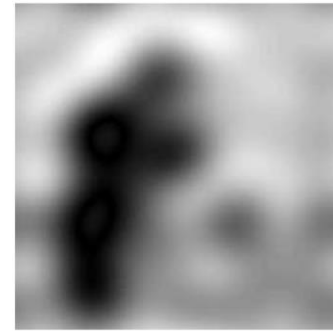
푸리에
스펙트럼



필터링
스펙트럼
(D=15)



결과
영상
(D=15)



결과
영상
(D=5)



결과
영상
(D=30)

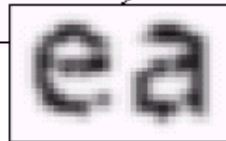
저주파 필터(2/3)

- 저주파 필터링의 응용
 - 깨진 문자의 연결
 - 주름 제거

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

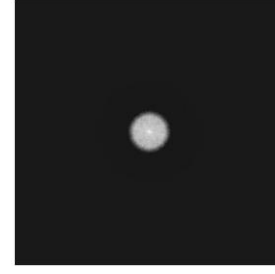
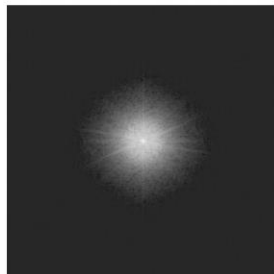
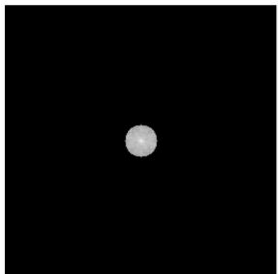
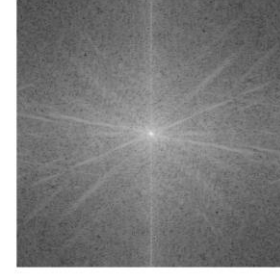
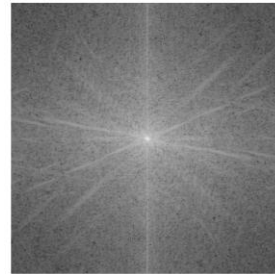
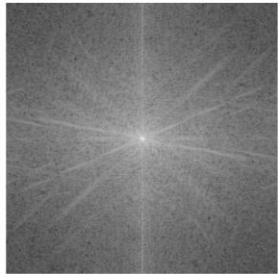
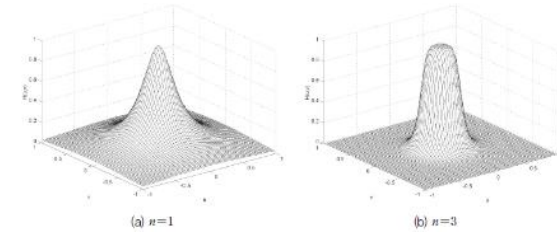
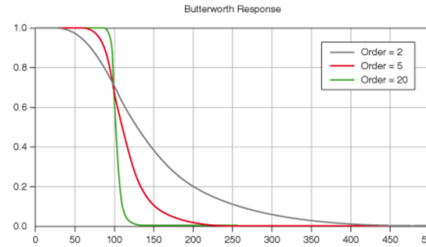


저주파 필터 (3/3)

- 버터워스(Butterworth) 저주파 필터

$$m(x) = \frac{1}{1 + (x/D)^{2n}}$$

- n : order (차수), 전이의 모양 결정, cutoff의 날카로운 정도(sharpness) 정의



이상적 LPF(D=15)

버터워스(D=15, n=4)

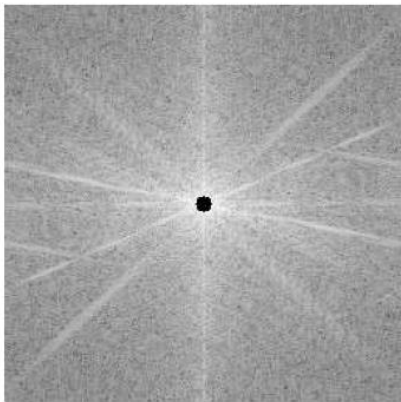
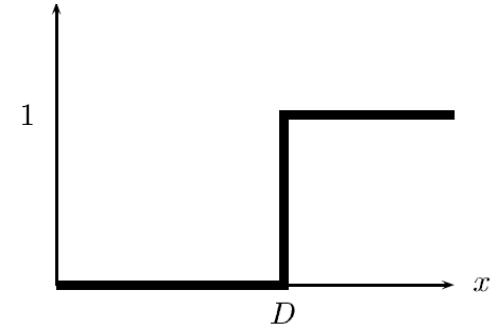
버터워스(D=15, n=20)

고주파 필터링 (1/3)

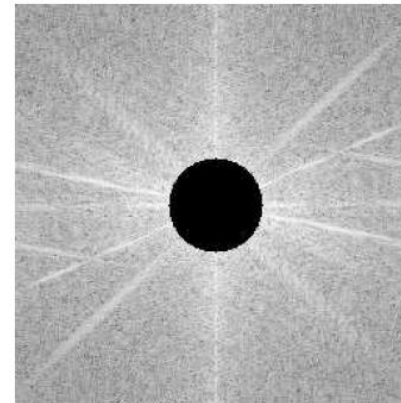
- 저주파 성분을 억제하고 고주파 성분을 통과시킴으로써 윤곽선이 뚜렷해짐 (sharpening 효과)
- 이상적인 고주파 필터

$$m(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } dist(x, y) > D \\ 0 & \text{if } dist(x, y) \leq D \end{cases}$$

- 큰 cutoff(D) 는 많은 정보가 사라짐, 모서리 정보만 남음



D=5

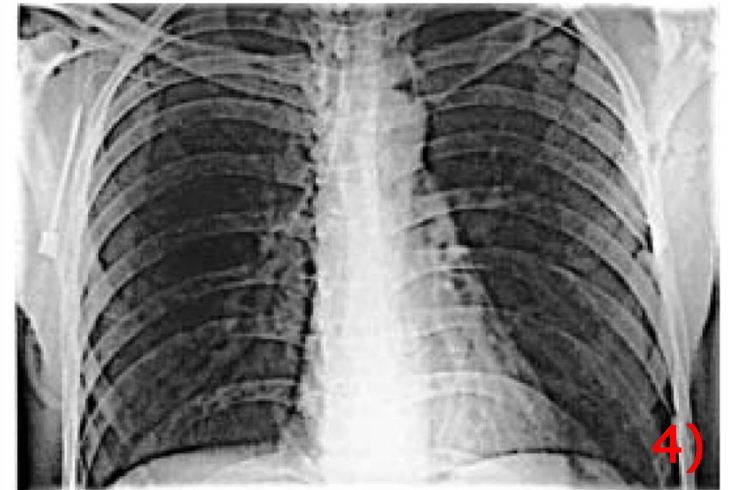
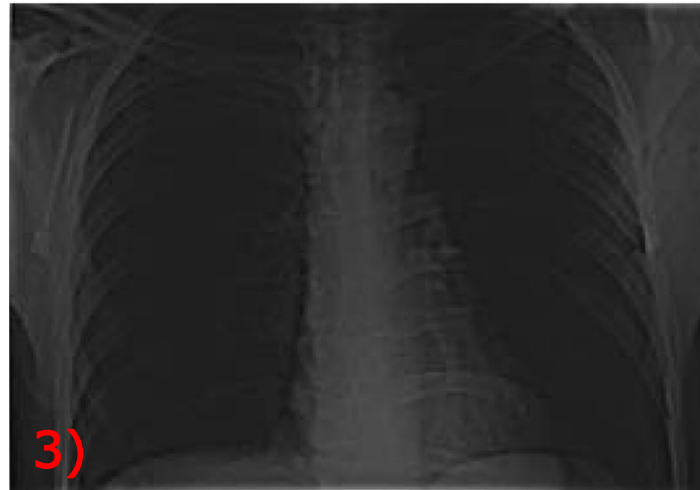
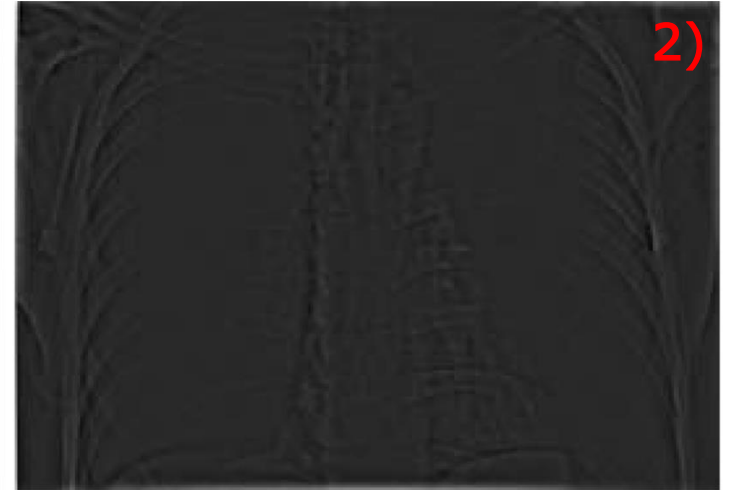


D=30



고주파 필터링 (2/3)

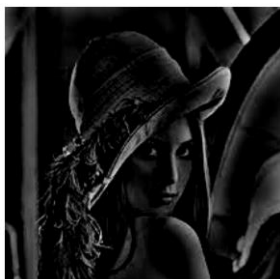
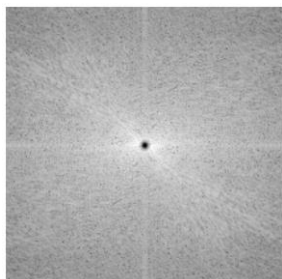
- 고주파 필터링의 응용
 - 1) 원영상
 - 2) 고주파 필터링 영상
 - 3) 필터링 강조 영상
 - 4) 히스토그램 평활화 영상



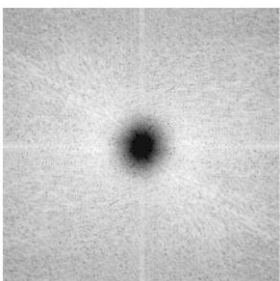
고주파 필터링 (3/3)

- 버터워스(Butterworth) 고주파 필터

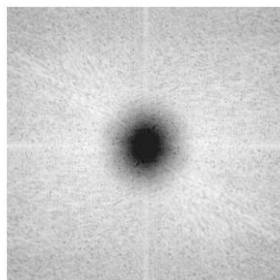
$$m(x) = \frac{1}{1 + (D/x)^{2n}}$$



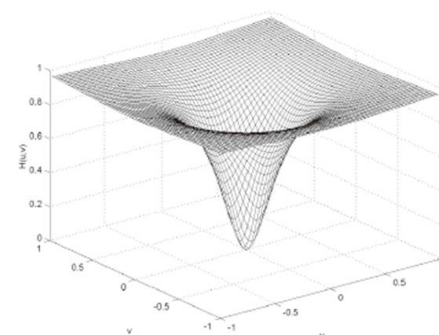
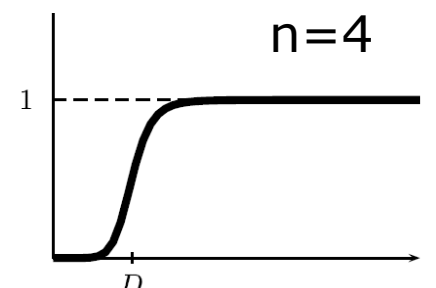
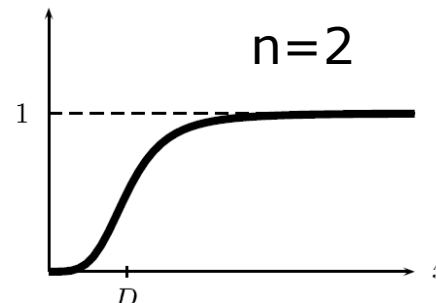
D=5
N=5



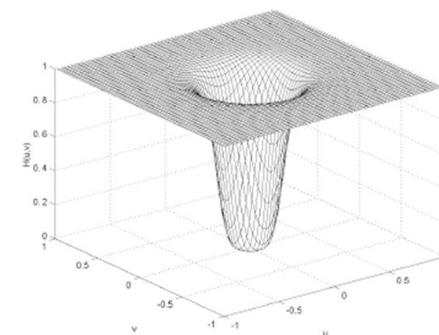
D=30
N=5



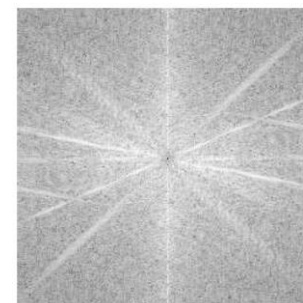
D=40
N=5



(a) $n=1$



(b) $n=3$



대역 중지와 대역 통과 필터 (1/2)

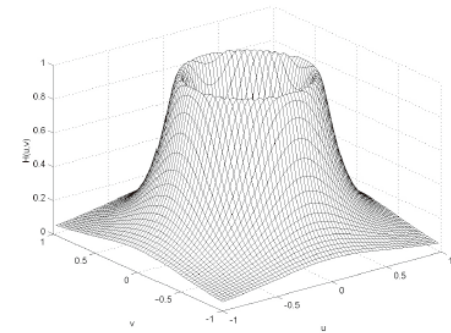
- 대역 통과(Band-pass) 필터 - 주파수의 특정범위만 통과시킴.
- 대역 중지(Band-rejection/stop) 필터 - 특정 범위의 주파수 성분들을 감쇠시킴
노치(notch) 필터 - 좁은 범위의 대역 중지 필터
- 둘 다 저주파 통과와 고주파 통과 여파기의 조합으로 만듦.
- 반경 쌍을 사용하여 기술할 수 있음.
- 대역 중심의 반경과 대역폭으로도 기술할 수 있음.

대역 통과 커널

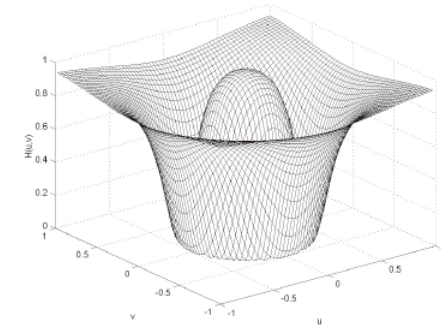
$$H_p(u, v) = 1 - H_s(u, v)$$

대역 중지 커널

$$H_s(u, v) = \frac{1}{1 + [Wr(u, v) / (r^2(u, v) - r_0^2)]^{2n}}$$

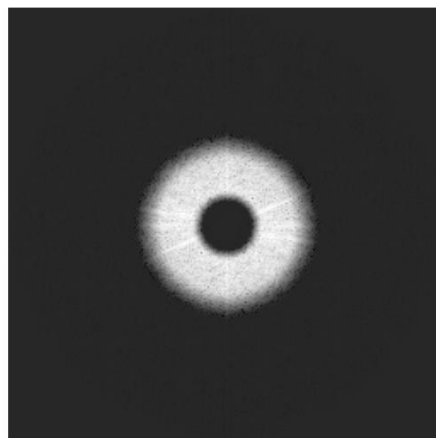
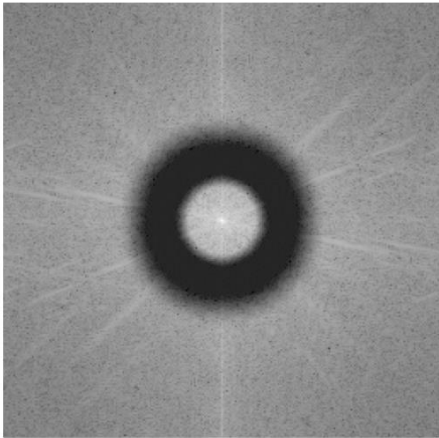
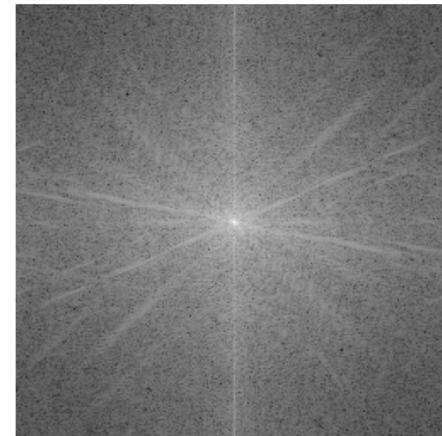
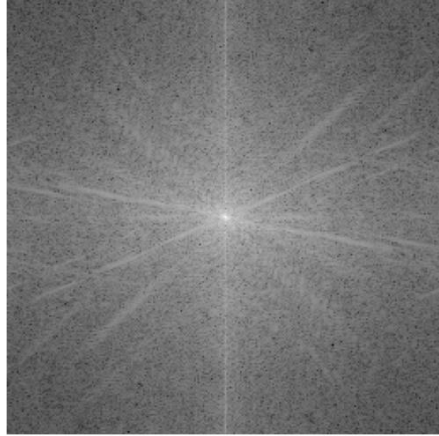


| 그림 9.29 $n=1, W=0.3, r_0=0.5$ 인 버터워스 대역 통과 필터

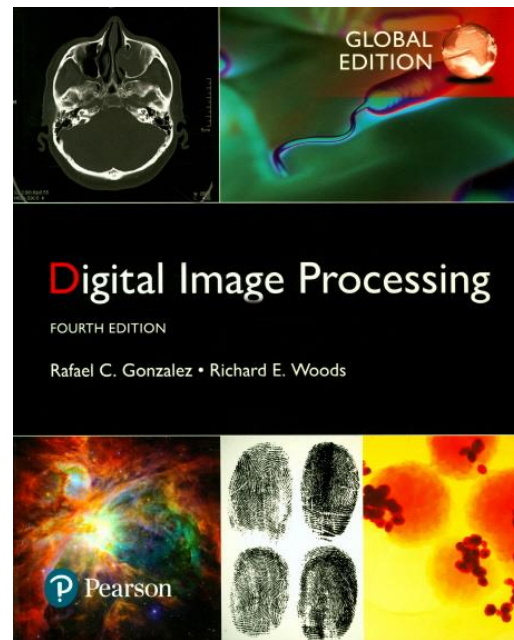
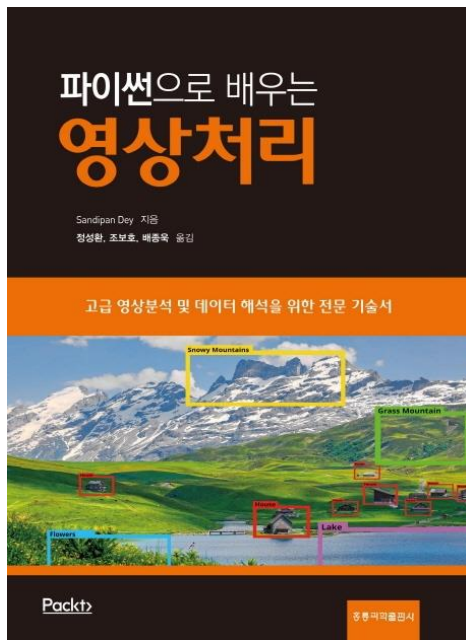


| 그림 9.28 $n=1, W=0.3, r_0=0.5$ 인 버터워스 대역 중지 필터

대역 중지와 대역 통과 필터 (2/2)



2주차 : 끝



본 강의 자료의 내용 및 그림은 아래 두 책으로부터 발췌 되었음

- 파이썬으로 배우는 영상처리, Sandipan Dey 지음, 정성환, 조보호, 배종욱 옮김, 도서출판 홍릉, 2020년
- Digital Image Processing, 4th Ed., Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods 지음, Pearson, 2018년

김 남 규 (ngkim@deu.ac.kr)