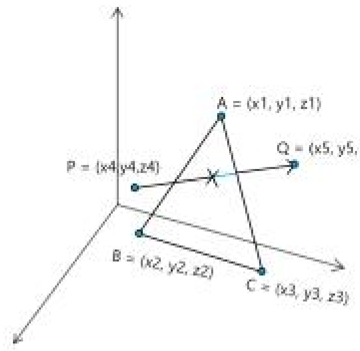
(응용수학) 팀원: 정현수, 김남빈, 황진주, 김성안, 소준형

Q. 3차원 공간에 삼각형 △ABC가 있을 때, 사용자가 P 위치에서 점 Q를 타겟으로 하여 총을 쏜다고 가정하자.
직선 운동을 하는 총알이 삼각형 △ABC를 맞추었는지 판별하시오.
(단 중력은 작용하지 않는다.)



해결 알고리즘

1. 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 구한다.

1) 점 A를 기준점으로 잡고, 기준점에서 점 B, C에 이르는 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$를 설정

$\overrightarrow{BA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\overrightarrow{CA} = (x_3, y_3, z_3) - (x_1, y_1, z_1) = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

2) 이 때 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 하면, 법선벡터 $\vec{n}$은 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$ 와 동시에 수직하므로

$$\vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

= < (y2 - y1) *(z3 - z1) - (z2 - z1) * (y3 - y1),
(z2 - z1) * (x3 - x1) - (x2 - x1) * (z3 - z1),
(x2 - x1) * (y3 - y1) - (y2 - y1) * (x3 - x1) >

3) 이 때 $\vec{n}$의 x, y, z 성분을 각각 res1, res2, res3이라고 하면, 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 점 A를 지나므로 평면의 방정식은

res1 * (x - x1) + res2 * (y - y1) + res3 * (z - z1) = 0

∴ res1 * x + res2 * y + res3 * z = res1 * x1 + res2 * x2 + res3 * x3

2. 두 점을 지나는 직선의 대칭 방정식을 이용해 $\overrightarrow{PQ}$와 [1.]에서 구한 평면이 충돌하는 지점을 구한다.

1) 두 점 P, Q를 지나는 직선의 대칭 방정식

$$\frac{x - x_4}{x_5 - x_4} = \frac{y - y_4}{y_5 - y_4} = \frac{z - z_4}{z_5 - z_4}$$

2) $\frac{x - x_4}{x_5 - x_4} = \frac{y - y_4}{y_5 - y_4} = \frac{z - z_4}{z_5 - z_4}$ = t 를 이용해 x, y, z에 대해 각각 정리하면

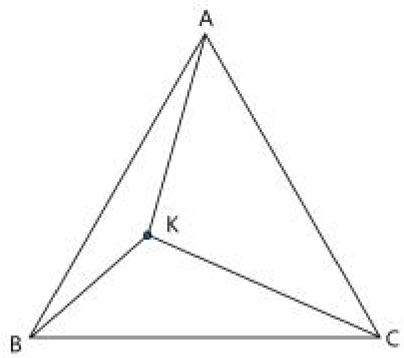
x = (x5 - x4) * t + x4 ....①
y = (y5 - y4) * t + y4 ....②
z = (z5 - z4) * t + z4 ....③

3) 이를 [1.]에서 구한 평면의 방정식에 대입하면
res1 * {(x5 - x4) * t + x4} + res2 * {(y5 - y4) * t + y4} + res3 * {(z5 - z4) * t + z4}
= res1 * x1 + res2 * x2 + res3 * x3

4) 여기서 t의 계수 부분과 상수 부분을 나누어 계산하면
(t의 계수 부분) = res1 * (x5 - x4) + res2 * (y5 - y4) + res3 * (z5 - z4)
(상수 부분) = res1 * x1 + res2 * x2 + res3 * x3 - (res1 * x0 + res2 * y0 + res3 * z0)
∴ t = {res1 * x1 + res2 * x2 + res3 * x3 - (res1 * x0 + res2 * y0 + res3 * z0)}
/ {res1 * (x5 - x4) + res2 * (y5 - y4) + res3 * (z5 - z4)}

5) t의 값을 ①,②,③에 각각 대입하여 평면과 직선의 교점의 좌표를 도출.

3. 아래의 그림과 같이 삼각형 안에 교점이 있는 경우,
(△ABC의 면적) = (△ABK의 면적) + (△KBC의 면적) + (△AKC의 면적) 이 성립한다.



여기서 평면 위의 점 K에 대해
$\alpha = \frac{\triangle KBC}{\triangle ABC}$, $\beta = \frac{\triangle AKC}{\triangle ABC}$, $\gamma = \frac{\triangle ABK}{\triangle ABC}$ 라고 하면
$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$의 조건을 만족하는 경우 점 K는 삼각형 안에 존재한다고 볼 수 있다.

1) (△ABC의 면적) = $\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$

(△ABK의 면적) = $\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AK}|}{2}$

(△KBC의 면적) = $\frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BK}|}{2}$

(△AKC의 면적) = $\frac{|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CK}|}{2}$ (계산 과정 생략)