И Ф ШАРЫГИН

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

10

И.Ф. ШАРЫГИН

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Учебное пособие для 10 класса средней школы

Рекомендовано
Главным учебно-методическим управлением
Госкомитета СССР по народному образованию

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Факультатив «Решение задач», или, иначе, «Подготовительный факультатив», предназначен для учеников X—XI классов, собирающихся после окончания школы поступать в высшие учебные заведения, в которых предъявляются достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов и студентов. С его помощью решается конкретно-практическая задача — подготовка к конкурсному экзамену по математике.

Математика конкурсного экзамена имеет большую историю, богатые традиции и целый ряд особенностей. Базируясь на математике элементарной, школьной, задачи конкурсного экзамена обогащены многими идеями математики высшей, вузовской. Именно идеями, а не теоретическими сведениями. Что касается теории, то здесь дело обстоит иначе. С одной стороны, вузовские экзаменационные комиссии проявляют известный консерватизм, предпочитая вести свой диалог с абитуриентом на традиционном языке и на традиционные темы, составляющие неизменное ядро школьной математики, так как нелегко уследить за частыми сменами программ и учебников. С другой стороны, главная задача конкурсного экзамена — отбор — вполне может быть решена в рамках небольшого по объему теоретического курса, особенно если в качестве главных критериев выдвигается проверка счетно-аналитических умений, уровня логического мышления и творческих способностей.

И по содержанию, и по форме конкурсный экзамен меняется весьма медленно. В последнее время получил достаточно широкое распространение экзамен с использованием ЭВМ. К сожалению, в этом явлении проявляется скорее дань моде, нежели забота об улучшении качества вступительного экзамена. Безусловно, в вузах с небольшим конкурсом, в которых единственная задача вступительного экзамена — отсеять явно неподготовленных, такой экзамен вполне уместен и вполне оправдан. Возможно также, что подобный экзамен удобен при отборе на специальности, требующие высокой скорости принятия решений, хорошей психологической устойчивости. Иное дело — экзамен в условиях высокого конкурса, когда каждый потерянный балл может сыграть роковую роль в судьбе абитуриента, а также отбор на творческие специальности, в которых хорошее владение математикой входит в список главных профессиональных требований. Машинный экзамен, сводя проверку работы к проверке одних лишь ответов, а сам экзамен — к соревнованию в скорости решения простых задач, никак не оценивает уровня логического мышления, умения четко и грамотно излагать свои мысли и многое другое, составляющее основу математического развития, математической культуры, искажает сам процесс работы над задачей. Ошибочное умозаключение: правильный ответ — правильное решение, прочно засевшее в головах многих школяров, оказывается на таком экзамене практически полезным. Возникает возможность (и опасность) учить школьников не методам решения задач, а методам нахождения ответа. Нам могут возразить: тот, кто хорошо подготовлен по математике, в равной степени может это доказать и на обычном экзамене, и на экзамене машинном. Могут даже провести аналогию с шахматами: кто хорошо играет в шахматы, как правило, хорошо играет и в серьезные шахматы, и в быстрые шахматы; нынешний чемпион мира по шахматам является также и неофициальным чемпионом мира по игре в «блиц». Однако это возражение относится лишь к части наших доводов. Кроме того, есть все-таки и исключения, и исключения эти относятся очень часто к людям нестандартным, обладающим большой глубиной мышления, но органически не способным или психологически не желающим думать быстро. Кстати, экс-чемпион мира по шахматам М. М. Ботвинник не умел и не желал играть в быстрые шахматы.

Таким образом, утверждение, что главной задачей факультатива является подготовка к конкурсному экзамену в высшие учебные заведения, нуждается в уточнении. Речь прежде всего идет об экзамене, не ориентированном на машинную проверку.

Несмотря на то что экзамены во все вузы страны проходят по единой программе, требования, предъявляемые к абитуриентам, критерии оценок значительно различаются. При одной и той же подготовке в одном вузе абитуриент может получить пятерку, а в другом — не более тройки. Ведь экзамен в отличие от школьного конкурсный, оценки существенным образом зависят от количества «конкурентов».

Вступительная письменная работа имеет ярко выраженную иерархию. Она содержит обязательную часть — две-три достаточно простые задачи, которые необходимо решить, для того чтобы получить минимальную положительную оценку. Цель этой обязательной части — отсеять тех, кто явно не подготовлен к усвоению институтской программы. Далее идет задача (редко две), существенно более трудная, чем предыдущая, задающая уровень четверки. Последняя, самая трудная задача — «на пятерку». Нередки случаи, когда между первой и последней задачей — целая пропасть; трудно бывает поверить, что эти задачи из одного варианта. Для сравнения напомним, что в школьных экзаменационных работах, в том числе и выпускных, различие в сложности между первой и последней задачей несущественно. Таким образом, говорить о подготовке к конкурсному экзамену по математике в некоторый вуз, не указывая, о каком уровне (тройка, четверка или пятерка) идет речь, бессмысленно.

Не следует забывать и о том, что не всякий может в непривычной и суровой атмосфере конкурсного экзамена продемонстрировать все, на что он способен. Как правило, экзаменационный КПД оказывается значительно ниже 100%. В связи с этим полезно располагать хотя бы некоторым запасом прочности, чтобы быть застрахованным от случайностей.

Теперь можно точнее сформулировать основную задачу нашего факультатива: как можно полнее развить потенциальные творческие способности каждого слушателя факультатива, не ограничивая заранее сверху уровень сложности используемого задачного материала. Как видим, личная цель — подготовка к конкурсному экзамену — совпадает с общественной — повышением уровня математической подготовки выпускников средней школы.

Не секрет, что многие ученики средней школы не способны к длительной умственной деятельности и не владеют различными ее формами. Из процесса решения задачи у них выпадает этап поиска решения. Практически все время от прочтения условия до получения ответа уходит на реализацию стандартной схемы, на вычисления, объяснения и оформление. Редко можно встретить школьника, который способен быстро привести пример задачи, над которой он долго думал (час, два или более), прежде чем сумел ее решить.

Каждая задача имеет идейную и техническую сложность (или трудность). Идейная часть решения дает ответ на вопрос, как решать задачу. Техническая часть представляет собой реализацию найденной идеи. Есть задачи, в которых главное — найти идею решения, а техническая часть, по существу, отсутствует. Таковы, например, многие олимпиадные задачи. Есть задачи, в которых идея решения, путь решения достаточно очевидны, однако их реализация требует очень большой по объему вычислительной работы, так что довести решение до числа оказывается под силу далеко не каждому. Примеры такого рода задач нетрудно найти в материалах конкурсного экзамена. И наконец, есть задачи, в которых идейная и техническая части приблизительно равнозначны. Занятия на факультативе должны в равной степени способствовать повышению как идейной, так и технической подготовки учащихся. С одной стороны, регулярное идейное обогащение, с другой — развитие технических возможностей, увеличение объемов проводимых без ошибок выкладок. Новые идеи, не опирающиеся на дополнительные теоретические сведения, следует вводить через задачи по схеме: задача — самостоятельный поиск решения — разбор ее решения — выделение идеи.

Обращаем внимание на то, что конкурсный экзамен проверяет в отличие от олимпиады выучку, а не сообразительность; поэтому самое лучшее — если школьник, не рассчитывая на свои способности, все свои «экспромты» подготовит и отработает заранее.

Процесс обучения по данному пособию рекомендуется строить на ряде методических принципов, которые мы приводим ниже.

1. Принцип регулярности. Основная работа происходит не в классе на совместных занятиях, а дома, индивидуально. Полноценная подготовка невозможна без достаточно большого количества часов, посвященных работе над задачей. При этом лучше заниматься понемногу, но часто, скажем, по часу ежедневно, чем раз в неделю, но по многу часов. Хорошо бы еженедельно набирать по 10 часов, включая классные занятия. Заниматься математикой, думать можно, даже гуляя на улице (но не переходя при этом проезжую часть).

2. Принцип параллельности. Несмотря на то что учебное пособие разбито на отдельные главы по темам, было бы совершенно неправильно изучать эти темы последовательно, одну за другой. Следует постоянно держать в поле зрения несколько (две-три) тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь.

3. Принцип опережающей сложности. Не следует загружать ученика большой по объему, но несложной работой, так же как и ставить его в положение лисицы перед виноградом, задавая непосильные для него задачи. Слишком легко и слишком трудно — равно плохо. Напомним, что оптимальными для развития цивилизации оказались широты, климатические условия которых, не позволяя человеку расслабиться, в то же время не превращали его жизнь в сплошную борьбу за существование. На практике реализовать этот принцип можно, например, следующим образом. Задавая на дом очередную недельную порцию задач (от 10 до 15), желательно подобрать их так, чтобы 7—8 из них были доступны практически всем слушателям факультатива, 3—4 были бы по силам лишь некоторым, а 1—2, пусть не намного, но превышают возможности даже самых сильных учеников. Ученик имеет право отложить трудную задачу, если он потрудился над ее решением определенное время, скажем, один час, и она у него не получилась. В этом случае процесс усвоения новых идей будет более эффективным. Действие этого принципа будет тем лучше, чем ближе друг к другу по уровню математического развития члены факультатива. Кроме того, он развивает такие полезные качества, как сознательность, внутренняя честность, научное честолюбие.

4. Принцип смены приоритетов. *Приоритет идеи.* В период накопления идей, а также при решении достаточно трудных задач ученику прощаются небольшие и даже средние огрехи в решении задачи; главное — правильная идея решения, которая может быть доведена до числа за разумное время. Именно так действуют иногда и экзаменационные комиссии вузов при оценке решений наиболее сложных конкурсных задач.

Приоритет ответа. При отработке уже известных идей, а также при решении наиболее простых, стандартных задач главное — правильный ответ. Никакие сверхкрасивые и сверхоригинальные идеи не могут компенсировать наличие неверного ответа.

5. **Принцип вариативности.** Очень полезно на примере одной задачи рассмотреть различные приемы и методы решения, а затем сравнить получившиеся решения с различных точек зрения: стандартность и оригинальность, объем вычислительной и объяснительной работы, эстетическая и практическая ценность.

6. **Принцип самоконтроля.** Большинство людей склонны прощать себе небольшие (да и крупные) ошибки. Школьники не исключение. Проявлением этого недостатка, имеющего большие последствия на экзамене, является привычка подстраиваться под ответ. Решив задачу, получив ответ и заглянув в конец учебника, обнаружив некоторые, иногда серьезные, расхождения, ученик делает кое-какие исправления, в результате которых его ответ соответствует ответу, данному в учебнике, и считает, что все в порядке, хотя задача не решена. Регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач должен быть непременным элементом самостоятельной работы.

7. **Принцип быстрого повторения.** По мере накопления числа решенных задач следует просматривать и некоторым образом раскладывать по полочкам образовавшийся задачный архив примерно по следующей схеме: эта задача простая — я ее без труда решил в свое время и сейчас вижу весь путь решения от начала до конца. Эта задача потруднее — я ее в свое время не решил (решил с трудом, нашел правильную идею, но запутался в вычислениях), но хорошо помню ее решение, данное учителем (товарищем). И наконец, эту задачу я не решил, объяснение вроде бы понял, но сейчас не могу восстановить в своей памяти. Надо разобраться в своих записях или же спросить об этой задаче учителя.

8. **Принцип работы с текстом.** Школьные учебники приучили учеников иметь дело с текстами разжеванными; более или менее сложные места, как правило, предваряются объяснениями учителя. Учебник читают, а не изучают с карандашом, бумагой и напряжением мысли. А ведь работа со сложными научными текстами, понять которые иногда не проще, чем решить небольшую проблему,— будни научного работника. В предлагаемом пособии немало трудных задач, снабженных лишь краткими указаниями. Понять эти указания, заполнить логические пробелы, выполнить промежуточные вычисления, рассмотреть самостоятельно варианты, сопровождающиеся оборотом «аналогично»,— главное назначение этих задач.

9. **Принцип моделирования ситуаций.** Полезно моделировать критические ситуации, которые могут возникнуть на экзамене,

и отрабатывать стереотипы поведения. Например: идет спокойная работа, получен ответ. Вдруг выясняется, что по ходу решения допущена ошибка. Времени в обрез. Постарайтесь спокойно и без паники исправить ошибку. Или: вам надо решить две задачи. В принципе каждая из них вам по силам, но времени маловато. Что лучше? Гнаться за двумя зайцами или спокойно поймать одного?

Главной особенностью данной книги является ретроспективная направленность. Теоретические основы большинства тем относятся к программе 8-летней школы. Однако глубина их проработки, идейная насыщенность задач предполагают более высокий уровень математического развития учеников, чем тот, которого достигают школьники по окончании VIII класса. Важнейшими, базовыми, темами являются следующие: «Уравнения и неравенства», «Текстовые задачи», «Задачи по планиметрии». К базовым темам следует отнести и часть параграфа «Квадратный трехчлен», относящуюся к азбуке квадратного трехчлена. Необходимо заметить, что принципы (можно даже сказать, идеология) решения уравнений и неравенств, изложенные в § 1—3, являются ведущими при решении уравнений и неравенств самых различных типов, поэтому они должны быть прочно усвоены и хорошо отработаны. Особенность § 7 состоит в том, что ученик получает возможность поработать сразу со всей планиметрией, охватить ее всю целиком, а не отдельные темы. Такой возможности в VIII классе он не имел. Особняком стоит § 6. В нем единственном даются некоторые дополнительные теоретические сведения. Кроме того, он более направлен на математическую олимпиаду и на устный экзамен, чем на конкурсный письменный; следовательно, менее актуален для большинства абитуриентов.

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧИСЛОВЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

При решении почти любой школьной задачи приходится делать те или иные преобразования. Зачастую ее сложность полностью определяется степенью сложности и объемом преобразований, которые необходимо выполнить. Не так уж редки случаи, когда школьник оказывается не в состоянии решить задачу не потому, что не знает, как она решается, а потому, что он не может без ошибок, в разумное время произвести все необходимые преобразования и вычисления.

Примеры на преобразование числовых и алгебраических выражений важны не сами по себе (хотя среди них есть и содержательные), а как средство развития техники преобразований, можно даже сказать, культуры преобразований.

Заметим, что с заданиями «упростить выражение» мы достаточно часто сталкиваемся в школе; при этом всякий раз понятно, что надо сделать. Элементарный «здравый смысл» помогает нам определить, какое выражение проще, а какое сложнее, до каких пор следует упрощать заданное выражение.

1. Некоторые практические рекомендации

Не старайтесь «сворачивать» выкладки, делать за один раз несколько операций. Делая вычисления и преобразования последовательно, шаг за шагом, на каждом этапе максимально упрощая полученное выражение, вы уменьшите вероятность ошибки в преобразованиях, сможете точнее выбрать последующую очередность операций в возникающих альтернативных ситуациях, возвращаясь назад, если избранный путь завел в тупик.

1. *Упростить выражение*

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

Решение. Грубой тактической ошибкой была бы попытка сложить сразу все дроби, приведя их к общему знаменателю. Сложим сначала первые две. Получим

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+2+x}{x(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}.$$

Прибавим третью:

$$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{2x+6+x}{x(x+2)(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}.$$

Продолжая этот процесс, получим в итоге $\frac{5}{x(x+5)}$.

Замечание. Легко проверить, что $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Аналогичные равенства, очевидно, справедливы для остальных дробей. Заменив каждую дробь, входящую в данное выражение, на соответствующую разность (вместо того чтобы складывать дроби, каждую заменяем разностью!), получим в результате $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}$. Очевидно, что с помощью этого приема мы можем найти сумму, подобную рассмотренной, с любым числом слагаемых.

Важным элементом культуры преобразований, необходимым для решения всевозможных задач из любых разделов, является умение раскладывать на множители те или иные выражения. Как правило, цель достигается за счет удачной группировки слагаемых.

2. *Упростить выражение* $\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$.

Решение. Попробуем разложить на множители числитель и знаменатель. Начнем с числителя. Имеем

$$\begin{aligned}a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)&=a^3b-b^3a-a^3c+b^3c+c^3(a-b)=\\&=ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)=\\&=(a-b)(ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3)=\\&=(a-b)(a^2b-a^2c+ab^2-abc+c^3-cb^2)=\\&=(a-b)(a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2))=\\&=(a-b)(b-c)(a^2+ab-cb-c^2)=\\&=(a-b)(b-c)(a^2-c^2+ab-cb)=\\&=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

Раскладывая на множители знаменатель (проделайте аналогичные выкладки самостоятельно), получим $(a-b)(b-c)(a-c)$. Таким образом, данная дробь равна $a+b+c$.

Замечание. Теоретическим обоснованием того, что в числителе можно выделить множитель $(a-b)$, служит равенство числителя нулю при $a=b$. Подробнее об этом сказано в § 2.

Вообще, из двух взаимно обратных операций, как правило, выполнение одной технически существенно сложнее, чем выполнение другой. Именно такими являются действия умножения алгебраических выражений и разложение на множители. Аналогичная ситуация имеет место для операций возведения в степень и извлечения корня. Легко получить, что $(5+3\sqrt{2})^2=43+30\sqrt{2}$, и гораздо труднее «прочесть» это же равенство справа налево. Следует запомнить, что, если при решении задачи встретилось выражение вида $\sqrt{a+b\sqrt{N}}$ или $\sqrt[3]{a+b\sqrt{N}}$, необходимо попытаться «извлечь» соответствующий корень. Очень часто это можно сделать. Если подобное извлечение возможно, то найти его можно, например, подбором *. В старых учебниках алгебры встречается равенство $\sqrt{a\pm b\sqrt{N}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-Nb^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-Nb^2}}{2}}$; $a>0$, $b>0$, справедливость которого проверяется без труда. В некоторых случаях оно оказывается полезным при упрощении выражений, содержащих квадратные радикалы.

3. *Упростить выражение* $\dfrac{\sqrt{34-24\sqrt{2}}+1}{\sqrt{18-8\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{34-24\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-4$, $\sqrt{18-8\sqrt{2}}=$ $=4-\sqrt{2}$, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$. (Можно получить эти равенства подбором, а можно воспользоваться указанной выше формулой.) Таким образом, данная дробь приводится к виду $\frac{3\sqrt{2}-3}{3-2\sqrt{2}}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на $3+2\sqrt{2}$, получим в результате

$$\frac{3\sqrt{2}-3}{3-2\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}+3\ .$$

Замечание. Обратите внимание на последний этап наших преобразований. Здесь использован часто встречающийся прием, который иногда называют «умножением на сопряженное выражение». В данном случае знаменатель имеет вид $A-B$. Умножая числитель и знаменатель на $A+B$, получаем в знаменателе выражение A^2-B^2, которое оказывается равным 1.

2. Замена переменных. Условные равенства

Переход к новым обозначениям, замена неизвестных — важнейший прием и метод, с помощью которого решаются самые различные задачи как элементарной, так и высшей математики. Для некоторых классов задач этот метод детально разработан, например для уравнений.

Замена переменных и переход к новым обозначениям могут использоваться как прием, облегчающий выкладки и делающий громоздкие алгебраические выражения компактными и обозримыми. Очень важно, чтобы этот прием и метод был прочно усвоен

* Например, чтобы упростить выражение $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$, представим его в виде $x+y\sqrt{2}$, откуда $11+6\sqrt{2}=x^2+2y^2+2xy\sqrt{2}$. Поиск целых (рациональных) x и y сводится к решению системы $x^2+2y^2=11$, $xy=3$. В данном случае пара целых x и y легко подбирается: $x=3$, $y=1$; следовательно, $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$.

и освоен, так как идея замены переменных является сквозной и в том или ином виде фигурирует практически во всех параграфах. Ограничимся рассмотрением одного примера.

4. *Доказать, что если* $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, *то и* $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$. *Доказать также, что из второго равенства следует первое.*

Решение. Обозначим $b-c=x$, $c-a=y$. Перейдем к новым переменным x, y, c: $a=c-y$, $b=c+x$. В новых обозначениях первое из данных в условии равенств примет вид

$$\frac{c-y}{x}+\frac{c+x}{y}-\frac{c}{x+y}=0.$$

Оно легко преобразуется:

$$cy(x+y)-y^2(x+y)+cx(x+y)+x^2(x+y)-cxy=0,$$
$$c(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)^2=0.$$

Второе равенство будет иметь вид

$$\frac{c-y}{x^2}+\frac{c+x}{y^2}+\frac{c}{(x+y)^2}=0,$$
$$c((x^2+y^2)(x+y)^2+x^2y^2)+(x^3-y^3)(x+y)^2=0.$$

Коэффициент при c оказывается равным (проверьте!)

$$x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4=(x^2+xy+y^2)^2.$$

Таким образом, поскольку при $xy\neq 0$ также $x^2+xy+y^2\neq 0$, а $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, второе равенство преобразуется после сокращения на x^2+xy+y^2 к тому же виду, что и первое.

Приведенное решение содержит подсказку, позволяющую найти другое решение: левая часть второго равенства получается из левой части первого умножением на

$$\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}=\frac{(x+y)^2-xy}{xy(x+y)}=\frac{x+y}{xy}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}=$$
$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\left(\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{a}{(b-c)(a-b)}+\frac{b}{(c-a)(b-c)}+\right.$$
$$\left.+\frac{b}{(c-a)(a-b)}+\frac{c}{(a-b)(c-a)}+\frac{c}{(a-b)(b-c)}\right)=$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$$

$$\times(a(a-b)+a(c-a)+b(a-b)+b(b-c)+c(b-c)+c(c-a))=$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

3. Задачи

Упростите числовое выражение (1—17).

1. $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$.

2. $\dfrac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$.

3. $\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. $\left(\dfrac{3\left(\frac{17}{90}-0{,}125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1{,}8-2\frac{1}{3}:1{,}5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{679\cdot10^{-2}}{0{,}7}+0{,}3\right)$.

5. $\dfrac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$.

6. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

7. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

8. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

9. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

10. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

11. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

12. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

13. $\sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1)$.

14. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{13-\sqrt{48}}}}$.

15. $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

16. $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$.

17. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)\cdot(\sqrt[3]{2}+1)}$.

Докажите равенство (18—19).

18. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

19. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Упростите алгебраическое выражение (20—47).

20. $\left(\left(1-\frac{1+z}{1+\sqrt[3]{z}}\right):\left(\sqrt{z}\,(1-\sqrt[3]{z})-\frac{(1-z)(\sqrt[3]{z}-1)}{1+\sqrt{z}}\right)\right)^3-z$.

21. $\frac{a^2+10a+25+2\sqrt{5}\,(\sqrt{a^3}+5\sqrt{a})}{(a^2-25)\,((\sqrt{a^3}-\sqrt{125})\,(a+\sqrt{5a}+5)^{-1})^{-1}}$.

22. $\left(\frac{3-\sqrt{a}}{9-a}+\frac{1}{3-\sqrt{a}}-6\,\frac{a^2+162}{729-a^3}\right)^{-1}+\frac{a\,(a+9)}{54}$.

23. $\frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})^2\cdot\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt[4]{16ab}\,(a+\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt{ab})}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}$.

24. $\left(\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}+x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{y}+y\sqrt[3]{x}}-1\right)^{-1}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}\right)^{-1}+1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x-y}$.

25. $\left(\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt[4]{a}}{\sqrt{16a}+12\sqrt[4]{a}+9}-\frac{\sqrt[4]{a}-3}{2\sqrt[4]{a}+3}\right)\cdot(2\sqrt[4]{a}+3)$.

26. $\left(\frac{(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8})\,(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

27. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+1$.

28. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$. Вычислите при $x=9$; $y=0{,}04$.

29. $\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}$.

30. $\left(\frac{1}{2}((1+\sqrt{a})^5+(1-\sqrt{a})^5)-(a\sqrt{5}-1)^2\right):2a^2$. Вычислите при $a=5-\sqrt{5}$.

31. $\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, где $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

32. $\frac{\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{b^{-1}})\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})}-2a+\frac{4a^2}{a-b}$.

33. $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.

34. $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

35. $\left(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot\frac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}$.

36. $\frac{a+b}{ax+by}+\frac{a-b}{ax-by}+\frac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}-\frac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$.

37. $\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

38. $\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

39. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\frac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$.

40. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

41. $\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^p\left(q-\frac{1}{p}\right)^q}$.

42. $\frac{1+(a+\sqrt{a^2-1})^2(b+\sqrt{b^2-1})^2}{(a+\sqrt{a^2-1})(b+\sqrt{b^2-1})}$.

43. $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$, где $x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$; $y>0$.

44. $\frac{1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}$.

45. $\sqrt{\frac{2x^2+1+x\sqrt{4x^2+3}}{2x^2+3+x\sqrt{4x^2+3}}}$.

46. $\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^2-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$.

47. $\left(\frac{a\sqrt{a}-3\sqrt{a}+(a-1)\sqrt{a-4}+2}{a\sqrt{a}-3\sqrt{a}+(a-1)\sqrt{a-4}-2}\right)^{-2}\cdot\frac{a+\sqrt{a}-2}{a-\sqrt{a}-2}$.

Докажите равенство (48—51).

48. $\frac{a^5}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^5}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^5}{(c-a)(c-b)}=$
$=a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc$.

49. $(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)=$
$=\frac{x^{32}+x^{16}+1}{x^2+x+1}$.

50. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

51. $p^3=\left(p\,\frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right)^3+\left(q\,\frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right)^3+q^3$.

52. Докажите, что если $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2\frac{11}{12}$, то $xy+$ $+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=3\frac{1}{12}$; $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

53. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то а) $\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$;

б) $\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}=\frac{\sqrt[4]{\left(ac+\frac{c^3}{a}\right)^2}}{\sqrt[4]{\left(bd+\frac{d^3}{b}\right)^2}}$; в) $\frac{xa+yc}{xb+yd}=\frac{\sqrt[3]{a^2c}}{\sqrt[3]{b^2d}}$.

54. Докажите, что при $x+y+z=0$

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\cdot\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

55. Докажите, что если $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, то $a^2+b^2+c^2=1$.

56. Докажите, что если $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, то $x^2y^2z^2=1$ либо $x=y=z$.

57. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

58. Докажите, что если $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, то $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

59. Докажите, что если $(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}+(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}+(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}=0$; $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$, то $(1-x^3)(1-y^3)\times(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

60. Докажите, что если $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$; $x\neq y$, то $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

61. Докажите, что если $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$, то $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$.

62. Докажите, что если $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$, то какие-то две из трех дробей, расположенных в левой части, равны 1, а одна равна -1.

§ 2. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

С понятием «уравнение» на уроках математики мы знакомимся уже в начальной школе, а задача «решить уравнение», вероятно, наиболее часто встречающаяся задача. Тем не менее дать точное определение понятия «уравнение», точно определить, что значит «решить уравнение», не выходя далеко за рамки курса элементарной математики, мы не можем. Для этого необходимо привлекать весьма серьезные логические и даже философские категории. Нам вполне достаточно знакомства с этими понятиями на уровне «здравого смысла».

Рассмотрим два уравнения A и B с одним и тем же неизвестным. Мы будем говорить, что уравнение B является следствием уравнения A, если любой корень уравнения A является корнем уравнения B.

Уравнения называются эквивалентными, если любой корень одного из них является корнем другого и наоборот. Таким образом, уравнения эквивалентны, если каждое из них является следствием другого.

Из данных определений следует, например, что два уравнения, не имеющие решений, эквивалентны. Если A не имеет решения, то B является следствием A, каково бы ни было уравнение B.

Наиболее распространенный (стандартный) путь решения уравнений состоит в том, что с помощью стандартных приемов решение данного уравнения сводится к решению нескольких элементарных уравнений с последующим анализом найденных корней.

Стандартными мы будем называть приемы и методы решения уравнений, в которых используются преобразования (раскрытие скобок, освобождение от знаменателя, приведение подобных членов, возведение в натуральную степень обеих частей уравнения и т. д.), разложение на множители (формально этот прием или метод относится к преобразованиям, но мы его выделяем, так как в ряде случаев он выступает самостоятельно и специфически), введение вспомогательных неизвестных.

Элементарными в этом параграфе являются уравнения двух видов: двучленные ($ax^n+b=0$), в частности линейные ($ax+b=0$), и квадратные ($ax^2+bx+c=0$).

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнения трех типов: целые алгебраические уравнения, т. е. уравнения вида $P(x)=0$ (где $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $a_0\neq 0$, есть многочлен степени n); дробные алгебраические уравнения, т. е. уравнения, содержащие многочлены и алгебраические дроби (дроби вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены); иррациональные уравнения, т. е. уравнения, содержащие радикалы, под которыми располагаются многочлены или алгебраические дроби. Аналогично классифицируются рассматриваемые в этой главе системы уравнений.

Обращаем внимание на то, что основные принципы и методы решения уравнений, которые будут здесь изложены, носят достаточно общий характер. Ими мы будем руководствоваться и пользоваться в параграфах, где рассматриваются показательные, логарифмические, тригонометрические и иные виды уравнений. Меняются в основном лишь начальная и конечная стадии. В частности, иным будет список элементарных уравнений, расширяется набор преобразований, типы замен. Очень часто решение соответствующего алгебраического уравнения (рационального, иррационального) является составной частью решения уравнения логарифмического, тригонометрического.

Все сказанное здесь относится с некоторыми уточнениями к системам уравнений.

Во всех примерах мы ограничиваемся нахождением действительных корней.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, сделаем одно замечание. В некоторых местах мы, объясняя решение, для краткости будем использовать не совсем аккуратные, но вполне понятные обороты, как, например, «умножим уравнение на...», «сложим два уравнения», «перемножим два уравнения» и т. д. Понятно, что соответствующая операция производится с каждой частью (частями) уравнения (уравнений), в результате чего получается новое уравнение.

4. Рациональные уравнения, приводящиеся с помощью преобразований к линейным и квадратным

Умение решать линейные и квадратные уравнения — алгебраические уравнения 1-й и 2-й степени — относится к списку умений, которыми, вне всяких сомнений, должен обладать каждый выпускник средней школы, входит в его «прожиточный минимум». Однако и здесь уравнение уравнению рознь. Одно дело — уравнение $x^2-3x+2=0$ и совсем другое — $11x^2-1237x-1938=0$ или $x^2-(9-\sqrt{3})x+14-3\sqrt{3}=0$. Правда, трудности, возникающие при решении двух последних уравнений, не имеют непосредственного отношения к теме «Квадратные уравнения», а носят «арифметический» характер. Так, в первом из этих двух уравнений надо вычислить $\sqrt{D}=\sqrt{1615441}=1271$, во втором «увидеть», что $D=28-6\sqrt{3}=(3\sqrt{3}-1)^2$.

Рассмотрим теперь несколько примеров, в которых за счет достаточно простых приемов можно избежать громоздких преобразований и вычислений.

1. *Решить уравнение* $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$.

Решение. Можно, как говорится, не мудрствуя лукаво, попросту освободиться в этом уравнении от знаменателя, раскрыть скобки, привести подобные члены и получить квадратное уравнение. Но можно попробовать облегчить себе жизнь: объединить дроби в пары и произвести сначала действия внутри пар. Удачная группировка, как это видно из приводимого решения, существенно упрощает вычисления (приводим его без комментариев):

$$\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x-1},\ \frac{5x-12}{(x-2)(x-3)}=\frac{5x-12}{(x+6)(x-1)}.$$

Грубой ошибкой было бы сокращение обеих частей на $5x-12$, так как при этом теряется корень $x=\frac{12}{5}$. Запомните: если левая и правая части уравнения имеют общий множитель, то сокращение на него может привести к потере корней. (Иное дело — сокращение на общий множитель числителя и знаменателя алгебраической дроби. В этом случае корни не теряются.) Уравнение $ab=ac$ распадается на два: $a=0$ и $b=c$. В нашем случае получаем два уравнения:

1) $5x-12=0$, $x_1=2{,}4$; 2) $(x-2)(x-3)=(x+6)(x-1)$, $x_2=1{,}2$.

Ответ. 1,2; 2,4.

2. *Решить уравнение*

$$31\left(\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}\right).$$

Решение. Этот пример посложнее. Решение этого уравнения «в лоб» приводит к непомерным, не для всех преодолимым вычислительным трудностям. Однако можно эти трудности обойти. Преобразуем каждую из входящих в наше уравнение дробь:

$$\frac{24-5x}{x+1}=\frac{29-5(x+1)}{x+1}=\frac{29}{x+1}-5,\ \frac{5-6x}{x+4}=\frac{29}{x+4}-6,$$

$$\frac{17-7x}{x+2}=\frac{31}{x+2}-7,\ \frac{8x+55}{x+3}=\frac{31}{x+3}+8.$$

(Это достаточно стандартный прием. Можно провести аналогию с выделением целой части в неправильной арифметической дроби.) Остальное понятно без комментариев:

$$31\left(\frac{29}{x+1}-5+\frac{29}{x+4}-6\right)+370=29\left(\frac{31}{x+2}-7+\frac{31}{x+3}+8\right),$$

$$31\cdot 29\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\right)-341+370=29+29\cdot 31\cdot\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right),$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3},\ \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4};$$

$$(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4),\ 4x+10=0;\ x=-2{,}5.$$

(Как видите, в конце концов все свелось к линейному уравнению. Это уравнение должно было получиться, если бы мы обычным путем стали освобождаться от знаменателя в исходном уравнении.)

Ответ. — 2,5.

5. Иррациональные уравнения. Появление лишних корней

При стандартном способе решения уравнения возникает цепочка уравнений той или иной длины, соединяющая исходное уравнение с уравнением (или уравнениями), которое мы умеем решать, элементарным. Конечно, было бы очень хорошо, если бы каждое уравнение цепочки было эквивалентно предыдущему, а следовательно, и исходному. Но этого не всегда легко добиться, тем более что получающаяся цепочка может и разветвляться. Легче следить за тем, чтобы каждое следующее уравнение было следствием предыдущего, чтобы корни «по дороге» не терялись. Если мы сумеем организовать решение уравнения указанным образом, то нам необходимо после решения последнего уравнения (уравнений) найти способ отсеять лишние корни, отобрать правильные. В частности, это можно сделать при помощи проверки. В этом случае (и только в этом!) проверка является элементом решения и необходима даже в тех случаях, когда лишние корни не появились, но ход решения был таков, что они могли появиться. С другой стороны, иногда нам легче сделать проверку, чем обосновывать то, что в ней нет необходимости. В этом случае она, по существу, также является элементом решения, заменяя необходимое обоснование. И наконец, проверка может быть средством контроля правильности проделанных вычислений (делается «для себя»).

Рассмотрим несколько примеров.

3. *Решить уравнение* $\sqrt{3+x}=3-x$.

Решение. $3+x=9-6x+x^2$, $x^2-7x+6=0$; $x_1=1$, $x_2=6$. Проверка показывает, что $x_2=6$ — лишний корень ($\sqrt{9}\neq-3$), а $x=1$ удовлетворяет уравнению ($\sqrt{4}=2$).

Ответ. 1.

4. *Решить уравнение* $\sqrt{2x^2+1}=1-x$.

Решение. $2x^2+1=1-2x+x^2$, $x^2+2x=0$; $x_1=0$, $x_2=-2$. Найденные значения удовлетворяют уравнению.

Ответ. 0; -2.

5. *Решить уравнение* $\sqrt{x^2-1}=x-2$.

Решение. $x^2-1=x^2-4x+4$, $x=\frac{5}{4}$. Найденное значение — лишний корень.

Ответ. Уравнение не имеет решений.

Однако не всегда проверку легко осуществить. Лишние корни, которые могли появиться вследствие того что в процессе решения уравнение возводилось в квадрат (или в любую четную степень), могут быть отброшены на основании следующего простого и очевидного утверждения (настолько простого и очевидного, что оно не заслуживает звания теоремы).

Если x_0 удовлетворяет уравнению (2), полученному из уравнения (1) возведением в квадрат его правой и левой частей, то, для того чтобы x_0 являлся также и корнем уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы при подстановке x_0 в уравнение (1) левая и правая части были бы числами одного знака (безусловно, предполагается, что при этом обе части имеют смысл).

6. *Решить уравнение* $\sqrt{5+2x}=4-x$.

Решение. $5+2x=x^2-8x+16$, $x^2-10x+11=0$; $x_1=5+\sqrt{14}$, $x_2=5-\sqrt{14}$; $x_1=5+\sqrt{14}$ — лишний корень, так как $4-x_1<0$, в то время как $x_2=5-\sqrt{14}$ удовлетворяет уравнению $(4-x_2>0)$.

Ответ. $5-\sqrt{14}$.

Возведение в квадрат — один из стандартных способов избавления в уравнении от квадратных радикалов, но не единственный. Если таких радикалов несколько, то уравнение приходится возводить в квадрат неоднократно. (Обычно всякий раз один радикал уединяется, т. е. его располагают в одной из частей уравнения, а все остальное переносится в другую часть. Кстати, при этом нет нужды заботиться о том, чтобы выражение, находящееся под знаком уединенного радикала, было бы неотрицательно). В этом случае корнями исходного уравнения будут лишь те корни первого уравнения без радикалов, которые будут давать числа одного знака в обеих частях всех тех промежуточных уравнений, которые возводились в квадрат.

7. *Решить уравнение* $\sqrt{3+2x}+\sqrt{5+x}=5$. $\quad(*)$

Решение. $\sqrt{3+2x}=5-\sqrt{5+x}$,

$$3+2x=25-10\sqrt{5+x}+5+x,$$
$$10\sqrt{5+x}=27-x, \qquad (**)$$
$$500+100x=729-54x+x^2,\ x^2-154x+229=0;$$
$$x_1=77-10\sqrt{57},\ x_2=77+10\sqrt{57}.$$

Значение x должно удовлетворить ограничениям $5-\sqrt{5+x}\geqslant 0$, $27-x\geqslant 0$, так как уравнения (*) и (**) возводились в квадрат. Очевидно, что x_2 не удовлетворяет второму ограничению. Проверьте, что x_1 удовлетворяет обоим условиям (некоторые трудности могут возникнуть при проверке первого).

Ответ. $77-10\sqrt{57}$.

Приведем пример, показывающий, как иногда можно избавляться от квадратных радикалов, не возводя уравнения в квадрат (или почти не возводя).

8. *Решить уравнение* $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$.

Решение. Умножим обе части на сумму корней, получим $((a-b)(a+b)=a^2-b^2)$:

$$2x+1=(2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}).$$

1) $2x+1=0$, $x_1=-\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1$.

Можно во втором уравнении, как обычно, уединить один радикал, возвести обе части в квадрат и т. д. А можно поступить иначе. Поскольку мы ищем лишь те корни этого уравнения, которые являются одновременно и корнями исходного, то эти корни должны удовлетворять уравнению, являющемуся их суммой, т. е. уравнению

$$\sqrt{x^2+5x+3}=x+1, \text{ откуда } x_2=-\frac{2}{3}.$$

Проверка показывает, что оба корня подходят:

Ответ. $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$.

(Проверка здесь необходима, поскольку ни из чего не следует, что при найденных значениях подкоренные выражения не будут отрицательными.)

Еще один способ избавления от радикалов — введение вспомогательных неизвестных — рассматривается в соответствующих параграфах.

6. О понятии области допустимых значений неизвестного

Областью определения уравнения или областью допустимых значений (сокращенно ОДЗ) уравнения называется множество тех значений неизвестного, при которых имеют смысл его левая и правая части.

Во введении понятия ОДЗ особой необходимости нет, поскольку, как это следует из самого его определения, при решении любого уравнения мы не имеем права рассматривать значения неизвестного, не входящие в ОДЗ. Тем удивительнее, что сплошь и рядом приходится наблюдать «решения», в которых большая часть посвящена нахождению тех значений неизвестного, которые оно не может принимать, и откуда очень трудно понять, а чему же оно все-таки равно.

Уравнение может быть правильно решено, если в решении отсутствует даже упоминание об ОДЗ. И наоборот, верно найденная ОДЗ и последующий отбор корней по нему не гарантируют от ошибок. Универсальных рецептов здесь нет и быть не может. Более того, любая, даже в принципе полезная рекомендация, которая может быть истолкована как универсальная, превратившись в догму, принесет лишь вред, о чем, в частности, свидетельствует короткая, но поучительная история возникновения и распространения понятия ОДЗ. (Посмотрите с точки зрения полезности нахождения ОДЗ примеры 1—8. Обратите внимание на то, что в уравнениях 3—7 даже лишние корни входят в ОДЗ.)

Разберем еще два примера, показывающих, что в одних случаях нахождение ОДЗ полезно при решении уравнения, в других задача определения ОДЗ оказывается сложной и абсолютно ненужной. (При нахождении ОДЗ надо уметь решать неравенства и системы неравенств. Несмотря на то что тема «Неравенства» следует позже, мы предполагаем здесь наличие некоторых основных умений и навыков в решении неравенств.)

9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}.$$

Решение. Нахождение ОДЗ в этом уравнении представляет собой достаточно трудную (проверьте) и совершенно ненужную задачу. Возведем уравнение в квадрат:

$$x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}=x^3-1+4\sqrt{x^3-1}\cdot\sqrt{x}+4x,$$
$$\sqrt{x^3-1}\cdot\sqrt{x}=0;\ x_1=1,\ x_2=0;$$

$x_2=0$ — лишний корень (проверка).

Ответ. 1.

10. *Решить уравнение* $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$.

Решение. В этом уравнении нахождение ОДЗ приносит несомненную пользу, поскольку оно состоит из двух значений: $x=1$ и $x=0$ (докажите). Проверка показывает, что корнем уравнения является лишь значение $x=1$.

Ответ. 1.

Конечно, уравнения 9 и 10 специально подобраны и отражают две крайние ситуации. Истина, как всегда, находится посередине.

7. Замена неизвестного

Введение нового неизвестного, относительно которого уравнение имеет более простой, легко приводимый к стандартному вид или даже просто упрощающее вид уравнения — важнейший метод решения уравнений любых видов и типов.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся замены.

а) Замена $y=x^n$. В частности, с помощью замены $y=x^2$ решаются так называемые биквадратные уравнения, т. е. уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$.

б) Замена $y=P(x)$ или $y=\sqrt[k]{P(x)}$, где $P(x)$ — многочлен. Чаще всего встречаются задачи, в которых делается замена $y=ax^2+bx+c$ или $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

в) Замена $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (например, $y=\frac{x^2}{x+1}$). В частности, с помощью замены $y=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$ решаются возвратные уравнения 4-й степени, т. е. уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$. Делается это следующим образом. Разделим уравнение на x^2 почленно, получим

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Поскольку

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

то относительно $y=x+\frac{1}{x}$ будем иметь уравнение

$$ay^2+by+c-2a=0.$$

Прежде чем рассмотреть примеры, дадим два совета. Первый: новое неизвестное следует вводить сразу, при первой возможности.

Второй: после введения нового неизвестного получившееся уравнение следует полностью решить с этим неизвестным, отбросить, если таковые появились, лишние корни и лишь затем вернуться к первоначальному неизвестному.

11. *Решить уравнение* $2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2=0$.

Решение. Сделаем замену $y=\sqrt{x^2-3x+6}$. (Можно за новое неизвестное принять x^2-3x, но в этом случае решение будет несколько более сложным.) Тогда $y\geqslant 0$, $x^2-3x=y^2-6$. Получим относительно y уравнение

$$2y^2-12+y+2=0,\ 2y^2+y-10=0;\ y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2};$$

y_2 не удовлетворяет условию $y\geqslant 0$. Возвращаемся к x:

$$\sqrt{x^2-3x+6}=2;\ x_1=1,\ x_2=2.$$

Ответ. 1; 2.

12. *Решить уравнение* $\frac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{10}{9}$.

Решение. Можно в этом уравнении освободиться от знаменателя, проделать все необходимые преобразования и убедиться, что получившееся уравнение 4-й степени является возвратным. Но лучше это сделать быстрее. Поделим числитель и знаменатель дроби, расположенной в левой части, на x^2. Получим

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{10}{9},\ y=x+\frac{1}{x};$$

$$\frac{y}{(y-1)^2}=\frac{10}{9},\ 10y^2-29y+10=0;\ y_1=\frac{5}{2},\ y_2=\frac{2}{5}.$$

1) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, $2x^2-5x+2=0$; $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$;

2) $x+\frac{1}{x}=\frac{2}{5}$, $5x^2-2x+5=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $2;\ \frac{1}{2}$.

13. *Решить уравнение* $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$.

Решение. Поскольку в левой части стоит сумма двух квадратов, естественно попытаться дополнить ее до квадрата суммы или разности. Во втором случае получим

$$x^2-\frac{2x^2}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1},$$

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1},\ \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-2\,\frac{x^2}{x+1},$$

$$\frac{x^2}{x+1}=y,\ y^2=\frac{40}{9}-2y;\ y_1=\frac{4}{3},\ y_2=-\frac{10}{3}.$$

1) $\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}$, $3x^2=4x+4$; $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=2$;

2) $\frac{x^2}{x+1}=-\frac{10}{3}$, $3x^2+10x+10=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $-\frac{2}{3};\ 2$.

14. *Решить уравнение* $x\sqrt{3-x}-5x=1+\sqrt{3-x}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{3-x}=y$, тогда $y\geqslant 0$ и $x=3-y^2$;

$$(3-y^2)\,y-5\,(3-y^2)=1+y,$$
$$y^3-5y^2-2y+16=0.$$

Получилось кубическое уравнение, которое мы решать не умеем.

Однако существует метод нахождения рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами, после чего можно свести решение данного уравнения к решению уравнения меньшей степени. Об этом мы расскажем в следующем пункте, где и окончим решение этого уравнения.

Рассмотрим еще несколько полезных примеров.

15. *Решить уравнение* $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

Решение. Группируя в левой части первый множитель с последним, а второй с третьим, получим

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120.$$

Обозначим $y=x^2+5x+4$. Для y имеем уравнение

$$y^2+2y-120=0;\ y_1=10,\ y_2=-12.$$

1) $x^2+5x+4=10$; $x_1=1$, $x_2=-6$;

2) $x^2+5x+4=-12$; $D<0$. Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. 1; -6.

16. *Решить уравнение* $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$.

Решение. Перенесем $24(1+x)$ в левую часть и разделим почленно на $(1+x)$. Получим

$$6\frac{x^2}{1+x}+7\frac{x}{\sqrt{1+x}}-24=0.$$

Теперь естественным образом вводится новое неизвестное $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, тогда $6y^2+7y-24=0$; $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-\frac{8}{3}$.

1) $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{3}{2}$, $4x^2-9x-9=0$; $x_1=3$, $x_2=-\frac{3}{4}$ $\left(-\frac{3}{4}\right.$ — лишний корень, так как должно быть $\left.x\geqslant 0\right)$;

2) $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=-\frac{8}{3}$, $9x^2-64x-64=0$; $x_3=-\frac{8}{9}$, $x_4=8$ (8 — лишний корень, так как должно быть $x\leqslant 0$).

Ответ. 3; $-\frac{8}{9}$.

Рассмотренный в этом примере метод применим всегда, когда уравнение имеет вид $au^2-buv+cv^2=0$, где u и v зависят от x. (Это уравнение называется однородным относительно u и v второй степени, поскольку все его члены имеют одну и ту же суммарную степень, равную 2.) Делением на v^2 оно приводится к квадратному уравнению относительно $y=\frac{u}{v}$.

Подводя итог этому пункту, заметим, что в рассмотренных примерах были показаны лишь некоторые достаточно распространенные виды и способы замены неизвестного. В одних случаях такую замену можно сделать сразу, в других — после ряда целенаправленных преобразований. Главное здесь — сделать замену вовремя, не тянуть с нею до конца, не прозевать нужный момент.

8. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Разложение на множители

Разложение левой части уравнения на множители (правая часть равна нулю) — достаточно распространенный прием решения самых различных уравнений. Здесь нет общих рецептов. Многое зависит от вашего умения, сообразительности, наблюдательности и опыта. Есть, правда, исключения. Об одном общем методе разложения на множители некоторых алгебраических уравнений мы расскажем в этом пункте.

В одних случаях нужное разложение естественным образом определяется самим уравнением.

17. *Решить уравнение* $x^5-2x^3-3x^2+6=0$.

Решение. Группируя попарно члены, сразу получаем нужное разложение:

$$(x^2-2)(x^3-3)=0.$$

В других случаях надо быть чрезвычайно изощренным человеком, чтобы разложить данное уравнение на множители, даже если известно, что такое разложение возможно. Такое уравнение очень легко составить, но очень трудно решить. Например, возьмем очень простое уравнение $(x^2-5x+3)(x^2+3x-1)=0$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $x^4-2x^3-13x^2+14x-3=0$. Как из этого уравнения получить исходное, трудно сказать. Возможно, кто-нибудь сообразит и сумеет представить левую часть в виде разности квадратов $(x^2-x+1)^2-4(2x-1)^2$. Безусловно, это не самый лучший способ придумывания трудных задач.

Нахождение рациональных (в частности, целых) корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами основано на следующей теореме.

Пусть $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ — уравнение с целыми коэффициентами. Если число $x_0=\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и дробь $\frac{p}{q}$ несократима, является корнем уравнения, то p есть делитель свободного члена a_n, а q — делитель коэффициента при старшем члене a_0. (Докажите эту теорему самостоятельно.)

Зная один корень многочлена, можно его разложить на множители, т. е. если α — корень многочлена $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, то

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}).$$

Нам нет необходимости доказывать это утверждение в общем виде. Достаточно уметь разложить на множители многочлен в каждом конкретном случае.

Доведем теперь до конца решение уравнения 14. Мы имеем $y^3-5y^2+2y+16=0$. Поскольку старший коэффициент равен 1, $q=1$ (см. теорему). Свободный член имеет делители 1, 2, 4, 8, 16. Таким образом, если это уравнение имеет рациональный корень, то этот корень непременно целый и находится среди чисел ±1, ±2, ±4, ±8, ±16. Подставляя их в левую часть, найдем $y_1=2$. Следовательно, левая часть разлагается на множители, один из которых $(y-2)$.

Произвести это разложение можно с помощью метода, который назовем методом группировки. Суть его в том, чтобы представить многочлен в виде суммы пар слагаемых таким образом, чтобы из каждой пары можно было выделить множитель $(y-2)$. Поскольку первый член равен y^3, то в качестве второго слагаемого следует взять $-2y^2$, в результате чего образуется пара y^3-2y^2, в которой можно вынести множитель $y-2$. Таким образом, от второго члена мы «заняли» $-2y^2$, остается $-3y^2$. Прибавляем $6y$, получим пару $-3y^2+6y=-3y(y-2)$ и т. д. В результате будем иметь

$$y^3-5y^2-2y+16=(y^3-2y^2)+(-3y^2+6y)+$$
$$+(-8y+16)=(y-2)(y^2-3y-8).$$

Таким образом, для нахождения остальных корней надо решить уравнение $y^2-3y-8=0$. Его корни: $y_2=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$, $y_3=\frac{3-\sqrt{41}}{2}$, но $y\geqslant0$, поэтому y_3 не подходит. Возвращаясь к x, найдем ответ.

Ответ. -1; $-\frac{1}{2}(19+3\sqrt{41})$.

18. *Решить уравнение* $6x^3+x^2-11x-6=0$.

Решение. Рациональные корни этого уравнения следует искать среди чисел ±1, ±2, ±3, ±6, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$. Подставляя их поочередно в уравнение, найдем, что $x_1=-1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=-\frac{2}{3}$ удовлетворяют уравнению. Ими и исчерпываются все корни уравнения.

Ответ. -1; $\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$.

9. Системы уравнений

Наиболее простым и, вероятно, самым распространенным методом, применяемым при решении системы уравнений, является метод последовательного исключения неизвестных. Любая система линейных уравнений может быть решена этим методом. Суть его в следующем.

Выражаем одно неизвестное из одного уравнения через остальные и подставляем в оставшиеся. Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных уменьшилось на 1. С новой системой поступаем таким же образом и так до тех пор, пока это возможно.

Если в системе некоторые уравнения не линейны, то этот метод можно применить не всегда. Однако он может быть использован как прием, за счет которого можно решение данной системы свести к решению системы, состоящей из меньшего числа уравнений и неизвестных.

19. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2x^2+y-z=-1, \\ z+y-2x=1, \\ x^4+zy-y=1. \end{cases}$

Решение. Выражаем z из второго уравнения $z=1+2x-y$ и подставляем в первое и третье:

$$\begin{cases} 2x^2+y-(1+2x-y)=-1, \\ x^4+(1+2x-y)\,y-y=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x+y=0, \\ x^4+2xy-y^2=1; \end{cases}$$

$$y=x-x^2$$

$$x^4+2x\,(x-x^2)-(x-x^2)^2=1;\ x^2=1;$$

$$x_1=1,\ y_1=0,\ z_1=3;\ x_2=-1,\ y_2=-2,\ z_2=1.$$

Ответ. $(1;\ 0;\ 3);\ (-1;\ -2;\ 1)$.

Однако не всегда удается так легко выразить одно неизвестное через другие.

20. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3x^2+5xy-22y^2=0, \\ x^2+x+y^2-2y=2xy+1. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение этой системы является однородным относительно x и y (см. уравнение 16 и замечание к нему). Разделив его на y^2 (очевидно, $y\neq 0$), получим квадратное уравнение относительно $t=\frac{x}{y}$ и найдем $t_1=2$, $t_2=-\frac{11}{3}$. Таким образом, имеются две возможности:

$$1)\ x=2y \text{ и } 2)\ x=-\frac{11}{3}y.$$

Подставляя найденные выражения x через y во второе уравнение, получим соответственно два квадратных уравнения:

$$1)\ y^2=1 \text{ и } 2)\ 196y^2-51y-9=0.$$

Ответ. $(\pm 2;\ \pm 1);\ \left(-\frac{187\pm 11\sqrt{1073}}{392};\ \frac{51\pm 3\sqrt{1073}}{392}\right)$.

Этот метод применим во всех случаях, когда одно уравнение является однородным относительно двух неизвестных.

21. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ 3x^2+2xy-2y^2=3. \end{cases}$

Решение. Умножив первое уравнение на 3, а второе — на (-4) и сложив их, мы получим однородное уравнение $-6x^2+xy+5y^2=0$. С этим уравнением поступим, как в предыдущем примере: разделим на y^2 и получим квадратное уравнение относительно $t=\frac{x}{y}$:

$$6t^2-t-5=0;\ t_1=1,\ t_2=-\frac{5}{6}.$$

(Доведите решение системы до конца самостоятельно.)

Ответ. $(\pm 1;\ \pm 1)$.

22. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x+y+3xy=9. \end{cases}$

Решение. Предложенная система является (и называется) симметричной: замена x на y, а y на x не меняет каждого из уравнений системы. В такого рода системах очень часто к цели приводит следующая замена неизвестных: $u=x+y$, $v=xy$. Поскольку $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$, относительно u и v получим систему

$$\begin{cases} u^2-2v=5, \\ u+3v=9 \end{cases}$$

Исключая v, получим для u квадратное уравнение $3u^2+2u-33=0$; $u_1=3$, $u_2=-\frac{11}{3}$; $v_1=2$, $v_2=\frac{38}{9}$.

Для x и y соответственно будем иметь две системы:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\frac{11}{3}, \\ xy=\frac{38}{9}. \end{cases}$$

Вторая система не имеет действительных корней.

Ответ. $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$.

Сведение к системе алгебраических уравнений, в частности к симметричной системе, достаточно распространенный метод решения иррациональных уравнений с одним неизвестным.

23. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{3-x}=y$, $\sqrt[3]{6+x}=z$. Из определения y и z следует, что $y^3+z^3=(3-x)+(6+x)=9$. Таким образом, для y и z имеем симметричную систему

$$\begin{cases} y+z=3, \\ y^3+z^3=9. \end{cases}$$

«По стандарту» обозначим $u=y+z$, $v=yz$, тогда

$$y^3+z^3=(y+z)(y^2-yz+z^2)=(y+z)((y+z)^2-3yz)=u(u^2-3v).$$

Таким образом, $\begin{cases} u=3, \\ u(u^2-3v)=9; \end{cases}$ $u=3$, $v=2$.

Возвращаясь к y и z, найдем $y_1=1$, $z_1=2$; $y_2=2$, $z_2=1$. Соответственно имеем два значения x: 2 и -5.

Ответ. 2; -5.

Рассмотрим еще одну симметричную систему.

24. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} x^3+y^3=4, \\ xy=1. \end{cases}$

Решение. Попробуем нашу замену: $u=x+y$, $v=xy$. Поскольку $v=xy=1$, а $x^3+y^3=u(u^2-3v)=u^3-3u$, для u получим кубическое уравнение $u^3-3u-4=0$, не имеющее рациональных корней (проверьте). Тем не менее данная система достаточно просто решается. Возведем второе уравнение в куб. Получим

$$\begin{cases} x^3+y^3=4, \\ x^3y^3=1, \end{cases}$$

т. е. x^3 и y^3 — корни квадратного уравнения $t^2-4t+1=0$; $t_1=2-\sqrt{3}$, $t_2=2+\sqrt{3}$.

Ответ. $(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}; \sqrt[3]{2+\sqrt{3}})$; $(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}; \sqrt[3]{2-\sqrt{3}})$.

Заметим, что «попутно» мы решили кубическое уравнение $u^3-3u-4=0$. Вернее, нашли его корень: $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$. (Если же мы умеем находить все три комплексные решения уравнения $z^3=a$, то мы сможем найти выражение для всех трех корней уравнения $u^3-3u-4=0$.)

Достаточно часто встречаются системы, в которых одно уравнение является квадратным относительно какого-либо неизвестного или комбинации неизвестных.

25. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4, \\ x^2+4x+y^2-3y=0. \end{cases}$

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=t$, тогда $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{1}{t}$. Первое уравнение относительно t имеет вид $t+\dfrac{3}{t}=4$, откуда $t_1=1$, $t_2=3$. Система разветвляется на две:

1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=1, \\ x^2+4x+y^2-3y=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=0, \\ x^2+4x+y^2-3y=0; \end{cases}$

$x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-4$, $y_2=0$;

2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=3, \\ x^2+4x+y^2-3y=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=\dfrac{4}{5}x, \\ x^2+4x+y^2-3y=0; \end{cases}$

$x_3=-\dfrac{40}{41}$, $y_3=-\dfrac{32}{41}$;

(0; 0) — лишнее решение.

Ответ. $(-4; 0)$; $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$.

26. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2-6y^2-yx-2x+11y-3=0, \\ \sqrt{x-3y+2}+\sqrt{x+2y-5}=x+y-7. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно x (можно относительно y):

$$x^2-(y+2)x-6y^2+11y-3=0;$$
$$D=(y+2)^2+4(6y^2-11y+3)=25y^2-40y+16=(5y-4)^2.$$

Таким образом, имеем две возможности:

$$1)\ x=\frac{1}{2}(y+2+5y-4)=3y-1;$$
$$2)\ x=\frac{1}{2}(y+2-5y+4)=-2y+3.$$

Заменяя во втором уравнении x через y и решая получившиеся для y уравнения, найдем для каждого случая:

1) $\sqrt{5y-6}=4y-9$, $5y-6=16y^2-72y+81$, $16y^2-77y+87=0$; $y_1=3$, $y_2=\frac{29}{16}$ (y_2 — лишний корень, так как $4y_2-9<0$);

2) нет действительных решений.

Ответ. $(8; 3)$.

Рассмотрим еще несколько систем, в которых к цели приводят другие достаточно распространенные приемы решений.

27. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7, \\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1. \end{cases}$

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+3y}=u$, $\sqrt{5-x-y}=v$, $\sqrt{2x+y-3}=w$ (с подобным способом избавления от радикалов мы уже встречались). Имеем $u^2=2x+3y$, $v^2=5-x-y$, $w^2=2x+y-3$. Можно проверить, что $u^2+4v^2+w^2=17$. Таким образом, для u, v и w получаем систему

$$\begin{cases} 2u+v=7, \\ 3v-w=1, \\ u^2+4v^2+w^2=17. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим $u=\frac{7-v}{2}$, $w=3v-1$. Подставляя эти выражения в третье уравнение, получим для v квадратное уравнение

$$53v^2-38v-15=0;\ v_1=1,\ v_2=-\frac{15}{53}.$$

По условию $v\geqslant 0$. Значит, $v=1$, $u=3$, $w=2$; $2x+3y=9$, $5-x-y=1$. Из последней системы находим x и y.

Ответ. $(3; 1)$.

В предыдущей системе мы составляли комбинацию из u^2, v^2, w^2, не зависящую от x и y. Вообще, составление комбинаций из данных уравнений, в результате которых получаются более простые уравнения, достаточно распространенный прием при решении систем. (С этим приемом мы уже встречались при решении системы 21.)

28. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 6x+y^2-z^2=6, \\ x^2-y-4z=-4, \\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2. \end{cases}$$

Решение. Умножим уравнения соответственно на 2, 3 и 1 и сложим получившиеся уравнения. (Выбор множителей 2 и 3 обусловлен естественным желанием избавиться от констант. После того как мы найдем комбинацию из первых двух уравнений, нетрудно заметить, что сложение получившегося уравнения с третьим уравнением дает возможность избавиться от y.) Получим

$$24x^2+12x-2z^2-12z=22z^2,$$
$$2(x^2-z^2)+(x-z)=0,\ (x-z)(2x+2z+1)=0.$$

Возникают два случая: 1) $x-z=0$; 2) $2x+2z+1=0$. Выражаем в каждом случае z через x и подставляем в первые два уравнения системы (они на вид проще), третье уравнение можно не рассматривать. Получим соответственно две системы:

1) $\begin{cases} 6x+y^2-x^2=6, \\ x^2-y-4x=-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 20x+4y^2-4x^2=25, \\ x^2-y+4x=-6. \end{cases}$

В первой системе сложим первое уравнение с удвоенным вторым, получим $x^2-2x+y^2-2y=-2$, откуда $(x-1)^2+(y-1)^2=0$; $x_1=1$, $y_1=1$. Подставив эти значения в уравнения системы 1), убедимся, что найденные значения удовлетворяют этой системе.

Во второй системе первое уравнение перепишем в виде $4y^2=(2x-5)^2$, откуда $2y=\pm(2x-5)$. Заменяя y через x во втором уравнении, в случае $y=\frac{1}{2}(2x-5)$ получим квадратное уравнение, не имеющее действительных корней, а в случае $y=-\frac{1}{2}(2x-5)$ найдем $x_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{11}}{2}$, $y_{2,3}=\frac{10\mp\sqrt{11}}{2}$.

Ответ. $(1;\ 1;\ 1)$; $\left(\frac{-5+\sqrt{11}}{2};\ \frac{10-\sqrt{11}}{2};\ \frac{4-\sqrt{11}}{2}\right)$; $\left(\frac{-5-\sqrt{11}}{2};\ \frac{10+\sqrt{11}}{2};\ \frac{4+\sqrt{11}}{2}\right)$.

10. Уравнения, содержащие абсолютные величины

Наиболее распространенным методом решения уравнений и систем уравнений, содержащих абсолютные величины, является метод, при котором знак абсолютной величины раскрывается на основании ее определения:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

29. *Решить уравнение* $|2x+1|+|5-3x|+1-4x=0$.

Решение. Выражения, стоящие под знаком абсолютных величин, обращаются в ноль при $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{5}{3}$. Соответственно нам нужно рассмотреть три случая:

$$1)\ x<-\frac{1}{2};\quad 2)\ -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{5}{3};\quad 3)\ x\geqslant\frac{5}{3}.$$

Получим три уравнения, в каждом из которых на неизвестное наложено ограничение.

1) $x<-\frac{1}{2}$. В этом случае $2x+1<0$; $5-3x>0$. Следовательно, $|2x+1|=-2x-1$, $|5-3x|=5-3x$. Получаем $-2x-1+5-3x+1-4x=0$, $-9x+5=0$, $x=\frac{5}{9}$; $\frac{5}{9}$ не удовлетворяет условию $x<-\frac{1}{2}$.

2) $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{5}{3}$; $2x+1+5-3x+1-4x=0$, $x=\frac{7}{5}$.

3) $x\geqslant\frac{5}{3}$; $2x+1+3x-5+1-4x=0$, $x=3$.

Во втором и третьем случаях соответствующие значения x удовлетворяют нужным ограничениям.

Ответ. $\frac{7}{5}$; 3.

Можно действовать и иначе, исходя из того, что равенство $|a|=b$ означает, что $b\geqslant 0$, $a=\pm b$.

30. *Решить уравнение* $|3x^2+5x-4|=2x-1$.

Решение. Этому уравнению соответствуют два уравнения:

$$3x^2+5x-4=2x-1 \text{ и } 3x^2+5x-4=-2x+1,$$

среди корней которых нужно отобрать удовлетворяющие условию $x\geqslant\frac{1}{2}$. Первое имеет корни $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; подходит первый корень. Корни второго $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$, $\frac{-7-\sqrt{109}}{6}$. Вновь остается первый корень.

Ответ. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$.

Можно, наконец, вовсе не решать неравенств, а, рассмотрев весь набор уравнений, который может получиться при раскрытии знака абсолютной величины и среди решений которых содержатся все решения исходного уравнения, решить их и отобрать (например, с помощью проверки) корни, удовлетворяющие исходному уравнению.

31. *Решить уравнение*

$$||x^5-\sqrt[3]{3x-1}|-100|=x^5+\sqrt[3]{3x-1}-104.$$

Решение. Все корни исходного уравнения содержатся среди корней двух уравнений:

$$|x^5-\sqrt[3]{3x-1}|-100=x^5+\sqrt[3]{3x-1}-104,$$
$$|x^5-\sqrt[3]{3x-1}|-100=-x^5-\sqrt[3]{3x-1}+104,$$

которые можно переписать в виде

$$|x^5-\sqrt[3]{3x-1}|=x^5+\sqrt[3]{3x-1}-4,$$
$$|x^5-\sqrt[3]{3x-1}|=-x^5-\sqrt[3]{3x-1}+204.$$

Каждое из этих уравнений, в свою очередь, распадается на два. Таким образом, мы приходим к четырем уравнениям:

$$\sqrt[3]{3x-1}=2,\ x^5=2,\ x^5=102,\ \sqrt[3]{3x-1}=102,$$

среди корней которых содержатся все корни исходного уравнения. Имеем четыре корня: $x_1=3$, $x_2=2^{\frac{1}{5}}$, $x_3=102^{\frac{1}{5}}$, $x_4=\frac{1}{3}(102^3+1)$.

Первый корень проверяется легко. Он удовлетворяет уравнению.

Второй и третий корни не подходят, так как правая часть исходного уравнения при этих значениях отрицательна ($\sqrt[3]{3x_3-1}<2$, потому, что $x_3<3$).

Четвертый корень также является лишним, поскольку этот корень должен удовлетворять уравнению $|x^5-\sqrt[3]{3x-1}|=-x^5-\sqrt[3]{3x-1}+204$, а правая часть этого уравнения отрицательна при $x=\frac{1}{3}(102^3+1)$.

Ответ. 3.

Заключение. В этом параграфе были рассмотрены виды уравнений и методы решения, которые условно можно назвать стандартными.

Мы не рассматривали здесь уравнения с параметрами, уравнения, в которых необходимо найти целочисленные решения, и другие виды уравнений с «нестандартными» условиями. Точно так же нерассмотренными оказались многие интересные методы решений: использование монотонности, экстремальных свойств, входящих в уравнение функций, логические методы и т. д. Все эти виды уравнений и методы их решения мы «объявляем» нестандартными и будем их рассматривать в соответствующих параграфах. Не следует думать, что любое нестандартное уравнение труднее для решения, чем стандартное. Легко привести примеры очень простых уравнений, решаемых, однако, формально «нестандартными» методами. И наоборот, уже в этом параграфе можно найти много примеров достаточно трудных стандартных уравнений и систем уравнений.

11. Задачи

Решите уравнение (1—10).

1. $\frac{3x+7}{5x+1}=\frac{2x+1}{x+4}$. **2.** $x^2+2103x+2102=0$.

3. $118x^2+1389x-1507=0$. **4.** $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}$.

5. $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$.

6. $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=0$.

7. $112+19\left(\frac{8-3x}{x+3}+\frac{3-2x}{x+7}\right)=17\left(\frac{15-x}{x+4}+\frac{31+2x}{x+6}\right)$.

8. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$.

9. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=(x+1)(x+2)(x+3)$.

10. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.

11. Найдите сумму наибольших корней уравнений $x^2-5x+2+3\sqrt{2}=0$, $x^2-4x+1-2\sqrt{2}=0$.

Решите уравнение (12—119).

12. $\sqrt{5+2x}=5-x$. **13.** $\sqrt{7+3x}=4-x$.

14. $\sqrt{5x-34}=x-7$. **15.** $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

16. $\sqrt{(2\sqrt{7}+\sqrt{2}-3\sqrt{5})\,x}=x$ **17.** $\sqrt{5-x}=\sqrt{3}+2-x$.

18. $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}$.

19. $\sqrt{(x+1)(2x+3)}=x+3$. **20.** $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+3$.

21. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=7$. **22.** $\sqrt{5-x}+\sqrt{8+2x}=2$.

23. $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+\frac{3}{4}x}=\sqrt{4x^2+3x}$.

24. $2x-\sqrt{x^3+2x^2-3x}=0$. **25.** $x+\sqrt{\frac{x^2+4x}{x-2}}=0$.

26. $\frac{1-x}{1+x}\cdot\sqrt{\frac{1+3x}{1-3x}}=0$. **27.** $\frac{\sqrt{4+x}}{2+\sqrt{4+x}}=\frac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{4-x}}$.

28. $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{x}{6}$. **29.** $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3$.

30. $\sqrt{45x+12}-\sqrt{15x+2}=\sqrt{10}\,(3x+1)$.

31. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5x+2}$.

32. $\sqrt{x^2-5x+1}+\sqrt{8x-x^2-12}=\sqrt{3x-11}$.

33. $\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{5x+2}$.

34. $\sqrt[3]{x^2-7x+10}+\sqrt[3]{x^2-9x-36}=\sqrt[3]{2x^2-16x-26}$.

35. $\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$.

36. $\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\,x}=2x-\sqrt{2}$.

37. $\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+x+1}=1-6x$.

38. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+33}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x+22}$.

39. $2\,(\sqrt{x+15}-\sqrt{x})=3\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})$.

40. $\sqrt{9x^2-12x+11}-\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1$.

41. $\dfrac{\sqrt[7]{2+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{2+x}}{2}=\dfrac{\sqrt[7]{x}}{3}$.

42. $\dfrac{\sqrt[5]{5-x}}{x^2}-\dfrac{\sqrt[5]{5-x}}{25}=\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{x+5}}$.

43. $\dfrac{x^2+1}{3x^2+2}=\dfrac{4x^2-5}{x^2+6}$.

44. $\dfrac{3x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=4$.

45. $5\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+3}=2\sqrt{2}\,(x^2+4x)$.

46. $2\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=10$.

47. $x^{\frac{20}{21}}+x^{\frac{5}{42}}=12x^{-\frac{5}{7}}$.

48. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

49. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{2}{3}$.

50. $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x+5}=\sqrt{2x^2+2x+17}$.

51. $\sqrt{2+\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}}-1=\sqrt{3-\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}}$.

52. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$.

53. $\dfrac{1}{6x^2-7x+2}+\dfrac{1}{12x^2-17x+6}=4x^2-5x$.

54. $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=16$.

55. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$.

56. $x\,(x+4)+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}+4\right)=0$.

57. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

58. $\dfrac{(x^2+1)^2}{x\,(x+1)^2}=\dfrac{625}{112}$.

59. $\dfrac{(x-1)^2\,x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{2}{9}$.

60. $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

61. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{45}{16}$.

62. $10x^2\,(x-2)^2=9\,(x^2+(x-2)^2)$.

63. $\dfrac{24}{x^2-2x}=\dfrac{12}{x^2-x}+x^2-x$.

64. $x^2+3x+2=15\,\dfrac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}$.

65. $(x^2-2x+2)^2+3x\,(x^2+2x+2)=30x^2$.

66. $x^4+5x^2\,(x+1)=6\,(x+1)^2$.

67. $(x^2+x+1)^2=x^2(3x^2+x+1)$.

68. $x^2+2x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}=30$.

69. $6=(2-x)(3-\sqrt{x^2-9})$.

70. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

71. $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3x}}=12+\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{x}}}$.

72. $\sqrt{\frac{1}{x}-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{2}{x}}$.

73. $\sqrt{\frac{x+5}{5}}-\sqrt{\frac{x-5}{x}}=\sqrt{2\left(1-\frac{5}{x}\right)}$.

74. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+4x-1}=3$.

75. $\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2+x+3}=7$.

76. $\sqrt{3x+5}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x+8}+\sqrt{5x-7}$.

77. $\sqrt{18+3x}-\sqrt{9-x^2}=\sqrt{3x}$.

78. $\frac{1}{6x^2-7x+2}+\frac{1}{12x^2-17x+6}=8x^2-6x+1$.

79. $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}+\frac{5}{4}=0$.

80. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3x}-\sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$.

81. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

82. $x^3-3x^2-3x-1=0$.

83. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$.

84. $\sqrt{3x+19-\frac{3}{x}}-\sqrt{x+18+\frac{3}{x}}=1$.

85. $x\sqrt{x}+x(x-1)=2(x-1)^3$.

86. $(1+x)(1+2x)(1+3x)=4(4+x)(4+2x)(4+3x)$.

87. $\sqrt[4]{1+x}+\frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$.

88. $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{x}+\sqrt{x}=2$.

89. $2x\sqrt[6]{x^5}+x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}-2=0$.

90. $|5-3x|=2x+1$.

91. $|2x-3|=3-2x$.

92. $|3x-8|-|3x-2|=6$.

93. $|x-1|+|x-3|=2x-4$.

94. $1+x+|x^2-x-3|=0$.

95. $2|x^2+2x-5|=x-1$.

96. $x^2-7=|3x-7|$.

97. $x|3x+5|=3x^2+4x+3$.

98. $x|2x+5|+2x|x-3|=22$.

99. $||x^2-3x|-5|=x+1$.

100. $||x+3|-|x-1||=2-x^2$.

101. $\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$.

102. $\sqrt{|5x-7|-27}=x-7$.

103. $(1+x)\cdot|x+2|+x|x-3|=6x+2$.

104. $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

105. $|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}(8x^2-1)$.

106. $3\sqrt{x+1}+|x-5|=6.$ **107.** $\sqrt{x-2}+|x-5|=3.$

108. $4\sqrt{x+2}=|x+1|+4.$ **109.** $4x^2+\sqrt[4]{14}=|x|\cdot\sqrt[4]{224}+1.$

110. $|x|(\sqrt[3]{28}+1)+2=x^2+\sqrt[3]{224}.$

111. $13x-3x^2-\frac{x}{\sqrt{x-1}}-\frac{|4-x|}{\sqrt{x-1}}+|4-x|=$

$=3x|4-x|-\frac{4}{\sqrt{x-1}}+4.$

112. $\frac{2x}{\sqrt{x+4}}+4x^2+9|2x-3|+12x+\frac{|2x-3|}{\sqrt{x+4}}=$

$=27-2x|2x-3|+\frac{3}{\sqrt{x+4}}.$

113. $||x^3-\sqrt{x+1}|-3|=x^3+\sqrt{x+1}-7.$

114. $||x^2-3x|-x+1|=2x^2+x-1.$

115. $||x^3+x^2-1|-4|=x^3-x^2+3.$

116. $x=1-5(1-5x^2)^2.$

117. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$

118. $\sqrt[4]{13x+1}+\sqrt[4]{4x-1}=3\sqrt[4]{x}.$

119. $x^3-1=\sqrt{x}(-3x^2+5x-3).$

Решите систему (120—235).

120. $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 2x^2+3y^2=5. \end{cases}$ **121.** $\begin{cases} x^2+y^2+2x-y=5, \\ x^2+y^2+3x-y=6. \end{cases}$

122. $\begin{cases} x=\frac{2y+3}{3y-2}, \\ y=\frac{x-4}{11-2x}. \end{cases}$ **123.** $\begin{cases} x-y=7, \\ (x^2-y^2)(x-y)=175. \end{cases}$

124. $\begin{cases} \frac{xy}{x+2y}+\frac{x+2y}{xy}=2, \\ \frac{xy}{x-2y}+\frac{x-2y}{xy}=4. \end{cases}$ **125.** $\begin{cases} \frac{1}{2x-3y}+\frac{2}{3x-2y}=\frac{3}{4}, \\ \frac{3}{2x-3y}-\frac{4}{3x-2y}=1. \end{cases}$

126. $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6. \end{cases}$ **127.** $\begin{cases} \sqrt{x-y+5}=3, \\ \sqrt{x+y-5}=11-2x. \end{cases}$

128. $\begin{cases} 3x-y=1, \\ |x-2y|=2. \end{cases}$ **129.** $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \\ \frac{1}{3-x}+\frac{1}{3-y}=2. \end{cases}$

130. $\begin{cases} 3xy-x^2-y^2=5, \\ 7x^2y^2-x^4-y^4=155. \end{cases}$ **131.** $\begin{cases} \frac{1}{x-y}+x^2=1, \\ \frac{x^2}{x-y}=-2. \end{cases}$

132. $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+\sqrt{y}=1, \\ \dfrac{\sqrt{y}}{2x-y}=-6. \end{cases}$

133. $\begin{cases} x^3y+xy^3=10, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

134. $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=3, \\ 3x^2-xy+y^2=3. \end{cases}$

135. $\begin{cases} x^3y+xy^3=1, \\ x^2-y^2=\sqrt{3}. \end{cases}$

136. $\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$

137. $\begin{cases} y\sqrt{y}+\sqrt{y}=5\sqrt{x}-x\sqrt{x}, \\ x-y=3. \end{cases}$

138. $\begin{cases} 2x^2+y^2+x-2y=1, \\ 5x^2+2{,}5y^2+3x-4y=4. \end{cases}$

139. $\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3, \\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{cases}$

140. $\begin{cases} 2x^2+y^2-4x+2y=1, \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5. \end{cases}$

141. $\begin{cases} 3x^2+2y^2+12x-4y=-8, \\ 2x^2-y^2+8x+2y=-10. \end{cases}$

142. $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$

143. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$

144. $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16. \end{cases}$

145. $\begin{cases} y^2-x^2=4x+4, \\ x^2+y^2+3xy=4. \end{cases}$

146. $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$

147. $\begin{cases} x^2-x\sqrt{1-y^4}=1, \\ x\sqrt{1-y^4}+y^4=2. \end{cases}$

148. $\begin{cases} (x^2+y^2-xy)(x-y)=1+y^3, \\ (x^2+y^2+xy)(x+y)=1-y^3. \end{cases}$

149. $\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=40, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

150. $\begin{cases} x=y^3-3y, \\ y=x^3-3x. \end{cases}$

151. $\begin{cases} x^3+y^3=9y, \\ 3x^2y=4(x+y). \end{cases}$

152. $\begin{cases} xy+3y^2-x+4y=7, \\ 2xy+y^2-2x-2y=-1. \end{cases}$

153. $\begin{cases} 2xy+y^2-4x-3y+2=0, \\ xy+3y^2-2x-14y+11=0. \end{cases}$

154. $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

155. $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0. \end{cases}$

156. $\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0, \\ 3x^2-2xy-1=0. \end{cases}$

157. $\begin{cases} x^2-3xy+6x-1=0, \\ y^2-xy-2=0. \end{cases}$

158. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2. \end{cases}$

159. $\begin{cases} \sqrt{y+7x}+\sqrt{y+2x}=5, \\ \sqrt{y+2x}-y+x=1. \end{cases}$

160. $\begin{cases} \sqrt{5y-x}+x=3, \\ \sqrt{2y-x}+x+y=3. \end{cases}$

161. $\begin{cases} 5-\sqrt{-6-y}=\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{x+y}+2=\sqrt{-3+x}. \end{cases}$

162. $\begin{cases} \sqrt{2-3x}-1=\sqrt{5y-3x}, \\ \sqrt{1-5y}+\sqrt{5y-3x}=5. \end{cases}$

163. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5. \end{cases}$

164. $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

165. $\begin{cases} (x^2+x+1)(y^2+y+1)=3, \\ (1-x)(1-y)=6. \end{cases}$

166. $\begin{cases} x=\dfrac{y+1}{3y-5}, \\ y=\dfrac{3z-2}{2z-3}, \\ z=\dfrac{3x-1}{x-1}. \end{cases}$

167. $\begin{cases} xy=6, \\ yz=12, \\ zx=8. \end{cases}$

168. $\begin{cases} x=\dfrac{2yz}{y^2+z^2}, \\ y=\dfrac{2xz}{x^2+z^2}, \\ z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}. \end{cases}$

169. $\begin{cases} x+y=\dfrac{5xy}{1+xy}, \\ y+z=\dfrac{6yz}{1+yz}, \\ z+x=\dfrac{7zx}{1+zx}. \end{cases}$

170. $\begin{cases} x^2+3=\sqrt{3}\,|xy|, \\ 4-y^2=(2x-\sqrt{3}y)^2. \end{cases}$

171. $\begin{cases} x^2-2xy-3y+1=0, \\ 2y^2-xy-3x+2=0. \end{cases}$

172. $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2-6x+3y=0, \\ 3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0. \end{cases}$

173. $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2, \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4}. \end{cases}$

174. $\begin{cases} x^3+(y+1)x^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)x+1=0, \\ \sqrt{1+x^2y+xy}+\sqrt{1+\dfrac{y}{x}}=1. \end{cases}$

175. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3, \\ x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}+x}+y^2=0. \end{cases}$

176. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}-2\sqrt{x^2-1}+y^2=3, \\ 3(x-y)+\dfrac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x}+3y^2=0. \end{cases}$

177. $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125, \\ x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75, \\ x+y+z=8. \end{cases}$

179. $\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2. \end{cases}$

180. $\begin{cases} xy+2yz^2-4z^3=0, \\ y-yz-xz=0, \\ y^2-7xz-13z^3=0. \end{cases}$

181. $\begin{cases} xy-xz+3y+6z=0, \\ y^2-yz+4x-4z=0, \\ xy-z^2-2x-y=0. \end{cases}$

182. $\begin{cases} x^3-x^2z+yz=0, \\ z+2xz+4xy=0, \\ 3x^3+5x^2y-z^2=0. \end{cases}$

183. $\begin{cases} 5(xy-yz)-2x-z=0, \\ 3(xz-z^2)-3x+3y=0, \\ 3(x^2-xz)-4y-2z=0. \end{cases}$

184. $\begin{cases} (x+1)(3-4y)=(6x+1)(3-2y), \\ (4x-1)(z+1)=(x+1)(z-1), \\ (3-y)(z-2)=(1-3y)(z-6). \end{cases}$

185. $\begin{cases} \dfrac{y(1-xy)}{1+y^2}=-\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{x(1-xy)}{1+x^2}=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

186. $\begin{cases} x^3+6y^2+3x=-2, \\ 2y^3-3x^2+6y=1. \end{cases}$

187. $\begin{cases} xy=x-y, \\ 2(x+y)^2=3(x-2y). \end{cases}$

188. $\begin{cases} (x+2y)(x+2z)=6, \\ (y+2x)(y+2z)=3, \\ (z+2y)(z+2x)=-2. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x^3-xyz=1, \\ y^3-xyz=2, \\ z^3-xyz=-\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

190. $\begin{cases} x^2-y^2+z=\dfrac{8}{xy}, \\ y^2-z^2+x=\dfrac{8}{yz}, \\ z^2-x^2+y=\dfrac{8}{zx}. \end{cases}$

191. $\begin{cases} y^2-xy+x^2=z^2, \\ x^2-xz+z^2=y^2, \\ z^3-y^3=x^2+y^2+z^2. \end{cases}$

192. $\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{1}{xy}+z, \\ y^2-z^2=\dfrac{1}{yz}+x, \\ z^2-x^2=\dfrac{1}{zx}+y. \end{cases}$

193. $\begin{cases} y^2+xy+x^2=z, \\ x^2+zx+z^2=y, \\ z^3-y^3=x^2+2zx+zy. \end{cases}$

194. $\begin{cases} zy-2x^2-2xz-xy=1, \\ y^2+2xy+2zy-4xz=3, \\ (2z-3)x^2+y(x^2+1)+2z=3. \end{cases}$

195. $\begin{cases} 4y^2+4xy-3z^2=21x^2, \\ 3y^2-7xy+3x^2=z^2, \\ y^3-8x^3=(27-x)(z^2-x^2). \end{cases}$

196. $\begin{cases} yz-x^2-xz-xy=2, \\ y^2+xy+zy-zx=3, \\ z^2+zy+xz-xy=6, \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0. \end{cases}$

197. $\begin{cases} y+z=2x, \\ y^2+3z^2=28x^2, \\ y^3+8z^3=(y-4x)(1-4z+7xy). \end{cases}$

198. $\begin{cases} xz^2+2x^3yz=3y^2, \\ yz+3x^2y^2=4x^3z^2, \\ 7x^2y^3-6x^4y^2z^2=z^2. \end{cases}$

199. $\begin{cases} 2x^2y-xy^5z=z^2, \\ xz+3y^4z^2=10x^2y^5, \\ 5y^4z+3xy^8z^2=2x^2. \end{cases}$

200. $\begin{cases} x^3 - xyz = \frac{1}{3}\sqrt{x^3+y^3+z^3}, \\ y^3 - xyz = -\frac{5}{6}\sqrt{x^3+y^3+z^3}, \\ z^3 - xyz = \frac{7}{2}\sqrt{x^3+y^3+z^3}. \end{cases}$

201. $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3, \\ \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=3, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2. \end{cases}$

202. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{6}{5}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{3}{4}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{3}. \end{cases}$

203. $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ z^2+u^2=5, \\ xy+zu=3, \\ xu+yz=3. \end{cases}$

204. $\begin{cases} x+y=7-xy, \\ 2x=3+zx^2, \\ 2y=3+zy^2. \end{cases}$

205. $\begin{cases} 3xy=x+y+2, \\ 3yz=y+z+2, \\ 3zu=z+u+2, \\ 3ux=u+x+2. \end{cases}$

206. $\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-4, \\ x^3-y^3+z^3-xyz=8, \\ -x^3+y^3+z^3-xyz=-2. \end{cases}$

207. $\begin{cases} 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+9xyz=0, \\ 2y(x^2-z^2)+3xz=0, \\ 2z(x^2-y^2)+3xy=0. \end{cases}$

208. $\begin{cases} 4\frac{y+z}{y^2z^2}=5x, \\ 4\frac{x+z}{x^2z^2}=5y, \\ \frac{x+y}{x^2y^2}=2z. \end{cases}$

209. $\begin{cases} x+y=1, \\ xz+yu=2, \\ xz^2+yu^2=5, \\ xz^3+yu^3=14. \end{cases}$

210. $\begin{cases} x^2+2yz=1, \\ y^2+2zx=2, \\ z^2+2xy=1. \end{cases}$

211. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=x, \\ (y+z)(y+x)=y, \\ (z+x)(z+y)=z. \end{cases}$

212. $\begin{cases} 27x^3-y^3-13\frac{xy}{z}=0, \\ 3x^2z-4xy+\frac{3}{z}=0, \\ 3xz-yz=1. \end{cases}$

213. $\begin{cases} 2x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=15, \\ 3y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=20, \\ 6z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=13. \end{cases}$

214. $\begin{cases} x^2+6y-z^2=-6, \\ y^2+4x+z=-4, \\ 7x-11y+2z(z+1)=4. \end{cases}$

215. $\begin{cases} x-y^2-5z=5, \\ x^2-8y-z^2=8, \\ x(5x-1)-4y^2-35y=35. \end{cases}$

216. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^4+y^4+z^4=98. \end{cases}$

217. $\begin{cases} x^3-(y+2)x+\sqrt{y+1}=0, \\ (y-x^2+1)\left(y+3-x^2-\frac{1}{x^2}\right)+yx^2=0. \end{cases}$

218. $\begin{cases} y^2+z^2=x^2+2yz-2, \\ z^2+x^2=y^2+2zx-3, \\ x^2+y^2=5zy-5zx+2xy-6. \end{cases}$

219. $\begin{cases} 2xz+y-4xy=1, \\ 4xz^2+4y^2-16xy^2=5, \\ 2xz^3+4y^3-16xy^3=7. \end{cases}$

220. $\begin{cases} yz+x^2=xz+y^2=xy+z^2, \\ \frac{2x}{yz+x^2}+\frac{2y}{xz+y^2}+\frac{2z}{xy+z^2}=x^3+y^3+z^3. \end{cases}$

221. $\begin{cases} x^2(y+z)^2=(1+x^2)y^2z^2, \\ 4y^2(z+x)^2=(4+y^2)z^2x^2, \\ 9z^2(x+y)^2=(9+z^2)x^2y^2. \end{cases}$

222. $\begin{cases} \frac{xyz}{x+y}=2, \\ \frac{xyz}{y+z}=3, \\ \frac{xyz}{z+x}=4. \end{cases}$

223. $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=4x+2y-2z-8, \\ 3x^2+2y^2=25x-4y-32, \\ y^2-2z^2=-2y+4z-3x+11. \end{cases}$

224. $\begin{cases} xy+\frac{6}{xz}=2, \\ xz+\frac{4}{yz}=4, \\ yz-\frac{3}{xy}=1. \end{cases}$

225. $\begin{cases} 2x^2+3y^2=8x+6y+8z+11, \\ y^2-z^2=2y+z+1, \\ 2x^2-4y^2+2z^2=8x-8y+z-1. \end{cases}$

226. $\begin{cases} 3x-6y-8z=xyz^2, \\ 2x-5y-7z=-x^2yz, \\ 3x-9y-13z=-xy^2z. \end{cases}$

227. $\begin{cases} 4xy+y^2+2z^2=-3, \\ 4xz+x^2+2z^2=1, \\ 8yz+y^2+2z^2=1. \end{cases}$

228. $\begin{cases} xy=5x+6y-4z, \\ y^2=3x+5y-z, \\ yz=x+4y+2z. \end{cases}$

229. $\begin{cases} 7x-4y-2z=xyz^2, \\ 6x-3y-z=-x^2yz, \\ 11x-5y-z=-xy^2z. \end{cases}$

230. $\begin{cases} x^2=x-2z, \\ xy=3x+y-5z, \\ xz=5x+2y-8z. \end{cases}$

231. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

232. $\begin{cases} x^2+xy+4xz-4z^2=0, \\ y^2+xy+4yz-8z^2=0, \\ xyz=8. \end{cases}$

233. $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4, \\ (y+z)^2-x^2=2, \\ (z+x)^2-y^2=3. \end{cases}$

234. $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=9+yz, \\ x^2+2y^2+z^2=6+xz, \\ x^2+y^2+2z^2=3+xy. \end{cases}$

235. $\begin{cases} xyz+xz^2=2, \\ xy+2xz=-z, \\ x^2yz=-15. \end{cases}$

§ 3. НЕРАВЕНСТВА

В отличие от уравнений в неравенствах невозможна проверка (в обычном смысле) найденных решений. Вследствие этого схема решения, часто применявшаяся при решении уравнений, заключающаяся в получении последовательности уравнений-следствий с последующим отбором корней, при решении неравенств не работает.

Тем не менее многие приемы и методы решения неравенств совпадают с приемами и методами решения уравнений (преобразование, разложение на множители, замена неизвестного). Более того, исходя из идей метода интервалов, решение любого неравенства (во всяком случае, тех, которые встречаются в школьной практике и на конкурсном экзамене) можно свести к решению одного или нескольких уравнений. Простейшую модификацию метода интервалов иллюстрирует следующий пример.

1. *Решить неравенство* $\frac{(x-1)(x+2)}{3x+1} \leqslant 0$.

Решение. Отметим на числовой прямой точки, в которых меняют знак (обращаются в ноль) двучлены $x-1$, $x+2$, $3x+1$, соответственно $x=1$, $x=-2$, $x=-\frac{1}{3}$ (рис. 1). При $x>1$ каждый из трех двучленов положителен, следовательно, положительна и вся дробь. Двигаясь вдоль прямой справа налево, замечаем, что в каждой из отмеченных точек меняет знак в точности один множитель $\left(\text{деление на } 3x+1 \text{ — это умножение на } \frac{1}{3x+1}\right)$. Следовательно, меняет знак и левая часть нашего неравенства.

Ответ. $x \leqslant -2$; $-\frac{1}{3} < x \leqslant 1$.

В общем случае метод интервалов основывается на следующем простом рассуждении. Пусть задана функция $f(x)$, тогда числовую прямую можно разбить на четыре множества. A — мно-

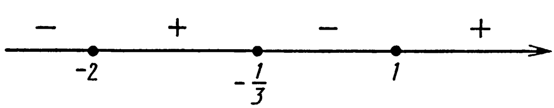


Рис. 1

жество точек, для которых $f(x)>0$; B — множество точек, для которых $f(x)=0$; C — множество точек, для которых $f(x)<0$; D — множество точек, для которых $f(x)$ не определена. Как правило, каждое из множеств представляет собой объединение точек, лучей и отрезков (с концами или без). Большей частью множество B состоит из отдельных точек.

Решение неравенств вида $f(x)>0$, $f(x)\geqslant 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leqslant 0$ можно разбить на следующие этапы. Сначала находим граничные точки множеств A, B, C и D, для чего решаем соответствующие уравнения (в большинстве случаев множество B состоит из точек, являющихся граничными для A и C). Найденные точки разбивают прямую на лучи и интервалы. Теперь для каждого луча или интервала определяем, к какому из четырех множеств относятся принадлежащие ему точки. (Лучше эти операции осуществлять последовательно. Например, сначала найти множество D, затем B и т. д.)

2. *Решить неравенство* $\sqrt{\dfrac{3x^2-2x-1}{4+3x-x^2}}<1$.

Решение. Найдем значения x, для которых обращается в ноль соответственно числитель или знаменатель данной дроби: $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=4$. Отметим найденные точки на числовой прямой. В этих точках подкоренное выражение меняет знак. Поскольку при $x>4$ оно отрицательно, расставляем знаки, как показано на рисунке 2, *а*. Левая часть данного неравенства

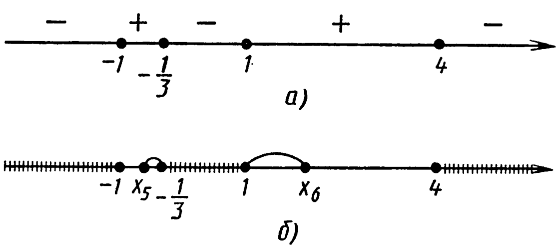


Рис. 2

определена при $-1<x\leqslant-\frac{1}{3}$, $1\leqslant x<4$. Теперь решим уравнение

$$\sqrt{\frac{3x^2-2x-1}{4+3x-x^2}}=1.$$

Найдем $x_5=\dfrac{5-\sqrt{105}}{8}$, $x_6=\dfrac{5+\sqrt{105}}{8}$ и нанесем эти значения на числовую прямую. Из нее нас интересуют лишь оставшиеся два полуинтервала (на рис. 2, *б* они не заштрихованы). Эти точки разбили каждый из наших полуинтервалов на две части: в одной выполняется искомое неравенство, в другой — нет. (Формально можно поступить так: обе части данного неравенства возводим в квадрат, переносим 1 в левую часть, приводим к общему знаменателю. Тогда найденные значения (x_5 и x_6) есть нули числителя получившейся дроби. В них происходит смена знака.) При $x=1$ и $x=-\frac{1}{3}$ неравенство выполняется.

Ответ. $\frac{5-\sqrt{105}}{8}<x\leqslant-\frac{1}{3}$; $1\leqslant x<\frac{5+\sqrt{105}}{8}$.

Удобно при решении неравенства методом интервалов, находя точки, в которых меняет знак какой-либо множитель, отмечать эти точки черточкой. Тогда, если в какой-то точке меняют знак нечетное число множителей (стоит нечетное число черточек), знак всего выражения меняется; если же знак меняют четное число множителей (стоит четное число черточек), знак сохраняется.

3. *Решить неравенство* $\frac{(|3x+5|-|5x+3|)(x^2-1)}{\sqrt{5+4x}+2x+1}\geqslant 0$.

Решение. Множитель $x^2-1=(x-1)(x+1)$ обращается в ноль и меняет знак в точках ± 1. В этих же точках обращается в ноль и множитель $|3x+5|-|5x+3|$. Нетрудно доказать, что он также меняет знак. Уравнение $\sqrt{5+4x}+2x+1=0$ имеет один корень $x=-1$, при переходе через который выражение $\sqrt{5+4x}+$

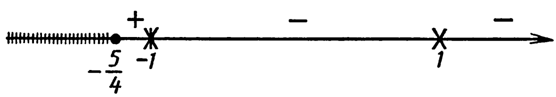


Рис. 3

$+2x+1$ меняет знак с минуса на плюс, если двигаться слева направо. (Докажите.) Теперь расставляем знаки (рис. 3).

Ответ. $-\frac{5}{4}\leqslant x<-1$; $x=1$.

12. Преобразование неравенств

Многие виды преобразований, которыми мы пользуемся при решении уравнений, так как они или приводят к эквивалентному уравнению, или, в крайнем случае, к уравнению-следствию, оказываются запрещенными при решении неравенств.

4. *Решить неравенство* $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{3x-1}\geqslant\frac{3}{2x-3}$.

Решение. При решении этого неравенства грубой ошибкой было бы освобождение от знаменателя (с сохранением знака неравенства). Стандартный путь: перенесем все в одну часть (левую), приведем к общему знаменателю, а затем разложим на множители числитель. Получим

$$\frac{x(x-5)}{(x+2)(3x-1)(2x-3)}\geqslant 0.$$

Получившееся неравенство решается методом интервалов.

Ответ. $-2<x\leqslant 0$; $\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$; $x\geqslant 5$.

При решении неравенств, содержащих квадратные радикалы, необходимо твердо запомнить, что возводить их в квадрат, сохраняя знак неравенства, можно лишь при условии неотрицательности обеих частей. (Возможна, правда, и другая, более редкая ситуация, когда обе части неположительны. В этом случае знак неравенства меняется на противоположный.) В других случаях возможно как приобретение лишних решений, так и потеря решений. (Ясно, что если при одном знаке неравенства между левой и правой частями решения добавляются, то при противоположном теряются.) Рассмотрим простой пример.

5. *Решить неравенство* $\sqrt{3+x}>3-x$.

Решение. Самый обычный путь решения состоит в рассмотрении двух случаев: $3-x\geqslant 0$ и $3-x<0$. Если $3-x\geqslant 0$, $x\leqslant 3$, то обе части неотрицательны (при допустимых x) и можно возводить неравенство в квадрат, сохраняя знак неравенства. Получим $3+x>(3-x)^2$. Отметим, что здесь нам нет необходимости заботиться о выполнении неравенства $3+x\geqslant 0$, поскольку это условие автоматически выполняется для всех x, для которых $3+x>(3-x)^2$. Получая квадратное неравенство, находим $1<x<6$. Но по условию $x\leqslant 3$, следовательно, в первом случае решением неравенства будет $1<x\leqslant 3$.

Если $x>3$, то правая часть неравенства отрицательна, левая положительна; подходят все $x>3$.

Объединяя оба случая, получаем ответ: $x>1$.

Очень удобно данное неравенство решать при помощи замены $\sqrt{3+x}=t$, $t\geqslant 0$, $x=t^2-3$, которая сразу приводит нас к квадратному неравенству $t^2+t-6>0$ (в системе с неравенством $t\geqslant 0$), откуда находим $t>2$, $\sqrt{3+x}>2$, $x>1$.

И наконец, третья возможность: исходя из идей метода интервалов, решаем уравнение $\sqrt{3+x}=3-x$. Корень один: $x=1$ и т. д.

Ответ. $x>1$.

13. Неравенства, содержащие абсолютные величины

Обычный путь решения неравенств, содержащих абсолютные величины, состоит в том, что числовая прямая разбивается на участки, на каждом из которых на основании определения абсолютной величины знак модуля можно снять. Например:

6. *Решить неравенство* $|x^2-3x+2|+|2x+1|\leqslant 5$.

Решение. x^2-3x+2 отрицателен при $1<x<2$ и неотрицателен при остальных x, $2x+1$ меняет знак при $x=-\frac{1}{2}$. Следовательно, нам надо рассмотреть четыре случая.

1. $x < -\frac{1}{2}$. В этом случае $x^2-3x+2>0$, $2x+1<0$. Получаем неравенство $x^2-3x+2-2x-1 \leqslant 5$, $x^2-5x-4 \leqslant 0$. Его решение $\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5+\sqrt{41}}{2}$. С учетом условия $x < -\frac{1}{2}$ находим $\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leqslant x < -\frac{1}{2}$.

2. $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. Имеем неравенство $x^2-x-2 \leqslant 0$. Его решение $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Следовательно, весь отрезок $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяет неравенству.

3. $1 < x < 2$. Получаем $x^2-5x+6 \geqslant 0$; $x \leqslant 2$ или $x \geqslant 3$. Вновь подходит весь интервал.

4. $x \geqslant 2$. Неравенство то же, что и в случае 2. Подходит лишь $x=2$.

Ответ. $\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

Другой подход к неравенствам, содержащим абсолютные величины, состоит в следующем. Неравенство $|a| \leqslant b$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} a \leqslant b, \\ a \geqslant -b, \end{cases}$$

а неравенство $|a| \geqslant b$ эквивалентно объединению неравенств

$$\left[\begin{array}{l} a \geqslant b, \\ a \leqslant -b. \end{array}\right.$$

(Напомним, что в системе должны выполняться оба неравенства. Соответствует союзу «и». Объединение неравенств означает, что должно выполняться хотя бы одно из неравенств. Соответствует союзу «или».) В случае строгих неравенств все неравенства соответственно заменяются на строгие.

Доказательства обоих утверждений без труда следуют из определения абсолютной величины. Нагляднее всего эти доказательства реализовать, интерпретируя неравенства графически, изобразив на координатной плоскости в первом случае все точки $(a; b)$, для которых $|a| \leqslant b$, а затем — все точки, для которых

$$\begin{cases} a \leqslant b, \\ a \geqslant -b, \end{cases}$$

и показать совпадение этих множеств.

Аналогично для неравенства $|a| \geqslant b$.

При помощи этого приема мы во многих случаях можем последовательно избавляться от знака абсолютной величины, уединяя выражения под этим знаком.

Решим, например, еще раз неравенство 6. Имеем

$$|x^2-3x+2|\leqslant 5-|2x+1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2\leqslant 5-|2x+1|, \\ x^2-3x+2\geqslant -5+|2x+1| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x+1|\leqslant -x^2+3x+3, \\ |2x+1|\leqslant x^2-3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+1\leqslant -x^2+3x+3, \\ 2x+1\geqslant x^2-3x-3, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+1\leqslant x^2-3x+7, \\ 2x+1\geqslant -x^2+3x-7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2-x-2\leqslant 0, \\ x^2-5x-4\leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-5x+6\geqslant 0, \\ x^2-x+8\geqslant 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ \frac{5-\sqrt{41}}{2}\leqslant x\leqslant \frac{5+\sqrt{41}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 2 \text{ или } x\geqslant 3, \\ x \text{ — любое} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-\sqrt{41}}{2}\leqslant x\leqslant 2, \\ x\leqslant 2 \text{ или } x\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{41}}{2}\leqslant x\leqslant 2.$$

При решении этого неравенства особых преимуществ по сравнению с первым методом не видно. Однако в некоторых случаях эти преимущества весьма заметны.

7. *Решить неравенство* $||x^3+x-3|-5|\leqslant x^3-x+8$.

Решение. Это неравенство не так просто решить стандартным путем. В то время как переходя к системе и т. д., мы решим его без особого труда.

$$\begin{cases} |x^3+x-3|-5\leqslant x^3-x+8, \\ |x^3+x-3|-5\geqslant -x^3+x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+x-3|\leqslant x^3-x+13, \\ |x^3+x-3|\geqslant -x^3+x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^3+x-3\leqslant x^3-x+13, \\ x^3+x-3\geqslant -x^3+x-13, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x^3+x-3\geqslant -x^3+x-3, \\ x^3+x-3\leqslant x^3-x+3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\leqslant 8, \\ x^3\geqslant -5, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x^3\geqslant 0, \\ x\leqslant 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{5}\leqslant x\leqslant 8, \\ x \text{ — любое} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{5}\leqslant x\leqslant 8.$$

Ответ. $-\sqrt[3]{5}\leqslant x\leqslant 8$.

На этом мы закончим рассмотрение примеров к теме «Неравенства». В конце этого параграфа помещены задачи с условием «решить неравенство». Однако не стоит только ими ограничиваться. Полезно наряду с неравенством, указанным в условии, рассмотреть три других возможных неравенства. (Например, если стоит знак $>$, то рассмотреть также неравенства со знаками $\geqslant$, $<$, $\leqslant$.) Полезно также рассмотреть уравнения (с одним неизвестным) и, заменив знак «$=$» на знак неравенства, решить соответствующие неравенства.

14. Задачи

Решить неравенство (1—81).

1. $3x^2+5x>22$. 2. $2x^2-17x\leqslant 9$. 3. $\frac{x}{x+1}>1$.

4. $\frac{x^2}{x+1}>\frac{1}{2}$. 5. $\frac{3x}{x+1}+\frac{x+1}{x}\leqslant 5$. 6. $\frac{x^2+5x-9}{x^2+3x-4}\geqslant 2$.

7. $-x^2+7x+10\geqslant 2(x^2-7x-9)^2$. 8. $1+x+x^2+x^3+x^4>0$.

9. $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5>0$. 10. $\frac{2x+3}{3x+2}\geqslant\frac{4x+1}{x+4}$.

11. $\frac{1}{1+x}\leqslant 1-x$. 12. $x+\frac{4}{x+1}\leqslant 3$. 13. $x^3+x^2+x>3$.

14. $x(x+1)+(x+2)(x+3)\leqslant 5$. 15. $\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3}<\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$

16. $\sqrt{7+x}\geqslant 7-2x$. 17. $\sqrt{x^2-3x-3}<5-x$.

18. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}>1$. 19. $2x-13\leqslant\sqrt{1+7x-x^2}$.

20. $x-3\geqslant\sqrt{9-x^2}$. 21. $\frac{\sqrt{3x-2}}{x-4}<1$.

22. $x\sqrt{5+2x}\geqslant 5x-x^2$. 23. $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$.

24. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2}\geqslant 1$. 25. $\sqrt{30-x-x^2}>-1$.

26. $\sqrt{3x+1}\leqslant x+1$. 27. $\sqrt{x^2+2x-3}<x+1$.

28. $\sqrt{x+2}-\frac{4}{\sqrt{x+2}}\leqslant 3$. 29. $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$.

30. $(x-3)\sqrt{x^2+3}\leqslant x^2-9$. 31. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$.

32. $\sqrt{4+x}\geqslant 2+\frac{x}{4}$. 33. $3\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\sqrt{x+1}$.

34. $\sqrt{5+x^2+\sqrt{x-2}}\geqslant x+1$. 35. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}<3$.

36. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$. 37. $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-4}\geqslant 2$.

38. $\sqrt{11+2x}+\sqrt{21-2x}\geqslant 8$. 39. $(9-x^2)\sqrt{x+4}\geqslant 0$.

40. $(x+2)\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant 0$. 41. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$.

42. $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x}\leqslant 0$. 43. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

44. $(x^2-4x+3)\sqrt{x+1}\leqslant x^2-2x-3$.

45. $\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\leqslant\sqrt{17x^2+25x+8}$.

46. $(\sqrt{3+x}+x-3)(\sqrt{5+4x}+x-4)\leqslant 0$.

47. $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{x^2+3x-4}}>x+\frac{1}{2}$.

48. $|2x+5|<7-x$. 49. $3x+|2-x|\leqslant 5$.

50. $|7x+5|-2x \geqslant 11.$

51. $3x > 2-|3-x|.$

52. $5x-7 < |x+2|.$

53. $|x-1| < 2x-5.$

54. $|x-1|+|x+2| \leqslant 3.$

55. $|3x-1|+|4x+3| \leqslant 3.$

56. $|5x+1|+|2-3x| > 2\frac{3}{5}.$

57. $|3x+2|+|2x-3| \leqslant 11.$

58. $|2x+1|+|3x+2| \leqslant 5x+3.$

59. $|2-5x|+|x+1| \geqslant x+3.$

60. $|x-1| \leqslant |2x-3|-|x-2|.$

61. $|5x-1|-|4x+2| \leqslant |x-3|.$

62. $|2x+5|+|3x-7| > |4x+1|.$

63. $x^2+|x-1| \leqslant 5.$

64. $|x+2|+3-x^2 \leqslant 0.$

65. $|x^2-3|+x^2+x < 7.$

66. $|2x-|x-2|| < 3.$

67. $||3x+1|+x+1| \geqslant 2.$

68. $|2x+1-|3x+1|| \leqslant x+2.$

69. $|x^2-|x^2+x|| > 11.$

70. $\sqrt{3+x} > |3-x|.$

71. $|2-\sqrt{x+2}| > x-2.$

72. $\sqrt{5-|x+1|} \leqslant 2+x.$

73. $|\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}| \leqslant 1.$

74. $\sqrt{x^3+x^2-4x+1} \geqslant |x-2|.$

75. $\dfrac{x^2-1}{|x|-1} > 0.$

76. $\dfrac{\sqrt{5+x^2}+x-5}{x^2-4} < 0.$

77. $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \leqslant 0.$

78. $||2x^2-x|-3| \leqslant 2x^2+x+5.$

79. $||x^3-x-1|-5| \geqslant x^3+x+8.$

80. $\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3+x^2}+2x)}{|x-2|-4x+3} \geqslant 0.$

81. $\dfrac{(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2)(|2x+3|-|3x+2|)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{5+x}+1-x)(x^{99}-1)} \leqslant 0.$

§ 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Стандартная схема решения текстовых задач состоит из трех этапов:

1. Выбор неизвестных.
2. Составление уравнений (возможно, неравенств).
3. Решение системы, или, точнее, нахождение нужного неизвестного или нужной комбинации неизвестных.

Рассмотрим эту схему поэтапно.

15. Выбор неизвестных

Основные рекомендации здесь просты, хотя и несколько расплывчаты. Неизвестные должны быть естественными. При этом не следует пытаться обойтись небольшим числом неизвестных. Наоборот, чем больше неизвестных, тем лучше, тем легче составлять уравнения (или неравенства).

Требование «естественности» неизвестных не так просто сформулировать. В простейших случаях оно означает, что выбор неизвестных диктуется структурой задачи, ее типом. Так, в задачах на движение, как правило, в качестве неизвестных берутся скорость, расстояние, реже — время. Следует избегать обозначений типа v_1, $V_{\text{пар}}$, t_1, S_1 и т. п. Лучше приучать себя к стандартному списку: x, y, z, v, u, w, s, t и т. д. Это облегчит в дальнейшем работу с получившейся системой. В задачах на работу (они аналогичны задачам на движение) за основу берутся производительность (та же скорость, только скорость работы), объем работы. Свои стереотипы имеют и задачи на концентрацию, процентное содержание.

Выбирая неизвестные, мы создаем математическую модель ситуации, описанной в условии задачи; точнее, набор неизвестных представляет собой список параметров, определяющих эту модель. (Обычно стараются, чтобы эти параметры были независимы. Это означает, что все соотношения должны следовать лишь из конкретных условий задачи, а в принципе каждый параметр может меняться в известном диапазоне, независимо от значений остальных параметров.)

Если будем считать, что первое прочтение задачи ознакомительное, то второе имеет своей целью выбор неизвестных; при этом мы не обращаем внимание на числа и иные «мелочи». Иногда уже в процессе составления ограничений приходится для облегчения этого процесса «добирать» неизвестные.

16. Составление уравнений (ограничений)

Выбрав неизвестные, мы в третий раз читаем задачу, расчленяя ее условие на логические части, каждой из которых соответствует одно ограничение. Таким образом, если неизвестных следует брать столько, сколько потребуется, то ограничений будет столько, сколько получится. В простейших случаях мы приходим к системе уравнений, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. Но нередки задачи, в которых это не так. Если у вас число уравнений оказалось меньше числа неизвестных и при этом вы использовали все условия задачи (иногда эти условия оказываются замаскированными), не мучьте себя в поисках дополнительного уравнения, а внимательно прочтите, *что нужно найти.*

Попытайтесь выразить то, что нужно найти через введенные неизвестные (если, конечно, требуемое в задаче не принято за соответствующее неизвестное). Если все условия задачи использованы, то нужное неизвестное или нужная комбинация неизвестных обязательно найдутся. Об этом позаботились авторы задачи (за исключением тех редких случаев, когда ошиблись и они).

Рассмотрим несколько примеров.

1. *От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.*

Решение. 1. В качестве неизвестных здесь возьмем:

x (км/ч) — скорость катера в стоячей воде;

y (км/ч) — скорость течения.

2. Составим уравнения. Поскольку скорость катера при движении по течению $(x+y)$, а против течения — $(x-y)$, то на основании того, что сказано во второй фразе условия, получим

$$\frac{96}{x+y}+\frac{96}{x-y}=14, \text{ или } \frac{48}{x+y}+\frac{48}{x-y}=7.$$

Вторая часть последней фразы условия («катер встретил...») дает нам

$$\frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}=\frac{24}{y}, \text{ или } \frac{4}{x+y}+\frac{3}{x-y}=\frac{1}{y}.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{48}{x+y}+\dfrac{48}{x-y}=7, \\ \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

3. Нам нужно найти x и y. Освобождаясь во втором уравнении от знаменателя, найдем $x=7y$. Подставляя $x=7y$ в первое, получим $y=2$, затем $x=14$.

Ответ. Скорость катера в стоячей воде 14 км/ч, скорость течения 2 км/ч.

2. *Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартовали по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше его. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время на $\frac{2}{3}$ минуты больше, чем первый. Найти скорость первого конькобежца.* (Конькобежцы стартуют из одной точки и бегут в одном направлении.)

Решение. 1. За неизвестные примем скорости соответственно первого, второго и третьего конькобежцев: — x, y, z. Удобнее всего измерять скорости в м/мин (см. условие).

2. В данной задаче расчленение условия на части, которым соответствуют уравнения, не столь очевидно. Поскольку второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше, то $y>x$, а длина беговой дорожки 400 м. Скорость третьего конькобежца меньше скорости первого (следует из третьей фразы условия); значит, $y>x>z$, т. е. величины z, x, y в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Таким образом, $x^2=yz$.

Второй конькобежец пробежит на 400 м больше первого за время $t=\frac{400}{y-x}$. Путь первого конькобежца за время t будет $xt=\frac{400x}{y-x}$.

По условию $xt=z\left(t+\frac{2}{3}\right)$, или $\frac{400x}{y-x}=z\left(\frac{400}{y-x}+\frac{2}{3}\right)$.

Таким образом, получаем систему (второе уравнение преобразовано)

$$\begin{cases} x^2=yz, \\ 400x=400z+\frac{2}{3}z\,(y-x). \end{cases}$$

3. Получена система из двух уравнений с тремя неизвестными. Но нам не надо находить все неизвестные. Требуется найти x. Выразим из первого уравнения $y=\frac{x^2}{z}$ и подставим во второе уравнение. Получим

$$400x=400z+\frac{2}{3}z\left(\frac{x^2}{z}-x\right),$$

$$400(x-z)=\frac{2}{3}x(x-z).$$

Но $x \neq z$; значит, $\frac{2}{3}x=400$, $x=600$.

Ответ. Скорость первого конькобежца 600 м/мин.

3. *Имеется три слитка различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего слитка то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго слитков. Масса третьего слитка равна суммарной массе части первого слитка, содержащей 10 г золота, и части второго слитка, содержащей 80 г золота. Третий слиток в 4 раза тяжелее первого и содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом слитке?*

Решение. 1. Не боясь, введем 6 неизвестных:

x, y, z — масса слитков в граммах;

u, v, w — соответственно количество золота в 1 г каждого слитка.

2. Вторая фраза условия дает нам уравнение

$$2w=u+v.$$

Третья фраза дает уравнение

$$z=\frac{10}{u}+\frac{80}{v}.$$

(Чтобы получить 10 г золота, надо взять $\frac{10}{u}$ г первого слитка и т. д.)

Четвертая фраза дает два уравнения:

$$z=4x \text{ и } zw=75.$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} 2w=u+v, \\ z=\frac{10}{u}+\frac{80}{v}, \\ z=4x, \\ zw=75 \end{cases}$$

из четырех уравнений с 5 неизвестными (y нам не понадобился).

3. Нам надо найти количество граммов в первом слитке, т. е. xu. Будем исключать неизвестные, сохраняя x и u. Сначала заменим z на $4x$ во втором и четвертом уравнениях. Затем выразим из четвертого w и подставим в первое и, наконец, из первого уравнения найдем v. Окончательно после упрощений придем к уравнению

$$4(xu)^2-80xu+375=0,$$

из которого найдем для xu два значения: $xu=7{,}5$ и $xu=12{,}5$. Но по условию первый слиток содержит более 10 г золота (его часть содержит 10 г). Таким образом, первый слиток содержит 12,5 золота.

Ответ. В первом слитке содержится 12,5 г золота.

Очень полезно при составлении уравнений, особенно при решении достаточно запутанных задач на движение, делать «картинки».

4. *Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же скоростью — 18 км/ч. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 ч 10 мин. В 11 ч 25 мин лодка находится на расстоянии 3 км от A. Направляясь из B в A после стоянки, пароход нагоняет лодку в 11 ч 40 мин. Определить время прибытия лодки в A.*

Решение. 1. Обозначим скорость лодки через x (км/ч), расстояние AB — через S.

2. Изобразим схему движения, на которой путь парохода отмечен сплошной линией, лодки — штриховой. Отметим точки C, D и E, в которых находилась лодка соответственно в 11 ч 10 мин, 11 ч 25 мин и 11 ч 40 мин (рис. 4).

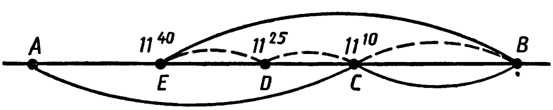


Рис. 4

С момента выхода до встречи в C прошло время $t=\frac{S}{18+x}$ (ч). Время, через которое встречаются два тела, движущиеся навстречу друг другу со скоростями v и u, находившиеся вначале на расстоянии S друг от друга, есть $\frac{S}{u+v}$. Аналогично, если одно тело, движущееся со скоростью v, нагоняет другое, скорость которого u, ($u<v$), находившееся вначале на расстоянии S, то время, через которое первое тело нагонит второе, равно $\frac{S}{v-u}$. (Мы этим соображением пользовались, решая задачу **2**.) Следовательно, путь парохода будет: $AC=\frac{18S}{18+x}$, путь лодки — $BC=\frac{Sx}{18+x}$. По условию $AD=3$, $DC=\frac{1}{4}x$ (путь лодки за 15 мин). Таким образом,

$$3+\frac{1}{4}x=\frac{18S}{18+x}.$$

Путь CE равен $\frac{x}{2}$. За полчаса (от 11 ч 10 мин до 11 ч 40 мин) пароход с учетом 10-минутной стоянки в B прошел 6 км. Значит, $CB+BE=6$, или $2CB+CE=6$:

$$\frac{2Sx}{18+x}+\frac{1}{2}x=6.$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} 3+\frac{1}{4}x=\frac{18S}{18+x}, \\ \frac{2Sx}{18+x}+\frac{1}{2}x=6. \end{cases}$$

3. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно найти x. Умножим первое уравнение на два и вычтем второе, получим

$$6-\frac{2Sx}{18+x}=\frac{36S}{18+x}-6,$$

откуда $S=6$. Заменяя S в любом уравнении, найдем $x=6$ км/ч. Поскольку $AD=3$, то от D до A лодка прошла за $\frac{1}{2}$ ч, т. е. прибыла в A в 11 ч 55 мин.

5. *Два самолета, следующие по одной трассе из города A в город C с постоянными скоростями, пролетают над некоторым пунктом B. Известно, что второй самолет вылетел из города A на 14 мин позже первого, а в город C прилетел на 16 мин раньше его. При этом над пунктом B самолеты пролетели с интервалом не более 4 мин. Если бы второй самолет вылетел из города A через 10 мин после вылета первого, уменьшив свою скорость на 10%, а скорость первого самолета не изменилась, то над пунктом B самолеты пролетели бы с интервалом не менее 2 мин, а в город C второй самолет прилетел бы на 10 мин раньше первого. Если бы скорость второго самолета увеличилась на 40 км/ч, а скорость первого самолета не изменилась, то второй самолет потратил бы на путь от A до B в 7/3 раз меньше времени, чем первый на весь путь от A до C. Определить скорость первого самолета.*

Несмотря на внешнюю громоздкость, эта задача вполне вписывается в нашу схему.

Решение. 1. В качестве неизвестных возьмем скорости самолетов: x и y (км/ч); кроме того, обозначим через a и b (в км) расстояния AB и BC.

2. Вторая фраза условия дает нам уравнение

$$\frac{a+b}{x}=\frac{a+b}{y}+30.$$

Третья фраза дает неравенство

$$\left|\frac{a}{x}-\left(\frac{a}{y}+14\right)\right|\leqslant 4.$$

Четвертая фраза условия дает нам два соотношения:

$$\left|\frac{a}{x}-\left(\frac{a}{0{,}9y}+10\right)\right|\geqslant 2,$$

$$\frac{a+b}{x}=\frac{a+b}{0{,}9y}+20.$$

Пятая фраза условия дает уравнение

$$\frac{a}{y+\frac{2}{3}}=\frac{3}{7}\,\frac{a+b}{x}.$$

Увеличению скорости на 40 км/ч соответствует $\frac{2}{3}$ км/мин.

Таким образом, получаем систему из трех уравнений и двух неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{x}=\dfrac{a+b}{y}+30, \\ \dfrac{a+b}{x}=\dfrac{a+b}{0{,}9y}+20, \\ \dfrac{a}{y+\frac{2}{3}}=\dfrac{3(a+b)}{7x}, \\ \left|\dfrac{a}{x}-\dfrac{a}{y}-14\right|\leqslant 4, \\ \left|\dfrac{a}{x}-\dfrac{a}{0{,}9y}-10\right|\geqslant 2. \end{cases}$$

3. Решение системы начнем с уравнений. Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$0=-\frac{a+b}{9y}+10,\ a+b=90y.$$

Заменим в первом $a+b$ на $90y$, получим $\frac{90y}{x}=120$, $y=\frac{4}{3}x$. Таким образом, $a+b=120x$. Подставим выражение для $a+b$ и y через x в третье уравнение:

$$\frac{a}{\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}}=\frac{3\cdot 120\cancel{x}}{7\cancel{x}},\ a=240\,\frac{2x+1}{7}.$$

Выразив все неизвестные через x, перейдем к неравенствам нашей системы. Первое неравенство преобразуется к виду

$$\left|\frac{240}{7}\cdot\frac{2x+1}{x}-\frac{180}{7}\cdot\frac{2x+1}{x}-14\right|\leqslant 4,$$

$$|480x+240-360x-180-98x|\leqslant 28x,\ |22x+60|\leqslant 28x.$$

В последнем неравенстве под знаком абсолютной величины стоит положительное число; следовательно, будем иметь $22x+$

$+60 \leqslant 28x$, $x \geqslant 10$. Аналогично из второго неравенства получим, что $x \leqslant 10$. (Сделайте это самостоятельно.) Таким образом, $x = 10$ км/мин.

Ответ. Скорость первого самолета 600 км/ч.

17. Несколько нестандартных задач

Несмотря на то что предложенная схема решения охватывает большинство задач, встречающихся в школьных задачниках и на конкурсных экзаменах, не так уж редки текстовые задачи, в большей или меньшей степени выходящие за рамки этой схемы,— задачи нестандартные. Так, например, в условии могут быть явно не сформулированы ограничения, определяемые физическими или геометрическими (или иными) свойствами рассматриваемого объекта. В частности, если в условии говорится о попарных расстояниях между тремя пунктами, то эти величины должны удовлетворять неравенству треугольника. Встречаются задачи с альтернативным условием, которые распадаются на несколько систем уравнений, причем решение каждой системы ищется на своей области ограничений; задачи с целочисленными неизвестными; задачи, в которых надо найти наибольшее или наименьшее значение какой-либо величины. Все это, если так можно выразиться, типичные нестандартные виды текстовых задач. Кроме этого, к нестандартным задачам следует отнести и такие, в которых составление системы уравнений (или ограничений) не требует особого труда, но при ее решении приходится прибегать к нестандартным приемам. Перейдем к примерам.

6. *Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости у бегунов постоянны и равны: у первого — 10 км/ч, 16 км/ч и 14 км/ч соответственно; у второго — 12 км/ч, 10 км/ч и 16 км/ч соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывается не один и меняет скорость на маршруте один раз. Установить, является ли треугольник ABC остроугольным или тупоугольным.*

Р е ш е н и е. Обозначим стороны треугольника: $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$. Из условия следует, что первый и последний участки — AB и CA — третий бегун пробегает вместе с первым либо со вторым; причем, если маршрут AB он бежит вместе с первым, то маршрут CA — вместе со вторым, и наоборот. А поскольку он меняет скорость один раз, то его скорости на участках AB, BC и CA соответственно могут быть равными:

1) 10, 10, 16;	3) 12, 12, 14;
2) 10, 16, 16;	4) 12, 14, 14.

Первый вариант отпадает сразу, так как в этом случае третий бегун отстанет от второго.

По аналогичной причине отпадает второй вариант (третий бегун обгонит первого). Остаются два варианта. Соответственно имеем две системы (уравнения составляются на основании условия равенства времени, затрачиваемого на маршрут бегунами):

$$\begin{cases} \frac{a}{10}+\frac{b}{10}+\frac{c}{14}=\frac{a}{12}+\frac{b}{12}+\frac{c}{14}, \\ \frac{a}{12}+\frac{b}{10}+\frac{c}{10}=\frac{a}{12}+\frac{b}{12}+\frac{c}{14} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{a}{10}+\frac{b}{16}+\frac{c}{14}=\frac{a}{12}+\frac{b}{14}+\frac{c}{14}, \\ \frac{a}{12}+\frac{b}{10}+\frac{c}{16}=\frac{a}{12}+\frac{b}{14}+\frac{c}{14}. \end{cases}$$

Для каждой системы легко выразить a и c через b. Для первой системы $a=\frac{5}{4}b$, $c=\frac{28}{15}b$, c — наибольшая сторона; причем $c<a+b$ и $c^2>a^2+b^2$, так как $\left(\frac{28}{15}\right)^2>\left(\frac{5}{4}\right)^2+1$. Треугольник тупоугольный. Для второй системы

$$a=\frac{15}{28}b,\ c=\frac{16}{5}b,\ c>a+b,$$

т. е. этот случай невозможен.

Ответ. Треугольник тупоугольный (тупым является угол ACB).

7. *Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшихся другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?*

Решение. Если мы обозначим через x и y количество орехов, доставшихся соответственно Васе и Пете, то без труда составим систему из одного уравнения и трех неравенств:

$$\begin{cases} x+y=39, \\ x<2y, \\ y<2x, \\ \frac{y^2}{9}<x. \end{cases}$$

Сложность задачи в третьей части — в решении системы. При этом мы должны помнить, что x и y — целые положительные числа. Из уравнения найдем $x=39-y$. Для y будем иметь систему из трех неравенств:

$$\begin{cases} 39-y<2y, \\ y<78-2y, \\ \frac{y^2}{9}<39-y. \end{cases}$$

Из первых двух неравенств найдем $y>13$, $y<26$. Последнее неравенство перепишем в виде $y^2+9y-351<0$. Можно, конечно, решить это неравенство. Но лучше поступить иначе. Поскольку y — целое положительное число, то при $y=14$ будем иметь $14^2+9\cdot 14-351=-29<0$, а при $y=15$ будет $15^2+9\cdot 15-351=9>0$, то $y\leqslant 14$. Таким образом, $y=14$, $x=25$.

Ответ. 25 и 14 орехов.

8. *Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 ч раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.*

Р е ш е н и е. Неизвестные: x — количество землекопов первой бригады, y — второй бригады, t — время работы первой бригады. Производительность каждого землекопа можно считать равной единице.

Из условия задачи следует

$$\begin{cases} xt = y\left(t+\frac{1}{2}\right), \\ xt = (x+5)(t-2). \end{cases}$$

Выражая t через x и y из одного уравнения и подставляя в другое, получим после упрощений

$$4x^2 - 4xy + 20x - 25y = 0.$$

При этом x и y — натуральные числа. Выразим y через x:

$$y = \frac{4x^2+20x}{4x+25} = x - \frac{5}{4} + \frac{125}{4(4x+25)}.$$

Умножим последнее равенство на 4, получим

$$4y = 4x - 5 + \frac{125}{4x+25}.$$

Из того, что x и y — натуральные числа, следует, что $4x+25$ является делителем 125. А поскольку $4x+25 > 25$, то $4x+25 = 125$; $x = 25$, $y = 24$.

Ответ. В первой бригаде 25 землекопов, во второй — 24.

9. *Согласно расписанию катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из A в D длиной 15 км за 1 ч. При этом, выходя из пункта A в 12 ч, он прибывает в пункты B и C, отстоящие от A на расстоянии 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из A в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты B, C, D не превысила бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов — A или D — находится выше по течению?*

Р е ш е н и е. Обозначим через x время, за которое катер проходит 1 км при движении из A в D:

$$x = \frac{1}{v+5} \text{ или } x = \frac{1}{v-5},$$

в зависимости от того, выше A по течению или нет. Таким об-

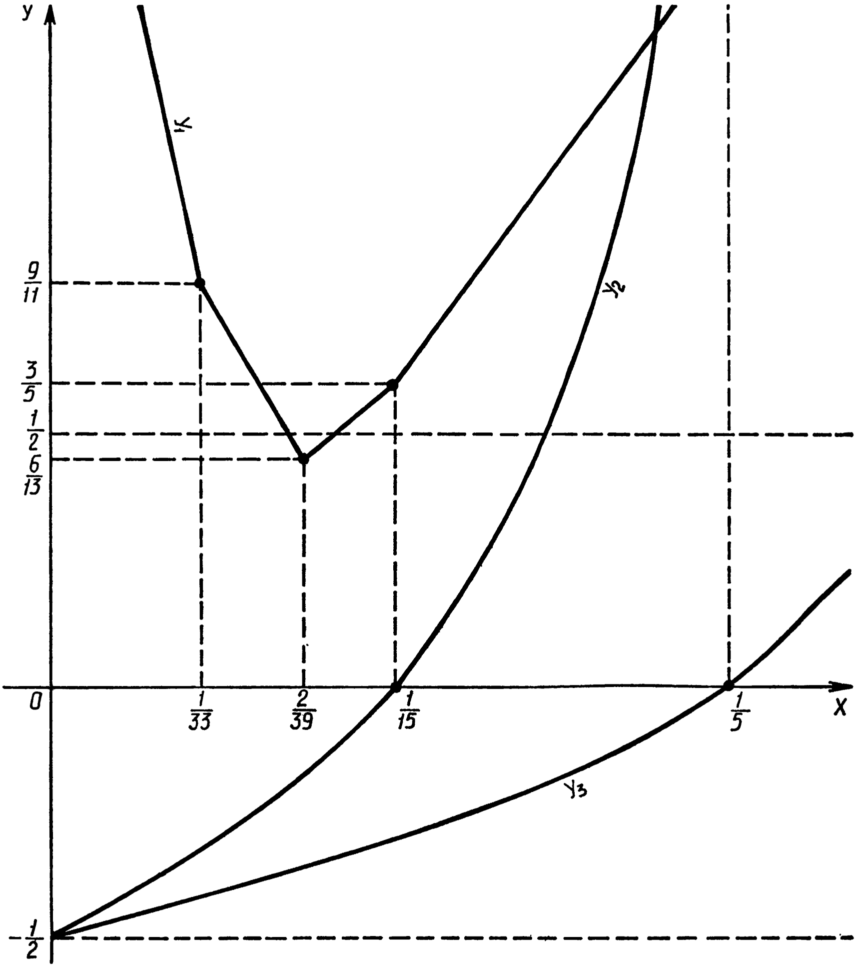


Рис. 5

разом, имеем неравенство

$$\left|11x-\frac{1}{3}\right|+\left|13x-\frac{2}{3}\right|+\left|15x-1\right|\leqslant\frac{5}{v}-\frac{1}{2},$$

где $v=\frac{1}{x}-5=\frac{1-5x}{x}$, или $v=\frac{1+5x}{x}$.

Рассмотрим графики трех функций (рис. 5):

$$y_1=\left|11x-\frac{1}{3}\right|+\left|13x-\frac{2}{3}\right|+|15x-1|,$$

$$y_2=\frac{5x}{1-5x}-\frac{1}{2},\ y_3=\frac{5x}{1+5x}-\frac{1}{2}.$$

График функции y_1 есть ломаная линия, минимум y_1 равен $\frac{6}{13}$ (достигается при $x=\frac{2}{39}$). y_2 имеет вертикальную асимптоту $x=\frac{1}{5}$ и пересекается с y_1, т. е. неравенство $y_1 \leqslant y_2$ имеет решение. Легко видеть, что $y_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+5x}<\frac{1}{2}$ при всех $x>0$, так как

$$y_3=\frac{5x}{1+5x}-\frac{1}{2}=\frac{5x+1-1}{1+5x}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{1+5x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+5x}<\frac{1}{2}.$$

Значит, $y_3<y_1$. Таким образом, задача имеет решение, если

$$v=\frac{1-5x}{x},\ x=\frac{1}{v+5},$$

т. е. A выше по течению, чем D.

Ответ. Пункт A выше по течению, чем пункт D.

10. *Пункт A находится на берегу реки, ширина которой 400 м, скорость течения 3 км/ч. Пункт B расположен ниже по течению в 4 км от A (если B_1 — проекция B на берег, на котором расположен A, то $AB_1=4$ км), на расстоянии 2 км 680 м от противоположного берега (A и B — по разные стороны реки). Турист выехал из A на лодке, пересек реку, оставил на берегу лодку, дошел до B и вернулся тем же путем. На всех участках, по реке и по суше, он двигался прямолинейно. Скорость лодки в стоячей воде 5 км/ч, скорость передвижения туриста пешком 3,2 км/ч. За какое наименьшее время мог проделать свое путешествие турист?*

Решение. Пусть турист приплыл в точку C на противоположном берегу. Причем $CD=x$, где D — пункт, противоположный A (рис. 6,*а*) (AD перпендикулярен берегам). Если время на прохождение участка AC равно t_1, то на участке CD можно найти такую точку C_1, что $AC_1=5t_1$, $C_1C=3t_1$.

Это означает, что вектор $\overrightarrow{AB}$ — путь, реально пройденный лодкой, мы представляем в виде суммы двух векторов: $\overrightarrow{AC_1}$ — путь, пройденный лодкой, если бы не было течения, и $\overrightarrow{C_1C}$ — путь лодки под воздействием одного течения.

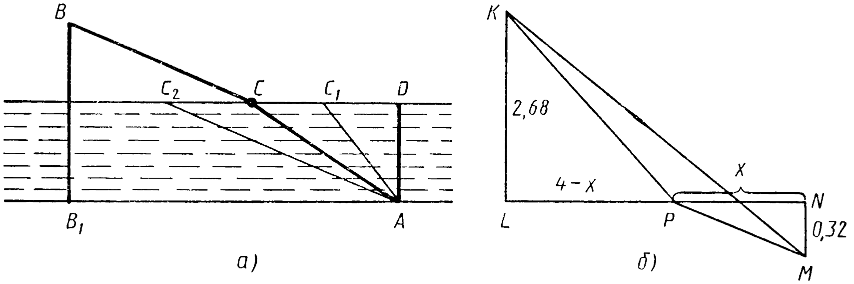


Рис. 6

Записав для треугольника AC_1D теорему Пифагора, получим

$$(5t_1)^2-(x-3t_1)^2=(0,4)^2$$

или

$$16t_1^2+6xt_1-x^2-0,16=0. \qquad (1)$$

Аналогично, если t_2 — время на пути от C до A, определив точку C_2 ниже C так, что $CC_2=3t_2$, $C_2A=5t_2$, получим для t_2 уравнение

$$16t_2^2-6xt_2-x^2-0,16=0. \qquad (2)$$

Поскольку t_1 и t_2 — положительные корни соответственно уравнений (1) и (2), то

$$t=t_1+t_2=\frac{1}{8}\sqrt{25x^2+2,56}$$

есть время передвижения на лодке. Время движения по суше равно

$$\frac{2CB}{3,2}=\frac{\sqrt{(2,68)^2+(4-x)^2}}{1,6}.$$

Таким образом, время, затраченное на путешествие, будет:

$$T=\frac{1}{8}\sqrt{25x^2+2,56}+\frac{5}{8}\sqrt{(2,68)^2+(4-x)^2}=$$
$$=\frac{5}{8}\left(\sqrt{x^2+(0,32)^2}+\sqrt{(2,68)^2+(4-x)^2}\right).$$

Рассмотрим два прямоугольных треугольника PNM и KLP: катеты одного x и 0,32, другого $4-x$ и 2,68, расположенных, как показано на рисунке 6,*б*. Тогда

$$PM=\sqrt{(0,32)^2+x^2},\quad KP=\sqrt{(2,68)^2+(4-x)^2}.$$

Длина ломаной KPM будет минимальной, если точка P лежит на отрезке KM. Но $KM=\sqrt{4^2+(0,32+2,68)^2}=5$. Таким образом, минимальное время будет: $T_0=\frac{5}{8}\cdot 5=3\frac{1}{8}$ (ч).

18. Как можно обойтись без уравнений

Вероятно, с этого пункта следовало бы начинать параграф «Текстовые задачи», поскольку в нем пойдет речь о задачах, для решения которых достаточно знаний и умений, которыми располагает человек, окончивший начальную школу. Ранее подобные арифметические текстовые задачи были достаточно распространены. Алгебраизация математического образования, неправильное убеждение, что с помощью уравнений мы можем решить любую текстовую задачу, привели к почти полному исчезновению подобного вида задач из школьного математического курса. Между тем существует целый ряд задач, в том числе и встречающиеся на конкурсном экзамене, которые гораздо удобнее решать «арифметически», чем «алгебраически». Сталкиваясь с подобного рода ситуацией, старшеклассник может просто растеряться, поскольку он привык иметь дело с задачами, при решении которых надо вводить неизвестные и составлять уравнения.

Для начала заметим, что задачу 1 можно решить арифметически. В основе лежит следующее соображение. Если катер удаляется от плота или приближается к нему, то его скорость относительно плота равна скорости катера в стоячей воде, меняется лишь направление этой скорости. Следовательно, катер удаляется от плота за то же время, что и приближается к нему, т. е. путь в 96 км от A до B пройден за то же время, что и 72 км от B до встречи с плотом. Значит, скорости катера по течению и против относятся как $96:72=4:3$. Время на путь от A до B и обратно равно 14 ч. Это время надо разделить на части пропорционально 3:4, чтобы узнать время туда и обратно. Имеем: от A до B катер шел 6 ч, обратно — 8 ч. Скорость по течению равна $96:6=16$ км/ч, против — 12 км/ч. Скорость течения $0{,}5\ (16-12)=2$ км/ч, скорость катера в стоячей воде 14 км/ч.

11. *Имеется два слитка золота массой 300 г и 400 г с различным процентным содержанием золота. Каждый слиток следует разделить на две части таким образом, чтобы из получившихся четырех кусков можно было изготовить два слитка массой 200 г и 500 г с равным процентным содержанием золота. На какие части следует разделить каждый слиток?*

Решение. Эту задачу, безусловно, можно решить, введя соответствующие неизвестные и составив уравнение или систему уравнений. Но лучше поступить следующим образом. Очевидно, что в новых слитках (200 г и 500 г) процентное содержание золота должно быть таким же, как и в 700-граммовом слитке, получившемся бы при сплавлении вместе исходных слитков. Следовательно, и отношение, в котором в каждый новый слиток входят части исходных, должно быть равно 3:4. Имеем обычную задачу: разделить заданную величину на части, пропорциональные данным числам. Таким образом, 200-граммовый слиток должен содержать $(3/7)\cdot 200=600/7$ г первого исходного слитка и $(4/7)\cdot 200=800/7$ г второго. Аналогично находим части, из которых должен состоять 500-граммовый слиток.

Ответ. Слиток массой 300 г следует разделить на части 600/7 г и 1500/7 г, слиток массой 400 г — на части 800/7 г и 2000/7 г.

Очевидно, метод решения этой задачи проходит при любом числе исходных и конечных слитков.

12. *В порту для загрузки танкеров имеется три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 т нефти, по второму — 400 т, по третьему — 500 т. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру — второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при* *наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 ч. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 ч. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.*

Решение. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключать к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 ч, то либо меньший вмещает $12 \cdot 300 = 3600$ т нефти, либо больший — $12 \cdot 400 = 4800$ т. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получим танкер, вмещающий 7200 т, для заполнения которого даже третьим трубопроводом требуется более 14 ч.

Следовательно, больший танкер вмещает 4800 т и заполняется вторым и тем более третьим трубопроводами быстрее, чем за 14 ч. Значит, меньший танкер вмещает $0{,}5(14 \cdot 500) = 3500$ т.

Ответ. 3500 т и 4800 т.

Как видим, решение этой задачи, взятой из конкурсного экзамена, короче, чем условие.

19. Задачи

1. Рабочий четвертого разряда зарабатывает на 25% больше, чем рабочий третьего разряда. На сколько процентов меньше, чем рабочий четвертого разряда, зарабатывает рабочий третьего разряда?

2. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

3. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99%. За время хранения его влажность уменьшилась на 1% (стала 98%). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

4. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле под овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?

5. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

6. Кооператив на изготовляемые им изделия первоначально назначил цену выше государственной на определенное число процентов. Через некоторое время кооператив уценил изделия на то же число процентов, в результате цена изделий стала на 1%

меньше государственной. На какое число процентов кооперативная цена первоначально превышала государственную?

7. Брат и сестра нашли вместе 36 белых грибов. Известно, что количество процентов, выражающее, на сколько брат собрал больше, чем сестра, в два раза больше, чем количество процентов, выражающее, на сколько сестра собрала меньше, чем брат. Сколько грибов нашел брат и сколько нашла сестра?

8. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число. Решите задачу, если задано одно лишь первое условие.

9. Масса 52 брикетов пломбира на 10 кг больше, чем 50 стаканчиков фруктового мороженого; масса 4 брикетов пломбира на 0,5 кг меньше, чем 25 стаканчиков. Какова масса брикета пломбира?

10. Букинистический магазин продал книгу со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально предполагал получить магазин?

11. В двух мешках вместе находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках будет одинаковое количество муки. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

12. В 8 ч вечера были зажжены две свечи одинаковой длины, но разного диаметра. Одна сгорает за 5 ч, другая — за 4 ч. Через некоторое время свечи были потушены, причем оказалось, что от первой свечи остался огарок в 4 раза длиннее, чем от второй. Когда были потушены свечи?

13. Гонорар за книгу был распределен между тремя соавторами в отношении 8:6:5. Если бы этот же гонорар был распределен в отношении 7:5:4, то один бы из соавторов получил бы на 25 р. больше, чем он получил на самом деле. Чему равна сумма гонорара?

14. 36 г цинка в воде весят 31 г, а 23 г свинца в воде весят 21 г. Сплав цинка и свинца массой 292 г в воде весит 261 г. Сколько цинка и сколько свинца содержится в сплаве?

15. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова может съесть такую же копну за 3 суток, а овца — за 6 суток. За какое время съедят эту копну лошадь, корова и овца вместе?

16. Известно, что толщина льдины везде одинакова. Площадь ее поверхности равна 1,5 м^2. На льдине находится человек, масса которого 75 кг. Над поверхностью воды находится слой льда, толщина которого составляет 0,05 толщины всей льдины. Определите толщину льдины, зная, что плотность льда равна 920 кг/м^3.

17. Машина выезжает из A в B и, доехав до B, тут же возвращается обратно. Через 1 ч после выезда машина была на расстоянии 80 км от B, а еще через 3 ч — в 80 км от A. Известно, что на весь путь туда и обратно машина затратила менее 9 ч. Найдите расстояние от A до B.

18. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 8 ч. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из A, увеличить на 14%, а скорость автомобиля, выехавшего из B, увеличить на 15%, то встреча произошла бы через 7 ч. У какого автомобиля скорость больше и во сколько раз?

19. Из города A со скоростью 48 км/ч выехал мотоцикл. Через 50 мин в том же направлении со скоростью 63 км/ч выехал автомобиль. Через сколько времени после выезда автомобиля расстояние между ним и мотоциклом окажется равным 42 км?

20. Две частицы движутся между точками A и B туда и обратно. Первая выходит из A и движется со скоростью 4 м/с. Вторая выходит из B одновременно с первой. Известно, что вторично обе частицы оказались на одинаковом расстоянии от A через 4 с после того, как это произошло в первый раз. Чему равно расстояние AB, если: а) скорость второй частицы равна 7 м/с; б) скорость второй частицы равна 9 м/с?

21. Из города A в город B со скоростью 24 км/ч выехал велосипедист. Через 20 мин в том же направлении выехал мотоциклист со скоростью 30 км/ч. Мотоциклист доехал до B, повернул обратно и встретил велосипедиста через 1 ч 10 мин после того, как он обогнал велосипедиста. Чему равно расстояние от A до B?

22. Турист прошел 105 км за несколько дней, преодолевая ежедневно одинаковое расстояние. Если бы на это путешествие он употребил бы на два дня больше, то мог в день проходить на 6 км меньше. Сколько дней продолжалось путешествие?

23. Из A и B одновременно выехали два автомобиля. Вначале скорость второго автомобиля была на 3,8 км/ч больше скорости первого автомобиля. Второй автомобиль проехал весь путь с постоянной скоростью, а первый, проехав половину пути, увеличил скорость на 8 км/ч и прибыл в B одновременно со вторым. С какой скоростью проехал весь путь второй автомобиль?

24. Сотрудники лаборатории подписались на 6 литературно-художественных журналов. Общая стоимость подписки составила 72 р. Если бы число сотрудников лаборатории было бы на 1 человека больше, то каждый заплатил бы на 12 к. меньше. Сколько сотрудников работает в лаборатории?

25. От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B, повернул обратно и встретил плот через 4 ч после выхода из A. Сколько времени катер шел от A до B?

26. От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B, повернул обратно, встретил плот через 2 ч после выхода из A, затем доплыл до A, вновь повернул обратно и нагнал плот еще через 2 ч после того, как он его встретил. За какое время проплывет плот расстояние от A до B?

27. На складе имелось несколько одинаковых ящиков, в каждом из которых было равное количество одинаковых заготовок. Заготовки используются следующим образом: сначала со склада в цех берут один ящик, заготовки из которого последовательно поступают в производство, а пустой ящик возвращается обратно на склад и берется следующий ящик и т. д. После того как было израсходовано ровно 10/13 всех заготовок, оказалось, что на складе имеется ровно 7 пустых ящиков. Сколько ящиков с заготовками было первоначально на складе?

28. Сумма некоторого двузначного числа и числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 55, а произведение этих же чисел равно 736. Найдите эти числа. Как изменится ответ на вопрос задачи: а) если известна лишь сумма указанных чисел (55); б) если известно лишь произведение (736)?

29. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л кислоты. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л смеси. Сколько кислоты было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде после переливаний оказалось на 2 л меньше кислоты, чем в первом?

30. У продавца в лотке мороженое двух видов: по 28 к. (порция массой 200 г) и по 13 к. (порция массой 100 г), а стоимость находящегося в лотке мороженого равна 28 р. 99 к., общая масса 21,1 кг. Сколько в лотке порций мороженого?

31. Профсоюзный комитет выделил на покупку 7 путевок в дом отдыха и 20 путевок на турбазу 812 руб. Однако оказалось, что путевки в дом отдыха стоят на 1 р. дешевле, а на турбазу на 4 р. дешевле, чем планировалось. Поэтому удалось купить дополнительно еще 1 путевку в дом отдыха и 2 путевки на турбазу, причем из выделенных денег осталось еще 4 р. Сколько стоит путевка в дом отдыха и сколько на турбазу?

32. Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на один час больше второй. Однако вторая машинистка печатает в час на две страницы больше первой, и поэтому она напечатала на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

33. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжать наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнится за 2 ч 30 мин. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполняется за 1 ч 12 мин. Какую часть бассейна наполняет за 20 мин работы насос меньшей производительности?

34. Расстояние между пунктами A и B 100 км. Из A в B одновременно выезжают два автомобиля. Первый проезжает за 1 ч на 10 км больше другого и прибывает в B на 50 мин раньше его. Определите скорость каждого автомобиля.

35. Из пункта A выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал второй, который догнал первого велосипедиста на расстоянии 10 км от A. Когда второй велосипедист проезжал отметку 50 км от пункта A, первый отставал от него на 20 км. Найдите скорости велосипедистов.

36. Автомобиль проезжает расстояние от A до B за 1 ч. Автомобиль выехал из A, и одновременно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до A и затем прибыл в B, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти путь от B до A пешеход?

37. За 5 ч мотоциклист проезжает на 259 км больше, чем велосипедист за 4 ч. За 10 ч велосипедист проезжает на 56 км больше, чем мотоциклист за 2 ч. Определите скорость велосипедиста.

38. Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в пункт A, через 20 мин после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 мин позже, чем первый. Через 10 мин после второй встречи турист пришел в A. Скорости пешеходов и туриста были постоянными. Найдите отношение скоростей пешеходов.

39. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом через каждые 56 мин. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 8 мин. За какое время проезжает всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

40. Расстояние между городами A и B равно 60 км. Два поезда выходят одновременно: один из A в B, другой из B в A. Поезд, идущий из A в B, пройдя 20 км, стоит полчаса, затем отправляется дальше и через 4 мин встречает поезд, идущий из B в A. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Определите скорости поездов.

41. Три автомобиля едут по шоссе. Первый и третий удаляются в одном направлении от пункта A, второй едет навстречу им. В полдень расстояния первого, второго и третьего автомобилей до A были равны соответственно 60 км, 270 км и 210 км, а через час второй автомобиль оказался между первым и третьим и при этом расстояние от него до A стало средним геометрическим расстояний первого и третьего автомобилей до того же пункта. Чему равны скорости автомобилей, если известно, что у первого и третьего автомобилей они одинаковы, а у второго — в полтора раза больше?

42. Из пункта A в пункт B движется с постоянной скоростью автомобиль. Навстречу автомобилю из пункта B в пункт A движется с постоянной скоростью мотоцикл, который выехал из пункта B одновременно с отправлением автомобиля из пункта A. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости мотоцикла. Через 1 ч 30 мин автомобиль и мотоцикл встречаются. Найдите расстояние между пунктами A и B, если это расстояние автомобиль проезжает на 1 ч 15 мин быстрее мотоцикла.

43. Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 мин лодка оказалась на 80 м ниже по течению. Развернув ее, он перестал грести, и, пока отдыхал, лодку снесло на 40 м. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 мин, и прошла относительно берега еще 40 м. В целом, после разворота лодки прошло 100 с. Какова скорость течения?

44. Расстояние между городами A и B равно 188 км. Между ними на расстоянии 31 км от A расположен пункт C. Из A в B выехал велосипедист. Одновременно из B в A выехал гоночный автомобиль. Через час после выезда автомобиль был в 5 раз ближе к C, чем велосипедист. Еще через $\frac{1}{5}$ ч велосипедист был в 5 раз ближе к C, чем автомобиль. Чему равны скорости велосипедиста и автомобиля?

45. Из пункта A в пункт B, расположенный в 24 км от A, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт B на 4 ч раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на 4 км/ч скоростью, то на путь из A в B он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

46. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 100 км, выехал мотоциклист, и одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через некоторое время они встретились в пункте C и, продолжив свой путь, прибыли в пункты назначения. На следующий день мотоциклист вернулся в A, а велосипедист — в B. При этом мотоциклист двигался в $\frac{3}{2}$ раза быстрее, чем накануне, и поэтому на весь путь из B в A затратил на 10 мин меньше, чем на путь от A до C в первый день. Скорость велосипедиста во второй день была на 10 км/ч выше, чем в первый день, и на весь путь из A в B он затратил в 5/2 раза больше времени, чем на путь от B до C в первый день. С какой скоростью двигался мотоциклист в первый день на пути из A в B?

47. Расстояние между пунктами A и B равно 56,2 км. Из пункта A в B вышел человек. Через 2 ч навстречу ему из пункта B вышел другой человек. Через 3 ч после выхода второго человека расстояние между ними было 24,3 км, а еще через 3 ч они встретились. Определите скорости путников, считая их постоянными.

48. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 40 км, одновременно отправились два туриста: первый — пешком, второй — на велосипеде. Когда второй турист обогнал первого на 5 км, первый сел на попутную машину, вследствие чего скорость его движения возросла в 4 раза. Через 2 ч после отправления из пункта A первый турист догнал второго и прибыл в пункт B раньше его. Найдите скорость туриста, ехавшего на велосипеде, если первый турист шел пешком со скоростью 6 км/ч.

49. Из пункта A по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго? (Известно, что третий автомобиль не обогнал первых двух.)

50. Пешеход и мотоциклист отправляются из одной точки по шоссе навстречу велосипедисту, все трое движутся с постоянной скоростью. В тот момент, когда велосипедист встретил мотоциклиста, пешеход отставал от мотоциклиста на 3 км. В тот момент, когда пешеход встретил велосипедиста, мотоциклист обгонял пешехода на 6 км. Какое расстояние было между пешеходом и велосипедистом в момент отправления пешехода?

51. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 дней. Если бы сначала первый сделал половину работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 дней. За какое время мог выполнить эту работу каждый в отдельности?

52. Бассейн наполняется водой через две трубы за 6 ч. Одна первая труба заполняет его на 5 ч скорее, чем одна вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может заполнить бассейн?

53. Теплоход от A до B по течению реки идет 3 дня. Путешественник из A в B спустился на плоту, а обратно добрался на теплоходе. Скорость плота строго меньше половины скорости теплохода в стоячей воде. Вся дорога заняла у путешественника 18 дней. Сколько времени занял бы тот же путь, если бы скорость течения была в полтора раза больше?

54. Трактор выехал от станции к деревне на 30 мин раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, прибыл в деревню, трактору осталось до деревни еще 3 км. Найдите скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 км/ч больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 км.

55. В 9 ч из некоторого пункта выехал мотоциклист. Спустя 40 мин вдогонку по той же дороге выехал автомобилист. Через некоторое время из-за неисправности в моторе автомобиль остановился. На устранение неисправности ушло 10 мин, после чего автомобилист возобновил погоню и в 11 ч отставал от мотоциклиста на 40 км. Если бы поломки не было, а мотоциклист ехал бы со скоростью на 18 км/ч меньше, чем была у него на самом деле, то автомобилист нагнал бы мотоциклиста в 10 ч 40 мин. Найдите скорости мотоциклиста и автомобилиста.

56. От пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю 1/10 часть пути от A до B моторная лодка плыла с выключенным мотором. На той части пути, где моторная лодка шла с работающим мотором, ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани B моторная лодка и байдарка прибыли одновременно. Найдите собственную скорость (скорость в неподвижной воде) байдарки.

57. Из пункта A в пункт B отправился автобус, а из пункта B в пункт A — поезд. Если поезд отправится на 3 ч позже автобуса, то они встретятся на середине пути. А если поезд отправится на 1 ч 12 мин позже автобуса, то до их встречи автобус успеет пройти 2/5 всего расстояния от A до B. Определите, через какое время они встретятся, если отправятся одновременно.

58. Из пункта A, расположенного на кольцевой дороге, выезжают одновременно в одном и том же направлении велосипедист и мотоциклист. Пока велосипедист прошел один круг, мотоциклист прошел три полных круга и приехал в пункт B, где он обогнал велосипедиста в первый раз. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

59. Три велосипедиста выехали одновременно: первый и второй — из пункта A, третий — навстречу им из пункта B. Через 1,5 ч первый велосипедист был на равном расстоянии от двух других, а через 2 ч третий велосипедист был на равном расстоянии от первого и второго. Через сколько часов второй велосипедист находился на равном расстоянии от первого и третьего?

60. Из пункта A в пункт B выехал автомобилист и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобилист, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через 2 ч после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от B до A?

61. По шоссе навстречу друг другу едут мотоциклист и велосипедист. Через 2 мин после встречи мотоциклист поворачивает и едет вслед за велосипедистом и догоняет его. Если бы после встречи велосипедист ехал в $\frac{14}{9}$ раза быстрее, а мотоциклист повернул бы через 1 мин после встречи, то, для того чтобы догнать велосипедиста, ему потребовалось бы то же самое время (с момента поворота), что и в первом случае. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости велосипедиста?

62. Из пункта A в пункт B вниз по течению одновременно отправились лодка и плот. В тот же самый момент из пункта B вверх по течению отплыл катер. Собственная скорость лодки (т. е. скорость в стоячей воде) 5 км/ч. Расстояние AB равно 60 км. Катер встретил лодку и еще через 2 ч плот. Найдите собственную скорость катера.

63. От пристани A к пристани B, расположенной ниже по течению реки, отправился катер. Одновременно с ним из B в A

вышла моторная лодка. Дойдя до B, катер (не задерживаясь в B) повернул обратно и прибыл в A одновременно с моторной лодкой. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость (скорость в неподвижной воде) катера и моторной лодки, если известно, что у катера она была на 2 км/ч больше, чем у моторной лодки.

64. Расстояние между пристанями A и B равно 48 км. Отчалив от пристани A в 9 ч, пароход проплыл вниз по течению реки до пристани B. Простояв у пристани B 1 ч, пароход отправился в обратный рейс и прибыл в A в 17 ч того же дня. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость (скорость в неподвижной воде) парохода.

65. Из пунктов A и B выехали одновременно навстречу друг другу мотоциклист и велосипедист. Они встретились на расстоянии 4 км от B, а в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист находился на расстоянии 15 км от A. Определите расстояние от A до B.

66. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист встретил первого пешехода через 0,3 ч после выезда из A, а второго догнал спустя 1 ч после момента проезда через B. Определите время движения велосипедиста от A до B.

67. Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стену, причем первый каменщик проработал 6 ч, второй — 4 ч и третий — 7 ч. Если бы первый каменщик работал 4 ч, второй — 2 ч и третий — 5 ч, то было бы выполнено лишь $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

68. Экскаватор роет котлован. После того как было вынуто 20 м^3 грунта, производительность экскаватора снизилась на 5 м^3/ч. Найдите первоначальную производительность экскаватора, если через 8 ч после работы было вынуто 50 м^3 грунта.

69. Две артели с разным числом мастеров одинаковой квалификации начали изготавливать шапки, причем каждый мастер делал по 2 шапки за рабочий день. Сперва работала только первая артель, выпустившая 32 шапки. Затем ее сменила вторая, выпустившая еще 48 шапок. Вся эта работа заняла 4 дня. После этого артели стали работать вместе и за следующие 6 дней изготовили еще 240 шапок. Сколько мастеров в каждой артели?

70. Два экскаватора разных марок (один экскаватор марки A, а другой марки B), работая одновременно, выкапывают котлован вместимостью 20 000 м^3 за 10 суток. Если бы работал только экскаватор марки B, то он выкопал бы этот котлован на $8\frac{1}{3}$ суток скорее, чем тот же котлован выкопал бы один экскаватор марки

A. Сколько кубических метров в сутки выкапывает каждый из экскаваторов?

71. Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового поперечного сечения длиной в 960 м и 180 м. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение которых первый экскаватор прокладывал большую траншею. Второй же экскаватор начал работать на 6 дней позже первого, отрыл меньшую траншею, 3 дня ремонтировался и затем помогал первому. Если бы не нужно было тратить времени на ремонт, то работа была бы кончена за 21 день. Сколько метров траншеи может отрыть в день каждый экскаватор?

72. Три бригады вспахали два поля общей площадью 120 га. Первое поле было вспахано за 3 дня, причем все три бригады работали вместе. Второе поле было вспахано за 6 дней первой и второй бригадами. Если бы все три бригады проработали на втором поле 1 день, то оставшуюся часть второго поля первая бригада могла бы вспахать за 8 дней. Сколько гектаров в день вспахивала вторая бригада?

73. Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали работу одновременно, и каждый вспахивает свою половину. Через 5 ч после того момента, когда они совместно вспахали половину поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать $\frac{1}{10}$ часть своего участка, а второму — $\frac{4}{10}$ своего участка. Сколько времени понадобилось бы второму трактору, чтобы вспахать все поле?

74. Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 р. в день, производительность его в мягком грунте 250 м^3 в день, в твердом грунте — 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 р. в день, его производительность в мягком грунте 180 м^3 в день, в твердом — 100 м^3 в день. Первый экскаватор работал несколько полных дней и вырыл 720 м^3 грунта. Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3 грунта. Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 р.?

75. Из сосуда с кислотой отлили 1 л кислоты и добавили 1 л воды, затем отлили 1 л смеси и добавили 1 л воды и т. д. (n раз), после чего отношение объема кислоты к объему воды в смеси оказалось равным K. Сколько было кислоты в сосуде?

76. Имеется два слитка, представляющие собой сплавы цинка с медью. Масса первого слитка 2 кг, масса второго — 3 кг. Эти два слитка сплавили вместе с 5 кг сплава цинка с медью, в котором цинка было 45%, и получили сплав цинка с медью, в котором цинка стало 50%. Если бы процентное содержание цинка в первом слитке было бы равно процентному содержанию цинка во втором, а процентное содержание цинка во втором такое же, как в первом, то, сплавив эти два слитка с 5 кг сплава, в котором содержится 60% цинка, мы бы получили сплав, в котором цинка содержится 55%. Найдите процентное содержание цинка в первом и втором слитках.

77. Имеется два разных сплава меди со свинцом. Если взять 1 кг первого сплава и 1 кг второго сплава и переплавить их, то получится сплав с содержанием 65% меди. Известно, что если взять два куска — кусок № 1 и кусок № 2 первого и второго сплавов соответственно, имеющих суммарную массу 7 кг,— и переплавить их, то получится сплав с содержанием 60% меди. Какова масса меди, содержащаяся в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску № 2, и куска второго сплава, равного по массе куску № 1?

78. Имеется два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно 1:2, а во втором 2:3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было бы в первом меди, а если $\frac{2}{3}$ первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

79. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% меди. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 20% меди. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание алюминия может быть в этом новом сплаве?

80. Одну и ту же площадку можно покрыть плиткой трех цветов тремя способами. При первом способе покрытия потребуется по 100 штук плиток белого, красного и синего цветов. При втором способе покрытия потребуется 150 белых, 150 красных и 50 синих плиток, а при третьем способе — 200 белых, 50 красных и 60 синих. Во сколько раз площадь синей плитки больше площади красной плитки?

81. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 с. За какое время пройдут мимо друг друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в $\frac{3}{2}$ раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в $\frac{4}{3}$ раза больше длины скорого?

82. Из двух портов A и B навстречу друг другу вышли два парохода. Скорость каждого постоянна. Первый пароход прибыл в порт B через 16 ч после встречи, а второй — в порт A через 25 ч после встречи. За какое время проходит путь от A до B каждый пароход?

83. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 ч,

а возвращается обратно за 4 ч. За какое время преодолевают путь от A до B плоты?

84. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути некоторое количество остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, на каждой последующей — на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибудет менее 366 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

85. Найдите нечетное трехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов числа сотен и единиц не превосходит удвоенного числа сотен; квадрат числа десятков превосходит квадрат суммы числа сотен и единиц более чем на 60.

86. На заводском складе хранилось более 100 одинаковых коробок с заготовками. Вследствие потребления количество заготовок через некоторое время уменьшилось. Когда в каждой коробке оставалось лишь по 7 заготовок, на склад привезли еще 14 полных коробок, после чего общее количество заготовок оказалось на 3 меньше, чем до потребления. Сколько коробок с заготовками хранилось на складе первоначально?

87. В детский сад привезли мороженое четырех видов. Каждый ребенок должен был получить только одну порцию мороженого. Ребята сами выбирали мороженое. Оказалось, что число выбранных порций каждого вида равно цене в копейках одной порции этого же вида. Число выбранных порций второго вида больше числа выбранных порций первого вида на столько, на сколько число выбранных порций четвертого вида больше числа выбранных порций третьего вида. Порций первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем порций второго и четвертого видов. За выбранное детьми мороженое уплатили 4 р. 20 к. Сколько ребят в детском саду?

88. В лотерее разыгрывались фотоаппараты, часы, шариковые авторучки и транзисторные приемники на общую сумму 240 р. Сумма цен одного транзисторного приемника и одних часов на 4 р. больше суммы цен одного фотоаппарата и одной авторучки, а сумма цен одних часов и одной авторучки на 24 р. меньше суммы цен одного фотоаппарата и одного приемника. Авторучка стоит целое число рублей, но не больше 6 р. Число выигранных фотоаппаратов равно цене одного фотоаппарата в рублях, поделенной на десять; число выигранных часов равно числу выигранных приемников и равно числу выигранных фотоаппаратов. Количество выигранных авторучек в 3 раза больше числа выигранных фотоаппаратов. Определите, сколько было выиграно фотоаппаратов, часов, авторучек и приемников.

89. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в 3 раза, а красных — в 2 раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных в нем не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определите, сколько было продано комплектов и сколько в каждом комплекте было синих и красных карандашей?

90. К бассейну объемом в 300 м^3 подведены три трубы: через первую и вторую вода поступает, через третью — выливается. Если все три трубы включены одновременно, то объем воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 м^3. Бассейн начали наполнять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 мин после начала работы в бассейне оказалось 100 м^3 воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вторую трубу, завершившую наполнение бассейна. Всего на наполнение бассейна было затрачено 30 мин. Определите, за какое время наполнился бы бассейн, если бы его с начала до конца наполняла одна вторая труба?

91. К двум бассейнам подведены две трубы равного диаметра (к каждому бассейну своя труба). Через первую трубу налили в первый бассейн определенный объем воды и сразу после этого во второй бассейн через вторую трубу налили такой же объем воды, причем на все это ушло 16 ч. Если бы через первую трубу вода текла столько времени, сколько через вторую, а через вторую — столько времени, сколько через первую, то через первую трубу налили бы воды на 320 м^3 меньше, чем через вторую. Если бы через первую проходило бы на 10 м^3 меньше, а через вторую — на 10 м^3 больше воды, то, чтобы налить в бассейн (сначала в первый, а потом во второй) первоначальные объемы воды, ушло бы 20 ч. Сколько времени лилась вода через каждую из труб?

92. Три насоса одновременно начали выкачивать воду, каждый из своего резервуара. Когда третий насос выкачал треть объема своего резервуара, второму оставалось качать столько, сколько выкачал первый; когда третьему оставалось выкачать треть объема, первому оставалось столько, сколько выкачал второй. Первый насос опорожняет второй резервуар за то же время, за какое второй насос опорожняет первый резервуар. Какой из насосов работал дольше других и во сколько раз?

93. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число членов такой группы.

94. Группа студентов принимала участие в лыжном кроссе. Число студентов, уложившихся в норматив, оказалось в интервале от 94,2% до 94,4%. Какое наименьшее возможное число студентов участвовало в кроссе?

95. Алик, Боря и Вася покупали блокноты и трехкопеечные карандаши. Алик купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и блокнот, Вася — 3 карандаша и блокнот. Оказалось, что суммы, которые уплатили Алик, Боря и Вася, в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит блокнот?

96. Учебник алгебры, два учебника геометрии и два учебника информатики стоят вместе 2 р. 10 к., а три учебника алгебры, учебник геометрии и учебник информатики стоят вместе 2 р. 30 к. Сколько стоят учебник геометрии и учебник информатики вместе?

97. С трех полей в течение трех дней скашивали траву. С первого поля в первый день скосили всю траву за 16 ч. Во второй день со второго поля скосили всю траву за 11 ч. В третий день с третьего поля скосили всю траву за 5 ч, причем 4 ч косили вручную, а 1 ч работала только сенокосилка. За второй и третий дни вместе скосили в 4 раза больше травы, чем в первый. Сколько всего часов работала сенокосилка, если за 1 ч она скашивает в 5 раз больше травы, чем при косьбе вручную? Предполагается, что косилка не работала тогда, когда косили вручную, и не было перерыва в работе.

98. Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по 1 ч, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше 9 ч. Сколько человек в каждой бригаде?

99. Группу людей попытались построить в колонну, по 8 человек в ряд, но 1 ряд оказался неполным. Тогда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд; все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей попытались построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем 1 ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

100. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 105 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и, встретившись через 1 ч 45 мин после начала движения, без остановки продолжали путь, каждый в своем направлении. Через 3 мин после их встречи первый велосипедист, ехавший со скоростью 40 км/ч, повстречал третьего велосипедиста, ехавшего ему навстречу по той же дороге. Третий велосипедист после встречи с первым велосипедистом без остановки продолжал ехать в прежнем направлении и догнал второго велосипедиста в пункте C, в котором встретились бы первый и второй велосипедисты, если бы скорость первого была на 20 км/ч меньше, а второго на 2 км/ч больше первоначальной. С какой скоростью ехал третий велосипедист?

101. Пункты A и B находятся на двух шоссе, пересекающихся друг с другом под углом 120°. Если идти из A в B сначала по первому шоссе до перекрестка C, а потом по второму, то потребуется 5 ч. Туристы идут из A в B напрямик, без дороги, и проделывают путь за 6,5 ч. Если туристы пойдут без дороги, напрямик, от A до середины D отрезка шоссе CB, то они затратят на путь AD более 5 ч. Сколько времени нужно, чтобы дойти от A по шоссе до перекрестка C, если скорость ходьбы без дороги в 1,5 раза меньше, чем скорость ходьбы по шоссе? (Шоссе считать прямым.)

102. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход, и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 ч после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал 2 раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найдите скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B.

103. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехал автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найдите весь путь мотоцикла, если этот путь на 5,25 км короче всего шоссе.

104. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B, проходит путь от A до B за 24 ч. Весь путь от A до B и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость (т. е. скорость в стоячей воде) моторной лодки увеличилась на 40%, то тот же путь (т. е. путь от A до B и обратно) занял бы у лодки не более 7 ч. Найдите время, за которое моторная лодка проходит путь из A в B в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

105. Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 мин. Сделав 3 круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через 3 мин он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догоняет C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?

106. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее — по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 ч на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 ч.

Собственная скорость парохода, т. е. скорость парохода в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Какое расстояние пароход проходит от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

107. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

108. От пристани A к пристани B против течения реки отошел катер, собственная скорость которого (скорость в стоячей воде) в 7 раз больше скорости течения реки. Одновременно навстречу ему от пристани B, расстояние от которой до A по реке равно 20 км, отошла лодка. На каком расстоянии от B произошла встреча катера и лодки, если известно, что через полчаса после начала движения лодке оставалось 4 км до места встречи и что катер затратил на путь до встречи с лодкой на 20 мин больше, чем на путь от места встречи до пункта B?

109. Две автоколонны, состоящие из одинакового числа машин, перевозят груз. В каждой из автоколонн машины имеют одинаковую грузоподъемность и во время рейсов загружаются полностью. Грузоподъемность машин в разных колоннах различна, и за 1 рейс первая автоколонна перевозит на 40 т груза больше, чем вторая автоколонна. Если уменьшить число машин в первой автоколонне на 2, а во второй автоколонне — на 10, то первая автоколонна перевезет 90 т груза за 1 рейс, а вторая автоколонна перевезет 90 т груза за 3 рейса. Какова грузоподъемность машин второй автоколонны?

110. Два катера отплывают в условленное время от пристаней A и B, расположенных на реке, встречаются, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Если они отплывут от своих пристаней одновременно, то катер, выходящий из A, затратит на путь в оба конца 3 ч, а второй катер — 1,5 ч. Скорости катеров относительно воды одинаковы. На сколько позже должен отплыть катер из A после отплытия катера из B, чтобы они находились в пути одно и то же время?

111. Пункты A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной AB; к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса с длиной, равной AC, а шириной 4 км. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса.

112. Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за 40 мин; вторая, третья и четвертая, работая одновременно,— за 10 мин; вторая, третья и пятая —

за 20 мин и, наконец, четвертая и пятая — за 30 мин. За сколько времени наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

113. Две трубы, работая одновременно, подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный раствор, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации получится кислота, если подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый?

114. Автомобиль выезжает из пункта A и едет с постоянной скоростью v км/ч до пункта B, отстоящего от пункта A на расстоянии 24,5 км. В пункте B автомобиль переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 54 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем автомобиль сразу же поворачивает обратно и возвращается в A с постоянной скоростью v км/ч. Какова должна быть скорость v, чтобы автомобиль за наименьшее время проехал путь от A до полной остановки и обратно до пункта A указанным выше способом?

115. Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью 100 л. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату площади поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной площади ее поверхности. При этом колба объемом в 1 л обходится в 1 р. 25 к., и в этом случае стоимость труда составляет 20% стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренебрежительно малой). Хватит ли на выполнение работы 100 р.?

116. Имеется два картофельных поля. Сначала первое поле было убрано бригадой A, а затем второе поле было убрано вместе бригадами A и B. После того как была убрана $\frac{1}{3}$ всей площади, оказалось, что время, необходимое на окончание уборки, в $\frac{21}{13}$ раза меньше времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада A. Известно, кроме того, что если бы второе поле убирала только бригада B, то ей для этого потребовалось бы время, вдвое большее времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада A. Во сколько раз производительность бригады A больше производительности бригады B?

117. Самолет совершает посадку и движется по земле в течение некоторого времени равномерно со скоростью v. Затем летчик включает тормоз, и движение самолета становится равнозамедленным, причем в каждую секунду скорость уменьшается на 2 м/с. Путь от места приземления до места полной остановки равен

4 км. Отношение времени, за которое самолет проходит первые 400 м, к времени, за которое самолет проходит весь путь по земле, равно 4:65. Определите скорость v.

118. В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных и по одинаковому количеству колесных тракторов, причем в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колесных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число тракторов превысит 20. Определите количество бригад, работающих в поле, и число тракторов каждого вида в бригаде.

119. Автобус отправляется из пункта A в пункт B и после шестиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из A в B в 8 ч 50 мин автобус догоняет велосипедиста, который движется из A в B с постоянной скоростью 15 км/ч. В 9 ч 02 мин велосипедист находится на расстоянии 21 км от A. Автобус, возвращаясь из B в A после остановки в B, встречается с велосипедистом в 9 ч 14 мин и затем прибывает в A в то же время, когда велосипедист приезжает в B. Определите время отправления автобуса из A.

120. Мотоциклист отправляется из пункта A в пункт B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же скоростью 48 км/ч. В момент отправления мотоциклиста из A навстречу ему из B выходит турист, идущий с постоянной скоростью. Турист встречается с мотоциклистом в 17 ч 15 мин. В 17 ч 25 мин турист находится на расстоянии 23 км от A. Направляясь из B в A после стоянки в B, мотоциклист догоняет туриста в 17 ч 35 мин. Определите время прибытия туриста в пункт C, находящийся на полпути между A и B $(AC = CB)$.

121. Пароход плывет от пристани A к пристани B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из A в B в 8 ч пароход догоняет лодку, которая движется из A и B с постоянной скоростью 3 км/ч. В 8 ч 10 мин лодка находится на расстоянии 1,5 км от A. Пароход, направляясь из B в A после стоянки в B, встречается в 8 ч 20 мин с лодкой и затем прибывает в A в то же время, когда лодка приходит в B. Определите время прибытия лодки в B.

122. 24 школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая — в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 к. дешевле, а билет в кино — на 20 к. дороже, то, истратив на билеты в цирк и на билеты в кино те же суммы денег, в цирк и в кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа — в кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 р. 20 к. больше, чем на билеты в кино. Сколько стоили билеты в цирк и в кино?

123. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, который сначала двигался равноускоренно с ускорением 4 км/ч^2, а после того, как его скорость возросла от 0 до v, продолжал двигаться равномерно со скоростью v. Расстояние между пунктами A и B равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определите скорость v.

124. На станциях A и B железной дороги стоят два поезда, которые должны ехать в одном направлении, причем поезд, отправляющийся со станции A, должен будет пройти станцию B. Трогаясь с места, каждый из поездов движется равноускоренно со своим ускорением, а после того, как его скорость достигает 60 км/ч, продолжает движение равномерно с этой скоростью. Известно, что ускорение поезда A равно 100 км/ч^2 и поезд A переходит на равномерное движение на 12 мин позднее поезда B. Расстояние между поездами после того, как оба поезда перешли на равномерное движение, составляет 6 км. Минимальное расстояние между поездами составляло 2 км. Определите, какой из двух поездов отправился раньше и на сколько.

125. Города A, B, C и D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ выпуклый, соединены прямолинейными дорогами: $AB=6$ км, $BC=14$ км, $CD=5$ км, $AD=15$ км, $AC=15$ км. Из одного города одновременно вышли три туриста, идущие без остановки с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьей дороги своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найдите скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $\frac{1}{2}$ км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

126. Автобусный маршрут состоит из 8 остановок (первая начальная, восьмая конечная). На начальной станции в автобус село несколько пассажиров, а на каждой следующей, исключая конечную, в автобус садилось 10 человек. На второй остановке сошел 1 человек, а затем на каждой остановке сходило на 4 человека больше, чем на предыдущей. На конечную станцию приехал 21 пассажир. Какое наибольшее число пассажиров ехало в автобусе во время рейса?

127. Две группы людей покупали лотерейные билеты. Каждый человек из первой группы купил столько билетов, сколько было людей в его группе. Во второй группе было меньше человек, и каждый из членов второй группы купил в 2 раза больше билетов, чем число людей во второй группе. Если бы каждый человек первой группы купил столько билетов, сколько купил один человек из второй группы, и, наоборот, каждый член второй группы купил бы столько билетов, сколько покупал член первой группы, то общее число купленных билетов уменьшилось бы на 3. Сколько было куплено билетов?

128. Три бегуна стартуют одновременно из трех точек круговой беговой дорожки, являющихся вершинами правильного треугольника, и бегут в одном направлении. Первый бегун обгоняет второго через 4 мин после старта, а третьего — через 5 мин после старта. Известно, что третий бегун бежит быстрее второго. Через сколько минут после старта третий бегун нагонит второго?

129. Автобус на пути из A в B делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от A до B равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из B навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 23 км/ч. На каком расстоянии от A автобус встретился с велосипедистом?

130. Расстояние между городами A и B равно 220 км. Из A в B со скоростью 42 км/ч идет автобус, который делает через равные промежутки времени остановки на 5 мин. Всего он делает 4 остановки. Одновременно из B в A выходит другой автобус, скорость которого 69 км/ч, делающий на пути из B в A 3 остановки по 10 мин через равные интервалы. На каком расстоянии от A произошла встреча автобусов?

131. Города A, B, C и D расположены на одной прямой, причем $AB:AC:AD=5:7:40$. Из D в A через равные интервалы с постоянными скоростями идут автобусы. Пешеход на пути из A в B встретил 3 автобуса. На другой день, идя из A в C, пешеход встретил 2 автобуса. Сколько автобусов встретил пешеход на третий день, идя из A в D, если известно, что до встречи с первым и после встречи с последним он в сумме прошел более $\frac{1}{15}$ пути?

132. Пункт B находится на расстоянии 4,5 км от пункта A выше по течению реки. Скорость течения реки 3 км/ч. Двигаясь в стоячей воде, гребец идет со скоростью 5 км/ч. Гребец вышел из A, доплыл до B и вернулся обратно в A. Через равные промежутки времени гребец отдыхал в течение 10 мин, а всего таких перерывов оказалось 8 (в это время лодка плыла по течению). Через сколько времени гребец вернулся обратно в A?

133. Пункты A и B расположены на берегу реки, текущей от B к A. Скорость течения 3 км/ч. Гребец вышел из A, доплыл до B и вернулся обратно в A. Через каждые 30 мин он в течение 10 мин отдыхал (в это время лодка плыла по течению). Вся поездка заняла 2 ч 55 мин. Скорость лодки в неподвижной воде равна 5 км/ч. Найдите расстояние от A до B.

134. Турист плывет из A в B и обратно. Весь путь у него занял 4 ч 30 мин. Через каждые 40 мин он 10 мин отдыхал (в это время лодка плыла по течению). Известно, что плот спускается по течению от B до A за 1 ч. За сколько времени проплыл бы турист расстояние от A до B, если бы не было течения?

135. Из A в B выехал товарный поезд, а навстречу ему одновременно из B вышли пассажирский и скорый поезда. Товарный поезд, скорость которого меньше скорости двух других, встретил скорый поезд в 252 км от A, а пассажирский — в 308 км от A. В тот момент, когда скорый прибыл в A, пассажирский находился в 198 км от A. Найдите расстояние от A до B.

136. Велосипедист едет по кольцевой трассе, состоящей из ровных участков, спусков и подъемов. При этом можно считать, что все спуски и подъемы одинаково наклонены к линии горизонта. Скорость велосипедиста на равных участках равна 35 км/ч, при спуске — 42 км/ ч, а на подъемах — 30 км/ч. На весь путь он затратил 4 ч. Чему равна длина трассы?

137. Расстояние между городами A и B равно 700 км. Из A в B со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, по истечении каждого часа он увеличивает скорость на 5 км/ч. Одновременно из B в A выезжает другой автомобиль, начальная скорость которого 90 км/ч, и через каждые полчаса она уменьшается на 5 км/ч. Через какое время после выезда автомобили встретятся?

138. Человек, идущий вдоль трамвайной линии между соседними остановками, заметил, что через каждые 7 мин его обгонял трамвай, а через 5 мин он встречал трамвай. Считая, что трамваи идут с равными интервалами в обоих направлениях, найдите интервал, с которым пройдут мимо неподвижного наблюдателя два трамвая, следующие в одном направлении.

139. Через 40 мин после выезда из пункта A автомобиль увеличил свою скорость на 20% и прибыл в B. При этом оказалось, что на вторую половину пути он затратил на 6 мин меньше времени, чем на первую половину пути. За какое время автомобиль проехал путь от A до B?

140. Пункт A расположен на шоссе. На некотором расстоянии от A шоссе под прямым углом пересекает проселочная дорога. Мотоциклист едет из A по шоссе со скоростью 40 км/ч, затем сворачивает на проселочную дорогу, по которой он едет со скоростью 30 км/ч. Одновременно с ним из A выезжает другой мотоциклист, который движется напрямик в некоторую точку на проселочной дороге, где догоняет первого мотоциклиста. Какова наименьшая возможная скорость второго мотоциклиста?

141. Войсковая колонна имеет длину 5 км. Связной, выехав из арьергарда колонны, передал пакет в начало колонны и вернулся обратно. Колонна за это время прошла путь в 12 км. Какой путь проехал связной?

142. Три велосипедиста стартуют одновременно по шоссе в одном направлении. Скорость первого равна 24 км/ч, скорость второго — 25 км/ч, и в момент старта он находится на 2 км сзади первого; третий велосипедист в момент старта отстает от второго на 3 км, его скорость равна 27 км/ч. Через какое время после старта расстояние между велосипедистом, едущим первым, и велосипедистом, едущим последним, впервые окажется равным 400 м?

143. Работа началась между 9 и 10 часами, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки часов были перпендикулярны.

144. В сосуде находится определенное количество смеси воды с кислотой. Чтобы уменьшить концентрацию кислоты на 34% (было p%, а стало $p-34$%), в сосуд надо долить 3 л воды, а чтобы уменьшить ее на 17%, надо долить 1 л воды. Какова концентрация кислоты в сосуде?

145. Имеется три слитка: первый слиток — сплав меди с никелем, второй — никеля с цинком, третий — цинка с медью. Если сплавить первый кусок со вторым, то процент меди в получившемся слитке будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в получившемся слитке будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, получающийся при сплаве всех трех слитков, если во втором слитке было 6% цинка, а в третьем — 11%?

146. Имеется два различных ковшовых экскаватора. Первый экскаватор за 3 приема может вынуть столько же грунта, сколько второй за 5 приемов. Первый экскаватор может 4 раза взять грунт за то же время, за которое второй экскаватор может это сделать 7 раз. Два экскаватора вырыли фундамент дома за 7 дней, работая вместе по 6 ч ежедневно. За какое время может вырыть фундамент такого же дома один экскаватор второго типа?

147. 6 коров за 3 дня съедают траву на участке 0,2 га, 8 коров за 4 дня съедают траву на участке 0,3 га. Сколько дней смогут пастись 12 коров на участке площадью 0,6 га? (Прирост травы на участке пропорционален его площади и времени.)

148. Автомобиль выехал из A в B со скоростью 63 км/ч. Через некоторое время после выезда его скорость уменьшилась на 9 км/ч. За первые 3 ч он проехал на 55 км меньше, чем за последние 4 ч, а на весь путь затратил 5 ч. Найдите расстояние от A до B.

149. На базе имеется несколько автомашин равной грузоподъемности. Для перевозки груза каждая автомашина сделала одно и то же число рейсов, а затем 7 машин сделали еще по 12 рейсов каждая. Если бы каждая машина сделала бы на 6 рейсов больше, то для перевозки в 2 раза меньшего груза потребовалось бы на 7 машин меньше. Сколько машин было на базе?

150. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 ч. Работу начал один рабочий, через час к нему присоединился еще один, еще через час — третий и т. д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

151. Бригада рабочих одинаковой квалификации должна была изготовить партию деталей. Сначала к работе приступил один рабочий, через час к нему присоединился второй, еще через час — третий и т. д., до тех пор, пока к работе не приступила вся бригада. Если бы с самого начала работали все члены бригады, то работа была бы выполнена на 2 ч быстрее. Сколько рабочих в бригаде?

152. Несколько насосов одинаковой производительности начали наполнять бассейн. Насосы включались один за другим с равными интервалами. К моменту включения последнего насоса оказалась заполненной $\frac{1}{6}$ бассейна. Какая часть бассейна была бы заполнена за половину времени, прошедшего с начала работы первого насоса до заполнения всего бассейна?

153. Человек, спускаясь по двигающемуся эскалатору, насчитал 48 ступеней, а поднимаясь по двигающемуся эскалатору,— 33 ступени. Скорость подъема человека относительно эскалатора в 2 раза меньше скорости спуска. Скорость эскалатора при спуске и подъеме одна и та же. Сколько ступеней насчитает человек, спускаясь по неподвижному эскалатору?

154. Автомобиль, направляясь из A в B, по дороге задержался на некоторое время. Увеличив скорость, он прибыл в B вовремя. Если бы такая задержка произошла на 1 км дальше от A, то, увеличив скорость на ту же величину, он прибыл бы в B на 12 с позже. Если бы эта остановка произошла на 20 мин раньше, то, увеличив скорость на ту же величину, он прибыл бы в B на 4 мин раньше. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

155. Расстояние между городами A и B равно 280 км. Через некоторое время после выезда автомобиля из A его скорость уменьшилась, и он прибыл в B с опозданием на 17 мин 30 с. При этом оказалось, что половину времени он ехал с одной скоростью, а половину — с меньшей. Если бы изменение скорости произошло на половине пути, то опоздание равнялось бы 18 мин 45 с. Найдите начальную скорость автомобиля.

156. Имеется три слитка золота массой 2 кг, 3 кг и 5 кг с различным процентным содержанием золота. Каждый слиток разделен на 3 куска и из 9 получившихся кусков получили три слитка массой 2 кг, 3 кг и 5 кг, но уже с равным процентным содержанием золота. На какие части следует разделить каждый слиток, чтобы гарантировать равное процентное содержание золота в получившихся слитках независимо от его содержания в исходных слитках?

157. У 8 школьников имеется 7 р. 19 к. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, причем у одного из двух в целое число раз больше, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?

158. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него (у первого) орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четвертой части образовавшихся у него (у второго) орехов и еще пол-ореха. Затем это сделал третий. В результате у каждого оказалось 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

159. Температуру можно измерять по шкале Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0 градусов по Цельсию соответствует 0 градусов по Реомюру и 32 градусам по Фаренгейту, а 100 градусов по Цельсию — 80 градусам по Реомюру и 212 градусам по Фаренгейту. Сколько градусов по Реомюру будет, если показания термометров, показывающих температуру по шкалам Цельсия и Фаренгейта, совпадают?

160. Имеется два сосуда. В одном содержится 3 л 100%-ной серной кислоты, а в другом — 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый — один стакан смеси. Эту операцию повторили еще два раза. В результате во втором сосуде образовалась 42%-ная серная кислота. Сколько серной кислоты (в %) содержится теперь в первом сосуде?

161. Имеется два куска металла массой 1 кг и 2 кг. Из этих кусков сделали два других: первый массой 0,5 кг, содержащий 40% меди, а второй массой 2,5 кг, содержащий 88% меди. Каково процентное содержание меди в исходных кусках?

162. Расстояние между городами A и B равно 34 км. Три туриста вышли одновременно из A. Скорости их передвижения пешком равны 4 км/ч, 5 км/ч и 6 км/ч. У них есть один велосипед, на котором каждый из них едет со скоростью 20 км/ч. Один из них поехал на велосипеде, а двое пошли пешком. Проехав некоторое расстояние, первый оставил велосипед, а дальше пошел пешком. Турист, первым дошедший до велосипеда, поехал на нем и через некоторое время оставил велосипед на шоссе. И наконец, последний, дойдя до велосипеда, приехал на нем в B. Все трое прибыли в B одновременно. Сколько времени заняло путешествие?

163. Расстояние между городами A и B равно 30 км. Четыре путешественника одновременно отправляются из A в B. Скорость их передвижения пешком равна 5 км/ч. У них имеется мотоцикл, который, кроме водителя, может везти одного человека. Скорость мотоцикла 50 км/ч. Путешественники хотят, пользуясь мотоциклом, прибыть в B за наименьшее время. Сколько времени займет путешествие? (Мотоцикл нельзя оставлять на шоссе.)

164. Обработка детали требует двух операций (в любом порядке). Рабочий четвертого разряда выполняет их соответственно за 5 мин и 7 мин, а рабочий пятого — за 3 мин и 4 мин. За какое наименьшее время один рабочий четвертого и один пятого разряда смогут обработать 25 деталей?

165. Автобаза выделила автобусы для перевозки детей в два пионерских лагеря. Часть этих автобусов перевезла детей в один пионерский лагерь, а другая часть, в которой было на 4 автобуса больше,— во второй. В первом пионерском лагере было 195 пионеров, а во втором — 255. Известно, что для любых двух автобусов, везших детей в один пионерский лагерь, количество перевезенных детей отличалось не более чем на 1, а наибольшая разница в количестве перевезенных детей в двух автобусах для разных лагерей равна 5. Сколько было автобусов?

166. Двое часов начали бить одновременно. Удары первых часов следуют друг за другом через 2 с, а вторых — через 3 с. Слившиеся удары воспринимаются за один. В котором часу это происходило, если всего можно было насчитать 18 ударов?

167. Сколько времени в сутки на электронном табло вокзальных часов светится цифра 2 (хотя бы одна)?

168. В кузнечном цехе установлены три паровых молота. Удары каждого из них следуют один за другим с интервалами соответственно в 1, 1,5; 2,5 секунды. Все три молота начинают работу одновременно. Сколько ударов сделает каждый молот, если всего можно было насчитать 111 ударов (слившиеся удары воспринимаются за один)?

169. Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, для того чтобы вырыть всю канаву, затем второй рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, и, наконец, третий рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое рабочих одновременно?

170. Из пункта A в пункт B против течения реки отправляется пароход. Одновременно из B в A отправляется лодка и, пройдя $\frac{1}{3}$ расстояния от B до A, встречает пароход. В пункте B пароход мгновенно поворачивает обратно, обгоняет лодку и прибывает в A в момент, когда лодка находится на расстоянии 20 км от A. Если бы скорость лодки относительно воды была в 3 раза больше, то первая встреча произошла бы на середине пути между A и B. Определите расстояние между пунктами A и B.

171. Моторная лодка отправилась вниз по течению реки из пункта A в пункт B. Когда она прошла $\frac{3}{4}$ пути, кончилось горючее, и оставшийся путь пришлось идти на веслах. Весь путь из A в B занял 1 ч 50 мин. Если бы горючего хватило лишь на $\frac{1}{4}$ пути и оставшийся путь надо было идти на веслах, то весь путь занял бы 3,5 ч. За какое время лодка проходит путь от B до A на веслах, если путь из A в B и обратно с включенным мотором занимает 2 ч 5 мин?

172. Русло реки разветвляется на два потока с разными скоростями течения. На развилке расположен пункт A. Лодка на путь по первому потоку из пункта A в пункт B затрачивает на 21 мин меньше, чем на путь по второму потоку из пункта A в пункт C. Известно, что расстояние от A до B равно расстоянию от A до C. На обратный путь из B в A лодка затрачивает на 1 ч 10 мин больше, чем на путь из C в A. Если бы скорость лодки в стоячей воде была в 2 раза больше, то на путь из B в A она затратила бы на 12 мин больше, чем на путь из C в A. За какое время лодка проплывет от A до B в стоячей воде?

173. На берегу реки расположены два пункта A и B, а на полпути между ними в реку впадает приток, в устье которого находится пункт C. Лодка на путь из B в A затрачивает 3,5 ч, а на обратный путь — 1 ч 25 мин. Путь из B в C и затем вверх по притоку на такое же расстояние до пункта D она проходит за 4 ч. За какое время лодка проплывет из D в B, если этот путь в стоячей воде занял бы у нее 2 ч? (Скорость течения реки после впадения притока уменьшается.)

174. Из пункта A по шоссе в одном направлении одновременно выехали два автомобиля, а спустя некоторое время из того же пункта вслед за ними выехал третий автомобиль. Через час после своего старта третий автомобиль находился на равном расстоянии от первого и второго, а еще через полтора часа — в 8 раз ближе к первому автомобилю, чем ко второму. Определите, на сколько времени позже двух других выехал третий автомобиль, если он догнал первый автомобиль через 3 ч после старта первых двух автомобилей.

175. Два пешехода вышли одновременно: первый — из A в B, второй — из B в A. В момент их встречи из B в A вышел третий пешеход. Когда он прошел $\frac{1}{6}$ пути от B до A, первому пешеходу оставалось идти вдвое меньше того, что прошел второй. В пункт A второй и третий пешеходы прибыли одновременно. Определите отношение скоростей первого и второго пешеходов.

176. Два пешехода одновременно отправились от станции к поселку по одной дороге. Первый из них первую половину пути прошел со скоростью в 2 раза больше, чем вторую половину пути. Второй первую половину времени нахождения в пути шел со скоростью в 2 раза большей, чем вторую половину времени, и пришел в поселок на 2 мин позже первого. Сколько минут каждый из пешеходов был в пути, если известно, что первый обогнал второго, пройдя $\frac{7}{9}$ всего пути?

177. Расстояние между пунктами A и B, расположенными на берегу реки, равно 25 км. Из A в B отправились одновременно катер и лодка. Катер безостановочно курсирует между A и B. Через некоторое время из B в A отправилась вторая лодка, прибывшая в A одновременно с десятым выходом оттуда катера. При движении от A до B в девятый раз катер встретил вторую лодку, пройдя 3 км, а первую догнал, пройдя 24 км от A. Определите расстояние, пройденное лодками до их встречи.

178. Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая встреча их произошла, когда автобус прошел $\frac{5}{9}$ всего расстояния от A до B, а вторая встреча — когда автобус после первого захода в B проехал $\frac{1}{8}$ всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт B автобус прибыл на 16 мин позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте A?

179. Вдоль дороги последовательно расположены пункты A, B, C. Четыре пешехода выходят одновременно: первый и второй — из A в C, третий — из B в C, четвертый — из C в A. Второй пешеход обогнал третьего в том же месте дороги, где встретились первый и четвертый пешеходы; первый пешеход обогнал третьего в том же месте, где встретились второй и четвертый пешеходы. Третий пешеход шел в n раз медленнее четвертого, первый и второй шли с разными скоростями. Определите отношение расстояния от A до B к расстоянию от B до C.

180. Пункты A и B расположены на берегу реки. Из A в B одновременно отправились катер и лодка. Катер курсирует безостановочно между A и B. Через некоторое время из A в B выходит вторая лодка и приходит в B одновременно с десятым прибытием туда катера. При движении от B до A девятый раз катер встретил вторую лодку, пройдя $\frac{2}{11}$ расстояния от B до A, а первую лодку — пройдя $\frac{1}{3}$ расстояния от B до A. Определите, какую часть расстояния между A и B прошли лодки до того момента, когда они поравнялись.

181. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, — равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно $\frac{5}{4}$. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?

182. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Катер прошел от A до C за 7 ч. На каждом из участков AB и BC его собственная скорость (скорость относительно воды) была постоянна, причем на участке BC в $1\frac{1}{2}$ раза меньше, чем на участке AB. Обратный путь от C до A катер прошел за 8 ч, и на всем пути его собственная скорость была в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем при движении из A в B. Если бы на обратном пути собственная скорость катера была такой же, как и при движении из A в B, то участок от B до A он прошел бы за 6 ч. Сколько времени катер шел от B до C?

183. Пункт N находится на берегу реки, ширина которой $\frac{3}{5}$ км, а скорость течения 1 км/ч. На 4 км ниже пункта N по течению на другом берегу реки расположен пункт M. Из пункта M выходит рыбак и идет вдоль берега по направлению к N со скоростью 4 км/ч. Одновременно из N отплывает на лодке перевозчик, пересекает реку и, дождавшись рыбака, переправляет его в пункт N. Туда и обратно лодка двигалась по прямой. Скорость лодки в стоячей воде равна 3 км/ч. Найдите наименьшее возможное время от отплытия до возвращения лодки.

184. На одной стороне реки на самом ее берегу расположен лагерь туристов. На другой стороне реки на 1 км ниже лагеря по течению и в 2 км от берега находится пункт M. Из лагеря на лодке отплывает турист, пересекает реку и, оставив лодку на берегу, идет к пункту M. Прибыв в M, турист сразу поворачивает обратно и по тому же маршруту возвращается в лагерь. Лодка по реке и турист по суше двигаются прямолинейно. Ширина реки 0,5 км, скорость течения $3\frac{3}{4}$ км/ч, скорость лодки в стоячей воде при движении туда и обратно равна $6\frac{1}{4}$ км/ч, скорость туриста на суше 4 км/ч. Найдите наименьшее возможное время, за которое турист, отправившись из лагеря, посетит пункт M и вернется обратно.

185. Из города A в город B вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через некоторое время из A вышел другой пешеход, а еще через такой же промежуток времени после второго — третий. Третий пешеход догнал второго на полпути от A к B, и дальше они пошли вместе со скоростью, равной среднему арифметическому их прежних скоростей. Все трое одновременно пришли в B. С какой скоростью первоначально шел второй пешеход, если третий шел первоначально со скоростью 6 км/ч?

186. Две точки движутся с постоянными скоростями по двум концентрическим окружностям. В момент начала движения обе точки и центр окружности лежат на одной прямой, а расстояние между точками равно $\frac{16}{7}$. После старта расстояние между точками уменьшилось, а через 11 с составляло $\frac{\sqrt{207}}{7}$. Кроме того, с интервалом в 11 с было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось $\frac{\sqrt{158}}{7}$, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значение $\frac{\sqrt{158}}{7}$. Найдите минимальное расстояние между точками.

187. Расстояние между городами A и B равно 36 км. Из города A со скоростью 6 км/ч вышел пешеход. Одновременно навстречу ему из города B выехал велосипедист. Велосипедист едет со скоростью от 10 км/ч до 15 км/ч. После встречи велосипедист в течение 20 мин продолжал движение по направлению к A, затем развернулся и поехал в B. Найдите наименьшую возможную разницу во времени прибытия в B велосипедиста и пешехода.

188. Две бригады рабочих начали работу в 8 ч. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 ч выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в час на одну деталь больше, а вторая бригада — на одну деталь меньше. Работу бригады вновь начали в 8 ч и, сделав 72 детали, начали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше уже к 13 ч. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

189. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

190. Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D — в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 мин?

191. В магазине имеется три вида наборов игрушек: металлических, пластмассовых и мягких. Детский сад купил по одному набору металлических и пластмассовых игрушек и 4 набора мягких. При этом количество игрушек совпало с числом детей в детском саду. Если бы было куплено 4 набора металлических и один набор мягких игрушек, то 57 детям игрушек бы не досталось. Количество игрушек, составляющих 4 набора пластмассовых и один мягких, на 41 меньше числа детей. Сколько детей было в саду, если, купив по 3 набора игрушек каждого вида, детский сад не обеспечил бы всех детей игрушками?

192. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 6-квартирного дома необходимо 30 деталей первого и 40 деталей второго вида. Для 10-квартирного дома требуется 40 и 60 деталей, а для 14-квартирного дома нужно 90 и 120 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго вида. Сколько и каких домов надо построить, чтобы общее количество квартир было наибольшим?

193. Строительный отряд состоит из 32 бойцов, каждый из которых владеет одной или двумя строительными профессиями: каменщик, бетонщик, плотник. Бойцов, владеющих профессией плотника, в отряде в 2 раза больше, чем бойцов, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем бойцов, владеющих профессией каменщика, причем $3 \leqslant n \leqslant 20$ (n — целое число). Сколько бойцов в отряде владеет только одной профессией, если число бойцов, владеющих двумя профессиями, на 2 больше, чем число бойцов, владеющих профессией плотника?

194. От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыл пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 ч и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 ч позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорости пароходов в стоячей воде равны между собой, определите скорости пароходов и течения реки.

195. Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли: первый — в A, второй — в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найдите расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

196. Бригады, состоящие из одинакового числа рабочих, получили на складе спецодежду. Каждый рабочий получил по 2 комплекта спецодежды, а каждой бригаде выдали на 20 комплектов больше, чем было бригад. Если бы бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдавали бы по 12 комплектов, то спецодежды на складе не хватило бы. Сколько комплектов спецодежды было на складе?

197. 80 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в 2 раза больше, чем в первом сосуде. Найдите массу раствора, находящегося в первом сосуде.

198. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй — синих, причем число красных шаров составляло $\frac{15}{19}$ от числа синих шаров. Когда из коробок удалили $\frac{3}{7}$ красных шаров и $\frac{2}{5}$ синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

199. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Затем проделали эту операцию еще один раз. В результате количество воды в сосуде оказалось в 7 раз больше по объему оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

200. В школьную столовую привезли яблочный и виноградный сок. В столовой эти соки смешали и полученную смесь разлили в несколько литровых бутылей и два сосуда. При этом оказалось, что количество яблочного сока в первом сосуде в 5 раз больше, чем количество всего сока, налитого в бутыли. Во втором сосуде оказалось 19 л яблочного сока, а всего сока во втором сосуде оказалось на 4 л больше, чем количество сока в первом сосуде, сложенное с количеством яблочного сока в бутылях. Сколько литров смеси соков было приготовлено в столовой?

201. Математик шел домой вверх по течению реки со скоростью в полтора раза большей, чем скорость течения, и держал в руках палку и шляпу. Он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти с той же скоростью. Вскоре он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 10 мин он встретил плывущую по ручью палку. На сколько раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал палку со шляпой?

202. Утром Коля и Оля решили полить огород. Коля открыл кран, наполнил свою лейку, и сразу вслед за ним Оля подставила свою лейку под струю. Колина лейка наполняется за 15 с, а Олина — за 10 с. Наполнив свою лейку, каждый из детей тут же начинает поливать огород. Из Колиной лейки вода выливается за 60 с, а из Олиной — за 45 с. Как только лейка оказывается пустой, каждый из них мгновенно подставляет ее под струю воды, а если в этот момент набирает воду другой, то ждет, пока кран не освободится, и сразу же начинает наполнять свою лейку. Когда никто не набирает воду, она льется в бочку, стоящую под краном. Если бы никто не забирал воду, бочка наполнилась бы за 15 мин. За сколько времени после включения крана наполнится бочка, если Коля и Оля все это время продолжают поливать огород? Кто первый будет набирать воду после того, как вода польется через край бочки?

203. Профессор Иванов и доцент Поливанов живут недалеко друг от друга. Они любят по вечерам прогуливаться от своего дома до дома коллеги, туда и обратно несколько раз. Однажды они вышли из своих домов одновременно. В первый раз они поравнялись на расстоянии 55 м от дома профессора. Второй раз это произошло на расстоянии 85 м от дома доцента. На расстоянии 25 м от дома доцента находится газетный киоск, а неподалеку от дома профессора — киоск, торгующий газированной водой. Известно, что, выйдя из своих домов, профессор и доцент одновременно прошли мимо ближайших киосков. Чему равно расстояние между киосками?

204. Турист преодолел 10 км за 2,4 ч. При этом 1,8 км он шел по лесной тропинке с одной скоростью, потом 3,2 км по грунтовой дороге с другой скоростью, а затем 5 км по шоссе с третьей скоростью. Если бы он все время шел со скоростью, равной среднему арифметическому скоростей, то он прошел бы на 400 м меньше. С какой скоростью шел турист по лесной тропинке, грунтовой дороге и шоссе?

205. Ученики трех классов проводили КВН. Известно, что когда на сцену вышли команды классов «А» и «Б», то доля мальчиков среди участников оказалась равной $\frac{2}{5}$. Когда же на сцене были команды классов «Б» и «В», то доля мальчиков оказалась равной $\frac{3}{7}$. В каких пределах заключена доля мальчиков в трех командах вместе?

§ 5. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Почти вся теория квадратного трехчлена, а также решение многих задач, связанных с ним, основываются на приеме, называемом «выделение полного квадрата». Применяя этот прием к квадратному трехчлену ax^2+bx+c, приходим к равенству

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Нет необходимости эту формулу запоминать. Гораздо важнее в каждом конкретном случае уметь проделать соответствующие преобразования и выделить полный квадрат. Например,

$$3x^2-5x-1=3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)-1=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{12}.$$

Выражение b^2-4ac называется дискриминантом квадратного трехчлена ($D=b^2-4ac$). Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет соответственно 2, 1 или 0 решений в зависимости от того, будет его дискриминант положительным ($D>0$), равным нулю ($D=0$), или отрицательным ($D<0$). (Напомним, что по определению квадратного уравнения $a\neq 0$.) Корни квадратного уравнения x_1 и x_2 равны:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Правда, нумерация корней условна. Обычно стараются занумеровать их в порядке возрастания, но это не обязательно.

Дадим два практических совета. Во-первых, если второй коэффициент (b) четный (причем он может быть просто четным числом, а может иметь вид $b=2k$), то удобнее пользоваться для нахождения корней формулами

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}D}}{a},\text{ где }\frac{1}{4}D=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$$

Во-вторых, старайтесь по возможности «работать» с квадратным трехчленом, у которого старший коэффициент (a — коэффициент при x^2) положительный. Этого всегда можно добиться при решении уравнений, неравенств с числовыми коэффициентами.

Задачи, связанные с квадратным трехчленом, встречающиеся в школьной и конкурсной практике, чрезвычайно разнообразны. Нередки среди них такие, где основное, что требуется от учащегося,— это внимательность к формулировке. Например:

1. *Определить все значения параметра a, при которых уравнение $2ax^2-4(a+1)x+4a+1=0$ имеет один корень.*

Решение. Здесь главное — не забыть про случай $a=0$, поскольку в условии не сказано, что рассматривается квадратное уравнение. При $a=0$ имеем линейное уравнение $-4x+1=0$ с единственным корнем $x=\frac{1}{4}$. Остальные значения параметра a мы получим из уравнения $D=0$, а лучше $\frac{1}{4}D=0$:

$$4(a^2+2a+1)-2a(4a+1)=0,\ 2a^2-3a-2=0;\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=2.$$

Ответ. $0;\ -\frac{1}{2};\ 2.$

К азбуке квадратного трехчлена относится и теорема Виета. *Для того чтобы x_1 и x_2 были корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, необходимо и достаточно выполнения равенств $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.* Обратите внимание на то, что здесь сформулировано два утверждения — прямое и обратное. Часто, формулируя теорему Виета, ограничиваются одним прямым утверждением: «Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то выполняются равенства...»

Некоторые логические и терминологические проблемы возникают в случае $D=0$, но мы их не будем обсуждать. Заметим лишь, что выражения «квадратное уравнение, имеющее одно решение» и «квадратное уравнение с равными корнями» означают одно и то же.

Из теоремы Виета следует следующее разложение на множители квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c=0=a(x-x_1)(x-x_2).$$

На теореме Виета основан целый ряд традиционных задач и методов решения.

2. *Решить уравнение* $319x^2+1988x+1669=0$.

Решение. Решение этого уравнения непосредственно по формуле корней квадратного уравнения приводит к большим вычислительным трудностям.

Если же заметить, что $319-1988+1669=0$, откуда следует, что $x_1=-1$ является корнем уравнения, то по теореме Виета

$$x_2=\frac{1669}{319x_1}=-\frac{1669}{319}.$$

Ответ. $-\frac{1669}{319}$; -1.

Сталкиваясь с квадратным уравнением, решение которого требует громоздких арифметических или алгебраических преобразований, попытайтесь выяснить, не имеет ли это уравнение «хорошего» целого корня, в частности 1 (в этом случае имеет место равенство $a+b+c=0$) или -1 $(a-b+c=0)$.

3. *Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразить $x_1^4+x_2^4$ через p и q.*

Решение. Нам нужно выразить $x_1^4+x_2^4$ через x_1+x_2 и x_1x_2. Имеем

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=$$
$$=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2=$$
$$=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2.$$

Ответ. $x_1^4+x_2^4=p^4-4p^2q+2q^2$.

4. *Разложить на множители выражение*

$$4(x^2z+y^2x+z^2y)-2(xz^2+zy^2+yx^2)-7xyz.$$

Решение. Данное выражение можно рассматривать как квадратное относительно любого входящего в него переменного. Сгруппируем его члены и расположим их по степеням x. Получим

$$2(2z-y)x^2+(4y^2-7yz-2z^2)x+(4z^2y-2y^2z). \qquad (1)$$

Коэффициент при x представляет собой квадратный трехчлен относительно y (можно z) $4y^2-7zy-2z^2$. Найдем его корни:

$$D=49z^2+32z^2=81z^2;\ y_1=\frac{7z-9z}{8}=-\frac{1}{4}z,\ y_2=2z.$$

Следовательно,

$$4y^2-7yz-2z^2=4\left(y+\frac{1}{4}z\right)(y-2z)=(4y+z)(y-2z).$$

Таким образом, в каждом из коэффициентов квадратного трехчлена (1) есть множитель $y-2z$. Вынося его за скобки, получим

$$(y-2z)(-2x^2+(4y+z)x-2yz).$$

Квадратный трехчлен $-2x^2+(4y+z)x-2yz$ имеет корни (проверьте): $x_1=2y$, $x_2=\frac{1}{2}z$.

Ответ. $(x-2y)(y-2z)(z-2x)$.

Решая эту задачу, мы сознательно не стали использовать некоторые соображения, которые могли бы привести к цели быстрее. Так, например, выделив множитель $(y-2z)$, учитывая цикличность исходного выражения (оно не меняется при замене x на y, y на z, z на x), можно было сразу получить требуемое разложение на множители. В данном случае мы следовали поговоркам: «От добра добра не ищут» и «Тише едешь...» Однако в других, более сложных случаях подобного рода особенности могут сыграть решающую роль. И еще на одно очень важное обстоятельство следует обратить внимание: надо учиться «видеть» квадратный трехчлен в тех случаях, когда он не задан в стандартной канонической форме; уметь выделять переменное, параметр, алгебраическое выражение, относительно которого данное выражение представляет собой квадратный трехчлен; делать замену переменного, превращающую его в квадратный трехчлен.

20. Существование корней квадратного уравнения. Знаки корней

Как мы знаем, для того чтобы квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имело корни, необходимо и достаточно выполнения неравенства $D \geqslant 0$. Как правило, в случае необходимости доказать, что заданное квадратное уравнение имеет решение, начинают с вычисления его дискриминанта, с тем чтобы затем доказать его неотрицательность. Однако в некоторых случаях можно указать и иные, более простые способы доказательства существования решения квадратного уравнения. Эти способы основываются на очевидных графических соображениях. Так, если $a>0$, то для доказательства того, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два решения, достаточно указать одну точку x_0, в которой $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c<0$. Чаще всего в качестве x_0 берут 0 (дает достаточное условие $c<0$), 1 (условие $a+b+c<0$) или -1 (условие $a-b+c<0$). Например, чтобы убедиться в том, что уравнение $(7\sqrt{10}+5\sqrt{11})x^2-(10\sqrt{10}+13\sqrt{11})x+4\sqrt{10}+7\sqrt{11}=0$ имеет два корня, заметим, что значение левой части при $x=1$ равно $\sqrt{10}-\sqrt{11}<0$. При этом мы избежим хотя и несложных, но громоздких вычислений. Похожая идея «работает» и в следующей задаче.

5. *Доказать, что при любом a уравнение*

$$(a^3-2a^2)x^2-(a^3-a+2)x+a^2+1=0$$

имеет решение.

Решение. Можно, конечно, попытаться найти дискриминант и доказать, что он положителен. Но не будем спешить. Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x)$. Сразу видно, что $f(0)=a^2+1>0$ при любом a. Утверждение задачи будет доказано, если мы найдем x_1, для которого $f(x_1)<0$. Попробуем $x_1=1$. (Выбор такого значения выглядит естественным, поскольку в этом случае пропадают члены с a^3.) $f(1)=-a^2+a-1<0$ при любом a. Теперь легко сделать вывод, что наше уравнение всегда имеет решение. Более того, если $a^3-2a^2\neq 0$, т. е. $a\neq 0$ и $a\neq 2$, данное уравнение имеет два корня; при этом всегда имеется корень, удовлетворяющий неравенству $0<x<1$.

Мы не будем обсуждать здесь проблему, в какой мере допустимо и законно использование тех или иных графических соображений в условиях конкурсного экзамена. Общими словами здесь не отделаешься — истина конкретна. К сожалению, четких и согласованных критериев, которых бы придерживались комиссии разных вузов (и даже члены одной комиссии), нет. Нам все же кажется, что степень обоснованности решений, аппелирующих к графическому образу квадратного трехчлена, зачастую гораздо выше, чем это считают некоторые чрезмерно педантичные экзаменаторы.

Мы советуем ученикам почаще обращаться в процессе поиска решения к «картинкам», искать соответствующую графическую интерпретацию.

Теорема Виета очевидным образом используется в задачах, в которых требуется определить знаки корней квадратного уравнения.

6. *При каких значениях параметра a уравнение*

$$x^2-2\sqrt{3}\,(a-3)\,x+a^2-3a+2=0$$

имеет решение? Определить знаки корней в зависимости от a.

Решение. Прежде всего, если $a^2-3a+2<0$, $1<a<2$, то уравнение имеет корни разных знаков. (Дискриминант при этом «автоматически» положителен.) В остальных случаях или корней нет, или они одного знака. Отдельно надо рассмотреть случаи, когда корни равны или один из них равен 0. В случае положительности дискриминанта и свободного члена на основании теоремы Виета знаки обоих корней противоположны по знаку коэффициенту при x — второму коэффициенту уравнения. Значит, для того чтобы было $x_1>0$ и $x_2>0$, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\begin{cases} a^2-3a+2>0, \\ a-3>0, \\ \frac{1}{4}D=2a^2-15a+25>0, \end{cases}$$

откуда $a>5$. Точно так же рассматриваются другие случаи.

Ответ. Если $a<1$ или $2<a<\frac{5}{2}$, то $x_1<0$, $x_2<0$; если $a=1$ или $a=2$, то $x_1<0$, $x_2=0$; если $1<a<2$, то $x_1<0$, $x_2>0$; если $a=\frac{5}{2}$, то $x_1=x_2<0$; если $\frac{5}{2}<a<5$, то корней нет; если $a=5$, то $x_1=x_2>0$; если $a>5$, то $x_1>0$, $x_2>0$.

Ответ выглядит сложнее, чем решение задачи.

21. Расположение корней квадратного трехчлена

Выделим прежде всего два наиболее распространенных типа задач, связанных с расположением корней квадратного трехчлена. Первый тип — задачи, в которых изучается расположение корней относительно заданной точки A. Возможны три случая, не считая случая отсутствия корней: оба корня меньше A; один корень меньше, а другой больше A; оба корня больше A. Задачи первого типа без труда сводятся к проблеме, рассмотренной в предыдущем параграфе,— определению знаков корней квадратного трехчлена. Это делается при помощи замены $t=x-A$, $x=t+A$, в результате которой трехчлен относительно x переходит в трехчлен относительно t. Знаки корней нового квадратного трехчлена очевидным образом определяют расположение корней исходного квадратного трехчлена относительно A. Можно и не делать замену.

7. *При каком значении параметра а один корень уравнения* $x^2-(3a+2)x+2a-1=0$ *больше 1, а другой меньше 1?*

Решение. Решение легко получается на основании следующего простого графического соображения. График функции $y=x^2-(3a+2)x+2a-1$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. По условию эта парабола должна пересекать ось x, причем отрезок $[x_1;\ x_2]$ должен содержать внутри себя точку 1 (рис. 7). Следовательно, значение квадратного трехчлена $x^2-(3a+2)x+2a-1$ при $x=1$ должно быть отрицательным. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы выполнялись неравенства $x_1<1<x_2$.

Ответ. $a>-2$.

В общем случае для того, чтобы уравнение $f(x)=ax^2+bx+$ $+c=0$ имело бы один корень меньше A, а другой больше A, необходимо и достаточно выполнения неравенства $a\cdot f(A)<0$. (До-

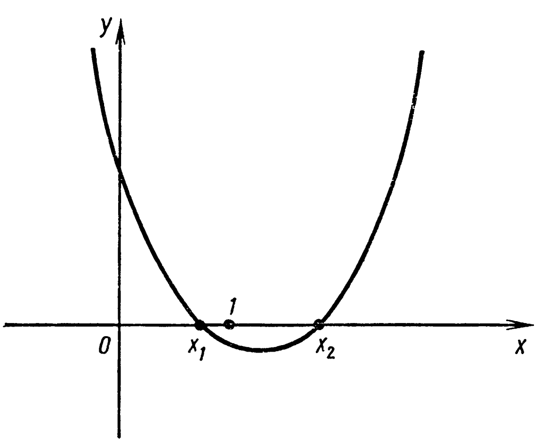


Рис. 7

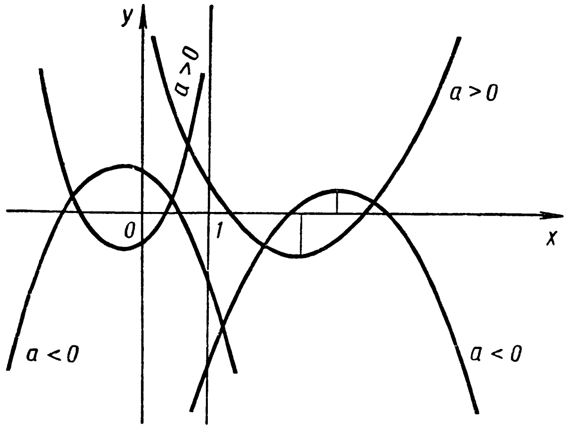


Рис. 8

кажите это самостоятельно.) Не следует последнее условие заучивать. Необходимо понять принцип его получения и уметь провести необходимые рассуждения в конкретных задачах.

8. *При каких значениях параметра а оба корня уравнения* $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ *больше 1?*

Решение. Для того чтобы оба корня уравнения

$$f(x)=ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$$

были больше 1, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1)\ D>0;\quad 2)\ a\cdot f(1)>0;\quad 3)\ x_{\text{в}}=\frac{2a-1}{a}>1.$$

Необходимость условия 1) очевидна. Неравенство 2) означает, что знак $f(x)$ при $x=1$ совпадает со знаком старшего коэффициента. Квадратные трехчлены, удовлетворяющие условиям 1) и 2), обладают тем свойством, что все они имеют два корня и оба эти корня либо меньше 1, либо больше 1 (рис. 8). Неравенство 3) выделяет из них те трехчлены, у которых оба корня больше 1. Оно означает, что вершина параболы расположена правее прямой $x=1$.

Система неравенств 1) — 3) дает нам необходимое и достаточное условие для того, чтобы оба корня данного уравнения были больше 1. Неравенство 2) дает $a(4-6a)>0$, $0<a<\frac{2}{3}$. А из неравенства 3) следует, что $a<0$ или $a>1$. Таким образом, нам нет необходимости решать неравенство 1), поскольку уже неравенства 2) и 3) несовместимы.

Ответ. Ни при каких.

В задачах второго типа исследуется расположение корней квадратного трехчлена относительно заданного отрезка $[A;\ B]$. Здесь можно выделить 6 возможных случаев расположения корней (оба меньше A, один меньше A, а другой на отрезке $[A;\ B]$ и т. д.). Если же отдельно рассматривать ситуацию, когда $D=0$, то добавится еще 3 случая. Мы вновь не будем заниматься построением общей теории, а рассмотрим конкретные примеры.

9. *При каких значениях параметра a все решения уравнения $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ удовлетворяют условию $0<x<3$?*

Решение. Обозначим $f(x)=(a-1)x^2-(a+1)x+a$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $f(x)$ (если $a\neq 1$) имела все свои корни внутри отрезка $[0;\ 3]$, будет выполнение системы неравенств:

1) $D\geqslant 0$; 2) $(a-1)f(0)>0$; 3) $(a-1)f(3)>0$;

4) $0<x_в<3$, где $x_в=\dfrac{a+1}{2(a-1)}$.

(Проверьте, что если $f(x)$ имеет корни на данном отрезке, то все неравенства выполняются. Проверьте обратное утверждение, что если выполняются все неравенства, то корни $f(x)$ расположены на отрезке $[0;\ 3]$. Покажите, что ни одно из неравенств нельзя отбросить, т. е. если выполняются все неравенства, кроме одного, то квадратный трехчлен не удовлетворяет условию задачи.)

Оба неравенства 2) и 3) выполняются при $a>\dfrac{12}{7}$ или $a<0$. Решим неравенство 4): $0<\dfrac{a+1}{2(a-1)}<3$. Будем иметь $a>\dfrac{7}{5}$ или $a<-1$.

Значит, система неравенств 2), 3), 4) имеет решение $a>\dfrac{12}{7}$ или $a<-1$. Условие $D\geqslant 0$ дает нам $-3a^2+6a+1\geqslant 0$ или $3a^2-6a-1\leqslant 0$, откуда $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$, а поскольку $a>\dfrac{12}{7}$ или $a<-1$, то $\dfrac{12}{7}<a\leqslant\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Отдельно рассматривается случай $a=1$.

Ответ. $\dfrac{12}{7}<a\leqslant\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$, $a=1$.

Заметим, что если бы в условии требовалось, чтобы оба корня располагались на заданном отрезке, т. е. указывалось на наличие двух различных корней, то правое нестрогое неравенство ответа следовало бы заменить на строгое и исключить случай $a=1$.

10. *Определить, как расположены корни уравнения ax^2- $-3(a+1)x+2a+7=0$ относительно отрезка $[-1;\ 4]$.*

Решение. Решим эту задачу несколько иначе, способом, который можно назвать «обобщенным методом интервалов». Сначала определим, где обращается в ноль дискриминант уравнения. Имеем

$$9(a+1)^2-4a(2a+7)=0,\ a^2-10a+9=0;\ a_1=1,\ a_2=9.$$

При $1<a<9$ корней у данного уравнения нет. Обозначив, как обычно, левую часть уравнения через $f(x)$, найдем $f(-1)=6a+10$, $f(4)=6a-5$. Как видно, $f(-1)$ и $f(4)$ меняют знаки соответственно при $a=-\frac{5}{3}$ и $a=\frac{5}{6}$. Множество значений параметра a точками $-\frac{5}{3}$, 0, $\frac{5}{6}$, 1, 9 разбивается на четыре интервала и две полупрямые (рис. 9, *а*; к найденным ранее значениям параметра a добавлено значение, при котором обращается в 0 старший коэффициент, $a=0$).

Рассмотрим эти 6 случаев.

1) $a<-\frac{5}{3}$. Имеем $D>0$, $a<0$, $f(-1)=6a+10<0$, $f(4)=6a-5<0$, $x_в=\frac{3a+1}{2a}$. Можно проверить, что при $a<-\frac{5}{3}$ будет $-1<\frac{3a+1}{2a}<4$. Значит, уравнение имеет корни, ветви

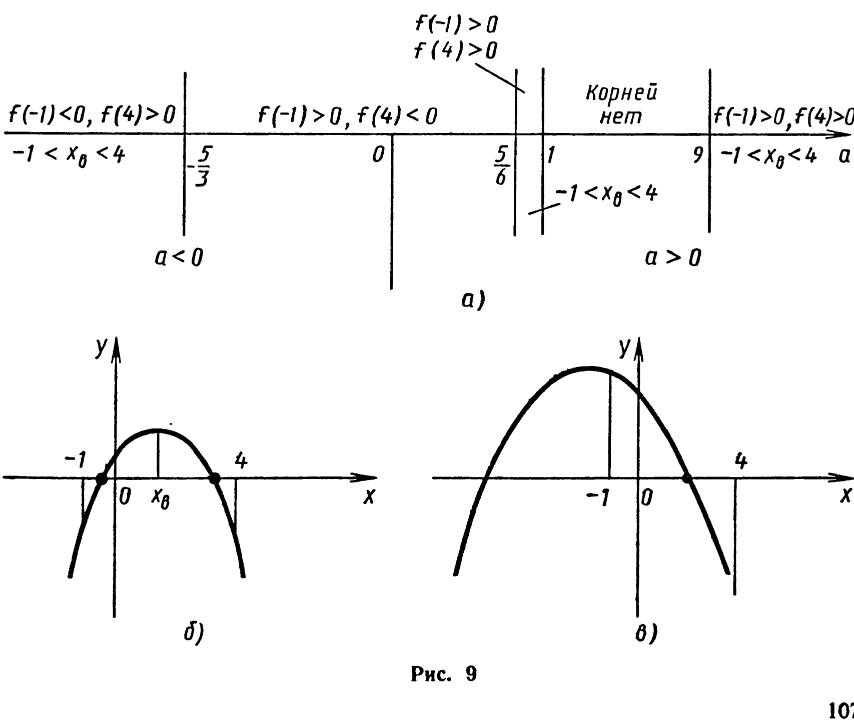


Рис. 9

параболы направлены вниз, значения $f(x)$ при $x=-1$ и $x=4$ отрицательны, вершина параболы расположена между прямыми $x=-1$ и $x=4$ (рис. 9, *б*). Следовательно, в этом случае оба корня расположены между -1 и 4.

2) $-\frac{5}{3}<a<0$ (случай $a=-\frac{5}{3}$ рассматривается отдельно). Имеем $f(-1)>0$, $f(4)<0$. А поскольку $a<0$, то (рис. 9, *в*) один корень меньше -1, а другой расположен между -1 и 4. Точно так же рассматриваются остальные случаи.

Ответ. При $a<-\frac{5}{3}$, $\frac{5}{6}<a<1$, $a>9$ имеем $-1<x_1<x_2<4$; при $-\frac{5}{3}<a<0$ имеем $x_1<-1<x_2<4$; при $0<a<\frac{5}{6}$ имеем $-1<x_1<4<x_2$; при $1<a<9$ корней нет. Если $a=-\frac{5}{3}$, то $x_1=-1$, $x_2=\frac{11}{5}$; если $a=0$, то один корень $x_0=\frac{7}{3}$; если $a=\frac{5}{6}$, то $x_1=\frac{13}{5}$, $x_2=4$; если $a=1$, то $x_1=x_2=3$; если $a=9$, то $x_1=$ $=x_2=\frac{10}{3}$.

11. *Определить, как расположены корни уравнения*

$$ax^2-(a^3+1)x+a^2=0$$

относительно отрезка $[1;\ 3]$.

Решение. В данном случае приемы, которые мы использовали при решении предыдущего примера, не нужны; все гораздо проще, рассматриваемое уравнение всегда (при $a\neq 0$) имеет корни: $x_1=a^2$ и $x_2=\frac{1}{a}$. (Проверьте. Здесь не обязательно $x_1<x_2$.) Теперь закончить решение не составляет труда.

Вывод очевиден — при решении задач не стоит увлекаться общими теориями, следует попытаться сначала выявить специфику данного конкретного примера.

22. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов

12. *Найти все значения параметра а, при которых уравнения* $x^2-(2a-1)x+a=0$ и $(a+1)x^2-ax-1=0$ *имеют хотя бы один общий корень.*

Решение. Решение основывается на следующей простой идее: если два уравнения $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$ имеют общий корень x_0, то при любых k_1 и k_2 уравнение $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)=0$ имеет тот же корень x_0.

Возьмем сначала k_1 и k_2 так, чтобы в комбинации исчез свободный член: $k_1=1$, $k_2=a$. Получим после сокращения на x, поскольку очевидно, что $x_0\neq 0$, уравнение

$$(a^2+a+1)x-(a^2+2a-1)=0.$$

Затем выберем k_1 и k_2 так, чтобы исчез член с x^2: $k_1=a+1$, $k_2=-1$.
Получим уравнение

$$(2a^2-1)\,x-(a^2+a+1)=0.$$

Так как x должен удовлетворять обоим полученным линейным уравнениям, для a должно выполняться соотношение

$$(a^2+a+1)^2=(a^2+2a-1)\cdot(2a^2-1).$$

Далее получаем $a^4+2a^3-6a^2-4a=0$. Левая часть разлагается на множители:

$$a\,(a^3+2a^2-6a-4)=a\,(a^3-2a^2+4a^2-8a+2a-4)=$$
$$=a\,[(a-2)\,a^2+(a-2)\,4a+2\,(a-2)]=a\,(a-2)\,(a^2+4a+2).$$

Ответ. $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-2-\sqrt{2}$, $a_4=-2+\sqrt{2}$.

Два замечания. 1. Для каждого из найденных значений a необходимо убедиться, что соответствующие уравнения имеют решения. (Достаточно проверить существование корней у одного из них.) 2. Заданную пару квадратных уравнений можно рассматривать как систему из двух уравнений с неизвестными x и a.

13. *Расположить корни уравнений*

$$x^2+\frac{3x}{a}+2a=0 \text{ и } x^2+\frac{12x}{a}-a=0$$

в порядке возрастания.

Решение. Обозначим $f(x)=x^2+\frac{3x}{a}+2a$, $g(x)=x^2+\frac{12x}{a}-a$; α_1 и α_2 — корни уравнения $f(x)=0$; β_1 и β_2 — корни уравнения $g(x)=0$. По смыслу задачи следует рассматривать лишь те значения параметра a, для которых оба уравнения имеют решения. Условие неотрицательности обоих дискриминантов дают нам неравенства.

$$-\sqrt[3]{36}\leqslant a<0,\quad 0<a\leqslant\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}.$$

Найдем значения x, при которых $f(x)=g(x)$: $x=\frac{a^2}{3}$. Уравнения имеют общий корень, если $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)=0$, откуда $a=-3$.

Таким образом, множество значений параметра a, при которых оба уравнения имеют корни, разбито на три интервала (рис. 10, a). Концы интервалов удобнее рассматривать отдельно. Возникают три случая.

1) $-\sqrt[3]{36}<a<-3$. Имеем $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)=a\,(a^3+27)>0.$

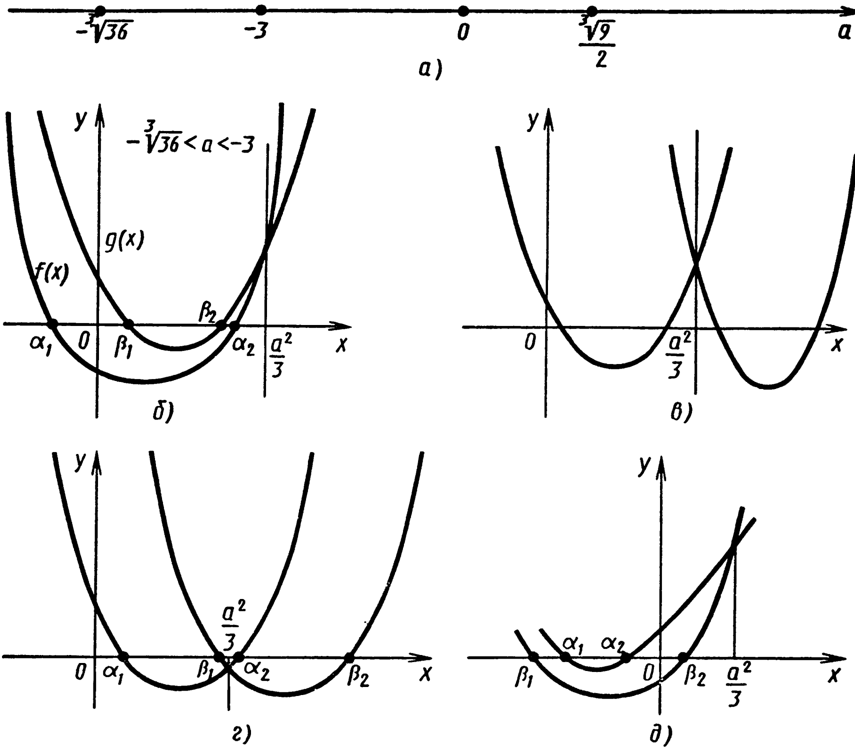


Рис. 10

С точностью до обозначений, какая из двух парабол соответствует $f(x)$, а какая $g(x)$, возможны два случая (рис. 10, *б, в*). Посмотрим, как расположены вершины каждой из парабол по отношению к прямой $x=\frac{a^2}{3}$. Для $f(x)$ имеем $x_в=-\frac{3}{2a}$. На рассматриваемом интервале изменения a имеем $-\frac{3}{2a}<\frac{a^2}{3}$. (Докажите.) Вершина второй параболы также левее прямой $x=\frac{a^2}{3}$. (Проверьте правильность неравенства $-\frac{6}{a}<\frac{a^2}{3}$.) Следовательно, имеет место случай, изображенный на рисунке 10, *б*. (На рис. 4, *в* вершины парабол расположены по разные стороны от прямой $x=\frac{a^2}{3}$.) Осталось выяснить, какая из двух парабол на этом рисунке соответствует $f(x)$, а какая $g(x)$.

Если $a<0$ и $x<\frac{a^2}{3}$, то $f(x)-g(x)=-\frac{9}{a}\left(x-\frac{a^2}{3}\right)<0$, т. е.

$f(x)<g(x)$. Значит, $g(x)$ при $x<\frac{a^2}{3}$ идет выше $f(x)$ и $\alpha_1<\beta_1<<\beta_2<\alpha_2$. Если $a=-\sqrt{36}$, то $\alpha_1<\beta_1=\beta_2<\alpha_2$.

2) $-3<a<0$. В этом случае $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)=a(a^3+27)<0$. Как и в предыдущем пункте, при $x<\frac{a^2}{3}$ $f(x)<g(x)$, т. е. графики $f(x)$ и $g(x)$ расположены так, как показано на рисунке 10, *г*, и $\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2$. Если $a=-3$, то $\alpha_1<\beta_1<\beta_2=\alpha_2$.

3) $0<a<\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$. Имеем $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)>0$. Обе вершины — слева от прямой $x=\frac{a^2}{3}$, и $f(x)>g(x)$ при $x<\frac{a^2}{3}$ (рис. 10, *д*). Следовательно, $\beta_1<\alpha_1<\alpha_2<\beta_2$. Если $a=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, то $\beta_1<\alpha_1=\alpha_2<\beta_2$.

Заметим, что получить правильный ответ в данном примере можно было бы несколько проще, хотя и менее законно. Из соображений непрерывности следует, что на каждом из трех интервалов имеет место один и тот же порядок следования корней (граничными точками такого рода интервалов являются: запрещенные значения параметра, в данном случае $a=0$; нули дискриминантов — точки $a=-\sqrt[3]{36}$ и $a=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$ — и значения параметра, при которых уравнения имеют один и тот же корень $a=-3$; в общем случае сюда надо добавить значения параметра, при которых обращается в ноль коэффициент при x^2). Для выявления этого порядка следования достаточно рассмотреть какое-либо значение параметра a из соответствующего интервала. В нашем случае для крайних интервалов можно взять даже их концы: $-a=-\sqrt[3]{36}$ и $a=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, а для среднего, например, $a=-1$.

23. Уравнения, неравенства и системы с параметром

В большинстве задач, рассмотренных в предыдущих пунктах, требовалось узнать «при каких значениях параметра...?». Подобного рода вопрос для уравнений, неравенств, систем уравнений или неравенств с параметром не всегда фигурирует в условии задачи. Однако наличие параметра заранее предполагает специальную форму записи ответа, такую, чтобы по ней можно было указать, каков будет ответ для любого допустимого значения параметра.

14. *Решить уравнение* $\sqrt{3x-2}=x+a$.

Решение. Обозначим $y=\sqrt{3x-2}$, тогда $x=\frac{1}{3}(y^2+2)$, $y\geqslant 0$. Для y получаем уравнение

$$y^2-3y+3a+2=0,$$

которое надо решить при условии $y\geqslant 0$. Неотрицательность дискриминанта дает нам неравенство $a\leqslant\frac{1}{12}$. Если y_1 и y_2, $y_1\leqslant y_2$ — корни уравнения, то по теореме Виета $y_1+y_2=3$, $y_1y_2=3a+2$. Следовательно, оба корня не могут быть отрицательными. При $a=\frac{1}{12}$ получаем одно решение: $y=\frac{3}{2}$; при $-\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{1}{12}$ — два решения: $y_1=\frac{1}{2}(3-\sqrt{1-12a})$, $y_2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{1-12a})$; при $a<-\frac{2}{3}$ — одно решение: $y=\frac{1}{2}(3+\sqrt{1-12a})$. Теперь возвращаемся к неизвестному x.

Ответ. Если $a<-\frac{2}{3}$, то $x=\frac{1}{2}(3-2a+\sqrt{1-12a})$; если $-\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{1}{12}$, то $x_1=\frac{1}{2}(3-2a-\sqrt{1-12a})$, $x_2=\frac{1}{2}(3-2a+\sqrt{1-12a})$; если $a=\frac{1}{12}$, то $x=\frac{17}{12}$; если $a>\frac{1}{12}$, то решений нет.

Если решать уравнение 14 более обычным путем, возводя в квадрат обе его части, то приходим к уравнению $x^2+(2a-3)x+a^2+2=0$ при условии $x+a\geqslant 0$. Технически этот путь несколько сложнее. (Доведите его до конца самостоятельно.)

15. *Решить уравнение* $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Решение. Возводим обе части уравнения в квадрат (условие $x\geqslant 0$):

$$a-\sqrt{a+x}=x^2,\ \sqrt{a+x}=a-x^2.$$

Еще раз возводим в квадрат (условие $a-x^2\geqslant 0$). Получаем окончательно уравнение

$$x^4-2ax^2-x+a^2-a=0,$$

среди решений которого надо найти те, для которых $x\geqslant 0$, $a-x^2\geqslant 0$. Получившееся уравнение имеет четвертую степень относительно неизвестного x, но зато является квадратным относительно параметра a. (Умение «видеть» квадратный трехчлен!) Попробуем этим обстоятельством воспользоваться:

$$a^2-(2x^2+1)\,a+x^4-x=0.$$

Найдем дискриминант, надеясь, что он окажется полным квадратом:

$$D=(2x^2+1)^2-4\,(x^4-x)=4x^4+4x^2+1-4x^4+4x=(2x+1)^2.$$

Итак, наши надежды оправдались. Теперь правая часть уравнения раскладывается на множители $(a-x^2-x-1)(a-x^2+x)$. Наше уравнение распадается на два: $x^2+x+1-a=0$ и x^2-x-

$-a=0$, каждое из которых надо решить при условии, что $x\geqslant 0$, $a-x^2\geqslant 0$.

Начнем с уравнения $x^2+x+1-a=0$. Поскольку $x+1=a-x^2$, то из того, что $x\geqslant 0$, следует, что $a-x^2>0$. Значит, нам достаточно найти лишь те решения, для которых $x>0$; тогда неравенство $a-x^2\geqslant 0$ будет выполняться автоматически. Но сумма корней (если они есть) равна -1; следовательно, уравнение $x^2+x+1-a=0$ может иметь лишь один неотрицательный корень при условии $1-a\leqslant 0$, $a\geqslant 1$. Значит, при $a\geqslant 1$ будет $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4a-3})$.

Перейдем ко второму уравнению $x^2-x-a=0$. Из этого уравнения $-x=a-x^2$. Левая часть неположительна, правая неотрицательна. Равенство возможно лишь, если $a=0$, $x=0$.

Ответ. Если $a\geqslant 1$, то $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4a-3})$; если $a=0$, то $x=0$; при остальных a решений нет.

16. *Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство* $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8\geqslant 0$.

Решение. Левая часть неравенства представляет собой многочлен как относительно x, так и относительно параметра a. Степени соответственно равны 4 и 3. Однако если умножить многочлен на a, а затем сделать замену $y=ax$, то в новом многочлене максимальная степень параметра a будет равна 2. Случай $a=0$ дает нам ответ $x\geqslant -\frac{1}{4}$. Будем теперь считать, что $a>0$. Умножив обе части неравенства на a и сделав замену $y=ax$, получим

$$4y^4+4ay^2+32y+a^2+8a\geqslant 0.$$

Левая часть представляет собой квадратный трехчлен относительно a:

$$a^2+(4y^2+8)\,a+4y^4+32y\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{4}D=(2y^2+4)^2-4y^4-32y=16\,(y-1)^2.$$

Раскладывая левую часть неравенства на множители, получим

$$(a+2y^2+4y)\,(a+2y^2-4y+8)\geqslant 0,$$

или

$$(2y^2+4y+a)\,(2y^2-4y+8+a)\geqslant 0.$$

Второй множитель положителен при всех y, если $a>0$. Приходим к неравенству $2y^2+4y+a\geqslant 0$, откуда, если $0<a<2$, $y\leqslant\frac{1}{2}(-2-\sqrt{4-2a})$ или $y\geqslant\frac{1}{2}(-2+\sqrt{4-2a})$; если $a\geqslant 2$, y — любое. Возвращаясь к x, получим ответ.

Ответ. Если $a=0$, то $x \geqslant -\frac{1}{4}$; если $0<a<2$, то $x \leqslant \frac{1}{2a} \times (-2-\sqrt{4-2a})$ или $x \geqslant \frac{1}{2a}(-2+\sqrt{4-2a})$; если $a \geqslant 2$, то x — любое.

Очень часто уравнения, неравенства, системы с параметром сводятся к задачам о расположении корней одного или двух квадратных трехчленов. Основные методы решения подобных задач мы рассматривали в двух предыдущих пунктах.

17. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} x^2-3x+2 \leqslant 0, \\ ax^2-2(a+1)x+a-1 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение. Поскольку решением первого неравенства является $1 \leqslant x \leqslant 2$, то задача сводится (при $a \neq 0$) к выяснению расположения корней квадратного трехчлена $f(x)=ax^2-2(a+1)x+a-1$ относительно отрезка $[1;\ 2]$. Имеем

$$\frac{1}{4}D=(a+1)^2-a(a-1)=3a+1,\ f(1)=-3,\ f(2)=a-5.$$

Область изменения параметра a оказалась разделенной на 4 части (не считая граничных точек).

1) Если $a<-\frac{1}{3}$, второе неравенство, а следовательно, и данная система не имеют решения. То же имеет место и при $a=-\frac{1}{3}$.

2) Если $-\frac{1}{3}<a<0$, то $f(1)<0$, $f(2)<0$. Для вершины параболы выполняется неравенство $x_в=\frac{a+1}{a}<0$ (рис. 11, *а*). Следовательно, множество решений второго неравенства не со-

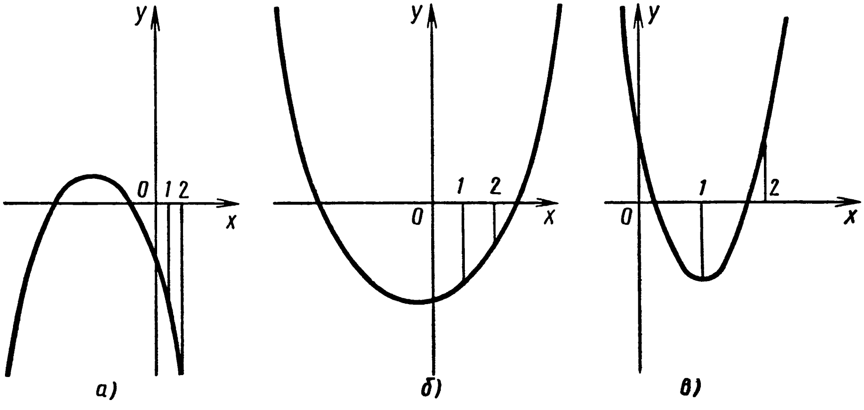


Рис. 11

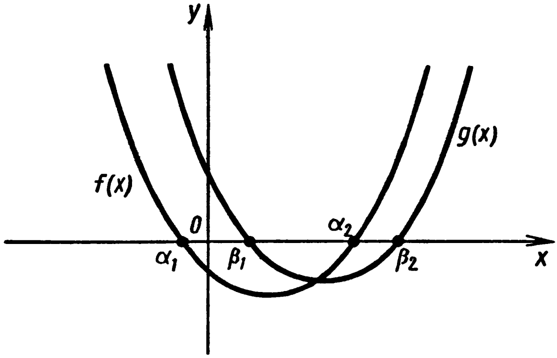


Рис. 12

держит точек отрезка [1; 2]. Система не имеет решения. То же имеет место и при $a=0$.

3) Если $0<a<5$, то $f(1)<0$, $f(2)<0$ (рис. 11, *б*). Значит, на всем отрезке [1; 2] $f(x)<0$. Система вновь не имеет решения.

4) Если $a\geqslant 5$, то $f(1)<0$, $f(2)\geqslant 0$ (рис. 11, *в*). Решением системы будет $x_2\leqslant x\leqslant 2$, где x_2 — больший корень уравнения $f(x)=0$.

Ответ. Если $a<5$, система не имеет решения; если $a\geqslant 5$, то $\frac{1}{a}(a+1+\sqrt{3a+1})\leqslant x\leqslant 2$.

18. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} x^2-2x-3+a>0, \\ x^2-4x+3+a<0. \end{cases}$

Решение. Задача, по существу, сводится к выяснению, в каком порядке следуют корни уравнений

$$f(x)=x^2-2x-3+a=0 \text{ и } g(x)=x^2-4x+3+a=0.$$

Вычисляя их дискриминанты, получим, что первое уравнение имеет корни, если $a\leqslant 4$; второе — если $a\leqslant 1$. Найдем x_0 — абсциссу точки пересечения графиков $y=f(x)$ и $y=g(x)$: $f(x_0)=g(x_0)$, $x_0=3$, $f(x_0)=g(x_0)=a$. Имеем следующие три случая.

1) $a<0$ (рис. 12). Если α_1 и α_2 $(\alpha_1\leqslant\alpha_2)$ — корни уравнения $f(x)=0$, а β_1, β_2 $(\beta_1\leqslant\beta_2)$ — корни уравнения $g(x)=0$, то $\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2$. Это следует из того, что при $x<3$ выполняется неравенство $g(x)>f(x)$, так как $g(x)-f(x)=-2x+6$, и $f(3)=g(3)=a<0$. Значит, при $a<0$ решением системы будет $\alpha_2<x<\beta_2$ или $1+\sqrt{4-a}<x<2+\sqrt{1-a}$.

2) $0<a<1$. В этом случае порядок следования корней будет $\alpha_1<\beta_1<\beta_2<\alpha_2$. (Докажите.) Система не имеет решений. Если $a=0$, то $\alpha_1<\beta_1<\beta_2=\alpha_2$. Решений нет.

3) $a\geqslant 1$. Второе неравенство, а значит, и система неравенств не имеют решения.

Ответ. Если $a<0$, то $1+\sqrt{4-a}<x<2+\sqrt{1-a}$; если $a \geqslant 0$, то решений нет.

24. Уравнения, неравенства и системы с параметром. Графические интерпретации

Начнем с того, что еще раз решим систему неравенств 18. Эту систему можно переписать в виде двойного неравенства

$$-x^2+2x+3<a<-x^2+4x-3.$$

Рассмотрим координатную плоскость $(x;\ a)$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют нашей системе неравенств, ограничено графиками двух квадратных трехчленов $a=-x^2+2x+3$ и $a=-x^2+4x-3$ и состоит из точек, расположенных выше первого графика и ниже второго. Графики этих двух квадратных трехчленов пересекаются в точке $(3;\ 0)$. На рисунке 13 изображено это множество точек. Сразу «видно», что при $a \geqslant 0$ система не имеет решений.

Чтобы найти решение системы неравенств при некотором $a=a_0<0$, рассмотрим горизонтальную прямую $a=a_0$. Эта прямая пересекает найденное нами множество по отрезку. Абсциссы концов этого отрезка и будут задавать интервал изменения x, при этом $a=a_0$. Понятно, что для нахождения этих абсцисс надо решить относительно x уравнения $a_0=-x^2+2x+3$ и $a_0=-x^2+4x-3$ и взять большие корни этих уравнений. Таким образом, мы получим найденный выше ответ, причем, как нам кажется, с меньшими затратами.

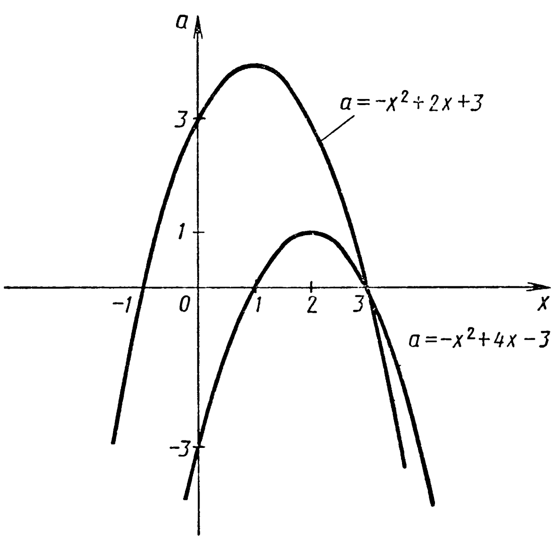


Рис. 13

Рассмотрим еще несколько примеров.

19. *При каких значениях a уравнение $x|x-2a|-3a+2=0$ имеет один корень?*

Решение. Рассмотрим функцию $y=x|x-2a|-3a+2$. Ее график состоит из частей двух парабол: если $x \geqslant 2a$, то $y=x^2-2ax-3a+2$; если $x<2a$, то $y=-x^2+2ax-3a+2$ (рис. 14, a). Если $a \geqslant 0$, то функция $y=x|x-2a|-3a+2$ возрастает при $x<a$ и $x>2a$ и убывает на отрезке $[a;\ 2a]$. При $a<0$ эта функция возрастает на участках $x<2a$ и $x>a$ и убывает на отрезке $[2a;\ a]$.

Нетрудно сделать вывод, что, для того чтобы уравнение $x|x-2a|-3a+2=0$ имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $y(a)$ и $y(2a)$ были одного знака ($y(a)$ и $y(2a)$ одновременно или выше, или ниже оси x), т. е. $y(a)\,y(2a)>0$. Получаем неравенство для a:

$$(a|a|-3a+2)(-3a+2)>0.$$

Найдем, где обращается в ноль первый множитель: $a|a|-3a+2=0$. Если $a \geqslant 0$, то $a^2-3a+2=0$, $a_1=1$, $a_2=2$. Если $a<0$, то $-a^2-3a+2=0$, $a_3=-\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$. (Другой корень положителен.)

Второй множитель обращается в ноль при $a=\frac{2}{3}$. Легко видеть, что в каждой из этих четырех точек левая часть неравенства меняет знак. Расставим эти точки на числовой оси (рис. 14, $б$). При $a>2$ первый множитель положителен, вто-

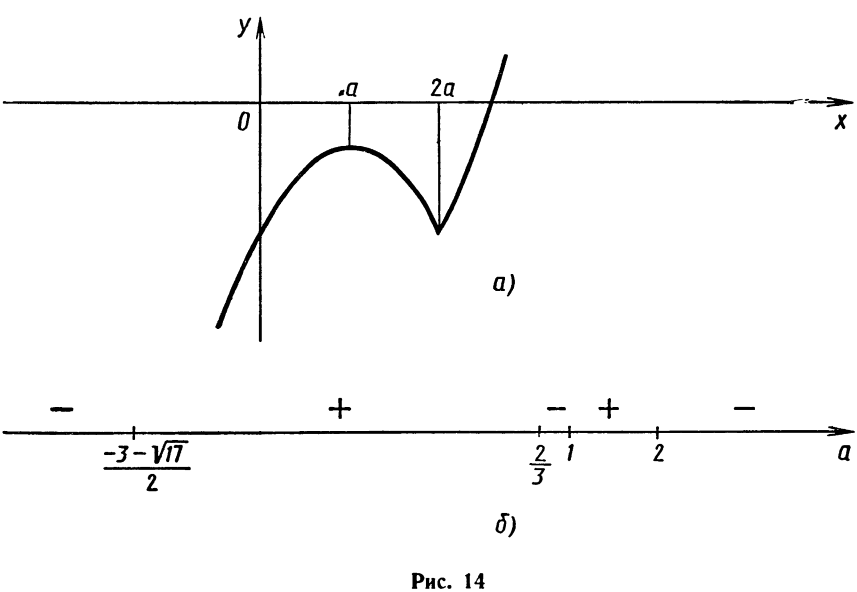


Рис. 14

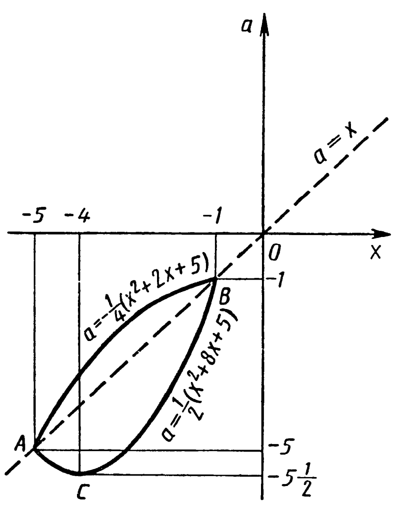


Рис. 15

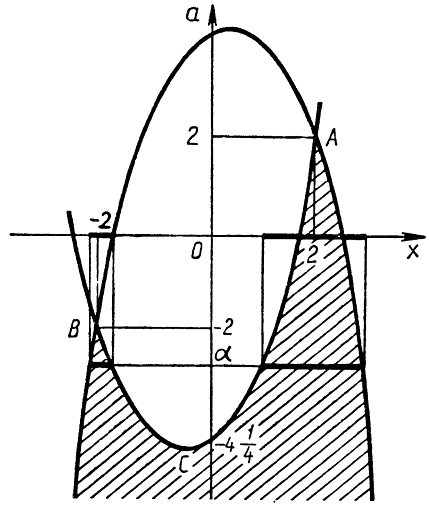


Рис. 16

рой отрицателен, т. е. $(a|a|-3a+2)(-3a+2)<0$. При переходе через отмеченные точки знак меняется.

Ответ. $-\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})<a<\frac{2}{3}$, $1<a<2$.

20. *Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $x^2+5(x+1)+3|x-a|+a=0$?*

Р е ш е н и е. Изобразим на плоскости $(x;\ a)$ все точки, удовлетворяющие данному уравнению. Если $x\geqslant a$, то $a=\frac{1}{2}(x^2+8x+5)$; если $x<a$, то $a=-\frac{1}{4}(x^2+2x+5)$ (рис. 15). (Аналитически мы нашли точки A и B — точки пересечения каждой параболы с прямой $a=x$ и вершину первой параболы — точку C, вершина другой параболы совпала с точкой B. Затем от каждой параболы оставили ее часть, расположенную в нужной полуплоскости относительно прямой $a=x$.) Следовательно, если $-5\frac{1}{2}<a<-1$, то уравнение имеет два решения. (Горизонтальная прямая, соответствующая этим значениям параметра, пересекает наш график дважды.) Если $a=-5\frac{1}{2}$ или $a=-1$, решение единственное. Для остальных значений a уравнение не имеет решений.

21. *Решить неравенство* $|2x^2+x-a-8|\leqslant x^2+2x-2a-4$.

Р е ш е н и е. Напомним, что неравенство $|a|\leqslant b$ эквивалентно двойному неравенству $-b \leqslant a \leqslant b$. В нашем случае после преобразований приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant -x^2+x+4, \\ a \leqslant x^2+x-4. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости $(x;\ a)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе (рис. 16). При конкретном значении параметра $a=\alpha$ решением нашего неравенства будут абсциссы тех точек горизонтальной прямой $a=\alpha$, которые находятся в заштрихованной области. Найдем точки пересечения $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ -2)$ наших парабол и вершину $C(-0{,}5;\ -4{,}25)$ параболы $a=x^2+x-4$.

Далее получаем: если $a>2$, решений нет; горизонтальная прямая не пересекается с заштрихованной областью.

Если $-2<a\leqslant 2$, то соответствующая прямая пересекается с заштрихованной областью по отрезку. Концами этого отрезка будут точки с абсциссами $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a})$ (больший корень уравнения $a=x^2+x-4$ или $x^2+x-4-a=0$) и $\frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$ (больший корень уравнения $a=-x^2+x+4$ или $x^2-x-4+a=0$).

Если $-4\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant -2$, то горизонтальная прямая, соответствующая таким a, пересекается с заштрихованной областью по двум отрезкам. Решением неравенства будет

$$\frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}(1+\sqrt{17+4a}),$$

$$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a})\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a}).$$

Если $a<-4\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$.

Подведем итог этому пункту. Мы рассмотрели здесь задачи, при решении которых использовались наглядно-графические соображения. Подчеркнем два характерных приема.

Первый прием (использовался при решении задачи 19). На плоскости $(x;\ y)$ рассматривается семейство кривых, зависящих от параметра a: $y=f(x;\ a)$. Затем в этом семействе выделяется множество кривых, обладающих требуемым свойством. При этом очень часто поступают следующим образом: изучают, как перемещается кривая семейства при изменении параметра, и находят граничные значения параметра, отделяющие множество значений параметра, которым соответствуют кривые, имеющие нужное свойство. (Правда, в задаче 19 путь решения был несколько иной. Нам удалось сразу получить удобное необходимое и достаточное условие, выделяющее искомое множество кривых.)

Второй прием состоит в том, что рассматривается плоскость $(x; a)$, на которой изображается множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению или неравенству (см. решения задач 20 и 21). После этого, проводя прямые, параллельные оси x, находят решение этого уравнения или неравенства при соответствующем значении параметра. Значения параметра, при переходе через которые меняется формула, дающая решение, естественным образом определяются построенным множеством.

25. Задачи на максимум-минимум. Доказательство неравенств

Простейший прием нахождения наибольших и наименьших значений, основанный на свойствах квадратичной функции, состоит в том, что исследуемая функция при помощи преобразований или замены переменной приводится к квадратичной, после чего выделяется полный квадрат.

22. *Найти наибольшее значение функции* $y=\sqrt{2x+1}-x$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+1}=t$, тогда $t\geqslant 0$. Отсюда $x=\frac{t^2-1}{2}$. Переходя к переменной t, получаем, что надо найти наибольшее значение функции $y=t-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$ при условии $t\geqslant 0$. Выделим полный квадрат: $y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$. Наибольшее значение будет $y=1$ при $t=1$. Возвращаясь к x (в данной задаче это не обязательно), найдем, что наибольшее значение $y=1$ будет при $x=0$.

Другой прием иллюстрирует следующая задача.

23. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $y=\frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}$.

Решение. Рассмотрим данное равенство как уравнение с неизвестным x и параметром y. (Можно для создания большего психологического комфорта заменить y на a.) После преобразований получим

$$(2y-1)x^2-(y+1)x+3y+2=0.$$

Для того чтобы это уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$D=(y+1)^2-4\,(3y+2)\,(2y-1)=-23y^2-2y+9\geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{-1-\sqrt{208}}{23}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{208}}{23}.$$

Слева в неравенстве стоит наименьшее значение y, справа — наибольшее.

Интересно сравнить данное решение задачи с решением, использующим производные.

Идея, на которой основано решение задачи 23, чрезвычайно проста. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$, мы, рассматривая данное равенство как уравнение с неизвестным x, решаем задачу, при каких y это уравнение имеет решение.

Рассмотрим еще два примера, в которых работает эта же идея с небольшими вариациями.

24. *Найти наибольшее и наименьшее значения выражения* $2x-3y$, *если* $3x^2-xy+2y^2=5$.

Решение. Обозначим $2x-3y=s$, тогда $y=\frac{2x-s}{3}$. Заменим y через x и s в заданном соотношении. После упрощений получим

$$29x^2-5sx+2s^2-45=0.$$

Для того чтобы это уравнение (относительно x) имело решение, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$D=25s^2-4\cdot 29(2s^2-45)\geqslant 0,$$

откуда

$$-\sqrt{\frac{580}{23}}\leqslant s\leqslant\sqrt{\frac{580}{23}}.$$

Как и в предыдущем случае, слева в двойном неравенстве стоит наименьшее значение $s=2x-3y$, справа — наибольшее.

25. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $2x^2-xy-y^2$ *при условии, что* $x^2+2xy+3y^2=4$.

Решение. Задача сводится к определению наибольшего и наименьшего значений a, при которых система

$$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=a, \\ x^2+2xy+3y^2=4 \end{cases}$$

имеет решение.

Левые части каждого из уравнений представляют собой однородные многочлены второй степени относительно x и y. Метод решения подобного рода систем был нами изучен в § 2 (№ 22). Умножим первое уравнение на 4, второе на $-a$ и сложим получившиеся уравнения. Получим

$$(8-a)x^2-(4+2a)xy-(4+3a)y^2=0.$$

Разделив это уравнение на $y^2 (y\neq 0)$, будем иметь квадратное относительно $t=\frac{x}{y}$ уравнение

$$(8-a)t^2-(4+2a)\,t-(4+3a)=0.$$

Нам необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был неотрицателен:

$$\frac{1}{4}D=(2+a)^2-(8-a)(4+3a)\geqslant 0,$$

откуда $6-3\sqrt{6}\leqslant a\leqslant 6+3\sqrt{6}$. Осталось проверить, для любых ли a из этого отрезка система имеет решение. Подставляя во второе уравнение $x=yt$, получим уравнение $x^2(t^2+2t+3)=4$, которое имеет решение при любом t. Следовательно, если a таково, что квадратное уравнение, определяющее t, имеет неотрицательный дискриминант, то исходная система имеет решение.

Ответ. Наименьшее значение $2x^2-xy-y^2$ при условии, что $x^2+2xy+3y^2=4$, равно $6-3\sqrt{6}$, а наибольшее равно $6+3\sqrt{6}$.

Рассмотрим еще две задачи, решение которых основывается на графических соображениях.

26. *Пусть M — точка на прямой $y=2x+1$, а N — точка на параболе $y=-x^2+x-2$. Чему равно наименьшее значение длины отрезка MN?*

Решение. Найдем уравнение прямой, параллельной данной прямой $y=2x+1$ и касающейся параболы $y=-x^2+x-2$. Для этого, учитывая, что прямая $y=2x+1$ не параллельна оси параболы, надо среди прямых вида $y=2x+b$ найти ту, которая имеет единственную общую точку с параболой. Это означает, что уравнение

$$-x^2+x-2=2x+b;\ x^2+x+2+b=0$$

имеет дискриминант, равный нулю: $b=-\frac{7}{4}$. Прямая $y=2x+1$ и парабола $y=-x^2+x-2$ расположены в разных полуплоскостях по отношению к прямой $y=2x-\frac{7}{4}$. (За исключением одной точки N_0 на параболе, которая принадлежит также и прямой $y=2x-\frac{7}{4}$, рис. 17.)

Теперь очевидно, что наименьшее значение длины отрезка MN равно расстоянию между параллельными прямыми $y=2x+1$ и $y=2x-\frac{7}{4}$. Это расстояние равно $\left(1+\frac{7}{4}\right)\cos\alpha$. Но $\operatorname{tg}\alpha=2$, следовательно, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $(0<\alpha<90°)$.

Ответ. $\frac{11}{4\sqrt{5}}$.

Замечание. Возможно, более простым будет следующее решение. Найдем наименьшее значение разности y_1-y_2, где $y_1=$ $=2x+1$, $y_2=x^2+x-2$ (рис. 17). Поскольку $y_1-y_2=x^2+x+3$,

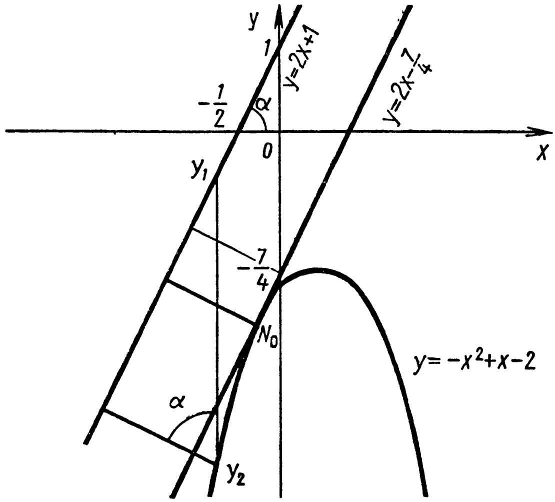


Рис. 17

искомое наименьшее значение равно $\frac{11}{4}$ и достигается при $x=-\frac{1}{2}$. Для нахождения расстояния между данными прямой и параболой надо $\frac{11}{4}$ умножить на $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

27. *Найти все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции $y=x^2+3x+|x-a|$ меньше $-1\frac{3}{4}$.*

Решение. График данной функции состоит из частей двух парабол, «склеенных» в точке с абсциссой $x=a$: $y=x^2+4x-a$ при $x\geqslant a$ и $y=x^2+2x+a$ при $x<a$. Наименьшее значение эта функция принимает или при $x=-2$ (соответствует вершине первой параболы), или при $x=-1$ (соответствует вершине второй параболы), или при $x=a$ (абсцисса точки склейки).

Мы перечислили все возможные значения аргумента, которые «подозреваются на минимум». (Не беда, если среди них окажутся лишние. Единственное следствие — некоторое увеличение объема вычислительной работы.) Следовательно, условию задачи удовлетворяют все те значения (и только те) параметра a, для которых выполняется хотя бы одно из трех неравенств

$$\left[\begin{array}{l} -2+|-2-a|<-1\frac{3}{4}, \\ -2+|-1-a|<-1\frac{3}{4}, \\ a^2-3a<-1\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Все три неравенства объединены квадратной скобкой, что означает, что нам надо, решив каждое из них, полученные ответы объединить (а не находить множество значений параметра a, удовлетворяющее всем трем одновременно, как это делается в системах уравнений или неравенств).

Решая неравенства, получим для каждого из них соответственно

$$-2\frac{1}{4}<a<-1\frac{3}{4},\ -1\frac{1}{4}<a<-\frac{3}{4},\ \frac{-3-\sqrt{2}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $-2\frac{1}{4}<a<-\frac{3}{4}$.

Мы не будем здесь подробно рассматривать задачи на доказательство неравенств, решения которых основываются на использовании тех или иных свойств квадратного трехчлена. Основные идеи, которые используются чаще всего, сходны с рассмотренными в этом параграфе. (Выделение полного квадрата, оценка дискриминанта и т. д.) Ограничимся одним известным и полезным неравенством, при доказательстве которого свойства квадратного трехчлена используются весьма нестандартно.

28. *Доказать, что для любых* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *справедливо неравенство*

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

(неравенство Коши-Буняковского).

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующую квадратичную функцию от x:

$$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2.$$

При всех x функция $f(x)\geqslant 0$. Следовательно, $D\leqslant 0$, где D — дискриминант:

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+b_1^2+ \\ +b_2^2+\ldots+b_n^2.$$

Значит,

$$\frac{1}{4}D=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+ \\ +b_n^2)\leqslant 0,$$

откуда получаем требуемое неравенство. Легко видеть, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского имеет место, если существует x, обращающий в ноль все слагаемые в выражении для $f(x)$, т. е. $x=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}$; иными словами, если наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ пропорциональны.

Доказанное неравенство имеет очевидную геометрическую интерпретацию. Для $n=2$; 3 оно выражает известный факт, что скалярное произведение двух векторов на плоскости и в пространстве не превосходит произведения их длин. Так же можно интерпретировать неравенство Коши-Буняковского и для произвольных n.

Из полученного неравенства можно получить следствия. Например, возьмем $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$. Будем иметь неравенство

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant\sqrt{n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}.$$

* * *

Небольшой обзор различных типов и видов задач, относящихся к теме «Квадратный трехчлен», показывает, сколь разнообразны по тематике, методам решения, уровню сложности задачи, составляющие эту тему. Многие идеи, рассмотренные в нашем обзоре, носят достаточно общий характер и с успехом могут быть использованы при решении задач, относящихся к самым различным разделам алгебры и анализа.

26. Задачи

Выделите полный квадрат в выражении (1—6).

1. $2x^2-4x+3$. **2.** $-\frac{x^2}{2}+3x+1$.

3. $4x^2-12x+9$. **4.** $(x+1)(x-3)$.

5. $(x-2)^2+x+1$. **6.** $(x-1)^2+(x-3)^2$.

Разложите на линейные множители выражение (7—10).

7. $3x^2-4x-7$. **8.** $-2x^2+x+6$.

9. $(x-2)(x-3)-4$. **10.** $(x-1)(x-3)+(x-2)(x-4)$.

Постройте график квадратного трехчлена (11—16).

11. $y=x^2-2x-3$. **12.** $y=x-x^2$.

13. $y=x^2+x+1$. **14.** $y=4x^2-12x+9$.

15. $y=-\frac{x^2}{2}+x-3$. **16.** $y=(2x+1)(3x+2)$.

17. Коэффициент при x^2 (старший коэффициент) некоторого квадратного трехчлена равен 1. Парабола, являющаяся графиком этого квадратного трехчлена, имеет вершину в точке с координатами $(m, \ -n)$, $n>0$. Найдите корни данного квадратного трехчлена.

18. Найдите коэффициенты a, b, c, если график функции $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки с координатами:

а) $(1;\ 0)$, $(-1;\ 2)$, $(2;\ 2)$;

б) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{4}{9}\right)$, $\left(-\frac{3}{17};\ \frac{9}{289}\right)$, $\left(\frac{13}{23};\ \frac{169}{529}\right)$;

в) $(0;\ 1)$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $(2;\ -3)$;

г) $(-1;\ -1)$, $(1;\ -3)$, $(-2;\ -3)$.

Постройте график функции (19—25).

19. $y=x^2+2\,|x-1|$. **20.** $y=x\,|x-1|$.

21. $y=x\,|x|+(x-1)\,|x-1|$. **22.** $y=|x^2-2\,|x-1||$.

23. $y=\frac{x^3-x}{1-|x|}$. **24.** $y=x^4-2x^2$. **25.** $y=|x+\sqrt{-x}|$.

Изобразите все точки с координатами $(x;\ y)$, удовлетворяющие неравенству (26—32).

26. $2y^2+y\geqslant x$. **27.** $x^2\leqslant y\leqslant x$.

28. $2y+x\leqslant y^2+2y\leqslant 2x+y$. **29.** $\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2x-x^2}$.

30. $|y|\leqslant|2x^2-x|$. **31.** $|y-x^2|\leqslant 1$. **32.** $|x^2+y|\leqslant y+1$.

Изобразите все точки с координатами $(x;\ y)$, для которых выполняется равенство (33—46).

33. $3x^2+5xy+y^2=0$. **34.** $|y-2x|=x^2$.

35. $|y-x|+x^2=1$. **36.** $y=|y+x^2-3x|$.

37. $|y-x|+|y-x^2|=2$. **38.** $|y-x^2|+|y+x^2|=2\ |x|$.

39. $||2x^2-y|-x-y|=2x^2+y-2$.

40. $\max(x;\ y)=\min(x^2;\ y^2)$.

41. $\max(x;\ y^2)=\min(y;\ x^2)$. **42.** $y=\min\limits_{-1\leqslant a\leqslant 1}(a^2-2ax)$.

43. $\min\limits_{x}(x^2+2xy-y^2)=\max\limits_{y}(-x^2-2xy-2y^2)$.

44. $\min\limits_{a}(|x^2-a|+|y-a|)=2$.

45. $\max\limits_{b}\min\limits_{a}(a^2-b^2-2ab+2ax+2b+y)=1$.

46. $\min\limits_{a}\max\limits_{b}(a^2-b^2-2ab+2ax+2b+y)=1$.

47. Дано изображение графика функции $y=ax^2+bx+c$ (рис. 18). Определите знаки a, b и c.

Найдите наименьшее значение функции (48—53).

48. $y=x^2-2\ |x-2|$. **49.** $y=x+\sqrt{2x-3}$.

50. $y=x-\sqrt{2x-3}$. **51.** $y=|x-1|-\sqrt{x+2}$.

52. $y=x\,(|x+1|+|x-1|)+3x^2$.

53. $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Найдите наибольшее значение функции (54—57).

54. $y=\sqrt{x+1}-x$. **55.** $y=(1-x)\ |x+2|-2x^2$.

56. $y=|x^2-2|+2x-3x^2$. **57.** $y=\frac{1}{x^2+|x-1|}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (58—59).

58. $y=2\cos^2 x+\sin x$. **59.** $y=\sin^2 x-3\cos x$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке (60—64).

60. $y=x^2+3x,\ -2\leqslant x\leqslant 1$.

61. $y=-x^2-x+2,\ 0\leqslant x\leqslant 2$.

62. $y=x^2+2\ |x-1|,\ |x|\leqslant 1$.

63. $y=3x^2+|x^2-2x-1|,\ |x|\leqslant 3$.

64. $y=|2x^2-x-1|+|x^2+x-3|, -5\leqslant x\leqslant 2$.

65. Для каких значений параметра a наименьшее значение функции $y=x^2-(a+2)\,x+a^2$ на отрезке $[-1;\ 1]$ равно 4?

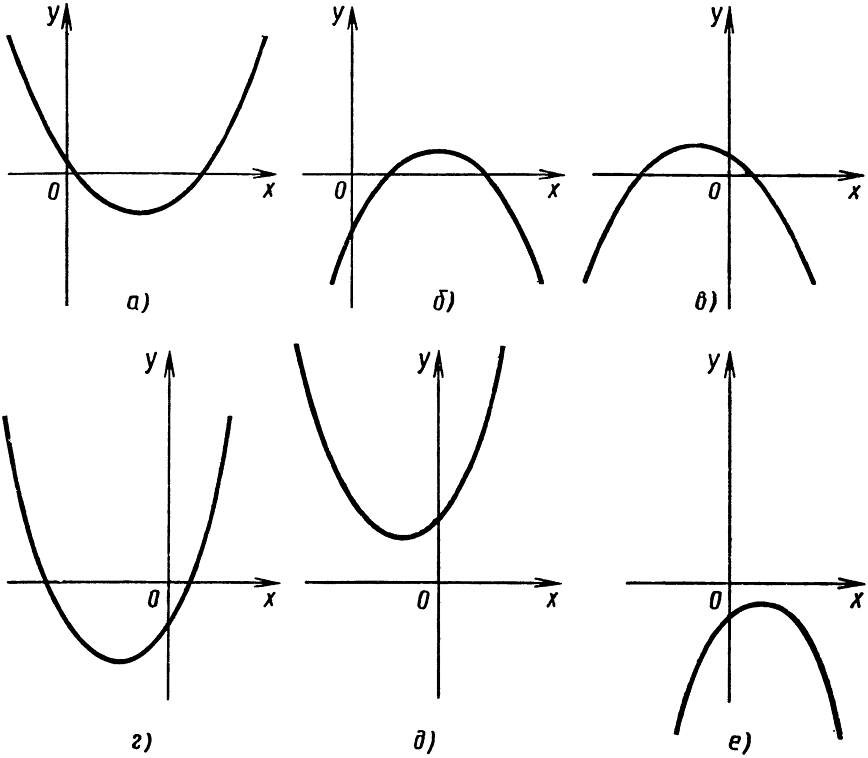


Рис. 18

66. Найдите x, при котором

$$\min_a (a^2-2ax+3x)=\max_b (-b^2+4bx-3x^2+1).$$

67. Найдите x, при котором

$$\max_b \min_a (a^2-2ab-b^2-2ax+10bx)=7.$$

68. Докажите, что при изменении a вершина параболы $y=x^2+(2a+1)x+a^2-1$ описывает прямую линию.

69. Докажите, что при изменении a вершина параболы $y=x^2-(2a+1)x+2a$ описывает параболу.

70. Найдите все значения a, при которых вершины парабол $y=x^2-2(a+1)x+1$ и $y=ax^2-x+a$ лежат по разные стороны от прямой $y=\frac{3}{4}$.

71. Найдите все значения a, при которых вершины парабол $y=x^2-2ax$ и $y=x^2-(a+3)x+1$ лежат по разные стороны от прямой $y=2x$.

72. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите: а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$; в) $\frac{1}{q-x_1}+\frac{1}{q-x_2}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}$.

73. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются: а) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$; б) x_1^2, x_2^2; в) $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1}$; г) $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$.

74. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a+2)x^2-ax-a=0$ симметричны относительно точки $x=1$?

75. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $ax^2+x-8a+4=0$ меньше 1, а произведение больше a?

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (76—77).

76. $y=2-ax-3x^2$ на отрезке $[-1; 1]$.

77. $y=2x^2-2ax+1$ на отрезке $[-1; 1]$.

Найдите наименьшее значение выражения $x_1^2+x_2^2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения (78—79). *Замечание.* Возможно равенство $x_1=x_2$.

78. $x^2-ax+2a-3=0$.

79. $x^2-2ax+a+6=0$.

80. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+x\sqrt{a-a^2+2}-2a^2+3a=0$. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x_1^2+x_2^2$ (см. замечание в предыдущем задании).

81. Найдите все значения $a\geqslant 1$, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение.

82. Даны изображения графиков двух функций (рис. 19): $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ (I парабола) и $y=a_2x^2+b_2x+c_2$ (II парабола). Определите, что больше: b_1 или b_2.

83. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат и касающейся параболы $y=x^2-x+1$.

84. Найдите уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x$ и касающейся параболы $y=3x^2+x-2$.

Найдите уравнение прямой, касающейся каждой из двух парабол (85—86).

85. $y=x^2-3x$, $y=-x^2+3x-5$.

86. $y=2x^2-3x+1$, $y=x^2+7x-6$.

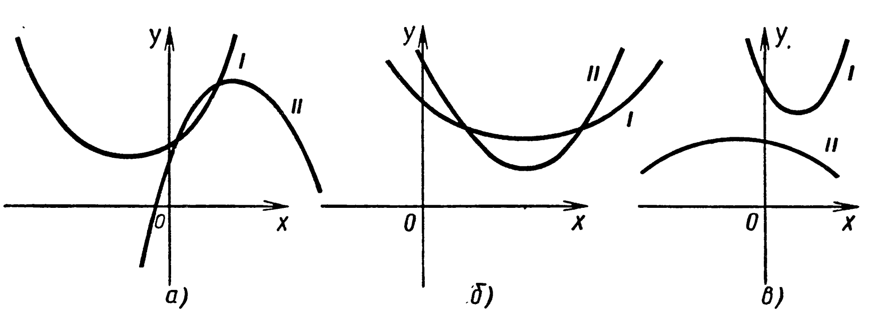


Рис. 19

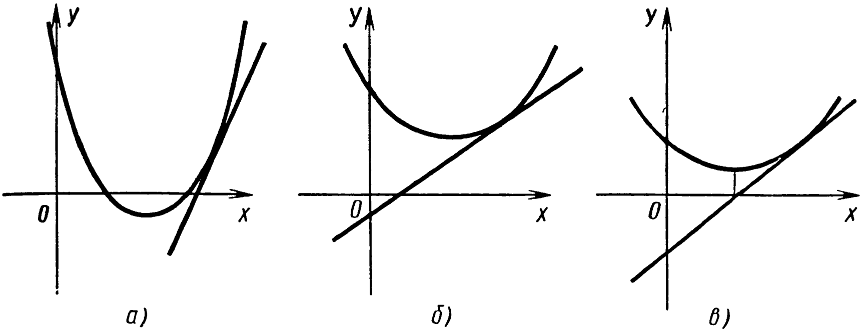


Рис. 20

87. Определите знак c, если $a+b+c<0$ и уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней.

88. Докажите, что если уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ не имеют корней, то уравнение $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ также не имеет корней.

Найдите значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение (89—90).

89. $(a-1)x^2+(a+4)x+a+7=0$.

90. $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$.

91. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$ имеет не более одного решения.

При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня? Определите знаки этих корней в зависимости от a (92—97).

92. $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.

93. $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$.

94. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

95. $x^2+2x-8=a(x-4)$.

96. $(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0$.

97. $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$.

98. Нет ли ошибки в изображениях графиков функций $y=ax^2+bx+c$ и $y=2ax+b$ (рис. 20, парабола и прямая касаются)?

99. При каких a и b числа $(a+b)$ и $(a-b)$ удовлетворяют уравнению $x^2-(b+1)x+a+b-2=0$?

100. Разложите на множители $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$.

Докажите тождество (101—104).

101. $(x-y)(xz+1)(yz+1)+(y-z)(yx+1)(zx+1)+(z-x)(zy+1)(xy+1)=(x-y)(y-z)(z-x)$.

102. $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$.

103. $c\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+a\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\,\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x.$

104. $4(x+y+z)^3-15[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2]-$ $-x(2x-y-z)^2-y(2y-z-x)^2-z(2z-x-y)^2=108xyz.$

105. Докажите, что если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два корня, то уравнения $x^2+(p+2a)x+q+ap=0$, $3x^2+2(p+a)x+$ $+q+ap=0$ также имеют различные корни при любом a.

106. Докажите, что при любом a хотя бы одно из двух уравнений $x^2-(a^2-a)x+a-2=0$, $x^2+(2-a^2)x+a^2-a-1=0$ имеет два различных корня.

Докажите, что для любых попарно неравных a, b и c уравнение имеет решение (107—108).

107. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$

108. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}=0$, $abc\neq 0.$

Докажите неравенство (109—113).

109. $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$

110. $5x^2+5y^2+5z^2\geqslant 6xy-8xz+8yz.$

111. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0).$

112. $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{2ab}.$

113. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0).$

114. Найдите все a, для которых существует такое b, что при всех c выражение $b^2-4ab+2ac-c^2-2b$ отрицательно.

115. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, $x_1<x_2$. Докажите, что если t удовлетворяет неравенствам $x_1\leqslant\frac{t^2-q}{2t+p}\leqslant x_2$, то t равно x_1 или x_2.

116. Найдите a, b и c, если известно, что любой корень уравнения $x(x-a)(x-b)=0$ удовлетворяет также уравнению $(a-1)x^2+(a+b-3)x+a+b+c=0$.

117. Известно, что для функции $f(x)=ax^2+bx+c$ выполнены неравенства $f(-3)<-5$, $f(-1)>0$, $f(1)<4$. Определите знак a.

118. Известно, что для функции $f(x)=ax^2+bx+c$ выполнены неравенства $f(-1)<1$, $f(1)>-1$, $f(3)<-4$. Определите знак a.

119. Для каких p существует q, такое, что уравнение x^2+px+ $+q=0$ имеет один корень на отрезке $[1;\ 2]$ и один корень на отрезке $[5;\ 7]$?

120. Найдите все значения a, для которых один корень уравнения $2ax^2-2x-3a-2=0$ больше 1, другой меньше 1.

121. При каких значениях a существует единственный корень уравнения $x^2-ax+2=0$, удовлетворяющий условию $1<x<3$?

122. При каких значениях a уравнение $(a-1)x^2-2ax+2-$ $-3a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $x>1$?

123. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0<x<3$?

124. При каких a уравнение $2x^2-2(2a+1)x+a(a+1)=0$ имеет два корня x_1 и x_2, $x_1<x_2$, причем $x_1<a<x_2$?

125. Сколько корней больше -1 в зависимости от параметра a имеет уравнение $x^2+(2a+6)x+4a+12=0$?

126. Сколько корней меньше 1 имеет уравнение $(1+a)x^2-3ax+4a=0$ в зависимости от a?

127. Найдите все значения параметра a, при которых все корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше $\frac{1}{2}$.

128. Найдите все значения a, при которых все корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше a.

129. При каких a все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-a=0$ расположены на отрезке $[-2; 6]$?

130. При каких a все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-2=0$ расположены на отрезке $[2; 5]$?

Сколько решений, удовлетворяющих заданным ограничениям, имеет уравнение в зависимости от a (131—135)?

131. $(2a+3)x^2+(a-1)x+4a+3=0$, $0<x<2$.

132. $4x^2-2x+a=0$, $|x|\leqslant 1$.

133. $x^2-2ax-1=0$, $|x|<2$.

134. $ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$, $0<x\leqslant 1$.

135. $(4-a)x^2-6ax+3=0$, $-1\leqslant x<3$.

136. При каких значениях a для всех x, таких, что $1<x<2$, выполняется неравенство $x^2+ax+a^2+6a<0$?

137. Найти все значения параметра a, для которых неравенство $x^2-ax+a>0$ верно при всех $|x|<1$.

138. Для каких a неравенство $(x-3a)(x+2a+1)<0$ выполняется для всех x, таких, что $1\leqslant x\leqslant 3$?

139. Для каких a неравенство $\frac{x^2+a^2}{a(x+6)}\geqslant 1$ выполняется для всех x, таких, что $-1\leqslant x\leqslant 1$?

140. При каких a неравенство $x^2+ax-7a<0$ выполняется при всех $1<x<2$?

141. При каких a, если выполняется неравенство $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$, то выполняется неравенство $x^2+4x+3<0$?

142. При каких значениях параметра a все решения неравенства $ax^2-2x-a(a^2+2)<0$ удовлетворяют также неравенству $x^2\leqslant 9$?

143. Найдите все значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ удовлетворяют условию $-4<x_1<0<x_2<4$.

Найдите все значения параметра a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения удовлетворяют условию $x_1<2$, $x_2>3$ (144—145).

144. $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$.

145. $\left(\frac{3}{2}a-2\right)x^2-2(a-3)x+4a^2=0.$

146. Изобразите на координатной плоскости все точки, координаты которых $(p;\ q)$ таковы, что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, по абсолютной величине не превосходящие 1.

147. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x-a)^2\,(a(x-a)^2-a-1)=-1$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

148. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $((x-a)^2-2a-4)\,(x-a)^2=-2a-3$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

149. Найдите все значения параметра h, при которых уравнение $x\,(x+1)\,(x+h)\,(x+1+h)=h^2$ имеет четыре корня.

150. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^4+(a-1)x^3+x^2+(a-1)x+1=0$ имеет не менее двух отрицательных корней.

151. Существуют ли такие a, что оба корня уравнения $a^2x^2-2a\,(2a+1)x+1-16a^2=0$ лежат между 0 и 1?

152. Для каких a уравнение $\frac{x}{(1+x)^2}+2a\frac{\sqrt{x}}{1+x}+1=0$ имеет решение?

Решите уравнение (153—164).

153. $(x+1)\,|x-1|=a.$

154. $x|x-4|+a=0.$

155. $x|x+1|+a=0.$

156. $\sqrt{2x+1}=x-a.$

157. $\sqrt{2ax-1}=x-1.$

158. $x+\sqrt{x}=a.$

159. $\sqrt{2x}-\sqrt{x-1}=a.$

160. $\sqrt{2x+2-\sqrt{x-2}}=a.$

161. $x+\sqrt{x(a-x)}=1.$

162. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a.$

163. $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a.$

164. $\sqrt{2x^2+(a-2)x-a^2-1}=x-1.$

165. При каких a уравнение $\sqrt{x+3}=2x-a$ имеет единственный корень?

166. При каких a уравнение $\sqrt{x+2a+1}=a+\frac{x}{4}$ имеет два корня?

167. При каких a уравнение $\sqrt{2x-3}=a-3x$ не имеет решений?

168. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2-1|=2x-x^2+a$ имеет единственное решение?

Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение (169—171)?

169. $ax^2+|x-1|=0.$

170. $x^2+a|x-2|=0.$

171. $x^2+2|x-a|=5.$

172. При каких a уравнение $|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$ имеет более трех решений?

173. Найдите все значения a, при которых уравнение $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$ имеет один корень.

174. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2),$$

и найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственный корень.

175. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $(x+2)(x+4)+5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}-(a+2)(a-3)=0$, и найдите все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень.

176. Определите все значения параметра a, для которых уравнение $x|x-2a|-1-a=0$ имеет единственное решение.

177. Определите все значения параметра a, для которых уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ имеет два решения.

178. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$

179. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$$

При каких значениях a неравенство выполняется при любых значениях x (180—183)?

180. $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$.

181. $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$.

182. $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$. **183.** $\left|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$.

Решите неравенство (184—191).

184. $x^2+ax+a>0$. **185.** $x^2+2x+a<0$.

186. $x^2+ax+1>0$. **187.** $2|x-a|<2ax-x^2-2$.

188. $x^2+2ax+1>a|x+a|$. **189.** $\frac{2a}{x}-\frac{1}{x-1}>1$.

190. $\sqrt{2x+a}\geqslant x$. **191.** $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

192. При каких a при всех $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$ выполняется неравенство $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$?

193. Докажите, что если $a>0$ и для какого-то x, удовлетворяющего условиям $a \leqslant x \leqslant 2a$, выполняется неравенство $x^2 + 2(2a-1)(a-x) - 4 > 0$, то $a > 2$.

194. Найдите все x, при которых для всех $|a| \leqslant 2$ выполняется неравенство $\frac{ax^2-3-x}{25+8ax^2} < 0$.

195. Найдите все значения a, при которых неравенство $3 - |x-a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

196. Найдите все значения a, при которых неравенство $|x+a| + x^2 < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

197. При каком значении параметра a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

198. При каких значениях параметра a уравнения $3ax^2 - 5x + 2a = 0$ и $2x^2 + ax - 3 = 0$ имеют общий корень?

199. При каком значении параметра a один из корней уравнения $x^2 - 5x + a = 0$ будет вдвое больше одного из корней уравнения $x^2 - 7x + 2a = 0$?

200. Известно, что уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ имеют общий корень. Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы два оставшихся корня данных уравнений.

201. Даны два уравнения $x^2 + 2x + a = 0$, $(1+a)(x^2+2x+a) - 2(a-1)(x^2+1) = 0$. Докажите, что если одно из этих уравнений не имеет решения, то другое имеет решение.

Для всех $a \geqslant 0$ решите неравенство (202—204).

202. $4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geqslant 0$.

203. $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geqslant 0$.

204. $x^4 + ax^3 + a^4x - a^6 \leqslant 0$.

205. Для всех значений параметра a решите неравенство

$$2x^2 + x - a - 8 \leqslant |x^2 + 2x - 2a - 4|.$$

206. Среди точек плоскости, координаты которых $(x;\ y)$ удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - 2x \geqslant 0, \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y \geqslant 0, \end{cases}$$

найдите точку с наибольшей ординатой в зависимости от a. При каком a эта ордината будет наибольшей?

207. При каких значениях a каждое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет содержаться среди решений неравенства $ax^2 - (3a+1)x + 3 \geqslant 0$?

208. Для каких a любое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше любого решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geqslant 0$?

209. Для каких a любое решение неравенства $x^2 - (a-1)x + 1 + a < 0$ меньше, чем любое решение неравенства $x^2 - (a+1)x + 3a + 1 \leqslant 0$? (Предполагается, что каждое из неравенств имеет решение.)

210. При каких a множество решений неравенства $x^2 - (a+1)ax + a^3 \leqslant 0$ содержит не менее пяти целых значений x?

211. При каких a множество решений неравенства $x(x-4)+a^2(a+4)\leqslant ax(a+1)$ содержит не более четырех целых значений x?

Найдите наибольшее и наименьшее значение функций (212—214).

212. $y=\frac{2x+1}{x^2-x+1}$. **213.** $y=\frac{-x^2+2x-1}{6x^2-7x+3}$. **214.** $y=\frac{x}{x^2+|x-1|}$.

215. При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y=\frac{x^2+a}{4(x^2-x+1)}$ равно наименьшему значению функции $y=\frac{x^2+\sqrt{3}x+2a}{x^2+1}$?

216. Найдите все значения параметра a, удовлетворяющие условию $-1<a<1$, для каждого из которых выражение $1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$ принимает наименьшее значение только для одной пары x, y.

217. Найдите наибольшее значение выражения $x+2y$, если x, y отрицательны и удовлетворяют неравенству $x^2-4xy+y^2+3\leqslant 0$.

218. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать $x+2y$, если $3x^2-2xy+4y^2\leqslant 5$.

219. Найдите наибольшее значение $3x+2y$, если x и y неположительны и $2x^2-xy+3y^2\leqslant 4$.

220. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать выражение $2x^2+3xy+4y^2$, если $x^2-xy+2y^2=3$.

221. Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение $2x^2-2xy+y^2$, если $x^2-2xy-3y^2=4$.

222. При каких a неравенство $\frac{x-3}{ax^2-4x+a-3}<1$ выполняется при всех x?

223. При каких a неравенство $x^2-|x-a|-|x-1|+3\geqslant 0$ выполняется при всех x?

224. При каких a неравенство $x^2+x+|x-a|+\frac{2}{9}\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

225. Найдите все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции $y=x^2+|x-a|+|x-1|$ больше 2.

226. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $y=ax+|x^2-4x+3|$ больше 1.

227. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $y=3|x-a|+|x^2+x-2|$ меньше 2.

228. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $y=x^2+2|x+a-1|+(a+1)^2$ меньше 3.

229. Докажите, что кривая $y=-x^2-4x-2$ не пересекается с прямой $y=2x+12$. Найдите расстояние между их ближайшими точками.

230. Найдите кратчайшее расстояние от точек параболы $y=x^2-8x+16$ до прямой $y=-2x+1$.

231. Найдите все x, которые являются корнем хотя бы одного уравнения вида $x^2+px+q=0$, где $|p|\leqslant 1$, $|q|\leqslant 1$.

232. Найдите все такие q, что для любого p уравнение $x^2+px+q=0$ имеет хотя бы один корень.

Расположите по порядку в зависимости от a корни уравнений (233—235).

233. $x^2+\frac{3x}{a}+2a=0$ и $x^2+\frac{12x}{a}-a=0$.

234. $x^2+4x+2a=0$ и $x^2+3x+3a=0$.

235. $x^2-4ax-5a^2=0$ и $x^2-2ax-1=0$.

236. При каких a для любого x выполняется хотя бы одно из двух неравенств $x^2+5a^2+8a>2(3ax+2)$, $x^2+4a^2\geqslant a(4x+1)$?

237. При каких a существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее наравенствам $x>1$, $3-|x-a|>x^2$?

Найдите все значения параметра a, при которых не существует ни одного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам (238—239).

238. $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3)\geqslant 0, \\ ax\geqslant 4. \end{cases}$

239. $\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geqslant 0, \\ ax\geqslant a^2-2. \end{cases}$

240. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} y\geqslant x^2+a, \\ x\geqslant y^2+a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решите систему неравенств (241—242).

241. $\begin{cases} x^2+4x+3+a<0, \\ 2x+a+6>0. \end{cases}$ **242.** $\begin{cases} x^2-x-2+a\leqslant 0, \\ x^2-2x-3+2a>0. \end{cases}$

243. Найдите все значения a, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+2x+a\leqslant 0, \\ x^2-4x-6a\leqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

244. Найдите все значения a, при которых решения системы неравенств $\begin{cases} x^2-2x\leqslant a-1, \\ x^2-4x\leqslant 1-4a \end{cases}$ образуют на числовой оси отрезок длины единицы.

245. Найдите все значения a, при которых решения системы неравенств $\begin{cases} x^2+6x+7+a\leqslant 0, \\ x^2+4x+7\leqslant 4a \end{cases}$ образуют на числовой оси отрезок длины единицы.

246. Числа r, s, t таковы, что $r<s<t$. Кроме того, известно, что если любое из них подставить вместо y в равенство $x^2-(9-y)x+y^2-9y+15=0$, то по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Докажите, что $-1<r<1$.

247. Числа a, b, c таковы, что $a<b<c$. Кроме того, известно, что если любое из них подставить вместо y в равенство $x^2-\frac{3y-1}{y^2}x+\frac{1}{y}=0$, то по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Докажите, что $-2<b<0$.

248. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geqslant \frac{1-a}{1+a} \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$ имеет решение.

249. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2 \geqslant 3, \\ 7x^2+4xy+2y^2 \leqslant \frac{2a-1}{2a+5} \end{cases}$ имеет решение.

250. Для каких p существует q, такое, что $|x^2+px+q| \leqslant 1$, если $|x| \leqslant 1$?

251. Докажите, что на отрезке $[-1;\ 1]$ наибольшее значение функции $y=|x^2+px+q|$ не меньше чем $\frac{1}{2}$. Для каких p и q наибольшее значение этой функции равно $\frac{1}{2}$?

252. Пусть $f(x)=x^2-2$. Докажите, что уравнение $f(f(f(x)))=x$ имеет восемь корней.

§ 6. ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Натуральные числа, целые, рациональные, действительные — в такой или примерно такой последовательности расширяли мы в школе свое знание о числе, расширяли само понятие «число». Попробуем сейчас отметить основные вехи пройденного пути, напомнить некоторые определения и свойства, рассмотреть различные задачи, и прежде всего те задачи, что остались в свое время вне нашего поля зрения, поскольку появиться в школьном курсе в момент изучения соответствующего программного материала эти задачи не могли из-за недостаточного еще математического развития учащихся.

27. Натуральные и целые числа

Мы не будем давать строгой аксиоматической теории натурального ряда. Ограничимся напоминанием основных определений, свойств и теорем на уровне «здравого смысла».

Последовательность чисел 1, 2, 3,... образует натуральный ряд. Числа этой последовательности можно попарно складывать и перемножать. В результате всегда получаем натуральное число. Мы говорим, что натуральное число b является делителем натурального числа a (или что число a кратно числу b), если существует натуральное число q, такое, что имеет место равенство $a=bq$ (a — делимое, b — делитель, q — частное). Таким образом, любое натуральное число делится само на себя и на 1. Все натуральные числа больше 1 разбиваются на два множества (класса) — простые и составные. Простые числа не имеют делителей, отличных от двух перечисленных (само число и 1). Составные имеют.

Основная теорема арифметики утверждает: «Любое натуральное число, большее 1, можно представить в виде произведения простых чисел (не обязательно различных), и притом единственным (с точностью до порядка сомножителей) образом».

Напомним еще два понятия арифметики: наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК). Обратим внимание на одну забавную лингвистическую особенность. Каждое из этих понятий само себя определяет. (Наибольшим общим делителем двух или более натуральных чисел называется их ... наибольший общий делитель.)

В школе изучаются методы нахождения НОД и НОК, основанные на разложении натуральных чисел на простые множители. Суть в следующем. Пусть нам надо найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b — НОД $(a;\ b)$ и НОК $(a;\ b)$. Разложим каждое из данных чисел на простые множители. Если простое число p входит в одно разложение k раз (в степени k), а в другое — m раз и $k \leqslant m$, то это p входит в разложение на простые множители НОД $(a;\ b)$ в степени k, а в разложении на простые множители НОК $(a;\ b)$ — в степени m.

Так, например, если $a=252=2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $b=528=2^4 \cdot 3 \cdot 11$, то НОД $(a;\ b)=2^2 \cdot 3=12$, НОК $(a;\ b)=2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11=1188$.

Рассмотренные методы обобщаются на произвольное число натуральных чисел. Простое число p входит в разложение на простые множители НОД $(a;\ b;\ c;...)$ в степени, равной наименьшей из степеней, в которых оно входит в разложение на простые множители чисел a, b, c, ..., а в НОК $(a;\ b;\ c;...)$ это p входит соответственно в наибольшей степени. Если НОД $(a;\ b)=1$, то a и b называются взаимно простыми.

Другой способ нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, так называемый алгоритм Евклида, менее известен в школе. Однако этот алгоритм играет очень важную роль в самых различных математических теориях. В основе его лежит «деление с остатком». Прежде чем напомнить о том, что значит деление с остатком, удобно для большей общности добавить к натуральному ряду число 0 и множество целых отрицательных чисел — получить совокупность целых чисел. (Заметим, что на множестве целых чисел определена еще одна арифметическая операция — вычитание. Раньше мы могли вычитать лишь из большего меньшее.) Пусть теперь a — произвольное целое число, b — натуральное. Разделить a на b с остатком — это значит найти такие целые числа q и r, $0 \leqslant r < b$, что выполняется равенство $a=bq+r$ (a — делимое, b — делитель, q — частное или неполное частное, r — остаток). Легко методом от противного доказывается единственность такого представления для заданных a и b. Обратим внимание на то, что a — целое, не обязательно натуральное. Например, если $a=-17$, $b=7$, то $-17=7(-3)+4$ ($q=-3$, $r=4$).

Вернемся к задаче нахождения НОД $(a;\ b)$, пусть $a>b$. Нам удобнее обозначить остаток от деления a на b через r_1, поскольку затем появятся r_2, r_3, ... Имеем $a=bq_1+r_1$. Очевидно, любой общий делитель a и b является также делителем и r_1. Любой общий делитель b и r_1 является делителем a. Таким образом, у пар $(a;\ b)$ и $(b;\ r_1)$ одинаковые общие делители и, следовательно, НОД $(a;\ b)=$НОД $(b;\ r_1)$. Разделив затем с остатком b на r_1, найдем r_2, НОД $(b;\ r_1)=$НОД $(r_1;\ r_2)$. Затем делим r_1 на r_2, находим r_3, НОД $(r_1; r_2)=$ НОД $(r_2; r_3)$ и т. д. Получаем убывающую последовательность натуральных чисел $a, b, r_1, r_2, \ldots$.

Эта последовательность конечна. Пусть r_k — последний, отличный от нуля остаток. Тогда НОД $(a; b)=r_k$. В самом деле, любая пара соседних чисел нашей последовательности имеет один и тот же НОД, а для последней пары НОД $(r_{k-1}; r_k)=r_k$, поскольку r_{k-1} делится на r_k.

Например, найдем НОД (5083; 3553). Алгоритм Евклида приводит нас к последовательности (вычисления опускаем) 5083, 3553, 1530, 493, 51, 34, 17, 0. Последний, отличный от нуля остаток 17, следовательно, НОД (5083; 3553) $=17$.

Вернемся к делению с остатком. В практике конкурсного экзамена, в основном, правда, устного, встречаются задачи типа «найти остаток от деления на ...». Прежде чем рассмотреть примеры, построим небольшую теорию, благо все предпосылки к этому уже созданы. Если два целых числа a и b при делении на m имеют равные остатки, то мы для краткости (и для удобства) будем это записывать в виде $a\equiv b\ (m)$. Эта запись так и читается: a при делении на m дает такой же остаток, как и b при делении на m. (В математической литературе принята запись $a\equiv b \pmod m$, которая несколько иначе читается, хотя означает то же самое.) Поскольку 0 делится на любое натуральное число, то запись $a\equiv 0\ (m)$ означает, что a делится на m. Очевидно, что записи $a\equiv b\ (m)$ и $(a-b)\equiv 0\ (m)$ означают одно и то же, эквивалентны.

Имеют место следующие два свойства: если $a\equiv b\ (m)$ и $c\equiv d\ (m)$, то

$$1)\ a+c\equiv b+d\ (m);\ 2)\ ac\equiv bd\ (m).$$

Оба свойства достаточно очевидны. Докажем второе. Нам надо доказать, что $ac-bd\equiv 0\ (m)$, т. е. что $ac-bd$ делится на m. Имеем $ac-bd=(a-b)c-b(d-c)\equiv 0\ (m)$, поскольку по условию $a-b$ и $d-c$ делятся на m.

Следствие. Если $a\equiv b\ (m)$, то $a^k\equiv b^k\ (m)$ при всех натуральных k.

Решим теперь задачу.

1. *Найти остаток от деления на 17 числа 201^{1989}.*

Р е ш е н и е. (Для краткости будем пользоваться записью вида $a\equiv b\equiv c\equiv \ldots \equiv d\ (m)$, означающей, что при делении на m число a дает тот же остаток, что и b; b — такой же остаток, что и c, и т. д., т. е. все числа $a, b, c, \ldots, d$ дают одинаковые остатки при делении на m.)

$$201\equiv -3\ (17),\ 201^2\equiv 9\ (17),\ 201^3\equiv -3\cdot 9\equiv 7\ (17),$$
$$201^4\equiv -3\cdot 7\equiv -4\ (17),\ 201^8\equiv 16\equiv -1\ (17),\ 201^{16}\equiv 1\ (17).$$

Следовательно, при любом натуральном k будет

$$201^{16k}\equiv 1\ (17).$$

Но $1989=16\cdot 124+5$. Значит,

$$201^{1989}=201^{16\cdot 124}\cdot 201^5\equiv 201^5=201^4\cdot 201\equiv 12\ (17).$$

Ответ. Остаток равен 12.

Обратим внимание на характерный момент. Мы нашли показатель степени, при возведении в которую получается число, дающее при делении на 17 в остатке 1 ($201^{16}\equiv 1\ (17)$). С другой стороны, мы показали, что числа 201^k при делении на 17 дают остатки, которые периодически повторяются с периодом $16: 201^{k+16}\equiv 201^k\ (17)$.

Прежде чем продолжить рассмотрение примеров, еще раз подчеркнем, что введенная запись преследует единственную цель — сокращение записи. Если угодно, это просто стенографический знак, заменяющий соответствующий словесный оборот.

28. Решение уравнений в целых числах

Рассмотрим несколько типичных уравнений, в которых требуется либо найти целочисленные решения, либо доказать отсутствие таковых.

2. *Найти все целочисленные решения уравнения* $3x^2+4xy-7y^2=13$.

Р е ш е н и е. Разложим левую часть на множители:

$$3x^2+4xy-7y^2=(x-y)(3x+7y).$$

Имеем $(x-y)(3x+7y)=13$. Поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами ($13=1\cdot 13=13\cdot 1=(-1)(-13)=(-13)\cdot(-1)$), то получаем четыре системы:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 3x+7y=13, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=13, \\ 3x+7y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ 3x+7y=-13, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-13, \\ 3x+7y=-1. \end{cases}$$

Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.

Ответ. $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$.

3. *Решить в целых числах уравнение* $2x^2-2xy+9x+y=2$.

Р е ш е н и е. Выразим y через x: $y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}$. Преобразуем полученную дробь (с этим приемом мы встречались в § 1, задача 2, с. 15):

$$y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}=\frac{2x^2-x+10x-5+3}{2x-1}=x+5+\frac{3}{2x-1}.$$

Поскольку y и x — целые, то $\frac{3}{2x-1}$ должно быть целым числом.

Имеем четыре возможности: 1) $2x-1=1$; 2) $2x-1=3$; 3) $2x-1=-1$; 4) $2x-1=-3$. Затем находим x и y.

Ответ. $(1;\ 9)$; $(2;\ 8)$; $(0;\ 2)$; $(-1;\ 3)$.

4. *Найти целочисленные решения уравнения* $113x+179y=17$, *удовлетворяющие неравенствам* $x>0$, $y>-100$.

Решение. Воспользуемся методом, сходным с алгоритмом Евклида. Имеем $179=113+66$. Перепишем наше уравнение в виде

$$113(x+y)+66y=17.$$

Обозначим $x+y=u$, $113u+66y=17$. Как видим, у нового уравнения один из коэффициентов уменьшился. Можно вновь 113 разделить на 66 с остатком, а лучше так: $113=2\cdot 66-19$. Получаем

$$66(2u+y)-19u=17.$$

Обозначим $2u+y=v$, $66v-19u=17$, $66=19\cdot 3+9$. Получаем уравнение

$$19(3v-u)+9v=17,\ 3v-u=w;$$
$$19w+9v=17,\ 9(2w+v)+w=17,\ 2w+v=t.$$

Наконец, получаем уравнение $9t+w=17$. Это уравнение имеет очевидное решение: $w=17-9t$, где t — любое целое число.

Двинулись в обратный путь: $v=t-2w=t-34+18t=19t-34$, $u=3v-w=66t-119$, $y=v-2u=-113t+204$, $x=u-y=179t-323$.

Таким образом, $x=179t-323$, $y=-113t+204$, где t — произвольное целое. Из условия $x>0$, $y>-100$ найдем $t=2$, $x=35$, $y=-22$.

Ответ. 35; -22.

Рассмотрим еще два уравнения. Советуем разобрать и запомнить приемы, используемые при их решении. Они достаточно часто применяются. (Здесь мы имеем в виду скорее подготовку к математической олимпиаде, чем к конкурсному экзамену.)

5. *Найти натуральные* x *и* y, *для которых выполняется равенство* $2^x-15=y^2$.

Решение. Рассмотрим два случая. 1) $x=2k+1$ (x — нечетное число). Поскольку 2^2 при делении на 3 дает в остатке 1, то 2^{2k+1} при делении на 3 дает в остатке 2 ($2^{2k+1}=(2^2)^k\cdot 2\equiv 1\times 2\ (3)=2$), 15 делится на 3. Следовательно, y^2 не делится на 3. Но квадрат числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 в остатке 1. (Докажите и запомните.) Таким образом, равенство невозможно (левая и правая части дают при делении на 3 разные остатки).

2) $x=2k$. Тогда $2^{2k}-y^2=15$, откуда $(2^k-y)(2^k+y)=15$. Оба множителя слева целые и положительные (так как второй множитель положителен), второй больше первого. Возможны два варианта:

$$2^k-y=1,\ 2^k+y=15 \text{ и } 2^k-y=3,\ 2^k+y=5.$$

Ответ. (4; 1); (6; 7).

6. *Найти натуральные числа x и y, для которых выполняется равенство* $x^4+x^3+x^2+x+1=y^2$.

Решение. Представим левую часть в виде $\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{5}{8}x+\frac{55}{64}$. (Мы не смогли выделить полный квадрат — это было бы слишком хорошо, но зато сумели его «почти» выделить.) Умножая обе части на 64, получаем равенство

$$(8x^2+4x+3)^2+40x+55=(8y)^2.$$

Таким образом, $8y>8x^2+4x+3$, $2y\geqslant 2x^2+x+1$. Умножим обе части исходного равенства на 4, а затем, воспользуясь тем, что

$$4y^2\geqslant(2x^2+x+1)^2=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1,$$

будем иметь

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4\geqslant 4x^4+4x^3+5x^2+2x+1,$$

или $x^2-2x-3\leqslant 0$, откуда $x\leqslant 3$. Осталось проверить для x значения 1, 2, 3.

Ответ. $x=3$, $y=11$.

29. Рациональные, иррациональные и действительные числа

Добавляя к целым числам дробные, мы получаем класс рациональных чисел. Напомним, что рациональными называются числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Целые числа в смысле данного определения можно рассматривать в виде дроби со знаменателем, равным 1. (Здесь возникают забавные логические нюансы и даже противоречие — порочный круг, избавиться от которого, не выходя за рамки нашего курса, затруднительно. И еще одно замечание. Исторически развитие понятия числа происходило в иной последовательности: натуральные числа, дробные положительные и лишь затем отрицательные числа. Как правило, этот путь принят и в школе.)

На множестве рациональных чисел определена еще одна операция — деление. Для любых двух рациональных чисел a и b при условии $b\neq 0$ существует рациональное число $a:b$.

И наконец, последний шаг — пополнение множества рациональных чисел иррациональными. В результате получаем совокупность действительных чисел, заполняющих так называемую числовую прямую. (Заметим, что с понятиями «действительное число», «числовая ось» дело обстоит не так просто, как мы здесь представили. Человечеству понадобилось не одно столетие, чтобы открыть эти понятия, после чего прошло еще немало времени, прежде чем была создана строгая теория действительных чисел.) Напомним, что геометрическая прямая становится числовой, если на ней выделены две точки, одна из которых называется (соответствует) 0, другая 1. Теперь по известному правилу устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами.

Итак, для каждого действительного числа выполняется альтернатива: это число или рационально или иррационально (т. е. нерационально). Конечно, сформулированное утверждение выглядит несколько наивно, чтобы не сказать больше. Тем не менее известный смысл в том, чтобы его выделить, имеется.

Один из наиболее распространенных типов задач, которые следует рассмотреть в связи с данной темой, заключается в доказательстве иррациональности данного числа. Здесь полезной может быть следующая теорема: «При любых натуральных N и k число $\sqrt[k]{N}$ является или целым или иррациональным».

Иными словами, если $\sqrt[k]{N}$ не извлекается нацело, то $\sqrt[k]{N}$ — иррациональное число. Данная теорема является частным случаем теоремы о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами (см. §1, с. 25). Для этого достаточно применить эту теорему к уравнению $x^k-N=0$. Тем не менее мы дадим еще одно доказательство.

Предположим противное. Пусть $\sqrt[k]{N}=\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q\neq 1$. Возводя это равенство в степень k, получим $N=\frac{p^k}{q^k}$. Но сократимая дробь в любой степени остается несократимой. Получилось противоречие: N равно несократимой дроби со знаменателем, не равным 1.

Рассмотрим несколько задач на эту тему.

7. *Доказать иррациональность числа* $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Р е ш е н и е. Предположим противное: $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=r$, где r — рациональное число. Тогда $\sqrt[3]{3}=r-\sqrt{2}$. Возведем это равенство в куб: $3=r^3-3\sqrt{2}r^2+6r-2\sqrt{2}$, откуда

$$\sqrt{2}=\frac{r^3+6r-3}{3r^2+2}.$$

Получилось, что $\sqrt{2}$ равняется рациональному числу. Противоречие.

8. *Найти все рациональные x и y, удовлетворяющие уравнению*

$$y^2=x^2-2x+3.$$

Р е ш е н и е. Обозначим $y-x=r$, r — рациональное, $y=x+r$. Заменяя y через x и r, получим $2rx+r^2=3-2x$, откуда

$$x=\frac{3-r^2}{2(r+1)}.$$

Значит,
$$y=\frac{3+r^2+2r}{2(r+1)},$$
где r — произвольное рациональное, $r \neq -1$.

Еще один часто встречающийся тип задач — сравнение чисел.

9. *Сравнить, что больше:* $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ *или* $\sqrt{3}+\sqrt{17}$, *не пользуясь микрокалькулятором.*

Мы не станем здесь обсуждать, сколь современно выглядят сегодня задачи подобного типа. Ограничимся одним, возможно, и не самым существенным аргументом. Даже в век воздушных лайнеров остаются любители пеших походов, польза которых ни у кого не вызывает сомнений.

Решая подобного рода задачи, необходимо иметь в виду, что знак $\approx$ (приближенного равенства) сам по себе математически бессмыслен. Его можно формализовать, если считать, что истинное значение отличается от написанного не более чем на 1 единицу (или 1 / 2 единицы) последнего десятичного знака записи.

Обычно в задачах, в которых надо сравнить два числа, поступают следующим образом. В процессе решения на черновике между сравниваемыми числами ставится знак $\vee$ (знак сравнения — знак неравенства, обращенный острым концом вниз, свидетельствующий о нашем незнании, в какую сторону его следует направить) до тех пор, пока не выяснится, что больше. Затем этот знак заменяется на нужное неравенство, и на чистовике решение начинается со слов «Докажем, что ... больше, чем ...».

Решение. Будем решать нашу задачу, пользуясь знаком $\vee$, как на черновике. Имеем $\sqrt{7}+\sqrt{10} \vee \sqrt{3}+\sqrt{17}$. Возводим обе части в квадрат, уединяем один корень, вновь возводим в квадрат и т. д.:
$$17+2\sqrt{70} \vee 20+2\sqrt{51};\ 2\sqrt{70} \vee 3+2\sqrt{51},$$
$$280 \vee 213+12\sqrt{51},\ 67 \vee 12\sqrt{51}.$$
Здесь очевидно, что $67<12\cdot 7<12\sqrt{51}$. Следовательно,
$$\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{17}.$$

10. *Сравнить, что больше:* $\sqrt[3]{413}$ *или* $6+\sqrt[3]{3}$.

Решение. Оставив за кадром эвристические* соображения, докажем, что $\sqrt[3]{413}>6+\sqrt[3]{3}$. Возведя обе части в куб и упростив, получим $97>54\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}$. Докажем, что $54\sqrt[3]{3}<78$, $9\sqrt[3]{9}<19$. В самом деле, после сокращения первого неравенства на 6 и возведения в куб получим очевидное неравенство $2187<2197$. Второе неравенство таким же образом приводится к $6561<6859$.

* Слово «эвристика» происходит от греческого «нахожу». (Вспомните восклицание Архимеда: «Эврика!»)

30. Метод полной математической индукции

Одним из самых универсальных методов доказательств математических утверждений, в которых фигурируют слова «для произвольного натурального n» (возможно, явно не высказанное), является метод полной математической индукции.

Доказательство при помощи этого метода всегда состоит из двух этапов: начало индукции и индуктивный переход. В простейшем варианте это выглядит следующим образом.

1) Начало индукции. Доказывается (проверяется), что сформулированное утверждение выполняется при $n=1$.

2) Индуктивный переход. Доказывается теорема, что если сформулированное утверждение выполняется для n (при этом справедливость утверждения для n иногда называют «предположением индукции»), то оно выполняется и для $n+1$. В некоторых случаях для начала индукции приходится проверять несколько начальных значений. Можно также в качестве предположения индукции считать, что утверждение выполняется для всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Бывают и более сложные модификации.

Таким образом, начав с $n=1$, мы на основании доказанного индуктивного перехода получаем справедливость доказываемого утверждения для $n=2, 3, \ldots$, т. е. для любого n.

Рассмотрим несколько примеров.

11. *Доказать, что при любом натуральном n число $3^{2n+1}+$ $+2^{n+2}$ делится на 7.*

Доказательство. Обозначим $a_n=3^{2n+1}+2^{n+2}$.

1) Начало индукции. Если $n=1$, то $a_1=35$ делится на 7. (Впрочем, начать здесь можно было и с $n=0$.)

2) Индуктивный переход. Пусть a_n делится на 7. (Предположение индукции.) Имеем

$$a_{n+1}=3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^{2n+1}\cdot 9+2^{n+2}\cdot 2=$$
$$=(3^{2n+1}+2^{n+2})9-7\cdot 2^{n+2}=9a_n-7\cdot 2^{n+2}.$$

Последнее число делится на 7, так как представляет собой разность двух целых чисел, делящихся на 7.

12. *Доказать равенство* $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказательство. 1) Начало индукции. При $n=1$ равенство очевидно.

2) Индуктивный переход. Пусть равенство имеет место при некотором n. Тогда

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$
$$=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство справедливо и при $n+1$, поскольку $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ получается из $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ заменой n на $n+1$.

13. *Доказать, что при всех натуральных n выполняется неравенство* $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства через a_n.

1) Начало индукции. Справедливость неравенства при $n=1$ очевидна.

2) Индуктивный переход. Пусть $a_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Нам надо доказать, что

$$a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}=\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

А поскольку

$$a_{n+1}=a_n\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2},$$

то нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Возведя это неравенство в квадрат и упрощая, приходим к неравенству $n\geqslant 0$.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний.

1. Во всех рассмотренных примерах формулировалось утверждение, которое следовало доказать. Нередки задачи, в которых необходимо найти данное выражение и т. п. Например, вместо того чтобы доказывать формулу, по которой можно вычислить сумму квадратов натурального ряда (задача 12), надо было бы найти, чему равна эта сумма. Тогда, если бы мы хотели воспользоваться методом полной математической индукции, сначала надо было бы на основании нескольких начальных наблюдений выдвинуть гипотезу, а затем уже доказывать ее. Бесспорно, найти правильную гипотезу достаточно быстро, а тем более с первого раза удается не всегда. Требуется известный опыт.

2. На основании результата задачи 13 мы легко докажем неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

С другой стороны, при доказательстве конкретного числового неравенства с большим числом входящих в него элементов очень часто полезно бывает найти оценку для произвольного n при помощи метода полной математической индукции, а затем использовать этот результат для конкретного n.

3. Обратим внимание на часто встречающийся парадокс индукции: доказательство более сильного утверждения осуществляется проще, чем доказательство более слабого. Так, например, если бы мы хотели доказать более слабое, чем в задаче 13, неравенство, заменив правую часть на $\frac{1}{\sqrt{3n}}$, то мы испытали бы существенно большие затруднения на втором этапе — индуктивном переходе. Во всяком случае, можно утверждать, что из неравенства $a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n}}$ не следует неравенство $a_n \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+3}}$. (Проверьте.)

4. Бывают случаи, когда в качестве начального значения следует взять не 1, а большее значение. Полезно также бывает проверить, «работает» ли индукционный переход на первом шаге. В качестве предостережения школьникам, начинающим изучать метод полной математической индукции, приведем «доказательство» следующей «теоремы»: «Любые n чисел равны между собой». При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором n. Возьмем $n+1$ произвольных чисел. По предположению индукции первые n чисел равны между собой. Точно так же равны последние n чисел. Следовательно (!), все $n+1$ чисел равны между собой.

31. Числовые последовательности. Суммирование последовательностей

Последовательность есть функция натурального аргумента, т. е. функция, областью определения которой является множество натуральных чисел. Обычно член последовательности, соответствующий значению n, записывают как a_n (или b_n, c_n, ... и т. п.).

Последовательность может задаваться непосредственно в виде функции от n. Например, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}$. Очень часто мы встречаемся с последовательностями, задаваемыми (определяемыми) рекуррентным соотношением, т. е. соотношением, выражающим зависимость a_{n+1} от предыдущих значений: a_n, a_{n-1}, ... — и конечным набором начальных значений последовательности: a_1, a_2, ..., a_k.

Именно так определяются в школе арифметическая и геометрическая прогрессии. (Для арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$, для геометрической $a_{n+1} = qa_n$. Для обеих, кроме того, задается a_1.)

Типичной задачей для последовательностей, заданных рекуррентным соотношением, является задача нахождения формулы, выражающей n-й член как функцию от n.

14. *Определить общий член последовательности, заданной соотношением $a_{n+1}=a_n+n$, если $a_1=0$.*

Решение. Данная последовательность есть последовательность сумм натурального ряда:

$$a_{n+1}=a_n+n=a_{n-1}+n-1+n=\ldots=$$
$$=n+(n-1)+\ldots+3+2+1=\frac{(n+1)\,n}{2}.$$

Ответ. $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

Рекуррентные последовательности широко используются в приближенных вычислениях. Так, например, для вычисления $\sqrt{x}$ удобна последовательность, определяемая соотношением $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{x}{a_n}\right)$, $a_1=1$. Члены последовательности достаточно быстро приближаются к $\sqrt{x}$. Рассмотрим в связи с этим задачу.

15. *С какого n члены последовательности $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$, $a_1=1$ будут отличаться от $\sqrt{2}$ не более чем на 10^{-10}?*

Решение. Пусть $|a_n-\sqrt{2}|=\varepsilon_n$ и $a_n\geqslant 1$. Тогда

$$\varepsilon_{n+1}=|a_{n+1}-\sqrt{2}|=\left|\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)-\sqrt{2}\right|=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}\leqslant\frac{\varepsilon_n^2}{2}.$$

Поскольку $a_2=\frac{3}{2}$, то $\varepsilon_2\leqslant\frac{1}{10}$. Затем $\varepsilon_3\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_2^2\leqslant\frac{1}{2}10^{-2}$, $\varepsilon_4\leqslant\frac{1}{8}10^{-4}$, $\varepsilon_5\leqslant\frac{1}{128}\,10^{-8}<10^{-10}$. Следовательно, уже a_5 дает нам верных 10 знаков после запятой для $\sqrt{2}$.

Ответ. $n=5$.

В школьном курсе выводятся формулы, выражающие суммы n членов арифметической и геометрической прогрессии. Методы, при помощи которых эти формулы доказываются, имеют достаточно общий характер.

Другой универсальный метод — метод математической индукции — был нами рассмотрен в предыдущем пункте (см. задачу 12). Этот метод особенно удобен, если нужная сумма известна. В иных случаях, как мы уже отмечали, очень много зависит от умения учащегося делать правдоподобные гипотезы. Здесь полезно дать одну рекомендацию. Если a_n — многочлен k-й степени от n, то сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ есть многочлен $(k+1)$-й степени от n.

Рассмотрим еще один пример. Пусть нам надо найти сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$, где a_1, a_2, ... — данная последовательность. Если мы найдем другую последовательность b_n, такую, что при всех n выполняется равенство $a_n=b_{n+1}-b_n$, то

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\ldots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1.$$

Этот прием проиллюстрируем на примере.

16. *Найти сумму* $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)$.

Решение. В данном случае $a_n=n(n+1)$. Рассмотрим разность

$$(n+2)(n+1)n-(n+1)n(n-1)=3(n+1)n.$$

Следовательно, взяв $b_n=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$, будем иметь $a_n=b_{n+1}-b_n$. Искомая сумма равна $b_{n+1}-b_1=\frac{(n+2)(n+1)n}{3}$.

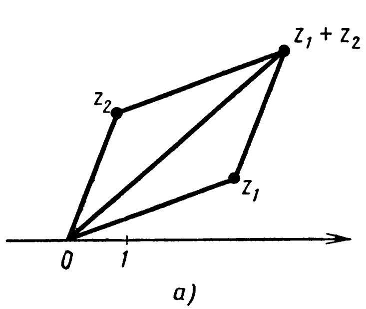
Ответ. $\frac{(n+2)(n+1)n}{3}$.

32. Комплексные числа

Действительные числа мы отождествили с точками числовой прямой. Следующим этапом обобщения понятия числа будет выход в плоскость.

Рассмотрим плоскость, в которой задана числовая прямая, т. е. прямая, на которой отмечены две точки, соответствующие числам 0 и 1. Пусть z — произвольная точка плоскости. Вектор z — это вектор с началом в точке O и концом в точке z. Точку z определяют также два числа — r и φ: r — расстояние от z до 0; φ — угол, на который надо повернуть против часовой стрелки положительную полуось заданной числовой прямой до того положения, при котором она пройдет через точку z. Как видим, для всех z, отличных от 0, $r>0$. Кроме того, для всех z, отличных от 0, угол φ при условии $0\leqslant\varphi<2\pi$ определяется однозначно. (Последнее ограничение можно снять, отождествляя углы, различающиеся на величину, кратную 2π.) Определим теперь для любых двух точек z_1 и z_2 нашей плоскости две точки, которые будем обозначать z_1+z_2 и $z_1\cdot z_2$, следующим образом.

1) Вектор, соответствующий точке z_1+z_2, равен сумме векторов, соответствующих z_1 и z_2 (рис. 21).



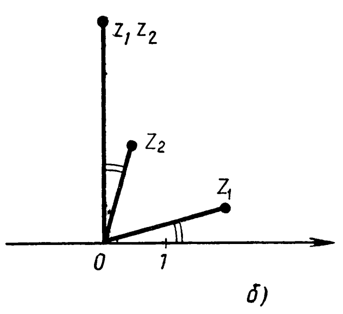


Рис. 21

2) Если z_1 определяется парой (r_1, φ_1), z_2 — **парой** (r_2, φ_2), то $z_1 \cdot z_2$ будет определяться парой $(r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$ (рис. 21, *б*).

Таким образом, для точек нашей плоскости мы определили две операции: сложение $(z_1 + z_2)$ и умножение $(z_1 \cdot z_2)$.

С этого момента будем называть нашу плоскость комплексной плоскостью. Комплексная плоскость — это плоскость, в которой задана числовая прямая и определены вышеуказанным образом операции сложения и умножения.

Точки комплексной плоскости мы отождествим с комплексными числами (будем называть комплексными числами). Величину r — длину вектора z — мы будем называть модулем комплексного числа z и обозначать $|z|$ $(r = |z|)$, а угол φ — аргументом комплексного числа $(\varphi = \arg z)$. Из определения $z_1 \cdot z_2$ следует, что

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg z_1 \cdot z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Легко проверить, что для точек заданной числовой прямой вышеуказанные операции сложения и умножения не выводят нас за пределы этой прямой и соответствуют обычным операциям сложения и умножения действительных чисел. (Проверьте свойства умножения; в частности, правило: «минус на минус дает плюс».) Теперь эту числовую прямую мы будем называть действительной прямой (действительной осью), а ее точки отождествлять с действительными числами (и соответственно обозначать).

Введенные арифметические операции обладают всеми свойствами сложения и умножения, имевшими место для действительных чисел.

Единственное, что необходимо проверить, это справедливость равенства

$$(z_1 + z_2) \cdot z = z_1 \cdot z + z_2 \cdot z.$$

Докажем это равенство. Геометрически умножение на z означает последовательное (в любом порядке) применение двух преобразований: гомотетии с центром в O и коэффициентом $r = |z|$ и поворота вокруг O на угол $\varphi = \arg z$ против часовой стрелки. Теперь нужное нам свойство умножения комплексных чисел оказывается следствием соответствующих свойств геометрических преобразований гомотетии и поворота по отношению к операции сложения векторов (сначала сложить два вектора, а затем их сумму увеличить в r раз и повернуть на угол φ — это все равно что сначала каждый вектор увеличить в r раз, повернуть на угол φ, а уже затем сложить преобразованные векторы).

Естественным образом определяется разность $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, где $-z_2$ — вектор, противоположный вектору z_2. Нетрудно убедиться, что вектор $-z_2$, определяемый геометрически, и вектор $(-1) z_2$, получаемый по введенному правилу умножения, суть один и тот же вектор.

Для введения операции деления определим сначала число (вектор) $\frac{1}{z}$, обратное числу z. Если z задается парой (r, φ), где $r \neq 0$, то $\frac{1}{z}$ будем задавать парой $\left(\frac{1}{r}, -\varphi\right)$. По определению умножения $z \cdot \frac{1}{z} = 1$; $\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)$ задается парой $(1, 0)$. Таким образом, $\frac{1}{z}$ определено для всех z, отличных от 0. А деление на такие z есть умножение на $\frac{1}{z}$.

Рассмотрим точку комплексной плоскости, модуль которой равен 1, а аргумент $\frac{\pi}{2}$. Обозначим эту точку через i и назовем мнимой единицей. Иными словами, вектор i есть единичный вектор, перпендикулярный действительной оси, образующий с ней угол $\frac{\pi}{2}$, измеряемый против часовой стрелки. По правилу умножения получаем, что $i^2 = i \cdot i$ есть вектор единичной длины с аргументом π, т. е. $i^2 = -1$. Прямую, проходящую через O и i, назовем мнимой осью. Комплексные числа, соответствующие точкам мнимой оси, будем называть чисто мнимыми числами (кроме точки O). Любой точке мнимой оси соответствует вектор bi, где b — действительное число, а значит, чисто мнимые числа есть числа вида bi, где $b \neq 0$ — действительное число.

Любой вектор z комплексной плоскости можно разложить по векторам, расположенным в действительной и мнимой осях. Поэтому равенство $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, обозначает, что вектор z (комплексное число) есть сумма векторов a (действительного числа a) и bi (чисто мнимого числа bi).

Запись $z = a + bi$ будем называть алгебраической формой записи комплексного числа. Число a есть действительная часть комплексного числа z, b — мнимая часть. Пара действительных чисел $(a; b)$ есть координаты точки z в декартовой системе координат, задаваемой действительной и мнимой осями. Ввиду единственности разложения вектора по двум осям равенство $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$, где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа, эквивалентно двум равенствам $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Из определений и свойств умножения и сложения комплексных чисел можно вывести правила сложения и умножения комплексных чисел, заданных в алгебраической форме:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$
$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 (b_2 i) + (b_1 i) a_2 + (b_1 i)(b_2 i) =$$
$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Легко получаются формулы, устанавливающие зависимость между r, φ, a, b (рис. 22):

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},\ \sin\ \varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a=r\ \cos\varphi,\ b=r\sin\varphi.$$

Имеет место равенство

$$z=a+bi=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Выражение $r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ представляет собой тригонометрическую форму записи комплексного числа.

Заметим, что попутно мы можем легко получить формулы для $\cos(\varphi_1+\varphi_2)$ и $\sin(\varphi_1+\varphi_2)$. В самом деле, из определения произведения двух комплексных чисел и выведенного правила умножения комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, имеем

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$
$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\,i,$$

откуда

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$
$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Для любого комплексного числа $z=a+bi$ определим число $\bar{z}$ (комплексное сопряженное число) равенством $\bar{z}=a-bi$ (рис. 23). Имеют место следующие свойства:

$$\bar{\bar{z}}=z,\ |\bar{z}|=|z|,\ |z|^2=z\cdot\bar{z},\ a=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ b=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

Аргументы z и $\bar{z}$ связаны соотношением $\arg z+\arg\bar{z}=2\pi$ (или $2\pi k$, где k — целое число).

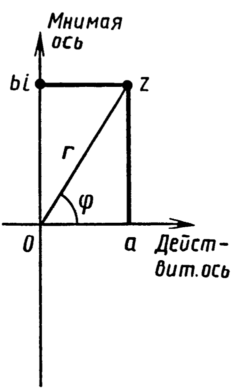


Рис. 22

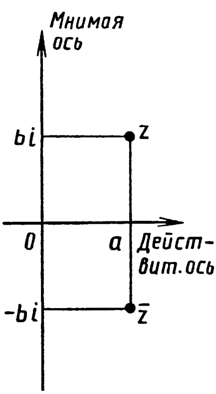


Рис. 23

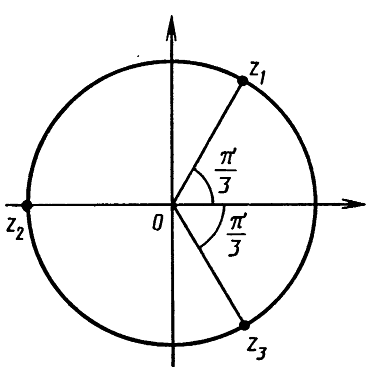


Рис. 24

И еще два свойства операции «сопряжения» полезно знать:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\ \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$$

(Эти свойства также проверяются очевидным образом.) Из второго свойства следует, что

$$\overline{(z^k)}=(\bar{z})^k,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$$

$$\left(\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{|z_2|^2}\,z_1\cdot\bar{z}_2\right)}=\frac{1}{|z_2|^2}\,\bar{z}_1 z_2=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right).$$

Следствием этих свойств является также равенство $\overline{R(z)}=R(\bar{z})$, справедливое для любых дробно-рациональных функций $R(z)$.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, советуем читателю решить задачи 148—150.

17. *Найти все комплексные z, для которых $z^3=-1$.*

Решение. Поскольку справа стоит число, модуль которого равен 1, а аргумент π или $\pi+2\pi k$, то из определения умножения комплексных чисел следует, что $|z|=1$, а $3\arg z=\pi+2\pi k$ для некоторого целого k. Беря $k=0,\ 1,\ 2$, найдем три значения аргумента z: $\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$. При других k будем получать значения, отличающиеся от найденных на величину, кратную 2π. Следовательно, наше уравнение имеет три решения. Соответствующие точки на комплексной плоскости являются вершинами правильного треугольника (рис. 24).

Ответ. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=-1,\ z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

18. *Доказать, что если число $\frac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым, то $|z|=1$.*

Решение. По условию $\frac{z-1}{z+1}=bi$, где b — действительное число. Тогда

$$z-1=bzi+bi,\ z=\frac{1+bi}{1-bi},\ |z|=\frac{|1+bi|}{|1-bi|}=\frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}=1.$$

19. *Для каких действительных чисел a не существует комплексных чисел z, для которых выполняются равенства*

$$|z-ai|=2,\ |z+2a|=1?$$

Решение. Заметим, что $|z-z_1|$ равняется расстоянию между точками z и z_1 на комплексной плоскости. При фиксированном a точки z, для которых $|z-ai|=2$, лежат на окружности с центром в ai и радиусом 2. (Вообще, множество z, для которых $|z-z_0|=r$, есть окружность с центром в z_0 и радиусом r.) Аналогично равенство $|z+2a|=1$ определяет окружность с центром в $-2a$ и радиусом 1. Две окружности не имеют общих точек, если расстояние между их центрами больше суммы или меньше разности радиусов. Таким образом, должно выполняться одно из двух неравенств:

$$|2a+ai|>3 \text{ или } |2a+ai|<1,$$
$$|a|\sqrt{5}>3 \text{ или } |a|\sqrt{5}<1.$$

Ответ. $|a|>\frac{3}{\sqrt{5}}$ или $|a|<\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Мы рассмотрели здесь один из возможных способов введения комплексных чисел, отличный от традиционно принятого в школе. Обычно изложение этой темы начинается с определения алгебраической формы записи комплексных чисел.

33. Задачи

Целые числа

1. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 3, 9 и 11.

2. Докажите, что если натуральное число N не имеет делителей, не превосходящих $\sqrt{N}$, отличных от 1, то N — простое число.

3. Докажите бесконечность множества простых чисел.

4. Докажите, что в натуральном ряду существует отрезок, состоящий из 100 идущих подряд составных чисел.

5. Разложите на простые множители: а) 899; б) 1000027.

6. Вычислите

$$19871987\cdot198919891989-19891989\cdot198719871987.$$

7. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел: а) 5544 и 1404; б) 198, 504 и 780.

8. Найдите наибольший общий делитель чисел: а) 3024 и 3168; б) 2021 и 3139; в) 123456789 и 987654321.

9. Докажите, что для любых натуральных a и b НОД $(a, b)\times$ $\times$НОК $(a, b)=ab$.

10. Найдите наименьшее натуральное число, большее десяти, которое при делении на 24, 45 и 56 давало бы в остатке 1.

11. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5, 6 и 7 дает в остатке соответственно а) 2, 3 и 4; б) 1, 4 и 3.

12. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 7, а при делении на 3, 4 и 5 дает в остатке 1.

13. Припишите к 23 по одной цифре спереди и сзади так, чтобы получившееся четырехзначное число делилось на 9 и 11.

14. Делится ли на 9 число 1234 ... 500?

15. Докажите, что число 192021 ... 80 (выписываются подряд двузначные числа от 19 до 80) делится на 1980.

16. Докажите, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

17. Припишите к числу 19901990 сзади три цифры так, чтобы полученное число делилось на 7, на 8 и на 9.

18. Среди чисел вида $\underbrace{66 \ldots 6}_{k}1$ найдите наименьшее, не являющееся простым.

19. Можно ли в трехзначном числе, делящемся на 37, переставить цифры так, чтобы полученное число тоже делилось на 37?

20. В магазине было 6 ящиков с яблоками массой 15 кг, 16 кг, 18 кг, 19 кг, 20 кг, 31 кг. Две организации взяли 5 ящиков, причем одна из них взяла по массе в 2 раза больше яблок, чем другая. Какой ящик остался в магазине?

21. Может ли быть квадратом целого числа число, состоящее из: а) нулей и единиц, в котором единиц 300 штук; б) нулей и двоек; в) восьмерок и шестерок?

22. Найдите два натуральных числа, зная, что их сумма равна 85, а наименьшее общее кратное равно 102.

23. Произведение двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Найдите это число.

24. Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное равно 105.

25. Найдите два трехзначных числа, сумма которых кратна 504, а частное кратно 6.

26. Найдите два натуральных числа, зная, что их разность равна 66, а наименьшее общее кратное равно 360.

27. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 13, сумма цифр которого равна 13.

28. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 100, сумма цифр которого равна 100.

29. Найдите число, при делении на которое числа 1108, 1453, 1844 и 2281 дают одинаковый остаток.

30. Представьте 19 в виде разности кубов натуральных чисел.

31. Найдите все простые числа, такие, что p^2+13 также простое число.

32. Найдите все p, для которых p, $p+10$ и $p+20$ являются простыми.

33. Докажите, что для любого натурального p хотя бы одно из трех чисел p, $p+100$, $p+200$ является составным.

34. Найдите все простые p, для которых $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+12$, $p+14$ являются простыми.

35. Докажите, что при всех k числа $(2k+1)$ и $(9k+4)$ взаимно просты.

36. Докажите, что каждое натуральное $n>6$ можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел.

37. Докажите, что если $6x+11y$ делится на 31, то $x+7y$ также делится на 31 (x и y — целые числа).

38. Докажите, что если a^2+b^2 делится на 3, то a и b делятся на 3.

39. Докажите, что если a^2+b^2 делится на 7, то a и b делятся на 7.

40. Докажите, что 3^n нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

41. Докажите, что если a и b — различные целые числа, то существует такое n, что числа $a+n$ и $b+n$ взаимно просты.

42. Докажите, что если a, b и c — произвольные натуральные числа, n — натуральное число, $n>3$, то существует такое целое k, что ни одно из чисел $k+a$, $k+b$, $k+c$ не делится на n.

43. Приведите пример таких четырех различных натуральных чисел a, b, c и d, что ни при каком натуральном n числа $a+n$, $b+n$, $c+n$, $d+n$ не являются попарно взаимно простыми.

44. Докажите, что для любого натурального N число N^5 оканчивается на ту же цифру, что и N.

45. Найдите все натуральные n, для которых $n^{10}+1$ делится на 10.

46. Докажите, что если $a^3+b^3+c^3$ делится на 9, то, по крайней мере, одно из чисел a, b или c делится на 3.

47. Общий наибольший делитель чисел a и b равен 1. Чему может быть равен наибольший общий делитель чисел a^2-ab+b^2 и $(a+b)$?

48. Пусть x — последняя цифра простого числа $p>3$. Докажите, что $p+2^{\frac{x-1}{2}}$ — число составное.

49. Вычислите: а) $\sqrt[3]{985074875}$; б) $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ цифр}}-\underbrace{11\ldots1}_{30}\underbrace{00\ldots0}_{30}}$;

в) $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9}$; г) $\sqrt[3]{\underbrace{99\ldots9}_{n-1}7\underbrace{00\ldots0}_{n-1}2\underbrace{99\ldots9}_{n}}$.

50. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном будет 2, в остатке 7. Найдите это число.

51. Докажите, что m^5n-n^5m делится на 30 при любых целых m и n.

52. Найдите наименьшее n, для которого n^2 начинается с трех единиц.

53. Найдите все целые $n>3$, для которых n^3-3 делится на $n-3$.

54. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 23?

55. Докажите, что $n^4+2n^3+2n^2+1$ не является квадратом целого числа ни при каких натуральных n.

56. Найдите натуральные числа m и n, такие, что: а) $2^m-3^n=1$; б) $3^n-2^m=1$.

57. Квадрат натурального числа равен произведению четырех последовательных нечетных чисел. Найдите это число.

58. Найдите натуральные x и y, такие, что $117x-79y=17$, для которых $x+y$ имеет наименьшее значение.

59. Докажите, что: а) $2^{41}+1$ делится на 83; б) $2^{70}+3^{70}$ делится на 13; а) $20^{15}-1$ делится на 20801.

60. Докажите, что при любых натуральных n:

а) $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ делится на 120;
б) $2^{5n+1}+5^{n+2}$ делится на 27;
в) $4^{2n}-3^{2n}-7$ делится на 84;
г) $3^{3n+3}-26n-27$ делится на 169;
д) $5^n+2\cdot 3^n-3$ делится на 8;
е) 7^n+3^n-2 делится на 8;
ж) $7^n-3\cdot 5^n+3\cdot 3^n-1$ делится на 16;
з) $2^{3n+3}-7n+41$ делится на 49;
и) $5\cdot 7^{2(n+1)}+2^{3n}$ делится на 41;
к) $5^{2n+1}+9\cdot 2^{n+1}$ делится на 23;
л) $5^{2n}-3^n\cdot 2^{2n}$ делится на 13;
м) $(k+1)^{2n+1}+k^{n+2}$ делится на k^2+k+1.

Решите в целых числах уравнение (61—71).

61. $x+y=xy$.

62. $x+y+z=xyz$ $(0\leqslant x\leqslant y\leqslant z)$.

63. $x^3+7y=y^3+7x$.

64. $x^2-3xy+2y^2=3$.

65. $y^2=5x^2+6$.

66. $y^2+1=2^x$.

67. $x^2+1=3y$.

68. $x^3-xy^2+x-y=102$.

69. $x^2+5y^2=20z+2$.

70. $x^2+9y^2=3z+2$.

71. $x^2y=9999x+y$.

72. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых $4n^2+1$ делится на 5 и 13.

73. Докажите, что среди натуральных чисел вида 2^n-3 существует бесконечно много чисел, делящихся на 5, бесконечно много, делящихся на 13, но не существует ни одного числа, делящегося на 65.

74. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше 7. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше 1. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом целого числа. Найдите числа, из которых состоит A.

75. Дан многочлен с целыми коэффициентами, такой, что, если вместо неизвестного подставить 2 или 3, получатся числа, делящиеся на 6. Докажите, что при подстановке вместо неизвестного 5 также получится число, делящееся на 6.

76. Докажите, что если p нечетно и среди чисел p, $p+1^2$, $p+2^2, \ldots, p+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ квадратом является лишь последнее, то p — простое число.

77. Докажите, что сумма чисел, меньших m и взаимно простых с m, равна произведению их числа на $\frac{1}{2}m$.

78. Представьте n в виде суммы натуральных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим.

79. Докажите, что если a можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, то $2a$ также можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

80. Найдите три различных натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен 1 и обладающих тем свойством, что сумма любых двух делится на третье.

81. Некоторое число есть произведение трех простых. Количество чисел, меньших данного числа и взаимно простых с ним, равно 48 (включая 1). Сумма всех делителей этого числа (включая 1 и само число) равна 192. Найдите это число.

82. Рассмотрим числа $x=36k+14$ и $y=(12k+5)(18k+7)$. Докажите, что ни при каком натуральном k число y не делится ни на x, ни на $(x+1)$, точно так же $y+1$ не делится ни на x, ни на $(x+1)$, но $y(y+1)$ делится на $x(x+1)$.

83. Найдите все натуральные k, при которых 4^k+k^4 является простым числом.

84. Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел m и n, таких, что, во-первых, числа m и n имеют одни и те же простые делители, и, во-вторых, числа $m+1$ и $n+1$ также имеют одни и те же простые делители.

85. Докажите, что уравнение $x^2-2y^2=1$ имеет бесконечно много целочисленных решений.

Рациональные и иррациональные числа

86. Данную периодическую дробь представьте в виде дроби $\frac{p}{q}$: а) $0,(27)$; б) $0,(481)$; в) $0,(142857)$.

87. Установите, является следующая дробь сократимой, и, если является, сократите ее: а) $\frac{19043}{20413}$; б) $\frac{11377}{18087}$; в) $\frac{116690151}{427863887}$.

88. Докажите, что между любыми различными числами a и b найдется как рациональное, так и иррациональное число.

89. Докажите иррациональность следующих чисел: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; г) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$.

90. Сравните, какое из чисел больше:

а) 2^{300} и 3^{200}; б) $\sqrt{1002}+\sqrt{1003}$ и $\sqrt{1001}+\sqrt{1004}$; в) $\sqrt{51}$ и $3+\sqrt{17}$; г) $\sqrt[3]{51}$ и $2+\sqrt[3]{5}$; д) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}}$ и $2\sqrt{3}$.

91. Существует ли хотя бы одно a, при котором числа $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ целые?

92. Докажите, что среди дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ четное число несократимых дробей ($n \geqslant 3$).

93. Докажите, что $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ не может быть целым ни при каком n.

94. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

95. Найдите целую часть выражения $\sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}}$, где n — натуральное число (целая часть x — наибольшее целое, не превосходящее x).

96. Вычислите $\frac{1}{1,\underbrace{0\ldots0}_{9}1}$ с 20 знаками после запятой.

97. Вычислите $\sqrt{0,\underbrace{99\ldots9}_{100}}$: а) со 100 знаками после запятой; б) со 101 знаком после запятой; в) с 200 знаками после запятой.

98. Найдите 1000 знаков после запятой числа $(6+\sqrt{35})^{1987}$.

99. Докажите, что дробь $\frac{1010\overbrace{11\ldots1}^{2k+1}0101}{1100\underbrace{11\ldots1}_{2k+1}0011}$ при всех k принимает одно и то же значение.

100. Докажите, что для любых натуральных p и q выполняется равенство $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{4q^2}$.

Числовые последовательности

101. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а пятый равен 12288. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

102. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 2, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен 2. Выясните, что больше: сумма первых восьми членов арифметической прогрессии или сумма первых шести членов геометрической.

103. Три положительных числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к ним прибавить соответственно 1, 4 и 19, то получаются три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

104. Три числа, сумма которых равна 78, составляют геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать так же, как первый, третий и девятый члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

105. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Если третий член уменьшить на 3, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Если второй член новой прогрессии уменьшить на $\frac{4}{3}$, то полученные числа опять составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

106. Произведение первых пяти членов геометрической прогрессии равно 32, а сумма кубов первых трех членов равна $\frac{73}{8}$. Найдите прогрессию.

107. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 10 членов целые числа, а все последующие не целые?

108. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма ее квадратов равна 48. Найдите сумму первых 10 членов этой прогрессии.

109. В арифметической прогрессии известны $S_m = A$ и $S_n = B$ — суммы m и n первых членов. Найдите S_{m+n} (A, B, m и n даны).

110. Можно ли из последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ выбрать числа, составляющие бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна: а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$?

111. При каких k существует бесконечно убывающая прогрессия, первый член которой равен 1, а каждый ее член в k раз больше суммы последующих членов?

112. Докажите, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ также образуют арифметическую прогрессию.

113. В арифметической прогрессии S_n — сумма первых n членов. Известно, что $S_n = S_m$ $(m \neq n)$. Найдите S_{m+n}.

114. В геометрической прогрессии с положительными членами известны $a_{m+n} = A$ и $a_{m-n} = B$. Найдите a_m и a_n.

115. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите $a_1 a_2, \ldots, a_n$, если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = Q$.

116. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию с разностью, отличной от нуля. Известно, что a_1, a_2, a_4, a_k являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите k.

117. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_6$ образуют арифметическую прогрессию, с разностью, отличной от 0. Найдите x и y, если $\begin{cases} a_1 x + a_2 y = a_3, \\ a_4 x + a_5 y = a_6. \end{cases}$

118. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, причем $b_1 \neq b_2$ и $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$. Известно, что числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 также образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a_1=b_2$.

119. Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 снова образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $a_1b_3=a_3b_1$.

120. Приведите пример бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, ни один член которой не является ни суммой, ни разностью двух простых чисел.

121. Решите уравнение $x^3+x^2+2x+a=0$, зная, что оно имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

122. Решите уравнение $x^3+x^2+a=0$, зная, что оно имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию.

123. Докажите, что если три простых числа (больше 3) образуют арифметическую прогрессию, то ее разность кратна 6.

124. Найдите сумму всех нечетных трехзначных чисел, не делящихся на 3.

125. Найдите сумму первых 100 совпадающих членов двух арифметических прогрессий 2, 7, 12, ... и 3, 10, 17, ...

126. Определите 10274-й член последовательности $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{1}$, ...

127. Для вычисления $\sqrt[3]{2}$ рассматривается последовательность, заданная соотношением $a_{n+1}=\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)$, $a_1=1$. С какого n члены последовательности будут отличаться от $\sqrt[3]{2}$ на величину, не превосходящую 10^{-8}?

128. Докажите, что при натуральном $n \geqslant 3$ выполняется неравенство $2^n > 2n+1$. С какого n будет выполняться неравенство $2^n > 9n$?

Докажите неравенство (129—131).

129. $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}-1.$

130. $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. **131.** $\frac{5}{6} \leqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n} \leqslant \frac{4}{3}$.

132. Докажите, что разложение на простые множители числа $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n$ содержит n двоек.

Вычислите сумму (133—138).

133. $7+77+777+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{n}.$

134. $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

135. $nx+(n-1)x^2+\ldots+2x^{n-1}+x^n$.

136. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$.

137. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\ldots+\frac{2^n}{x^{2^n}+1}$.

138. $\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-1}{a_1a_2}+\frac{a_3-1}{a_1a_2a_3}+\ldots+\frac{a_n-1}{a_1a_2\ldots a_n}$.

Докажите, что для любого натурального n справедливы равенства (139—145).

139. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=$
$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

140. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

141. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

142. $\frac{b}{a}+\frac{(b+1)(a-b)}{a(a+1)}+\frac{(b+2)(a-b)^2}{a(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{(b+n)(a-b)^n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}=$
$=1-\frac{(a-b)^{n+1}}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$.

143. $1+\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}+\ldots+\frac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}=2n+1$.

144. $1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\ldots n}x^n=(1+x)^n$.

145. $\frac{n}{x+n}+\frac{n(n-1)}{(n+x)(n+x-1)}+\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+x)(n+x-1)(n+x-2)}+\ldots+$
$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(n+x)(n+x-1)\ldots(2+x)(1+x)}=\frac{n}{x+1}$ $(x\neq1)$.

146. Найдите сумму попарных произведений первых n натуральных чисел (т. е. сумму $1\cdot2+1\cdot3+\ldots+1\cdot n+2\cdot3+2\cdot4+$ $+\ldots+2\cdot n+3\cdot4+\ldots+(n-1)n$).

147. Последовательность a_1, a_2, ..., a_n определяется следующим образом. Первые два числа задаются, а каждое следующее есть среднее арифметическое двух предыдущих. Найдите выражение a_n, если $a_1=a$, $a_2=b$, и сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Комплексные числа

148. Изобразите на комплексной плоскости числа $z_1=1+i$, $z_2=-3i$, $z_3=-2+5i$; $z_4=z_1+z_2$, $z_5=z_1\cdot z_3$, $z_6=(2-i)z_1-$ $-z_2z_3$.

149. Выполните следующие действия (ответом должно быть комплексное число, записанное в алгебраической форме):

а) $\frac{2-i}{3+2i}$; б) $\frac{1-i}{1+2i}+\frac{1-2i}{1+i}$; в) $\frac{11-10i}{10-9i}+\frac{11+10i}{10+9i}$;

г) $1+i+i^2...+i^{11}$; д) i^{1987}; е) $(1+i)^{12}$; ж) $\frac{i^{34}+i^{39}}{i^{41}+i^{44}}$.

150. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа, заданные в алгебраической форме: i, -2, $1+i$, $-\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3}-3i$, $-\sqrt{3}-1+(1-\sqrt{3})\,i$.

151. Изобразите на комплексной плоскости точки z, для которых: а) $|z-2i-1|=2$; б) $|z|<\left|\frac{z}{2}\right|+1$;

в) $2\leqslant|2z+i|<3$; г) $|z-1|=|z+2i|$; д) $|z-1|=|z+1|=$ $=|z-i\sqrt{3}|$.

152. Найдите модуль комплексного числа: а) $\sqrt{10}+i$; б) $\frac{17+19i}{19-17i}$; в) $\left(\frac{a+bi}{b+ai}\right)^n$.

153. Пусть $|z|=3$. Где расположены точки, изображающие комплексные числа $1-2i+3z$?

Найдите все z, удовлетворяющие уравнению (154—155.)

154. $\begin{cases}|z-i|=1,\\ |z+1|=1.\end{cases}$ **155.** $\begin{cases}|z-5-i|=4,\\ |z-9i|=5.\end{cases}$

156. Докажите, что если $|z|=1$, то $\frac{z-1}{z+1}$ — чисто мнимое.

157. Докажите, что любое комплексное число $a+bi$ можно представить в виде $a+bi=m\frac{c+i}{c-i}$, где c и m — действительные числа.

158. Даны два числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Докажите, что их произведение также можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Решите уравнение (найдите комплексные корни) (159—163).

159. $z^2-5z+7-i=0$. **160.** $z^2-(4+i)\,z+10+2i=0$.

161. $z^4=1$. **162.** $z^3=-i$. **163** $(z+1)^4=(z-i)^4$.

164. Решите уравнение $|z|+z=2+i$.

165. Для каждого действительного числа $a\geqslant0$ найдите комплексные числа z, удовлетворяющие равенству $|z|^2-2iz+$ $+2a\,(1+i)=0$.

166. При каких действительных значениях a любое комплексное число, удовлетворяющее равенству $|z-i\sqrt{2}|=(a+1)^2$, удовлетворяет одновременно и неравенству $|z-\sqrt{2}|>a^2-4a$?

167. При каких действительных a хотя бы одно комплексное число z, удовлетворяющее равенству $|z-ai|=a+4$, удовлетворяет одновременно и неравенству $|z-2|<1$?

§ 7. ПЛАНИМЕТРИЯ

34. Построение чертежа

Решение любой геометрической задачи начинается с чертежа. Умение построить хороший грамотный чертеж, помогающий решению задачи, является важнейшим элементом геометрической культуры.

Можно выделить некоторые, к сожалению, трудно формализуемые принципы, которыми следует руководствоваться при построении чертежа. (Подчеркнем, что речь идет о построении чертежа на этапе собственно решения задачи, а не об оформлении решения на чистовике.) Прежде всего чертеж должен быть «большим и красивым». Это вовсе не означает, что чертеж должен выполняться по всем правилам черчения, с использованием соответствующих инструментов. При небольшом навыке чертеж может быть хорошо сделан и от руки.

Важнейшим требованием к чертежу является требование лаконичности. Следует изображать лишь «функционирующие» части геометрических фигур. Так, например, если в задаче надо найти радиус окружности, вписанной в треугольник, то в большинстве случаев саму эту окружность не следует изображать. Если же в условии задачи фигурируют точки этой окружности, т. е. окружность «функционирует» в условии, то ее изображение может оказаться полезным для решения задачи. При этом даже такой пустяк, как «что раньше изобразить: окружность или треугольник?», может существенно сказаться на качестве чертежа, а в результате — и на решении. К сожалению, учебные пособия часто дают нам примеры чертежей, перегруженных ненужными деталями, служащих скорее иллюстрацией к задаче, чем элементом ее решения.

Не следует думать, что на начальном этапе решения задачи заканчиваются проблемы, связанные с построением чертежа. Имеется немало задач, процесс решения которых состоит в последовательном уточнении особенностей рассматриваемой конфигурации с соответствующими переделками и изменениями чертежа, так что окончательный вид чертеж принимает лишь одновременно с окончанием решения. В этом смысле в учебных пособиях иногда приводятся чертежи, построить которые можно, лишь полностью решив задачу. Полезно было бы давать не итоговый чертеж, а нечто вроде мультфильма, показывающего, как изменяется чертеж в процессе решения задачи, но эту идею трудно реализовать в книге.

Необходимо избегать чрезмерного усложнения чертежа. Этого можно добиться, в частности, за счет выносных картинок, изображающих фрагменты общей конфигурации. С другой стороны, стоит непосредственно на чертеже указывать числовые или буквенные значения линейных или угловых величин, заданных в условии или полученных (введенных) в процессе решения.

Говорят, что геометрия есть искусство правильно рассуждать на неправильном чертеже. В этих словах есть доля истины. Очень часто решение задачи не зависит от числовых данных, указанных в условии. Более того, формально логическая структура решения не должна опираться на чертеж; как говорят, решение не должно апеллировать к чертежу. И все же легче и лучше правильно рассуждать на правильном чертеже, на котором прямой угол выглядит как прямой, соблюдены пропорции и соотношения, заданные в условии, и не приходится напрягать воображение, чтобы узнать в кособоком овале окружность. Правильный чертеж поможет увидеть особенности геометрической фигуры, необходимые или полезные для решения задачи. Например, может «подсказать», что какие-то точки расположены на одной прямой или одной окружности или что прямые пересекаются в одной точке. Конечно же, эти особенности в дальнейшем должны быть обоснованы без ссылок на чертеж. При этом иногда приходится делать два чертежа. Первый, правильный, с помощью которого можно сделать геометрические «открытия», и второй, заведомо неправильный, для проведения доказательства.

С другой стороны, если в задаче идет речь о фигуре общего вида, например о произвольном треугольнике или четырехугольнике, то необходимо, чтобы фигура, изображенная на чертеже, не имела характерных особенностей, присущих «хорошим» фигурам; в частности, треугольник не должен быть прямоугольным или равнобедренным, а тем более правильным, а четырехугольник — быть похожим на параллелограмм и т. д.

Ограничимся пока общими рекомендациями по построению чертежа, поскольку уровень сложности задач, содержательно иллюстрирующих эту тему, превышает начальный. Кроме того, умение строить нужный чертеж, понимание, где надо постараться и выполнить чертеж поточнее, а где можно обойтись не очень точной схематической картинкой, приходит с опытом. В дальнейшем мы еще не раз будем возвращаться к этой теме и при этом рассмотрим отдельные специальные приемы, используемые при решении некоторых типов задач. Пока же главное — выработать привычку начинать решение любой геометрической задачи с чертежа, а также некоторые минимальные практические навыки.

35. Выявление характерных особенностей заданной конфигурации

В простейших случаях ход решения задачи виден сразу после ее прочтения или же построения чертежа. Остается лишь реализовать это решение технически — произвести необходимые доказательства, сделать вычисления. В других, более сложных случаях технической стадии предшествует несколько этапов, один из которых состоит в выявлении характерных особенностей конфигурации, рассматриваемой в задаче.

Эти особенности, в частности, могут быть следствием специального подбора числовых данных задачи. В этом, кстати, одна из причин, почему при построении чертежа надо стараться выдерживать заданные пропорции. При этом, конечно же, нельзя забывать о том, что выявленные особенности требуется строго доказать. Иногда для этого, как уже отмечалось, полезно сделать новый намеренно неправильный чертеж.

Вообще, роль числовых данных в задаче может быть самой различной. В одних случаях задача не решается в общем виде, и лишь специальный выбор числовых данных делает ее корректной, как это имеет место в следующей задаче.

1. *Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$ и $BC=4$ и две точки M и K, такие, что $MK=8$, $AM=1$, $BK=2$. Найти площадь треугольника CMK.*

Р е ш е н и е. Особенность этой задачи, определенная подбором числовых данных, состоит в том, что точки M, A, B и K лежат на одной прямой, располагаясь на ней в указанном порядке, поскольку

$$MK=8=1+5+2=MA+AB+BK$$

(рис. 25). Таким образом, для завершения решения нам осталось лишь найти высоту прямоугольного треугольника ABC, опущенную на гипотенузу AB. Эта высота равна $\frac{12}{5}$, искомая площадь равна $\frac{48}{5}$.

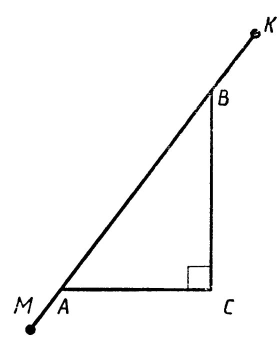


Рис. 25

В других случаях специально подобранные числовые данные превращают достаточно сложную в общем виде задачу в существенно более простую, как это имеет место в двух следующих примерах.

2. *В треугольнике ABC со сторонами $AB=5$, $BC=\sqrt{17}$, $CA=4$ на стороне CA взята точка M так, что $CM=1$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.*

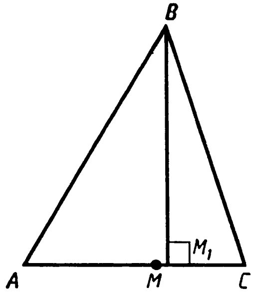


Рис. 26

Р е ш е н и е. Для решения этой задачи существенным оказывается тот факт, что M есть основание высоты, опущенной из вершины B на сторону AC. В самом деле, проведем высоту BM_1 (рис. 26 намеренно неправильный!) и обозначим CM_1 через x. Тогда $AM_1 = 4 - x$. Выражая BM_1 по теореме Пифагора из треугольников ABM_1 и BCM_1, получим

$$AB^2 - AM_1^2 = BM_1^2,\ CB^2 - CM_1^2 = BM_1^2,$$

откуда

$$25 - (4 - x)^2 = 17 - x^2,\ x = 1,$$

т. е. M_1 совпадает с M. Но центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой его гипотенузы. (Это утверждение мы относим к категории так называемых опорных задач, о которых несколько подробнее будем говорить позже.) Таким образом, искомое расстояние равно длине средней линии данного треугольника ABC, параллельной стороне AC, т. е. равно 2.

3. *В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 30$, $BC = 20$ и боковые стороны $AB = 6$, $CD = 8$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD.*

Р е ш е н и е. Характерной особенностью данной трапеции, существенным образом облегчающей решение поставленной задачи, является то, что угол между ее боковыми сторонами равен 90°. Докажем это. Проведем через точку B прямую, параллельную CD, и обозначим ее точку пересечения с AD через D_1 (рис. 27, a). В треугольнике ABD_1 имеем $AB = 6$, $BD_1 = 8$ ($BCDD_1$ — параллелограмм), $AD_1 = AD - DD_1 = 30 - 20 = 10$. Таким образом,

$$AD_1^2 = 10^2 = 6^2 + 8^2 = AB^2 + BD_1^2,$$

откуда следует, что угол ABD_1 равен 90°.

Продолжим теперь стороны AB и CD трапеции и обозначим через E их точку пересечения (рис. 27, $б$). Пусть K — середина

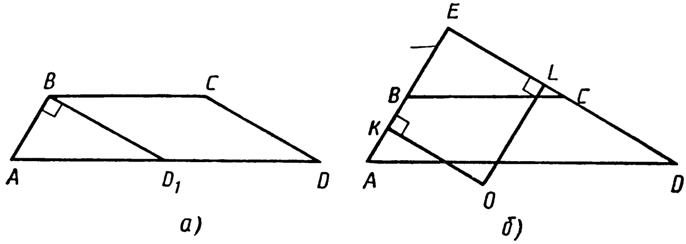


Рис. 27

отрезка AB, O — центр искомой окружности, L — точка ее касания с прямой CD (OL перпендикулярна CD). Фигура $OKEL$ — прямоугольник; следовательно, радиус искомой окружности, равный OL, равен

$$EK = EB + KB = EB + \frac{1}{2} AB.$$

Задача свелась к нахождению отрезка EB. Из подобия треугольников BEC и ABD_1 найдем $BE = AB \frac{BC}{AD_1} = 12$. Таким образом, радиус равен 15.

Замечание. При решении этой задачи мы использовали три характерных приема: провели через вершину трапеции прямую, параллельную другой боковой стороне; на втором чертеже продолжили до пересечения боковые стороны трапеции и не стали изображать саму окружность, а ограничились изображением ее центра, проекцией этого центра на одну боковую сторону и точки касания с другой стороной. Эти приемы достаточно стандартны. Изучение этих и подобных приемов полезно проводить на простых модельных задачах, в которых наиболее выпукло «работает» один такой прием. Эти задачи мы также будем относить к категории опорных.

Конечно, числовые данные далеко не всегда играют столь существенную роль, как в рассмотренных примерах. Нередки случаи, когда характерные особенности задачи инвариантны по отношению к числовым данным, конкретный выбор которых имеет целью лишь облегчить вычисления, сделать ответ более «приятным». Следует упомянуть также о категории задач, которые удобнее решать в общем виде, подставляя числа, если таковые имеются, в полученное в результате решения буквенное выражение.

4. ***Три окружности с радиусами 1, 2 и 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус окружности, проходящей через три точки попарного касания данных окружностей.***

Решение. Обозначим центры данных окружностей через O_1, O_2, O_3 (рис. 28). Суть решения сводится к тому, чтобы «увидеть» и соответственно доказать, что искомая окружность совпадает с окружностью, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. При этом указанная особенность имеет место, каковы бы ни были радиусы исходных окружностей, хотя, конечно же, задача нахождения радиуса окружности, вписанной в треугольник со сторонами 3, 4 и 5, т. е. в прямоугольный треугольник, как в нашем случае, существенно проще, чем такая же задача для треугольника со сторонами 4, 5 и 6, не говоря уже о решении в общем виде.

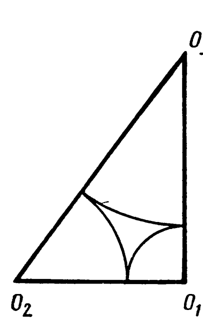


Рис. 28

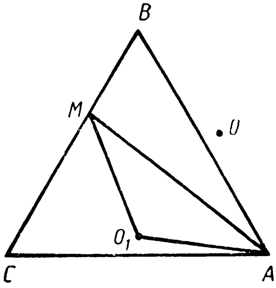


Рис. 29

Для доказательства отмеченного выше факта можно поступить следующим образом. Впишем в треугольник $O_1O_2O_3$ окружность. Выразим отрезки, соединяющие его вершины с точками касания (учитывая равенство касательных, выходящих из одной точки), через стороны треугольника. Каждая из этих касательных будет равной радиусу соответствующей окружности. (Проведите доказательство самостоятельно.)

Ответ. 1.

Рассмотрим еще два примера, в которых этап анализа конфигурации играет ведущую роль.

5. *Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через A и B и пересекает прямую BC в точке M, отличной от B и C. Найти расстояние от точки O до центра окружности, описанной около треугольника ACM.*

Решение. Рассмотрим случай, когда точка M расположена на стороне BC. Обозначим через O_1 центр окружности, описанной около треугольника ACM (рис. 29). Тогда

$$\angle AO_1M = 2\angle ACM = 2\angle ACB = 180° - \angle CBA = 180° - \angle ABM.$$

А это означает (вновь опорный факт!), что точки M, A, B и O_1 лежат на одной окружности, значит, искомое расстояние равно R. Для завершения решения необходимо рассмотреть другие случаи расположения точки M и доказать, что во всех случаях O_1 лежит на данной окружности.

Теперь несколько слов о том, как можно было бы догадаться, что центр O_1 должен лежать на окружности с центром O.

Во-первых, подобная гипотеза выглядит достаточно естественной. Если предположить, что ответ есть число $f(R)$ (а не интервал), то прежде всего следовало бы рассмотреть возможность равенства $f(R) = R$.

Во-вторых, в подобного рода задачах, когда не видно общего решения, полезно рассмотреть какой-либо частный случай, поскольку условие задачи позволяет рассчитывать на то, что ответ, полученный для частного случая, останется верен и в общем случае. (Конечно, правильный ответ, полученный при рассмотрении одного частного случая, не означает, что задача решена верно.) В данной задаче можно, например, рассмотреть ситуацию, когда точка O совпадает с серединой отрезка AB. Тогда M есть основание высоты, опущенной на BC, а O_1 — середина AC и т. д.

Дадим еще одно решение предложенной задачи, возможно, несколько более длинное, но основанное на одном полезном общем факте. (Вновь опорная задача.) Сформулируем его.

Пусть ABC — произвольный треугольник (не обязательно равнобедренный), M — произвольная точка на прямой BC, O и O_1 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM и ACM. Тогда треугольник AOO_1 подобен треугольнику ABC.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда точка M на стороне BC и $\angle AMB \geqslant 90°$. В этом случае точки O и O_1 расположены так, как показано на рисунке 29. Имеем

$$\angle AO_1C = 2\angle AMC,$$

$$\angle AOB = 360° - 2\angle AMB = 360° - 2(180° - \angle AMC) = 2\angle AMC.$$

Значит, треугольники AOB и AO_1C — подобные равнобедренные треугольники. Из этого на основании первого признака подобия ($\angle OAO_1 = \angle BAC$, $OA/AB = O_1A/AC$) следует подобие треугольников AOO_1 и ABC.

На основании доказанной теоремы легко решается задача 5. Если $AB = BC$, то $OO_1 = AO = R$.

6. *Окружности с радиусами r и R касаются друг друга внешним образом и касаются прямой в точках A и B. Пусть A_1 — точка первой окружности, диаметрально противоположная точке A. Отрезок A_1B пересекается с первой окружностью в точке M. Найти отношение A_1M и MB.*

Решение. Аккуратно выполненный чертеж и некоторые трудно формализуемые соображения, которые можно объединить под названием «геометрическая интуиция», позволяют сделать предположение, что точка M совпадает с точкой касания окружностей. Докажем это. Обозначим центры окружностей через O_1 и O_2, а точку их касания — через M_1. Точка M_1 лежит на отрезке O_1O_2 (рис. 30). Прямые AA_1 и BO_2 параллельны. Следовательно, $\angle A_1O_1M_1 = \angle M_1O_2B$. Таким образом, равнобедренные треугольники $A_1O_1M_1$ и M_1O_2B подобны и $\angle A_1M_1O_1 = \angle BM_1O_2$, т. е. точки A_1, M_1 и B лежат на одной прямой и точка M_1 совпадает с точкой M. Искомое отношение равно $r:R$.

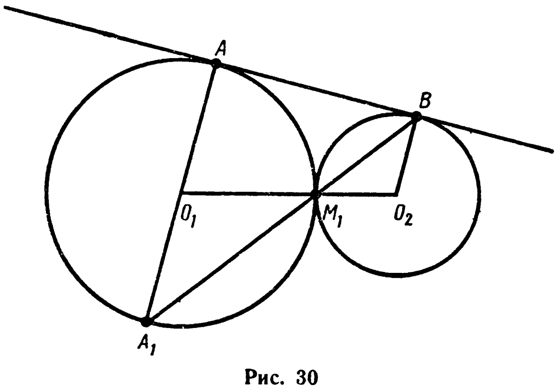


Рис. 30

36. Опорные задачи

В предыдущем пункте неоднократно упоминались так называемые опорные задачи. Поговорим о них несколько подробнее.

Теоретическая часть школьного курса содержит в основном теоремы, которые будут необходимы в дальнейшем для развития этой теории. Из нее исключены многие факты, стоящие как бы сами по себе, не работающие на теорию. Но школьная геометрия — это не только аксиомы и теоремы, изложенные в учебнике. Школьная геометрия — это также (а может, и прежде всего) искусство решать геометрические задачи. Искусство же решать задачи основывается на хорошем знании теоретической части курса, знании достаточного количества геометрических фактов, не вошедших в этот курс, и владении определенным арсеналом приемов и методов решения геометрических задач. Поэтому представляется полезным выделить некоторое множество задач (будем называть их опорными), в которых формулируется некий факт, достаточно часто используемый в задачах, либо иллюстрируется какой-либо метод или прием решения задач. Соответственно мы будем различать две разновидности опорных задач: задача-факт (задача-теорема) и задача-метод.

В качестве примеров, иллюстрирующих понятие «опорная задача-факт», можно привести многие теоремы элементарной геометрии, не вошедшие в действующий курс, такие, как теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника (задача 19, с. 194), теорема о касательной и секущей к окружности, проведенных из одной точки (задача 17). Или же, например, следующая задача.

7. *Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.*

Доказательство. Пусть M — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, а K — точка пересечения продолжений ее боковых сторон (рис. 31). Обозначим через P и L середины AD и BC. Ввиду параллельности AD и BC любая прямая, проходящая через K, делит основания трапеции в одном и том же отношении (считая от вершин A и B). Отсюда следует, что точки K, P и L лежат на одной прямой. Точно так же прямая, проходящая через M, делит AD и BC в одном отношении (считая от вершин A и C). Значит, точки M, P и L тоже на одной прямой. Таким образом, четыре точки — M, K, P и L — лежат на одной прямой.

Опорная задача-метод, как уже отмечалось, иллюстрирует какой-либо метод решения геометрических задач, часто встречающийся прием или конструкцию. При этом речь в основном идет о методах, не требующих специальных теоретических обоснований. Таким образом, задача-метод рассматривается вместе с реше-

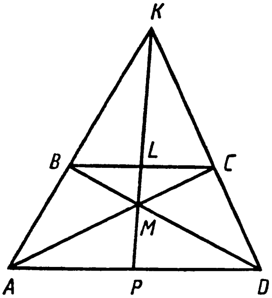


Рис. 31

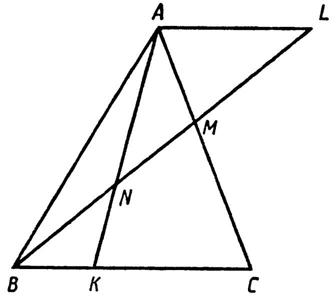


Рис. 32

нием, с тем решением, которое навязывается учебником. Это означает, что, если в процессе работы над соответствующей задачей учащиеся решили ее иначе, решение, предлагаемое учебником, должно быть подробно изучено и соответствующим образом прокомментировано. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

8. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, такая, что $AM=\frac{2}{5}AC$, а на стороне BC — точка K, такая, что $BK=\frac{1}{3}BC$. В каком отношении отрезок BM делит отрезок AK?*

Решение. Проведем через A прямую, параллельную BC, и обозначим через L точку ее пересечения с прямой BM (рис. 32). Пусть $BK=a$, тогда $BC=3a$. Из подобия треугольников AML и CMB найдем

$$\frac{AL}{BC}=\frac{AM}{MC}\Rightarrow AL=2a.$$

Теперь из подобия треугольников LAN и BKN найдем $\frac{AN}{NK}=2$.

Заметим, что предложенный метод решения этой задачи далеко не единственный. Задача может быть решена, например, и векторным методом. Однако подобный прием очень часто бывает эффективен в сходных задачах, и хорошее владение им, безусловно, полезно.

Рассмотрим еще одну задачу.

9. *Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает AB в точке C_1, а BC — в точке A_1. Прямая, проходящая через B и точку пересечения AA_1 и CC_1, пересекает AC в точке M. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через A и середину BM?*

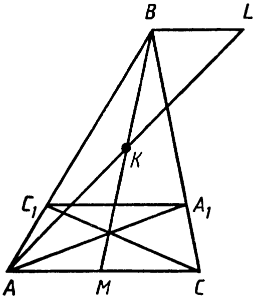


Рис. 33

Решение. Эта задача очевидным образом использует результат задачи 7 и прием, рассмотренный в задаче 8. Из результата задачи 7 следует, что M — середина AC. Проведя через вершину B прямую, параллельную AC, до пересечения с прямой AK (K — середина BM, рис. 33) в точке L, получим $BL = AM$. Теперь легко найти искомое отношение. Оно равно 0,5, считая от вершины B.

Конечно, приведенный пример носит несколько стилизованный характер. В действительности извлечь из архивов своей памяти нужный факт и нужный прием не всегда возможно столь легко и быстро.

37. Геометрические методы решения задач

Говоря о методах решения геометрических задач, следует отметить некоторые специфические особенности этих методов: большое разнообразие, взаимозаменяемость, трудность формального описания, отсутствие четких границ области применения. Кроме того, очень часто при решении некоторых достаточно сложных задач приходится прибегать к использованию комбинаций методов и приемов.

Уже на первом этапе решения — построение чертежа — можно говорить о наличии некоторых специальных приемов. С одним из таких приемов мы уже встречались при решении задач 3 и 4. Суть его в том, что при решении задач, в которых фигурирует одна или несколько окружностей, очень часто сами эти окружности не следует изображать, ограничиваясь указанием их центров, точек касания или пересечения с прямыми и друг с другом и проведением соответствующих отрезков прямых. Факт касания окружности с прямой означает равенство соответствующего угла 90°. Касание окружностей друг с другом означает, что расстояние между их центрами равно сумме радиусов окружностей в случае внешнего касания и равно разности радиусов окружностей в случае касания внутреннего. Такого рода чертежи без окружностей к задачам про окружности мы будем называть «скелетными». Рассмотрим задачу.

10. *В окружности радиуса R проведены два взаимно перпендикулярных радиуса OA и OB. Вторая окружность такого же радиуса R имеет центр в точке B. Найти радиус третьей окружности, касающейся радиуса OA первой окружности внутренним образом $\left(\text{точка касания расположена на дуге } AB, \text{ равной } \frac{\pi}{2}\right)$ и второй окружности внешним образом.*

Решение. В соответствии с указанным выше правилом для решения этой задачи нам следует рассмотреть чертеж, на котором изображены треугольник OBO_1 (O_1 — центр третьей окружности), отрезок OA, точка M на OA (рис. 34). При этом, если x — радиус искомой окружности, то $OO_1 = R - x$, $BO_1 = R + x$, $O_1M = x$ ($O_1M \perp OA$). Теперь у нас все подготовлено к решению этой задачи при помощи аналитических методов (составление уравнения относительно x). Решение этой задачи закончим в следующем пункте.

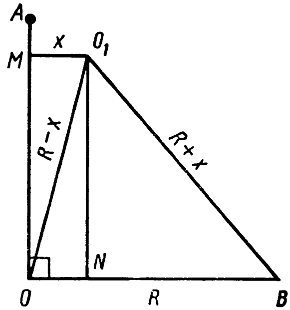


Рис. 34

Рассмотрим еще несколько методов решения геометрических задач. Мы уже встречались в предыдущих пунктах с некоторыми стандартными дополнительными построениями (задачи 3, 8, 9). Так, оказывается, в трапеции бывает полезно провести через одну вершину прямую, параллельную противоположной боковой стороне (задача 3). Если же в условии задачи говорится о диагоналях трапеции, то стандартным будет дополнительное построение, состоящее в проведении через одну из ее вершин прямой, параллельной диагонали. (С такого рода построением мы еще не встречались.) В задачах 8 и 9 мы проводили через одну из вершин треугольника прямую, параллельную его противоположной стороне, благодаря чему у нас образовывалось несколько пар подобных треугольников, после чего отношения одних отрезков заменялись отношениями других. С некоторой натяжкой можно говорить, что мы имели дело с одной из модификаций метода подобия.

Отметим еще несколько стандартных приемов. Если в условии есть медиана треугольника, то стоит попытаться продолжить эту медиану на такое же расстояние. При этом получим параллелограмм, стороны и одна диагональ которого равны сторонам треугольника, а вторая диагональ равна удвоенной медиане. Таким образом, если бы нам требовалось найти площадь треугольника по двум сторонам и медиане, заключенной между ними, то с помощью только что указанного приема легко убедиться, что треугольник этот равновелик треугольнику, две стороны которого равны соответствующим сторонам исходного, а третья равна удвоенной медиане.

Другой прием иллюстрирует задача 11.

11. *Расстояние между серединами двух сторон четырехугольника равно полусумме двух других его сторон. Доказать, что этот четырехугольник — трапеция.*

Решение. Пусть M — середина стороны AB, а K — середина стороны CD четырехугольника $ABCD$, причем

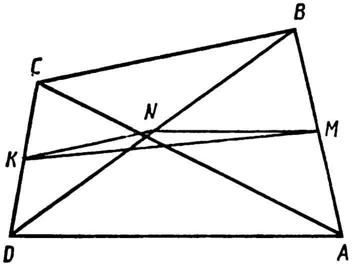


Рис. 35

$$MK=\frac{1}{2}(CB+AD).$$

Обозначим через N середину диагонали BD (рис. 35). Отрезок NK — средняя линия в треугольнике BCD, NK параллельна BC и равна $\frac{1}{2}BC$. Точно так же NM параллельна AD и равна $\frac{1}{2}AD$. Таким образом, $MK=MN+NK$, т. е. N лежит на отрезке MK. Значит, BC и AD параллельны друг другу, поскольку они обе параллельны MK. (Если считать, что параллелограмм не является трапецией, то в условии задачи следует добавить слова «или параллелограмм».)

Совет, который можно дать на основании этой и сходных задач, состоит в следующем. Если в условии задачи фигурирует середина одной или нескольких сторон четырехугольника или параллелограмма, то стоит добавить середины каких-то других сторон или диагоналей и рассмотреть средние линии соответствующих треугольников. Этот прием иногда называют методом «средних линий». (См. в этой связи также задачи №№ 39, 79 на с. 135, 197.)

Таким образом, мы выделили три разновидности дополнительных построений:

1) продолжение отрезка (отрезков) на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой;

2) проведение прямой через две заданные точки;

3) проведение через заданную точку прямой, параллельной данной прямой.

Необходимость в использовании геометрических преобразований возникает, как правило, при решении достаточно сложных геометрических задач (здесь речь идет, во-первых, о задачах, в условии которых геометрические преобразования не фигурируют, и, во-вторых, о задачах, которые трудно решить без использования геометрических преобразований); поэтому мы ограничимся одной иллюстрацией без каких-либо рекомендаций.

12. *Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABM и CDM с гипотенузами AB и CD расположены так, что $ABCD$ — четырехугольник. Одна диагональ этого четырехугольника равна d. Найти его площадь.*

Решение. Повернем треугольник AMC вокруг точки M в соответствующем направлении на $90°$ (рис. 36). При этом точка A перейдет в точку B, а C — в D, т. е. AC перейдет в BD. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны и перпендикулярны. Его площадь равна $\frac{1}{2}d^2$ (использовалась формула, вы-

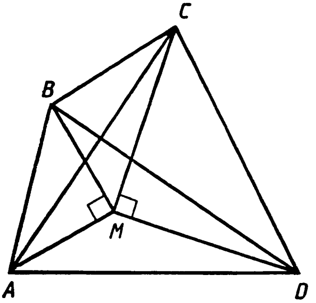


Рис. 36

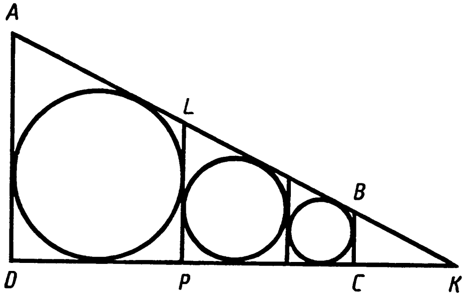


Рис. 37

ражающая площадь четырехугольника через его диагонали и угол между ними; задача 24, с. 194).

Следующий пример иллюстрирует метод подобия.

13. *Трапеция разделена на три трапеции прямыми, параллельными основаниям. Известно, что в каждую из трех получившихся трапеций можно вписать окружность. Найти радиус окружности, вписанной в среднюю трапецию, если радиусы окружностей, вписанных в две оставшиеся, равны R и r.*

Р е ш е н и е. Обозначения понятны из рисунка 37. Пусть радиус средней окружности равен x. Рассмотрим два подобных между собой треугольника AKD и LKP. Любые пары сходственных линейных величин в подобных треугольниках относятся одинаково. Паре окружностей с радиусом R и x в треугольнике AKD соответствует в треугольнике LKP пара окружностей с радиусами x и r. Следовательно,

$$\frac{x}{R}=\frac{r}{x}, \text{ откуда } x=\sqrt{Rr}.$$

Метод площадей имеет много разновидностей. Рассмотрим одну из них. Основная идея сводится к замене отношения отрезков, расположенных на одной прямой, отношением площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются рассматриваемые отрезки. Покажем, как работает этот прием, на примере известной теоремы.

14. *Доказать, что биссектриса угла B треугольника ABC пересекает AC в такой точке M, для которой справедливо равенство $AM:MC=AB:BC$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о (рис. 38).

$$\frac{AM}{MC}=\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BM\cdot \sin\frac{1}{2}ABC}{\frac{1}{2}BM\cdot BC\cdot \sin\frac{1}{2}ABC}=\frac{AB}{BC}.$$

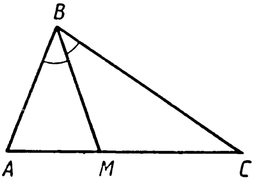


Рис. 38

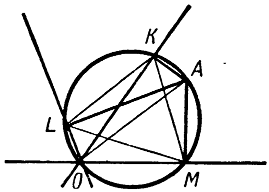


Рис. 39

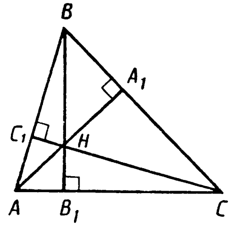


Рис. 40

Относя этот прием к геометрическим, мы делаем довольно серьезную натяжку. Доводы «за» следующие. Во-первых, в основе метода лежит чисто геометрическое соображение. Во-вторых, этот метод достаточно обособлен от других, как геометрических, так и алгебраических. Учитывая же разнообразие и пестроту методов, рассматриваемых в этом пункте, и, наоборот, некоторое единообразие методов, описываемых в следующих пунктах, мы предпочли рассмотреть его именно здесь.

Одним из наиболее красивых элементарно-геометрических методов является так называемый метод «вспомогательной окружности». Обычно этот метод характеризуется в решении следующими оборотами: «Заметим, что точки X, Y, ... лежат на одной окружности...», или «Проведем окружность (-ти) через точки X, Y, ...», или другими, с ними сходными. Приведем несколько примеров.

15. *Через точку O проведены три прямые, попарные углы между которыми равны 60°. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки A на эти прямые, служат вершинами правильного треугольника.*

Решение. Пусть K, L, M — основания перпендикуляров (рис. 39). Заметим, что точки O, A, K, L, M лежат на одной окружности с диаметром OA. Значит,

$$\angle KLM = \angle KOM = 60°,\ \angle KML = \angle KOL = 60°,$$

т. е. треугольник KLM равносторонний.

16. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.*

Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (см. задачу 30, с. 194). Заметим, что точки C, H, A_1, B_1 лежат на одной окружности с диаметром CH (рис. 40). Следовательно,

$$\angle A_1B_1H = \angle A_1CH = \angle BCC_1 = 90° - \angle B.$$

Точно так же на одной окружности располагаются точки H, A, B_1, C_1, и

$$\angle HB_1C_1 = 90° - \angle B.$$

Таким образом,

$$\angle A_1B_1H = \angle C_1B_1H.$$

То же верно для других углов.

17. *На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $BKLN$ так, что точка K лежит на продолжении AB за точку B, N лежит на луче BC. Найти угол между прямыми DL и AN.*

Решение. Пусть для определенности $BC > BN$. Опишем около квадратов окружности и обозначим через M точку пересечения этих окружностей, отличную от B (рис. 41). Имеем

$$\angle BML = \angle BNL = 90°, \ \angle BMD = \angle BCD = 90°.$$

Следовательно, точки D, M и L лежат на одной прямой. Далее

$$\angle DMA = \angle DCA = 45°, \ \angle LMN = 180° - \angle NBL = 135°.$$

Таким образом, M есть точка пересечения прямых AN и DL, а угол между этими прямыми равен 45°. Случай $BC \leqslant BN$ рассматривается аналогично.

Мы специально привели три задачи, решение которых основывалось на идее вспомогательной окружности. Дело в том, что этот метод не только эффектен, но и эффективен, и возможности для его применения встречаются гораздо чаще, чем это может показаться на первый взгляд.

В завершение этого пункта продемонстрируем одну весьма трудную задачу, точнее, ее решение, основанное на умении «видеть геометрию». (Метод? — «Геометрическое зрение»!)

18. *В треугольнике ABC угол B равен 120°. AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы внутренних углов этого треугольника. Доказать, что угол $A_1B_1C_1$ равен 90°.*

Решение (рис. 42). Заметим, что BA_1 — биссектриса угла, смежного с углом ABB_1 ($\angle B_1BA_1 = \angle A_1BM = 60°$), а AA_1 — бис-

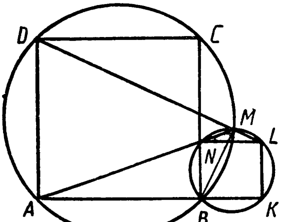


Рис. 41

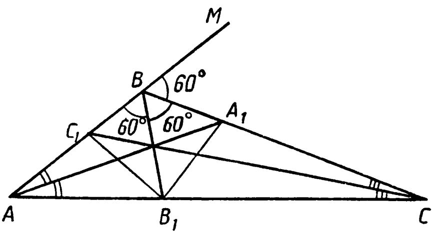


Рис. 42

сектриса угла BAC; следовательно, точка A_1 равноудалена от прямых AB и BB_1, а также от прямых AB и AC, т. е. A_1 равноудалена от прямых BB_1 и B_1C, т. е. B_1A_1 — биссектриса угла BB_1C. Точно так же C_1B_1 — биссектриса угла BB_1A. Таким образом,

$$\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1B_1B + \angle BB_1A_1 = \frac{1}{2}(\angle AB_1B + \angle BB_1C) = 90°.$$

Обратите внимание, что для решения этой задачи нам не потребовались ни дополнительные построения, ни вычисления. Все основывается на умении увидеть и сопоставить простые геометрические факты. Пример этот приведен не для того, чтобы задать верхний уровень задач, рассматриваемых в факультативе. Не всякий, даже опытный, хорошо решающий геометрические задачи, человек найдет подобное решение. Этой задачей мы хотели бы подчеркнуть одну из важнейших целей геометрической части нашего факультатива — развитие геометрической интуиции, геометрического мышления, геометрические зрения.

38. Аналитические методы

Один из недостатков элементарно-геометрических методов состоит в необходимости зачастую перебора различных вариантов расположения точек, прямых и т. д. Этот недостаток, как правило, исчезает при переходе к алгебраическим методам, методу координат, векторному методу. Хотя очень часто при этом исчезает и сама геометрия.

Говоря об алгебраическом методе решения геометрических задач, выделим прежде всего две его разновидности: а) метод поэтапного решения; б) метод составления уравнений.

Сущность первого (метода поэтапного решения) коротко состоит в следующем. Величины, заданные в условии задачи, и те, которые нужно найти, мы связываем цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие. Полезно при этом сначала составить план решения задачи, другими словами, выписать цепочку элементов, которые можно последовательно вычислить, соединяющую то, что дано, и то, что нужно найти.

Рассмотрим пример.

19. *В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.*

Решение (рис. 43). Прежде всего заметим, что $MNPQ$ — параллелограмм, поскольку биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны. Следовательно, нам достаточно найти стороны MN и MQ и угол QMN.

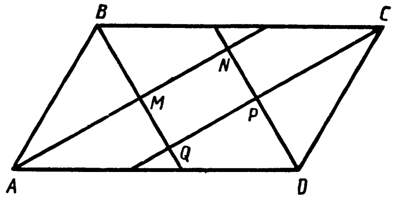


Рис. 43

Для определения угла QMN имеем «цепочку»: $\angle BAM$, $\angle ABM$ и, наконец, $\angle AMB = \angle QMN$. Для определения сторон MN и MQ находим последовательно BQ (из $\triangle BCQ$ по теореме синусов), BM и AM (из $\triangle BMA$), AN (из $\triangle NAD$), и, наконец, $MN = |AN - AM|$, $MQ = |BQ - BM|$.

Теперь полученный план решения реализуется:

$$\angle BAM = \frac{\alpha}{2}, \ \angle ABM = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2}(180° - \alpha),$$

$$\angle QMN = \angle AMB = 180° - \angle BAM - \angle ABM = \\ = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90°,$$

т. е. $MNPQ$ — прямоугольник. Далее

$$BQ = a \sin \frac{\alpha}{2}, \ BM = b \sin \frac{\alpha}{2}, \ MQ = |BQ - BM| = |a - b| \sin \frac{\alpha}{2}$$

и т. д. Ответ получается следующий: $S = \frac{1}{2}(a-b)^2 \sin \alpha$.

Сделаем одно замечание к нашему решению. Трудно гарантировать, что полученная таким образом схема соответствует оптимальному решению. Можно показать, что диагонали четырехугольника $MNPQ$ равны разности сторон параллелограмма $ABCD$ и параллельны соответствующим сторонам. Возможно, этот путь короче и изящнее.

При решении более сложных задач не всегда возможно увидеть весь путь решения от начала до конца. Поэтому поиск этого пути можно вести с двух сторон — с начала (что можем найти?) и с конца (что нужно найти?). Правда, как правило, с конца делается наибольшое число шагов — один, два. Например, если требуется найти радиус окружности, описанной около какого-либо треугольника, то задача будет решена, если мы найдем какую-либо его сторону и синус противолежащего угла (см. задачу 13, с. 193). Для определения радиуса вписанной окружности можно воспользоваться формулой $r = \frac{S}{p}$ (см. задачу 23), т. е. соответствующая задача сводится к нахождению периметра и площади треугольника.

Бывают ситуации, когда конфигурация, данная в задаче, жестко не определена. В этих случаях можно, введя необходимое число дополнительных элементов, доопределяющих конфигурацию, попытаться реализовать схему поэтапного решения. При этом введенные параметры должны в итоге сократиться. Например:

20. *Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внутренним образом в точке A. Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности. E — одна из точек пересечения CD с меньшей окружностью. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AEC.*

Решение. Пусть F — точка пересечения CD с AB (рис. 44). Предположим для определенности, что точки E и C лежат по одну сторону от AB. Поскольку положение CD не определено, то обозначим $AF = a$. Для определения радиуса окружности, описанной около AEC, нам достаточно найти AC и $\sin AEC$. Из прямоугольного треугольника ACM, в котором нам известны AM и AF, найдем AC (можно воспользоваться утверждением задачи 6, с. 193):

$$AC = \sqrt{AM \cdot AF} = \sqrt{2Ra}.$$

Аналогично из треугольника AEB найдем $AE = \sqrt{2ra}$. Значит,

$$\sin AEC = \sin AEF = \frac{AF}{AE} = \sqrt{\frac{a}{2r}}.$$

Таким образом, радиус окружности, описанной около треугольника AEC, будет равен:

$$\rho = \frac{AC}{2\sin AEC} = \frac{\sqrt{2Ra}}{2\sqrt{\frac{a}{2r}}} = \sqrt{Rr}.$$

Приведем теперь несколько задач, решаемых при помощи

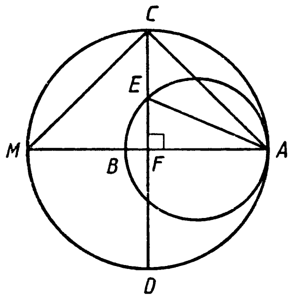


Рис. 44

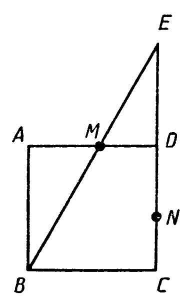


Рис. 45

составления уравнений. Начнем с того, что закончим решение задачи 10 (см. рис. 34). Проведем высоту O_1N, тогда $ON=x$. Выражая O_1N^2 из треугольников OO_1N и BO_1N по теореме Пифагора и приравнивая эти выражения, получим для x уравнение

$$(R-x)^2-x^2=(R+x)^2-(R-x)^2 \Leftrightarrow 6Rx=R^2,\ x=\frac{R}{6}.$$

Говоря о решении геометрических задач при помощи составления уравнений, можно в известной мере провести аналогию с текстовыми задачами на составление уравнений. (Аналогия для поэтапного решения — арифметические задачи, решаемые по действиям.) Так же, как и там, не следует бояться числа неизвестных, хотя дать четкие рекомендации по их рациональному и тем более оптимальному выбору вряд ли возможно. (Очень часто при выборе неизвестных следует руководствоваться правилом: неизвестные должны полностью определять рассматриваемую в задаче геометрическую фигуру.) Так же, как и там, надо посмотреть, что нужно найти, и искать именно это, а не стремиться всякий раз к полному решению полученной системы уравнений. Так же, как и там, приведенные только что рекомендации — рекомендации, и ничего больше.

Для получения уравнения обычно величину какого-либо элемента конфигурации — угол или его тригонометрическую функцию, длину отрезка, площадь фигуры — выражают дважды различными способами через введенные неизвестные. В частности, она может быть задана в условии задачи.

Противопоставляя друг другу два алгебраических метода, оговоримся, что далеко не всегда их можно выделить, так сказать, в чистом виде. Так, например, в любом решении задачи на вычисление присутствуют элементы поэтапного решения. С другой стороны, вполне возможны случаи, когда составление уравнения является лишь частью общего решения задачи. Кроме того, как правило, в алгебраических решениях встречаются различные дополнительные построения, элементы геометрических методов.

21. *На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной 3 взяты две точки M и N так, что $MD+DN=3$. Прямые BM и CD пересекаются в точке E. Найти длину отрезка NE, если $ME=4$.*

Решение (рис. 45). Пусть $MD=x$, $DE=y$. Из подобия треугольников BAM и EDM получим $\frac{3}{3-x}=\frac{y}{x}$. Второе уравнение дает нам теорема Пифагора для треугольника MDE: $x^2+y^2=$ $=16$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} 3x-3y+xy=0, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$$

Нам нужно найти $NE=ND+DE=3-x+y$, т. е. найти $y-x$.

Пусть $y-x=u$. Из первого уравнения $xy=3u$. Второе уравнение перепишем в виде $(y-x)^2+2xy=16$ или $u^2+6u-16=0$, откуда $u=2$ ($u=-8$ не подходит). $NE=5$.

22. *В прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен 3, катет AC равен 6. Центры окружностей радиусов 1, 2 и 3 находятся соответственно в точках A, B и C. Найти радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.*

Решение. Сделаем в соответствии с рекомендацией предыдущего пункта скелетный чертеж. Нам достаточно провести отрезки OA, OB, OC, где O — центр искомой окружности (рис. 46). Если радиус четвертой окружности равен x, то $OA=1+x$, $OB=2+x$, $OC=3+x$. Введем еще одно неизвестное: $\angle OAC=\varphi$, тогда $\angle OAB=90°-\varphi$. Запишем теорему косинусов для треугольников AOC и AOB. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^2=(x+1)^2+36-12(x+1)\cos\varphi, \\ (x+2)^2=(x+1)^2+9-6(x+1)\sin\varphi. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $\cos\varphi$, а из второго $\sin\varphi$. Используя соотношение $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, получим уравнение, содержащее лишь одно неизвестное x; решив это уравнение, получим ответ.

Ответ. $x=\dfrac{8\sqrt{11}-19}{7}$.

Заметим, что использование теоремы косинусов или ее частного случая — теоремы Пифагора — для составления уравнений — один из наиболее часто встречающихся приемов. Важную роль играет также правильный выбор неизвестных. Так, в задачах 10 и 21 все неизвестные — линейные величины, в задаче 22 — линейная и угловая. Приведем пример, в котором решение задачи сводится к решению чисто тригонометрического уравнения.

23. *В равнобочной трапеции основание AD равно диагонали AC. Известно, что $\angle CAD=\angle CDM$,* где *M — середина BC. Найти углы трапеции.*

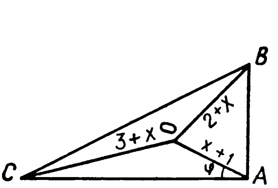


Рис. 46

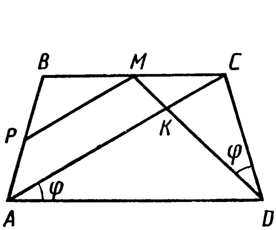


Рис. 47

Решение (рис. 47). Пусть $\angle CAD=\varphi$, тогда $\angle ADC=$ $=\angle ACD=90^\circ-\frac{\varphi}{2}$. Поскольку по условию $\angle MDC=\angle CAD=$ $=\varphi$, то

$$\angle CMD=\angle MDA=\angle ADC-\angle MDC=90^\circ-\frac{3}{2}\varphi,$$

$$\angle MCD=90^\circ+\frac{\varphi}{2}.$$

По теореме синусов для треугольника MDC найдем

$$\frac{MD}{\sin\left(90^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{CD}{\sin\left(90^\circ-\frac{3}{2}\varphi\right)},\quad MD=CD\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{3}{2}\varphi}.$$

Но M — середина BC. Следовательно, проекция MD на AD равна $\frac{1}{2}AD$, т. е.

$$AD=2MD\cdot\cos\left(90^\circ-\frac{3}{2}\varphi\right)=2CD\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi}{\cos\frac{3}{2}\varphi}.$$

Из равнобедренного треугольника ACD найдем $AD=\dfrac{CD}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Приравнивая два выражения для AD, получим уравнение

$$\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\varphi}{\cos\frac{3}{2}\varphi}=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Прежде чем приступить к решению этого уравнения, заметим, что мы сознательно избрали прямолинейный путь, не пытались делать по ходу какие-либо упрощения (что в общем-то тактически неверно), отнеся все эти проблемы к тригонометрии.

Вернемся к нашему уравнению. Сначала его надо упростить. Можно доказать, что

$$\cos\frac{3}{2}\varphi=\cos\frac{\varphi}{2}(2\cos\varphi-1),\quad 2\sin\frac{3}{2}\varphi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\cos\varphi-\cos 2\varphi.$$

Сократив теперь в числителе и знаменателе левой части уравнения $\cos\frac{\varphi}{2}$, освободившись от знаменателя, придем к уравнению (проверьте!) $2\cos 2\varphi=1$, т. е. $2\varphi=60^\circ$, $\varphi=30^\circ$. Таким образом, два угла трапеции равны 75°, два оставшихся 105°.

Замечание. Эту задачу можно решить при помощи вспомогательной окружности; в данном случае в качестве таковой можно взять окружность, проходящую через точки A, D, M и середину AB (см. рис. 47). (Если P — середина AB, то $\angle PMD=\angle AKD=$ $=180^\circ-\varphi-\left(90^\circ-\frac{3}{2}\varphi\right)=90^\circ+\frac{\varphi}{2}$, $\angle PAD=\angle CDA=90^\circ-\frac{\varphi}{2}$,

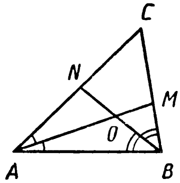


Рис. 48

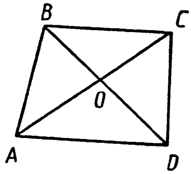


Рис. 49

т. е. $\angle PMD + \angle PAD = 180°$. Значит, точки A, P, M и D лежат на одной окружности.)

Следовательно, $\angle AMD = \angle APD = 90°$, AMD — равнобедренный прямоугольный треугольник; высота, опущенная из точки C на AD, равна высоте, опущенной из точки M на AD, и равна $\frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AC$, т. е. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, и т. д.

24. *Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = \sqrt{3}\, MO$, $NO = (\sqrt{3} - 1)\, BO$. Найти углы треугольника.*

Решение. Казалось бы, условие задачи требует введения в качестве неизвестных углов задачи, после чего нужные уравнения получаются при помощи теоремы синусов. (Попытайтесь реализовать этот путь самостоятельно и сравните с нижеприведенным решением.) Мы, однако, введем другие неизвестные (рис. 48):

$$BC = x, \ AC = y, \ AB = z.$$

По теореме о биссектрисе (задача 14)

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{z}{y}.$$

Но $BM + MC = x$, значит, $BM = \frac{xz}{y+z}$. Аналогично $AN = \frac{yz}{x+z}$.

Теперь, рассмотрев треугольники BMA и BNA с биссектрисами BO и AO и применив к ним ту же теорему, получим в соответствии с условием задачи систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{z+y} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{y}{x+z} = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{3} - y = z, \\ -x(\sqrt{3} - 1) + y = z(\sqrt{3} - 1). \end{cases}$$

Далее выразим все неизвестные через одно, например через z: $x = \sqrt{3}z$, $y = 2z$. Теперь по теореме косинусов можно найти углы треугольника: $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$.

Приведем пример, в котором в качестве неизвестных удобно взять площади. Кроме того, принципы составления уравнений в этом примере несколько отличаются от стандартной схемы.

25. *В выпуклом четырехугольнике, площадь которого равна S, проведены диагонали, разбивающие четырехугольник на четыре треугольника. Площади двух треугольников, прилежащих к противоположным сторонам, равны S_1 и S_2. Найти площади двух оставшихся треугольников.*

Р е ш е н и е. Обозначим площади оставшихся треугольников через x и y. Первое уравнение очевидно: $x+y=S-S_1-S_2$. Второе уравнение будет $xy=S_1S_2$. Докажем это. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O (рис. 49) и $\angle AOB=\alpha$. Тогда $S_{AOB}\cdot S_{COD}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\alpha=$
$=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin(\pi-\alpha)\cdot\frac{1}{2}\cdot DO\cdot OA\cdot\sin(\pi-\alpha)=S_{BOC}\cdot S_{DOA}$.

Имеем систему

$$\begin{cases} x+y=S-S_1-S_2, \\ xy=S_1S_2, \end{cases}$$

т. е. x, y — корни квадратного уравнения $z^2-(S-S_1-S_2)z+$ $+S_1\cdot S_2=0$, решив которое получим ответ:

$$\frac{1}{2}\left(S-S_1-S_2\pm\sqrt{(S-S_1-S_2)^2-4S_1S_2}\right).$$

Следует отметить, что многие задачи, решаемые алгебраическим методом, могут иметь два варианта решения — поэтапный и составлением уравнений. Например:

26. *Внутри угла величины α с вершиной в точке O взята точка A. Расстояние от точки A до одной из сторон угла равно a, а проекция OA на другую его сторону равна b. Найти OA.*

Р е ш е н и е. Пусть проекция A на одну сторону — точка B,

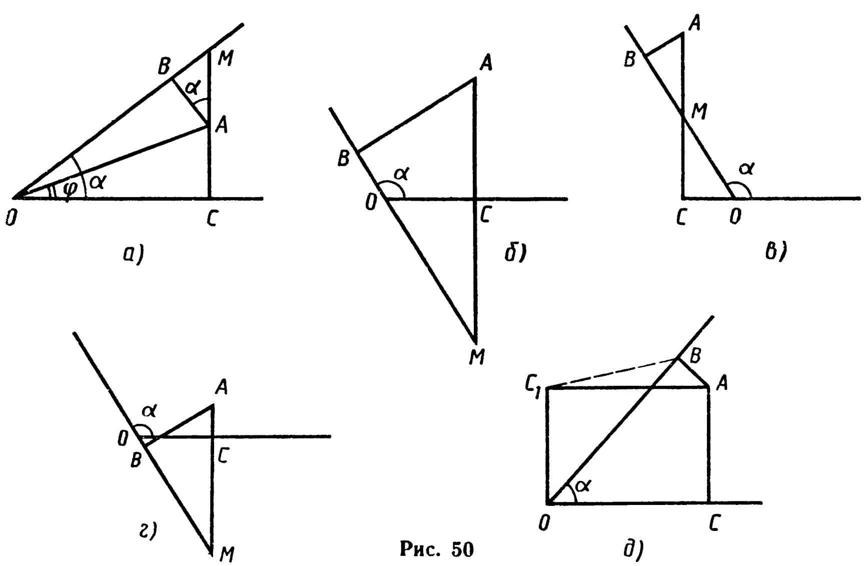


Рис. 50

а на другую — точка C, $AB=a$, $OC=b$ (рис. 50, *а*). Продолжим CA до пересечения с прямой OB в точке M. Последовательно находим

$$OM=\frac{OC}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\alpha},\quad BM=AB\operatorname{tg}\alpha=a\operatorname{tg}\alpha,$$

$$OB=OM-BM=\frac{b}{\cos\alpha}-a\operatorname{tg}\alpha=\frac{b-a\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Значит,

$$OA=\sqrt{OB^2+BA^2}=\sqrt{\left(\frac{b-a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+a^2}=\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}.$$

Это поэтапный метод. Приведем другое решение при помощи составления уравнений. Введем неизвестные: $\angle AOC=\varphi$, $OA=x$. Без труда получаем

$$\begin{cases} x\cos\varphi=b,\\ x\sin(\alpha-\varphi)=a.\end{cases}$$

Для решения полученной системы можно раскрыть во втором уравнении $\sin(\alpha-\varphi)$ по формуле синуса разности и разделить второе уравнение на первое, после чего получим уравнение, из которого найдем $\operatorname{tg}\varphi$, и т. д.

Итак, задача решена? Все было бы хорошо, если бы в условии было сказано, что α — острый угол. А если $\alpha=90^\circ$ или $\alpha>90^\circ$?

Сразу видно, что при $\alpha=90^\circ$ должно быть $a=b$, тогда $OA>a$. Если же $a\neq b$ и $\alpha=90^\circ$, условия задачи противоречивы. Посмотрим, что будет при $\alpha>90^\circ$.

Недостаточно просто поставить в правой части выражения для OA знак абсолютной величины:

$$OA=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{|\cos\alpha|}.$$

Оказывается, возможны три случая расположения точки относительно сторон угла (рис. 50, *б*, *в* и *г*). При этом рисунки *б* и *г* дают тот же ответ, а рисунок *в* дает нам

$$OA=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin\alpha}}{-\cos\alpha}.$$

Систему уравнений при $\alpha>90^\circ$ также необходимо уточнить, поставив справа в первом уравнении знак абсолютной величины. Поскольку $\sin(\alpha-\varphi)>0$, то второе уравнение остается прежним. Теперь наша система уравнений распадется на две, отличающиеся знаком в первом уравнении.

Ответ. Если $0<\alpha<90^\circ$, то $OA=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$; если $90^\circ<$

$<\alpha<180°$, то $OA=-\frac{\sqrt{a^2+b^2\pm2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$; если $\alpha=90°$, то при $a=b$ будет $OA>a$, при $a\neq b$ решения нет.

Исследование, анализ решения, рассмотрение различных случаев, необходимость которых возникла в этой задаче, существенно повысили уровень ее сложности. Один из выводов состоит в том, что, окончив решение, получив ответ, не спешите, подумайте, не упущены ли какие-то случаи, нюансы и т. д.

Обратим внимание также на некоторую некорректность, содержащуюся в формулировке условия задачи 26. Под расстоянием от точки до стороны угла и проекцией отрезка на сторону понимается соответственно расстояние от точки до прямой, на которой лежит эта сторона угла, и проекция на эту прямую, что не является само собой разумеющимся.

Возможно и такое — третье — решение. Возьмем точку C_1 так, что $OCAC_1$ — прямоугольник (см. рис. 50, *д*). Тогда OA — диаметр окружности, описанной около треугольника BAC_1. BC_1 находится по теореме косинусов для треугольника BAC_1:

$$OA=\frac{BC_1}{\sin BAC_1}=\frac{BC_1}{|\cos\alpha|}.$$

На этом мы закончим рассмотрение примеров, иллюстрирующих алгебраические методы решения геометрических задач. Если еще раз внимательно просмотреть примеры, приведенные в этом пункте, то можно заметить, что почти во всех примерах делались некоторые дополнительные построения, использовался ряд геометрических соображений. Итак, решая геометрическую задачу алгебраическим методом, все же не следует забывать, что это задача по геометрии, а не по алгебре. Старайтесь не проходить мимо простейших геометрических фактов, упрощающих решение. В противном случае вы можете превратить пустяковую геометрическую задачу в чрезвычайно сложную алгебраическую, что нередко происходит не только со школьниками, но и с более опытными людьми.

39. Метод координат. Векторный метод

Метод координат является самым универсальным методом геометрии. Бытует расхожее мнение, что любая геометрическая задача может быть решена методом координат. В принципе это верно, так же верно,как и то, что человек может все. Однако школьный курс и практика вступительных экзаменов дают не так много примеров задач, в которых метод координат предпочтительнее иных методов. Разумеется, речь идет о тех задачах, условие которых не содержит упоминания о координатах.

Главное при решении геометрических задач координатным методом — удачный выбор системы координат: выбор начала координат и направления осей. Обычно в качестве осей координат выбираются прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии (если таковые имеются) фигур, рассматриваемых в задаче. Можно сказать, что желательно, чтобы система координат естественным образом определялась условием задачи.

27. *В круге с центром O проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. На радиусе OB взята точка K так, что* $OK=\frac{1}{3}OB$, *а на радиусе OD — точка M так, что* $OM=\frac{1}{2}OD$. *Доказать, что точка пересечения прямых CK и AM расположена на данной окружности (рис. 51).*

Решение. Задача естественным образом решается координатным методом. За оси координат выбираем прямые AB и CD. Можно считать, что данная окружность имеет радиус, равный 1. Точка K имеет координаты $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$, M — $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$. Уравнение прямой, проходящей через точки $C(0;\ 1)$ и $K\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$, есть $y=1-3x$. Уравнение прямой, проходящей через $A(-1;\ 0)$ и $M\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$, есть $y=-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$. Решая систему уравнений

$$y=1-3x,\ y=-\frac{1}{2}-\frac{x}{2},$$

найдем координаты точки пересечения прямых CK и AM: $\left(\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$. А поскольку $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1$, то найденная точка лежит на окружности.

Нетрудно решить координатным методом, например, задачу 17, с. 179, взяв за оси координат прямые AB и AD. При этом может возникнуть вопрос: зачем нам все эти красивости с вспомогательной окружностью, если существует достаточно простое, рутинное решение этой задачи методом координат? Помимо доводов, апеллирующих к эстетике решения геометрических задач, вполне понятных и очевидных доводов за «вспомогательную окружность», мы приведем иной довод, как ни странно исходящий из степени общности метода. Оказывается, утверждение задачи 17 остается верным, если точки K и N не расположены на прямых AB и BC (в самом деле, в решении это обстоятельство никак не использовалось), достаточно лишь совпадения вершины двух квадратов. Более того, прямая CK также проходит через точку M перпендикулярно прямой AN. Все это получается в приведенном нами решении, как говорится, даром. В то время как доказательство такого обобщения методом координат довольно затруднительно. Задача допускает и дальнейшие обобщения, например на правильные многоугольники. (Сделайте это самостоятельно.)

Почти все сказанное о методе координат можно отнести с некоторыми видоизменениями к векторному методу.

Рассмотрим два примера.

28. *На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что $BM=2CM$. Точки K и L выбраны на сторонах AC и AB соответственно так, что $AK=2CK$, $BL=3AL$. В каком отношении прямая KL делит отрезок AM (рис. 52)?*

Решение. Обозначим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ для краткости. Пусть $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{LE}=y\overrightarrow{LK}$. Имеем

$$\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{AE}=\frac{x}{3}\vec{a}+\frac{2x}{3}\vec{b}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AL}+y\overrightarrow{LK}=\frac{1}{4}\vec{a}+y\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}\right)=\frac{1}{4}(1-y)\,\vec{a}+\frac{2y}{3}\vec{b}.$$

Ввиду единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получим систему уравнений

$$\frac{x}{3}=\frac{1}{4}(1-y),\ \frac{2x}{3}=\frac{2y}{3},$$

откуда $x=\frac{3}{7}$. Искомое отношение равно: $AE:EM=3:4$.

29. *В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC. Пусть M — произвольная точка окружности. Чему равна сумма $MA^2+MB^2+MC^2$?*

Решение. Прежде всего заметим (рис. 53), что если O — центр окружности, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Таким образом,

$$AM^2+BM^2+CM^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2=$$
$$=3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}\,(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=6R^2.$$

Данная задача допускает всевозможные обобщения, например на правильные многоугольники. При этом для точки M может быть указано лишь расстояние от центра окружности.

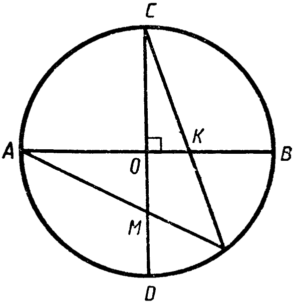


Рис. 51

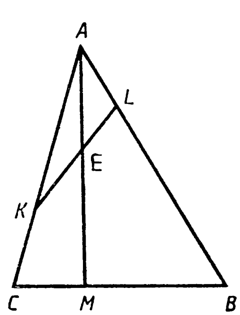


Рис. 52

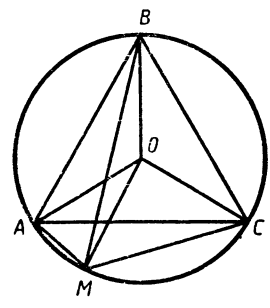


Рис. 53

*
* *

Подводя итог нашему небольшому обзору методов решения и методов поиска решения геометрических задач, заметим, что не все этапы в равной степени обязательно присутствуют в решении любой задачи. Мы видели примеры, показывающие, что не всегда приходится выявлять характерные особенности конфигурации и, наоборот, некоторые решения одним этим этапом по сути и исчерпывались. Отдельно следует сказать об анализе полученного решения. В полной мере этот анализ мы были вынуждены проделать лишь в одной задаче. Как показывает пример этой задачи, основная функция анализа — контроль правильности полученного решения, выявление других возможностей, отличных от рассмотренных, оценка полноты решения. Иногда в ходе анализа необходимо провести исследование, существует ли полученная конфигурация, не относится ли она к разряду невозможных, при каких условиях возможно ее существование. Возникает вопрос: всегда ли подобное исследование нужно делать? Все зависит от конкретной задачи. Чтобы не вдаваться в детали, не рассматривать различные примеры, дадим следующий совет: ученику не следует делать больше того, чем это требуется по условию задачи.

И еще одно, последнее замечание. Каждая из рассмотренных нами задач, как правило, сопровождалась лишь одним решением, иллюстрировавшим тот или иной прием, тот или иной метод решения. Возможно, что при этом предлагался для данной конкретной задачи не самый лучший метод. В частности, в задаче 22, вероятно, удобнее было бы воспользоваться методом координат, а в задаче 27, наоборот, вместо метода координат — тригонометрическим методом, а именно: зная тангенсы углов KCO и MAO (они равны $1/3$ и $1/2$), доказать, что тангенс их суммы равен 1 и т. д. Бесспорно, изучение методов решения геометрических задач будет более эффективным, если рассматривать на примере одной задачи возможности использования различных геометрических и алгебраических методов. Поэтому советуем еще раз просмотреть разобранные задачи и попытаться решить их по-другому.

40. Задачи

Опорные задачи (1—44).

Предлагаемый здесь начальный список опорных задач носит рекомендательный характер. В дальнейшем, по мере усложнения решаемых задач, расширения и углубления применяемых методов, этот список должен пополняться.

1. Докажите, что дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сумма углов BAD

и BCD равна 180°. Докажите, что около $ABCD$ можно описать окружность.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABD равен углу ACD. Докажите, что около $ABCD$ можно описать окружность.

4. Докажите, что медиана в прямоугольном треугольнике, выходящая из прямого угла, равна половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

5. Пусть две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника. Следует ли из этого, что треугольники равны?

6. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AB опущена высота CD. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot DB$, $BC^2 = BA \cdot BD$.

7. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, выходящими из той же вершины.

8. В треугольнике ABC проведена высота BN. O — центр описанной около ABC окружности. Докажите, что $\angle OBC = \angle NBA$.

9. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и AA_1. O — центр описанной около ABC окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны.

10. Докажите, что для произвольного треугольника выполняется равенство $r = \dfrac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$, где r — радиус вписанной окружности; A, B, C — углы треугольника; $a = BC$.

11. Докажите, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $1:2$.

12. Докажите, что медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.

13. Докажите, что диаметр окружности, описанной около треугольника, равен отношению его стороны к синусу противолежащего угла.

14. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Докажите, что величина угла измеряется полуразностью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

15. Пусть вершина угла находится внутри круга. Докажите, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

16. Пусть AB — хорда окружности, l — касательная к окружности (A — точка касания). Докажите, что каждый из двух углов между AB и l измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

17. Через точку M, находящуюся на расстоянии a от центра окружности радиуса R ($a > R$), проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Докажите, что $MA \cdot MB$ постоянно для всех секущих и равно $a^2 - R^2$ (квадрату длины касательной).

18. В окружности радиуса R через точку M, находящуюся на расстоянии a от ее центра $(a<R)$, проведена хорда AB. Докажите, что $AM \cdot MB$ постоянно для всех хорд и равно R^2-a^2.

19. Пусть AM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BM:CM=AB:AC$. То же верно для биссектрисы внешнего угла треугольника. В этом случае M лежит на продолжении стороны BC.

20. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

21. Стороны треугольника равны a, b и c. Докажите, что медиана, проведенная к стороне a, вычисляется по формуле $m_a=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

22. Даны два треугольника, у которых одна вершина A общая, а другие вершины расположены на двух прямых, проходящих через A. Докажите, что отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений двух сторон каждого треугольника, содержащих вершину A.

23. Докажите, что площадь описанного многоугольника равна rp, где r — радиус вписанной окружности; p — его полупериметр (в частности, эта формула справедлива для треугольника).

24. Докажите, что площадь четырехугольника равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними.

25. Докажите справедливость следующих формул для площади треугольника: $S=\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$, $S=2R^2 \sin A \sin B \sin C$, где A, B, C — углы треугольника; a — сторона, лежащая против угла A; R — радиус описанной окружности.

26. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$, где a и b — катеты; c — гипотенуза.

27. Докажите, что если a и b — две стороны треугольника, α — угол между ними и l — биссектриса этого угла, то $l=$ $=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

28. Докажите, что расстояния от вершины A треугольника ABC до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC равны $p-a$, где p — полупериметр треугольника ABC, $a=BC$.

29. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется соотношение $AB+CD=AD+BC$, то существует окружность, касающаяся всех его сторон.

30. Докажите, что: а) высоты в треугольнике пересекаются в одной точке и б) расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

31. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

32. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

33. В треугольнике ABC угол ABC равен α. Найдите угол AOC, где O — центр вписанной окружности.

34. Сторону правильного десятиугольника выразите через R — радиус описанной окружности.

35. Для всякого ли треугольника из его: а) медиан; б) высот — можно составить еще один треугольник?

36. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Докажите, что треугольники BMN и ABC подобны. Чему равен угол ABC, если $AC = 2MN$?

37. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, касающейся двух данных и их общей внешней касательной.

38. Найдите длину общей внешней касательной к двум окружностям с радиусами R и r, если расстояние между их центрами равно a. Найдите длину общей внутренней касательной к этим же окружностям.

39. Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника является параллелограммом. При каком условии этот параллелограмм будет: а) прямоугольником; б) ромбом; в) квадратом?

40. Основания трапеции a и b. Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

41. Найдите площадь трапеции с основаниями 7 и 11 и боковыми сторонами 3 и 5.

42. Найдите площадь трапеции с основаниями 6 и 7 и диагоналями 5 и 12.

43. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции, делящего площадь трапеции пополам.

44. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям трапеции с концами на боковых сторонах трапеции.

* * *

45. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

46. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника BCK, если $BC = a$, $CA = b$.

47. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CBD=58°$, $\angle ABD=44°$, $\angle ADC=78°$. Найдите угол CAD.

48. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в три раза больше длины окружности, в него вписанной. Найдите углы при основании этого треугольника.

49. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

50. В треугольнике ABC угол A равен 60°, $AB=1$, $BC=a$. Найдите AC.

51. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности длиной 2 удалена от ее центра на расстояние 3.

52. Дан угол величиной α с вершиной в точке A. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки B на стороны угла, равно a. Найдите AB.

53. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8, а медиана, заключенная между ними, равна 5.

54. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$. На стороне BC взята точка E так, что $CE=2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.

55. Дан треугольник ABC. Сколько найдется таких точек M, что треугольники ABM, BCM и CAM будут равновелики?

56. На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что $3BM=MC$. В каком отношении прямая AM делит медиану, выходящую из вершины B?

57. Найдите отношение радиусов двух окружностей, касающихся между собой, если каждая из них касается сторон угла, величина которого равна α.

58. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках M, D, N. Известно, что $NA=2$, $NC=3$, $\angle BCA=\frac{\pi}{3}$. Найдите MD.

59. О прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB=2$, $BD=\sqrt{3}$. Точка M делит отрезок CD в отношении $1:2$, считая от точки C, K — середина AD. Какой из отрезков больше: BK или AM?

60. В треугольнике ABC сторона AC равна 3, $\angle BAC=\frac{\pi}{6}$, радиус описанной окружности равен 2. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 3.

61. В треугольнике ABC проведена медиана BM и высота AH. Известно, что $BM=AH$. Найдите угол MBC.

62. Основания трапеции равны 1 и 4, одна боковая сторона $\sqrt{2}$. Найдите вторую боковую сторону, если известно, что диагонали трапеции перпендикулярны.

63. На стороне BC треугольника ABC взята точка M, а на стороне AB — точка N. Известно, что $BM:MC=1:2$, $BN:NA=$

$=3:2$. В каком отношении прямая MN делит отрезок BK, где K точка на AC, такая, что $AK:KC=4:3$?

64. Каждая сторона первого треугольника больше любой стороны второго. Верно ли, что: а) $S_1>S_2$; б) $R_1>R_2$; в) $r_1>r_2$ (S_1, S_2, R_1, R_2, r_1, r_2 — соответственно площади, радиус описанной и радиус вписанной окружностей)?

65. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный, тупоугольный?

66. Высоты треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный, тупоугольный?

67. Углы треугольника удовлетворяют условию $A>B>C$. Какая из вершин треугольника находится ближе всего к центру вписанной окружности?

68. Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 1 м, а площадь меньше 1 см^2?

69. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м^2?

70. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат по разные стороны от прямой AB. Сторона AB равна радиусу описанной окружности. O — центр вписанной окружности. Найдите угол AOB.

71. На одной стороне прямого угла с вершиной в точке O взяты две точки A и B, причем $OA=a$, $OB=b$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

72. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен 30°. Найдите радиус окружности с центром в вершине угла в 30°, делящей данный треугольник на две равновеликие части.

73. В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b. Найдите расстояние от вершины прямого угла до ближайшей к ней точки вписанной окружности.

74. В прямоугольном треугольнике медиана равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите площадь треугольника.

75. В треугольнике ABC даны стороны $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

76. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взята точка M так, что $AM=a$, $MC=b$. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM.

77. В ромб с высотой h и острым углом α вписана окружность. Найдите радиус наибольшей из двух возможных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух сторон ромба.

78. Определите острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое его диагоналей.

79. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найдите площадь четырехугольника.

80. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB, точки M и N делят AD на три равные части. Найдите $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

81. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Докажите, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

82. На окружности радиуса r выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделенной на три дуги, длины которых относятся как $3:4:5$. В точках деления к окружности проведены касательные. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными.

83. Около окружности описана равнобочная трапеция с боковой стороной l, одно из оснований которой равно a. Найдите площадь трапеции.

84. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

85. О трапеции $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$ $(a \neq b)$. Определите, что пересекает биссектриса угла A: основание BC или боковую сторону CD.

86. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что площади двух треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны.

87. В равнобочной трапеции, описанной около окружности, отношение параллельных сторон равно k. Найдите угол при основании.

88. В трапеции $ABCD$ основание AB равно a, а основание CD равно b. Найдите площадь трапеции, если известно, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов DAB и ABC.

89. В равнобочной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

90. Площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна S, а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определите радиус вписанной в трапецию окружности.

91. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

92. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Найдите расстояние между точками пересечения высот двух получившихся треугольников, если катеты данного треугольника равны a и b.

93. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол параллелограмма, если его стороны равны a и b, $(a < b)$.

94. Дан полукруг с диаметром AB. Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр AB?

95. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна a, и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата $ABCD$, касается стороны AB в точке E, а также касается стороны BC и диагонали AC. Вторая окружность с центром в точке A проходит через точку E. Найдите площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

96. Вершины правильного шестиугольника со стороной a, являются центрами окружностей, радиусы которых равны $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих окружностей.

97. Вне окружности радиуса R взята точка A, из которой проведены две секущие: одна проходит через центр, а другая — на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра. Найдите площадь части круга, расположенной между этими секущими.

98. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle DBC = 90^\circ$. Кроме того, $DB = a$, $DC = b$. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки D, A и B, а другая — через точки B, C, и D.

99. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD = d$.

100. На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N так, что $AM:MN:NB = 1:2:3$. Через точки M и N проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна S.

101. Дана окружность и точка A вне ее. AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

102. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = BM + CM$.

103. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle BAH = \alpha$, $\angle ABH = \beta$.

104. Площадь ромба равна S, сумма его диагоналей — m. Найдите сторону ромба.

105. Квадрат со стороной a вписан в окружность. Найдите сторону квадрата, вписанного в один из полученных сегментов.

106. В сегмент с дугой 120° и высотой h вписан прямоугольник $ABCD$ так, что $AB:BC=1:4$ (BC лежит на хорде). Найдите площадь прямоугольника.

107. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найдите радиус меньшей окружности.

108. К окружности радиуса R из внешней точки M проведены касательные MA и MB, образующие угол α. Определите площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей дугой окружности.

109. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Найдите радиус окружности, проходящей через середину стороны AB, центр квадрата и вершину C.

110. Дан ромб со стороной a и острым углом α. Найдите радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.

111. Даны три попарно касающиеся окружности радиуса r. Найдите площадь треугольника, образованного тремя прямыми, каждая из которых касается двух окружностей и не пересекает третью.

112. Окружность радиуса r касается некоторой прямой в точке M. На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B так, что $MA=MB=a$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся данной окружности.

113. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. На стороне BC взята точка M так, что $BM=3MC$, а на стороне CD — точка N так, что $2CN=ND$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AMN.

114. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Определите расстояние между серединой отрезка AM, где M — середина BC, и точкой N на стороне CD, делящей ее так, что $CN:ND=3:1$.

115. В прямоугольном треугольнике ABC катет CA равен b. Катет CB равен a, CH — высота, AM — медиана. Найдите площадь треугольника BMH.

116. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $\angle A=\alpha>90^\circ$ и $BC=a$. Найдите расстояние между точкой пересечения высот и центром описанной окружности.

117. Вокруг треугольника ABC, в котором $BC=a$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает окружность в точке K. Найдите AK.

118. В окружности радиуса R проведен диаметр и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.

119. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a.

120. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найдите радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна a.

121. В правильном треугольнике ABC, сторона которого равна a, проведена высота BK. В треугольники ABK и BCK вписано по окружности и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от стороны AC. Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от треугольника ABC.

122. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BKC=\gamma$, где K — точка пересечения диагоналей. Найдите угол ACD.

123. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $AB=a$, $BK=b$, $AK=c$, $CD=d$. Найдите AC.

124. Вокруг трапеции описана окружность. Основание трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найдите отношение площади круга к площади трапеции.

125. В равнобочной трапеции $ABCD$ основание AD равно a, основание BC равно b, $AB=d$. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K. Найдите площадь треугольника BDK.

126. Найдите сумму квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен R, а расстояние от точки M до центра окружности равно a.

127. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $90°$ и $60°$. Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a.

128. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении $2:1$, а точка M делит сторону AB в отношении $1:2$ (считая в обоих случаях от вершины A). Доказать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

129. Окружности радиусов R и $\frac{R}{2}$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длиной $2R$, образующего с линией центров угол, равный $30°$, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне обеих окружностей? (Отрезок пересекает обе окружности.)

130. В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найдите сторону AC, если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и $AB=4$.

131. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около этого треугольника, равно k. Найдите угол при основании треугольника.

132. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

133. Найдите площадь пятиугольника, ограниченного прямыми BC, CD, AN, AM и BD, где A, B и D — три вершины квадрата $ABCD$; N — середина стороны BC; M делит сторону CD в отношении $2:1$ (считая от вершины C), если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

134. В треугольнике ABC даны: $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$. Окружность с центром в B проходит через точку A и пересекает прямую AC в точке K, отличной от A, прямую BC — в точках E и F. Найдите углы треугольника EKF.

135. Дан квадрат со стороной a. Найдите площадь правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с серединой одной из сторон квадрата, а две другие расположены на диагоналях квадрата.

136. На сторонах квадрата $ABCD$ взяты точки M, N и K, где M — середина AB; N лежит на стороне BC, причем $2BN=NC$; K лежит на стороне DA, причем $2DK=KA$. Найдите синус угла между прямыми MC и NK.

137. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $AB=c$, $AC=b$.

138. В треугольнике ABC сторона AB равна 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, равна $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, отрезок AD равен стороне BC. Найдите AC.

139. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACD.

140. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?

141. В прямоугольном треугольнике меньший угол равен α. Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. Определите, в каком отношении эта прямая делит гипотенузу.

142. Внутри правильного треугольника со стороной 1 помещены две касающиеся друг друга окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника (каждая сторона треугольника касается хотя бы одной окружности). Докажите, что сумма радиусов этих окружностей не меньше чем $(\sqrt{3}-1)/2$.

143. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом A, равным 30°, проведена биссектриса BD другого острого угла. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD, если меньший катет равен 1.

144. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN:NC=2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN

перпендикулярна основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите $AM:MD$.

145. В треугольнике ABC заданы $BC=a$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC.

146. В треугольнике ABC известно: $AB=c$, $BC=a$, $\angle B=\beta$. На стороне AB взята точка M так, что $2AM=3MB$. Найдите расстояние от точки M до середины стороны AC.

147. На стороне AB треугольника ABC взята точка M, а на стороне AC — точка N, причем $AM=3MB$, а $2AN=NC$. Найдите площадь четырехугольника $MBCN$, если площадь треугольника ABC равна S.

148. Даны две концентрические окружности радиусов R и r $(R>r)$ с общим центром O. Третья окружность касается их обеих. Найдите тангенс угла между касательными к третьей окружности, выходящими из точки O.

149. В параллелограмме $ABCD$ известно: $AB=a$, $AD=b$ $(b>a)$, $\angle BAD=\alpha$ $(\alpha<90°)$. На сторонах AD и BC взяты точки K и M так, что $BKDM$ — ромб. Найдите сторону ромба.

150. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c. Центры трех окружностей радиуса $\frac{c}{5}$ находятся в его вершинах. Найдите радиус четвертой окружности, которая касается трех данных и не содержит их внутри себя.

151. Найдите радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла величины α хорды длины a, если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно b.

152. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N. Найдите площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна S, а $\angle BAC=\alpha$.

153. В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные хорды MN и PQ. Найдите расстояние между точками M и P, если $NQ=a$.

154. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной b, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

155. В параллелограмме $ABCD$ известны $AB=a$, $BC=b$, $\angle ABC=\alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

156. В треугольнике ABC известно: $\angle A=\alpha$, $BA=a$, $AC=b$. На сторонах AC и AB взяты точки M и N, где M — середина AC. Найдите длину отрезка MN, если известно, что площадь треугольника AMN составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC.

157. Найдите углы ромба, если площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

158. Найдите площадь общей части двух квадратов, если у каждого сторона равна a и один получается из другого поворотом вокруг вершины на угол $45°$.

159. Во вписанном в окружность четырехугольнике две противоположные стороны взаимно перпендикулярны, одна из них равна a, прилежащий к ней острый угол делится диагональю на части α и β (угол α прилежит к данной стороне). Определите диагонали четырехугольника.

160. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB, равным α, в котором $AB=a$, $AD=b$ $(a<b)$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на AD, а M — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на продолжение стороны CD. Найдите площадь треугольника BKM.

161. В треугольнике ABC из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника, если $BC=3AC$, $\angle ACB=\alpha$.

162. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно S_1 и S_2. Найдите AC.

163. Окружность радиуса R_1 вписана в угол величины α. Другая окружность радиуса R_2 касается одной стороны угла в той же точке, что и прямая, и пересекает вторую сторону угла в точках A и B. Найдите AB.

164. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA=15$, $AB=5$. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

165. В треугольнике ABC известно: $BC=a$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. Найдите радиус окружности, пересекающей все его стороны и высекающей на каждой из них хорды длины d.

166. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом $60°$. Найдите диагонали четырехугольника.

167. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка M таким образом, что расстояние от вершины B до центра тяжести треугольника AMC равно расстоянию от вершины C до центра тяжести треугольника AMB. Докажите, что $BM=DC$, где D — основание высоты, опущенной на BC из вершины A.

168. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности так, что $BO:OE=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Найдите острые углы треугольника.

169. На отрезке AB длины R как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, как и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найдите радиус третьей окружности.

170. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB=4$, $AC=2$, $BC=3$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

171. Окружность с центром, расположенным внутри прямого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Хорда AB равна $\sqrt{6}$, хорда CD равна $\sqrt{7}$. Найдите радиус окружности.

172. В параллелограмме лежат две окружности радиуса 1, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

173. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, зная, что $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

174. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол B равен 120°. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

175. В прямоугольном треугольнике ABC через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся стороны BC. Найдите ту часть гипотенузы AC, которая лежит внутри этой окружности, если $AB=3$, $BC=4$.

176. Дан отрезок a. Три окружности радиуса R имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

177. Найдите угол между общей внешней касательной и общей внутренней касательной к двум окружностям, если их радиусы равны R и r, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{2(R^2+r^2)}$ $(R \geqslant r)$.

178. Отрезок AB есть диаметр круга, точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и E соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCE и ABC относятся как $1:4$.

179. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен 120°. Точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно, отрезок BF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M. Площади четырехугольников $BEFA$ и $ECDF$ относятся как $1:2$. Найдите EM, если $AM:MC=1:3$.

180. Дана окружность радиуса R с центром в точке O. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK, если $\angle OAK=60°$.

181. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC$ и $\angle B=\beta$. Средняя линия треугольника продолжена до пересечения с окружностью в точках D и E ($DE \parallel AC$). Найдите отношение площадей треугольников ABC и DBE.

182. Дан угол α ($\alpha<90°$) с вершиной O. На одной его стороне взята точка M и восставлен перпендикуляр в этой точке до пересечения с другой стороной в точке N. Точно так же в точке K на другой стороне восстановлен перпендикуляр до пересечения с первой стороной в точке P. Пусть B — точка пересечения прямых MN и KP, а A — точки пересечения прямых OB и NP. Найдите OA, если $OM=a$, $OP=b$.

183. Две окружности радиусов R и r касаются сторон данного угла и друг друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания данных окружностей между собой.

184. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $BC=2$, $KC=1$, $BK=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

185. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5. Расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите сторону AB.

186. В трапеции $PQRS$ основание PS равно 5, диагональ PR равна 7, $\angle PRQ=45°$. Что больше: сторона RS или диагональ SQ?

187. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

188. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, параллельная линии центров, пересекает отрезок AB и пересекает окружность в точках M, N, P и Q (N и P — на отрезке MQ). Докажите, что величина $MQ-NP$ не зависит от положения прямой.

189. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее боковой стороны AD, $AD=DC$. Диагональ AC равна a, боковая сторона BC равна b. Найдите площадь трапеции.

190. Найдите углы треугольника, если известно, что центры вписанной и описанной окружности симметричны относительно одной из его сторон.

191. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK. Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник ABK, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.

192. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle A=\alpha$ и $\angle C=\beta$, $AB>BC$. На стороне AB взята точка K так, что $BK=BC$, а на отрезке CK — точка M так, что $DM=DC$. Найдите $\angle MDA$.

193. В трапеции $ABCD$ даны основания: $AD=12$ и $BC=3$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого составляет 0,75 площади трапеции. Найдите CM.

194. В треугольнике ABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CK. Найдите сторону AC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPK равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPK, равен 1,8.

195. В треугольнике через одну вершину проведена прямая, разбивающая его на два подобных треугольника. Найдите наибольший угол исходного треугольника.

196. Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC равна биссектрисе внешнего угла при вершине A и равна стороне AB. Найдите углы треугольника ABC. (Биссектриса внешнего угла при вершине B есть отрезок биссектрисы угла, смежного с B, ограниченный точкой B и точкой пересечения с прямой AC.)

197. В треугольнике ABC сторона AB равна 3, высота CD равна $2\sqrt{3}$, $AD=BC$. Найдите AC.

198. На сторонах четырехугольника с диагоналями a и b лежат вершины ромба. Стороны ромба параллельны диагоналям четырехугольника. Найдите сторону ромба.

199. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. В каких пределах может меняться площадь треугольника?

200. В шестиугольнике, описанном около окружности, даны пять последовательных сторон — a, b, c, d, e. Найдите шестую сторону.

201. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из точки A, если $AB=5$, $AC=2$, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

202. В треугольнике ABC $\angle ABC=60°$, $AB=6$, $BC=4$. Найдите площадь полукруга с диаметром на прямой AC, касающегося сторон AB и BC.

203. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK:BK=1:2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL:BL=2:1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BQC равна 1.

204. В трапеции $ABCE$ основание AE равно 16, $CE=8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, C, вторично пересекает прямую AE в точке H, $\angle AHB=60°$. Найдите AC.

205. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 7, а площадь всего четырехугольника не превосходит 28, $AD=\sqrt{5}$. Найдите BC.

206. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите BC, если $AC=DC=1$.

207. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC=75°$, $AB=c$, $AC=b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM=30°$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около ABC, в точке N, отличной от A. Найдите AN.

208. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

209. В треугольнике ABC высота, опущенная на сторону AC, равна 1, $\angle ABC=140°$. Найдите площадь общей части треугольника и круга с центром B и радиуса $\sqrt{2}$.

210. Угол A треугольника ABC равен α, $AB<AC$; точка D взята на стороне AC так, что $CD=AB$, M — середина AD, N — середина BC. Найдите угол NMC.

211. В треугольнике ABC проведены высота BM, биссектриса BN и медиана BL. Известно, что $AM=MN=NL$. Найдите тангенс угла A этого треугольника.

212. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. O — центр описанной около ABC окружности. Известно, что $\angle ABC=\beta$, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.

213. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC равна 3; высота, опущенная на AC, равна 4. В ABC вписан прямоугольник так, что одна его сторона расположена на AC, а две вершины — на AB и BC. Диагональ прямоугольника равна 3,48. Найдите площадь прямоугольника.

214. AB — хорда окружности, l — касательная к окружности, C — точка касания. Расстояния от A и B до l равны соответственно a и b. Найдите расстояние от C до AB.

215. Из точки M, расположенной внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

216. В окружность радиуса 10 вписан четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны 12 и $10\sqrt{3}$. Найдите стороны четырехугольника.

217. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle BAC=60°$, $\angle B'A'C'=120°$, $B'C':BC=\sqrt{n}$ (n — целое число). Найдите $AB:AC$. При каких n задача имеет хотя бы одно решение?

218. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и

N, K — середина AD. В каком отношении прямая BK делит отрезок MN?

219. В треугольнике ABC с периметром $2p$ сторона AC равна a, угол ABC равен α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

220. Расстояния от точки M до трех вершин прямоугольника равны (последовательно) 3, 5, 4. Найдите площадь прямоугольника.

221. Медиана в треугольнике, выходящая из одной вершины, равна высоте, опущенной из другой вершины, и равна 1. Высота, опущенная из третьей вершины, равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

222. В окружность радиуса R вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит каждую из двух сторон на три равные части. Радиус второй окружности r. Найдите $\frac{r}{R}$.

223. На отрезке AB лежат точки C и D, причем C — между A и D. Точка M взята так, что $\angle AMD = \angle CMB = 90°$. Найдите площадь треугольника AMB, если известно, что $\angle CMD = \alpha$, а площади треугольников AMD и CMB равны соответственно S_1 и S_2.

224. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности. Найдите радиус этой окружности.

225. Докажите, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен длине общей внутренней касательной.

226. В окружности с центром O проведены два взаимно перпендикулярных радиуса OA и OB, C — точка на дуге AB, такая, что $\angle AOC = 60°$ ($\angle BOC = 30°$). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает продолжение OC за точку C в точке D. Докажите, что отрезок CD равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность. Возьмем теперь точку M, диаметрально противоположную точке C. Отрезок MD, увеличенный на $\frac{1}{5}$ своей длины, принимается приближенно равным полуокружности. Оцените погрешность этого приближенного равенства.

227. Дан прямоугольник со сторонами 7 и 8. Одна вершина правильного треугольника совпадает с вершиной прямоугольника, а две другие находятся на его сторонах, не содержащих этой вершины. Найдите площадь правильного треугольника.

228. Найдите радиус наименьшей окружности, содержащей равнобочную трапецию с основаниями 15 и 4 и боковыми сторонами, равными 9.

229. $ABCD$ — прямоугольник, в котором $AB=9$, $BC=7$. На стороне CD взята точка M так, что $CM=3$, а на стороне AD — точка N так, что $AN=2{,}5$. Найдите радиус наибольшей окружности, которая помещается внутри пятиугольника $ABCMN$.

230. Найдите наибольший угол треугольника, если известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в основаниях высот данного треугольника, в два раза меньше наименьшей высоты данного треугольника.

231. В треугольнике ABC биссектриса угла C перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B. Центр вписанной окружности лежит на окружности, проходящей через точки A, C и центр описанной окружности. Найдите AB, если $BC=1$.

232. Точка M удалена от сторон правильного треугольника (от прямых, на которых расположены его стороны) на расстояния 2, 3 и 6. Найдите сторону правильного треугольника, если известно, что его площадь меньше 14.

233. Точка M удалена от сторон угла в $60°$ на расстояния $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$ (основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла, лежат на сторонах, а не на их продолжениях). Прямая, проходящая через M, пересекает стороны угла и отсекает треугольник периметра 12. Найдите площадь этого треугольника.

234. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=4$, $BC=3$. Найдите сторону ромба, одна вершина которого совпадает с точкой A, а три другие лежат по одной на отрезках AB, BC и BD.

235. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Найдите сторону ромба, одна вершина которого совпадает с точкой A, противоположная вершина лежит на прямой BD, а две оставшиеся — на прямых BC и CD.

236. В параллелограмме $ABCD$ острый угол равен α. Окружность радиуса r проходит через вершины A, B и C и пересекает прямые AD и CD в точках M и N. Найдите площадь треугольника BMN.

237. Окружность, проходящая через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AD и CD в точках M и N. Точка M удалена от вершин B, C и D соответственно на расстояния 4, 3 и 2. Найдите MN.

238. О треугольнике ABC известно, что $\angle BAC=\frac{\pi}{6}$. Окружность с центром в A и радиусом, равным высоте, опущенной на BC, делит площадь треугольника пополам. Найдите наибольший угол треугольника ABC.

239. О равнобедренном треугольнике ABC известно, что $\angle B=120°$. Найдите общую хорду окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, проходящей через центр вписанной окружности и основания биссектрис углов A и C, если $AC=1$.

240. В треугольнике ABC сторона BC равна a, радиус вписанной окружности равен r. Определите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, причем одна из них касается сторон BC и BA, а другая — BC и CA.

241. В окружность радиуса R вписана трапеция. Прямые, проходящие через концы одного основания параллельно боковым сторонам, пересекаются в центре окружности. Боковая сторона видна из центра под углом α. Найдите площадь трапеции.

242. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. В каких пределах может меняться расстояние между центром вписанной окружности и точкой пересечения медиан?

243. Стороны параллелограмма равны a и b ($a \neq b$). В каких пределах может меняться косинус острого угла между диагоналями?

244. Через точку M внутри треугольника ABC проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Отрезки прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой. Найдите длины этих отрезков, если стороны треугольника равны a, b и c.

245. В треугольнике ABC помещены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R.

246. В треугольнике ABC проведена медиана AD, $\angle DAC + \angle ABC = 90°$. Найдите $\angle BAC$, если известно, что $AB \neq AC$.

247. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, сторона которого лежит на основании треугольника. Найдите площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают.

248. В равностороннем треугольнике ABC сторона равна a. На стороне BC лежит точка D, а на AB — точка E так, что $BD = \frac{a}{3}$, $AE = DE$. Найдите CE.

249. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL ($CL = a$) и медиана CM ($CM = b$). Найдите площадь треугольника ABC.

250. В трапецию вписана окружность. Найдите площадь трапеции, если известны длина a одного из оснований и отрезки b и d, на которые разделена точкой касания одна из боковых сторон (отрезок b примыкает к данному основанию a).

251. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

252. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC, в котором $\cos B = 0{,}8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC. Найдите длину стороны AC.

253. Дан правильный треугольник ABC площади S. Параллельно его сторонам на равном расстоянии от них проведены три прямые, пересекающиеся внутри треугольника и образующие в пересечении треугольник $A_1B_1C_1$ площади Q. Найдите расстояние между параллельными сторонами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

254. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC:AD=k$.

255. В угол, величина которого α, вписаны две касающиеся друг друга окружности. Определите отношение радиуса меньшей окружности к радиусу третьей окружности, касающейся первых двух и одной из сторон угла.

256. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

257. Расстояние между центрами двух окружностей равно a. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся — на другой, если радиусы этих окружностей равны R и r.

258. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны R и r.

259. Даны угол величины α с вершиной в A и точка B на расстоянии a и b от сторон угла. Найдите AB.

260. Даны h_a и h_b — высоты треугольника ABC, опущенные из вершин A и B, и длина l биссектрисы угла C. Найдите угол C.

261. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника, причем одной из точек касания является вершина треугольника. Найдите отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

262. В трапеции $ABCD$ дано: $AB=BC=CD=a$, $DA=2a$. На прямых AB и AD взяты точки E и F, отличные от вершин трапеции, так, что точка пересечения высот треугольника CEF совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника CEF.

263. Около окружности описана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, M — точка пересечения диагоналей трапеции. Площадь треугольника CMD равна S. Найдите радиус окружности.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1. Преобразование числовых и алгебраических выражений

1. 1. **2.** 1. **3.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **4.** 180. **5.** 5. **6.** 6. **7.** $2\sqrt{2}$. **8.** 1. Указание. Рассмотрим выражение $(a+b\sqrt{5})^3$. Давая a и b натуральные значения, уже на первом шаге получим $(1+\sqrt{5})^3=8(2+\sqrt{5})$. Теперь понятно, что $(1-\sqrt{5})^3=8(2-\sqrt{5})$.

9. 2. Указание. Проверьте, что $(\sqrt{2}+1)^3=5\sqrt{2}+7$, $(\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7$.

10. 4. Указание. $(2+\sqrt{2})^3=20+14\sqrt{2}$, $(2-\sqrt{2})^3=20-14\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{2}$. **12.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{5})$. Указание. Обозначим данное число через A. Тогда $A^2=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}=16+4(\sqrt{5}-1)=12+4\sqrt{5}=2(\sqrt{5}+1)^2$.

13. $5+2\sqrt{6}$. Указание. Выражение под «большим» корнем равно $(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)^2$. Можно иначе: обозначим данное выражение через x, найдем x^2, после преобразований получим $x^2=49+20\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^2$.

14. $\sqrt{6}$. Указание. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=$

$$=\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}=\sqrt{3+\sqrt{5-(2\sqrt{3}+1)}}=$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{3+(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$ Второй радикал равен $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

15. 3. Указание. Покажите, что $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}=$

$$=\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}.$$ Второй корень: $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

16. $\frac{7}{13}$. Указание. $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}=$ $=\sqrt{\frac{1}{2}}(7\sqrt{5}-9\sqrt{3})$. Таким образом, числитель равен $7\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$. Знаменатель будет равен $13\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$, поскольку $\sqrt{6+\sqrt{35}}=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ и т. д.

17. 1. Указание. Данное выражение равно

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^3}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)(3+3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4})}=1.$$

20. 0. **21.** $\sqrt{a}+\sqrt{5}$. **22.** $-\frac{3}{2}$. **23.** $-\sqrt[4]{a^2b}$. **24.** $\sqrt[3]{x}$. **25.** 3. **26.** $6-4a$, если $0\leqslant a<\sqrt{2}$; $2(a^2-2a+1)$, если $a\geqslant\sqrt{2}$. **27.** $\sqrt{1-x^2}$. **28.** $y+\sqrt{xy}$; 0,64. **29.** $\frac{1-b}{1+b}$. **30.** $\frac{5+\sqrt{5}}{a}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **31.** $a-1$, если $a\geqslant 1$; $\frac{1}{a}-1$, если $0<a<1$. **32.** $2(a+b)$. **33.** 0, если $0<b<a$; $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, если $0<a<b$. **34.** 1. **35.** x^3+y^3. **36.** 0. Указание. Сложите сначала первую и вторую дроби, затем к их сумме прибавить третью.

37. 0. Указание. Сложите две последние дроби:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=\frac{(a-b)}{(a+b)}\left(1+\frac{(b-c)(c-a)}{(b+c)(c+a)}\right)=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{bc+c^2+ba+ac+bc-c^2-ba+ca}{(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{2(a-b)c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2c(a-b)}{(b+c)(c+a)}.$$

Затем прибавьте первую и вторую дроби.

38. 1. Указание. Приведя дроби к общему знаменателю и сложив их, получим в числителе $bc(b+c)+ca(c+a)+$ $+ab(a+b)+2abc=bc(b+c)+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc=$ $=(b+c)(bc+ca+a^2+ab)=(b+c)(a+b)(a+c)$.

39. $\frac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$. Указание. Сложим первые две дроби. Поскольку $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, то в числителе получим $(x^2-x+1)^2+2x(x-1)^2=x^4-x^2+1$. Затем прибавим третью дробь.

40. $a+b+c$. Указание. После приведения к общему знаменателю в числителе получим $-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)=$ $=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$. См. решение задачи 2 в начале параграфа.

41. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$. **42.** $2(ab+\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1})$. Указание. Домножим числитель и знаменатель на $(a-\sqrt{a^2-1})(b-\sqrt{b^2-1})$. В знаменателе будет 1.

43. y, если $y>1$; $\frac{1}{y}$, если $0<y<1$.

44. $\frac{2}{2-a}$, если $1<a<2$; $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, если $a>2$. Указание.

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}=$$
$$=\sqrt{a-1}+1,\quad \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=|\sqrt{a-1}-1|.$$

45. $\frac{x+\sqrt{4x^2+3}}{3\sqrt{x^2+1}}$. Указание. Умножим числитель и знаменатель дроби, расположенной под радикалом, на $2x^2+3-$ $-x\sqrt{4x^2+3}$. В знаменателе будем иметь $(2x^2+3)^2-x^2(4x^2+3)=$ $=9(x^2+1)$. В числителе получим $5x^2+3+2x\sqrt{4x^2+3}=4x^2+3+$ $+2x\sqrt{4x^2+3}+x^2=(\sqrt{4x^2+3}+x)^2$.

46. x. Указание. Под первым корнем находится выражение, равное $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3$, а под вторым — соответственно $\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3$.

47. $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$. Указание. $a\sqrt{a}-3\sqrt{a}+(a-1)\sqrt{a-4}+2=$ $=(a\sqrt{a}-\sqrt{a})-(2\sqrt{a}-2)+(a-1)\sqrt{a-4}=\sqrt{a}(a-1)-$ $-2(\sqrt{a}-1)+(a-1)\sqrt{a-4}=(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)-2+$ $+(\sqrt{a}+1)\sqrt{a-4})=(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}-2+(\sqrt{a}+1)\sqrt{a-4})=$ $=(\sqrt{a}-1)((\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)+(\sqrt{a}+1)\sqrt{(\sqrt{a})^2-4})=(\sqrt{a}-1)\times$ $\times\sqrt{\sqrt{a}+2}((\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2}+(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2})$. Аналогично $a\sqrt{a}-3\sqrt{a}+(a-1)\sqrt{a-4}-2=(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2}((\sqrt{a}-1)\times$ $\times\sqrt{\sqrt{a}+2}+(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2})$. Таким образом, первая дробь оказывается равной $\frac{(\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2}}{(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2}}$.

48. Указание. После приведения к общему знаменателю в числителе можно вынести множитель $(a-b)(b-c)(c-a)$.

49. Указание. Умножим обе части на x^2+x+1.

50. Указание. Каждый множитель раскладывается на два множителя: $1-\frac{1}{k^2}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$. Имеем $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$. Все дроби, кроме первой и последней, сокращаются.

51. Указание. Умножим почленно на $(p^3+q^3)^3$ и перенесем первое слагаемое правой части в левую. Слева будем иметь

$p^3((p^3+q^3)^3-(p^3-2q^3)^3)=9p^3q^3(p^6-p^3q^3+q^6)$. То же самое получится в правой части.

52. $3\frac{1}{12}$. Указание. Обозначим искомое выражение через a, данное — через b. Легко проверить, что $b^2+1=a^2$. Таким образом, $a^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2+1=\left(\frac{37}{12}\right)^2$.

53. Указание. Обозначим $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda$, $a=\lambda b$, $c=\lambda d$. Заменим во всех доказываемых равенствах a на λb, c — на λd.

54. Указание. Преобразуем первый множитель: $\frac{y-z}{x}+$
$+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}=\frac{(y-z)yz+xz^2-xy^2-x^2z+x^2y}{xyz}=\frac{(y-z)(yz-xz-xy+x^2)}{xyz}=$
$=\frac{(y-z)(y(z-x)-x(z-x))}{xyz}=-\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{xyz}$. Перемножим, получим

$$-\frac{(z-x)(x-y)}{yz}-\frac{(y-z)(x-y)}{xz}-\frac{(y-z)(z-x)}{xy}.$$

Сложим первые две дроби, учитывая, что $x+y+z=0$. Имеем

$$-\frac{x-y}{z}\cdot\frac{z(x-y)-(x-y)(x+y)}{yx}=-\frac{(x-y)^2(z-x-y)}{xyz}=-\frac{2(x-y)^2}{xy}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{-2(x-y)^2+(2y+x)(2x+y)}{xy}=\frac{-2x^2+4xy-2y^2+4xy+2x^2+2y^2+xy}{xy}=9.$$

55. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a^2+b^2+c^2)+$ $+2abc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

56. Указание. Обозначим $x+\frac{1}{y}=a$. Имеем $xy+1=ay$, $yz+1=az$, $zx+1=ax$. Из первого соотношения выразим x: $x=$ $=\frac{ay-1}{y}$. Заменим в последнем x: $z\,\frac{ay-1}{y}+1=a\,\frac{ay-1}{y}$, $azy-$ $-z+y=a^2y-a$. Поскольку из второго соотношения $zy=az-1$, то $a(az-1)-z+y=a^2y-a$, $a^2(z-y)-(z-y)=0$, $(a^2-1)(z-y)=0$. Если $a^2\neq 1$, то $z=y=x$. Пусть $a=1$, тогда $x=\frac{y-1}{y}$, $z=\frac{-1}{y-1}$, т. е. $xyz=-1$. Если $a=-1$, найдем, что $xyz=1$.

Второе решение. Из данных равенств следует $x-y=\frac{y-z}{yz}$, $y-z=\frac{z-x}{yz}$, $z-x=\frac{x-y}{xy}$. Перемножим эти равенства, получим

$(x-y)(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(z-x)\ \frac{1}{x^2y^2z^2}$ и т. д.

57. Указание. Докажите, что из данного равенства следует, что $(a+b)(b+c)(c+a)=0$, т. е. или $a=-b$, или $b=-c$, или $c=-a$.

58. Возведем данное равенство в квадрат: $a^2=x^2+y^2+$ $+\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})}=x^2+y^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+$ $+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{2x^2y^2+y^2\sqrt[3]{x^4y^2}+x^2\sqrt[3]{x^2y^4}}=x^2+y^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+$

$$+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{\left(y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\right)^2}=x^2+y^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}=$$

$$=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

59. Указание. Положим $a=(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}$, $b=(z-x)\times$ $\times\sqrt[3]{1-y^3}$, $c=(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}$. Из задачи 19 следует, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$. Значит, из данного равенства следует, что $(y-z)^3(1-x^3)+(z-x)^3(1-y^3)+(x-y)^3(1-z^3)=$ $=3(y-z)(z-x)(x-y)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$. Рассмотрим левую часть полученного равенства. Она представляет собой разность двух выражений: $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$ и $(y-z)^3x^3+$ $+(z-x)^3y^3+(x-y)^3z^3$. Поскольку $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$ и $(y-z)x+(z-x)y+(x-y)z=0$, можно заменить их соответственно на $3(y-z)(z-x)(x-y)$ и $3(y-z)(z-x)(x-y)xyz$. Теперь легко получить доказываемое соотношение.

60. Указание. Имеем $(x^2-yz)y(1-xz)=(y^2-xz)x(1-yz)$,

$$x^2y-y^2z-x^3yz+xy^2z^2=xy^2-x^2z-xy^3z+x^2yz^2,\ xy(x-y)+$$

$+z(x^2-y^2)-xyz(x^2-y^2)-xyz^2(x-y)=0$. Сокращая на $x-y$ и деля затем на xyz, придем к требуемому равенству.

61. Указание. Пусть каждая дробь равна λ, тогда

$$a=\frac{1}{\lambda}(x^2-yz),\ b=\frac{1}{\lambda}(y^2-zx),\ c=\frac{1}{\lambda}(z^2-xy);$$

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)}{\lambda^2x}=\frac{1}{\lambda^2}(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

Такими же, очевидно, будут две другие дроби.

62. Указание. Имеем $(b^2+c^2-a^2)a+(c^2+a^2-b^2)b+$ $+(a^2+b^2-c^2)c=2abc$. Перенесем $2abc$ в левую часть и докажем, что ее можно будет разложить на множители $(a+b-c)(b+c-a)\times$ $\times(c+a-b)=0$. Если $a+b-c=0$, то первые две дроби равны 1, последняя равна -1.

§ 2. Уравнения и системы уравнений

1. 3; $-\frac{9}{7}$. **2.** -1; -2102. **3.** 1; $-\frac{1507}{118}$. **4.** 0; $7-2\sqrt{3}$; $7+2\sqrt{3}$. Указание. Перепишите уравнение в виде $\frac{x+1}{x-1}-$

$-\frac{x+3}{x-3}=\frac{x+4}{x-4}-\frac{x+5}{x-5}$, после чего сделайте вычитание дробей в левой и правой частях.

5. -4; 2. Указание. Если a и b — числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части, то $\frac{a}{b}=\frac{a+4}{b+4}$, откуда $a=b$.

6. $\frac{11}{2}$; $\frac{1}{2}(11\pm\sqrt{5})$. Указание. Сложите сначала первую дробь с последней, а вторую — с третьей.

7. -5. Указание. См. уравнение 2. **8.** 0; $-\frac{5}{2}$. Указание. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$. Так же преобразуйте каждую дробь. Получившееся уравнение перепишите в виде $\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}$, после чего сделайте действия в левой и правой частях.

9. -1; -2; -3. **10.** $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 3. **11.** 7. Указание. Первое уравнение имеет корни: $(4-\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2})$, второе $-(3+\sqrt{2})$; $(1-\sqrt{2})$. **12.** 2. **13.** $\frac{11-\sqrt{85}}{2}$. **14.** $\frac{19+\sqrt{29}}{2}$. **15.** -1. **16.** 0. Указание. Докажите, что $2\sqrt{7}+\sqrt{2}-3\sqrt{5}<0$.

17. 2. **18.** 7. **19.** -2; 3. **20.** 3. **21.** 481. **22.** Нет решений. **23.** -4. **24.** 0; 3. **25.** 0; -1. **26.** $-\frac{1}{3}$. **27.** $2\sqrt{3}$. **28.** 6. **29.** $-\frac{3}{4}$. Указание. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{5x+7}+\sqrt{x+4}$, получим $4x+3=(4x+3)(\sqrt{5x+7}+\sqrt{x+4})$, откуда или $x_1=-\frac{3}{4}$, или $\sqrt{5x+7}+\sqrt{x+4}=1$. Последнее уравнение не имеет решения, поскольку при $x\geqslant-\frac{7}{5}$ будет $\sqrt{x+4}\geqslant\sqrt{-\frac{7}{5}+4}>1$.

30. $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}$. Указание. Умножим обе части на $\sqrt{45x+12}+\sqrt{15x+2}$. Поскольку $15x+2\geqslant0$, то $3x+1>0$. После сокращения на $3x+1$ получим уравнение $\sqrt{45x+12}+\sqrt{15x+2}=\sqrt{10}$, которое решается возведением обеих частей в квадрат.

31. $\frac{1}{3}$. **32.** 6; $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. **33.** $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{5}$. **34.** 2; 5; -3; 12; $4-\sqrt{29}$; $4+\sqrt{29}$. **35.** $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}(7-\sqrt{13})$. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** $\frac{1}{6}$. **38.** 3. Указание. Умножив и разделив левую часть на разность радикалов $\sqrt{x+33}-\sqrt{x+1}$, преобразуем ее к виду $\frac{32}{\sqrt{x+33}-\sqrt{x+1}}$. Правая часть таким же образом приводится к $\frac{16}{\sqrt{x+22}-\sqrt{x+6}}$, после чего все уравнение можно преобразовать к виду $\sqrt{x+33}-\sqrt{x+1}=2(\sqrt{x+22}-\sqrt{x+6})$. Получившееся уравнение вычтем из исходного, тогда избавимся от $\sqrt{x+33}$ и получим $2\sqrt{x+1}=3\sqrt{x+6}-\sqrt{x+22}$(*). Далее $2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6})=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+22}$. Умножим и разделим левую и правую части на суммы соответствующих радикалов. После упрощения будем иметь $5\sqrt{x+22}-3\sqrt{x+6}=8\sqrt{x+1}$. Выразим из уравнения (*) $\sqrt{x+22}$ и заменим в получившемся уравнении, получим $2\sqrt{x+6}=3\sqrt{x+1}$, откуда $x=3$.

39. 1. **40.** $\frac{1}{2}$. **41.** $\frac{2\cdot 3^{\frac{7}{8}}}{2^{\frac{7}{8}}-3^{\frac{7}{8}}}$. Указание. Имеет $3\sqrt[7]{2+x}\times(2+x)=2x\sqrt[7]{x}$, откуда $\left(\frac{2+x}{x}\right)^{\frac{8}{7}}=\frac{2}{3}$ и т. д.

42. $\pm\frac{5}{\sqrt{1+5^{\frac{5}{3}}}}$. **43.** $\pm\sqrt{2}$. **44.** $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$; $\frac{1}{6}(1\pm\sqrt{13})$. **45.** 1.

46. 2^6. **47.** $3^{\frac{6}{5}}$. **48.** 1. **49.** 8. **50.** $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17})$. **51.** $4+2\sqrt{3}$. **52.** 0. **53.** $\frac{1}{8}(5\pm\sqrt{33})$. Указание. Левая часть уравнения преобразуется к виду $\frac{2}{8x^2-10x+3}$, после чего замена $y=4x^2-5x$.

54. $1\pm\sqrt{7}$. **55.** $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{2}(49+5\sqrt{73})}$. Указание. Возведем уравнение в квадрат и обозначим $y=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

56. $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+4\sqrt{6}})$. **57.** $3\pm\sqrt{21}$; -2; 6. Указание. $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$.

58. 7; $\frac{1}{7}$. Указание. $y=x+\frac{1}{x}$. **59.** 2; $\frac{1}{2}$; $2\pm\sqrt{3}$. Указание. $y=x+\frac{1}{x}$.

60. $\sqrt{2}\pm 1$; $-\sqrt{2}\pm 1$. **61.** ± 3; $\pm\sqrt{\frac{5}{13}}$. **62.** -1; 3. Указание. $y=x^2-2x$.

63. -1; 3. Указание. Поскольку $\frac{24}{x^2-2x}-\frac{12}{x^2-x}=\frac{12}{(x-2)(x-1)}$, уравнение преобразуется к виду $12=x(x-2)(x-1)^2$. Далее замена $y=x^2-2x$.

64. -7; 2. Указание. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=$ $=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=$ $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$. Далее замена $y=x^2+5x$.

65. $-2\pm\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{17})$. Указание. Делим на x^2 и обозначим $y=x+\frac{2}{x}$.

66. $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$; $-3\pm\sqrt{3}$. Указание. Однородное уравнение относительно x^2 и $x+1$. Замена $y=\frac{x^2}{x+1}$.

67. $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. Указание. Однородное уравнение относительно x^2+x+1 и x^2, поскольку правая часть есть $2x^4+$ $+x^2(x^2+x+1)$.

68. $\frac{1}{2}(11-\sqrt{21})$. Указание. $y=x+\sqrt{x}$.

69. $1\pm\sqrt{9+3\sqrt{13}}$. Указание. Уравнение перепишем в виде $3x=-(2-x)\sqrt{x^2-9}$. После возведения в квадрат и преобразований получим $9(x^2+(2-x)^2)=(2-x)^2x^2$. Делаем замену $y=$ $=x^2-2x$.

70. $\frac{841}{144}$. Указание. Уравнение можно преобразовать к виду $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+x+2\sqrt{x}\sqrt{x+7}+x+7=42$, затем сделать замену $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$.

71. $2^{12}\cdot 3^{20}$. **72.** 1; $-2+\sqrt{5}$. **73.** $5(\sqrt{2}+1)$. **74.** 1. **75.** 2; $-\frac{239}{45}$. **76.** 6. **77.** $3(\sqrt{2}-1)$. Указание. $(\sqrt{18+3x}-\sqrt{3x})^2=9-x^2$, $9-6\sqrt{x(x+6)}+(x+6)=0$, $(3-\sqrt{x^2+6x})^2=0$.

78. $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{33})}$. Указание. Левая часть преобразуется к виду $\frac{2}{8x^2-10x+3}=\frac{2}{2(2x-1)^2-(2x-1)}$, а правая — к виду $2(2x-1)^2+(2x-1)$.

79. 1; 2; $-2\pm\sqrt{2}$. Указание. В каждой из первых двух дробей разделим числитель и знаменатель на x, затем обозначим $y=x+\frac{2}{x}$.

80. $2\sqrt{3}$. Указание. Освободимся от знаменателя и перепишем уравнение в виде $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{x}\sqrt{x+4}-\sqrt{2}\sqrt{2x+6})=$ $=\sqrt{6}\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\sqrt{2x+6}$.. Каждую часть умножим и разделим на соответствующие суммы. Получим $\frac{(\sqrt{3}+1)(x^2-12)}{\sqrt{x}\sqrt{x+4}+\sqrt{2}\sqrt{2x+6}}=$

$=\frac{-2(x^2-12)}{\sqrt{6}\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\sqrt{2x+6}}$ и т. д.

81. 1. Указание. $x \geqslant 1$. Если $x > 1$, левая часть больше единицы, правая меньше.

82. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$. Указание. Левая часть есть $2x^3-(x+1)^3$.

83. -2. **84.** $3+\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{13}\right)$. Указание. $\sqrt{3x+19-\frac{3}{x}}=1+\sqrt{x+18+\frac{3}{x}}$. Возведем в квадрат: $x-\frac{3}{x}=$ $=\sqrt{x+18+\frac{3}{x}}$. Еще раз — в квадрат и преобразуем левую часть, получим $\left(x-\frac{3}{x}\right)^2=\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-12$. Затем сделаем замену $y=x+\frac{3}{x}$.

85. $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. Указание. Разделим почленно на $(x-1)^3$ и обозначим $y=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Получим $y^3+y^2-2=0$ или $(y-1)\times$ $\times(y^2+y+2)=0$ и т. д.

86. $-\frac{5}{3}$; $\frac{-15\pm\sqrt{89}}{4}$. Указание. Левую часть можно представить в виде $(1+3x)(1+3x+2x^2)=(1+3x)^2+2x^2(1+3x)$, а правую — в виде $(16+12x)^2+2x^2(16+12x)$. После перенесения в одну часть выделяется множитель $(16+12x)-(1+3x)=15+9x$.

87. Уравнение не имеет решений. **88.** 4. **89.** $\sqrt[3]{4}$. **90.** $\frac{4}{5}$; 6. **91.** $x \leqslant \frac{3}{2}$. **92.** $x \leqslant \frac{2}{3}$. **93.** $x \geqslant 3$. **94.** $-\sqrt{2}$; $1-\sqrt{5}$. **95.** $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}(-5+\sqrt{113})$. **96.** 3; $-\frac{1}{2}(3+\sqrt{65})$. **97.** 3. **98.** 2. **99.** 2; $2+\sqrt{10}$; $1+\sqrt{5}$. **100.** 0; $1-\sqrt{5}$. **101.** $\frac{1}{2}(19+\sqrt{29})$. **102.** $\frac{1}{2}(19+\sqrt{29})$. **103.** $-2 \leqslant x \leqslant 3$. **104.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{4}(-\sqrt{2}+\sqrt{6})$. Указание. Левая часть преобразуется к $\frac{1}{\sqrt{2}}|x+\sqrt{1-x^2}|$. Поскольку $1-2x^2 \geqslant 0$, то $\sqrt{1-x^2} \geqslant |x|$. Значит, $x+\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, т. е. уравнение приводится к виду $\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=1-2x^2$, при условии $x^2 \leqslant \frac{1}{2}$. Правую часть представим в виде $1-2x^2=(x+\sqrt{1-x^2})(-x+\sqrt{1-x^2})$. **105.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. **106.** -1. **107.** 6; 2. **108.** -1; 7. **109.** $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{2}(\sqrt[4]{14}-1)$. **110.** ± 2; $\pm(\sqrt[3]{28}-1)$. **111.** $1 < x \leqslant 4$.

112. $-4<x\leqslant\frac{3}{2}$. **113.** 3. **114.** 1; $-\frac{1}{2}(5+\sqrt{33})$. **115.** 0; 1; 2.

116. $\frac{1}{10}(-1\pm\sqrt{21})$; $\frac{1}{10}(1\pm\sqrt{17})$. Указание. Пусть $y=1-5x^2$. Имеем систему $y=1-5x^2$, $x=1-5y^2$. Вычитая уравнения, найдем $y-x=5(y-x)(y+x)$. Имеем два случая: 1) $y=x$; 2) $5y+5x=1$.

117. $-\frac{1}{2}$. Указание. Пусть $u=\sqrt{x^2+2}$, $v=\sqrt{x^2+2x+3}$. Тогда $v^2-u^2=2x+1$, $x=\frac{1}{2}(v^2-u^2-1)$. Получим $v^2-u^2+\frac{1}{2}(v^2-u^2-1)u+\frac{1}{2}(v^2-u^2+1)v=0$, $(v-u)(2v+2u+(v+u)^2+1)=0$, откуда $v=u$.

118. $\frac{1}{3}$. Указание. Разделим почленно на $\sqrt[4]{x}$ и обозначим $\sqrt[4]{13+\frac{1}{x}}=u$, $\sqrt[4]{4-\frac{1}{x}}=v$. Получим систему $u+v=3$, $u^4+v^4=17$ и т. д.

119. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. Указание. Перенеся все в одну часть, проверьте, что уравнение представляется в виде $(x+\sqrt{x}-1)^3=0$.

120. (1; 1). **121.** (1; -1); (1; 2). **122.** (5; 1); $\left(-\frac{5}{7};\ -\frac{11}{29}\right)$. **123.** $\left(\frac{37}{7};\ -\frac{12}{7}\right)$. **124.** $\left(2\pm2\sqrt{3};\ 1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **125.** (4; 2). **126.** (0; 1). **127.** (5; 1). **128.** (0; -1); $\left(\frac{4}{5};\ \frac{7}{5}\right)$. **129.** (2; 2). **130.** (±3; ±2); (±2; ±3). Указание. Замена $x^2+y^2=u$, $xy=v$. **131.** ($\pm\sqrt{2}$; $1\pm\sqrt{2}$). **132.** $\left(\frac{17}{4};\ 9\right)$. **133.** ($\pm1$; ±2); (±2; ±1). **134.** (±1; ±1).

135. $\left(\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1);\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\right)$. **Указание.** Возведем обе части второго уравнения в квадрат, после чего вычтем удвоенное первое, получим $x^4-3x^3y-2x^2y^2-3xy^3+y^4=0$. Это уравнение разделим на x^2y^2; учитывая, что $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2$, будем иметь $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-4=0$. Заменяя $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, найдем $z_1=-1$, $z_2=4$. В первом случае решений нет. Из уравнения $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4$ найдем $\frac{x}{y}=2\pm\sqrt{3}$. Поскольку из второго уравнения системы следует, что $x^2>y^2$, то $\frac{x}{y}=2+\sqrt{3}$ и т. д.

136. (0; ±1); $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$. **137.** (4; 1). **138.** (-1; 2); $\left(\frac{7}{9};\ \frac{10}{9}\right)$. **139.** (2; -1); $\left(\frac{12}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$. **140.** ($1\pm\sqrt{2}$; -1). **141.** (-2; $-1\pm\sqrt{19}$).

142. $(\pm 4;\ \pm 2)$. Указание. Перемножьте данные уравнения. **143.** $(0;\ 0)$; $(\pm 2;\ \pm 1)$; $(\pm 1;\ \pm 2)$. **144.** $(\pm 3;\ \pm 5)$; $\left(\pm\frac{5}{3};\ \pm\frac{13}{3}\right)$. **145.** $(0;\ \pm 2)$; $(-2;\ 0)$. **146.** $(4;\ 2)$; $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. **147.** Система не имеет решений. **148.** $(1;\ 0)$. Указание. Перемножим уравнения, получим $x^6=1$ и т. д.

149. $\left(\frac{1}{2}(-2+\sqrt{14}\pm\sqrt{12\sqrt{14}-2});\ \frac{1}{2}(-2+\sqrt{14}\pm\sqrt{12\sqrt{14}-2})\right)$; $(1;\ 3)$; $(3;\ 1)$. **150.** $(0;\ 0)$; $(\pm\sqrt{2};\ \mp\sqrt{2})$; $(\pm 2;\ \pm 2)$; $\left(\frac{1}{2}(\pm 1+\sqrt{5});\ \frac{1}{2}(\pm 1-\sqrt{5})\right)$; $\left(\frac{1}{2}(\pm 1-\sqrt{5});\ \frac{1}{2}(\pm 1+\sqrt{5})\right)$.

151. $(0,\ 0)$; $(\pm 2;\ \pm 1)$; $(\pm\sqrt{2};\ \pm 2\sqrt{2})$; $\left(\pm\frac{3a}{\sqrt{a^3+1}};\ \pm\frac{3}{\sqrt{a^3+1}}\right)$, где $a=\frac{1}{4}(-7+\sqrt{33})$. Указание. Из системы следует, что $4(x+y)(x^3+y^3)=27x^2y^2$, или $4(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=27x^2y^2$. Разделим обе части на x^2y^2 и обозначим $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$ и т. д.

152. $(2;\ -3)$; $(c;\ 1)$; c — любое число. Указание. Удвоим первое уравнение и вычтем второе.

153. $(0;\ 1)$; $\left(-\frac{3}{2};\ 4\right)$. **154.** $(2;\ 1)$. Указание. Вычтем из первого уравнения удвоенное второе, получим $(-2x+3y+1)^2=0$.

155. $(2;\ 3)$. Указание. Первое уравнение есть $(x-y+1)^2+(y-3)^2=0$.

156. $(1;\ 1)$; $\left(\frac{1}{15}(2\sqrt{6}-3);\ -\frac{1}{5}(9+4\sqrt{6})\right)$; $\left(-\frac{1}{15}(3+2\sqrt{6});\ \frac{1}{5}(4\sqrt{6}-9)\right)$. Указание. Сложим уравнения, получим $3(x-y)^2-2(y-1)^2=0$.

157. $(1;\ 2)$; $\left(-\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3});\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\right)$; $\left(\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-5);\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right)$. Указание. Сложим уравнения, получим $(2x-y)^2-3(x-1)^2=0$.

158. $(1;\ 1)$. **159.** $(1;\ 2)$. **160.** $(1;\ 1)$. **161.** $(19;\ -15)$. **162.** $\left(\frac{1}{3}(14\sqrt{11}-58);\ \frac{1}{5}(2\sqrt{11}-11)\right)$. **163.** $(0;\ \pm 2)$; $(1;\ -3)$. Указание. Из второго уравнения $y^2=4+5x^2$; значит, $y^3=4y+5x^2y$. Заменим в первом уравнении y^3. Если $x=0$, то $y=\pm 2$. Если $x\neq 0$, то выразим $y=\frac{-16+x^2}{5x}$ и подставим во второе уравнение.

164. $(3;\ 1)$; $\left(\frac{1}{3};\ -1\right)$. Указание. Умножим первое уравнение на x, второе — на $(-y)$ и сложим, получим $3x-4y=5$. Выразим x через y и подставим в первое уравнение.

165. $(-1;\ -2)$; $(-2;\ -1)$. **166.** $(3;\ 2;\ 4)$; $(0;\ -1;\ 1)$. **167.** $(\pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4)$. **168.** $(1;\ 1;\ 1;)$; $(1;\ -1;\ -1)$; $(-1;\ 1;\ -1)$; $(-1;\ -1;\ 1)$. Указание. Подставим выражение для x во второе и третье. Получим $y^2+z^2=\pm 2z$, $y^2+z^2=\pm 2y$, т. е. $z=\pm y$.

169. $\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ 1;\ 2\pm\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ 1;\ 2\pm\sqrt{3}\right)$; $(0;\ 0;\ 0)$. Возможна любая комбинация знаков. Всего имеется 9 решений. Указание. Освободимся в первом уравнении от знаменателя и поделим на xy, рассмотрев случай $xy=0$ отдельно, получим $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5$. Аналогично поступим с другими уравнениями. Затем сделаем замену $x+\frac{1}{x}=u$, $y+\frac{1}{y}=v$, $z+\frac{1}{z}=w$.

170. $(\sqrt{3};\ 2)$; $(-\sqrt{3};\ -2)$. **171.** $\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. Указание. Умножим первое уравнение на 2 и вычтем второе. Получившееся уравнение разложится на множители $(x-2y)(2x+y+3)=0$.

172. $\left(-\frac{2}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$; $(3-2t;\ t)$, t — любое число. Указание. Каждое уравнение раскладывается на множители $(2x-y)\times(x+2y-3)=0$, $(3x+y+2)(x+2y-3)=0$. Для этого можно рассмотреть каждое из уравнений как квадратное относительно x или y.

173. $\left(8+\frac{7}{4}\sqrt{15}\right)$; $(7+2\sqrt{15})$. Указание. Возведем каждое из уравнений в квадрат и вычтем одно из другого. Получим $x^2-y^2=\frac{15}{16}$. Теперь для нахождения x и y будем иметь систему $x-y\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}$, $y-x\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7}{16}$.

174. $(-1;\ 1)$. Указание. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно y. Найдем: 1) $y=-x$; 2) $y=\frac{-1}{x^2+x}$ и т. д.

175. $(0;\ -1)$. Указание. Преобразуем второе уравнение: $x-y(\sqrt{x^2+1}-x)+y^2=0$, исключим $\sqrt{x^2+1}$ из обоих уравнений. Получим $x^2+2x(y-y^2)+y^4-2y^3-3y^2=0$. Решая последнее уравнение относительно x, найдем: 1) $x=-y-y^2$; 2) $x=+3y-y^2$.

176. $\left(-\sqrt{\frac{13}{12}};\ \pm\sqrt{\frac{13}{12}}\right)$; $\left(-\frac{5}{3};\ \frac{1}{6}(9\pm\sqrt{21})\right)$. **177.** $\left(\pm\frac{5}{2}\sqrt{2};\ \mp\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$; $(2\sqrt{2}-\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -2\sqrt{2}-\sqrt{3})$. Указание. Возведем оба уравнения в квадрат и сложим их.

Обозначим $u=x^2+y^2$, $v=(x+y)^2$. Получим $2u+v=76$. Кроме того, уединяя в первом уравнении корень и еще раз возводя в квадрат, получим после упрощения $736-16u+v^2-2uv=0$. Решив систему для u, v, найдем $u_1=37$, $v_1=2$, $u_2=22$, $v_2=32$.

178. $(4;\ 3;\ 1)$; $\left(\frac{32}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$; $\left(\frac{32}{3};\ -\frac{31}{3};\ \frac{23}{3}\right)$; $\left(\frac{52}{3};\ -\frac{41}{3};\ \frac{13}{3}\right)$.

179. $(12;\ 3;\ 1)$; $(3;\ 3;\ 4)$. У к а з а н и е. Вычтем из второго уравнения первое, возведенное в квадрат, заменим $6xz$ на $8y^2$, сократим, получим $y(x-2y+3z)=27$. Таким образом, $y=3$.

180. $\left(-2a;\ \frac{2a^2}{a-1};\ a\right)$, $a\neq 1$; $(-2a^2+2a;\ 2a^2;\ a)$, a — любое число. У к а з а н и е. Умножим второе уравнение на $2z$ и прибавим к первому. Получим $(x+2z)\cdot(y-2z^2)=0$.

181. $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(0;\ -\frac{4}{3};\ \frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{6}{5};\ \frac{8}{5};\ -\frac{2}{5}\right)$. У к а з а н и е. Умножим уравнения соответственно на 2, 3, 6 и сложим, полученное уравнение приводится к виду $(y-z)(2x+3y+6z)=0$.

182. $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$; $\left(-\frac{11}{2};\ \frac{55}{2};\ -\frac{121}{2}\right)$. У к а з а н и е. Умножим первое уравнение на 2, второе — на x и сложим, получим $(x+2y)(z+2x^2)=0$.

183. $(0;\ 0;\ 0)$; $(2;\ 1;\ 1)$; $\left(-\frac{6}{13};\ \frac{1}{13};\ \frac{7}{13}\right)$. У к а з а н и е. Умножим уравнения соответственно на 6, -4, -3 и сложим, получим $(x-z)(30y-12z-9x)=0$. Если $x=z$, то $x=y=z=0$. Во втором случае выразим y через z и x и подставим во второе и третье, исключив $(x-z)$. Получим однородное уравнение относительно x и z.

184. $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(\frac{10}{19};\ \frac{25}{7};\ \frac{25}{4}\right)$. **185.** $(1;\ 2)$. У к а з а н и е. Разность дробей, обратных левым частям, есть $\frac{x-y}{xy}$. Таким образом, $\frac{x-y}{xy}=-\frac{1}{2}$. Отсюда выражаем y через x и подставляем в одно из уравнений.

186. $\left(-\sqrt[3]{2};\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. У к а з а н и е. Сложим уравнения, затем вычтем их. Получим $(x-1)^3+2(y+1)^3=0$ и $(x+1)^3-2(y-1)^3=0$.

187. $(0;\ 0)$; $\left(-\frac{1}{2};\ -1\right)$. У к а з а н и е. Умножим первое уравнение на 9 и вычтем второе. Получим $(2x-y)(2y-x)=$ $=3(2x-y)$ и т. д.

188. $\left(\pm\frac{1}{3}(\sqrt{7}+5);\ \pm\frac{1}{3}(\sqrt{7}-4);\ \pm\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)\right)$; $\left(\pm\frac{1}{3}(\sqrt{7}-5);\right.$

$\left(\pm\frac{1}{3}(\sqrt{7}+4);\ \pm\frac{1}{3}(\sqrt{7}+1)\right)$. Указание. Обозначим $x+2y=u$, $y+2z=v$, $z+2x=w$, $x+y+z=s$. Получим систему $u(2s-u)=6$, $v(2s-v)=3$, $w(2s-w)=-2$, $u+v+w=3s$. Выражая из первых трех уравнений u, v, w через s, например $u=s\pm\sqrt{s^2-6}$, и подставляя в четвертое, получим $\pm\sqrt{s^2-6}\pm\pm\sqrt{s^2-3}\pm\sqrt{s^2+2}=0$. Чтобы последнее уравнение имело решение, знаки перед $\sqrt{s^2-6}$ и $\sqrt{s^2-3}$ должны быть противоположны знаку при $\sqrt{s^2+2}$. Затем найдем $s^2=7$ и т. д.

189. $\left(\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$; $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}};\ \sqrt[3]{\frac{6}{5}};\ -2\sqrt[3]{\frac{4}{15}}\right)$. Указание. В каждом уравнении перенесем в правую часть xyz, получившиеся уравнения перемножим и получим уравнение, квадратное относительно $u=xyz$.

190. (2; 2; 2); (2; -2; -2); (-2; 2; -2); (-2; -2; 2). Указание. Сложим уравнения, получим $(x+y+z)=\frac{8}{xyz}(x+y+z)$. Возможны два случая: 1) $x+y+z=0$; 2) $xyz=8$. В первом случае нет решений.

191. (0; 0; 0); (0; -1; 1). Указание. Сложите, затем вычтите первые два уравнения.

192. (1; 1; -1); (1; -1; 1); (-1; 1; 1); (-1; -1; -1).

193. (0; 0; 0); (1; -1; -1). **194.** (0; 1; 1); (-1; 3; 0); $\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$. Указание. Из второго уравнения вычтем удвоенное первое, получим $(y+2x)^2=1$. Третье уравнение преобразуется к виду $(2z+y-3)(x^2+1)=0$.

195. (0; 0; 0); (27; 54; 54); (197; 591; ± 591). Указание. Исключив из первых двух z^2, получим уравнение, однородное относительно x, y.

196. (0; 1; 2). Указание. Вычитая первое уравнение из второго, найдем $(y+x)^2=1$. Вычитая первое уравнение из третьего, получим $(z+x)^2=4$; сложив второе и третье, будем иметь $(y+z)^2=9$.

197. $\left(\frac{1}{6};\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{2}\right)$; ($a$; $4a$; $-2a$), где a — любое число.

198. (0; 0; 0); (1; 1; 1); $\left(1;\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$. Указание. Первые два уравнения однородные относительно y и z; исключив нулевое решение, обозначим $t=\frac{z}{y}$. Из первых двух уравнений найдем $t_1=1$, $t_2=3\cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; $x_1=1$, $x_2=2^{-\frac{4}{5}}$. Подставляя найденные значения в третье, найдем y и z. В случае x_2, t_2 решений нет.

199. $(0;\ 0;\ 0)$; $(1;\ 1;\ -2)$; $\left(-\frac{5}{6};\ 1;\ \frac{5}{3}\right)$. Указание. Первые два уравнения однородные относительно x и z.

200. $(0;\ 0;\ 0)$; $(2;\ 1;\ 3)$; $\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{73}{18}};\ -\frac{5}{6}\sqrt[3]{\frac{73}{18}};\ \frac{7}{6}\sqrt[3]{\frac{73}{18}}\right)$.

Указание. Обозначим $u=xyz$, $v=\sqrt{x^3+y^3+z^3}$. Сложим все три уравнения, получим $v^2-3u=3v$. Перенесем в каждом уравнении $xyz=u$ вправо и перемножим уравнения. Получим $v\left(3u^2-\frac{73}{36}uv-\frac{35}{36}v^2\right)=0$, откуда найдем $\frac{v}{u}$. В итоге получим $u_1=0$, $v_1=0$; $u_2=6$, $v_2=6$; $u_3=-\frac{73}{36}\cdot\frac{35}{108}$, $v_3=\frac{73}{36}$.

201. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Указание. Перепишем второе уравнение в виде $\frac{y}{x}+\frac{\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{\frac{y}{x}}=3$, обозначим $\frac{y}{x}=t$. Из первого уравнения находим $\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=3-\frac{x}{y}=3-\frac{1}{t}$. Следовательно, $t+\frac{3-\frac{1}{t}}{t}=3$, или $(t-1)^3=0$.

202. $(1;\ 2;\ 3)$. Указание. Перепишем систему в виде $xy+yz=\frac{5}{6}(x+y+z)$, $yz+yx=\frac{4}{3}(x+y+z)$, $zx+zy=\frac{3}{2}(x+y+z)$. Сложив эти уравнения, получим $xy+yz+zx=\frac{11}{6}(x+y+z)$. Таким образом, $yz=x+y+z$, $xz=\frac{1}{2}(x+y+z)$, $xy=\frac{1}{3}(x+y+z)$. Деля полученные уравнения попарно одно на другое, найдем $y=2x$, $z=3x$.

203. $(\pm1;\ \pm1;\ \pm1;\ \pm2)$; $(\pm1;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm1)$; $\left(\pm\frac{3}{\sqrt5};\ \pm\frac{1}{\sqrt5};\ \pm\frac{3}{\sqrt5};\ \pm\frac{4}{\sqrt5}\right)$; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt5};\ \pm\frac{3}{\sqrt5};\ \pm\frac{4}{\sqrt5};\ \pm\frac{3}{\sqrt5}\right)$. Указание. Вычтем четвертое из третьего. Возникнут два случая: 1) $x=z$; 2) $y=u$. В каждом из этих случаев разность левых частей второго и первого уравнений приравняем левой части третьего.

204. $\left(-1\pm2\sqrt2;\ \ -1\pm2\sqrt2;\ \ \frac{1}{49}(-13\pm16\sqrt2)\right)$. Указание. Умножим второе уравнение на y^2, а третье — на $(-x)^2$ и сложим их. Из получившегося уравнения найдем: 1) $x=y$ или 2) $3(y+x)=2xy$. Во втором случае решений нет.

205. $\left(\frac{1}{3}(1\pm\sqrt7);\ \frac{1}{3}(1\pm\sqrt7);\ \frac{1}{3}(1\pm\sqrt7);\ \frac{1}{3}(1\pm\sqrt7)\right)$. Указание. Выразим из первого уравнения x через y и подставим в четвертое. Найдем $y=u$ и т. д.

206. $(2;\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{9})$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{9}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$. Указание. Обозначим $u=x^3+y^3+z^3$, $v=xyz$. Сложив уравнения, получим $u-3v=2$. Перепишем первое уравнение в виде $2z^3=u-v+4$. Заменим u через v, $z^3=v+3$. Аналогично из второго и третьего уравнений найдем $y^3=v-3$, $x^3=v+2$. Перемножив эти равенства, получим для v квадратное уравнение $2v^2-9v-18=0$.

207. $(0;\ 0;\ c)$; $(0;\ c;\ 0)$; $(c;\ 0;\ 0)$, где c — любое число; $(-2;\ 1;\ 1)$; $(-2;\ -1;\ -1)$; $(2;\ 1;\ -1)$, $(2;\ -1;\ 1)$. Указание. Найдем решения, не содержащие нулей. Вычтем из первого уравнения второе и третье, умноженные соответственно на y и z. Получим после сокращения $x=-2yz$. Заменим теперь x во втором и третьем уравнениях.

208. $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm 2\sqrt{2}\right)$. Указание. Поделим первое уравнение на второе, получим $\frac{y+z}{x+z}=\frac{y}{x}$, откуда $y=x$.

209. $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 3\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 3;\ 1\right)$. Указание. Выразим x через z и u сначала из первого и второго уравнения, затем из второго и третьего и, наконец, из третьего и четвертого. Приравнивая выражения для x, получим систему для u и z.

210. $(\pm 1;\ 0;\ \pm 1)$; $\left(\pm\frac{-1}{3};\ \pm\frac{4}{3};\ \pm\frac{1}{3}\right)$. Указание. Сложив все уравнения, получим $(x+y+z)^2=4$. Вычтя из первого уравнения третье, будем иметь $(x-z)(x+z-2y)=0$. Таким образом, получаются четыре варианта: 1) $x+y+z=2$, $x=z$; 2) $x+y+z=-2$, $x=z$ и т. д.

211. $(0;\ 0;\ 0)$ $(0;\ 0;\ 1)$; $(0;\ 1;\ 0)$; $(1;\ 0;\ 0)$; $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. Указание. Сложите первое и второе уравнения, затем — первое и третье уравнения, затем — второе и третье.

212. $\left(\frac{15}{8};\ \frac{15}{8};\ \frac{4}{15}\right)$; $\left(-\frac{37}{72};\ -\frac{37}{8};\ \frac{12}{37}\right)$. Указание. Первое уравнение можно преобразовать к виду $z(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)-13xy=0$. Учитывая, что $z(3x-y)=1$, получим $y^2-10xy+9x^2=0$, откуда: 1) $y=x$; 2) $y=9x$.

213. $(\pm 3;\ \pm 2;\ \pm 1)$, где возможен любой выбор знаков, удовлетворяющий условию $xyz>0$. Указание. Поделим первое уравнение на второе и первое на третье. Получим после упрощения $x^2y^2+9y^2z^2-8z^2x^2=0$, $13x^2y^2-45y^2z^2-32z^2x^2=0$. Исключая z^2x^2, найдем $x=\pm 3z$, затем $y=\pm 2z$ и т. д.

214.

$(-1;\ -1;\ -1)$; $\left(\frac{1}{2}(-4\pm\sqrt{11});\ \frac{1}{2}(5\pm\sqrt{11});\ \frac{1}{2}(-10\pm\sqrt{11})\right)$.

Указание. Сложим уравнения, умноженные соответственно на 2, -2 и 1. Получим $2x^2-x-2y^2+y=0$. Возникают два случая: 1) $x=y$; 2) $2x+2y=1$. В первом случае из второго уравнения $z=-x^2-4x-4$. Перепишем первое уравнение $(x-z)(x+z)+6(x+1)=0$. Заменяя z, преобразуем уравнение к виду $(x+1)^2(x^2+6x+10)=0$. Во втором случае $y=\frac{1}{2}(1-2x)$. Подставляя в первое уравнение, получим после преобразований $(x-3)^2=z^2$ и т. д.

215. $(1;\ -1;\ -1)$; $(6\pm\sqrt{2};\ 3\pm\sqrt{2};\ -2\mp\sqrt{2})$. Указание. Умножим уравнение соответственно на 1, -5, 1 и сложим.

216. $(1;\ -2;\ 3)$; $(1;\ 3;\ -2)$; $(-2;\ 3;\ 1)$; $(-2;\ 1;\ 3)$; $(3;\ 1;\ -2)$; $(3;\ -2;\ 1)$. Указание. Имеем $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-\frac{1}{2}((x+y)^2-$ $-(x^2+y^2))^2$. Заменяя $x+y$, x^2+y^2 и x^4+y^4, получим для z кубическое уравнение $z^3-2z^2-5z+6=0$, корни которого $1, -2, 3$.

217. $(1;\ 0)$. Указание. Первое уравнение рассматривается как квадратное относительно $u=\sqrt{y+1}$, $xu^2-u+x-x^3=0$. Его корни: 1) $u=x$; 1; $u=\frac{1}{x}-x$.

218. $\left(\pm\frac{3}{2};\ \pm 2;\ \pm\frac{5}{2}\right)$. Указание. Преобразуем уравнения $(x+y-z)(x-y+z)=2$, $(y+z-x)(y-z+x)=3$, $(y-x)\times$ $\times(5z+x-y)=6$. Поделим второе уравнение на первое, получим $z=5y-5x$ и т. д.

219. $\left(\frac{1}{8};\ \frac{3}{2};\ 1\right)$; $\left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{2};\ 3\right)$. Указание. Выразим x из каждого уравнения. После упрощения получим $1-y=\frac{5-4y^2}{(2z+4y)}=$ $=\frac{7-4y^3}{z^2+2zy+4y^2}$. Затем $5+2zy=2z+4y$, $7+z^2y+2zy^2=z^2+2zy+$ $+4y^2$. Обозначим $yz=u$, $2y+z=v$. Будем иметь $5+2u=2v$, $7+$ $+uv=v^2-2u$, откуда $u=\frac{3}{2}$; $v=4$.

220. $(\pm 1;\ \pm 1;\ \pm 1)$; $(\pm\sqrt[4]{2};\ \pm\sqrt[4]{2};\ 0)$; $(\pm\sqrt[4]{2};\ 0;\ \pm\sqrt[4]{2})$; $(0;\ \pm\sqrt[4]{2};\ \pm\sqrt[4]{2})$.

221. $\left(\pm\frac{84}{13};\ \pm\frac{21}{10};\ \pm\frac{28}{15}\right)$; $(c;\ 0;\ 0)$; $(0;\ c;\ 0)$; $(0;\ 0;\ c)$, где c — любое число. Указание. Исключив решения, содержащие 0, перейдите к новым неизвестным: $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$, $w=\frac{1}{z}$.

222. $\left(\pm 10\sqrt{\frac{6}{35}};\ \pm 14\sqrt{\frac{6}{35}};\ \pm 2\sqrt{\frac{6}{35}};\right)$.

223. $(2;\ 1;\ -1)$; $(2;\ -3;\ -1)$; $(3;\ -4;\ 1)$; $(3;\ -4;\ -3)$; $(3;\ 2;\ 1)$; $(3;\ 2;\ -3)$. Указание. Сложим уравнения, умноженные соответственно на 4, 1, 2. Получим уравнение с одним x.

224. $\left(\pm\frac{1}{5}\sqrt{3};\ \pm\frac{5}{9}\sqrt{3};\ \pm 6\sqrt{3}\right)$.

225. $(-1;\ -1;\ 1)$; $(5;\ -1;\ 1)$; $(-1;\ 3;\ 1)$; $(5;\ 3;\ 1)$; $(0;\ 1\pm\sqrt{2};$ $-1)$; $(4;\ 1\pm\sqrt{2};\ -1)$. Указание. Сложим уравнения, умноженные соответственно на 1, -7, -1, и найдем z.

226. $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ -\sqrt[3]{4};\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$; $\left(-\frac{4}{\sqrt[3]{70}};\ \frac{7}{\sqrt[3]{70}};\ -\frac{5}{\sqrt[3]{70}}\right)$.

Указание. Сложим первые два уравнения и из суммы вычтем третье. Возникнут два случая: 1) $x-y-z=0$; 2) $xyz=-2$. В первом случае заменим $x=y+z$ в первом и третьем уравнениях. Получим $-3y-5z=(y+z)\,yz^2$, $6y+10z=(y+z)\,y^2z$, откуда $2\,(y+z)\,yz^2=-(y+z)\,y^2z$.

227. $(1;\ -1;\ 0)$; $(-1;\ 1;\ 0)$. Указание. Сложим первое, третье и удвоенное второе уравнения. Получим $(y+x+2z)^2=0$. Выражаем y через x и z и т. д.

228. $(0;\ 0;\ 0)$; $(7;\ 7;\ 7)$; $\left(\frac{5}{2};\ 5;\ \frac{15}{2}\right)$. Указание. Сложим первое и третье и вычтем удвоенное второе уравнение.

229. $(0;\ 0;\ 0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ \sqrt[3]{4};\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$; $\left(\frac{4}{\sqrt[3]{70}};\ \frac{7}{\sqrt[3]{70}};\ -\frac{5}{\sqrt[3]{70}}\right)$. Указание. Сложим первые два и вычтем третье уравнение.

230. $(0;\ 0;\ 0)$; $(-1;\ -1;\ -1)$; $(-5;\ -10;\ -15)$. Указание. Вычтем из третьего уравнения первое и второе. Возникнут два случая: 1) $x=-1$; 2) $x+y-z=0$

231. $(2;\ -2;\ 1)$; $(2;\ 1;\ -2)$; $(1;\ -2;\ 2)$; $(1;\ 2;\ -2)$; $(-2;\ 1;\ 2)$; $(-2;\ 2;\ 1)$. Указание. Используя тождество $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)-3\,(x+y+z)\cdot(xy+yz+zx)=-3xyz$, найдем $xyz=-4$. Таким образом, x, y, z — корни уравнения $t^3-t^2-4t+4=0$, левая часть которого $(t-1)\,(t^2-4)$.

232. $(-2;\ -4;\ 1)$; $\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{9};\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{9}\right)$. Указание. Сложим первые два уравнения, получим $(x+y)^2+4\,(x+y)\,z-12z^2=0$, или $(x+y-2z)\,(x+y+6z)=0$. Выражая z через x и y и заменяя в первом уравнении, получим относительно x и y однородное уравнение.

233. $\left(\pm\frac{7}{6};\ \pm 1;\ \pm\frac{5}{6}\right)$. Указание. Разложим на множители левые части, разделим первое уравнение на второе, затем — первое на третье. Из двух получившихся уравнений выразим y и x через z.

234. $(2;\ 1;\ 0)$; $(-2;\ -1;\ 0)$. Указание. Вычтем второе уравнение из первого, получим после преобразований $(x-y)\times(x+y+z)=3$. Вычтем третье уравнение из второго, будем иметь $(y-z)\,(x+y+z)=3$. Таким образом, $x-y=y-z$, $x=2y-z$.

235. $\left(-\frac{5}{4};\ -\frac{12}{5}\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{5}{4};\ \frac{12}{5}\sqrt{2};\ -2\sqrt{2}\right)$; $\left(-3;\ -\frac{5}{3};\ 1\right)$; $\left(-3;\ \frac{5}{3};\ -1\right)$. Указание. Выразим x и xy через z из первых двух уравнений и подставим в третье.

§ 3. Неравенства

1. $x<-\frac{11}{3}$, $x>2$. **2.** $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 9$. **3.** $x<-1$. **4.** $-1<x<-\frac{1}{2}$,

$x>1$. **5.** $x\leqslant-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $-1<x<0$, $x\geqslant\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. **6.** $-4<x<1$. **7.** $\frac{7-\sqrt{87}}{2}\leqslant x\leqslant-1$, $8\leqslant x\leqslant\frac{7+\sqrt{87}}{2}$. **8.** x — любое. **9.** $x>-1$. **10.** $-4<x\leqslant-1$, $-\frac{2}{3}<x\leqslant1$. **11.** $x<-1$, $x=0$. **12.** $x<-1$, $x=1$. **13.** $x>1$. **14.** $\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$. **15.** $-\frac{3}{2}<x<-\frac{4}{3}$, $-1<x<1$. **16.** $x\geqslant2$. **17.** $x\leqslant\frac{3-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{21}}{2}\leqslant x<4$. **18.** $\frac{3}{4}<x<2$. **19.** $\frac{7-\sqrt{53}}{2}\leqslant x\leqslant7$. **20.** $x=3$. **21.** $\frac{2}{3}\leqslant x<4$, $x>9$. **22.** $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant0$, $x\geqslant2$. **23.** $-6\leqslant x<0$, $3<x\leqslant4$. **24.** Решений нет. **25.** $-6\leqslant x\leqslant5$. **26.** $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant0$, $x\geqslant1$. **27.** $x\geqslant1$. **28.** $-2<x\leqslant14$. **29.** $x<0$, $1\leqslant x\leqslant2$. **30.** $x\leqslant-1$, $x\geqslant3$. **31.** $\frac{12}{25}<x\leqslant\frac{1}{2}$. **32.** $x=0$. **33.** $1\leqslant x<\frac{5}{4}$, $x>\frac{65}{16}$. **34.** $x=2$. **35.** $-2\leqslant x<-1$, $2<x\leqslant3$. **36.** $1\leqslant x<2$. **37.** $4\leqslant x\leqslant8$. **38.** $x=\frac{5}{2}$. **39.** $x=-4$, $-3\leqslant x\leqslant3$. **40.** $-2\leqslant x\leqslant-1$, $x\geqslant3$. **41.** $x=-2$, $x=1$, $x\geqslant3$. **42.** $-3<x<0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$. **43.** $x\in[-2;\,-1]$, $x=3$. **44.** $x=-1$, $x=3$. **45.** $x=-\frac{8}{7}$, $x=0$. **46.** $x=1$. **47.** $x\leqslant-4$, $1\leqslant x<\frac{65}{56}$. **48.** $-12<x<\frac{2}{3}$. **49.** $x\leqslant\frac{3}{2}$. **50.** $x\leqslant-\frac{16}{9}$, $x\geqslant\frac{6}{5}$. **51.** $x>-\frac{1}{2}$. **52.** $x<\frac{9}{4}$. **53.** $x>4$. **54.** $-2\leqslant x\leqslant1$. **55.** $x=-\frac{3}{4}$. **56.** $x\neq-\frac{1}{5}$. **57.** $-2\leqslant x\leqslant2\frac{2}{5}$. **58.** $x\geqslant-\frac{1}{2}$. **59.** $x\leqslant0$, $x\geqslant\frac{4}{5}$. **60.** $x\leqslant1$, $x\geqslant2$. **61.** x — любое. **62.** $x<2\frac{1}{5}$, $x>3$. **63.** $\frac{1-\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant2$. **64.** $x\leqslant\frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x\geqslant\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. **65.** $-\frac{5}{2}<x<2$. **66.** $-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$. **67.** $x\leqslant-1$, $x\geqslant0$. **68.** $x\geqslant-\frac{2}{3}$. **69.** $x<-11$, $x>11$. **70.** $1<x<6$. **71.** $-2\leqslant x<2$. **72.** $0\leqslant x\leqslant4$. **73.** $x\geqslant-2$. **74.** $x\geqslant\sqrt[3]{3}$. **75.** $x\neq-1$, $x\neq1$. **76.** $x<-2$. **77.** $x<\frac{1}{3}$. **78.** $x\geqslant-4$. **79.** $x\leqslant-\sqrt[3]{6}$. **80.** $x=-1$. **81.** $-5\leqslant x\leqslant-1$, $x=0$, $1<x<4$, $x>4$.

§ 4. Текстовые задачи

1. На 20%. **2.** 90%. **3.** На 50%. **4.** 2/5. **5.** На 50%. **6.** 10%. **7.** 24 и 12. **8.** 37 или 48. *Указание.* Пусть $10x+y$ — данное число. Первое условие дает нам $10x+y=xy+16$, откуда $y=10-\frac{6}{x-1}$. Значит, $x-1$ — делитель 6. Возможны три значения для x: 2, 3 и 4. При $x=2$ будет $y=4$. Остаток от деления на $xy=8$

не может равняться 16. Два других значения дают нам два числа. 37 и 48. Следовательно, второе условие является лишним.

9. 0,25 кг. **10.** 20%. **11.** 80 кг и 60 кг. **12.** 23 ч 45 мин. **13.** 1520 р. **14.** 108 г цинка и 184 г свинца. **15.** За 1 сутки. **16.** $166\frac{2}{3}$ см. **17.** 120 км. **18.** Скорость первого автомобиля больше скорости второго в 2,5 раза. **19.** Через 5 ч 28 мин. **20.** а) 22 м; б) 32,5 м. Указание. Покажите, что в случае а) к моменту второй встречи каждая частица по одному разу прошла путь от A до B, а в случае б) вторая частица догнала первую, когда та еще не дошла до B.

21. 71,5 км. **22.** 5 дней. **23.** 79,8 км/ч. **24.** 24 человека. **25.** 2 ч. Указание. На пути от A до B катер удаляется от плота со скоростью, равной скорости катера в стоячей воде, а на пути от B до встречи с плотом катер приближается к плоту с той же скоростью. Следовательно, время катера от A до B равно времени от B до встречи с плотом и равно 2 ч.

26. 4 ч. Указание. Время катера от A до B равно 1 ч (см. решение предыдущей задачи). Время катера от B до первой встречи с плотом также 1 ч. По тем же соображениям время катера на путь от точки встречи с плотом до A равно его времени от A до точки, где он нагнал плот, и равно также 1 ч; значит, время катера от B до A равно 2 ч. За 1 ч по течению катер проходит весь путь от A до B, а против течения — $\frac{1}{2}$ этого пути. Следовательно, за 1 ч плот (течение) проходит $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ этого пути, а весь путь от A до B плот проплывает за 4 ч.

27. 10 ящиков. Указание. Если x — число ящиков, то из условия $7\leqslant\frac{10}{13}x<8$, откуда $9,1\leqslant x<10,4$.

28. 23 и 32. Указание. Если известна лишь сумма, то имеются две возможности: 23 и 32, 14 и 41. Если же задано произведение, то ответ не изменится: будет 23 и 32. Значит, одно условие в задаче является лишним. В самом деле, пусть данное число $10x+y$. По условию $(10x+y)(10y+x)=736=2^5\cdot 23$. Следовательно, один из сомножителей делится на 23, т. е. он равняется одному из чисел 23, 46, 92. Проверка показывает, что подходит лишь 23.

29. 20 л. Указание. После доливания в первом сосуде x л кислоты на 30 л смеси, т. е. на 1 л смеси приходится $\frac{x}{30}$ л кислоты. Во втором сосуде $(30-x)$ л кислоты. После переливания x л смеси в первом останется $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)$ л кислоты, а во втором будет $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ л кислоты на 30 л смеси, т. е. на 1 л смеси приходится $\frac{1}{30}\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ л кислоты. После второго переливания получим в первом сосуде $\left[x-\frac{x^2}{30}+\frac{12}{30}\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)\right]$ л кислоты, а во втором — $\frac{18}{30}\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ л кислоты. По условию $x-\frac{x^2}{30}+$ $+\frac{12}{30}\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)=\frac{18}{30}\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)+2$. Решая это уравнение, получим $x_1=20$, $x_2=10$. Второй корень не подходит, так как в этом случае невозможно второе переливание 12 л из второго сосуда в первый, поскольку в этот момент в первом будет 20 л смеси.

30. 133 порции. **31.** 35 р. и 24 р. **32.** 5 с. и 7 с. **33.** $\frac{1}{9}$. **34.** 30 км/ч. 40 км/ч. **35.** 20 км/ч и 40 км/ч. **36.** За 5 ч. Указание. Автомобиль потерял 1 ч 40 мин $=100$ мин; значит, он встретил пешехода через 50 мин после выезда, проехав $\frac{5}{6}$ пути от A до B. Следовательно, пешеход за 50 мин прошел $\frac{1}{6}$ от A до B.

37. 19 км/ч. **38.** $\frac{15}{8}$. **39.** 14 мин, $18\frac{2}{3}$ мин. **40.** 60 км/ч, 40 км/ч. **41.** 60 км/ч, 90 км/ч, 60 км/ч. **42.** 150 км. **43.** 40 м/мин. **44.** 21 км/ч, 155 км/ч. Указание. Если x и y — скорости велосипедиста и автомобиля, то имеем систему $|31-x|=5\,|157-y|$, $5\left|31-\frac{6}{5}x\right|=\left|157-\frac{6}{5}y\right|$. Разбирая различные случаи, нужно оставить те, для которых $\frac{6}{5}y<188$.

45. 4 км/ч. **46.** 50 км/ч. **47.** 3,8 км/ч, 4,3 км/ч. **48.** 9 км/ч. **49.** В $\frac{9}{8}$ раз. **50.** 6 км. **51.** 20 дней и 30 дней. **52.** 10 ч и 15 ч. **53.** 16 дней. **54.** 10 км/ч и 30 км/ч. **55.** 90 км/ч, 120 км/ч. **56.** 8 км/ч. **57.** Через 4 ч. **58.** В $(2+\sqrt{2})$ раза. Указание. Пусть скорости велосипедиста и мотоциклиста u и v, S — длина дороги, xS — расстояние от A до B. Тогда $\frac{S+xS}{v}=\frac{xS}{u}$, $\frac{3S+xS}{v}=\frac{S}{u}$. Сначала, разделив одно уравнение на другое, находим $x=\sqrt{2}-1$, затем $\frac{v}{u}$.

59. Через 3 ч. Указание. Пусть x, y, z, S — скорости велосипедистов и расстояние между A и B. Из условия следует, что через 1,5 ч первый находится между вторым и третьим, а через 2 ч третий — между первым и вторым, причем $\frac{3}{2}(x-y)=S-$ $-\frac{3}{2}(x+z)$, $2(x+z)-S=S-2(y+z)$. Нужно найти t, при котором $t(x-y)=t(y+z)-S$. z и S выражаются через x и y: $z=4x-5y$, $S=9(x-y)$. Затем находится t.

60. $8\frac{3}{4}$ ч. **61.** В $\frac{7}{3}$ раза. **62.** 10 км/ч. **63.** 9 км/ч, 7 км/ч.

64. 14 км/ч. **65.** 20 км. **66.** 0,5 ч. **67.** 6 ч. **68.** 10 $м^3$/ч. **69.** 8 и 12. **70.** 800 $м^3$ и 1200 $м^3$. **71.** 40 м и 20 м. **72.** 5 га. Указание. Пусть S и Q — площади полей; x, y, z — производительности бригад. Имеем $Q+S=120$, $S=3(x+y+z)$, $Q=6(x+y)$, $Q=x+$ $+y+z+8x$. Приравнивая правые части двух последних уравнений, найдем $z=5y-3x$. Затем выразим S и Q через x и y и подставим в первое уравнение.

73. 50 ч. **74.** 3 дня и 2 дня. Указание. Первый экскаватор работал или 3 дня, или 4 дня, так как при двух днях работы он вырыл бы не более 500 $м^3$, а при пяти — не менее 750 $м^3$. Аналогично число дней работы второго экскаватора — 2 или 3.

75. $\dfrac{1}{\left(1-\sqrt[n]{\dfrac{K}{K+1}}\right)}$. Указание. На первом этапе в сосуде x кислоты, 0 воды; после первого переливания $x\left(1-\frac{1}{x}\right)$ кислоты, 1 воды; после второго переливания $x\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$ кислоты; после n-го будет $x\left(1-\frac{1}{x}\right)^n$ кислоты.

76. 40% и 65%. **77.** 4,9 кг. Указание. x и y — процентное содержание меди в первом и втором сплавах, u и v — массы первого и второго кусков. Имеем $\frac{x}{100}+\frac{y}{100}=\frac{2\cdot 65}{100}$, $u+v=7$, $\frac{ux}{100}+$ $+\frac{vy}{100}=\frac{7\cdot 60}{100}$ или $x+y=130$, $u+v=7$, $ux+vy=420$. Нам нужно найти $\frac{uy}{100}+\frac{vx}{100}$. Перемножая первое и второе уравнения и вычитая третье, найдем $uy+vx=490$.

78. 1,2 кг, 2,4 кг. **79.** От 15% до 40%. Указание. Пусть мы взяли x, y, z каждого сплава так, что $x+y+z=1$, и в полученном сплаве 20% меди и r% алюминия. Имеем систему (после упрощений) $3x+6y=4$, $4x+3z=\frac{r}{15}$, $x+y+z=1$. Найдем $x=\frac{1}{5}\left(\frac{2r}{15}-2\right)$, $y=\frac{4-3x}{6}=\frac{1}{30}\left(26-\frac{2r}{5}\right)$, $z=\frac{1}{3}\left(\frac{r}{15}-4x\right)=\frac{1}{15}\left(8-\frac{r}{5}\right)$. Из неравенств $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ найдем границы изменения r.

80. В 2,5 раза. **81.** 4,2 с. **82.** 36 ч, 45 ч. **83.** 24 ч. **84.** Нет. **85.** 191. **86.** 115. Указание. n — число коробок, x — количество заготовок в коробке. Из условия следует $7n+14x=nx-3$. Преобразуем уравнение к виду $(n-14)(x-7)=101$, n и x — натуральные числа, $n\geqslant 100$; значит, $n-14=101$, $n=115$.

87. 36 чел. Указание. x, y, z, u — количество порций каждого вида. Имеем $y-x=u-z$, $x+z=y+u-4$, $x^2+y^2+z^2+u^2=$ $=420$. Из первых двух уравнений найдем $x=y-2$, $z=u-2$. Подставляя в третье и преобразуя, получим $(y-1)^2+(u-1)^2=208$. 208 можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел единственным образом: $208=8^2+12^2$. Самое простое, вероятно, вычитать из 208 квадраты чисел от 2 до 10 и найти те, для которых эта разность есть точный квадрат.

88. 3, 3, 9, 3. Указание. Из условий следует, что количество фотоаппаратов, часов, авторучек и приемников можно обозначить через x, x, $3x$, x, а стоимости — соответственно $10x$, y, z, u. Имеем систему $y+u=10x+z+4$, $y+z=10x+u-24$, $10x^2+xy+3xz+xu=240$, $z\leqslant 6$. Из первых двух уравнений найдем $y=10x-10$, $u=z+14$. Подставляя в третье, получим после преобразований $x(5x+z+1)=60$, т. е. x — делитель 60, $x\leqslant 3$, так как $5x^2<60$. Но $z\leqslant 6$, значит, $x=3$.

89. Было продано 3 комплекта, в каждом 7 синих и 3 красных карандаша. Указание. n — число комплектов; x — число синих, y — число красных карандашей в комплекте; n, x, y — натуральные числа. По условию $x-y>3$, $3x-2y\leqslant 16$, $n(3x+2y)=81$. Из первого неравенства следует, что $x>3$, $3x>9$. Следовательно, $3x+2y>9$, n — делитель 81, $n=\frac{81}{3x+2y}<9$; значит, $n=1$ или $n=3$. При $n=3$ имеем $3x+2y=27$, $3x-2y\leqslant 16$, $x-y>3$. Выразив y через x в уравнении и подставив в неравенства, получим $6x\leqslant 43$, $5x>33$, откуда $x=7$, $y=3$. При $n=1$ решений нет.

90. 22,5 мин. **91.** 10 ч, 6 ч. **92.** Дольше других работал первый насос, в 2 раза меньше работал третий насос и в 4 раза меньше времени, чем первый, работал второй насос. Указание. u, v, w — объемы резервуаров; x, y, z — производительности насосов. Имеем $v-\frac{wy}{3z}=\frac{wx}{3z}$, $\frac{2wy}{3z}=u-\frac{2wx}{3z}$, $\frac{v}{x}=\frac{u}{y}$. Разделим первое уравнение почленно на x, второе — на y и, сложив их, получим с учетом третьего после сокращения $\frac{y}{x}-2\frac{x}{y}=1$, откуда $y=2x$, затем $u=2v$ и т. д.

93. 32 чел. Указание. Если n — число людей, не участвовавших в кроссе, а N — число членов группы, то $\frac{n\cdot 100}{3,2}\leqslant N\leqslant\frac{n\cdot 100}{2,8}$. При $n=1$ имеем $N\geqslant 31,2$, т. е. $N\geqslant 32$. Осталось проверить, что $32\leqslant\frac{100}{2,8}$.

94. 35 чел. Указание. Решение аналогично предыдущей задаче. Наименьшее число людей, не уложившихся в норматив, равно 2.

95. 18 к. **96.** 80 к. **97.** 12 ч. Указание. В первый день x ч работали вручную, $(16-x)$ — косилка, во второй — соответственно y и $11-y$. Тогда $y+4+5+5(11-y)=4(x+5(16-x))$, откуда $y=4(x-16)$. Но $y\geqslant 0$, $x\leqslant 16$. Значит, $x=16$, $y=0$.

98. 9 чел., 9 чел. Указание. x — число членов первой бригады. Получаем неравенство $\frac{48}{x}+\frac{21}{15-x}<9$, после преобразований $(x-9)^2-1<0$. Поскольку x — целое, $x=9$.

99. 119 чел. Указание. x — число рядов по 8 чел. $8x > 7(x+2)$, $5(x+9) > 7(x+2)$, т. е. $14 < x < 15\frac{1}{2}$, $x = 15$. Число людей $7(x+2) = 119$.

100. $23\frac{3}{19}$ км/ч. **101.** $2\frac{2}{3}$ ч. **102.** 3 км/ч, 15 км/ч. **103.** 21 км. Указание. $2S$ — путь мотоцикла, x км/ч и y км/ч — скорости автомобиля и мотоцикла, $2S + 5\frac{1}{4}$ — длина шоссе. Из условий получаем систему уравнений $\frac{2S+5\frac{1}{4}}{x} = \frac{S}{y}$, $\frac{S}{y+16} = \frac{3}{8}$, $\frac{S+5\frac{1}{4}}{x} = \frac{3}{8}$. Выражая из второго и третьего уравнений x и y — через S и подставляя в первое уравнение, получим для S квадратное уравнение.

104. 4 ч. **105.** 3 мин. Указание. x, y, z — время на круг гонщиков A, B, C. Система $3x = 2y + 1$, $(3x+3)\frac{1}{x} = (3x+1)\frac{1}{z} + 2$, $4y = 3z + 1$. Каждый обгон означает, что соответствующий гонщик прошел на круг больше.

106. 210 км, 2 км/ч. **107.** $30 < v < 33{,}6$ Указание. Неравенство $v < 33{,}6$ следует из условия, что, когда автомобиль догнал автобус, его путь был меньше 105 км.

108. 8 км. Указание. x км/ч — скорость течения, y км/ч — скорость лодки. Система $\frac{1}{2}(y+x) + 4 = \frac{20(y+x)}{7x+y}$, $\frac{20}{7x+y} = \frac{1}{3} + \frac{20(y+x)}{(7x+y)6x}$, или $(y+x)(7x+y) = 16(2y-x)$, $x(7x+y) = 10(5x-y)$. Разделим одно уравнение на другое и т. д.

109. 3 т. **110.** 45 мин. Указание. Время, требующееся на преодоление любого пути в обоих направлениях, пропорционально длине пути. Значит, точка встречи при одновременном выходе в 2 раза ближе к B, чем к A. Следовательно, скорость по течению в 2 раза больше, чем против течения. На весь путь от A к B и обратно надо 4,5 ч, на полпути — 2,25 ч, из которых 0,75 ч — время на путь по течению, 1,5 ч — против течения. Значит, одному катеру до середины надо 1,5 часа, а другому — 0,75 ч.

111. 40 км^2. Указание. $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$, $4z - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 20$, $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5$. Но $z \leqslant x + y$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5 \leqslant x + y$, $\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 \leqslant 0$; $x = 8$, $y = 2$, $z = 10$.

112. 1/7 ч. Указание. Эта задача, взятая из реального экзамена, сформулирована не совсем корректно. Из условия следует, что через пятую трубу вода не вливается, а вытекает из бассейна. (Докажите.)

113. 50%. Указание. x л/мин, y л/мин — скорости подачи воды, p и q — концентрации; $x + y = 100$, $p + q = 0{,}8$, $px +$

$+qy=30$. Первые два уравнения надо перемножить и вычесть третье.

114. 42 км/ч. Указание. $t_1=\frac{24{,}5}{v}$ — время на путь AB, $t_2=\frac{v}{54}$ — время от B до остановки, $S=vt_2-\frac{54t_2^2}{2}=\frac{v^2}{108}$ — путь от B до остановки, $t_3=\frac{24{,}5}{v}+\frac{v}{108}$ — время на обратный путь; $T=t_1+$ $+t_2+t_3=\frac{v}{36}+\frac{49}{v}\geqslant 2\sqrt{\frac{v}{36}\cdot\frac{49}{v}}=\frac{7}{3}$, $T=\frac{7}{3}$, если $\frac{v}{36}=\frac{49}{v}$, $v=42$.

115. Не хватит. Указание. Из условия следует, что стоимость одной колбы объема v равна $v^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}v^{\frac{4}{3}}$. Если мы изготовили N колб объема $\frac{100}{N}$, то стоимость этих колб будет $N\left(\left(\frac{100}{N}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}\left(\frac{100}{N}\right)^{\frac{4}{3}}\right)=100^{\frac{2}{3}}\left(N^{\frac{1}{3}}+\frac{100^{\frac{2}{3}}}{4N^{\frac{1}{3}}}\right)\geqslant 100$. Равенство будет, если $N^{\frac{1}{3}}=\frac{100^{\frac{2}{3}}}{4N^{\frac{1}{3}}}$, $N=\frac{100}{8}=12{,}5$, что невозможно.

116. В 6 раз. Указание. Пусть S и P — площади полей. Надо разобрать два случая: 1) $S\leqslant\frac{1}{3}(S+P)$, т. е. $S\leqslant\frac{1}{2}P$; 2) $S>\frac{1}{2}P$.

117. 100 м/с. Указание. Надо рассмотреть два случая: 1) первые 400 м самолет движется со скоростью v; 2) самолет начал замедляться, не пройдя 400 м. Второй случай невозможен. Докажем это. Пусть T — время прохождения 400 м. Тогда все время — $\frac{65}{4}T$. Последние 3600 м пройдены за $\frac{65}{4}T-T=\frac{61}{4}T$. На этом отрезке движение равнозамедленное с замедлением 2 м/с; значит, $\left(\frac{61}{4}T\right)^2=3600$, $T=\frac{240}{61}$ с. Скорость в момент T равна $\frac{61}{2}T=$ $=120$ м/с. Путь, пройденный за первые T с не меньше чем $120T=$ $=120\cdot\frac{240}{61}>400$ м.

118. Три бригады: 3 гусеничных и 5 колесных тракторов в бригаде. **119.** 8 ч 32 мин. **120.** 19 ч. **121.** 8 ч 30 мин. **122.** 1 р., 20 к. Указание. x — число посетивших цирк, u — стоимость билета в цирк, v — в кино; $xu=(24-x)v$, $\frac{xu}{u-0{,}2}+\frac{xu}{v+0{,}2}=15$ (здесь мы использовали то, что $xu=(24-x)v$), $(24-x)u-xv=19{,}2$. Из первого и третьего уравнений выражаем u и v через x: $u=\frac{0{,}4(24-x)}{12-x}$, $v=\frac{0{,}4x}{12-x}$. Подставим во второе: $\frac{0{,}4x(24-x)}{12-x}\times\left(\frac{12-x}{7{,}2-0{,}2x}+\frac{12-x}{2{,}4+0{,}2x}\right)=15$. После сокращения в левой части на $(12-x)$ и упрощений приходим к квадратному уравнению $x^2-24x+80=0$, откуда $x=4$.

123. 8 км/ч. **124.** Поезд из A вышел на 6 мин раньше. Указание. *Первый способ.* Обозначим Q — расстояние AB, x (ч) — интервал между отправлениями поездов; $x>0$, если раньше вышел поезд A, $x<0$ — в противоположном случае. Поезд A не обгонял поезд B. Ускорение поезда B равно $\frac{60}{\frac{2}{5}-x}=\frac{300}{2-5x}$. Путь поезда A при $0\leqslant t\leqslant\frac{3}{5}$ будет $S_1(t)=50t^2$. Путь поезда B при $x\leqslant t\leqslant\frac{2}{5}$ будет: $S_2(t)=\frac{150(t-x)^2}{2-5x}$, $S_2\left(\frac{2}{5}\right)=12-30x$. В момент $t=\frac{3}{5}$ поезд A прошел $S_1\left(\frac{3}{5}\right)=18$, поезд B прошел $S_2\left(\frac{2}{5}\right)+12=24-30x$. По условию $24-30x+Q-18=6$, $Q=30x$. Кроме того, при $x\leqslant t\leqslant\frac{2}{5}$ имеем: $30x+\frac{150(t-x)^2}{2-5x}-50t^2\geqslant 2$; причем равенство достигается, так как на отрезке $\frac{2}{5}\leqslant t\leqslant\frac{3}{5}$ скорость поезда B больше скорости A и расстояние между ними возрастает. После упрощений приходим к неравенству $50t^2(1+5x)-300xt+70x-4\geqslant 0$, которое обращается в равенство при одном t; следовательно, дискриминант квадратного трехчлена относительно t равен 0; таким образом, $50x^2-25x+4=0$; $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=\frac{2}{5}$. Второй корень, очевидно, не подходит. Осталось проверить, что при $x=\frac{1}{10}$ соответствующее t находится в интервале от $\frac{1}{10}$ до $\frac{2}{5}$. *Второй способ.* Пусть расстояние AB равно Q, путь поезда A — $S_1(t)$, поезда B — $S_2(t)$. Поскольку A не обгонял B, расстояние между ними $Q+S_2(t)-S_1(t)$. Если в момент t_0 это расстояние минимально, то $v_2(t_0)=v_1(t_0)$ и $v_2(t)<v_1(t)$ при $t<t_0$. Из этого и условий задачи следует, что поезд A вышел раньше поезда B. Пусть x — интервал между их выходами, $t=0$ соответствует моменту выхода поезда A; тогда $v_1(t)=100t$, если $0\leqslant t\leqslant\frac{3}{5}$, а $v_1(t)=60$, если $t\geqslant\frac{3}{5}$; $v_2(t)=\frac{300}{2-5x}(t-x)$ при

$x \leqslant t \leqslant \frac{2}{5}$, $v_2(t) = 60$ при $t > \frac{2}{5}$; $v_1(t) = v_2(t)$ при $t_0 = \frac{3x}{1+5x}$. Имеем $S_2\left(\frac{3}{5}\right) + Q - S_1\left(\frac{3}{5}\right) = 6$ (*), $S_2(t_0) + Q - S_1(t_0) = 2$ (**), $S_2\left(\frac{3}{5}\right) = S_2\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} \cdot 60 = 12 - 30x + 12 = 24 - 30x$; $S_1\left(\frac{3}{5}\right) = 18$. Из уравнения (*) находим $Q = 30x$. В уравнении (**) $S_1(t_0) = 50t_0^2$, $S_2(t_0) = \frac{150}{2-5x}(t_0 - x)^2$, $Q = 30x$, $t_0 = \frac{3x}{1+5x}$. После упрощения получим для x уравнение $50x^2 - 25x + 4 = 0$. Такое же, как в первом случае.

125. 7 км/ч, $6\frac{1}{3}$ км/ч, $6\frac{1}{2}$ км/ч. Указание. Обозначим скорости туристов $x + \frac{1}{2}$, y, x. Существует по четыре маршрута, выходящих из B и D, и по два маршрута, выходящих из A и C. Пусть туристы вышли из B. Возможны маршруты $BACD$, $BADC$, $BCAD$ и $BCDA$. У второго и четвертого маршрутов совпадает пункт D. Поскольку BCD короче, чем BAD, первый турист шел по маршруту $BADC$, второй — по $BCDA$; $\frac{19}{y} = \frac{21}{x + \frac{1}{2}}$. Очевидно, второй закончил путь последним, его время $\frac{34}{y}$. Если третий шел по $BCAD$, то $\frac{34}{y} = \frac{44}{x} + 1$. Вместе с предыдущим уравнением получаем систему, не имеющую решений. Если же третий шел по пути $BACD$, то $\frac{34}{y} = \frac{26}{x} + 1$. Исключая из системы $\frac{19}{y} = \frac{21}{x + \frac{1}{2}}$, $\frac{34}{y} = \frac{26}{x} + 1$ неизвестное y, получим для x уравнение $38x^2 - 521x + 494 = 0$, один корень которого меньше 5, а другой больше 8. Это следует из того, что при $x = 5$ или $x = 8$ правая часть отрицательна. Аналогично разбираются пути, идущие из D. Будем иметь маршрут первого — $DABC$, второго — $DCBA$; $\frac{19}{y} = \frac{21}{x + \frac{1}{2}}$. Поскольку путь первого 35 км, а второго — 25, то, учитывая имеющееся равенство, $\frac{35}{x + \frac{1}{2}} > \frac{25}{y}$, т. е. первый закончил путь последним; таким образом, третий шел по пути $DCAB$, так как $DACB$ имеет длину 44 км; $\frac{26}{x} + 1 = \frac{35}{x + \frac{1}{2}}$; $x_1 = 6\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

126. 42 чел. **127.** 33 билета. Указание. x и y — число людей соответственно в первой и второй группах. Из условий задачи следует, что $x^2 + 2y^2 - 3 = 3xy$, откуда $(x - y)(x - 2y) = 3$. Посколку x и y — натуральные числа и $x>y$, то $x-y=3$, $x-2y=1$; $x=5$, $y=2$.

128. 2,5 мин. **129.** 64 км. Указание. Покажите, что в момент прибытия автобуса на третью остановку велосипедист до нее не доехал, а в момент отправления автобуса уже проехал.

130. 88 км. Указание. Встреча произошла во время второй остановки первого автобуса.

131. 16. Указание. Пусть путь, пройденный пешеходом между двумя автобусами, равен 1, $AB=5x$, $AC=7x$, $AD=40x$. Имеем $2<5x<4$, $1<7x<3$; значит, $\frac{2}{5}<x<\frac{3}{7}$. Пусть на пути AD встречено n автобусов, α — суммарный путь до встречи первого и после встречи последнего; $\frac{40}{15}x<\alpha<2$. Имеем $40x=n-1+\alpha$, $n=40x+1-\alpha<40x-\frac{40}{15}x+1<\frac{8}{3}\cdot 14\cdot\frac{3}{7}+1=17$, $n>40x-$ $-1>40\cdot\frac{2}{5}-1=15$.

132. 5 ч 50 мин. Указание. Докажем, что гребец 7 раз отдыхал на пути от A до B и один раз — на обратном пути. Если бы на обратном пути таких перерывов было не менее двух, то за время между перерывами он проплыл бы не более 3,5 км, т. е. он греб без отдыха заведомо меньше чем 0,5 ч. При таком режиме гребли он не может добраться до B, сделав 5 перерывов на отдых. Если же на обратном пути перерывов на отдых не было, то это означало бы, что гребец не отдыхал в течение более чем 45 мин, так как последние 500 м от A до B он также греб. В этом случае на пути от A до B он сделал бы не более 3 перерывов.

133. 2,5 км. **134.** 40 мин. Указание. Все время разбивается на 5 отрезков по 50 мин и один в 20 мин. 50-минутные отрезки состоят из отрезков в 40 мин и 10 мин. Гребец должен повернуть назад не ранее чем на четвертом переходе. Пусть на четвертом отрезке он t минут двигался против течения, а $(40-t)$ — по течению; x и y — скорости лодки и течения. Тогда, приравнивая пути туда и обратно, получим $3\cdot 40\,(x-y)-3\cdot 10y+t\,(x-y)=(40-t)\times$ $\times(x+y)+20y+60\,(x+y)$. Отсюда $t=\frac{135y-10x}{x}$. С другой стороны, $AB=60y$, т. е. $120\,(x-y)-30y+t\,(x-y)=60y$, $t=\frac{210y-120}{x-y}$. Таким образом, имеем уравнение $22x^2-13xy-27y^2=0$. Но $t\leqslant 40$, $\frac{135y-10x}{x}\leqslant 40$. Значит, если $z=\frac{x}{y}$, то $z\geqslant\frac{27}{10}$ и $22z^2-13z-27=0$. Легко видеть, что положительный корень последнего уравнения меньше 2. Аналогично разбирается случай, когда поворот сделан на пятом переходе. Точно так же, вводя t, приравнивая два выражения для t, получим уравнение $22x^2-15xy-27y^2=0$, откуда $x=\frac{3}{2}y$, $t=40$. Время же, за которое турист проплывает от A до

B без течения, также будет 40 мин.

135. 693 км. Указание. S — расстояние; x, y, z — скорости поездов; $\frac{252}{x}=\frac{S-252}{z}$, $\frac{S-308}{y}=\frac{308}{x}$, $\frac{S}{z}=\frac{S-198}{y}$. Перемножая эти уравнения, получим для S квадратное уравнение.

136. 140 км. **137.** 6,1 ч. **138.** 5 мин 50 с. **139.** 70 мин. Указание. t и $t-6$ — время на первую и вторую половину пути: 1) $t \geqslant 40$, $40+(t-40)\frac{6}{5}=(t-6)\frac{6}{5}$. Это невозможно. 2) $t<40$, $t=40-t+(2t-46)\frac{6}{5}$, $t=38$.

140. 24 км/ч. Указание. x и y — пути по шоссе и проселочной дороге, w — скорость второго мотоциклиста, $u=30$ км/ч, $v=40$ км/ч; $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{w}$, $x^2\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)+\frac{2xy}{uv}+y^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{w^2}\right)=0$.

Для того чтобы при заданных u, v, w, x можно было бы найти y, необходимо и достаточно выполнение неравенства $\frac{1}{u^2v^2}-\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{w^2}\right)\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{w^2}\right)\geqslant 0$ или $\frac{1}{w^2}\leqslant\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}$.

141. 18 км. **142.** 1 ч 36 мин. Указание. Через 1,5 ч третий догонит второго и расстояние до первого будет 500 м.

143. 6 ч. **144.** 68%. **145.** 7%. **146.** 82 ч. Указание. $5x$ — объем ковша первого экскаватора, $3x$ — второго, $4y$ — столько раз берет грунт в час первый экскаватор, $7y$ — второй. Объем фундамента $(5x\cdot 4y+3x\cdot 7y)\cdot 7\cdot 6=41\cdot 42xy$. Время, необходимое для работы второму экскаватору, будет $\frac{41\cdot 42xy}{21xy}=82$ ч.

147. 12 дней. Указание. x — количество травы, съедаемое одной коровой в день; y — начальное количество травы на 1 га; z — прирост травы на 1 га в день. Отсюда $6\cdot 3x=0{,}2y+0{,}2\cdot 3z$; $8\cdot 4x=0{,}3y+0{,}3\cdot 4z$, откуда $x=\frac{1}{40}y$, $z=\frac{5}{12}y$. Надо найти t из равенства $12tx=0{,}6y+0{,}6tz$.

148. 307 км. Указание. Если бы изменение скорости произошло в течение первых 4 ч, то за последние 4 ч автомобиль проехал бы больше, чем за первые 3 ч, на величину, не превосходящую 54 км. Отсюда следует, что изменение скорости произошло на последнем часу, причем за последний час автомобиль проехал 55 км.

149. 14 машин. Указание. x — количество машин, y — число рейсов; $xy+7\cdot 12=2(y+6)(x-7)$, откуда $(x-14)\times(y+12)=0$.

150. 4 ч 24 мин. **151.** 5 чел. **152.** $\frac{5}{12}$. Указание. n — число насосов; за единицу времени приняли интервал между включения-ми двух насосов; единица объема — количество воды, перекачиваемой в единицу времени; V — объем бассейна. Имеем $\frac{n(n-1)}{2}=$ $=\frac{V}{6}$, $\frac{5}{6}V=\frac{5}{2}n(n-1)$. Время работы всех насосов будет $\frac{5}{2}\times$ $\times\frac{n(n-1)}{n}=\frac{5(n-1)}{2}$. Все время работы $(n-1)+\frac{5(n-1)}{2}=\frac{7}{2}(n-1)$. За половину времени будет заполнено $\frac{V}{6}+n\left[\frac{7}{4}(n-1)-\right.$ $\left.-(n-1)\right]=\frac{V}{6}+\frac{3}{4}n(n-1)=\frac{V}{6}+\frac{V}{4}=\frac{5V}{12}$.

153. 88. Указание. x — число ступеней неподвижного эскалатора, y — скорость эскалатора, z — скорость человека при подъеме, скорости измеряются в ступенях за единицу времени. Тогда $\frac{2xz}{2z+y}=48$, $\frac{xz}{z+y}=33$, откуда $\frac{x}{24}-\frac{x}{33}=1$.

154. 60 км/ч. **155.** 64 км/ч. **156.** Первый слиток делится на части с массами 0,4 кг, 0,6 кг, 1 кг; второй — на части 0,6 кг, 0,9 кг, 1,5 кг; третий — на части 1 кг, 1,5 кг, 2,5 кг.

157. 1 к., 2 к., 4 к., 8 к., 96 к., 1 р. 92 к., 3 р. 84 к. Указание. Пусть x_1 — наименьшая сумма, x_1x_2 — вторая по величине, ..., $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_8$ — наибольшая; $x_i\neq 1$ при $i>1$, $x_1+x_1x_2+$ $+\ldots+x_1x_2\ldots x_8=719$; 719 — число простое, следовательно, $x_1=1$. Далее имеем $x_2+x_2x_3+\ldots+x_2\ldots x_8=718=2\cdot 359$. Таким образом, $x_2=2$. Затем получим $x_3=x_4=2$ и $x_5+x_5x_6+x_5x_6x_7+$ $+x_5x_6x_7x_8=88$; x_5 — делитель 88; если $x_5=2$, то $x_6+x_6x_7+$ $+x_6x_7x_8=43$; 43 — число простое, а $x_6\neq 1$, значит, $x_5\neq 2$; если $x_5=4$, то найдем $x_6=3$, $x_7=x_8=2$, другие значения x_5 не подойдут.

158. 14, 26, 50. Указание. Задачу будем решать с конца: найдем количество орехов у каждого на предпоследнем этапе и т. д. $(30,\ 30,\ 30)\leftarrow(14,\ 14,\ 62)\leftarrow(6,\ 30,\ 54)\leftarrow(14,\ 26,\ 50)$.

159. $-53\frac{1}{3}$. **160.** 72%. **161.** 40% и 100%. Указание. Один из исходных кусков содержит $p\%$ меди ($p\leqslant 40$), другой — $q\%$ ($88\leqslant q\leqslant 100$). Тогда кусок массой 2,5 кг содержит меди не более чем $0{,}5\frac{p}{100}+2\frac{q}{100}\leqslant 0{,}5\frac{40}{100}+2=2{,}5\frac{88}{100}$. Значит, $p=40$, $q=100$.

162. 5,06 ч. Указание. t — время путешествия; x, y, z — время, которое ехали на велосипеде соответственно первый, второй и третий: $20x+4(t-x)=34$, $20y+5(t-y)=34$, $20z+(t-z)6=$ $=34$, $20(x+y+z)=34$. Выражая x, y, z через t и подставляя в последнее уравнение, найдем t.

163. 2,04 ч. Указание. Один путешественник все время ездит на мотоцикле; x — время, которое каждый из трех оставшихся идет пешком; y — время, которое они едут; z — время возвращения мотоцикла за очередным пассажиром. Имеем $5x+50y=30$, $3\cdot 50y-2\cdot 50z=30$, $5(y+z)+50z=50y$, откуда $y=0{,}44$; $x=1{,}6$.

164. 110 мин. Указание. Пусть t — время работы. Задача сводится к определению наименьшего t, при котором система неравенств $5x+7y\leqslant t$, $3(25-x)+4(25-y)\leqslant t$ имеет целые решения, удовлетворяющие неравенствам $0\leqslant x\leqslant 25$, $0\leqslant y\leqslant 25$. Умножим первое неравенство на 3, второе — на 5 и сложим. Получим $y+875\leqslant 8t$. Но t — число целое, значит, $t\geqslant 110$. Если мы возьмем $x=22$, $y=0$, $t=110$, то все неравенства выполняются.

165. 18 автобусов. Указание. x, $x+4$ — количество автобусов для каждого лагеря. В первом лагере в каждом автобусе было не менее $\frac{195}{x}-1$ человек и не более $\frac{195}{x}+1$. Для второго лагеря соответственно $\frac{255}{x+4}-1$, $\frac{255}{x+4}+1$. Если в каждом автобусе второго лагеря человек больше, чем в автобусе первого лагеря, то $\left(\frac{255}{x+4}+1\right)-\left(\frac{195}{x}-1\right)\geqslant 5$, $\left(\frac{255}{x+4}-1\right)-\left(\frac{195}{x}+1\right)\leqslant 5$, откуда $3\leqslant \frac{255}{x+4}-\frac{195}{x}\leqslant 7$. Это неравенство не имеет целых решений. В другом случае имеем $3\leqslant\frac{195}{x}-\frac{255}{x+4}\leqslant 7$, $3x^2+72x-780\leqslant 0$, $7x^2+88x-780\geqslant 0$. Поскольку x — целое, получим для x три значения: 6, 7, 8. Подходит $x=7$.

166. 11 ч. **167.** 10,5 ч. **168.** 76, 51, 31. **169.** В 2,5 раза. Указание. Если бы все время копали все трое, то они выкопали бы $1+3\cdot 0{,}5=2{,}5$ канавы.

170. 120 км. **171.** 6,5 ч. **172.** 7 ч. Указание. $AB=AC=S$; x, y, z — скорости течения на AB и AC и скорость лодки. Имеем $\frac{S}{z+x}+21=\frac{S}{z+y}$, $\frac{S}{z-x}-70=\frac{S}{z-y}$, $\frac{S}{2z-x}-12=\frac{S}{2z-y}$. Преобразуем: $S(x-y)=21(x+z)(z+y)$, $S(x-y)=70(z-y)(z-x)$, $S(x-y)=12(2z-x)(2z-y)$. Приравнивая правые части первого уравнения правым частям второго и третьего уравнений, получим $7z^2-13z(x+y)+7xy=0$, $9z^2-15z(x+y)-3xy=0$. Исключая xy, найдем $z=\frac{12}{7}(x+y)$ и т. д. В конце получим $x=\frac{4}{3}y$, $z=4y$, $S=1680y$.

173. $1\frac{3}{8}$ ч. Указание. $AC=CB=CD=S$; x, y, u — скорости течения на отрезках AC, CB, CD; z — скорость лодки. Имеем $\frac{S}{z+x}+\frac{S}{z+y}=1\frac{5}{12}$, $\frac{S}{z-x}+\frac{S}{z-y}=3\frac{1}{2}$, $\frac{S}{z-y}+\frac{S}{z-u}=4$, $S=z$. В первых, двух, заменяя S на z, можно найти аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче: $z=\frac{6}{5}(x+y)$, $x=\frac{3}{2}y$, $z=3y$, $u=$ $=\frac{9}{5}y$ и т. д.

174. 1 ч. Указание. x, y, z — скорости; t — время, на которое третий выехал позже; $(1+t)x-z=z-(1+t)y$. Для второго уравнения есть два варианта: а) если третий автомобиль через 2,5 ч не обогнал первый, то $\frac{5}{2}z-\left(\frac{5}{2}+t\right)y=8\left(\left(\frac{5}{2}+t\right)x-\frac{5}{2}z\right)$; б) если обогнал, то $\frac{5}{2}z-\left(\frac{5}{2}+t\right)y=8\left(\frac{5}{2}z-\left(\frac{5}{2}+t\right)x\right)$. Третье уравнение $(3-t)z=3x$. Перепишем первое и второе уравнения: $2z=(1+t)(x+y)$; а) $45z=(5+2t)(8x+y)$; б) $35z=(5+2t)\times$ $\times(8x-y)$. Деля на третье уравнение, получим $\frac{6}{(3-t)(1+t)}=1+\frac{y}{x}$; а) $\frac{135}{(3-t)(5+2t)}=8+\frac{y}{x}$; б) $\frac{105}{(3-t)(5+2t)}=8-\frac{y}{x}$. Вычитая полученные уравнения в случае а) и в случае б) складывая их, будем иметь: а) $(14t^2+7t+11)t=0$; б) $(2t^2+t-3)t=0$.

175. 3:2. Указание. x, y, z — скорости пешеходов; t — время, через которое встретились первый и второй;

$$2\left(ty-\frac{t}{6}\ \frac{(x+y)}{z}x\right)=ty+\frac{t}{6}\frac{(x+y)y}{z},\quad \frac{tx}{y}=\frac{t(x+y)}{z}.$$

176. 7,2 мин, 9,2 мин. Указание. S — расстояние; x, $2x$ — скорости первого; $2y$, y — второго. Второй со скоростью $2y$ прошел $\frac{2}{3}S$; $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{x}+2=\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{y}$, $\frac{S}{2x}+\frac{5S}{36x}=\frac{\frac{2}{3}S}{2y}+\frac{\frac{1}{9}S}{y}$. Из второго уравнения $y=\frac{16}{23}x$.

177. 13,5 км, 11,5 км. Указание. x, y — время, за которое проходит 1 км катер соответственно на пути от A к B и обратно; z, u — время, за которое проходят 1 км соответственно первая и вторая лодка; t — разница во времени отправления. Имеем $9(25x+25y)=25u+t$, $8(25x+25y)+3x=22u+t$, $8(25x+25y)+$ $+24x=24z$. Если S — путь, пройденный первой лодкой до встречи, то $Sz=(25-S)u+t$, $S=\frac{25u+t}{z+u}$. Исключая из системы x и y, найдем $2t=27z-23u$; подставляя в выражение для S, получим $S=13{,}5$.

178. Через 6 ч. Указание. x — время, за которое катер проходит путь от A до B; y — путь от B до A; z — время автобуса на этот путь. Имеем $\frac{5}{9}z=x+\frac{4}{9}y$, $\frac{9}{8}z=\frac{15}{8}x+y$, $z=x+16$, откуда $x=8$, $y=12$, $z=24$.

179. $\frac{1}{n-1}$. Указание x, y, z, u — скорости пешеходов;

$AB=a$, $BC=b$. Имеем $\frac{az}{y-z}=b-\frac{(a+b)u}{x+u}$, $\frac{az}{x-z}=b-\frac{(a+b)u}{y+u}$, $u=nz$. Упрощая, получим $bxy-(a+b)xz-nayz=0$, $bxy-(a+b)yz-naxz$. Вычитая одно из другого и учитывая, что $x\neq y$, найдем $(n-1)a=b$.

180. $\frac{9}{16}$. Указание. (См. задачу 158.) x — время катера на пути AB, y — его же время на пути BA, z и y — время лодок на пути AB, t — разница во времени отправления. Имеем $10x+9y=u+t$, $9x+8y+\frac{2}{11}y=\frac{9}{11}u+t$, $9x+8y+\frac{1}{3}y=\frac{2}{3}z$. Из первых двух найдем $x=u-t$, $y=\frac{1}{9}(11t-9u)$. Подставив в третье, будем иметь $16t=9(z-u)$. С другой стороны, если λ — часть пройденного пути к моменту, когда лодки поравнялись, то $\lambda z=\lambda u+t$, $\lambda=\frac{t}{z-u}=\frac{9}{16}$.

181. 1/2 и 2/5. Указание. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени, для каждого поезда (рис. 54). Для одного поезда графиком является ломаная OKM, для другого — OK_1M_1. Длина пройденного пути равна площади соответствующей фигуры. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны; значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M. Площадь $OKPL$ равна $\frac{5}{4}$ площади OPL. Если площадь OPL равна 1, то площадь OKP есть 1/4; площадь PK_1T равна 1/16, поскольку $K_1T=\frac{1}{4}PL$. Затем легко определяем площади остальных частей.

182. 4 ч. **183.** 1 ч 20 мин. Указание. Для того чтобы вернуться из пункта L, расположенного на x км ниже N и на противо-

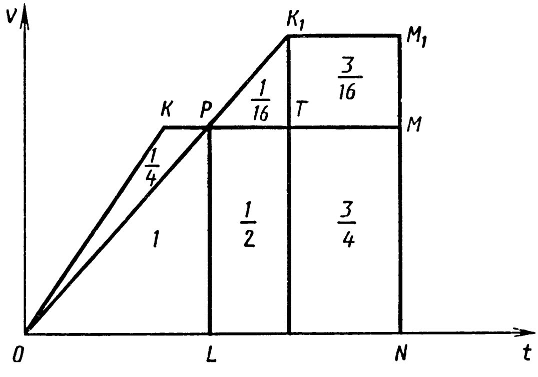


Рис. 54

положном берегу, нужно время $\frac{1}{8}\left(x+\sqrt{9x^2+\frac{72}{25}}\right)$. (См. решение задачи 10 вводной части.) Рыбаку, чтобы добраться до L, нужно $\frac{4-x}{4}$ ч. Предполагая, что лодка прибывает в L раньше рыбака, получим, что время от отплытия до возвращения равно: $\frac{1}{8}\left(8-x+\sqrt{9x^2+\frac{72}{25}}\right)$. Приравнивая нулю производную, имеем $\frac{9x}{\sqrt{9x^2+72/25}}=1$, $x=\frac{1}{5}$. Осталось проверить, что $x=\frac{1}{5}$ есть точка минимума и что лодка прибывает в L раньше рыбака.

184. 1 ч 18 мин. Указание. Задача с точностью до чисел совпадает с задачей 10 вводной части.

185. $3\sqrt{2}$ км/ч. Указание. $AB=2S$; x — скорость второго, время первого на весь путь $t_1=\frac{S}{2}$, второго $t_2=\frac{S}{x}+\frac{2S}{x+6}$, третьего $t_3=\frac{S}{6}+\frac{2S}{x+6}$. По условию $t_1-t_2=t_2-t_3$.

186. 12/7. Указание. R и r — радиусы окружностей, $R>r$. Можно считать, что одна из точек неподвижна; φ — угол, на который поворачивается движущаяся точка за 11 с. Имеем $R+r=$ $=\frac{16}{7}$, $R^2+r^2+2Rr\cos\varphi=\frac{207}{49}$, $R^2+r^2-2Rr\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{158}{49}$. Вычитая третье уравнение из второго, получим $2Rr\left(\cos\varphi+\cos\frac{\varphi}{2}\right)=1$. Заменив во втором $R^2+r^2=(R+r)^2-2Rr=\frac{256}{49}-2Rr$, будем иметь $2Rr(1-\cos\varphi)=1$. Значит, $\cos\varphi+\cos\frac{\varphi}{2}=1-\cos\varphi$, $\cos\frac{\varphi}{2}=x$, $\cos\varphi=2x^2-1$, $x=\frac{3}{4}$, $\cos\varphi=\frac{1}{8}$, $R=2$, $r=\frac{2}{7}$, $R-r=\frac{12}{7}$ — минимальное расстояние между точками.

187. 40 мин. Указание. Пусть до встречи велосипедист ехал со средней скоростью v и встретил пешехода на расстоянии S от B. Тогда $S=\frac{36v}{v+6}=36\left(1-\frac{6}{v+6}\right)\geqslant 36\left(1-\frac{6}{16}\right)=22{,}5$ км. Велосипедист проедет путь S быстрее, чем этот путь пройдет пешеход, не менее чем на $\frac{S}{6}-\frac{S}{10}\geqslant\frac{22{,}5}{15}=1{,}5$ ч $=90$ мин. В точку встречи велосипедист возвращается не позднее чем через 50 мин; причем 50 мин ему потребуется, если он в течение 20 мин удаляется от этой точки со скоростью 15 км/ч, а возвращается в нее со скоростью 10 км/ч. Следовательно, наименьшая разница во времени прибытия в пункт B равна: $90-50=40$ мин.

188. 13, 11. **189.** 5. Указание. Было x прессов, стало $x+3$; x — делитель $6480=2^4\cdot3^4\cdot5$; $x+3$ — делитель $11200=2^6\cdot5^2\cdot7$;

x не может делиться на 3, так как иначе $x+3$ делилось бы на 3, а 11200 на 3 не делится. Если x четное, то $x+3$ нечетное, т. е. $x+3$ может принимать значения: 5, 7, 5^2, $5 \cdot 7$, $5^2 \cdot 7$. Находя соответственно x, увидим, что только $x=2$ и $x=4$ — делители числа 6480. Если же x нечетное, то $x=5$. Из возможных значений для x подходит 5, так как при $x=2$ и $x=4$ производительность новых прессов оказывается меньше, чем старых.

190. 50 км/ч. Указание. Пусть x (ч) — время, за которое автобус при скорости v проходит один километр. Должно выполняться $\left|10x-\frac{1}{5}\right|+\left|15x-\frac{3}{8}\right|+\left|20x-\frac{2}{3}\right|+26x \leqslant \frac{517}{600}$. График левой части есть ломаная линия с вершинами при $x_1=\frac{1}{50}$, $x_2=\frac{1}{40}$, $x_3=\frac{1}{30}$. Можно убедиться, что наименьшее значение этой функции достигается при $x=\frac{1}{50}$ и равно $\frac{517}{600}$.

191. 84. Указание. x, y, z — количество игрушек в одном комплекте соответственно металлических, пластмассовых и мягких. Легко получить систему ограничений $3z+y-3x=57$, $3z+x-3y=41$, $z>2x+2y$. Вычитая уравнения, получим $y-x=4$, $y=x+4$. Подставляя в первое, будем иметь $3z-2x=53$. Пусть $z-x=u$, тогда $z+2(z-x)=53$, $z=53-2u$, $x=z-u=53-3u$, $y=x+4=57-3u$. Подставляя выражения x, y, z через u в неравенство, получим $10u>167$; так как u — целое число, то $u \geqslant 17$. Но $x=53-3u>0$, $u \leqslant 17$, т. е. $u=17$.

192. 2 дома на 6 квартир и 12 домов на 10 квартир. Указание. x, y, z — количество 6-, 10- и 14-квартирных домов. Из условия следует, что $3x+4y+9z \leqslant 60$, $4x+6y+12z \leqslant 80$, число квартир будет: $N=6x+10y+14z$. Умножая второе неравенство на 5 и заменяя $30y=3(N-6x-14z)$, получим $3N+2x+18z \leqslant 400$, откуда, поскольку N — число четное, $N \leqslant 132$. Но при $y=12$, $x=2$, $z=0$ имеем $N=132$.

193. 26. Указание. $2nx$; x, $2x$ — число владеющих профессиями каменщика, бетонщика и плотника. Поскольку никто не владеет тремя профессиями, то число владеющих двумя есть $2nx+x+2x-32$. Таким образом, $2nx+3x-32=2x+2$, $(2n+1)x=34$. Значит, $2n+1=17$ и т. д.

194. 15 км/ч, 3 км/ч. **195.** 20 км. Указание. Пусть $BD=x$. Если бы автомобили ехали без остановок, то они встретились бы в D. Поскольку отношения путей, пройденных за одно и то же время, равны отношению скоростей, то $\frac{AB+BD}{CA+AD}=\frac{DA}{DB}$; $\frac{450+x}{720-x}=\frac{450-x}{x}$, откуда $x=200$.

196. 44. Указание. Пусть было y бригад. Поскольку каждая бригада получила $y+20$ комплектов, по два на каждого рабочего, то y — число четное; $y(y+20)$ — общее число комплектов. По условию $y(y+20)<(y+4)12$, $y^2+8y-48<0$, $y<4$, $y=2$.

197. 30 кг. **198.** 1575, 1995. Указание. В первой коробке 15 x, во второй — $19x$, x кратно $7\cdot5$; $x=7\cdot5z=35z$. По условию $15x\cdot\frac{4}{7}<1000$, $300z<1000$, $z\leqslant3$, $19x\cdot\frac{3}{5}>1000$, т. е. $z=3$.

199. 1/4 л и 7/4 л. Указание. См. задачу 75. **200.** 54. Указание. n — число бутылей, x — количество яблочного сока в 1 л смеси. В первом сосуде будет $\frac{5n}{x}$, во втором — $\frac{19}{x}$. Имеем $\frac{19}{x}=$ $=\frac{5n}{x}+nx+4$, $\quad nx^2+4x+5n-19=0$, $\quad \frac{1}{4}D=4-n(5n-19)=$ $=-5n^2+19n+4\geqslant0$. Поскольку n натуральное, то n может равняться 1, 2, 3, 4. Но при $n=1$ и $n=2$ будем иметь $x>1$, что невозможно; при $n=4$, $x<0$. Значит, $n=3$, $x=2/3$.

201. 37,5 мин. Указание. Бросив шляпу, математик заметил ошибку через $t=10$ мин. В самом деле, за время t расстояние между шляпой и палкой стало равным сумме путей, которые прошел математик и проплыла шляпа. То же время t нужно математику, чтобы встретить плывущую к нему навстречу палку, после того как он выудил шляпу. Для удобства будем считать, что скорость течения есть 2 в мин, скорость математика 3 в мин. Через 10 мин расстояние между шляпой и математиком равно 50; время, чтобы ее догнать, будет $\frac{50}{6-2}=12{,}5$ мин. За это время шляпа проплывает расстояние, равное 25, а всего шляпа проплыла $20+25=45$. Значит, после того, как математик выудил шляпу, он вернулся в то место, где он ее бросил, через $45:3=$ $=15$ мин, а всего он потерял $10+12{,}5+15=37{,}5$ мин.

202. 23 мин 55 с. Указание. Последовательность действий, как это видно из схемы (рис. 55: тонкой линией изображены отрезки времени, когда лейку наполняет Коля, жирной — Оля; штриховая линия соответствует времени, когда наполнится бочка), периодическая с периодом 230 с, из которых 145 с наполняется бочка. Для ее наполнения нужно 6 полных периодов и еще 55 с.

203. 170 м. Указание. Рассмотрим три возможных случая. 1) К моменту второй встречи оба прошли по одному разу весь путь. Пусть S — расстояние между домами. К первой встрече суммарный путь равен S, ко второй — $3S$. Значит, каждый прошел втрое больше. Профессор прошел $3\cdot55=165$; с другой стороны, его путь $(S+85)$, т. е. $165=S+85$, $S=80$, чего не может быть, так как $S>85$. 2) Профессор догнал доцента. Этот случай также невозмо-

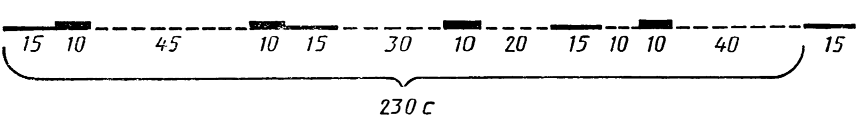


Рис. 55

жен, так как тогда скорость профессора более чем в 2 раза превышала бы скорость доцента. Значит, путь, пройденный доцентом к моменту первой встречи, меньше $0,5 \cdot 55$, а расстояние между домами было бы меньше чем $55 + 0,5 \cdot 55 = 82,5 < 85$. 3) Доцент догнал профессора. Пусть u, v — скорости соответственно профессора и доцента, S — расстояние между домами. Во все моменты времени отношение пройденных путей равно отношению скоростей; следовательно, $\frac{u}{v} = \frac{55}{S-55} = \frac{S-85}{2S-85}$. Используя свойство пропорции, состоящее в том, что если $\lambda = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то при любых x и y $\lambda = \frac{ax+cy}{bx+dy}$. Получим $\frac{u}{v} = \frac{S-85-2 \cdot 55}{(2S-85)-2(S-55)} = \frac{S-195}{25}$.

Это значит, что в тот момент, когда доцент прошел 25 м, т. е. был у газетного киоска, профессор прошел $S - 195$ м, т. е. был на расстоянии 195 м от дома доцента. Расстояние между киосками будет: $195 - 25 = 170$ м.

204. 3 км/ч, 4 км/ч, 5 км/ч. **205.** От 6/23 до 17/29.

§ 5. Квадратный трехчлен

1. $2(x-1)^2+1$. **2.** $-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{11}{2}$. **3.** $(2x-3)^2$. **4.** $(x-1)^2-4$. **5.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$. **6.** $2(x-2)^2+2$. **7.** $(x+1)(3x-7)$. **8.** $(2-x)(2x+3)$. **9.** $\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$. **10.** $2\left(x-\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$. **17.** $m-\sqrt{n}$, $m+\sqrt{n}$. **18.** а) $a=1$, $b=-1$, $c=0$; б) $a=1$, $b=c=0$; в) $a=0$, $b=-2$, $c=1$; г) $a=b=c=-1$. **19.** Рис. 56. **20.** Рис. 57. **21.** Рис. 58. **22.** Рис. 59. **23.** Рис. 60. **24.** Рис. 61. **25.** Рис. 62.

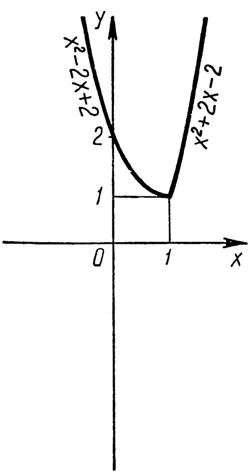


Рис. 56

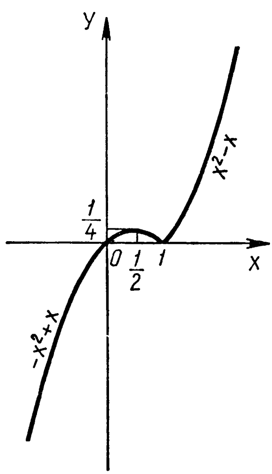


Рис. 57

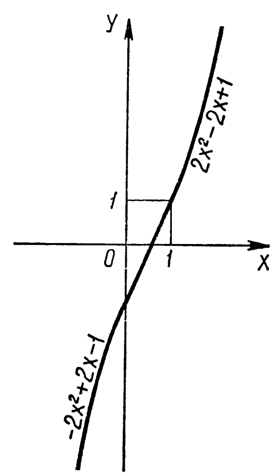


Рис. 58

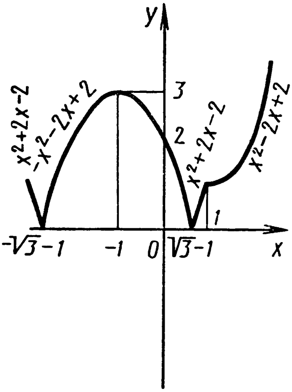


Рис. 59

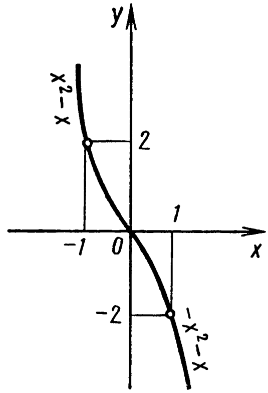


Рис. 60

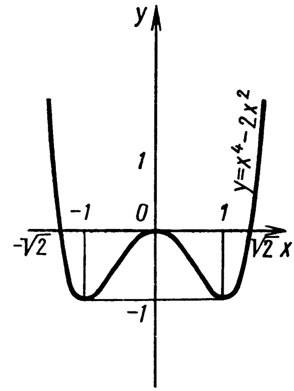


Рис. 61

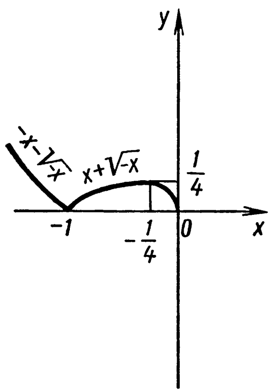


Рис. 62

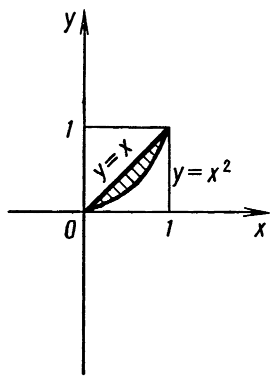


Рис. 63

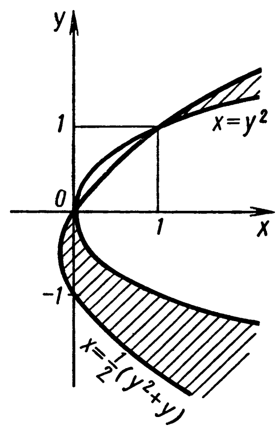


Рис. 64

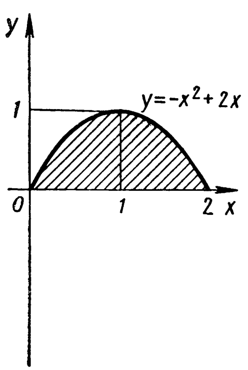


Рис. 65

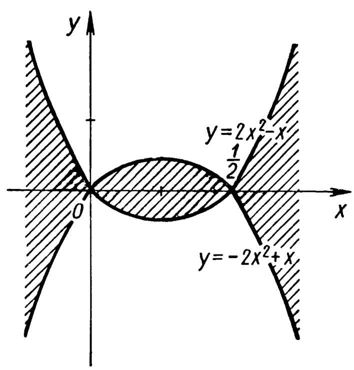


Рис. 66

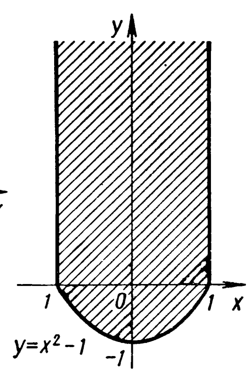


Рис. 67

27. Рис. 63. **28.** Рис. 64. **29.** Рис. 65. **30.** Рис. 66. **32.** Рис. 67. **33.** $y=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{13})\,x$ и $y=-\frac{1}{2}(5+\sqrt{13})\,x$. Указание. Выразите y через x.

34. $y=x^2+2x$ и $y=-x^2+2x$. **35.** Рис. 68. Указание. Если $y-x\geqslant 0$, то $y=-x^2+x+1$. Заменяя в неравенстве $y-x\geqslant 0$ y на $-x^2+x+1$, получим $-x^2+1\geqslant 0$, откуда $-1\leqslant x\leqslant 1$. Следовательно, мы должны взять часть параболы $y=-x^2+x+1$, соответствующую значениям x от -1 до $+1$. Если $y-x<0$, то $y=x^2+x-1$, $-1<x<1$.

36. Рис. 69. Указание. Если $y+x^2-3x\geqslant 0$, то $x^2-3x=0$; $x=0$, $x=3$. В каждой из этих двух вертикальных прямых надо взять часть, соответствующую неравенству $y+x^2-3x\geqslant 0$, что приводит к $y\geqslant 0$. Если $y+x^2-3x<0$, то $y=\frac{1}{2}(3x-x^2)$. Из этой параболы берется часть, удовлетворяющая неравенству $y+x^2-3x<0$. Это дает нам $0<x<3$ (или $y>0$).

37. Рис. 70. Указание. Рассмотрим четыре случая: 1) $y\geqslant x$, $y\geqslant x^2$. Имеем $y=\frac{1}{2}(x^2+x+2)$. Заменяя y в неравенствах, определяющих этот случай, получим $x^2-x+2\geqslant 0$, $x^2-x+2\leqslant 0$. Первое неравенство выполняется при всех x, решением второго будет $-1\leqslant x\leqslant 2$. Следовательно, в первом случае имеем дугу параболы $y=\frac{1}{2}(x^2+x+2)$, соответствующую значениям x: $-1\leqslant x\leqslant 2$; 2) $y\geqslant x$, $y<x^2$. Получаем $x^2-x-2=0$, откуда $x=-1$ или $x=2$. Заменяя в неравенствах, определяющих этот случай, x на -1, получим $-1\leqslant y<1$. Это значит, что из прямой $x=-1$ следует взять отрезок, соответствующий $-1\leqslant y<1$. Аналогично из прямой $x=2$ берется отрезок, соответствующий $2\leqslant y<4$; 3) $y<x$, $y\geqslant x^2$. Этот случай невозможен; 4) $y<x$, $y<x^2$. Получаем $y=\frac{1}{2}(x^2+x-2)$. Учитывая заданные неравенства, получим $-1<x<2$.

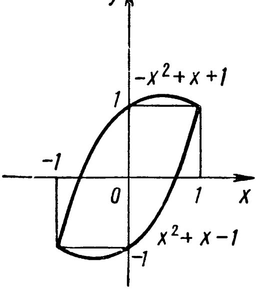


Рис. 68

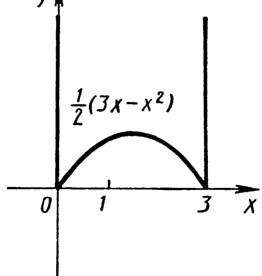


Рис. 69

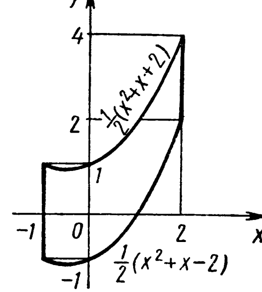


Рис. 70

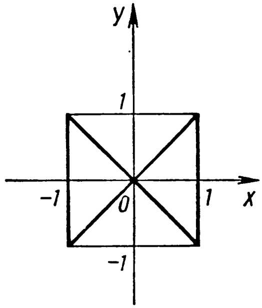


Рис. 71

38. Рис. 71. Указание. Заметим, что если точка $M(x_0; y_0)$ удовлетворяет данному соотношению, то при любом выборе знаков точка $(\pm x_0; \pm y_0)$ также ему удовлетворяет. Следовательно, нам достаточно построить искомое множество в первой четверти, а затем, симметрично отображая относительно осей,— в остальных трех четвертях. Но в первой четверти наше соотношение приводится к виду $|y-x^2|+y+x^2=2x$. Соответственно возможны два случая: 1) $y \geqslant x^2$, откуда $y=x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $y<x^2$. В этом случае получаем отрезок прямой $x=1$, $0 \leqslant y < 1$.

39. Рис. 72. Искомое множество состоит из двух лучей AK и FM прямой $y=\frac{1}{3}(2-x)$, двух дуг AB и EF параболы $y=4x^2-$

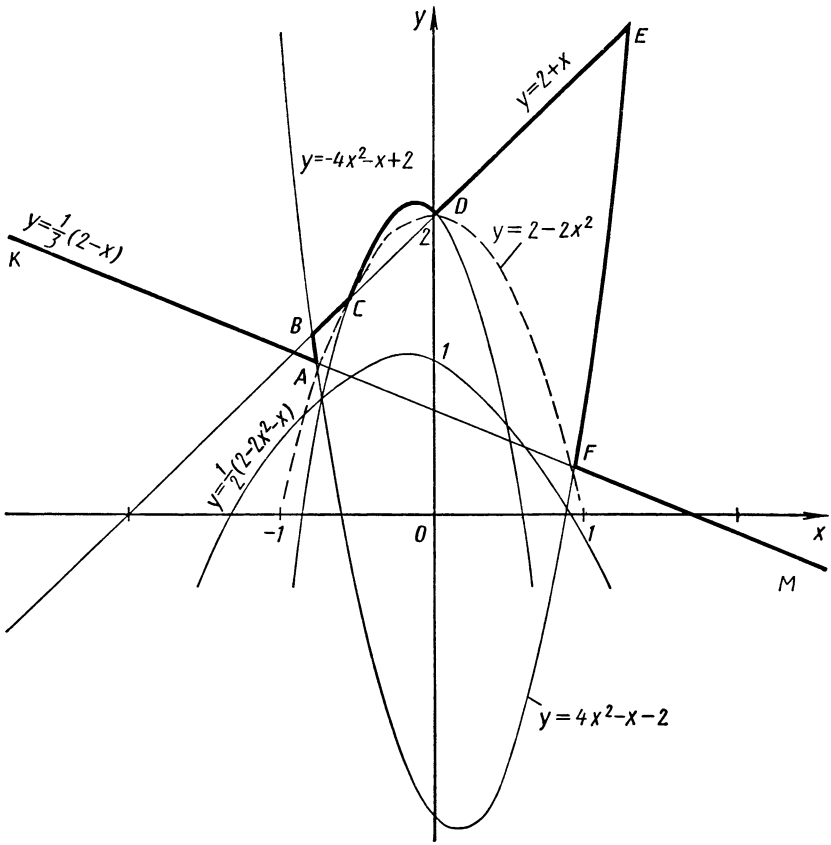


Рис. 72

$-x-2$, двух отрезков BC и DE прямой $y=2+x$, дуги CD параболы $y=-4x^2-x+2$. Указание. Заметим, что равенство $|a|=b$ эквивалентно $a=\pm b$, $b\geqslant 0$. В нашем случае будем иметь $2x^2+y-2\geqslant 0$, т. е. все искомое множество расположено в области, где $y\geqslant 2-2x^2$; при этом само множество распадается на две части: $|2x^2-y|-x-y=2x^2+y-2$ и $|2x^2-y|-x-y=-2x^2-y+2$. В первом случае получаем $|2x^2-y|=2x^2+x+2y-2$. Исходя из тех же соображений, приходим к двум линиям: $2x^2-y=2x^2+x+2y-2$ и $2x^2-y=-2x^2-x-2y+2$, в каждой из которых берутся части, удовлетворяющие неравенству $2x^2+x+2y-2\geqslant 0$ (не забудем также и про неравенство $y\geqslant 2-2x^2$). Получаем $y=\frac{1}{3}(2-x)$ или $y=-4x^2-x+2$ при условии $y\geqslant 2-2x^2$, $y\geqslant\frac{1}{2}(2-2x^2-x)$. Второй случай дает нам $|2x^2-y|=-2x^2+x+2$, откуда $y=4x^2-x-2$ или $y=2+x$ при условии $y\geqslant 2-2x^2$, $-2x^2+x+2\geqslant 0$.

40. Рис. 73. Указание. Возможны четыре случая: 1) $x\geqslant y$, $x^2\geqslant y^2$. Тогда $x=y^2$ при условии $y\geqslant 1$ или $y\leqslant -1$; 2) $x\geqslant y$, $x^2<y^2$. Тогда $x=x^2$, т. е. $x=0$ или $x=1$. На прямой $x=0$ берется луч $y<0$. На прямой $x=1$ берется луч $y<-1$. Остальные два случая можно не рассматривать, поскольку искомое множество симметрично относительно прямой $y=x$.

41. Рис. 74. Указание. 1) $x\geqslant y^2$, $y\geqslant x^2$. Имеем $x=x^2$, $x=0$ (тогда из неравенств $y=0$) или $x=1$ (тогда $y=1$). 2) $x\geqslant y^2$, $y<x^2$. Имеем $x=y$ (тогда $x\geqslant x^2$ и $x<x^2$, что невозможно). 3) $x<y^2$, $y<x^2$. Имеем $y^2=y$, $y=0$ (тогда $x<0$) или $y=1$ (тогда $x<-1$). 4) $x<y^2$, $y\geqslant x^2$. Имеем $y^2=x^2$, $y=x$ (этот случай невозможен) или $y=-x$ (тогда $-1\leqslant x<0$).

42. График состоит из трех частей: при $-1\leqslant x\leqslant 1$ $y=-x^2$; при $x>1$ $y=1-2x$; при $x<-1$ $y=1+2x$. Указание. Имеем $a^2-2ax=(a-x)^2-x^2$. Если $-1\leqslant x\leqslant 1$, то минимум (по a) будет при $a=x$. Если $x>1$, то минимум при $a=1$. Если $x<-1$, то минимум при $a=-1$.

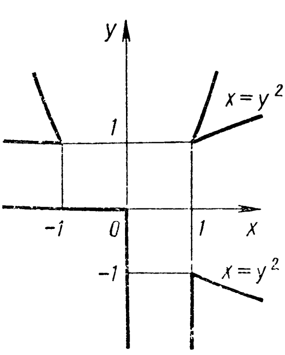


Рис. 73

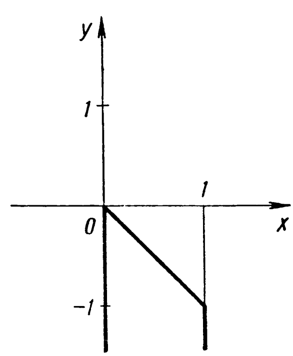


Рис. 74

43. Искомое множество состоит из двух прямых: $y=\frac{x}{2}$ и $y=-\frac{x}{2}$. Указание. Имеем $x^2+2xy-y^2=(x+y)^2-2y^2$. Следовательно, минимум левой части равен $-2y^2$ и достигается при $x=-y$. Аналогично $-x^2-2xy-2y^2=-2\left(y+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{2}$. Максимум правой части равен $-\frac{x^2}{2}$ и достигается при $y=-\frac{x}{2}$. Имеем $-2y^2=-\frac{x^2}{2}$, откуда $y=\pm\frac{x}{2}$.

44. $y=x^2+2$ или $y=x^2-2$. Указание. Поскольку $|x^2-a|+|y-a|\geqslant|(x^2-a)-(y-a)|=|x^2-y|$, а если $a=y$, тогда $|x^2-a|+|y-a|=|x^2-y|$, то левая часть равна $|x^2-y|$. Имеем $|x^2-y|=2$.

45. $y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}$. Указание. Имеем a^2-b^2-2ab+ $+2ax+2b+y=a^2-2a(b-x)-b^2+2b+y=(a-(b-x))^2-$ $-(b-x)^2-b^2+2b+y=(a-b+x)^2-2b^2+2bx+2b-x^2+y$. Значит, минимум по a будет равен (достигается при $a=b-x$) $-2b^2+$ $+2bx+2b-x^2+y$. Далее, $-2b^2+2bx+2b-x^2+y=-2\,(b^2-$ $-(x+1)\,b+\frac{(x+1)^2}{4}\Big)+\frac{(x+1)^2}{2}-x^2+y=-2\left(b-\frac{x+1}{2}\right)^2-\frac{x^2}{2}+x+$ $+\frac{1}{2}+y$. Максимум при $b=\frac{x+1}{2}$, он равен $-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}+y$. Значит, левая часть равна $-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}+y$. Из условия получаем $y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}$.

46. $y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}$. **47.** а) $a>0$, $b<0$, $c>0$; б) $a<0$, $b>0$, $c<0$; в) $a<0$, $b<0$, $c>0$; г) $a>0$, $b>0$, $c<0$; д) $a>0$, $b>0$, $c>0$; е) $a<0$; $b<0$, $c<0$. **48.** $y=-5$ при $x=-1$. **49.** $y=\frac{3}{2}$ при $x=\frac{3}{2}$. Указание. Левая часть определена при $x\geqslant\frac{3}{2}$ и монотонно возрастает.

50. 1. Указание. Сделаем замену $\sqrt{2x-3}=t$, $x=\frac{t^2+3}{2}$, $t\geqslant 0$. Тогда $y=\frac{t^2}{2}-t+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(t-1)^2+1$. Минимум будет при $t=1$.

51. $-\sqrt{3}$. Указание. Сделаем замену $\sqrt{x+2}=t\geqslant 0$, $x=$ $=t^2-2$. Имеем $y=|t^2-3|-t$. Если $t^2-3\geqslant 0$, то $y=t^2-t+3=$ $=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$. Поскольку $t=\frac{1}{2}$ не принадлежит множеству $t^2-3\geqslant 0$, минимум функции $y=t^2-t+3$ при условии $t^2-3\geqslant 0$ достигается при $t=\sqrt{3}$ (наиболее близкое значение к $t=\frac{1}{2}\Big)$, он равен $-\sqrt{3}$. При значениях t из отрезка $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$ будет $y=3-t^2-t$. Минимум этой функции достигается при том же $t=\sqrt{3}$.

52. $-\frac{1}{3}$. Указание. 1) Если $x\geqslant 1$, $y=5x^2$, минимум при $x=1$ $(y=5)$. 2) Если $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y=3x^2+2x$, минимум при $x=-\frac{1}{3}\left(y=-\frac{1}{3}\right)$. 3) Если $x\leqslant -1$, $y=x^2$, минимум при $x=-1$ $(y=1)$.

53. -1. Указание. $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=$ $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$. Обозначим $x^2+5x+4=t$, $y=t(t+2)=$ $=(t+1)^2-1$. Наименьшее значение будет при $t=-1$ (надо при этом проверить, что уравнение $x^2+5x+4=-1$ имеет решение).

54. $\frac{5}{4}$. **55.** $2\frac{1}{12}$. **56.** $2\frac{1}{4}$. **57.** $\frac{4}{3}$. **58.** $2\frac{1}{8}$; -1. **59.** 3; -3. **60.** 4; $-2\frac{1}{4}$. **61.** 2; -4. **62.** 5; 1.

63. 41; $3(3-2\sqrt{2})$. Указание. Если $x^2-2x-1\leqslant 0$ $(1-\sqrt{2}\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2})$, то $y=2x^2+2x+1$. Вершина этой параболы в точке при $x=-0{,}5$. Но $-0{,}5<1-\sqrt{2}$, значит, при $1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant$ $\leqslant 1+\sqrt{2}$ минимум будет при $x=1-\sqrt{2}$, он равен $3(1-\sqrt{2})^2=$ $=3(3-2\sqrt{2})$. Если $x^2-2x-1\geqslant 0$, то $y=4x^2-2x-1$. Вершина этой параболы в точке с абсциссой $x=0{,}25$. Но при $x=0{,}25$ неравенство $x^2-2x-1\geqslant 0$ не выполняется. Значит, на участке $-3\leqslant x\leqslant 1-\sqrt{2}$ функция убывает, а при $1+\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3$ возрастает. Наибольшее значение в концах отрезка $(x=-3)$. (Постройте график.)

64. 71; 1. Указание. На рисунке 75 изображен график этой функции. Если $-5\leqslant x<-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1)\leqslant x\leqslant 2$, то $y=3x^2-4$; если $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})<x<-\frac{1}{2}$, $1\leqslant x<\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1)$, то $y=x^2-2x+2$; если $-\frac{1}{2}\leqslant x<1$, то $y=-3x^2+4$. Наименьшее значение будет при $x=1$, а наибольшее при $x=-5$.

65. -2; $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Указание. $y=\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2-a-1$. Возможны три случая: 1) $-1\leqslant\frac{a+2}{2}\leqslant 1$, тогда наименьшее значение на заданном отрезке достигается при $x=\frac{a+2}{2}$, оно равно $\frac{3}{4}a^2-a-1$. По условию $\frac{3}{4}a^2-a-1=4$, откуда $a_1=-2$, $a_2=\frac{10}{3}$. Второе значение не удовлетворяет неравенству $\frac{a+2}{2}<1$; 2) $\frac{a+2}{2}>1$ $(a>0)$, тогда наименьшее значение достигается при $x=1$. Имеем

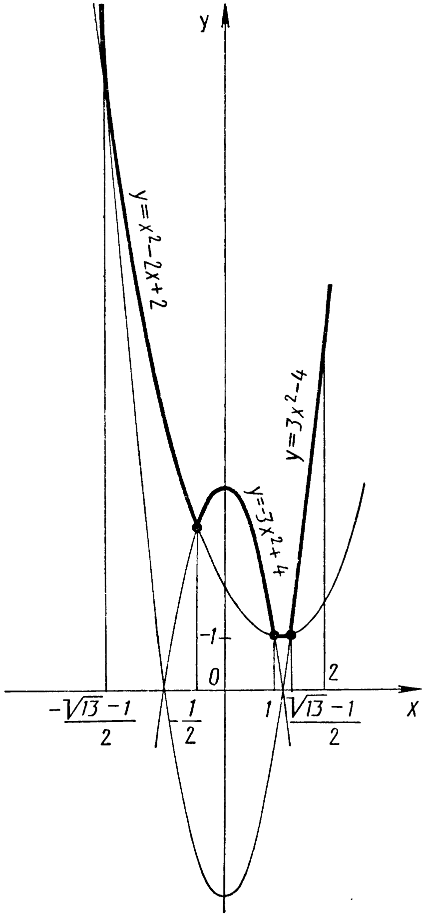


Рис. 75

$1-(a+2)+a^2=4$. Находим два значения a: $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Неравенству $a>0$ удовлетворяет второе значение; 3) $\frac{a+2}{2}<-1$ $(a<-4)$, тогда наименьшее значение будет при $x=-1$. Имеем $1+a+2+a^2=4$. Это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $a<-4$.

66. 1; $\frac{1}{2}$. **67.** ± 1. Указание. $a^2-2ab-b^2-2ax+10bx=$ $=(a-(b+x))^2-2b^2+8bx-x^2$. Наименьшее значение по a достигается при $a=b+x$ и равно $-2b^2+8bx-x^2$. Далее, $-2b^2+$ $+8bx-x^2=-2(b-2x)^2+7x^2$. Наибольшее значение по b равно $7x^2$.

68. Указание. Вершина параболы имеет координаты: $x_0 = -a - \frac{1}{2}$, $y_0 = -a - \frac{5}{4}$, откуда $y_0 = x_0 - \frac{3}{4}$; это означает, что точка $(x_0; y_0)$ описывает прямую линию (легко видеть, что x_0 может принимать любое значение).

69. Указание. Координаты вершины: $x_0 = a + \frac{1}{2}$, $y_0 = -a^2 + a - \frac{1}{4}$. Связь между x_0 и y_0: $y_0 = -(x_0 - 1)^2$.

70. $-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4} < a < 0$, $a > 1$. Указание. Вершина первой параболы в точке с координатами $(a+1;\ -a^2 - 2a)$, второй $\left(\frac{1}{2a};\ \frac{4a^2-1}{4a}\right)$. По условию одна из ординат больше $\frac{3}{4}$, другая меньше. Это означает, что $\left(-a^2 - 2a - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{4a^2-1}{4a} - \frac{3}{4}\right) < 0$ или $\frac{(2a+3)(2a+1)(a-1)(4a+1)}{a} > 0$.

71. $-2 < a < 0$, $-5 - 2\sqrt{2} < a < -5 + 2\sqrt{2}$. Указание. Для того чтобы точки $(m_1; n_1)$ и $(m_2; n_2)$ располагались по разные стороны от прямой $y = kx + b$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $(n_1 - km_1 - b)(n_2 - km_2 - b) < 0$. В нашем случае будем иметь $(-a^2 - 2a)\left(\frac{-a^2 - 6a - 5}{4} - a - 3\right) < 0$ или $a(a+2) \times (a + 5 - 2\sqrt{2})(a + 5 + 2\sqrt{2}) < 0$.

72. а) $p^2 - 2q$; б) $-p(p^2 - 3q)$; в) $\frac{2q+p}{q^2+pq+q}$; г) $\sqrt{\frac{2\sqrt{q}-p}{q}}$. Указание. Если $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = k$, то $k^2 = \frac{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2} = \frac{2\sqrt{q}-p}{q}$.

73. а) $qx^2 + px + 1 = 0$; б) $x^2 + (2q - p^2)x + q^2 = 0$; в) $x^2 + \frac{2q-p^2}{q}x + 1 = 0$; г) $x^2 - \sqrt{2\sqrt{q} - p}\ x + \sqrt{q} = 0$. **74.** -4. **75.** $a < -4 - 2\sqrt{5}$, $0 < a < -4 + 2\sqrt{5}$.

76. Если $a < -6$, то наибольшее значение достигается при $x = 1$, наименьшее при $x = -1$. Они равны соответственно $(-a-1)$, $(a-1)$; если $-6 \leqslant a < 0$, то соответственно имеем $\left(2 + \frac{a^2}{12}\right)$, $(a-1)$; если $0 \leqslant a < 6$, то соответственно $\left(2 + \frac{a^2}{12}\right)$, $(-a-1)$; если $a \geqslant 6$, то соответственно $(a-1)$, $(-a-1)$.

77. Если $a < -2$, то наибольшее значение равно $3 - 2a$, а наименьшее $3 + 2a$; если $-2 \leqslant a < 0$, то соответственно $(3-2a)$, $\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$; если $0 \leqslant a < 2$, то соответственно $(3+2a)$, $\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$; если $a \geqslant 2$, то соответственно $(3+2a)$, $(3-2a)$.

78. 2. Указание. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 4a + 6 = (a-2)^2 + 2$. Наименьшее значение $x_1^2 + x_2^2$ достигается при $a = 2$ и равно 2. Необходимо проверить, имеет ли данное уравнение корни при $a = 2$. (Имеет.)

79. 8. Указание. $x_1^2+x_2^2=4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2-12\frac{1}{4}$. Но из неравенства $D\geqslant 0$ получаем $a\leqslant -2$ или $a\geqslant 3$. Значит, $x_1^2+x_2^2$ будет наименьшим при $a=-2$ (значение, ближайшее к $a=\frac{1}{4}\Big)$.

80. 10; $\frac{45+\sqrt{65}}{49}$. Указание. Из условий $a+2-a^2\geqslant 0$ и $D=7a^2-11a+2\geqslant 0$ находим $-1\leqslant a\leqslant\frac{11-\sqrt{65}}{14}$ или $\frac{11+\sqrt{65}}{14}\leqslant$ $\leqslant a\leqslant 2$. Значит, нам нужно найти наибольшее и наименьшее значения $x_1^2+x_2^2=3a^2-5a+2=3\left(a-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{12}$ при условии, что a принадлежит одному из двух найденных выше отрезков. Поскольку $\frac{5}{6}$ не принадлежит ни одному из этих отрезков, то наименьшее значение будет достигаться при допустимом a, наиболее близком к $\frac{5}{6}$ $\left(a_1=\frac{11-\sqrt{65}}{14}\right)$, а наибольшее — при a, наиболее удаленном от $\frac{5}{6}$ $(a_2=-1)$. Вычисление $3a^2-5a+2$ при $a_1=$ $=\frac{11-\sqrt{65}}{14}$ можно облегчить, если учесть, что a_1 — корень уравнения $7a^2-11a+2=0$, т. е. $a_1^2=\frac{11a_1-2}{7}$. Таким образом, $3a_1^2-$ $-5a_1+2=\frac{33a_1-6}{7}-5a_1+2=\frac{-2a_1+8}{7}=\frac{45+\sqrt{65}}{49}$.

81. Наибольшее значение $x=6$ достигается при $a=1$. Указание. Из условия $a=\frac{13-x^2+6x}{2x+1}\geqslant 1$, откуда $\frac{(x-6)(x+2)}{2x+1}\leqslant 0$; $x\leqslant$ $\leqslant -2$ или $-\frac{1}{2}<x\leqslant 6$.

82. а) $b_1<b_2$. Указание. Обозначим через x_1 и x_2 абсциссы точек пересечения данных парабол; x_1 и x_2 — корни уравнения $(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+c_1-c_2=0$. Поскольку $a_1-a_2>0$ и $x_1+x_2>0$, то $b_1-b_2<0$; б) $b_2<b_1$; в) $b_2>b_1$. *Замечание.* Эта задача легко решается с использованием понятия производной, поскольку коэффициент b равен значению производной в нуле.

83. $y=x$, $y=-3x$. Указание. Общий вид прямой, проходящей через начало координат, $y=kx$. Касание прямой с параболой означает, что уравнение $x^2-(k+1)x+1=0$ имеет два равных корня, т. е. дискриминант уравнения $x^2-(k+1)x+1=0$ равен 0. (Вообще, касание параболы $y=ax^2+bx+c$ с прямой $y=kx+d$ означает равенство нулю дискриминанта уравнения $ax^2+(b-k)x+c-d=0$.) Из этого условия находим $k_1=1$, $k_2=-3$.

84. $y=2x-\frac{25}{12}$. **85.** $y=x-4$, $y=-x-1$. Указание. Рассмотрим прямую $y=kx+b$. Для того чтобы эта прямая касалась обеих парабол, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант каждого из уравнений $x^2-(3+k)x-b=0$ и $-x^2+$ $+(3-k)x-5-b=0$ равнялся нулю. Получаем для k и b систему уравнений $(3+k)^2+4b=0$, $(3-k)^2-4(5+b)=0$. Сложив эти уравнения, найдем $k=\pm 1$.

86. $y=5x-7$, $y=29x-127$. **87.** $c<0$. Указание. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. По условию $f(1)=a+b+c<0$. Поскольку $f(x)$ нигде не обращается в нуль, то $f(x)<0$ при всех x, в частности $c=f(0)<0$.

88. Указание. Пусть $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$. Из условия следует, что $f(x)$ и $g(x)$ положительны при всех x. Следовательно, $\frac{1}{2}(f(x)+g(x))>0$ при всех x. Заменяя $f(x)$ и $g(x)$ соответствующими квадратными трехчленами, получим, что x^2+ $+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}>0$ при всех x, т. е. уравнение $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ не имеет корней.

89. 1; 2; $-\frac{22}{3}$. **90.** $\frac{5}{2}$; 4. **91.** $a=\frac{1}{2}$; $a\leqslant\frac{16-2\sqrt{19}}{15}$; $a\geqslant\frac{16+2\sqrt{19}}{15}$. **92.** $1<a<2$ и $2<a<6$. Если $1<a<\frac{3}{2}$, то $x_1<0$, $x_2<0$; если $a=\frac{3}{2}$, то $x_1<0$, $x_2=0$; если $\frac{3}{2}<a<2$, то $x_1<0$, $x_2>0$; если $2<a<6$, то $x_1>0$, $x_2>0$. **93.** $a<\frac{-15-\sqrt{241}}{4}$, $\frac{-15+\sqrt{241}}{4}<a<3$, $a>3$. Если $a<\frac{-15-\sqrt{241}}{4}$, $\frac{-15+\sqrt{241}}{4}<a<$ $<\frac{6}{7}$, $a>3$, то $x_1>0$, $x_2>0$; если $a=\frac{6}{7}$, то $x_1=0$, $x_2>0$; если $\frac{6}{7}<a<3$, то $x_1<0$, $x_2>0$. **94.** $a<0$ и $a>4$. Если $a<-\frac{1}{2}$, то $x_1<0$, $x_2>0$; если $a=-\frac{1}{2}$, то $x_1=0$, $x_2>0$; если $-\frac{1}{2}<a<0$, то $x_1<0$, $x_2<0$; если $a>4$, то $x_1>0$, $x_2>0$. **95.** $a<2$ и $a>18$. Если $a<2$, то $x_1<0$, $x_2>0$; если $a>18$, то $x_1>0$, $x_2>0$. **96.** $a>-\frac{209}{8}$, $a\neq-5$. Если $-\frac{209}{8}<a<-5$, $a>10$, то $x_1<0$, $x_2<0$; если $-5<$ $<a<10$, то $x_1<0$, $x_2>0$; если $a=10$, то $x_1<0$, $x_2=0$. **97.** $\frac{9-\sqrt{17}}{16}<$ $<a<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<a<\frac{9+\sqrt{17}}{16}$. Если $\frac{9-\sqrt{17}}{16}<a<\frac{1}{3}$, то $x_1>0$, $x_2>0$; если $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$, то $x_1<0$, $x_2>0$; если $a=\frac{2}{3}$, то $x_1<0$, $x_2=0$; если $\frac{2}{3}<a<\frac{9+\sqrt{17}}{16}$, то $x_1<0$, $x_2<0$.

98. Указание. Заметим, что абсцисса вершины параболы $\left(x=-\frac{b}{2a}\right)$ является корнем уравнения $2ax+b=0$. Этому требованию не удовлетворяют рисунки 20, *а* и *б*.

Ситуация, изображенная на рисунке 20, *в*, возможна. Точнее, можно подобрать такие значения параметров a, b и c, при которых графики рассматриваемых функций будут в пределах точности чертежа совпадать с изображенными на рисунке 20, *в*. $\left(\text{Приблизительно, } a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{2}{3},\ c=\frac{2}{3}.\right)$

99. $(1;\ 1)$; $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$; $(\sqrt{2};\ 0)$; $(-\sqrt{2};\ 0)$. Указание. Возможны два случая: 1) $(a+b)$ и $(a-b)$ — два различных корня уравнения. В этом случае получаем для a и b систему уравнений, используя теорему Виета; 2) $a+b=a-b$, т. е. $b=0$, и при этом a является корнем уравнения. (Второй корень может быть и отличным от a.)

100. $(x+y)(y+z)(z+x)$. **101.** Указание. При решении этой и трех следующих задач можно воспользоваться следующим утверждением. Если функция $y=ax^2+bx+c$ обращается в нуль при трех различных значениях x, то она равна нулю тождественно. Из этого утверждения следует, что если две функции указанного вида равны между собой при трех различных значениях x, то они равны друг другу тождественно. Воспользуемся этим утверждением. Обе части доказываемого равенства имеют степень не выше 2 по переменной x (то же по y и z). Пусть $x=y$. Правая часть равна нулю, а левая будет $(y-z)(y^2+1)(zy+1)+$ $+(z-y)(zy+1)(y^2+1)=0$. Точно так же обе части равны нулю при $x=z$. Легко проверяется равенство и для $x=0$. Таким образом, если 0, y, z — три различных числа, можно воспользоваться сформулированным вначале утверждением. Если же какие-то два из них равны, то эти случаи с точностью до обозначения переменных мы рассмотрели в процессе доказательства (справедливость тождества при $y=z$ проверяется так же, как и при $x=z$).

102. Указание. См. решение предыдущей задачи. Доказываемое равенство легко проверяется, если $x=a$, $x=b$, $x=c$.

103. Указание. См. решения задач 101, 102. **104.** Указание. Левая часть представляет собой по переменной x многочлен степени не выше 2. (Члены с x^3, как легко видеть, сокращаются.) Если $x=y$, то $4(2y+z)^3-30y(y-z)^2-y(y-z)^2-$ $-y(y-z)^2=4((2y+z)^3-8y(y-z)^2)=108y^2z$. Так же проверяется равенство, если $x=z$. Если $x=0$, то слева имеем

$$4(y+z)^3-15zy^2-15zy^2-y(2y-z)^2-z(2z-y)^2.$$

Раскрывая скобки в выражении, убедимся, что это выражение равно нулю.

105. Указание. Пусть D_1 и D_2 — дискриминанты двух последних уравнений. Имеем $D_1=(p+2a)^2-4(q+ap)=p^2-$ $-4ap+4a^2-4q+4ap=p^2+4a^2-4q=D+4a^2>0$, поскольку

$D>0$, $\frac{1}{4}D_2=(p+a)^2-3q-3ap=p^2-ap+a^2-3q=D+a^2-$ $-ap+q$. Но квадратный трехчлен (относительно a) a^2-ap+q имеет наименьшее значение при $a=\frac{p}{2}$, равное $q-\frac{p^2}{4}$. Следовательно, $\frac{1}{4}D_2\geqslant D-\frac{1}{4}(p^2-4q)=\frac{3}{4}D>0$.

106. Указание. Обозначим правые части уравнений через $f(x)$ и $g(x)$. Имеем $f(0)=a-2$, $g(1)=2-a$. Таким образом, если $a\neq 2$, одно из чисел $f(0)$ или $g(1)$ отрицательно. Это означает, что соответствующее уравнение имеет два различных корня. Если $a=2$, то первое уравнение имеет два корня.

107. Указание. Поскольку a, b и c попарно различны, данное уравнение эквивалентно уравнению $f(x)=(x-b)(x-c)+$ $+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$. Имеем $f(a)=(a-b)(a-c)$, $f(b)=(b-a)(b-c)$, $f(c)=(c-a)(c-b)$; $f(a)\cdot f(b)\cdot f(c)=$ $=-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<0$. Значит, хотя бы одно из трех значений $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ меньше нуля. Отсюда следует, что $f(x)$ имеет два различных корня, поскольку $f(x)=3x^2+mx+n$.

108. Указание. Рассмотрим функцию $g(x)=a(x-b)\times$ $\times(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)$. Легко проверить, что $g(0)\cdot g(a)\cdot g(b)\cdot g(c)=-3a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<0$. Из этого следует, что среди чисел $g(0)$, $g(a)$, $g(b)$, $g(c)$ есть и положительные и отрицательные. Значит, уравнение $g(x)=0$ имеет, по крайней мере, один корень. Уравнение $g(x)=0$ и исходное эквивалентны (a, b и c не удовлетворяют уравнению $g(x)=0$).

109. Указание. Это неравенство следует, например, из очевидного неравенства $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$.

110. Указание. Перепишем неравенство в виде $5x^2-$ $-2(3y-4z)x+5y^2+5z^2-8yz\geqslant 0$. Рассматривая левую часть как квадратный трехчлен относительно x, докажем, что его дискриминант неположителен: $\frac{1}{4}D=(3y-4z)^2-5(5y^2+5z^2-8yz)=9y^2-$ $-24yz+16z^2-25y^2-25z^2+40yz=-16y^2+16yz-9z^2$. Получили квадратный трехчлен относительно y. Вновь рассмотрим его дискриминант: $\frac{1}{4}D_1=64z^2-16\cdot 9z^2\leqslant 0$. Это означает, что $-16y^2+16yz-9z^2\leqslant 0$, откуда, в свою очередь, следует исходное неравенство.

111. Указание. Перемножим три неравенства $a+b\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$, $c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$.

112. Указание. Правая часть равна $a+b-(2-\sqrt{2})\sqrt{ab}=$ $=a+b-\lambda\sqrt{ab}$, где $\lambda=2-\sqrt{2}$. Возведем обе части неравенства в квадрат (это можно делать, поскольку обе части положительны: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$). После преобразований и сокращения на $\sqrt{ab}$ получим неравенство $(a+b)\geqslant\frac{2+\lambda^2}{2\lambda}\sqrt{ab}$. Но $\frac{2+\lambda^2}{2\lambda}=2$. Получили известное неравенство.

113. Указание. Умножим обе части на $a+b+c$. Слева получим $\frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{b+c+a}{c}=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+$ $+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9$, $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2 \text{ и т. д.}\right)$.

114. $a<-1$ или $a>-\frac{1}{3}$. Указание. Данное выражение есть квадратный трехчлен относительно c. Отрицательность его при всех c означает отрицательность его дискриминанта: $\frac{1}{4}D=$ $=a^2+b^2-4ab-2b<0$. Нам надо определить, при каких a существует b, такое, что $b^2-2(2a+1)b+a^2<0$. Для того чтобы такое b существовало, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $b^2-2(2a+1)b+a^2$ (относительно b) был положителен. Приходим к неравенству $3a^2+4a+1>0$, откуда $a<-1$ или $a>-\frac{1}{3}$.

115. Указание. Преобразуем левое неравенство: $0\leqslant$ $\leqslant\frac{t^2-q}{2t+p}-x_1=\frac{t^2-q-2tx_1-px_1}{2t+p}=\frac{t^2-2tx_1-x_1x_2+(x_1+x_2)x_1}{2t+p}=\frac{t^2-2tx_1+x_1^2}{2t+p}=$ $=\frac{(t-x_1)^2}{2t+p}$. Преобразовав аналогично правое неравенство, получим систему $\frac{(t-x_1)^2}{2t+p}\geqslant 0$, $\frac{(t-x_2)^2}{2t+p}\leqslant 0$. Если t не равно x_1 или x_2, то $2t+p>0$ и $2t+p<0$, что невозможно. Значит, $t=x_1$ или $t=x_2$.

116. $(0;\ 0;\ 0)$; $(1;\ 2;\ -3)$; $\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\ 1\mp\sqrt{13}\right)$. Указание. 1) Если $a\neq b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, то по условию второе уравнение, степень которого не превосходит 2, имеет три различных корня. Значит, левая часть этого уравнения тождественно равна нулю, откуда $a=1$, $b=2$, $c=-3$. 2) Если $a=0$, $b\neq 0$, то 0 и $-b$ — корни квадратного уравнения $-x^2+(b-3)x+$ $+b+c=0$. Этот случай невозможен. 3) Если $a=b\neq 0$, то уравнение $(a-1)x^2+(2a-3)x+2a+c=0$ должно иметь корни 0 и a. Значит, $c=-2a$ и a удовлетворяют уравнению $a^2+a-3=0$, откуда $a=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. 4) $a=b=0$. Тогда $c=0$.

117. $a<0$. Указание. Имеем $9a-3b+c<-5$, $a-b+$ $+c>0$, $a+b+c<4$. Умножим второе неравенство на -2 и сложим с двумя другими. Получим $8a<-1$.

118. $a<0$. **119.** $6\leqslant p\leqslant 9$. **120.** $a<-4$ или $a>0$.

121. $3<a<\frac{11}{3}$, $a=2\sqrt{2}$. **122.** $a<\frac{1}{4}$ или $a>1$. **123.** $0<a<\frac{12}{7}$, $a=1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

124. $a<-3$ или $a>0$. **125.** Если $a<-\frac{7}{2}$, один корень больше -1; если $-\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant -3$, два корня больше -1. При других

a таких корней нет. **126.** Если $-1<a\leqslant-\frac{1}{2}$, один корень меньше 1; если $-\frac{1}{2}<a\leqslant 0$, оба корня меньше 1. При других a таких корней нет. **127.** $\frac{16}{17}\leqslant a\leqslant 2$. **128.** $a<-2$.

129. $0\leqslant a\leqslant 9$. **130.** $x_1=a-\sqrt{2}$, $x_2=a+\sqrt{2}$. Оба корня на отрезке [2; 5] при $2+\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 5-\sqrt{2}$. **131.** Если $-\frac{13}{14}<a\leqslant-\frac{3}{4}$, $a=\frac{-37+2\sqrt{71}}{31}$ — один корень; если $-\frac{3}{4}<a<\frac{-37+2\sqrt{71}}{31}$ — два корня. **132.** Если $-6\leqslant a<-2$, $a=\frac{1}{4}$ — один корень; если $-2\leqslant a<\frac{1}{4}$ — два корня.

133. Если $-\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$ — два корня, для остальных a — корень один.

134. Уравнение имеет один корень, удовлетворяющий заданным ограничениям при $a\geqslant 1$, $0<a\leqslant-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}<a<-2$. Указание. Дискриминант уравнения равен $(a^2(a+2)+1)^2-4a^2(a+2)=(a^2(a+2)-1)^2$. Корни уравнения: $x_1=\frac{1}{a}$, $x_2=a^2+2a$.

135. Если $a<-\frac{7}{5}$, $a=-\frac{4}{3}$, $a=1$, $a\geqslant\frac{13}{9}$ — один корень; если $-\frac{7}{5}\leqslant a<-\frac{4}{3}$, $1<a<\frac{13}{9}$ — два корня.

136. $-4-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}$, $-4+2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$. Указание. Необходимым и достаточным условием является выполнение неравенств $f(1)\leqslant 0$, $f(2)\leqslant 0$, где $f(x)$ — данный квадратный трехчлен.

137. $a>0$. Указание. Обозначим данный квадратный трехчлен через $f(x)$. Абсцисса вершины соответствующей параболы равна $\frac{a}{2}$. Если $-1<\frac{a}{2}<1$, то должно выполняться неравенство $f\left(\frac{a}{2}\right)>0$. Для остальных a имеем систему $f(-1)\geqslant 0$, $f(1)\geqslant 0$.

138. $a<-2$, $a>1$.

139. $a\geqslant\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ Указание. Прежде всего заметим, что должно быть $a>0$, так как при данных на x ограничениях $x+6>0$. Учитывая, что $a>0$, освободимся в неравенстве от знаменателя. Получим $x^2-ax+a^2-6a\geqslant 0$ при всех $-1\leqslant x\leqslant 1$. Далее, как в предыдущем примере: если $0<a\leqslant 2$, то $f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant 0$ (этот

случай оказывается невозможным). При других a имеем систему неравенств $f(-1)\geqslant 0$, $f(1)>0$.

140. $a\geqslant\frac{4}{5}$. **141.** $-\sqrt[3]{3}<a\leqslant -1$, $a=0$, $a=1$. Указание. Корни первого квадратного трехчлена: a и a^3. Решение второго неравенства $-3<x<-1$. Следовательно, надо решить систему неравенств $-3<a<-1$, $-3<a^3<-1$. Сюда надо добавить те значения a, при которых первое неравенство не имеет решений, т. е. выполняется равенство $a=a^3$.

142. $1\leqslant a\leqslant 2$. Указание. Если $a<0$, то решение исходного неравенства состоит из двух полупрямых; отдельно следует рассмотреть случай $a=0$. Если $a>0$, то решением первого неравенства будет $-a<x<\frac{a^2+2}{a}$. Следовательно, $-a\geqslant -3$, $\frac{a^2+2}{a}\leqslant 3$.

143. $-\frac{9}{10}<a<-\frac{1}{2}$. Указание. Требуемое условие эквивалентно системе неравенств $f(-4)>0$, $f(0)<0$, $f(4)>0$.

144. $2<a<5$. Указание. Требуемое условие эквивалентно системе неравенств $(a-2)f(2)<0$, $(a-2)f(3)<0$.

145. $a<-\frac{15}{8}$; $0<a<\frac{4}{3}$. **146.** Искомое множество представляет собой криволинейный треугольник, ограниченный линиями $q=\frac{1}{4}p^2$, $q=p-1$, $q=-p-1$ (рис. 76).

147. $a\leqslant -1$. Указание. Если $a\leqslant 0$, то уравнение имеет два корня: $a-1$, $a+1$. Если $a>0$, то корней четыре: $a-1$, $a+1$, $a+\frac{1}{\sqrt{a}}$, $a-\frac{1}{\sqrt{a}}$.

148. $a\geqslant 1$. **149.** $|h|>\sqrt{5}+2$, $0<|h|<\sqrt{5}-2$. Указа-

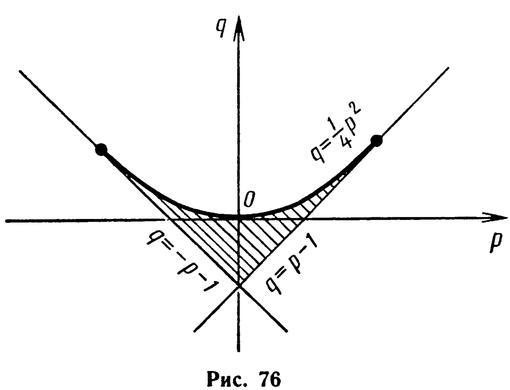


Рис. 76

ние. Группируя в левой части уравнения первый множитель с четвертым, а второй — с третьим и перемножая их, получим $(x^2+(1+h)x)(x^2+(1+h)x+h)=h^2$. Сделаем замену $x^2+(1+h)\times x=y$. (Это уравнение относительно x имеет два решения, если $(1+h)^2+4y>0$.) Получим $y^2+hy-h^2=0$. Нам надо определить, при каких h это уравнение имеет два корня, удовлетворяющих неравенству $(1+h)^2+4y>0$. При $h\neq 0$ последнее уравнение имеет корни: $y_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}h$, $y_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}h$. Если $h>0$, то y_1 удовлетворяет требуемому неравенству. Для y_2 будем иметь $(1+h)^2+4y_2>0$, $h^2-2\sqrt{5}h+1>0$, откуда с учетом, что $h>0$, получим $0<h<\sqrt{5}-2$, $h>\sqrt{5}+2$. Если $h<0$, рассматриваем неравенство для y_1.

150. $a>\frac{5}{2}$. Указание. Разделим данное уравнение почленно на x^2 и сделаем замену $x+\frac{1}{x}=y$, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\right)$. Получим $y^2+(a-1)y-1=0$. Получившееся уравнение всегда имеет два решения разных знаков. Уравнение (относительно x) $x+\frac{1}{x}=y$ или $x^2-xy+1=0$ имеет решение, если $|y|\geqslant 2$; причем, если $y\geqslant 2$, все его корни положительны; если $y\leqslant -2$ — отрицательны; при $y=-2$ — лишь один корень: $x=-1$. Осталось выяснить, при каких a уравнение $y^2+(a-1)y-1=0$ имеет один корень, удовлетворяющий неравенству $y<-2$.

151. Не существует. Указание. Среди условий, при которых оба корня данного уравнения лежат между 0 и 1, рассмотрим два: $f(0)=1-16a^2>0$, $0<\frac{2a+1}{a}<1$. Нетрудно убедиться, что эти неравенства несовместимы.

152. $a\leqslant -\frac{5}{4}$. Указание. Сделаем замену $\frac{\sqrt{x}}{1+x}=y$. Нетрудно определить, что $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$. Получаем задачу, при каких a хотя бы один корень уравнения $y^2+2ay+1=0$ удовлетворяет неравенству $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$. Ясно, что $a<0$, что с учетом неравенства $D\geqslant 0$ дает нам $a\leqslant -1$. Теперь нетрудно сделать вывод, что оба корня не могут удовлетворять неравенству $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$, поскольку их сумма равна $-2a\geqslant 2$. Значит, знаки $y^2+2ay+1$ при $y=0$ и $y=\frac{1}{2}$ различны. Приходим к неравенству $\frac{5}{4}+a\leqslant 0$.

153. Если $a<0$, то $x=-\sqrt{1-a}$; если $a=0$, то $x_1=-1$, $x_2=1$; если $0<a<1$, то $x_1=-\sqrt{1-a}$, $x_2=\sqrt{1-a}$, $x_3=\sqrt{1+a}$; если $a=1$, то $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$; если $a>1$, то $x=\sqrt{1+a}$. Указание. Постройте график левой части.

154. Если $a<-4$, то $x=2+\sqrt{4-a}$; если $a=-4$, то $x_1=2$, $x_2=2+2\sqrt{2}$; если $-4<a<0$, то $x_1=2+\sqrt{4-a}$, $x_2=2+\sqrt{4+a}$, $x_3=2-\sqrt{4+a}$; если $a=0$, то $x_1=0$, $x_2=4$; если $a>0$, то $x==2-\sqrt{4+a}$.

155. Если $a<0$, то $x=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$; если $a=0$, то $x_1=-1$, $x_2=0$; если $0<a<\frac{1}{4}$, то $x_1=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_3=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; если $a=\frac{1}{4}$, то $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$; если $a>\frac{1}{4}$, то $x=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

156. Если $a<-1$, то решений нет; если $a=-1$, то $x=0$; если $-1<a\leqslant-\frac{1}{2}$, то $x_1=a+1-\sqrt{2(a+1)}$, $x_2=a+1+\sqrt{2(a+1)}$; если $a>-\frac{1}{2}$, то $x=a+1+\sqrt{2(a+1)}$. Указание. Сделайте замену $\sqrt{2x+1}=y$, $x=\frac{y^2-1}{2}$, $y\geqslant0$.

157. Если $a<\sqrt{2}-1$, то решений нет; если $\sqrt{2}-1\leqslant a\leqslant\leqslant\frac{1}{2}$, то $x_1=a+1-\sqrt{a^2+2a-1}$, $x_2=a+1+\sqrt{a^2+2a-1}$; если $a>\frac{1}{2}$, то $x=a+1+\sqrt{a^2+2a-1}$. **158.** Если $a<0$, то решений нет; если $a\geqslant0$, то $x=\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

159. Если $a>\sqrt{2}$ и $a=1$, то $x=3a^2-1+2a\sqrt{2(a^2-1)}$; если $1<a\leqslant\sqrt{2}$, то $x=3a^2-1\pm2a\sqrt{2(a^2-1)}$; при остальных a решений нет. Указание. Поскольку $x\geqslant1$, то $\sqrt{2x}-\sqrt{x-1}>0$. Значит, $a>0$. Имеем $(\sqrt{2x})^2=(a+\sqrt{x-1})^2$, $x-2a\sqrt{x-1}+1-a^2=0$. Сделаем замену $\sqrt{x-1}=y$, $y\geqslant0$, $x=y^2+1$. Задача свелась к нахождению неотрицательных корней уравнения $y^2-2ay+2--a^2=0$.

160. Если $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{6}$, то $x=3a^2-4\pm2a\sqrt{2a^2-6}$; если $a>\sqrt{6}$, то $x=3a^2-4+2a\sqrt{2a^2-6}$; при остальных a решений нет. **161.** Если $a\leqslant-2-2\sqrt{2}$ или $-2+2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant1$, то $x==\frac{2+a\pm\sqrt{a^2+4a-4}}{4}$; если $a>1$, то $x=\frac{2+a-\sqrt{a^2+4a-4}}{4}$; при остальных a решений нет.

162. Если $0\leqslant a\leqslant1$, то $x_1=a^2-a+1$, $x_2=a^2+a$; если $a>1$, то $x=a^2+a$.

163. Если $a=0$, то $x=0$; если $a\geqslant1$, то $x=\frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$;

при остальных a решений нет. Указание. Имеем $\sqrt{a+\sqrt{x}}=a-x$. Возводим обе части в квадрат (условие $a-x\geqslant 0$), получим $a^2-(2x+1)a+x^2-\sqrt{x}=0$. Решаем относительно a: 1) $a=x+\sqrt{x}+1$; 2) $a=x-\sqrt{x}$. 1) $x+\sqrt{x}+1-a=0$ — это уравнение квадратное относительно $\sqrt{x}$. Оно имеет единственное решение при условии $1-a\leqslant 0$, $a\geqslant 1$. (Заботиться о выполнении неравенства $a-x\geqslant 0$ нет необходимости, поскольку из уравнения $a-x=\sqrt{x}+1\geqslant 0$.) $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, $x=a-1-\sqrt{x}=\frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$. Случай 2) возможен лишь при $a=0$, так как $\sqrt{x}=x-a\leqslant 0$.

164. $x=\frac{-a+\sqrt{5a^2+8}}{2}$. Указание. Возводим обе части в квадрат (условие $x-1\geqslant 0$). Получим после преобразования $x^2+ax-a^2-2=0$. Левая часть при $x=1$ равна $-a^2+a-1<0$. Следовательно, при любом a один корень полученного квадратного уравнения меньше 1, а другой больше 1.

165. $a>-6$, $a=-\frac{49}{8}$. **166.** $\frac{1}{2}\leqslant a<\frac{5}{2}$. **167.** $a<\frac{9}{2}$. **168.** $a=-1$. Указание. Перепишем уравнение в виде $a=x^2-2x+|x^2-1|$. Затем построим график функции, стоящей в правой части.

169. Если $a<-\frac{1}{4}$, то уравнение имеет два корня; если $a=-\frac{1}{4}$ — три корня; если $-\frac{1}{4}<a<0$ — четыре корня; если $a=0$ — один корень; если $a>0$, корней нет. Указание. Очевидно, при $a>0$ решений нет. Перепишем уравнение в виде $|x-1|=-ax^2$. Рассмотрим графики двух функций: $y=|x-1|$ и $y=-ax^2$ (рис. 77). Определим a_0, для которого парабола $y=-ax^2$ касается правой полупрямой функции $y=|x-1|$, т. е. касается прямой $y=x-1$ (левой полупрямой эта парабола касаться не может). Это означает, что дискриминант квадратного трехчлена ax^2+x-1 равен 0. Теперь легко выписывается ответ.

170. Если $a<-8$, уравнение имеет четыре корня; если $a=-8$ — три корня; если $-8<a<0$ — два корня; если $a=0$ — один корень; если $a>0$, корней нет. **171.** Если $a<-3$, $a>3$, то уравнение не имеет корней; если $a=3$, $a=-3$ — один корень; если $-3<a<3$ — два корня.

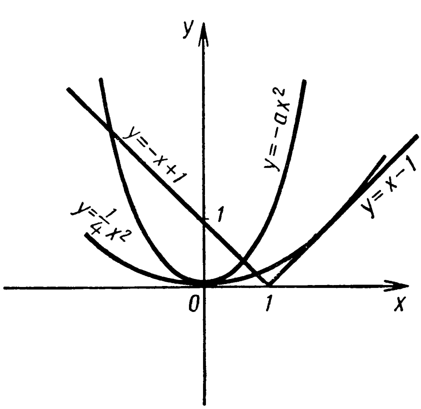


Рис. 77

172. $3<a<5$. Указание. Постройте график левой части.

173. $a_1=0$, $a_2=1$. Указание. Легко убедиться, что $a=0$ удовлетворяет условию задачи. Далее, при любом a $x=0$ является решением уравнения. График левой части при $a\neq 0$ состоит из двух полупрямых, выходящих из точки $\left(\frac{1}{a};\ 0\right)$. Общая точка графика в левой и правой частях расположена на полупрямой $y=1-ax$, $1-ax\geqslant 0$. Можно сделать вывод, что прямая $y=1-ax$ должна касаться параболы $y=ax^2+(1-2a)x+1$. Это означает, что уравнение $ax^2+(1-a)x=0$ имеет единственный корень: $x=0$, откуда $a=1$.

174. Если $a<-2$, то $x_1=1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2=1+\sqrt{a^2+4a+8}$; если $-2\leqslant a<-\frac{1}{2}$, то $x_1=1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2=1-\sqrt{a^2+4a+8}$; если $a=-\frac{1}{2}$, то $x=-\frac{3}{2}$; если $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$, то $x_1=1-\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2=1-\sqrt{a^2+4a+8}$; если $a>1$, то $x_1=1+\sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2=1-\sqrt{a^2+4a+8}$. Указание. Сделаем замену $y=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$. Будем иметь $y^2+3y-(a-1)\times(a+2)=0$, откуда $y_1=a-1$, $y_2=-a-2$. Рассмотрим уравнение $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=b$. Заметим, что если $b>0$, то $x-3>0$; если же $b<0$, то $x-3<0$. При $b=0$ получаем $x=-1$, т. е. это значение можно отнести к случаю $b\leqslant 0$. Учитывая это, возведем уравнение в квадрат. Получим $x^2-2x-3-b^2=0$. Левая часть при $x=3$ равна $-b^2$. Следовательно, один корень больше 3, а другой меньше 3, если $b\neq 0$. Таким образом, $x=1+\sqrt{4+b^2}$, если $b>0$; $x=1-\sqrt{4+b^2}$, если $b\leqslant 0$. Вернемся к параметру a. Имеем два случая: 1) $b=a-1$; 2) $b=-a-2$. В первом случае имеем: если $a\leqslant 1$, то $x=1-\sqrt{5-2a+a^2}$; если $a>1$, то $x=1+\sqrt{a^2-2a+5}$. Во втором случае: если $a<-2$, то $x=1+\sqrt{a^2+4a+8}$; если $a\geqslant -2$, то $x=1-\sqrt{a^2+4a+8}$. Таким образом, множество значений параметра a оказалось разбитым на три части: $a<-2$, $-2\leqslant a\leqslant 1$, $a>1$. На каждом участке формально имеем два корня. Осталось выяснить, при каком a эти корни совпадают. Легко видеть, что при этом должно выполняться равенство $a^2-2a+5=a^2+4a+8$, откуда $a=-\frac{1}{2}$. При этом a уравнение имеет единственный корень.

175. Если $a<-2$, то $x_1=-3+\sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2=-3-\sqrt{a^2-6a+10}$; если $-2\leqslant a<\frac{1}{2}$, то $x_1=-3-\sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2=-3-\sqrt{a^2-6a+10}$; если $a=\frac{1}{2}$, то $x=-3-\frac{\sqrt{29}}{2}$; если

$\frac{1}{2}<a\leqslant 3$, то $x_1=-3-\sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2=-3-\sqrt{a^2-6a+10}$; если $a>3$, то $x_1=-3-\sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2=-3+\sqrt{a^2-6a+10}$.

176. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<1$. Указание. Обозначим левую часть через $f(x)$; $f(x)$ монотонно возрастает всюду, кроме отрезка $[a; 2a]$ или $[2a; a]$, в зависимости от знака a. Можно сделать вывод, что данное уравнение имеет единственное решение в том и только в том случае, когда $f(a)f(2a)>0$. (См. решение задачи 19 вводной части.) Получаем неравенство $(a|a|+1-a)(1-a)>0$. Множитель $a|a|+1-a$ обращается в нуль при $a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

177. $a>-2$, $a<-\frac{7}{3}$. Указание. Изобразите множество точек, координатами которых являются пары $(x; a)$, удовлетворяющие уравнению. (См. также решение задачи 20 вводной части.)

178. $a=1$, $1<a<3$, $4<a\leqslant 6$. Указание. Рассматривая отдельно участки $x<0$, $0\leqslant x<1$, $1\leqslant x<4$, $x\geqslant 4$, решим первое уравнение. Получим $x=-1$, $1\leqslant x\leqslant 4$. Второе уравнение имеет корни: $a-2$ и a. По условию система должна иметь единственное решение. Возможны два случая: 1) $x=a-2$ — решение системы, $x=a$ не является решением. Если $a-2=-1$, то $x=a=1$ также решение. Значит, это значение $a=1$ не годится. Если же $1\leqslant a-2\leqslant 4$, то должно быть $a>4$. Получаем для этого случая $4<a\leqslant 6$; 2) $x=a$ — решение системы, $x=a-2$ не является решением. В этом случае $a=-1$ или $1<a<3$.

179. $a=-3$, $a=-2$, $1<a<5$, $6<a\leqslant 10$. **180.** $a<-6$. **181.** $a>6$. **182.** $a<-3$, $a\geqslant 1$. **183.** $-5<a<1$. Указание. Данное неравенство справедливо при любом x, если при любом x выполняется каждое из двух неравенств: $2x^2+(3+a)x+2>0$, $4x^2+(3-a)x+4>0$.

184. Если $a\leqslant 0$ или $a\geqslant 4$, то $x<\frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$ или $x>\frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$; если $0<a<4$, то x — любое. **185.** Если $a<1$, то $1-\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1-a}$; если $a\geqslant 1$, решений нет. **186.** Если $|a|\geqslant 2$, то $x<\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ или $x>\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$; если $|a|<2$, x — любое. **187.** Если $|a|>\sqrt{2}$, то $a+1-\sqrt{a^2-1}<x<a-1+\sqrt{a^2-1}$; если $|a|\leqslant\sqrt{2}$, решений нет. Указание. Изобразим графики левой и правой час-

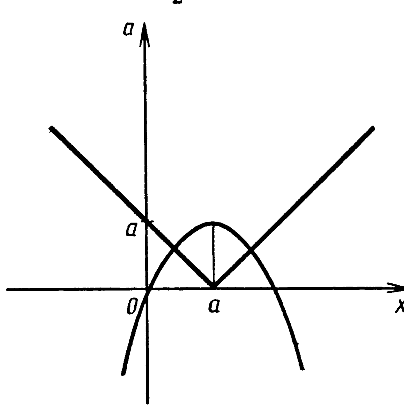


Рис. 78

тей (рис. 78). Графиком правой части является парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина имеет координаты $(a;\ a^2-2)$.

188. Если $a<-1$, $a>1$, то $x>\frac{-a+\sqrt{5a^2-4}}{2}$ или $x<\frac{-3a-\sqrt{5a^2-4}}{2}$; если $-1<a<\frac{2}{\sqrt{5}}$, x — любое; если $\frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant a\leqslant 1$, то $x<\frac{-3a-\sqrt{5a^2-4}}{2}$, $\frac{-3a+\sqrt{5a^2-4}}{2}<x<\frac{-a-\sqrt{5a^2-4}}{2}$, $x>\frac{-a+\sqrt{5a^2-4}}{2}$. Указание. Обозначим $|x+a|=y$, получим неравенство $y^2-ay+1-a^2>0$, где $y\geqslant 0$. Если $a^2>1$, то один корень уравнения $y^2-ay+1-a^2=0$ положителен и решением неравенства будет $y>y_2$, где y_2 — этот корень. При $-1\leqslant a\leqslant 0$ подходит любой $y\geqslant 0$. При $0<a<\frac{2}{\sqrt{5}}$ дискриминант отрицателен; и наконец, если $\frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant a<1$, то $y<y_1$, $y>y_2$ $\left(y_{1,2}=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{5a^2-4}\right)\right)$. Затем возвращаемся к x.

189. Если $a<0$, то $a-\sqrt{a^2-2a}<x<0$, $a+\sqrt{a^2-2a}<x<1$; если $0\leqslant a\leqslant 2$, то $0<x<1$; если $a>2$, то $0<x<1$, $a-\sqrt{a^2-2a}<x<a+\sqrt{a^2-2a}$. Указание. Неравенство сводится к $\frac{x^2-2ax+2a}{x(x-1)}<0$. Если $0<a<2$, то числитель положителен при любом x. В этом случае решением будет $0<x<1$. (Этот же ответ при $a=0$, $a=2$.) Для a вне отрезка $[0;\ 2]$ надо выяснить, как расположены корни трехчлена $x^2-2ax+2a$ относительно отрезка $[0;\ 1]$ в зависимости от a. Обозначая $f(x)=x^2-2ax+2a$, найдем $f(0)=2a$, $f(1)=1$. Это означает, что при $a<0$ $x_1<0<x_2<1$. Если же $a>2$, то оба корня больше 1.

190. Если $a<-1$, решений нет; если $-1\leqslant a\leqslant 0$, то $1-\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1+a}$; если $a>0$, то $-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}$.
191. Если $0<a<2$, то $-a\leqslant x\leqslant a$; если $2\leqslant a<4$, то $-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$; при остальных a решений нет.
192. $a<-1$. Указание. Данное неравенство выполняется при $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$. Решая соответствующую систему неравенств, найдем $a<-1$. Но если $a<-1$, левая часть на отрезке $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$ является монотонно возрастающей функцией. А поскольку эта функция больше 1 при $x=\frac{1}{4}$, то она больше 1 на всем отрезке.

193. Указание. Если неравенство выполняется при некотором x, таком, что $a\leqslant x\leqslant 2a$, то это неравенство выполняется хотя бы для одного из двух значений: $x=a$ или $x=2a$.

194. $-1<x<5/4$. Указание. Рассмотрим сначала значения $a=2$, $a=-2$. Оба неравенства будут выполняться, если $-1<x<5/4$. Покажем теперь, что если $-2\leqslant a\leqslant 2$ и $-1<x<5/4$, то данное неравенство выполняется. В самом деле, для этих значений a и x знаменатель положителен. Осталось доказать, что числитель отрицателен. Если $0<a\leqslant 2$, то достаточно убедиться, что $ax^2-x-3\leqslant 0$ при $x=-1$ и $x=5/4$. То же при $a=0$. Если $-2\leqslant a<0$ и $-1<x<5/4$, то $ax^2-x-3\leqslant$ $\leqslant -x-3<0$.

195. $-3{,}25<a<3$. Указание. Неравенство эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} x-a<3-x^2, \\ x-a>x^2-3 \end{cases}$ или $\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3 \end{cases}$. Изобразим на плоскости $(x;\ a)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе и условию $x<0$. Значения a для точек этого множества меняются от $-3{,}25$ до 3.

196. $-2{,}25<a<2$. **197.** -2. **198.** 1 или -1. Указание. Выразим a из первого уравнения и подставим во второе. Получим после преобразования уравнений $x^4-1=0$.

199. 0 или 234/49. Указание. Пусть t — корень первого уравнения, а $2t$ второго. Получаем, что уравнения $t^2-7t+2a=0$ и $4t^2-10t+a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

200. $x^2+\left(p+p_1-2\frac{q_1-q}{p_1-p}\right)x+\left(p-\frac{q_1-q}{p_1-p}\right)\left(p_1-\frac{q_1-q}{p_1-p}\right)=0$. Указание. Поскольку между коэффициентами уравнений имеет место зависимость (какая?), то ответ на вопрос задачи неоднозначен. Возможно следующее решение. Из условия следует, что $p\neq p_1$. Вычтем уравнения. Получим, что общий корень равен $-\frac{q_1-q}{p_1-p}$. Теперь легко на основании теоремы Виета найти два оставшихся корня. Они равны соответственно $-p+\frac{q_1-q}{p_1-p}$ и $-p_1+\frac{q_1-q}{p_1-p}$. Затем можно составить искомое уравнение. Если в качестве двух оставшихся корней взять, опять-таки на основании теоремы Виета, величины $-\frac{q(p_1-p)}{q_1-q}$ и $-q_1\frac{p_1-p}{q_1-q}$, то получим другой ответ, правда, при условии, что $q_1\neq q$.

201. Указание. Второе уравнение перепишем в виде $(3-a)x^2+2(1+a)x+a^2-a+2=0$. Если $a\leqslant 1$, то первое уравнение имеет решение. Покажем, что при $a>1$ решение имеет второе уравнение. Если $1<a<3$, то левая часть второго уравнения при $x=-1$ равна $a^2-4a+3<0$, а коэффициент при x^2 положителен. Случай $a=3$ очевиден. При $a>3$ коэффициент при x^2 отрицателен, а свободный член a^2-a+2 положителен.

202. $a=0$, $x\geqslant -\frac{1}{4}$; $0<a<2$, $x\leqslant\frac{-2-\sqrt{4-2a}}{2a}$ или $x\geqslant$

$\geqslant \frac{-2+\sqrt{4-2a}}{2a}$; $a \geqslant 2$, x — любое. Указание. Если $a=0$, то $x \geqslant -\frac{1}{4}$. Пусть $a > 0$. Умножим неравенство на a и заменим $ax=y$. Получим $a^2+4a(y^2+2)+4y^4+32y \geqslant 0$. Рассматривая левую часть как квадратный трехчлен относительно a, разложим ее на множители. Будем иметь $(a+2y^2+4y)(a+2y^2-4y+8) \geqslant 0$. Поскольку $a > 0$, то второй множитель положителен при всех y. Получаем $2y^2+4y+a \geqslant 0$ и т. д.

203. $a=0$, $x \leqslant 3$; $0 < a < \frac{1}{12}$, $x \leqslant \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ или $x \geqslant \frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}$; $a \geqslant \frac{1}{12}$, x — любое. **204.** Если $a=0$, то $x=0$. При остальных a $\frac{-a-a\sqrt{1+4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-a+a\sqrt{1+4a}}{2}$. Указание. Если $a=0$, то $x=0$. Пусть $a > 0$. Сделаем замену $x=ay$. После сокращения на a^4 будем иметь $y^4+y^3+ay-a^2 \leqslant 0$, или $(a+y^2)(y^2+y-a) \leqslant 0$ и т. д.

205. Если $a \geqslant 2$, то $\frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}$; если $-2 \leqslant a < 2$, то $\frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$; если $a < -2$, то $\frac{1-\sqrt{17-4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$. Указание. Заметим, что неравенство $|u| \geqslant v$ эквивалентно объединению неравенств $\left[\begin{array}{l} u \geqslant v \\ u \leqslant -v. \end{array}\right.$

В данном случае будем иметь (после упрощений) $\left[\begin{array}{l} a \leqslant -x^2+x+4, \\ a \geqslant x^2+x-4. \end{array}\right.$

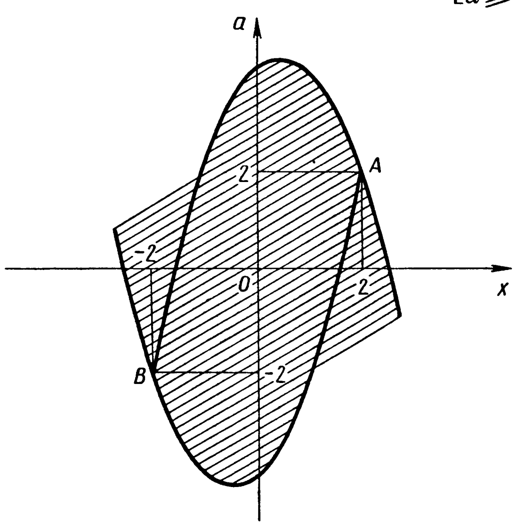


Рис. 79

Находим координаты точек A и B — точек пересечения парабол $a=-x^2+x+4$ и $a=x^2+x-4$ (рис. 79). Имеем $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ -2)$. Рассматривая прямые, параллельные оси x, закончим решение исходного неравенства.

206. Если $a>2$, точек, удовлетворяющих системе неравенств, нет. Если $1<a\leqslant 2$, то наибольшая ордината $2a-2+2\sqrt{2-a}$. Если $a\leqslant 1$, то наибольшая ордината равна $a+1$. При $a=7/4$ наибольшая ордината (в зависимости от a) будет наибольшей среди всех наибольших ординат. Указание. Множество точек, координаты которых удовлетворяют заданной системе неравенств, представляют собой сегмент, ограниченный дугой параболы $y=-(x-a)^2+a+1$ и отрезком прямой $y=2x$. Наибольшее значение ординаты будет или в вершине параболы — точке $(a;\ a+1)$, или в точке пересечения параболы и прямой, координаты которой легко находятся: $(a-1+\sqrt{2-a};\ 2a-2+2\sqrt{2-a})$. Наибольшее значение выражения $a-1+\sqrt{2-a}$ достигается при $a=7/4$ (обозначим $\sqrt{2-a}=t$, тогда $a=2-t^2$, получаем функцию $-t^2+t+1$ при $t\geqslant 0$; наибольшее значение будет при $t=0{,}5$, откуда $a=7/4$). Наибольшая ордината равна 2,5. Поскольку вершина параболы принадлежит нашему сегменту при условии $a+1\geqslant 2a$, $a\leqslant 1$ (а в этом случае $a+1\leqslant 2<5/2$), найденное $a=7/4$ является искомым.

207. $a<0{,}5$. Указание. Решение первого неравенства $1<x<2$. Уравнение $ax^2-(3a+1)x+3=0$ при $a\neq 0$ имеет корни 3 и $\frac{1}{a}$. Если $a<0$, то решение второго $\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant 3$ содержит отрезок $[1;\ 2]$. При $a>0$ должно выполняться неравенство $\frac{1}{a}>2$. Отдельно проверяется $a=0$.

208. $a<-4$. Указание. Решение первого неравенства $-1<x<2$. Нам надо найти такие a, при которых второе неравенство или не имеет решений, или его решения заполняют отрезок, концы которого левее -1. В первом случае $a<-4$. Второй случай имеет место, если выполняются неравенства $-2<a<0$, $f(-1)<0$, где $f(-1)=a+3$. Полученная система неравенств несовместима. Случай $a=-4$ можно рассмотреть отдельно, а можно включить во второй случай.

209. $-0{,}5\leqslant a<5-2\sqrt{7}$. Указание. Первое неравенство не имеет решений при $3-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 3+2\sqrt{3}$, а второе — при $5-2\sqrt{7}<a<5+2\sqrt{7}$ (заметим, что $5-2\sqrt{7}>3-2\sqrt{3}$). Пусть каждое неравенство имеет решение. Рассмотрим две параболы, являющиеся графиками рассматриваемых квадратных трехчленов. Их точка пересечения имеет абсциссу $x_0=a$. Значение в этой точке каждой из функций должно быть неотрицательным, а вершина первой параболы должна быть левее прямой $x=a$, а второй — правее. Таким образом, имеем $2a+1\geqslant 0$, $\frac{a-1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{a+1}{2}$, откуда

$-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Учитывая же, что оба квадратных трехчлена должны иметь корни, получим $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 5-2\sqrt{7}$.

210. $a \leqslant -\sqrt{3}$ или $a \geqslant \sqrt{7}$. Указание. Уравнение $x^2-(a+1)ax+a^3=0$ имеет корни a и a^2. Рассмотрим первый случай: $a<0$. Имеем $a \leqslant x \leqslant a^2$. Очевидно, что при $-1<a \leqslant 0$ не существует пяти целых x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant a^2$. Если $-2<a \leqslant -1$, то наименьшим подходящим целым значением x будет -1. По условию неравенство должно выполняться при x от -1 до 3, т. е. должно быть $a^2 \geqslant 3$, $a \leqslant -\sqrt{3}$. Понятно, что все $a \leqslant -\sqrt{3}$ условию задачи удовлетворяют. Второй случай: $a \geqslant 0$. Ясно, что $0 \leqslant a \leqslant 1$ нам не подходит. Пусть $a>1$. Тогда вновь $a \leqslant x \leqslant a^2$. Если $1<a \leqslant 2$, то из условия следует, что должно быть $a^2 \geqslant 6$. Эти условия несовместимы. Если $2<a \leqslant 3$, то $a^2 \geqslant 7$. Таким образом, мы получим, что $a \geqslant \sqrt{7}$. Легко проверить, что все $a>3$ условию задачи удовлетворяют. В самом деле, пусть $3 \leqslant n \leqslant a<n+1$. Тогда $a^2 \geqslant n^2$, и неравенству удовлетворяют, во всяком случае, все целые от $n+1$ до n^2. Их число, очевидно, не меньше 5 (оно даже не меньше 6).

211. $-\sqrt{6}<a<2\sqrt{3}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Указание. Если $a^2 \leqslant a+4$, то решение неравенства $a^2 \leqslant x \leqslant a+4$. Если же $a^2>a+4$, то $a+4 \leqslant x \leqslant a^2$. Рассмотрим два случая.

1) $a^2 \leqslant a+4$. Заметим, что если $a+4-a^2<4$, то число целых чисел, удовлетворяющих неравенству $a^2 \leqslant x \leqslant a+4$, не более четырех. Это значит, что в этом случае $(a^2 \leqslant a+4)$ нам подходят $a<0$ или $a>1$. Рассмотрим теперь $0 \leqslant a \leqslant 1$. При $a=0$ и $a=1$ число целых решений будет равно 5, т. е. эти значения нам не подходят. Если $0<a<1$, то решениями будут $x=1, 2, 3, 4$, т. е. число целых решений равно 4. Таким образом, в первом случае нам подходят все a, для которых $a^2 \leqslant a+4$, кроме $a=0$ и $a=1$.

2) $a+4<a^2$. Разобьем этот случай на два. 2а) $a \geqslant 0$. Пусть $k<a+4 \leqslant k+1$, где k — натуральное; тогда должно быть $a^2<k+5$, $a<\sqrt{k+5}$. Получаем для k неравенство $k-4<\sqrt{k+5}$. Наибольшее целое k, удовлетворяющее этому неравенству, равно 7. Следовательно, $a<\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (без учета $a \geqslant 0$, $a+4<a^2$). 2б) $a<0$. При $a=-\sqrt{6}$ будет пять решений (2, 3, 4, 5, 6). Легко видеть, что при $a<-\sqrt{6}$ решений будет не меньше.

212. Наибольшее значение $\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$, наименьшее $\frac{4-2\sqrt{7}}{3}$.

213. Наибольшее значение 0, наименьшее $-8/23$. **214.** Наибольшее значение 1, наименьшее $-1/3$. **215.** $a=1$, $a=15/8$. Указание. Рассмотрим выражение $y=\frac{x^2+a}{4(x^2-x+1)}$ как уравнение относительно x: $(4y-1)x^2-4xy+4y-a=0$. Условия существования решения дают нам $12y^2-4(a+1)y+a \leqslant 0$, откуда $\frac{(a+1)-\sqrt{a^2-a+1}}{6} \leqslant y \leqslant$

$\leqslant \frac{(a+1)+\sqrt{a^2-a+1}}{6}$, т. е. наибольшее значение первой функции равно $\frac{(a+1)+\sqrt{a^2-a+1}}{6}$. Аналогично найдем, что наименьшее значение второй функции равно $\frac{2a+1-2\sqrt{a^2-a+1}}{2}$. Приравнивая найденные значения, найдем a.

216. $-\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant a \leqslant \frac{1}{\sqrt{10}}$. Указание. Заметим, что если хотя бы для одной пары $(x;\ y)$ подкоренное выражение отрицательно, то существует бесконечно много пар $(x;\ y)$, для которых оно равно нулю, а следовательно, для которых данное выражение принимает наименьшее значение. В самом деле, преобразуем подкоренное выражение к виду $(x-ay)^2+\left(\sqrt{1-a^2}y-\frac{3}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2-\frac{9}{1-a^2}+10$. Если $10-\frac{9}{1-a^2}=b<0$, то для любых m и n, таких, что $m<0$, $n<0$, $m+n=b$, можно найти x и y, такие, что $\sqrt{1-a^2}\,y-\frac{3}{\sqrt{1-a^2}}=\sqrt{-m}$, $(x-ay)=\sqrt{-n}$. Значит, $10-\frac{9}{1-a^2}\geqslant 0$, $-\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant a \leqslant \frac{1}{\sqrt{10}}$. **217.** $-\sqrt{13}$. **218.** $\frac{10}{\sqrt{11}}$, $-\frac{10}{\sqrt{11}}$. **219.** **0.**

220. $\frac{57+30\sqrt{2}}{7}$, $\frac{57-30\sqrt{2}}{7}$. Указание. Найдем, при каких b система уравнений $\begin{cases} 2x^2+3xy+4y^2=b, \\ x^2-xy+2y^2=3 \end{cases}$ имеет решение. Умножая первое уравнение на 3, а второе — на $-b$ и складывая, получим однородное уравнение $(6-b)x^2+(9+b)xy+(12-2b)y^2=0$. По крайней мере, одно из неизвестных не равно нулю. Деля на его квадрат, получим квадратное уравнение относительно соответствующего отношения неизвестных. Дискриминант этого уравнения в обоих случаях будет равен $-7b^2+114b-207$. Условие его неотрицательности даст нам $\frac{57-30\sqrt{2}}{7} \leqslant b \leqslant \frac{57+30\sqrt{2}}{7}$. Таким образом, при этих b можем найти $\frac{x}{y}$ $\left(\text{или } \frac{y}{x}\right)$. Выражая теперь x через y (или y через x) и подставляя в данное уравнение, можем убедиться, что для любого найденного $\frac{x}{y}$ $\left(\text{или } \frac{y}{x}\right)$ можно найти y (или x).

221. $\frac{7+\sqrt{65}}{2}$. **222.** $a<-\frac{5}{2}$, $a>4$. **223.** $-2 \leqslant a \leqslant 1$. Указание. Наименьшее значение функции, расположенной в левой части, достигается при одном из четырех значений x: 1, -1, 0, a. (Здесь перечислены точки «излома», а также абсциссы вершин различных парабол, возникающих при «раскрытии» модуля.) По условию в каждой из этих четырех точек значение функции должно быть неотрицательным. Это является также и достаточным условием.

Получаем систему неравенств $4-|1-a|\geqslant 0$, $2-|1+a|\geqslant 0$, $2-|a|\geqslant 0$, $a^2+3-|a-1|\geqslant 0$.

224. $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{3}$. **225.** $a>1$ или $a<-2$. **226.** $1<a<4+2\sqrt{2}$. **227.** $-\frac{8}{3}<a<-1$ или $0<a<\frac{5}{3}$. **228.** $-1<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$. **229.** $\sqrt{5}$. **230.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **231.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **232.** $q\leqslant 0$.

233. Если $a<-\sqrt[3]{36}$ или $a>\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, то хотя бы одно уравнение не имеет решения; если $a=-\sqrt[3]{36}$, то $x_1<x_1'=x_2'<x_2$; если $-\sqrt[3]{36}<a<-3$, то $x_1<x_1'<x_2'<x_2$; если $a=-3$, то $x_1<x_1'<x_2=x_2'$; если $-3<a<0$, то $x_1<x_1'<x_2<x_2'$; если $0<a<\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, то $x_1'<x_1<x_2<x_2'$; если $a=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, то $x_1'<x_1=x_2<x_2'$, где x_1, x_2 — корни первого уравнения; x_1', x_2' — корни второго. Указание. Дискриминант первого уравнения положителен при $a\leqslant\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, второго — при $a\geqslant -\sqrt[3]{36}$. Левые части данных уравнений равны при $x=\frac{a^2}{3}$ и принимают значение, равное $\frac{a(a^3+27)}{9}$. Рассмотрим три случая.

1) $-\sqrt[3]{36}<a<-3$. Обозначим левые части через $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Имеем $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)>0$. Вершина $f(x)$ имеет абсциссу $-\frac{3}{2a}<\frac{a^2}{3}$, вершина $g(x)$ имеет абсциссу $-\frac{6}{a}<\frac{a^2}{3}$; $f(0)=2a<g(0)=-a$ (рис. 80, a). Таким образом, если x_1, x_2 $(x_1<x_2)$, x_1', x_2' $(x_1'<x_2')$ соответственно корни $f(x)$ и $g(x)$, то $x_1<x_1'<x_2'<x_2$.

2) $-3<a<0$. В этом случае $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)<0$, $f(0)<g(0)$ (рис. 80, $б$). Следовательно, $x_1<x_1'<x_2<x_2'$.

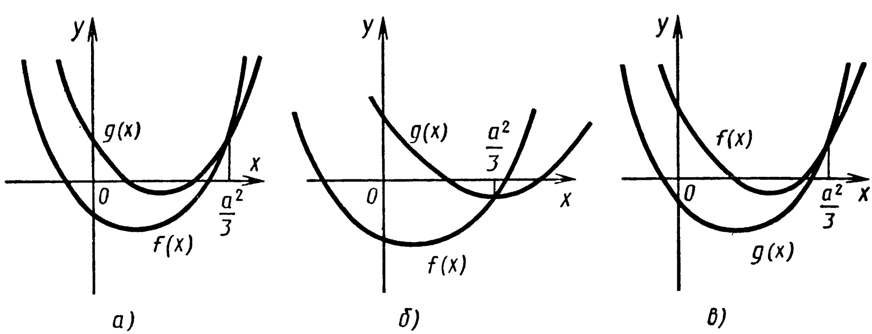


Рис. 80

3) $0<a<\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$. Имеем $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)>0$; обе вершины — слева от прямой $x=\frac{a^2}{3}$, $f(0)>g(0)$ (рис. 80, *в*). Значит, $x_1'<x_1<x_2<x_2'$. Отдельно рассматриваются случаи: $a=\sqrt[3]{36}$, $a=-3$, $a=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$.

234. Если $a<-6$, то $x_1'<x_1<x_2<x_2'$; если $a=-6$, то $x_1=x_1'<x_2<x_2'$; если $-6<a<0$, то $x_1<x_1'<x_2<x_2'$; если $a=0$, то $x_1<x_1'<x_2=x_2'$; если $0<a<\frac{3}{4}$, то $x_1<x_1'<x_2'<x_2$; если $a=\frac{3}{4}$, то $x_1<x_1'=x_2'<x_2$, где x_1, x_2 — корни первого уравнения; x_1', x_2' — второго. При $a>\frac{3}{4}$, по крайней мере, одно уравнение не имеет решений.

235. Если $a<-\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_1<x_1'<x_2'<x_2$; если $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_1<x_1'<x_2=x_2'$; если $-\frac{1}{\sqrt{3}}<a<-\frac{1}{\sqrt{15}}$, то $x_1<x_1'<x_2<x_2'$; если $a=-\frac{1}{\sqrt{15}}$, то $x_1=x_1'<x_2<x_2'$; если $-\frac{1}{\sqrt{15}}<a<0$, то $x_1'<x_1<x_2<x_2'$; если $a=0$, то $x_1'<x_1=x_2<x_2'$; если $0<a<\frac{1}{\sqrt{15}}$, то $x_1'<x_1<x_2<x_2'$; если $a=\frac{1}{\sqrt{15}}$, то $x_1'<x_1<x_2=x_2'$; если $\frac{1}{\sqrt{15}}<a<\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_1'<x_1<x_2'<x_2$; если $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_1'=x_1<x_2'<x_2$; если $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $x_1<x_1'<x_2'<x_2$.

236. $a\leqslant 0$, $a=1$. У к а з а н и е. Преобразуем каждое неравенство к стандартной форме. Корнями первого квадратного трехчлена являются $a+2$ и $5a-2$. Если $a\leqslant 0$, то второе неравенство выполняется при всех x. Рассмотрим два случая.

1) $a>1$. В этом случае $5a-2>a+2$. Поскольку корнями второго квадратного трехчлена являются $2a-\sqrt{a}$ и $2a+\sqrt{a}$, то или $5a-2\leqslant 2a-\sqrt{a}$, или $a+2\geqslant 2a+\sqrt{a}$. Оба неравенства не имеют решений на множестве $a>1$.

2) $0<a\leqslant 1$. В этом случае $5a-2\leqslant a+2$. Должно выполняться одно из двух неравенств: $a+2\leqslant 2a-\sqrt{a}$ или $5a-2\geqslant 2a+\sqrt{a}$. Первое неравенство не имеет решений при $0<a\leqslant 1$, второе имеет решение $a=1$.

237. $-1<a<3$. У к а з а н и е. Рассмотрите плоскость $(x;\ a)$.

238. $-2<a\leqslant 0$. **239.** $a<-1-\sqrt{5}$, $a=0$. **240.** $a=1/4$. У к а з а н и е. Множества $y\geqslant x^2+a$ и $x\geqslant y^2+a$ симметричны относительно прямой $y=x$. Они имеют единственную общую точку, если каждая из парабол $y=x^2+a$ и $x=y^2+a$ касается этой прямой.

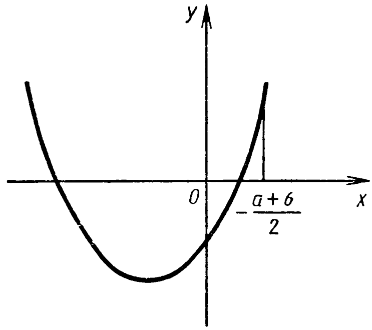


Рис. 81

241. Если $-8<a\leqslant 0$, то $-\frac{a+6}{2}<x<-2+\sqrt{1-a}$; если $0<a<1$, то $-2-\sqrt{1-a}<x<-2+\sqrt{1-a}$. При остальных a система не имеет решений. Указание. Если $a\geqslant 1$, то первое неравенство не имеет решений. При $a<1$ нам надо выяснить, как расположены корни квадратного трехчлена в первом неравенстве относительно $-\frac{a+6}{2}$. Подставим в левую часть первого неравенства $-\frac{a+6}{2}$ вместо x. Получим $\frac{1}{4}(a^2+8a)$. Если $a<-8$, то $f\left(-\frac{a+6}{2}\right)=\frac{1}{4}(a^2+8a)>0$, где $f(x)=x^2+4x+3+a$, абсцисса вершины параболы $x=-2<-\frac{a+6}{2}$ (рис. 81). Это означает, что решение первого неравенства (отрезок между корнями) не содержит решений второго. Система не имеет решений. То же имеет место при $a=-8$. Затем рассматриваются случаи: $-8<a<0$, $0<a<1$ (отдельно $a=0$).

242. Если $a>9/4$, система не имеет решений; если $2<a\leqslant 9/4$, то $\frac{1-\sqrt{9-4a}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{9-4a}}{2}$; если $a=2$, то $0\leqslant x<1$; если $0<a<2$, то $\frac{1-\sqrt{9-4a}}{2}\leqslant x<1-\sqrt{4-2a}$; если $a\leqslant 0$, решений нет.

243. $a=0$, $a=1$. Указание. Пусть x_1, x_2 — корни первого квадратного трехчлена; x_1', x_2' — второго. Должно выполняться одно из следующих утверждений:

1) $x_1\leqslant x_2=x_1'\leqslant x_2'$; 2) $x_1'\leqslant x_2'=x_1\leqslant x_2$;
3) $x_1<x_1'=x_2'<x_2$; 4) $x_1'<x_1=x_2<x_2'$.

Иными словами, в первом и втором случаях квадратные уравнения имеют общий корень, причем оставшиеся два корня должны располагаться по разные стороны от общего корня; в третьем и четвертом дискриминант одного из них равен нулю, и корень этого уравнения лежит между корнями другого уравнения.

244. $a=0{,}25$, $a=1$. Указание. Пусть x_1 и x_2 корни первого уравнения, x_1' и x_2' — второго. Возможны следующие случаи.

1) $x_1 \leqslant x_1' < x_2 \leqslant x_2'$, причем $x_2 = x_1' + 1$. Пусть $x_1' = t$, тогда t является общим корнем уравнений $(t+1)^2 - 2(t+1) - a + 1 = 0$ и $t^2 - 4t - 1 + 4a = 0$. Находя из первого $a = t^2$ и подставляя во второе, найдем $t_1 = 1$, $t_2 = -1/5$. Соответственно найдем два значения a: $a_1 = 1$, $a_2 = 1/25$. Найденные значения a надо проверить. При $a=1$ будем иметь $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1' = 1$, $x_2' = 3$. Решение системы $1 \leqslant x \leqslant 2$ образует на числовой прямой отрезок длины единица. При $a = 1/25$ будем иметь $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $x_1' = -\frac{1}{5}$, $x_2' = 4\frac{1}{5}$. Это значение нам не подходит.

2) $x_1' \leqslant x_1 < x_2' \leqslant x_2$, причем $x_2' = x_1 + 1$. Этот случай рассматривается так же, как и первый. Он невозможен. (Проверьте.)

3) $x_1 \leqslant x_1' < x_2' < x_2$, причем $x_2' = x_1' + 1$. Поскольку $x_1' + x_2' = 4$, найдем $x_2' = 2\frac{1}{2}$, $x_1' = 1\frac{1}{2}$, $4a - 1 = x_1' \cdot x_2' = \frac{15}{4}$, $a = \frac{19}{16}$. Однако при $a = \frac{19}{16}$ будет $x_2 = 1 + \sqrt{\frac{19}{16}} < 2\frac{1}{2} = x_2'$, т. е. это значение не подходит.

4) $x_1' \leqslant x_1 < x_2 \leqslant x_2'$, причем $x_2 = x_1 + 1$. Найдем $a = \frac{1}{4}$. Это значение удовлетворяет условию.

245. $a=1$, $a=7/4$. **246.** Указание. Пусть при $y=r$ одним из корней будет $x=s$. Но x и y входят в уравнение симметрично. Это означает, что при $y=s$ одним из корней будет $x=r$. Пусть при $y=t$ один корень равен r. Из сказанного выше и симметрии x и y следует, что при $y=r$ два оставшихся корня равны s и t. Таким образом, $9-r=s+t$, $r+s+t=9$. Это означает, что если y равен одному из чисел r, s, t, то корни уравнения равны двум оставшимся числам. Уравнение $x^2-(9-r)x+r^2-9r+15=0$ имеет оба корня больше чем r. Значит, при $x=r$ левая часть положительна. Получаем неравенство $r^2-9r+r^2+r^2-9r+15>0$, откуда $r<1$ или $r>6$. Но $3r<r+s+t=9$, т. е. $r<1$. Неравенство $r>-1$ получается из оценки дискриминанта.

248. $a<-1$. Указание. Умножим первое неравенство на -2 и сложим со вторым. Получим $(x+3y)^2 \leqslant -2-2\frac{1-a}{a+1}$. Чтобы это неравенство имело решение, необходимо, чтобы $-2-2\frac{1-a}{a+1} \geqslant 0$ или $\frac{1-a}{a+1} \leqslant -1$. Докажем, что это условие является достаточным. Возьмем $y=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$. Тогда левая часть первого неравенства равна -1, а второго -2.

249. $a<-2{,}5$. **250.** $-2(\sqrt{2}-1) \leqslant p \leqslant 2(\sqrt{2}-1)$. Указание. Если p такое, что разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=x^2+px$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ не превосходит 2, то такое q найти можно. (Например, взять q таким, чтобы наименьшее значение x^2+px+q равнялось бы -1.) В противном случае такое p не существует. Найдем, для каких p указанная разность наибольшего и наименьшего значений меньше 2. Если $0\leqslant p\leqslant 2$, то наибольшее значение функции $y=x^2+px$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$ достигается при $x=1$, а наименьшее — при $x=-\frac{p}{2}$. Получаем неравенство $1+p+\frac{p^2}{4}\leqslant 2$, откуда, учитывая сделанные предположения, получим $0\leqslant p\leqslant 2(\sqrt{2}-1)$. Если $p>2$, то наибольшее значение остается прежним, а наименьшее равно $1-p$ (при $x=-1$). Получаем $(1+p)-(1-p)\leqslant 2$, $p\leqslant 2$, что противоречит сделанному предположению. Так же рассматривается случай $p<0$.

251. Указание. Докажем, что единственной функцией указанного вида, для которой наибольшее значение на отрезке $[-1;\ 1]$ равно 0,5, является функция $y=|x^2-0{,}5|$. Предположим, что $|x^2+px+q|$ меньше 0,5 при всех $-1\leqslant x\leqslant 1$. Рассмотрим разность $(x^2+px+q)-(x^2-0{,}5)$. Эта разность отрицательна при $x=-1$, положительна при $x=0$ и отрицательна при $x=1$. Это означает, что функция $px+q+0{,}5$ дважды обращается в нуль. Этого не может быть (функция не равна нулю тождественно). На самом деле мы доказали, что если $y=|x^2+px+q|$ имеет на отрезке $[-1;\ 1]$ максимум, равный 0,5, то x^2+px+q равняется 0,5 при $x=-1$ и $x=1$ и равняется $-0{,}5$ при $x=0$, т. е. $x^2+px+q=x^2-0{,}5$.

252. Указание. Заметим, что если t меняется от 0 до 2, то $f(t)$ меняется от -2 до 2, а если t меняется от -2 до 0, то $f(t)$ меняется от 2 до -2. На основании этого соображения нетрудно построить схематично графики функций $y_1=f(f(x))$, $y_2=f(f(f(x)))$ (рис. 82). Из последнего видно, что уравнение $f(f(f(x)))=x$ имеет восемь корней.

§ 6. Числа и числовые последовательности

1. Признак делимости на 11: разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, должна делиться на 11. Указание. Заметим, что при k четном 10^k-1 делится на 11 (оно состоит из четного числа девяток), а при k нечетном $10^k+1=10^k-10+11=10(10^{k-1}-1)+11$ делится на 11. Рассмотрим число $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}=a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+10^{n-1}a_{n-1}+10^na_n=a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^na_n+(10+1)a_1+(10^2-1)a_2+(10^3+1)a_3+\ldots+(10^n-(-1)^n)a_n$. Значит, данное число делится или не делится на 11 в зависимости от того, делится или не делится на 11 число $a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n$.

2. Указание. Если $N=ab$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, то один из множителей a или b не превосходит $\sqrt{N}$.

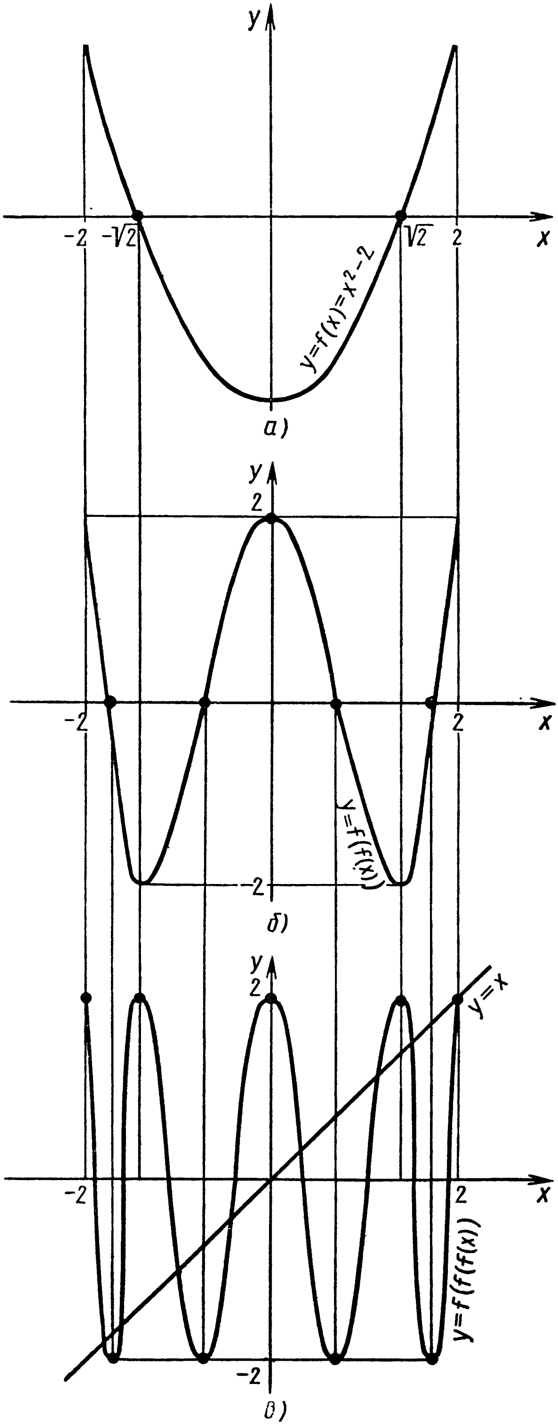


Рис. 82

3. Указание. Допустим, что число простых чисел конечно: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Рассмотрим число $M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Любой простой делитель числа M отличен от $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что противоречит сделанному предположению.

4. Указание. Таким свойством обладает, например, отрезок натурального ряда, начинающийся с числа $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 \times \times 101 + 2 = 101! + 2$. Само A делится на 2, $A + 1$ делится на 3, ..., $A + 99$ делится на 101.

5. а) $899 = 30^2 - 1 = 29 \cdot 31$; б) $1000027 = 100^3 + 3^3 = 103 \times \times (10000 - 300 + 9) = 103 \cdot 9709$. **6.** Указание. $19871987 \times \times 198919891989 = 1987 \cdot 10001 \cdot 1989 \cdot 100010001$. Этому же значению равно и второе произведение.

7. а) 36; 49896; б) 6; 360360. **8.** а) 144; б) 43; в) 9. **9.** Указание. Пусть НОД $(a;\ b) = d$, НОК $(a;\ b) = k$. Тогда $\frac{ab}{d} = \frac{a}{d} \cdot b = \frac{b}{d} \cdot a$, т. е. $\frac{ab}{d}$ кратно b и a, а значит, $\frac{ab}{d} \geqslant k$, $ab \geqslant dk$. С другой стороны, $a : \frac{ab}{k} = \frac{k}{b}$, $b : \frac{ab}{k} = \frac{k}{a}$, т. е. $\frac{ab}{k}$ — делитель a и b, а значит, $\frac{ab}{k} \leqslant d$, $ab \leqslant dk$. Следовательно, $ab = dk$. *Замечание.* Можно было доказывать требуемое равенство, рассматривая разложение a и b на простые множители.

10. Искомое число есть НОК $(24;\ 45;\ 56) + 1 = 2521$. **11.** а) Искомое число есть НОК $(5;\ 6;\ 7) - 3 = 207$. б) 136. Указание. По условию $N = 5k + 1$, $N = 6l + 4$, $N = 7m + 3$. Таким образом, $6l + 4 = 5k + 1$, $6l + 3 = 5k$, т. е. $k = 3n$. Далее, $2l + 1 = 5n$, $n = 2q + + 1$. Заменяя n через q, найдем $l = 5q + 2$, $k = 3\ (2q + 1)$, $N = 30q + + 16$. Беря $q = 0, 1, 2, 3, 4$, найдем, что наименьшее $N = 30q + 16$, дающее при делении на 7 в остатке 3, получается при $q = 4$.

12. 301. Указание. Среди чисел вида $60k + 1$ надо найти наименьшее, делящееся на 7; $k = 5$.

13. 6237. **14.** Не делится. **15.** Указание. Докажите, что данное число делится на 4, 5, 9 и 11, т. е. делится на их произведение $4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 = 1980$.

16. Указание. $(2n + 1)^2 = 4n\ (n + 1) + 1$, $n\ (n + 1)$ делится на 2, так как одно из чисел (n или $n + 1$) четное, а значит, $4n\ (n + 1)$ делится на 8.

17. Надо приписать 304 или 808. Указание. Число 19901990000 при делении на 504 ($504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$) дает в остатке 200. Следовательно, если мы прибавим к нему 304 или 808, оно будет делиться на $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$.

18. $66661 = 89 \cdot 749$.

19. Указание. Докажем, что если число $A = \overline{abc}$ делится на 37, то и число $B = \overline{bca}$ также делится на 37. Имеем $A = 100a + + 10b + c = 37k$, откуда $c = 37k - 100a - 10b$. Тогда $B = 100b + + 10c + a = 100b + 10\ (37k - 100a - 10b) + a = 370k - 999a$, т. е. B делится на 37.

20. Ящик массой в 20 кг. Указание. Число килограммов яблок, взятых организациями, делится на 3. В магазине было число килограммов яблок, дающее при делении на 3 в остатке 2. Следовательно, остался ящик, в котором число килограммов яблок при делении на 3 дает в остатке 2.

21. а) Не может. Указание. Это число делится на 3, но не делится на 9. б) Не может. Указание. Если бы данное число было полным квадратом и оканчивалось на 0, то число нулей в конце было бы четным. Отбрасывая нули, получим число, оканчивающееся на 2 и по-прежнему являющееся полным квадратом. Но квадрат числа не может оканчиваться на 2. в) Не может. Указание. Квадрат числа не может оканчиваться на 8, а также на 66 и 86. (В последних двух случаях число делится на 2, но не делится на 4.)

22. 34, 51. Указание. Наибольший общий делитель данных чисел равен 17, так как на 17 делится их наименьшее общее кратное и их сумма.

23. 45, 54. **24.** 5, 105 или 15, 35. **25.** 72, 432. Указание. Из условия следует, что частное равно 6, так как оно не может быть 12 или больше.

26. 24, 90. **27.** 247. **28.** $1\underbrace{99\ldots9}_{11}00$. **29.** 23. Указание. Разность любых двух данных чисел делится на искомое. Значит, нам подходит любой, отличный от 1 общий делитель всевозможных разностей данных чисел.

30. $19=3^3-2^3$. Указание. Если $n>2$, то $(n+k)^3-n^3>$ $>3^3-2^3=19$.

31. $p=2$. **32.** $p=3$. Указание. Докажите, что одно из чисел p, $p+10$, $p+20$ делится на 3.

33. Указание. Хотя бы одно из чисел p, $p+100$, $p+200$ делится на 3. Но при $p=3$ имеем $p+200=203=7\cdot 29$.

34. $p=5$. Указание. По крайней мере, одно из чисел p, $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+12$, $p+14$ должно делиться на 5. (Впрочем, одно из чисел: $p+2$ или $p+12$ — можно выбросить.)

35. Указание. Будем искать наибольший общий делитель чисел $2k+1$ и $9k+4$ при помощи алгоритма Евклида $9k+4=$ $=4(2k+1)+k$, $2k+1=2\cdot k+1$.

36. Указание. Если $n=2k+1$, то $n=2+(n-2)$. Если $n=4k$, то $n=(2k+1)+(2k-1)$. Если $n=4k+2$, то $n=(2k-1)+$ $+(2k+3)$.

37. Указание. Утверждение задачи следует из равенства $5(6x+11y)+(x+7y)=31(x+2y)$.

38. Указание. Если x не делится на 3, то x^2 при делении на 3 дает в остатке 1.

39. Указание. Квадрат числа, не делящегося на 7, дает при делении на 7 в остатке одно из трех чисел: 1, 2 или 4. (Проверьте.) Отсюда следует, что сумма квадратов двух чисел, не делящихся на 7, не может делиться на 7.

40. Указание. См. задачу 38.

41. Указание. Пусть $a<b$. Если $a+n$ и $b+n$ имеют общий делитель d, то $(b+n)-(a+n)=b-a$ также делится на d. Возьмем $n=b-2a+1$, тогда $a+n=(b-a)+1$, $b+n=2(b-a)+1$. Таким образом, $a+n$ и $b+n$ не имеют общих делителей с $(b-a)$.

42. Указание. Рассмотрим n значений k: $k=1, 2, \ldots n$. Среди этих k существует не более одного, при котором $a+k$ делится на n; то же верно для $b+k$ и $c+k$. Таким образом, существует не более трех k из рассматриваемых значений, при которых хотя бы одно из чисел $a+k$, $b+k$, $c+k$ делится на n. Поскольку $n>3$, то найдется k, при котором ни одно из этих чисел не делится на n.

43. 3, 4, 5, 6. **44.** Указание. Проверьте утверждение задачи для однозначных чисел.

45. $n=10k+3$ или $n=10k+7$. Указание. Из предыдущей задачи следует, что n^{10} оканчивается на ту же цифру, что и n^2. По условию n^2 должно оканчиваться на 9, значит, искомые n имеют вид $n=10k+3$ или $n=10k+7$.

46. Указание. Если n не делится на 3, то n^3 при делении на 9 дает в остатке 1 или 8. Из этого следует, что если ни одно из чисел a, b, c на 3 не делится, то $a^3+b^3+c^3$ не может делиться на 9.

47. 1 или 3. Указание. Из равенства $a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab$ следует, что наибольший общий делитель чисел (a^2-ab+b^2) и $(a+b)$ равен наибольшему общему делителю чисел $(a+b)$ и $3ab$. Докажем, что этот делитель может быть равен 1 или 3. Допустим, этот делитель равен d $(d\neq 1,\ d\neq 3)$. Тогда ввиду взаимной простоты a и b на d делится или a, или b. А из этого следует, что $(a+b)$ не может делиться на d. Нетрудно привести примеры, когда рассматриваемые числа взаимно просты $(a=2,\ b=3)$ и когда их наибольший делитель равен 3 $(a=1,\ b=2)$.

48. Указание. Докажем, что последняя цифра числа $p+2^{\frac{x-1}{2}}$ равна 2 или 5. Поскольку p — простое, $p>3$, то x может равняться одному из чисел 1, 3, 7, 9. Теперь наше утверждение следует из четырех равенств $1+2^0=2$, $3+2^1=5$, $7+2^3=15$, $9+2^4=25$, т. е. последняя цифра числа $p+2^{\frac{x-1}{2}}$ равна 2 или 5. Значит, это число составное.

49. а) 995. б) $\underbrace{33\ldots3}_{30}$. Указание. Учитывая, что $37\cdot 27=999$, преобразуем подкоренное выражение к виду $\frac{10^{90}-1}{27}-\left(\frac{10^{30}-1}{9}\right)10^{30}=\frac{10^{90}-3\cdot 10^{60}+3\cdot 10^{30}-1}{27}=\left(\frac{10^{30}-1}{3}\right)^3$. в) $\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7$. Указ а н и е. Если подкоренное выражение умножить на 9, то получим число $\underbrace{40\ldots0}_{n-1}4\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1=(\underbrace{20\ldots0}_{n-1}1)^2$. Искомый корень равен $\frac{1}{3}\times$ $\times\underbrace{20\ldots0}_{n-1}1=\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7$. г) $10^n-1=\underbrace{99\ldots9}_{n}$.

50. 29. **51.** Указание. Представим данное число в виде $mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$ и докажем, что оно делится на 2, 3 и 5. То, что оно делится на 2, достаточно очевидно. Если m и n не делятся на 3, то в случае равных остатков m и n при делении на 3 $m-n$ делится на 3. Если же остатки различны, то $m+n$ делится на 3. Остатки от деления на 5 равны 1, 2, 3 или 4 (если одно делится на 5, то и произведение делится на 5). Если остатки у m и n равны, то $m-n$ делится на 5; если остатки 1 и 4 или 2 и 3, то $m+n$ делится на 5; в оставшихся случаях (1 и 2, 1 и 3, 2 и 4) на 5 делится m^2+n^2.

52. $334^2=111556$. **53.** 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27. Указание. Поскольку $\frac{n^3-3}{n-3}=n^2+3n+9+\frac{24}{n-3}$, то $n-3$ является делителем 24.

54. Не может. Указание. Если $b^2-4ac=23$, то b — число нечетное ($b=2k+1$). Имеем $4k^2+4k-4ac=22$. Левая часть делится на 4, правая нет.

55. Указание. Данное выражение заключено между $(n^2+n)^2$ и $(n^2+n+1)^2$.

56. а) $m=2, n=1$. Указание. Если $m=2k+1$, то $2^{2k+1}=$ $=4^k\cdot 2$ дает при делении на 3 в остатке 2. Значит, $m=2k$. Тогда $(2^k-1)(2^k+1)=3^n$. Число 3^n представлено в виде произведения двух множителей, разность которых равна 2. Это возможно лишь в случае $2^k-1=1$, $2^k+1=3$. б) $n=2$, $m=3$.

57. 3 $(9=(-3)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3)$. Указание. Надо решить в целых числах уравнение $(2x-3)(2x-1)(2x+1)(2x+3)=y^2$ или $16x^4-40x^2+9=y^2$, $(4x^2-5)^2-16=y^2$, $(4x^2-5)^2-y^2=16$. Разность двух квадратов равна 16 лишь в одном случае: $25-9=16$.

58. $x=15$, $y=22$. **59.** Указание. При решении этой задачи будем пользоваться записью, введенной во вступительной части. а) $2^{41}=(2^8)^5\cdot 2\equiv 7^5\cdot 2=343\cdot 49\cdot 2\equiv 11\cdot 49\cdot 2\equiv 11\cdot 15\equiv -1\ (83)$. Следовательно, $2^{41}+1$ делится на 83 $(2^{41}+1\equiv 0\ (83))$. б) Поскольку $2^{12}=(2^4)^3\equiv 3^3\equiv 1\ (13)$, то $2^{70}=2^{12\cdot 5}\cdot 2^{10}\equiv 2^{10}=(2^4)^2\cdot 2^2\equiv 3^2\times$ $\times 2^2\equiv -3\ (13)$; $3^{70}=3^{3\cdot 23}\cdot 3\equiv 3\ (13)$. Следовательно, $2^{70}+3^{70}\equiv$ $\equiv 0\ (13)$. в) Поскольку $20801=11\cdot 31\cdot 61$, то надо доказать, что данное число делится на 11, 31 и 61. Имеем $20^{15}=(20^2\cdot 20)^5\equiv$ $\equiv(34\cdot 20)^5\equiv 9^5=(9^2)^2\cdot 9\equiv 20^2\cdot 9\equiv 34\cdot 9\equiv 1(61)$, т. е. $20^{15}-1\equiv$ $\equiv 0(61)$. Аналогично доказывается делимость на 11 и 31.

60. Указание. а) Докажем, что данное выражение делится на 3, 8, 5. Делимость на 3 следует из того, что $n(n^2-1)=(n-1)\times$ $\times n(n+1)$, а из трех последовательных натуральных чисел одно делится на 3. Для доказательства делимости на 8 рассмотрим четыре случая: $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$. Для проверки делимости на 5 достаточно рассмотреть значения $n=0, 1, 2, 3, 4$. Пункты б) — м) можно доказывать по индукции. г) Обозначим $a_n=3^{3n+3}-26n-27$. При $n=1$ $a_1=676=169\cdot 4$. (Можно было начать с $n=0$.) Далее имеем $a_{n+1}=3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27=$ $=3^{3n+3}\cdot 27-26n-53=(a_n+26n+27)\cdot 27-26n-53=27a_n+$ $+26^2n+676$. Таким образом, из того, что a_n делится на 169, следует делимость на 169 числа a_{n+1}. м) $a_n=(k+1)^{2n+1}+k^{n+2}$, $a_0=k+1+k^2$ — утверждение верно. $a_{n+1}=(k+1)^{2n+3}+k^{n+3}=$ $=(k+1)^{2n+1}(k+1)^2+k^{n+3}=(a_n-k^{n+2})\cdot(k+1)^2+k^{n+3}=a_n(k+1)^2-$ $-k^{n+2}((k+1)^2-k)=a_n(k+1)^2-k^{n+2}(k^2+k+1)$. Следовательно, если a_n делится на k^2+k+1, то и a_{n+1} тоже делится.

61. (0; 0); (2; 2). Указание. Имеем $(x-1)(y-1)=1$.

62. (1; 2; 3). Указание. Докажем, что $x\leqslant 1$. Перепишем уравнение в виде $\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=1$. Если $x\geqslant 2$, то каждая из дробей слева не больше чем $\frac{1}{4}$. Их сумма не может равняться 1. Если $x=1$, будем иметь $yz=y+z+1$, $(y-1)(z-1)=2$; $y=2$, $z=3$.

63. $(\pm 1;\ \pm 2)$; $(\pm 1;\ \mp 3)$; $(\pm 2;\ \pm 1)$; $(\pm 2;\ \mp 3)$; $(\pm 3;\ \mp 1)$; $(\pm 3;\ \mp 2)$ ($x=t$, $y=t$, t — произвольное целое). Указание. Уравнение имеет очевидное решение: $x=y=t$, где t — произвольное целое число. Пусть $x\neq y$, тогда $x^3-y^3=7(x-y)$, x^2+xy+ $+y^2=7$, $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=7$, $(2x+y)^2+3y^2=28$. Таким образом, $y^2\leqslant\frac{28}{3}$. Получаем следующие возможные значения для y: ± 1, ± 2, ± 3.

64. $(\pm 1;\ \pm 2)$; $(\pm 5;\ \pm 2)$. **65.** Уравнение не имеет решений. Указание. Если x кратно 3, то правая часть делится на 3, но не делится на 9. Если x не кратно 3, то x^2 при делении на 3 дает в остатке 1; $5x^2+6$ дает в остатке 2, а значит, $5x^2+6$ не является точным квадратом.

66. (0; 0); $(1;\ \pm 1)$. Указание. Если $x\geqslant 2$, $y=2k+1$, то левая часть делится на 2, но не делится на 4, а правая делится на 4.

67. Уравнение не имеет решений. **68.** $(0;\ -102)$; $(1;\ -50)$; $(-1;\ -52)$; $(4;\ -2)$; $(-4;\ -10)$. Указание. $(x^2+1)\times$ $\times(x-y)=102$.

69. Уравнение не имеет решений, поскольку квадрат числа (x^2) не может при делении на 5 давать в остатке 2.

70. Уравнение не имеет решений. **71.** $(\pm 2;\ \pm 6666)$; $(\pm 10;\ \pm 990)$; $(\pm 100;\ \pm 100)$. Указание. Из уравнения находим $y=$ $=\frac{9999x}{x^2-1}$. Поскольку x и x^2-1 взаимно просты, то x^2-1 является делителем 9999.

72. Указание. Если $n=65k+4$, то $4n^2+1$ делится на 5 и 13.

73. Указание. Если $n=4k+3$, то 2^n-3 делится на 5. При других n это число на 5 не делится. (Остатки от деления числа на 5 периодически повторяются с периодом 4.) 2^n-3 делится на 13, если $n=12m+4$, и только для таких n. Теперь понятно, что 2^n-3 не делится на $65=5\cdot 13$ ни при каких n.

74. 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210. Указание. $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, $1920=2^7\cdot 3\cdot 5$. Заметим, что в A нет 2. В противном случае все числа из A четные. Но из множителей 2, 3, 5 и 7 можно составить 8 четных чисел (2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210). Их произведение есть точный квадрат, так как каждый простой множитель встречается четное число раз (2 — восемь раз, остальные — по четыре). С другой стороны, в A, по крайней мере, 7 четных чисел (их произведение делится на 2^7), т. е. в A есть числа 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210. К этим числам можно добавить лишь одно число, отличное от 2 и не взаимно простое ни с одним из них; это число $3\cdot 5\cdot 7=105$.

75. Указание. При любых целых x и y и натуральном n разность x^n-y^n делится на $x-y$. Следовательно, если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то $P(x)-P(y)$ делится на $x-y$. Таким образом, $P(5)-P(2)$ делится на 3, а значит, и $P(5)$ делится на 3. Точно так же $P(5)=P(5)-P(3)+P(3)$ делится на 2.

76. Указание. Пусть p — не простое число, $p=m\cdot n$, m и n — нечетные числа $(1<m\leqslant n)$. Рассмотрим систему уравнений $x-y=m$, $x+y=n$; $x=\frac{m+n}{2}$, $y=\frac{n-m}{2}$. Тогда $y=\frac{n-m}{2}<\frac{p-1}{2}$ и $p+y^2=x^2$.

77. Указание. Если $x<m$ и x взаимно просто с m, то и $m-x$ также взаимно просто с m. Таким образом, множество чисел, меньших m и взаимно простых с m, разбивается на пары, сумма в каждой паре равна m. (Понятно, что если m четно, $m>2$, то $\frac{m}{2}$ не взаимно просто с m.)

78. Если $n=3k$, то все слагаемые равны 3; если $n=3k+1$, то два слагаемых равны 2, остальные 3; если $n=3k+2$, то одно равно 2, остальные 3. Указание. Докажем, что искомое представление состоит лишь из 2 и 3, причем 2 не больше двух. В самом деле, если бы в числе слагаемых было бы пять (или $n\geqslant 5$), то, заменив $5=2+3$ (или $n=2+(n-2)$), мы увеличим произведения ($2n-4>n$, если $n\geqslant 5$). Слагаемое 4 заменим на $2+2$, при этом произведение не меняется. Если слагаемых 2, три или более, то, заменив $2+2+2=3+3$, мы увеличим произведение.

79. Указание. Утверждение задачи следует из равенства $2(n^2+(n+m)^2)=(2n+m)^2+m^2$.

80. 1, 2, 3. Указание. Пусть искомые числа $x<y<z$. Из

условия следует, что $x+y=z$. Кроме того, $2z>2y>z$; значит, $z+x<z+y<3y$, т. е. $z+x=2y$. Из системы $x+y=z$, $x+z=2y$ найдем $y=2x$, $z=3x$.

81. 105. Указание. Пусть данное число есть pqr, где p, q, r — простые, $p\leqslant q\leqslant r$. Подсчитаем число чисел, не превосходящих pqr и не взаимно простых с ними. Имеется qr чисел, кратных p (p, $2p$, $3p$, ..., qrp), rp чисел, кратных q, и pq чисел, кратных r. При этом мы дважды подсчитали числа, кратные pq, qr и rp. Кратных pq ровно r, кратных qr чисел — p, кратных rp чисел — q. Исключая их, мы исключаем и число, кратное pqr, т. е. само число. Таким образом, чисел, не взаимно простых с pqr, будет $pq+qr+rp-p-q-r+1$, а чисел взаимно простых $pqr-pq-qr-rp+p+q+r-1=(p-1)(q-1)(r-1)$. Сумма всех делителей равна $pqr+pq+qr+rp+p+q+r+1=(p+1)\times(q+1)(r+1)$. Получаем систему $(p-1)(q-1)(r-1)=48$, $(p+1)(q+1)(r+1)=192$. Поскольку p — наименьший множитель, то $p-1\leqslant\sqrt[3]{48}<4$. Но $p-1\neq 3$ (иначе p — не простое); $p=3$. Теперь не трудно найти $q=5$, $r=7$.

82. Указание. y — число нечетное, x — четное. Значит, y не делится на x, $x+1$ делится на 3, y не делится. Значит, y не делится ни на x, ни на $x+1$. Далее, $y+1=216k^2+174k+36$; $\frac{y+1}{x}=3\frac{36k^2+29k+6}{18k+7}=3\left(2k+\frac{15k+6}{18k+7}\right)$ не является целым. Это следует из того, что $\frac{15k+6}{18k+7}$ — правильная дробь, а значит, $3\frac{15k+6}{18k+7}$ не может быть целым. ($18k+7$ не делится на 3.) $\frac{y+1}{x+1}=2\frac{36k^2+29k+6}{12k+5}=2\left(3k+1+\frac{2k+1}{12k+5}\right)$; $\frac{2(2k+1)}{12k+5}$ не является целым (эта дробь правильная). С другой стороны, $\frac{y(y+1)}{x(x+1)}=\frac{(12k+5)(18k+7)(216k^2+174k+36)}{(36k+14)(36k+15)}=36k^2+29k+6$.

83. $k=1$. Указание. Очевидно, k — нечетное число, $k=2n+1$. Тогда $4^k+k^4=4^{2n+1}+(2n+1)^4=(2\cdot4^n+(2n+1)^2)^2-4\cdot4^n\cdot(2n+1)^2=((2n+1)^2+2\cdot4^n-2\cdot2^n(2n+1))\cdot((2n+1)^2+2\times4^n+2\cdot2^n(2n+1))$. Но 4^k+k^4 — число простое. Следовательно, меньший множитель нашего произведения равен 1: $(2n+1)^2+2\cdot4^n-2\cdot2^n\cdot(2n+1)=1$, или $2^{2n}+(2^n-(2n+1))^2=1$, откуда $2^{2n}=1$, $2^n-(2^n+1)=0$; $n=0$.

84. Условию задачи удовлетворяют числа $m=2^k-2$, $n=2^k(2^k-2)$ ($m+1=2^k-1$, $n+1=(2^k-1)^2$).

85. Указание. Рассмотрим число $(3+2\sqrt{2})^n$. Его можно представить в виде $(3+2\sqrt{2})^n=x_n+\sqrt{2}y_n$, тогда $(3-2\sqrt{2})^n=x_n-\sqrt{2}y_n$. Перемножая эти равенства, получим $x_n^2-2y_n^2=1$.

86. а) 3/11; б) 13/27; в) 1/7. **87.** Указание. Задача сводится к нахождению наибольшего общего делителя числителя и знаменателя. Можно воспользоваться алгоритмом Евклида. а) Числитель и знаменатель можно сократить на 137, получим $\frac{139}{149}$. б) Дробь несократима. в) Дробь равна 3/11. (Можно было, не находя наибольшего общего делителя, выделить в числителе множитель 3, в знаменателе — множитель 11.)

88. Указание. Пусть $b-a>0$. Возьмем n — натуральное, такое, что $\frac{1}{n}<b-a$. «Шагая» с шагом $\frac{1}{n}$, мы непременно попадем между a и b $\left(a<\frac{k}{n}<b\right)$. Во втором случае будем идти с шагом $\frac{\sqrt{2}}{n}$, $\frac{\sqrt{2}}{n}<b-a$.

89. г) Указание. Пусть $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}=r$, где r — рациональное число. Тогда $(\sqrt[3]{5})^3=(r-\sqrt{3})^3$, $5=r^3-9r+\sqrt{3}\cdot(3r^2-3)$, откуда $\sqrt{3}=\frac{9r+5-r^3}{3(r^2-1)}$ — число рациональное. Противоречие.

90. Указание. а) $2^3<3^2$. б) $\sqrt{1002}-\sqrt{1001}=$
$=\frac{1}{\sqrt{1002}+\sqrt{1001}}>\frac{1}{\sqrt{1003}+\sqrt{1004}}=\sqrt{1004}-\sqrt{1003}$. в) $\sqrt{51}>3+\sqrt{17}$,

г) Докажем, что $\sqrt[3]{51}<2+\sqrt[3]{5}$. Возводя в куб и упрощая, получим $19<6\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{25}$. Умножим это неравенство на $\sqrt[3]{5}$, получим $19\sqrt[3]{5}<6\sqrt[3]{25}+15$. Оба эти неравенства или одновременно верны, или неверны. Исключим из них $\sqrt[3]{5}$. Для этого умножим первое на 19, а второе — на 6 и сложим. Получим $271<93\sqrt[3]{25}$. Это неравенство легко проверяется. д) Докажите общее неравенство $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}>2\sqrt[3]{a}$ $(a>0,\ 0<x<a)$.

91. Существуют. Указание. Положим $a+\sqrt{15}=m$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=n$, где m и n — целые числа. Тогда $1=a\cdot\frac{1}{a}=(m-\sqrt{15})\times(n+\sqrt{15})=mn-15+(m-n)\sqrt{15}$. Если $m\neq n$, то равенство невозможно, поскольку в этом случае $\sqrt{15}$ оказывается рациональным числом. Следовательно, $m=n$, $m^2=16$, $m=\pm4$. Таким образом, данные числа являются целыми лишь при $a=\pm4-\sqrt{15}$.

92. Указание. Если $\frac{k}{n}$ — несократимая дробь, то и $\frac{n-k}{n}$ — также несократимая дробь; при этом k не может равняться $\frac{n}{2}$ (n — четное).

93. Указание. Докажем, что после приведения дробей к наименьшему знаменателю и сложения числитель получившейся дроби будет нечетным, а знаменатель четным. В самом деле, пусть k такое, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда дополнительный множитель, приводящий дробь $\frac{1}{2^k}$ к общему для всех дробей знаменателю, будет нечетным, а у всех других дробей — четным.

94. Указание. Если сократима дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, то сократима и дробь $\frac{5n+2m}{3n-m} = \frac{11n}{3n-m} - 2$. Значит, сократима также дробь $\frac{11n}{3n-m}$. Последняя дробь не может быть сокращена на множитель, на который делится n, она может быть сокращена лишь на 11. Нужный пример легко построить: $\frac{1}{4}(m=1,\quad n=4)$, тогда $\frac{3n-m}{5n+2m} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$.

95. Указание. Докажите, что данное выражение заключено между $n+1$ и $n+2$. Его целая часть равна $n+1$.

96. $0,\underbrace{99\ldots9}_{10}\,\underbrace{00\ldots01}_{9}$. Указание. Докажите, что при $x>0$

$1 - x + x^2 - x^3 < \frac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$.

97. в) $0,\underbrace{99\ldots9}_{100}\,4\underbrace{99\ldots9}_{99}$. Указание. Докажите неравенство, а затем им воспользуйтесь: $1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} < \sqrt{1-x} < 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $0 < x < \frac{1}{2}$.

98. Указание. Если к данному числу прибавить $(6-\sqrt{35})^{1987}$, получим число целое. Но $(6-\sqrt{35})^{1987} = \frac{1}{(6+\sqrt{35})^{1987}} < 10^{-1000}$. Следовательно, все 1000 знаков 9.

99. Данная дробь всегда равна дроби $\frac{9091}{9901}$. Ее числитель и знаменатель сокращаются на $\underbrace{11\ldots1}_{2k+5}$. Можно, например, представить числитель в виде $\underbrace{11\ldots1}_{2k+5}0000 + \underbrace{11\ldots1}_{2k+5}00 + \underbrace{11\ldots1}_{2k+5} - \underbrace{11\ldots1}_{2k+5}000 - \underbrace{11\ldots1}_{2k+5}0 = \underbrace{11\ldots1}_{2k+5}\cdot 9091$. Аналогично можно поступить со знаменателем.

100. Указание. Допустим, для каких-то p и q выполняется противоположное неравенство $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{4q^2}$. Из этого, в частности, следует $\frac{p}{q}<\sqrt{2}+\frac{1}{4}<2$. Умножим неравенство $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{4q^2}$ на $\sqrt{2}+\frac{p}{q}$. Получим $\left|2-\frac{p^2}{q^2}\right|<\frac{1}{4q^2}\left(\sqrt{2}+\frac{p}{q}\right)$, или $|2q^2-p^2|<\frac{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}{4}$. Но $|2q^2-p^2|\geqslant 1$, а $\frac{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}{4}<1$. Противоречие.

101. 14043. **102.** Сумма геометрической прогрессии больше суммы арифметической прогрессии. **103.** 2, 5, 8. **104.** (6, 18, 54) или (26, 26, 26). **105.** $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ или $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. **106.** $a_1=\frac{1}{2}$, $q=2$ или $a_1=\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$, $q=-\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$. **107.** Существует. Например, $a_1=2^9$, $q=\frac{3}{2}$. **108.** $11\frac{253}{256}$. **109.** $\frac{A-B}{m-n}(m+n)$. **110.** а). Нельзя. б) Можно $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots\right)$. **111.** $k>0$, $k<-2$. **112.** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}$, где d — разность прогрессии. Аналогично преобразуются два других выражения. **113.** 0. **114.** $a_m=\sqrt{AB}$, $a_n=A^{1-\frac{m}{2n}}B^{\frac{m}{2n}}$.

115. $\left(\frac{S}{Q}\right)^{\frac{n}{2}}$. У к а з а н и е. $S=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ (q — знаменатель прогрессии); $Q=\frac{\frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{q^n}-1\right)}{\frac{1}{q}-1}=\frac{q^n-1}{a_1q^{n-1}(q-1)}$, $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=a_1^n\times$ $\times q^{1+2+\ldots+(n-1)}=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{S}{Q}\right)^{\frac{n}{2}}$.

116. $k=8$. **117.** $x=-1$, $y=2$. **118.** У к а з а н и е. Из условия $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$ следует равенство $a_2=b_2$ ($a_1+a_3=2a_2$, $b_1+b_3=2b_2$). Пусть d — разность первой прогрессии, а m — разность второй; тогда по условию $2a_2b_2=(a_2-d)(b_2-m)+(a_2+d)\times$ $\times(b_2+m)$, откуда $dm=0$. Но $m\neq 0$, значит, $d=0$, $a_1=a_2=b_2$.

119. У к а з а н и е. По условию $a_2^2=a_1a_3$, $b_2^2=b_1b_3$, $(a_2+b_2)^2=$ $=(a_1+b_1)(a_3+b_3)$. Из последнего равенства с учетом двух предыдущих получим $2a_2b_2=a_1b_3+a_3b_1$. Возводя это равенство в квадрат, заменяя $a_2^2=a_1a_3$, $b_2^2=b_1b_3$, перенося все в одну часть, найдем $(a_1b_3-a_3b_1)^2=0$.

120. Например, прогрессия с общим членом $a_n=70n+23$. Ясно, что $a_n\neq p\pm q$, где p и q — простые числа больше 2, так как a_n — число нечетное. Легко проверяется невозможность такого представления, если одно из слагаемых равно 2.

121. $a=8$, $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-4$. **122.** $a=-\frac{2}{27}$, $x_1=$ $=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

123. Указание. Если a, b, c образуют арифметическую прогрессию, $a<b<c$ — простые числа, то они все нечетные, т. е. разность кратна 2. Рассматривая остатки a, b, c и d — разности прогрессии от деления на 3, докажем, что d кратно 3.

124. 164700. Указание. Искомая сумма равна $(101+103+$ $+105+\ldots+999)-(105+111+117+\ldots+999)=\frac{101+999}{2}\cdot 450-$ $-\frac{105+999}{2}\cdot 150=164700$.

125. 174950. Указание. Совпадающие члены данных прогрессий образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 17, и разностью 35. Сумма 100 членов равна 174950.

126. $\frac{121}{23}$. **127.** $n\geqslant 5$. Указание. Заметим, что если $n\geqslant 2$, то $a_n\geqslant\sqrt[3]{2}$. Это следует из того, что функция $y=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{2}$ при $x>0$. Для доказательства этого неравенства можно перенести $\sqrt[3]{2}$ в левую часть, привести неравенство к следующему виду $\frac{(x-\sqrt[3]{2})^2\,(2x+\sqrt[3]{2})}{3x^2}\geqslant 0$. Из того, что $a_n\geqslant\sqrt[3]{2}$, следует, что значение $\frac{2a_n+\sqrt[3]{2}}{3a_n^2}\leqslant 1$. (Докажите.) Пусть теперь $a_n-\sqrt[3]{2}=\varepsilon_n$, $a_2=\frac{4}{3}$. Можно проверить, что $\varepsilon_2<0{,}1$. Далее имеем $\varepsilon_{n+1}=a_{n+1}-\sqrt[3]{2}=$ $=\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)-\sqrt[3]{2}=\frac{(a_n-\sqrt[3]{2})^2\,(2a_n+\sqrt[3]{2})}{3a_n^2}\leqslant\varepsilon_n^2$. Следовательно, a_n при $n\geqslant 5$ отличается от $\sqrt[3]{2}$ не более чем на 10^{-8}.

128. Указание. Доказательство можно провести методом математической индукции. Неравенство $2^n>9n$ выполняется при $n\geqslant 6$.

129, 130. Указание. Неравенство можно доказать при помощи полной математической индукции.

131. Указание. Левая часть следует из того, что $a_n=$ $=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}$ возрастает $\left(a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}=a_n+\frac{9n+5}{3\,(3n+1)\,(3n+2)\,(n+1)}\right)$. Правое неравенство заменим на более сильное, а именно: $a_n\leqslant\frac{4}{3}-\frac{1}{n+1}$. При $n=1$ неравенство справедливо. Надо доказать, что если $a_n\leqslant\frac{4}{3}-\frac{1}{n+1}$, то $a_{n+1} \leqslant \frac{4}{3} - \frac{1}{n+2}$. Выражая a_{n+1} через a_n и используя предположение индукции, приходим к необходимости доказать неравенство $\frac{9n+5}{3(3n+1)(3n+2)(n+1)} < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Последнее неравенство доказывается при помощи очевидных преобразований.

132. Указание. Если $a_n = (n+1)(n+2)\ldots 2n$, то $a_{n+1} = a_n \cdot 2 \cdot (2n+1)$, т. е. с увеличением номера на 1 количество двоек в разложении также возрастает на 1, а поскольку $a_1 = 2$, то наше утверждение доказано при помощи метода полной математической индукции.

133. Указание. $S = \frac{7}{9}(9 + 99 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n}) = \frac{7}{9}((10-1) + (10^2-1) + \ldots + (10^n - 1)) = \frac{7}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^n - n) = \frac{7}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right) = \frac{70(10^n-1) - 63n}{81}$.

134. Указание. *Первый способ:* Имеем $Sx - S = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1 = nx^n - \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x-1}$, откуда $S = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$. *Второй способ:* $S = (x + x^2 + \ldots + x^n)' = \left(\frac{x(x^n-1)}{x-1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

135. $\frac{(x^{n+1} - (n+1)x + n)x}{(x-1)^2}$. **136.** $\left(x^2 + \frac{1}{x^{2n}}\right)\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} + 2n$.

137.
$$S + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \ldots + \frac{2^n}{x^{2^n}+1} =$$
$$= \frac{2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \ldots + \frac{2^n}{x^{2^n}+1} = \ldots = \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1};$$
$$S = \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1} - \frac{1}{x-1}.$$

138. $S = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_1a_2a_3}\right) + \left(\frac{1}{a_1a_2a_3} - \frac{1}{a_1a_2a_3a_4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1a_2\ldots a_3}\right) = 1 - \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$.

139—145. Указание. Все равенства удобно доказывать методом полной математической индукции. При этом, обозначив через S_n левую часть, будем иметь в № 139—142: S_{n+1} отличается от S_n прибавлением одного слагаемого. В № 143 $S_{n+1} = 1 + \frac{2n+2}{2n+1}S_n$, в № 144 $S_{n+1} = (1+x)S_n$, в № 145 $S_{n+1} = \frac{n+1}{x+n+1}(1+S_n)$.

146. Указание. Пусть искомая сумма равна S_n, обозначим через Q_n сумму квадратов натурального ряда: $Q_n = 1^2 + 2^2 + \ldots$ $\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (см. задачу 12 вводной части). Тогда $Q_n + 2S_n = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, откуда $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \right.$ $\left. - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}$.

147. Указание. Имеем $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, откуда $a_{n+1} - a_n =$ $= -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})$. Если $a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$, то $b_n = -\frac{1}{2} b_{n-1}$, т. е. является геометрической прогрессией:

$$b_1 = b - a, \quad q = -\frac{1}{2}; \quad a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + a_1 =$$
$$= a + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} =$$
$$= a + (b-a)\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) =$$

$= \frac{2}{3} b + \frac{1}{3} a - \frac{2}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Теперь найдем $S_n = a + b +$

$$+ (n-2)\left(\frac{2}{3} b + \frac{1}{3} a\right) + \frac{2}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) =$$
$$= \frac{n+1}{3} a + \frac{2n-1}{3} b + \frac{-1}{9}(b-a)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1\right).$$

149. а) $\frac{4}{13} - \frac{7}{13} i$; б) $-0{,}7 - 2{,}1i$; в) $\frac{400}{181}$; г) 0; д) $-i$; е) -64; ж) -1. **150.** $\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $2(\cos 150° + i\sin 150°)$, $2\sqrt{3}(\cos 300° + i\sin 300°)$, $2\sqrt{2}(\cos 195° + i\sin 195°)$.

151. а) Окружность с центром $z_0 = 1 + 2i$ и радиусом 2. б) Неравенство приводится к виду $|z| < 2$. Точки z заполняют внутренность круга с центром в O и радиусом 2. в) Кольцо с центром в точке $-\frac{i}{2}$, внутренним радиусом 1 (внутренняя окружность входит в наше множество) и внешним радиусом $\frac{3}{2}$ (внешняя окружность не принадлежит множеству). г) Прямая, проходящая через середину отрезка с концами в точках 1 и $-2i$ и перпендикулярная этому отрезку. д) Центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках 1, -1, $i\sqrt{3}$.

152. а) $\sqrt{11}$; б) 1; в) 1. **153.** Окружность с центром $1-2i$ и радиусом 9. **154.** 0; $-1+i$. **155.** Таких z нет. Указание. Поскольку $9=|z-5-i|+|z-9i|\geqslant|(z-5-i)-(z-9i)|=|-5+$ $+8i|=\sqrt{89}$.

157. Указание. Пусть $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тогда $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+i}{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}-i}$.

158. Указание. Если $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, то равенство $|z_1z_2|^2=|z_1|^2\,|z_2|^2$ означает равенство $(a_1a_2-b_1b_2)^2+$ $+(a_1b_2+b_1a_2)^2=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$, откуда следует утверждение задачи.

159. $3+i$, $2-i$. Указание. Решая квадратное уравнение по обычным формулам, мы приходим к необходимости извлечения квадратного корня из числа $-3+4i$. Удобно это делать в тригонометрической форме. Однако мы поступим иначе. Нам надо найти действительные x и y, такие, что $-3+4i=(x+iy)^2=$ $=x^2-y^2+2xyi$. Получаем систему уравнений $x^2-y^2=-3$, $xy=2$. Умножая первое уравнение на 2, а второе на 3 и складывая, получим $2x^2+3xy-2y^2=0$. Из этого уравнения найдем $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-3\pm5}{4}$. Нам достаточно найти одно решение: $x=\dfrac{1}{2}y$; $x=1$, $y=2$.

160. $2+3i$, $2-2i$. **161.** $1, -1, i, -i$. **162.** $i, \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

163. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$, 0, $-1+i$. Указание. Можно воспользоваться результатом № 161 $\left(\left(\dfrac{z+1}{z-i}\right)^4=1\right)$.

164. $\dfrac{3}{4}+i$. Указание. Пусть $z=x+iy$ (x и y — действительные числа). Имеем $\sqrt{x^2+y^2}+x+iy=2+i$, откуда $\sqrt{x^2+y^2}+x=2$, $y=1$.

165. Если $0\leqslant a<-1+\sqrt{2}$, то $z=a+(-1\pm\sqrt{1-a^2-2a})i$; если $a=-1+\sqrt{2}$, то $z=-1+\sqrt{2}-i$; при $a>-1+\sqrt{2}$ решений нет. Указание. Пусть $z=x+iy$ (x и y — действительные числа). Имеем $x^2+y^2-2ix+2y+2a+2ai=0$, откуда $x^2+y^2+2y+2a=0$, $-x+a=0$ и т. д.

166. $a>\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. Указание. Условие задачи означает, что окружность с центром в $i\sqrt{2}$ и радиусом $(a+1)^2$ должна целиком располагаться вне круга с центром в $\sqrt{2}$ и радиусом a^2-4a, если $a^2-4a\geqslant0$. Если же $a^2-4a<0$, то неравенству удовлетворяют все z. Таким образом, интервал $0<a<4$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $a\leqslant0$ или $a\geqslant4$. Расстояние между центрами рассматриваемых окружностей равно 2. Нам подходят те a, при которых или сумма радиусов меньше 2, или разность между первым радиусом и вторым больше 2. Получаем объединение двух неравенств $(a+1)^2+(a^2-4a)<2$, $(a+1)^2-(a^2-4a)>2$.

167. $-\frac{21}{10}<a<-\frac{5}{6}$.

§ 7. Планиметрия

2. Указание. Докажем это утверждение методом «от противного». Предположим, что окружность, описанная около треугольника BAD, не содержит точку C. Обозначим через C_1 точку пересечения этой окружности с прямой BC (рис. 83). Тогда $\angle ADC_1=\angle ADC$, так как каждый из них дополняет до 180° угол ABC, что невозможно.

4. Указание. Продолжим медиану на такое же расстояние. Вершины треугольника и полученная точка являются вершинами прямоугольника. Теперь утверждение задачи будет следовать из равенства диагоналей прямоугольника.

5. Не следует. Указание. Если в треугольнике ABC сторона AB меньше стороны AC и угол ABC не равен 90°, то окружность с центром в A и радиуса AB вторично пересекает луч CB в точке B_1. При этом треугольники ACB и ACB_1 не равны, хотя две стороны и угол одного из них равны соответственно двум сторонам и углу другого (рис. 84). Заметим, что в этих треугольниках углы при вершинах B и B_1 в сумме составляют 180°.

6. Указание. Первое равенство следует из подобия треугольников ACD и BCD (сходственными являются вершины A и C, C и B), второе — из подобия треугольников ABC и CBD.

8. Указание. Пусть угол A меньше 90° (рис. 85). Имеем $\angle NBA=90°-\angle A$, $\angle OBC=\frac{1}{2}(180°-\angle BOC)=90°-\angle A$. Таким образом, $\angle OBC=\angle NBA$. Аналогично рассматривается случай $\angle A>90°$.

9. Указание. Рассмотрим случай остроугольного треугольника ABC (рис. 86). Точки A, B, A_1 и B_1 расположены на одной окружности диаметра AB. Следовательно, $\angle CA_1B_1=\angle A$. С другой стороны, $\angle OCB=\frac{1}{2}(180°-\angle COB)=90°-\angle A$. Таким

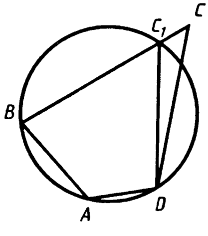


Рис. 83

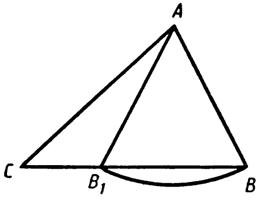


Рис. 84

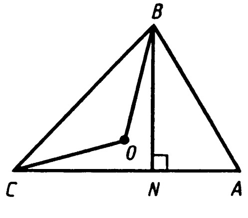


Рис. 85

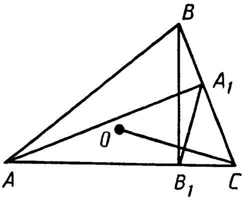


Рис. 86

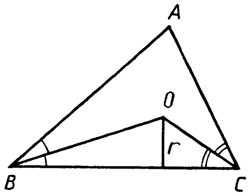


Рис. 87

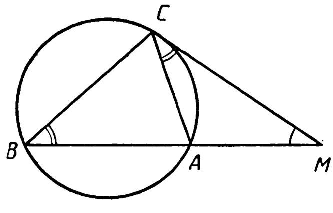


Рис. 88

образом, $\angle CA_1B_1 + \angle OCB = 90°$. А это означает перпендикулярность прямых A_1B_1 и CO.

10. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 87). По теореме синусов для треугольника BOC

$$\left(\angle BOC = 180° - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 90° + \frac{A}{2}\right)\ OC = \frac{a \sin \frac{B}{2}}{\sin\left(90° + \frac{A}{2}\right)} = \frac{a \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Следовательно, $r = OC \sin \frac{C}{2} = \dfrac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$.

17. Указание. Пусть MC — касательная к окружности (рис. 88). Треугольники MAC и MCB подобны (угол M общий, $\angle MCA = \angle MBC$, так как оба измеряются половиной дуги AC, см. задачу 16). Следовательно, $\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}$, или $MA \cdot MB = MC^2 = a^2 - R^2$.

18. Указание. Проведем через M диаметр CD (рис. 89). Треугольники MAC и MBD подобны ($\angle CMA = \angle DMB$, $\angle CAM = \angle MDB$, так как оба измеряются половиной дуги CB), следовательно, $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$, или $AM \cdot MB = CM \cdot MD = R^2 - a^2$.

19. Указание. В случае, когда AM — биссектриса внутреннего угла, наше утверждение было доказано в теоретическом разделе (см. задачу 14). Точно так же можно доказать наше утверждение и для биссектрисы внешнего угла. Дадим еще одно доказательство для биссектрисы внешнего угла. Аналогичное доказательство возможно и для биссектрисы угла внутреннего. Пусть для определенности $AB < AC$. В случае равенства $AB = AC$ утверждение теряет смысл, так как биссектриса внешнего угла A будет параллельна стороне

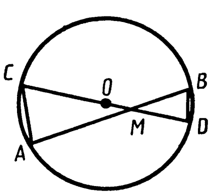


Рис. 89

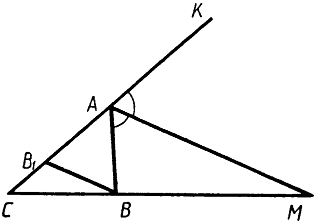


Рис. 90

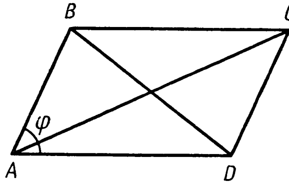


Рис. 91

BC. Возьмем на стороне AC точку B_1 так, что $AB_1 = AB$ (рис. 90). Докажем, что прямая BB_1 параллельна биссектрисе AM. В самом деле, $\angle MAK = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, $\angle BB_1A = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, т. е. $\angle MAK = \angle BB_1A$. Из параллельности MA и BB_1 следует, что $\frac{MB}{MC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AB}{AC}$.

20. Указание. Пусть угол BAD параллелограмма $ABCD$ равен φ, тогда $\angle ABC = 180° - \varphi$ (рис. 91). По теореме косинусов для треугольников DAB и ABC будем иметь $DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos\varphi$, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cos\varphi$. Сложив эти равенства и учитывая, что $AD = BC$, получим $DB^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

21. Указание. Пусть в треугольнике ABC точка M — середина BC, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AM = m_a$. Продолжим AM на такое же расстояние. Получим точку D, такую, что $ABCD$ — параллелограмм (рис. 92). Из предыдущей задачи следует, что $AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$, или $4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$, откуда вытекает равенство $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

22. Указание. Пусть ABC и AB_1C_1 — два треугольника, расположенные указанным в условии образом (рис. 93). Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin BAC$, $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot AC_1 \sin B_1AC_1$. Но $\sin BAC = \sin B_1AC_1$, поскольку эти углы или равны, или дополняют друг друга до 180°. Деля указанные выражения для площадей треугольников ABC и AB_1C_1 друг на друга, получим равенство $\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$.

23. Указание. Соединим центр вписанного круга со всеми вершинами многоугольника. Многоугольник разобьется на треугольники, в каждом из которых одна сторона есть сторона многоугольника, а высота, на нее опущенная, равна радиусу вписанной окружности. Сложив площади всех треугольников, придем к требуемому равенству $S = pr$.

24. Указание. Пусть M — точка пересечения диагоналей

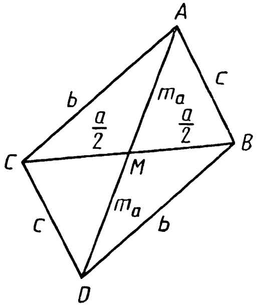


Рис. 92

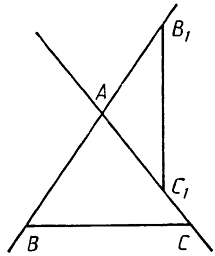


Рис. 93

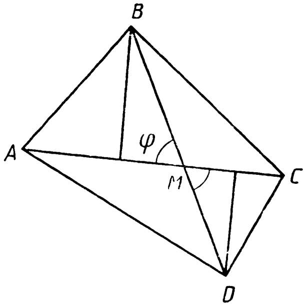


Рис. 94

четырехугольника $ABCD$ (рис. 94). Обозначим угол AMB через φ. Тогда высота треугольника ABC, проведенная к стороне AC, равна $BM \cdot \sin\varphi$ и, следовательно, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BM\sin\varphi$. Аналогично $S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot MD\sin\varphi$. Сложив площади треугольников ABC и ACD, получим $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}AC(BM+MD)\times\sin\varphi=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi$, что и требовалось. Заметим, что утверждение задачи верно и для невыпуклого четырехугольника.

25. Указание. По теореме синусов (см. также задачу 13) $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $a=2R\sin A$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}ab\sin C=$ $=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

26. Указание. Пусть O — центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C; K, L, M — точки касания вписанной окружности с катетами и гипотенузой (рис. 95); $CKOL$ — квадрат со стороной, равной r. Из равенства касательных, проведенных из одной точки к окружности, следует $c=AB=AM+MB=AL+BK=(b-r)+(a-r)=a+b-2r$, откуда $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

27. Указание. Биссектриса разбивает треугольник на два. $S_1=\frac{1}{2}al\sin\frac{\alpha}{2}$, $S_2=\frac{1}{2}bl\times\sin\frac{\alpha}{2}$, площадь всего треугольника $S=\frac{1}{2}ab\times\sin\alpha$. Но $S_1+S_2=S$, или $al\sin\frac{\alpha}{2}+bl\sin\frac{\alpha}{2}=$ $=ab\sin\alpha$, откуда $l=\frac{ab\sin\alpha}{(a+b)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

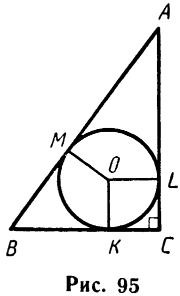


Рис. 95

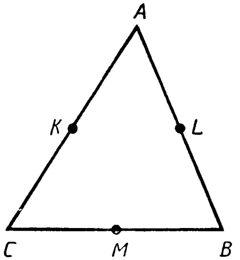


Рис. 96

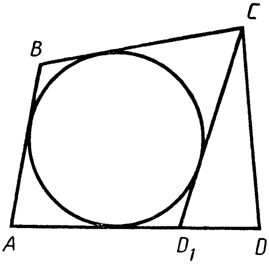


Рис. 97

28. Указание. Пусть K, L и M — точки касания вписанной окружности (рис. 96); $AK=AL=x$. Тогда $a=BC=BM+MC=$ $=BL+CK=(c-x)+(b-x)=b+c-2x$, откуда получаем $x=$ $=\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$ (сравните с задачей 26).

29. Указание. Известно, что если $ABCD$ описанный четырехугольник, то $AB+CD=AD+BC$. Пусть выполняется это равенство, но четырехугольник не является описанным. Рассмотрим окружность, касающуюся сторон AB, BC и AD данного четырехугольника (ее центр — в точке пересечения биссектрис углов A и B; рис. 97). По предположению эта окружность не касается стороны CD. Пусть, для определенности, окружность целиком расположена внутри четырехугольника $ABCD$. Проведем через вершину C касательную к окружности, отличную от CB, и обозначим через D_1 ее точку пересечения со стороной AD. Поскольку $AB+CD=AD+BC$ и $AB+CD_1=AD_1+BC$ (первое — по условию, второе — поскольку $ABCD_1$ — описанный четырехугольник), то, вычитая эти равенства, получим $CD-CD_1=DD_1$, что невозможно. Значит, D и D_1 совпадают.

30. Указание. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника. Эти прямые образуют треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 98). Стороны исходного треугольника являются средними линиями треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, высоты треугольника ABC являются срединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. эти высоты пересекаются в центре окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (пункт а) доказан). б) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Все линейные элементы треугольника $A_1B_1C_1$ в два раза больше соответствующих элементов треугольника ABC. Если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — точка пересечения его высот, то по доказанному в пункте а) H — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, а отрезки HA, HB и HC — расстояния до соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Значит, эти расстояния в два раза больше расстояний от точки O до соответствующих сторон треугольника ABC.

Замечание к пункту а). Эта известная теорема элементарной геометрии имеет довольно много различных доказательств. Наиболее коротким, вероятно, является следующее векторное доказательство. Пусть H — точка пересечения двух высот, проведенных из вершин A и B. Нам надо доказать, что точка H принадлежит третьей высоте, т. е. что $CH \perp AB$. Имеем $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{BH}\times\overrightarrow{CA}=0$, поскольку $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{AH}$, то $\overrightarrow{AH}(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH})=0$, $\overrightarrow{BH}(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{AH})=0$. Складывая эти равенства, получим $\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{AH})=0$, т. е. $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

Можно воспользоваться также методом вспомогательной окружности. Если AA_1 и BB_1 — высоты, то точки A, B, A_1, B_1, лежат на одной окружности (диаметр AB), а также точки A_1, C, B_1, H лежат на одной окружности (диаметр CH). Имеем $\angle A_1AB=\angle A_1B_1H=\angle A_1CH$. Теперь из перпендикулярности A_1A и BC следует перпендикулярность CH и AB.

31. Указание. Пусть M — точка на основании BC равнобедренного треугольника ABC (рис. 99); боковая сторона треугольника равна a; высота, проведенная к боковой стороне, равна h; расстояния от M до AB и AC равны x и y. Выражая в равенстве $S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}$ все площади по соответствующим формулам, получим $\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay$, $x+y=h$.

32. Указание. Задача аналогична № 31.

33. $90°+\frac{\alpha}{2}$. Указание. $\angle AOC=180°-(\angle OAC+\angle OCA)=$

$$=180°-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)=180°-\frac{1}{2}(180°-\alpha).$$

34. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}R$. Указание. Пусть $AB=a$ — сторона правильного десятиугольника, O — центр окружности (рис. 100). В тре-

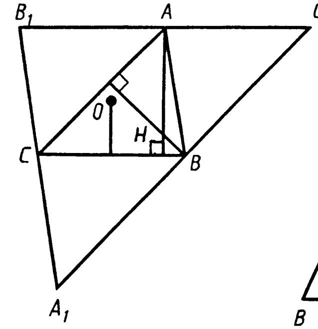


Рис. 98

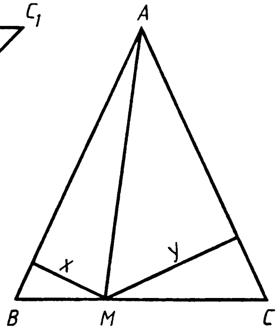


Рис. 99

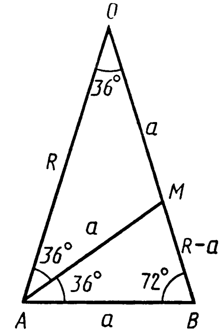


Рис. 100

угольнике ABO угол при вершине O равен 36°, а два оставшихся — по 72°. Проведем AM — биссектрису угла A треугольника ABO. Легко убедиться, что треугольник ABM равнобедренный треугольник, подобный треугольнику ABO, и, кроме того, в треугольнике AMO равны стороны AM и MO, поскольку равны соответствующие углы. Таким образом, $AB=AM=MO=a$, $MB=$ $=R-a$. Выражая в пропорции $\frac{MB}{AB}=\frac{AB}{OB}$ все отрезки через R и a, получим после преобразований уравнение $a^2+aR-R^2=0$, откуда $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Заметим, что поскольку $a=2R\sin 18°$, то $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

35. Указание. а) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (см. задачу 11), N — середина BC, D — середина BM, DN — средняя линия в треугольнике BMC (рис. 101, *а*). Отсюда и из результата задачи 11 следует, что стороны треугольника MDN в три раза меньше соответствующих медиан треугольника ABC. Таким образом, из медиан любого треугольника можно составить треугольник.

б) Нетрудно привести примеры треугольников, из высот которых можно составить треугольник. Например, правильный треугольник. Точно так же легко увидеть, что не для всякого треугольника это возможно. Например, возьмем равнобедренный треугольник с достаточно маленьким по сравнению с боковой стороной основанием (рис. 101, *б*). У такого треугольника две высоты малы, а третья может быть сколь угодно большой, в частности быть больше суммы двух других. *Замечание.* Если h_a, h_b, h_c — высоты некоторого треугольника, d — произвольный отрезок, то из отрезков $\frac{d^2}{h_a}$, $\frac{d^2}{h_b}$, $\frac{d^2}{h_c}$ можно составить треугольник, причем этот треугольник будет подобен исходному. Это следует из третьего признака подобия.

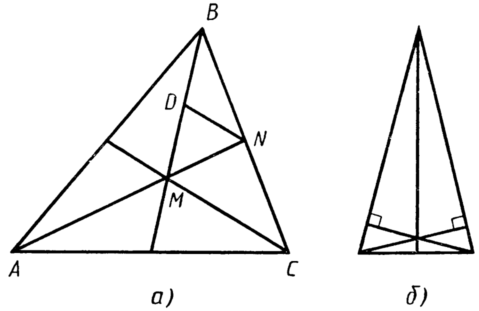


Рис. 101

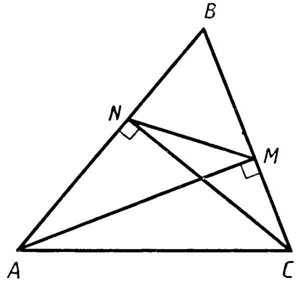


Рис. 102

36. 60° или 120°. Указание. Обозначим $\angle ABC = \varphi$. Если $\varphi < 90°$, то (рис. 102) $BM = BA\cos\varphi$, $BN = BC\cos\varphi$. Значит, треугольники ABC и MBN подобны, поскольку они имеют общий угол, равный φ, а стороны, его заключающие, пропорциональны (сходственными являются AB и BM, BC и BN). Коэффициент подобия равен $\cos\varphi$. Точно так же рассматривается случай $\varphi > 90°$. Коэффициент подобия здесь будет $(-\cos\varphi)$. Объединяя оба случая, получим, что треугольники ABC и MBN подобны с коэффициентом подобия $|\cos\varphi|$. Если $MN = \frac{1}{2}AC$, то угол ABC равен 60° или 120°.

37. $Rr/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$. Указание. На рисунке 103 («скелетный» чертеж) O_1 и O_2 — центры данных окружностей; AB — отрезок общей касательной к ним; O_3 — центр третьей окружности, радиус которой обозначим через x; O_2M и KL параллельны AB. Касание окружностей между собой и с прямой AB означает, что $O_1O_2 = R + r$, $O_1O_3 = R + x$, $O_2O_3 = r + x$; $O_1A = R$, $O_2B = r$, $O_3C = x$. Из треугольников O_1O_2M, O_1O_3K, O_2O_3L соответственно находим $O_2M = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1M^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$, $O_3K = 2\sqrt{Rx}$, $O_3L = 2\sqrt{rx}$. Равенство $O_2M = O_3K + O_3L$ приводит нас к уравнению $\sqrt{Rr} = \sqrt{Rx} + \sqrt{rx}$, откуда $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$, $x = \frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

38. Длина общей внешней касательной равна $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$, длина общей внутренней касательной равна $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$. Указание. Проведем через центр одной окружности прямую, параллельную соответствующей касательной (в одном случае — внешней касательной, в другом — внутренней), до пересечения этой прямой с радиусом или продолжением радиуса второй окружности, проходящим через точку касания. Теперь по теореме Пифагора из образовавшегося прямоугольного треугольника найдем длину касательной.

39. Указание. Стороны четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника соответственно параллельны диагоналям исходного четырехугольника и равны половинам этих диагоналей.

Ответы на поставленные вопросы будут следующими: а) диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны; б) диагонали исходного четырехугольника равны; в) диагонали исходного четырехугольника равны и перпендикулярны.

40. $\frac{1}{2}|a-b|$. Указание. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и делит каждую из диагоналей пополам. Значит, отрезок средней линии от боковой стороны до точки пересечения с диагональю равен половине соответствующего основания трапеции.

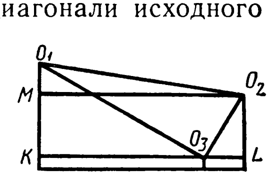


Рис. 103

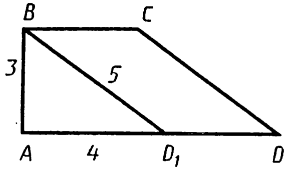


Рис. 104

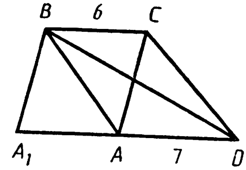


Рис. 105

41. 27. Указание. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD=11$, $BC=7$; боковые стороны $AB=3$, $CD=5$. Проведем через вершину B прямую BD_1, параллельную CD (рис. 104). В треугольнике ABD_1 известны все его стороны: $AB=3$, $BD_1=$ $=5$, $AD_1=11-7=4$. Найдя площадь треугольника ABD_1, находим высоту, опущенную на сторону AD_1, равную высоте трапеции; найдем затем площадь трапеции. В данном случае вычисления облегчает тот факт, что треугольник ABD_1 прямоугольный с прямым углом BAD_1, т. е. высота трапеции равна 3.

42. 30. Указание. Проведем через вершину B трапеции $ABCD$ прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с продолжением основания AD в точке A_1 (рис. 105). Треугольник A_1BD равновелик трапеции $ABCD$. Все стороны этого треугольника известны (5, 12 и $6+7=13$; этот треугольник прямоугольный).

43. $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$. Указание. Обозначим через M точку пересечения продолжений непараллельных сторон трапеции $ABCD$ (рис. 106, KP — искомый отрезок), $AD=a$, $BC=b$, $KP=x$. Из подобия треугольников MKP и MBC следует, что $\left(\frac{b}{x}\right)^2\cdot S_{MKP}=$ $=S_{MBC}$, а из подобия треугольников MKP и MAD следует $\left(\frac{a}{x}\right)^2\cdot S_{MKP}=S_{MAD}$. Равновеликость трапеций $AKPD$ и $KBCP$ означает, что $S_{MKP}-S_{MBC}=S_{MAD}-S_{MKP}$. Заменяя площадь треугольников MBC и MAD через площадь треугольника MKP, получим

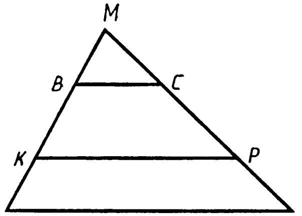


Рис. 106

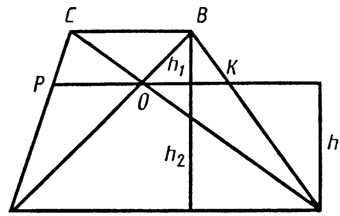


Рис. 107

$1-\left(\frac{b}{x}\right)^2=\left(\frac{a}{x}\right)^2-1$, откуда $x=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$.

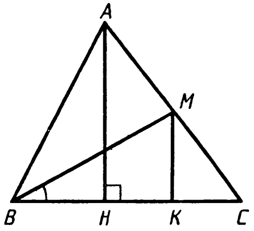
44. $\frac{2ab}{a+b}$. Указание. На рисунке 107 $h_1, h_2, h=h_1+h_2$ — высоты соответственно трапеций $KBCP$, $AKPD$ и $ABCD$; $AD=a$, $BC=b$, $KO=x$. Из подобия треугольников KBO и ABD имеем $\frac{x}{a}=\frac{h_1}{h}$. Из подобия треугольников AKO и ABC имеем $\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h}$. Таким образом, $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}$, $x=\frac{ab}{a+b}$. Таким же будет отрезок OP, а $KP=\frac{2ab}{a+b}$. Заметим, что на основе равенства $KO=OP$ можно доказать утверждение задачи 7 вводной части.

45. 202,8. **46.** $\frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$. **47.** 58°. Указание. Около $ABCD$ можно описать окружность, поскольку $\angle ABC+\angle ADC=\angle ABD+\angle CBD+\angle ADC=58°+44°+78°=180°$. Следовательно, $\angle CAD=\angle CBD=58°$.

48. $\arccos\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$. **49.** 75. **50.** Если $a<\frac{\sqrt{3}}{2}$, задача не имеет решения; при $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ задача имеет одно решение: $AC=\frac{1}{2}$; при $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$ задача имеет два решения: $AC=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{4a^2-3})$; при $a\geqslant 1$ — одно решение: $\frac{1}{2}(1+\sqrt{4a^2-3})$. **51.** $3\sqrt{30}$. **52.** $\frac{a}{\sin\alpha}$. **53.** 24. **54.** $\sqrt{13}$. **55.** Таких точек четыре: M_1 — точка пересечения медиан треугольника ABC; M_2, M_3, M_4 — соответственно такие, что $ABCM_2$, $BCAM_3$, $CABM_4$ — параллелограммы. **56.** 2: 3, считая от вершины B. **57.** $\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. **58.** $5\sqrt{\frac{3}{7}}$. **59.** $BK<AM$.

60. Указание. Из условия следует, что $BC=2R\sin\frac{\pi}{6}=2$. Значит, высота h_b, опущенная на AC, меньше 2 ($h_b\neq 2$, так как $\angle ACB\neq 90°$, поскольку $\frac{BC}{AC}=\frac{2}{3}\neq \operatorname{tg} 30°$). Следовательно, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_b<3$.

61. 30° или 150°. Указание. Проведем перпендикуляр MK



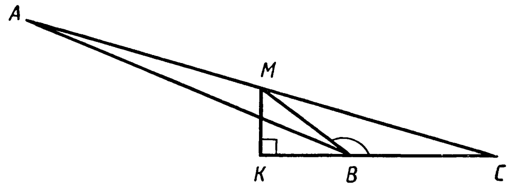


Рис. 108

на BC (рис. 108, *а, б*). Поскольку $MK=\frac{1}{2}AH$, то из равенства $BM=AH$ следует, что $\sin MBC=\frac{MK}{BM}=\frac{1}{2}$. Таким образом, угол MBC может принимать два значения: 30° и 150°.

62. $\sqrt{15}$. Указание. *Первый способ.* Пусть диагонали AB и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в M, $AD=4$, $BC=1$, $CD=\sqrt{2}$. Обозначим $BM=x$, $CM=y$. Из подобия треугольников AMD и BMC следует, что $DM=4x$, $AM=4y$. По теореме Пифагора для треугольников BMC и CMD получаем систему уравнений $x^2+y^2=1$, $16x^2+y^2=2$, из которой находим $x^2=\frac{1}{15}$, $y^2=\frac{14}{15}$, а затем $AB=\sqrt{x^2+16y^2}=\sqrt{15}$.

Второй способ. Докажем, что если у четырехугольника $ABCD$ диагонали перпендикулярны, то $AB^2-BC^2=AD^2-DC^2$ (при этом не требуется, чтобы $ABCD$ являлся трапецией). В самом деле, если M — точка пересечения диагоналей, то $BC^2-CM^2=BM^2=AB^2-AM^2$. Таким образом, $AB^2-BC^2=AM^2-CM^2$. Точно так же $AD^2-DC^2=AM^2-MC^2$. Утверждение доказано. Для нашей трапеции будем иметь $AB^2=BC^2+AD^2-DC^2=1+16-2=15$, $AB=\sqrt{15}$. Таким образом, условие, что $ABCD$ — трапеция, является лишним.

63. 7: 10 (считая от точки B). Указание. См. решение задачи 28 вводной части.

64. Указание. а) Утверждение неверно, т. е. существуют пары треугольников, удовлетворяющих условию задачи, для которых $S_1<S_2$. Например, если первый треугольник является правильным со стороной, равной 1, а второй имеет одну сторону, равную 2, а две оставшиеся равны 1,001. Утверждения пунктов б) и в) неверны в том же смысле, что и пункт а). (Примеры, опровергающие утверждения этих пунктов, постройте самостоятельно.)

65. Остроугольный. Указание. Используя формулы задачи 21, найдем стороны треугольника. Они будут равны $\frac{\sqrt{292}}{3}$, $\frac{\sqrt{208}}{3}$, $\frac{10}{3}$. Поскольку квадрат наибольшей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон, то исходный треугольник является остроугольным.

66. Тупоугольный. Указание. Треугольник со сторонами $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ подобен исходному. Поскольку $\frac{1}{3^2} > \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$, исходный треугольник тупоугольный.

67. Вершина A. Указание. Это следует из того, что в треугольниках AOC и AOB, где O — центр вписанной окружности, углы, прилежащие к вершине A, наибольшие.

68. Указание. Если две высоты треугольника больше 1 м, то любая из его сторон также больше 1 м; следовательно, его площадь больше 0,5 м^2.

69. Существует. Указание. Например, равнобедренный треугольник с основанием, равным 1000 м, и высотой, на него опущенной, равной 0,5 см $=$ 0,005 м.

70. 165°. Указание. Из условия следует, что $\angle ACB = 150°$. Следовательно (см. задачу 33), $\angle AOB = 165°$.

71. $\frac{a+b}{2}$. **72.** $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$. Указание. Площадь треугольника равна $\frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. Значит, площадь сектора искомой окружности радиуса r с центральным углом в 30° равна $\frac{c^2\sqrt{3}}{16}$; r находим из уравнения $\frac{\pi r^2}{12} = \frac{c^2\sqrt{3}}{16}$.

73. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$. Указание. Если r — радиус окружности, вписанной в данный прямоугольный треугольник, то расстояние от вершины прямого угла до центра окружности равно $r\sqrt{2}$, а расстояние от вершины прямого угла соответственно до ближайшей точки окружности равно $r\sqrt{2} - r$. Задача свелась к нахождению радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если известны катеты этого треугольника (см. задачу 26).

74. $\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$. Указание. Острые углы данного треугольника равны 30° и 60°, гипотенуза равна $2m$.

75. $(a+c):b$. Указание. Пусть O — точка пересечения биссектрис, BM — одна из биссектрис. Используя свойство биссектрис (см. задачу 19), найдем $AM=\frac{bc}{a+c}$. Применяя ту же теорему к треугольнику BAM (AO — биссектриса), найдем $BO:OM=$ $=\frac{(a+c)}{b}$.

76. $\frac{1}{2}|a-b|$. Указание. Обозначим $BM=x$, $BA=BC=y$. Пусть K_1 — точка касания со стороной BM окружности, вписанной в треугольник BAM; K_2 — точка касания со стороной BM окружности, вписанной в треугольник BCM. По формуле задачи 28 найдем $BK_1=\frac{1}{2}(y+x-a)$, $BK_2=\frac{1}{2}(y+x-b)$. Таким образом, $K_1K_2=|BK_1-BK_2|=\frac{1}{2}|a-b|$.

77. $\frac{h}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. Указание. Можно воспользоваться результатом задачи 57.

78. 30°. Указание. Если α — острый угол ромба, a — его сторона, то одна из диагоналей равна $2a\sin\frac{\alpha}{2}$, другая $2a\cos\frac{\alpha}{2}$. Из условия задачи получаем для α уравнение $4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=1$.

79. $\frac{ab}{2}$. Указание. Из условия следует, что диагонали данного четырехугольника перпендикулярны (см. задачу 39).

80. 90°. Указание. Очевидно, что $\angle AMB=45°$. Докажем, что $\angle ANB+\angle ADB=45°$. *Первый способ.* Пусть $\angle ANB=\alpha$, $\angle ADB=\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$. Найдем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$ $=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$, т. е. $\alpha+\beta=45°$. *Второй способ.* Обозначения понятны из рисунка 109: $\angle BKD=90°$, так как треугольник FBK равен треугольнику EKD, и $\angle BKF+\angle DKE=\angle BKF+$ $+\angle KBF=90°$. Таким образом, треугольник BKD прямоугольный равнобедренный. Следовательно, $\angle ANB+\angle ADB=$ $=\angle MDK+\angle ADB=\angle KDB=45°$.

81. Треугольники ABC и DBA подобны, так как $\angle ACB=$ $=\angle BAD$, $\angle BAC=\angle BDA$ (рис. 110). Из подобия следует $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}$, или $AC\cdot BD=AD\cdot AB$, $AD\cdot BC=AC\cdot AB$. Умножая первое равенство на AC, а второе — на AD, получим $AC^2\cdot BD=AC\cdot AD\cdot AB$, $AD^2\cdot BC=AC\cdot AD\cdot AB$, т. е. $AC^2\cdot BD=$ $=AD^2\cdot BC$, что и требовалось.

82. $r^2(2\sqrt{3}+3)$. Указание. Обозначим дуги через $3x$,

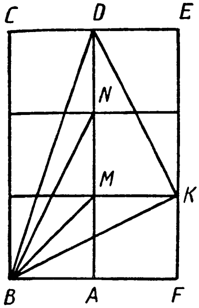


Рис. 109

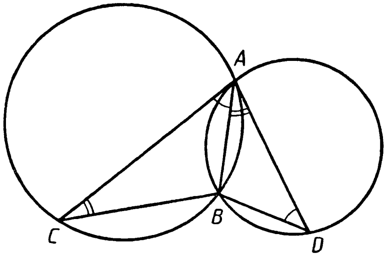


Рис. 110

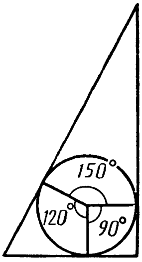


Рис. 111

$4x$, $5x$, $3x+4x+5x=360°$; следовательно, центральные углы, соответствующие полученным дугам, равны 90°, 120°, 150° (рис. 111). Углы получившегося треугольника будут соответственно равны $180°-90°=90°$, $180°-120°=60°$, $180°-150°=$ $=30°$. Таким образом, нам надо найти площадь прямоугольного треугольника с острым углом 30°, если радиус вписанной в него окружности равен r.

83. $l\sqrt{a(2l-a)}$. Указание. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. Значит, второе основание трапеции будет $2l-a$. Теперь надо найти площадь равнобочной трапеции с боковой стороной, равной l, и основаниями a и $2l-a$.

84. $0{,}5\,(S_1+S_2)$. Указание. Очевидно, вся трапеция разделена проведенными линиями на три трапеции с равными высотами. Средняя из этих трех трапеций имеет площадь в три раза меньше, чем площадь всей трапеции (средняя линия средней трапеции равна средней линии всей трапеции, а высота в три раза меньше). Следовательно, если x — площадь средней трапеции, то $x=\frac{1}{3}(S_1+S_2+x)$, откуда $x=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$.

85. Указание. Пусть K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой BC (рис. 112). Поскольку $\angle BKA=\angle KAD=$ $=\angle KAB$, то треугольник ABK равнобедренный, $BK=AB=a$. Таким образом, если $a<b$, то биссектриса угла A пересекает основание BC; если же $a>b$, то — боковую сторону CD.

86. Указание. Пусть основания трапеции AD и BC, M — точка пересечения диагоналей. Треугольники ABD и ACD равновелики. Следовательно, равновелики и треугольники AMB и CMD, поскольку их площади меньше площадей соответственно треугольников ABD и ACD на величину S_{AMD}.

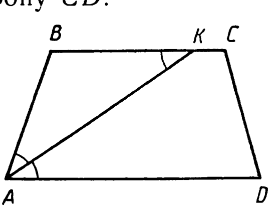


Рис. 112

87. $\arccos\frac{1-k}{1+k}$. Указание. Обозначим основания трапеции через x и kx, через y — ее боковую сторону. По свойству описанного четырехугольника $2y=(1+k)x$, откуда $\frac{x}{y}=\frac{2}{1+k}$. Нетрудно косинус угла при основании равнобочной трапеции выразить через основания и боковую сторону. В данном случае это приведет нас к равенству $\cos\varphi=\frac{x-kx}{2y}$.

88. $\frac{a+b}{4}\sqrt{3b^2+2ab-a^2}$. Указание. Из того, что AC — биссектриса угла BAD, следует, что треугольник ADC равнобедренный, $AD=DC=b$ (см. также решение задачи 85). Точно так же $BC=CD=b$. Таким образом, данная трапеция равнобочная, причем ее боковые стороны равны основанию CD.

89. a^2. **90.** $\sqrt{2S}/4$.

91. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Указание. *Первый способ.* Обозначим основания трапеции $ABCD$ (рис. 113) через a и b, x и y — высоты треугольников AOD и BOC, $x+y$ — высота трапеции. Из подобия треугольников AOD и BOC следует $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{a+b}{2}(x+y)=\frac{\left(b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+b\right)}{2}\left(y\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+y\right)=$
$=\frac{yb}{2}\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+1\right)^2=S_2\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}+1\right)^2=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. *Второй способ.* Треугольники AOB и COD равновелики (см. задачу 86). Обозначим их площади через x. Как было доказано при решении задачи 25 (вступительная часть), $S_{AOB}\cdot S_{COD}=S_{BOC}\cdot S_{DOA}$. Следовательно, $x=\sqrt{S_1S}$, а площадь всей трапеции равна $S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=$ $=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

92. $\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{|a-b|}{a+b}$. Указание. *Первый способ.* При решении задачи используем следующее утверждение. Если отрезок длины d расположен на прямой, образующей угол φ с прямой l,

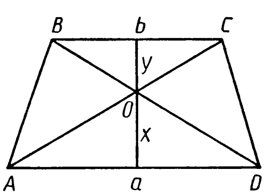


Рис. 113

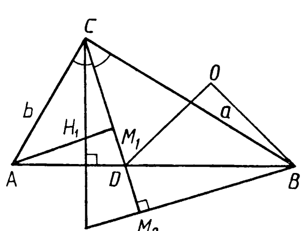


Рис. 114

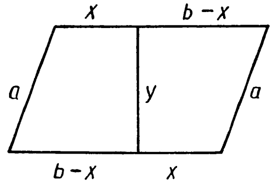


Рис. 115

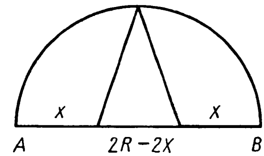


Рис. 116

то проекция отрезка на l равна $d\cos\varphi$. Пусть ABC прямоугольный треугольник с катетами $BC=a$, $AC=b$ $(b\leqslant a)$; CD — биссектриса этого треугольника; M_1 и M_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на CD; H_1 и H_2 — точки пересечения высот треугольников ACD и BCD (рис. 114). Если $\angle ABC=\alpha$, то $\angle ADC=45°+\alpha$, $\angle H_1CD=45°-\alpha$. M_1M_2 является проекцией на CD как отрезка AB, так и H_1H_2. Следовательно, $M_1M_2=AB\cos(45°+\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(45°+\alpha)$, $M_1M_2=$ $=H_1H_2\cos(45°-\alpha)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$, найдем $H_1H_2=$ $=\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\cos(45°+\alpha)}{\cos(45°-\alpha)}=\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=$ $=\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{a-b}{a+b}$. *Второй способ.* Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника BCD. Тогда DOB равнобедренный прямоугольный треугольник. Расстояние от O до DB равно 0,5 DB. На основании утверждения задачи 30 б) будем иметь $CH_2=DB$. Аналогично $CH_1=DA$. Следовательно, $H_1H_2=|DB-DA|$. Отрезки DB и DA находятся при помощи теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника (задача 19):

$$DB=AB\,\frac{a}{a+b}=\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{a}{a+b},\quad AD=\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{b}{a+b}.$$

93. $\arcsin\left(\frac{b}{a}-1\right)$. Указание. Очевидно, прямая, о которой говорится в условии, должна пересекать сторону b. Ясно также, что эта прямая должна делить эти стороны так, как показано на рисунке 115. Условие описанности каждого из двух получившихся четырехугольников приводит нас к равенству $y=b-a$.

94. $(6-\pi):2\pi:(6-\pi)$. Указание. Пусть $AB=2R$; проведенные прямые делят AB на части x, $2R-2x$ и x (рис. 116). По условию площадь образовавшегося треугольника равна $\frac{1}{3}$ площади полукруга, т. е. $\frac{1}{2}R(2R-2x)=\frac{\pi R^2}{6}$, $x=\frac{R}{3}(6-\pi)$.

95. $\frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)\left[(2\sqrt{2}-1)\pi-4\right]$. Указание. На рисунке 117

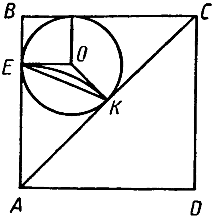


Рис. 117

O — центр первой окружности, K — точка касания ее с AC. Радиус этой окружности легко находится (радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными a): $r=a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Радиус второй окружности будет $R=AK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Общая часть двух пересекающихся кругов представляет собой объединение двух сегментов этих кругов. Соответственно ее площадь можно искать как сумму площадей этих сегментов. В свою очередь, площадь сегмента удобно находить как разность площадей соответствующего сектора и треугольника. В данном случае эта общая часть (полезно сделать отдельный чертеж) есть объединение сегмента круга радиуса r, которому соответствует центральный угол $EOK=135°$ (площадь этого сегмента равна $\frac{3}{8}\pi r^2-r^2\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)$, и сегмента круга радиуса R, которому соответствует центральный угол $EAK=45°$ $\Big($его площадь на $\frac{\pi R^2}{8}-R^2\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)$. Складывая площади этих сегментов и заменяя r и R их выражениями через a, получим ответ.

96. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-\pi)$. Указание. Пусть O — центр шестиугольника; A и B — две соседние его вершины (рис. 118); M — точка пересечения двух окружностей с центрами A и B, расположенная внутри треугольника AOB; K и L — точки пересечения этих окружностей с OA и OB. Искомая площадь в 6 раз больше площади криволинейного четырехугольника $OKML$. Площадь последнего можно представить как разность площадей: площадь треугольника AOB минус площадь прямоугольного равнобедренного треугольника AMB $\left(AM=BM=\frac{a}{\sqrt{2}},\ AB=a\right)$ и минус пло-

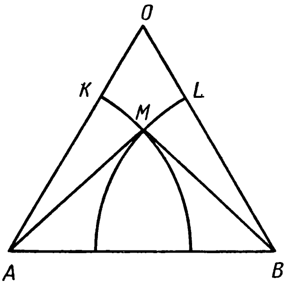


Рис. 118

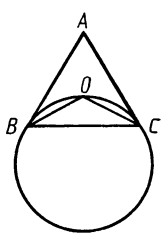


Рис. 119

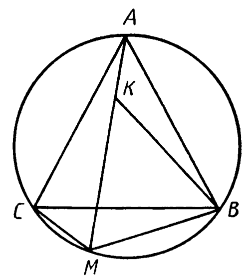


Рис. 120

щади двух секторов KAM и MBL, радиусы которых равны $\frac{a}{\sqrt{2}}$, а центральные углы равны 15°.

97. $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Указание. Если хорда удалена от центра окружности на расстояние $\frac{R}{2}$, то центральный угол, ей соответствующий, равен 120°. Отсюда следует, что искомая площадь равна разности площади полукруга и площади сегмента, соответствующего углу 120°.

98. $0{,}5\sqrt{b^2-a^2}$. Указание. Центр первой окружности — середина DB, второй — середина DC. Расстояние между их центрами равно $0{,}5\ BC=0{,}5\sqrt{b^2-a^2}$.

99. $\frac{d}{3}$. Указание. Из условия следует, что площади треугольников MBC и NDC составляют $\frac{1}{3}$ площади ромба. Значит, $MB=ND=\frac{2}{3}AB$.

100. $\frac{2}{9}S$. Указание. Обозначим через M' и N' точки пересечения проведенных прямых со стороной AC. Из подобия треугольников AMM' и ABC следует, что $S_{AMM'}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2 S=\frac{1}{36}S$. Точно так же $S_{ANN'}=\frac{1}{4}S$. Искомая площадь равна разности площадей треугольников ANN' и AMM'.

101. Указание. Если O — середина дуги BC (рис. 119), то $\angle OBA=\angle OCB=\angle OBC$. (Эти равенства следуют из того, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и из утверждения, сформулированного в задаче 16.) Точно так же $\angle OCA=\angle OCB$. Значит, O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

102. Указание. Возьмем на отрезке AM точку K так, что $MK=MB$ (рис. 120). Треугольник MKB правильный, так как $MK=MB$ и $\angle KMB=\angle ACB=60°$. Докажем, что треугольник ABK равен треугольнику CBM. В самом деле, $AB=CB$, $KB=MB$, $\angle ABK=\angle CBM$, поскольку оба эти угла дополняются до 60° углом KBC. Таким образом, $AK=CM$, а значит, $AM=AK+KM=CM+MB$. *Замечание.* Утверждение задачи несложно доказывается и алгебраически. Например: пусть сторона треугольника равна a, $AM=b$. Обозначим CM и MB через x_1 и x_2. На основании теоремы косинусов, записанной для треугольников MAC и MAB относительно углов AMC и AMB, можно заключить, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2-bx+b^2-a^2=0$. Теперь по теореме Виета получаем, что $x_1+x_2=b$.

103. Если $\alpha<90°$, $\beta<90°$, то углы треугольника ABC равны $90°-\alpha$, $90°-\beta$, $\alpha+\beta$; если $\alpha>90°$, $\beta<90°$, то $\alpha-90°$, $90°+\beta$, $180°-\alpha-\beta$; если $\alpha<90°$, $\beta>90°$, то $90°+\alpha$, $\beta-90°$, $180°-\alpha-\beta$. Указание. Заметим, что по отношению к треугольнику BAH точка C есть точка пересечения высот. Задача распадается на несколько случаев. Первый случай: $\alpha<90°$, $\beta<90°$ (рис. 121), $\angle CBA=90°-\angle HAB=90°-\alpha$, $\angle CAB=90°-\angle HBA=90°-\beta$. Аналогично рассматриваются другие случаи. Заметим, что α и β не могут равняться $90°$.

104. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4S}$. Указание. Пусть x и y — диагонали ромба. Из условия задачи следуют уравнения $xy=2S$, $x+y=m$.

105. $\frac{a}{5}$. Указание. На рисунке 122 AB — сторона квадрата, вписанного в окружность, центр которой O. Из условия следует, что радиус этой окружности равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$; $KLMN$ — квадрат, вписанный в один из сегментов; P — середина LM. Если x — сторона квадрата $KLMN$, то $PM=\frac{x}{2}$, $OP=\frac{a}{2}+x$, $OM=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Записав теорему Пифагора для треугольника OPM, получим для x уравнение $\frac{x^2}{4}+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=\frac{a^2}{2}$.

106. $\frac{36}{25}h^2$. Указание. Зная высоту сегмента, соответствующего центральному углу $120°$, можно легко найти радиус окружности: $R=2h$. Дальше решение такое же, как и в предыдущей задаче. Обозначим $AB=x$, $AD=4x$. Пусть M — середина AD. Записав теорему Пифагора для треугольника OMD, получим уравнение $(h+x)^2+4x^2=4h^2$.

107. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. Указание. Если R и r — радиусы окружностей, то $\pi(R^2-r^2)=S$, $R=2\pi r$.

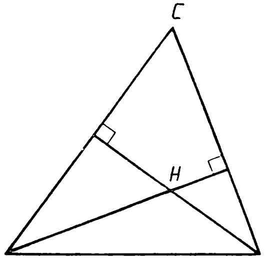


Рис. 121

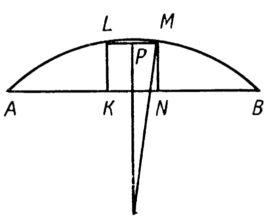


Рис. 122

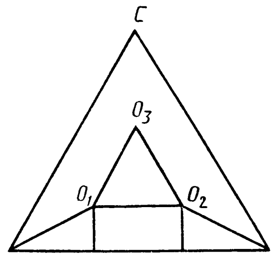


Рис. 123

108. $R^2\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right]$. Указание. Если O — центр окружности, то искомая площадь есть разность площадей четырехугольника $MAOB$ и сектора AOB. Центральный угол сектора равен $\pi-\alpha$.

109. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. Указание. Наша задача — найти радиус окружности, описанной около треугольника CMO (M — середина AB, O — центр квадрата). Для этого достаточно найти одну сторону этого треугольника и синус противолежащего угла (см. задачу 13). Поскольку $\angle COM=135°$, а $CM=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=a\frac{\sqrt{5}}{2}$, то $R=\frac{CM}{2\sin 135°}=\frac{a}{4}\sqrt{10}$.

110. $\frac{a(4\sin^2\alpha+1)}{8\sin\alpha}$. Указание. Задача сводится к нахождению радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием, равным a, и высотой $h=a\sin\alpha$, опущенной на основание. (Основание этого треугольника — сторона ромба, противоположная вершина треугольника — точка касания с противоположной стороной ромба.)

111. $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. Указание. Центры данных окружностей образуют правильный треугольник $O_1O_2O_3$ со стороной $2r$. Касательные к окружностям образуют правильный треугольник ABC со сторонами, параллельными соответствующим сторонам треугольника $O_1O_2O_3$ (рис. 123). Поскольку стороны треугольника ABC удалены от параллельных им сторон треугольника $O_1O_2O_3$ на расстояние, равное r, то $AB=AK+KM+MB=r\sqrt{3}+2r+$ $+r\sqrt{3}=2r(1+\sqrt{3})$.

112. $\frac{a^2+4r^2}{4r}$. Указание. Если C — точка касания окружностей, то CM — диаметр данной окружности. Следовательно, надо найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, в котором основание $AB=2a$, и высота, опущенная на основание, $CM=2r$.

113. $\frac{(5-\sqrt{13})a}{8}$. Указание. На основании утверждения, сформулированного в задаче 23, достаточно найти площадь и периметр треугольника AMN. Площадь этого треугольника удобно искать как разность площади квадрата и суммы площадей трех треугольников: ABM, CMN, ADN.

114. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **115.** $\frac{a^3b}{4(a^2+b^2)}$. **116.** $\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

117. $\dfrac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$. Указание. Из треугольника ABC по теореме синусов определяем AC. Затем находим углы треугольника $ACK\left(\angle CKA=\angle CBA=\alpha,\ \angle CAK=\frac{1}{2}\angle CAB=90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ и по теореме синусов для этого треугольника находим AK.

118. $\frac{R^2-a^2}{2R}$. Указание. Если O и O_1 — центры соответственно данной и искомой окружностей, то треугольник OAO_1 прямоугольный с гипотенузой $OO_1=R-x$ и катетами $OA=a$, $AO_1=x$, где x — радиус искомой окружности.

119. $\frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$. Указание. Прежде всего заметим, что все три хорды равны между собой. В самом деле, если одна хорда равна $3x$, а другая — $3y$ (рис. 124), то $x\cdot 2x=y\cdot 2y$ (см. задачу 18), откуда $x=y$. Очевидно, что данная окружность концентрична окружности, описанной около правильного треугольника ABC со стороной $\frac{a}{3}$. Найдя радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC\left(\text{он равен } \frac{a}{6\sqrt{3}}\right)$, получим, что в данной окружности хорда длиной a удалена от центра на расстояние $\frac{a}{6\sqrt{3}}$. Таким образом, ее радиус равен $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{108}}=a\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$.

120. $a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$. **121.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

122. $\frac{(\beta+\gamma-\alpha)}{2}$. Указание. Обозначим $\angle ACD=\varphi$ (рис. 125). Поскольку углы, опирающиеся на одну дугу, равны, то последовательно получаем $\angle ABD=\angle ACD=\varphi$, $\angle CAD=\angle CBD=\beta-\varphi$, $\angle CDB=\angle CAB=\alpha-\beta+\varphi$. Но в треугольнике CKD сумма углов при вершинах C и D равна внешнему углу при

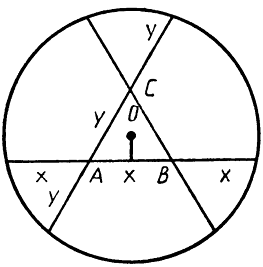


Рис. 124

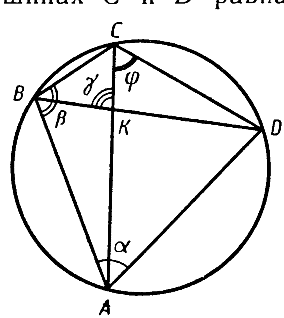


Рис. 125

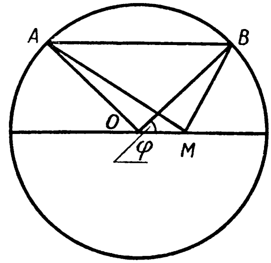


Рис. 126

вершине K, т. е. $\gamma=\varphi+\alpha-\beta+\varphi$, откуда $\varphi=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$.

123. $\frac{(ac+bd)}{a}$. Указание. Докажите, что треугольники BAK и CDK подобны.

124. $\frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$. Указание. Если вокруг трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD можно описать окружность, то $AB=CD$. Обозначим диагональ AC через a. Окружность, описанная около трапеции, совпадает с окружностью, описанной около треугольника ACD, т. е. ее радиус будет $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ (см. задачу 13). С другой стороны, если CK — высота трапеции, то $CK=a\sin\beta$, $AK=a\cos\beta$. AK равна средней линии трапеции. (Докажите.) Значит, площадь трапеции равна $AK\cdot CK$.

125. $\frac{|b-a|}{4}\sqrt{4d^2-(b-a)^2}$. Указание. $ABCK$ — параллелограмм.

126. $2(R^2+a^2)$. Указание. Пусть O — центр окружности; AB — некоторая хорда, параллельная OM (рис. 126). Обозначим $\angle BOM=\varphi$. Тогда $\angle AOM=180°-\varphi$. По теореме косинусов $BM^2=R^2+a^2-2Ra\cos\varphi$, $AM^2=R^2+a^2+2Ra\cos\varphi$. Сложив эти равенства, найдем $AM^2+BM^2=2(R^2+a^2)$.

127. $a(\sqrt{3}-1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ или $a(\sqrt{3}+1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$. Указание. Обозначим центры окружностей через O_1 и O_2, AB — их общая хорда. Возможны два случая: центры O_1 и O_2 — по разные стороны от AB (рис. 127, *а*) и центры — по одну сторону от AB (рис. 127, *б*). В первом случае в треугольнике AO_1O_2 углы при вершинах O_1 и O_2 равны соответственно 45° и 30°, во втором — эти углы равны 135° и 30°. В обоих случаях $O_1O_2=a$. По теореме синусов найдем радиусы: $R_1=AO_1$ и $R_2=AO_2$ — для каждого случая.

129. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. Указание. Пусть луч, выходящий из точки O_2 — центра меньшей окружности и образующий угол 30° с

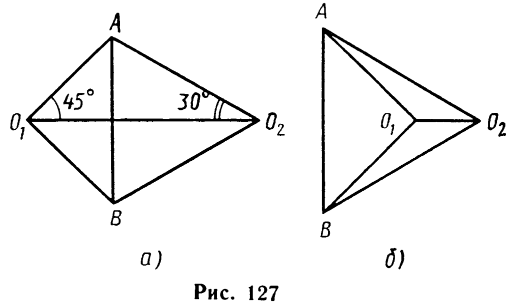


Рис. 127

прямой O_1O_2, пересекает окружности последовательно в точках A, B и C (рис. 128). То, что этот луч пересекает большую окружность, следует из того, что расстояние от O_1 до него равно $O_1O_2 \sin 30° = \frac{3}{4}R < R$. Обозначим $O_2C = x$. Запишем для треугольника O_1O_2C теорему косинусов относительно угла CO_2O_1: $R^2 = \frac{9}{4}R^2 + x^2 - 3\sqrt{3}\frac{Rx}{2}$. Из этого уравнения найдем $x = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}R$ (второй корень дает O_2B). Значит, точка C лежит внутри нашего отрезка, поскольку $O_2C = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}R < 2R$. Поскольку $BC = \frac{\sqrt{7}}{2}R$, то часть отрезка, расположенная вне окружностей, равна $\frac{2R - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{7}R}{2R} = \frac{3-\sqrt{7}}{4}$.

130. $\sqrt{13}$. Указание. Докажем сначала, что в треугольнике ABC угол C тупой, т. е. точка D лежит на продолжении BC за точку C. Допустим, что D лежит на стороне BC (рис. 129, *а*). В треугольнике ABD ($\angle ADB = 90°$) сторона BD меньше AB. Значит, биссектриса угла B пересекает AD в точке M, такой, что $MD < AM$ (см. задачу 19). Далее, обозначим через N точку на BK, такую, что ND параллельна AC. Поскольку $ND < KC = AK$, то $LD < AL$, что противоречит условию (один из отрезков — MD или LD — должен равняться $\frac{2}{3}AD$). Точка D не может располагаться на продолжении BC за точку B, так как в этом случае прямые BK и BE не пересекают отрезок AD. Итак, точка D — на продолжении стороны BC за точку C (рис. 129, *б*). Поскольку точки L и M делят AD на три равные части и BM — биссектриса угла B, то (см. задачу 19) $\frac{BD}{AB} = \frac{MD}{AM} = \frac{1}{2}$, откуда $BD = \frac{1}{2}AB = 2$. Проведем через точку C прямую, параллельную AD; F — точка пересечения этой прямой с BK. Из равенства $AK = KC$ следует, что $FC = AL = \frac{1}{2}LD$. Таким образом, $BC = CD = \frac{1}{2}BD = 1$, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{13}$.

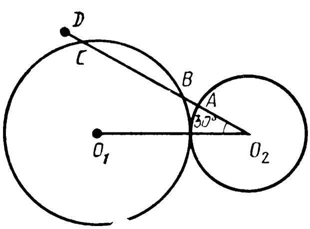


Рис. 128

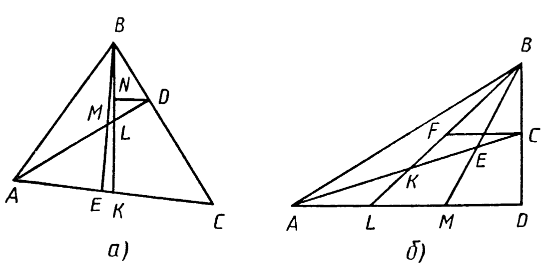


Рис. 129

131. $\arccos \frac{1 \pm \sqrt{1-2k}}{2}$. Указание. Если φ — угол при основании равнобедренного треугольника, $2a$ — его основание, то $r = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $R = \frac{a}{\sin 2\varphi}$. По условию $\frac{r}{R} = k$. Получаем для φ уравнения $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi = k$, $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ $2 \sin \varphi \cos \varphi = k$, $4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \varphi = k$, $2(1 - \cos \varphi) \cos \varphi = k$.

132. $\frac{2}{3}$. Указание. Пусть H — точка пересечения высот равнобедренного треугольника ABC с основанием BC (рис. 130). Обозначим через φ угол при основании, $BC = 2a$. Если O — центр вписанной окружности, то $r = OD = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. По условию $HD = 2r$; значит, $2r = a \operatorname{tg} HBD = a \operatorname{ctg} \varphi$. Таким образом, получаем для φ уравнение $2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{ctg} \varphi$, откуда $\cos \varphi = \frac{2}{3}$.

133. $\frac{3}{8} a^2$. **134.** $\frac{\pi}{2}$, $\left| \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \right|$, $\frac{\pi}{2} - \left| \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \right|$. Указание. Поскольку EF — диаметр, то $\angle EKF = \frac{\pi}{2}$ (рис. 131). Для определенности рассмотрим случай, когда $BC < AB$, т. е. $\angle ACB = \pi - \alpha - \beta > \alpha$. В этом случае $\angle BCK = \alpha + \beta$, $\angle BKA = \alpha$, $\angle CBK = \pi - 2\alpha - \beta$, $\angle EFK = \frac{1}{2} \angle CBK = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\beta}{2}$.

135. $\frac{2\sqrt{3} - 3}{8} a^2$. Указание. Обозначения понятны из рисунка 132. Записав для треугольника AMK теорему косинусов относительно угла A, получим для x уравнение

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} a.$$

Решение будет неполным, если мы не рассмотрим второй случай: на рисунке — треугольник MK_1L_1, обозначенный тонкими линиями. Его сторона будет равна $\frac{\sqrt{3}+1}{2} a > \frac{\sqrt{5}}{2} a = MD$, т. е. точки K_1 и L_1 расположены на продолжениях диагоналей AC и BD.

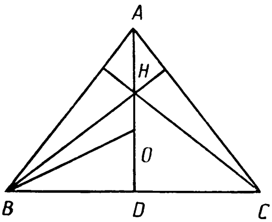


Рис. 130

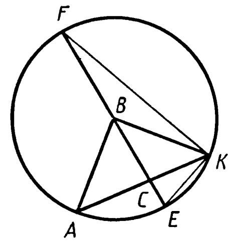


Рис. 131

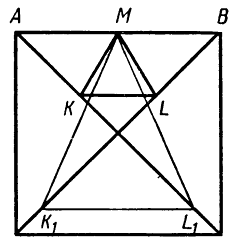


Рис. 132

136. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$. **137.** $\frac{br}{c}$. Указание. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, относятся как стороны AB и AC, поскольку синусы углов ADB и ADC равны.

138. $\sqrt{7}$. Указание. Если $AD=BC=x$, то $DB=3-x$, По теореме Пифагора $x^2=3+(3-x)^2$.

139. $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$. **140.** $\sqrt{10}$. Указание. Пусть прямая CB вторично пересекает окружность в точке M (рис. 133). Если $BM=x$, то по теореме, сформулированной в задаче 17, имеем $4=(1+x)\cdot 1$, откуда $x=3$.

141. $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}-1$. Указание. Если гипотенуза равна 1, а отрезок от вершины угла α до основания перпендикуляра равен x, то площадь исходного треугольника будет $\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$, а площадь отсекаемого $\frac{x^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

142. Указание. На рисунке 134 O_1 и O_2 — центры окружностей, радиусы которых R_1 и R_2; K_1 и K_2 — точки касания со стороной AB треугольника ABC; $O_1O_2=R_1+R_2$. Поскольку AO_1 и BO_2 — биссектрисы углов A и B, то $AK_1=R_1\sqrt{3}$, $BK_2=R_2\sqrt{3}$; K_1K_2 — проекция O_1O_2. Значит, $K_1K_2\leqslant O_1O_2=R_1+R_2$, $AK_1+K_1K_2+K_2B=1$, $R_1\sqrt{3}+R_1+R_2+R_2\sqrt{3}\geqslant 1$, откуда $R_1+R_2\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

143. $\frac{1}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}$. Указание. На рисунке 135 ABC — данный треугольник, BD — биссектриса, O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей, M — середина AB. Радиус окружности, вписанной в BCD, легко находится (см. задачу 26). Он равен $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. Следовательно, $O_2B=\frac{3-\sqrt{3}}{6\sin 15^\circ}$. Далее, треугольник ABD равнобедренный. Значит, M — точка касания окружности, вписанной в ABD. Следовательно, $O_1B=\frac{1}{\cos 15^\circ}$. Теперь O_1O_2 находим из

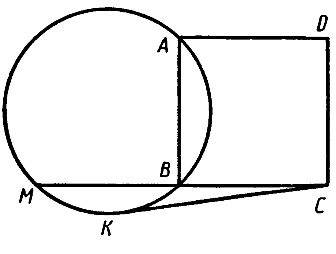


Рис. 133

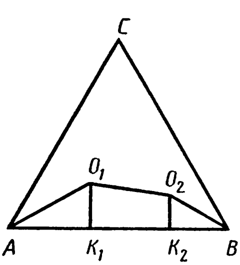


Рис. 134

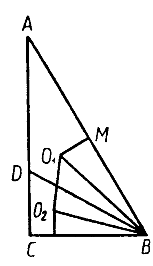


Рис. 135

треугольника O_1BO_2 по теореме косинусов: $O_1O_2^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6\sin 15^\circ}\right)^2+$
$+\frac{1}{\cos^2 15^\circ}-2\frac{3-\sqrt{3}}{6\sin 15^\circ}\cdot\frac{1}{\cos 15^\circ}\cos 30^\circ=\frac{1}{9}(96-54\sqrt{3})$.

144. 3:4. У к а з а н и е. Пусть $NC=a$, $BN=2a$, $MN=h$ (рис. 136). Поскольку трапеции $ABNM$ и $NCDM$ равновелики, то в них равны суммы оснований: $BN+AM=NC+MD$ или $4a+\frac{h}{\sqrt{3}}=2a+h\sqrt{3}$, откуда $h=a\sqrt{3}$.

145. $a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. У к а з а н и е. OC — биссектриса угла C (O — центр искомой окружности). Значит, $R=OA=AC\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

146. $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}$. У к а з а н и е. Сначала по теореме косинусов находим AC, затем $\cos A$, поскольку все стороны треугольника ABC известны. И наконец, находим MN из треугольника AMN (N — середина AC).

147. $\frac{3}{4}S$. **148.** $\frac{4\sqrt{Rr}\,(R-r)}{6Rr-R^2-r^2}$. **149.** $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2\,(b-a\cos\alpha)}$. **150.** $\frac{3}{10}c$.

151. $\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{b^2+a^2+2ab\sin\frac{\alpha}{2}}$. У к а з а н и е. Задача сводится к нахождению радиуса окружности, описанной около равнобочной трапеции, меньшее основание которой равно b, боковые стороны равны a, угол при большем основании равен $90-\frac{\alpha}{2}$.

152. $S\cos^2\alpha$. **153.** $\sqrt{4R^2-a^2}$. У к а з а н и е. Докажем, что $MP^2+QN^2=4R^2$ (рис. 137). В самом деле, сумма дуг MP и QN равна π (см. задачу 15). Если отложить на продолжении дуги QN дугу NL, равную MP, то получим дугу QNL, равную полуокружности. Значит, $\angle QNL=90^\circ$ и $LN^2+NQ^2=4R^2$. Но $LN=$ $=MP$. Таким образом, $MP^2+QN^2=4R^2$.

154. $b/2$. У к а з а н и е. Из условия следует, что углы B и C треугольника ABC острые. Если O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AMC и AMB (рис. 138), то проекция

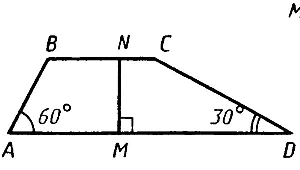


Рис. 136

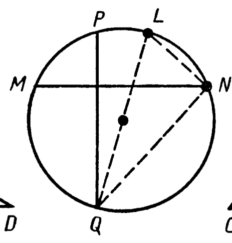


Рис. 137

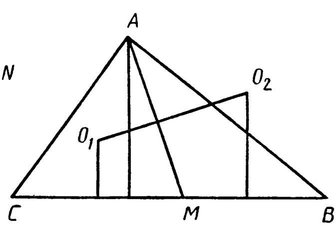


Рис. 138

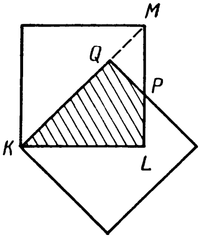


Рис. 139

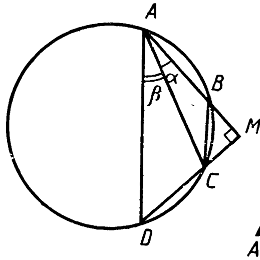


Рис. 140

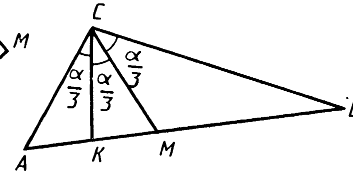


Рис. 141

отрезка O_1O_2 на BC равна $b/2$, т. е. $O_1O_2 \geqslant b/2$; $O_1O_2 = b/2$, если M — основание высоты, опущенной из A на BC.

155. $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\,|\operatorname{ctg}\alpha|$.

156. $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}ab\cos\alpha}$. **157.** $\arcsin\frac{2}{\pi}$ и $\pi - \arcsin\frac{2}{\pi}$. **158.** $a^2(\sqrt{2}-1)$. Указание. Общая часть изображена на рисунке 139. Она представляет собой четырехугольник $KLPQ$. Его площадь равна разности площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников — KLM (с катетами, равными a) и QMP (с катетами, равными $(\sqrt{2}-1)a$).

159. $\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$, $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$. Указание. Обозначения понятны из рисунка 140. По условию $\angle AMD = 90°$. Но этот угол измеряется полуразностью дуг AD и BC (см. задачу 14), $\smile BC = 2\alpha$; значит, $\smile AD = \pi + 2\alpha$ $(ABCD = \pi - 2\alpha)$. Поскольку $\smile CD = 2\beta$, то $\smile AB = \pi - 4\alpha - 2\beta$. Зная хорду AB и стягиваемую ею дугу, найдем радиус окружности (см. задачу 13). Далее, наоборот, зная радиус окружности и дуги, соответствующие диагоналям, найдем диагонали.

160. $0{,}5a(b-a\cos\alpha)\sin^3\alpha$. Указание. Имеем $AK = a\cos\alpha$, $BK = a\sin\alpha$, $KD = AD - AK = b - a\cos\alpha$, $KM = (b-a\cos\alpha)\sin\alpha$, $\angle BKM = 180° - \alpha$.

161. $\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}$. Указание. Обозначим через K и M точки пересечения проведенных лучей со стороной AB (рис. 141). Пусть $AC = b$, $BC = 3b$, $CK = x$, $CM = y$. Поскольку CK — биссектриса треугольника ACM, а CM — биссектриса треугольника KCB, то (см. задачу 27) $x = \dfrac{2by\cos\frac{\alpha}{3}}{b+y}$, $y = \dfrac{6bx\cos\frac{\alpha}{3}}{3b+x}$.

162. $\dfrac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$. Указание. Обозначим $AC = x$, $AB =$

$=BC=y$. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна $S=$ $=\frac{x}{2}\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}=S_1+S_2$. Но $\frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{DC}=\frac{y}{x}$ (см. задачу 19).

163. $4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_2\sin^2\frac{\alpha}{2}+R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. Указание. Для того чтобы найти длину хорды окружности, радиус которой известен, достаточно найти расстояние от центра окружности до этой хорды. На рисунке 142 O_1 и O_2 — центры окружностей; $O_1M=O_1N=R_1$, $O_1O_2=R_2-R_1$; K — проекция O_2 на вторую сторону угла; $O_2K=LN=|R_1-(R_2-R_1)\cos\alpha|$. Следовательно, искомая хорда будет равна $2\sqrt{R_2^2-O_2K^2}=$ $=4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_2\sin^2\frac{\alpha}{2}+R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

164. 150/7. Указание. *Первый способ.* Обозначим через C точку пересечения касательных (рис. 143). Имеем $\sin CAO=\frac{4}{5}$, $\cos CAO=\frac{3}{5}$, $\sin CBO=\frac{3}{5}$, $\cos CBO=\frac{4}{5}$. Затем найдем $\sin ACB=\sin(\angle CAO-\angle CBO)=\frac{7}{25}$ и по формуле задачи 25 — площадь треугольника ABC. *Второй способ.* Пусть K и M — точки касания AC и BC с окружностью. По теореме задачи 17 $AK^2=$ $=(OA+R)(OA-R)=(15+12)\cdot(15-12)=81$, $AK=9$. Аналогично находим $BM=16$. Пусть $CM=CK=x$. Поскольку CO — биссектриса внешнего угла треугольника ABC, то (см. задачу 19) $\frac{CA}{CB}=\frac{OA}{OB}$, или $\frac{9+x}{16-x}=\frac{15}{20}$, откуда $x=12/7$. Теперь найдем $S_{ABC}=S_{BCO}-S_{ACO}=0{,}5R\cdot BC-0{,}5R\cdot AC=6(BC-AC)=150/7$.

165. $\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{a^2\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$. Указание. Из условия следует, что центр искомой окружности равноудален от всех

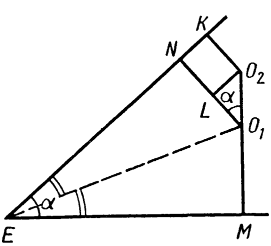


Рис. 142

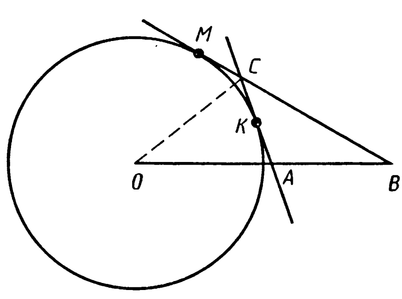


Рис. 143

сторон треугольника ABC, т. е. ее центр совпадает с центром вписанной окружности, а радиус равен $\sqrt{r^2+0{,}25d^2}$. Для определения r можно воспользоваться формулой задачи 10.

166. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab}$. Указание. См. задачу 39.

167. Указание. Пусть K — середина AM, P_1 и P_2 — точки пересечения медиан треугольников ABM и ACM (рис. 144). Имеем BP_1P_2C — трапеция. По условию диагонали BP_2 и CP_1 этой трапеции равны. Следовательно, $BP_1=CP_2$. (Докажите.) Значит, $BK=CK$. Таким образом, точка K проектируется на BC в середину BC. Из этого следует равенство $MO=OD$, а затем и $BM=DC$.

168. 15°, 75°. Указание. Пусть катеты треугольника равны a и b, а гипотенуза c. Из результата задачи 75 следует, что $\frac{BO}{OE}=\frac{a+b}{c}$. Таким образом, $c\sqrt{3}=(a+b)\sqrt{2}$. Обозначим через φ наименьший угол треугольника. Тогда $(\cos\varphi+\sin\varphi)\sqrt{2}=\sqrt{3}$, откуда $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(45°-\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. $\frac{R\sqrt{3}}{8}$. **170.** $2\sqrt{6}$. Указание. Находим последовательно $\cos BAC$, $\cos\frac{1}{2}BAC$, AK (задача 27), BK и KC (задача 19), а затем KM из подобия треугольников AKC и BKM.

171. $\sqrt{2}$. Указание. Пусть центр окружности — точка O — удалена от одной стороны угла на расстояние R (R — радиус окружности) и на расстояние y от другой его стороны (рис. 145, окружность можно было не изображать). Из условия следует, что $\sqrt{R^2-y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$. (Хорда AB длиной $\sqrt{6}$ удалена от центра окружности радиуса R на расстояние y.) Найдем расстояние от O до биссектрисы прямого угла. Треугольник KMO прямоугольный равнобедренный с гипотенузой KO, равной $R-y$. Следовательно, $OM=(R-y)/\sqrt{2}$. Получаем второе уравнение $\sqrt{R^2-0{,}5(R-y)^2}=0{,}5\sqrt{7}$. Задача свелась к решению системы

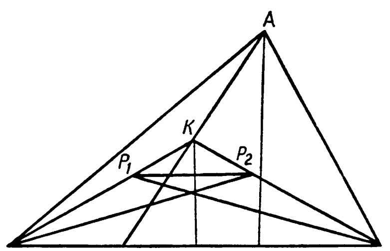


Рис. 144

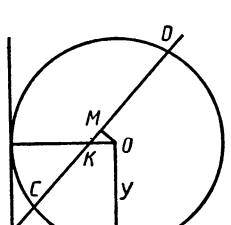


Рис. 145

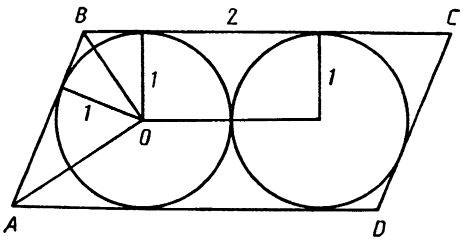


Рис. 146

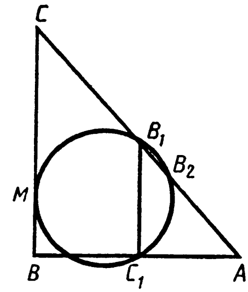


Рис. 147

уравнений $R^2-y^2=3/2$, $R^2-y^2+2Ry=7/2$. Вычитая из второго равнения первое, получим $Ry=1$ и т. д.

172. $4(2\sqrt{3}+3)/3$. Указание. Пусть AB — сторона параллелограмма $ABCD$, которой касается одна окружность, O — центр этой окружности (рис. 146, сами окружности можно не изображать, а указать лишь их центры, точки касания со сторонами параллелограмма, провести соответствующие отрезки). Тогда треугольник ABO прямоугольный (докажите), в котором высота, опущенная на гипотенузу AB, равна 1, а один из отрезков, на которые высота делит гипотенузу, равен $\sqrt{3}$. Теперь легко определить все элементы треугольника ABO, а затем и параллелограмма: $ABCD$: $AB=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $BC=2+\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\angle BAD=60°$.

173. $\frac{2R^3\sin^3\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Указание. Если O — центр окружности, то из условия следует, что в треугольнике AOB $OA=OB=R$, $\angle OAB=\angle OBA=\left|\frac{\pi}{2}-\alpha\right|$. Далее находим AB и затем площадь треугольника ABC по формуле задачи 25.

174. $3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)/32\pi$. Указание. Из условия следует, что треугольник ABM равнобедренный; $AB=AM$, поскольку биссектриса угла A этого треугольника перпендикулярна стороне BM. Обозначим $AB=a$. Тогда $AM=MC=a$. Если $BC=x$, то, записав теорему косинусов для треугольника ABC относительно заданного угла, получим соотношение, с помощью которого выразим x через a.

175. 1,1 Указание. На рисунке 147 B_1 и C_1 — середины AC и AB, M — точка касания построенной окружности с BC. Поскольку B_1C_1 параллельна BC, то перпендикуляр, опущенный из M на B_1C_1, проходит через середину B_1C_1, т. е. $BM=B_1C_1:2=BC:4=1$. На основании теоремы, сформулированной в задаче 17, имеем $CM^2=CB_1\cdot CB_2$, или $9=\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+x\right)$ $(B_1B_2=x)$.

176. Если $\frac{a}{4}<R<\frac{a}{2}$, задача имеет одно решение: $\frac{a^2}{16R}$;

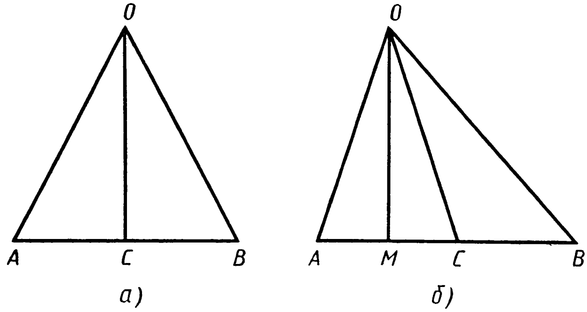


Рис. 148

если $0 < R \leqslant \frac{a}{4}$ или $R \geqslant \frac{a}{2}$, задача имеет два решения: $\frac{a^2}{16R}$ и $\frac{a^2}{8R}$. Указание. Заметим, что четвертая окружность не может касаться трех данных одинаковым образом, так как в противном случае расстояния от точки O (центр четвертой окружности) до трех точек, расположенных на одной прямой, были бы равны. Пусть x — радиус четвертой окружности, C — середина AB. Расстояние от O до A, B и C равны $R+x$ или $|R-x|$. Рассмотрим первый случай. Два расстояния равны $R+x$, одно равно $|R-x|$. Легко видеть, что в данном случае $OA=OB=R+x$, $OC=|R-x|$ (рис. 148, a). По теореме Пифагора для треугольника AOC имеем $(R+x)^2-(R-x)^2=\frac{a^2}{4}$, откуда $x=\frac{a^2}{16R}$. Второй случай: два расстояния из трех равны $|R-x|$, одно равно $R+x$. Имеем две эквивалентные возможности: $OA=OC=|R-x|$, $OB=R+x$ (рис. 148, *б*) или $OC=OB=|R-x|$, $OA=R+x$. На рисунке 148, *б* точка M — середина AC. Выразив OM по теореме Пифагора из треугольников AOM и BOM, получим уравнение $(R+x)^2-\frac{9a^2}{16}=(R-x)^2-\frac{a^2}{16}$, откуда $x=\frac{a^2}{8R}$. Во втором случае для x имеет место ограничение: $|R-x| \geqslant \frac{a}{4}$. Следовательно, $\left| R-\frac{a^2}{8R} \right| \geqslant$

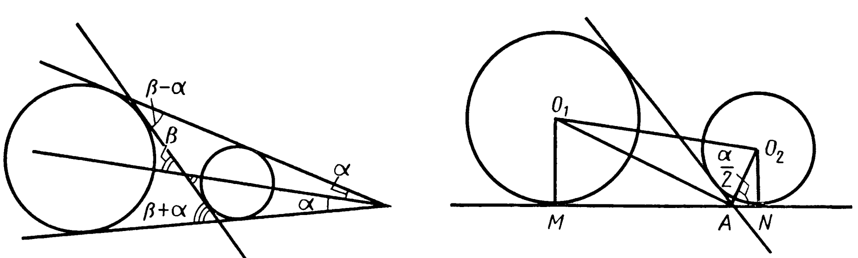


Рис. 149

$\geqslant \frac{a}{4} \Leftrightarrow R-\frac{a^2}{8R} \geqslant \frac{a}{4}$, или $R-\frac{a^2}{8R} \leqslant -\frac{a}{4} \Leftrightarrow R \geqslant \frac{a}{2}$, или $R \leqslant \frac{a}{4}$.

177. $\frac{\pi}{2}$ и $\arccos \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2}\left(=2 \operatorname{arctg} \frac{r}{R}\right)$. Указание. *Первый способ.* При помощи дополнительного построения, указанного в решении задачи 38, найдем, что углы α и β, образованные соответственно общей внешней и общей внутренней касательной с линией центров (рис. 149 *а*), удовлетворяют равенствам $\sin \alpha = \frac{R-r}{\sqrt{2(R^2+r^2)}}$ и $\sin \beta = \frac{R+r}{\sqrt{2(R^2+r^2)}}$. Теперь найдем $\cos \alpha$ и $\cos \beta$, а затем $\cos(\alpha+\beta)=0$ и $\cos(\beta-\alpha)=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2}$.

Второй способ. Обозначения понятны из рисунка 149, *б*. Пусть $O_1M=R$, $O_2N=r$, $AM=x$, $AN=y$. Поскольку O_1A и O_2A — биссектрисы смежных углов, то $O_1AO_2=90°$, $O_1O_2^2=O_1A^2+O_2A^2=R^2+x^2+r^2+y^2$. Таким образом, $2(R^2+r^2)=R^2+r^2+x^2+y^2$ или $R^2-x^2=y^2-r^2$. Но треугольники AO_1M и O_2AN подобны. Пусть $y=kR$, $r=kx$. Имеем $R^2-x^2=k^2(R^2-x^2)$. Следовательно, либо $R=x\left(\text{в этом случае } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1,\ \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$, либо $k=1$ $\left(\text{в этом случае } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{y}=\frac{r}{R},\ \alpha=2\operatorname{arctg}\frac{r}{R}=\arccos\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2}\right)$.

178. $\frac{\pi}{6}$. **179.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. Указание. Пусть $AF=x$. Из условия $AM:MC=1:3$ и подобия треугольников AMF и CME (рис. 150) найдем $EC=3x$. Четырехугольники $ABEF$ и $BCDF$ представляют собой трапеции с равными высотами. Значит, их площади относятся как суммы оснований. Таким образом, $\frac{x+(a-3x)}{(a-x)+3x}=\frac{1}{2}$. Затем находим MC и по теореме косинусов из треугольника EMC находим EM.

180. $\frac{R(3-2\sqrt{2})}{3}$. Указание. Обозначим через x радиус искомой окружности. Пусть O_1 — центр этой окружности (рис. 151). Рассмотрим треугольник OAO_1, в котором $OO_1=R+x$,

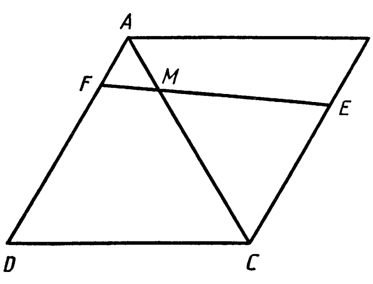


Рис. 150

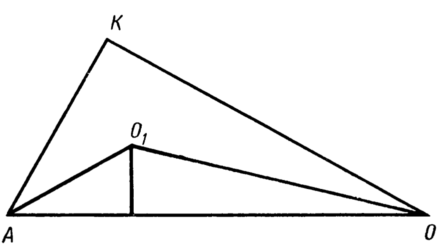


Рис. 151

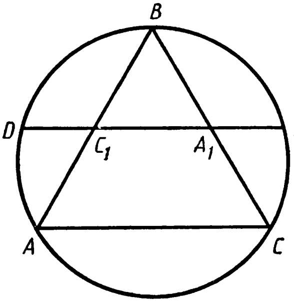


Рис. 152

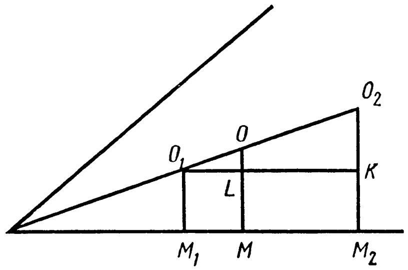


Рис. 153

$AO=\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\angle OAO_1=30°$; высота, опущенная из O_1 на OA, равна x. Записав теорему косинусов для треугольника OAO_1 относительно угла A $(AO_1=2x)$, получим уравнение относительно x: $(R+x)^2=4x^2+\frac{4R^2}{3}-4Rx$, $x<R$.

181. $4\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{3-\cos\beta}}$. Указание. На рисунке 152 A_1 и C_1 — середины соответствующих сторон. Пусть боковые стороны треугольника ABC равны a. Находим последовательно $AC=2a\sin\frac{\beta}{2}$, $A_1C_1=a\sin\frac{\beta}{2}$. На основании равенства $AC_1\cdot C_1B=DC_1\cdot C_1E$ (см. задачу 18) получим уравнение $\frac{a^2}{4}=x\left(a\sin\frac{\beta}{2}+x\right)$, где $x=DC_1=EA_1$. Далее находим x и DE. Поскольку высота, опущенная из B на DE, вдвое меньше высоты, опущенной на AC, то $\frac{S_{ABC}}{S_{DBE}}=\frac{2AC}{DE}$.

182. $\frac{ab\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{a^2\mathrm{tg}^2\alpha+(a-b)^2}}$. Указание. B — точка пересечения высот треугольника ONP (задача 30), OA — высота этого треугольника. Теперь последовательно находим ON, $S_{ONP}=\frac{1}{2}ON\times OP\sin\alpha$, $NP=\sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2\alpha+(a-b)^2}$, OA (из равенства $NP\cdot OA=2S_{ONP}$).

183. Обозначения: O_1, O_2 — центры данных окружностей; M_1, M_2 — их точки касания с одной стороны угла; O и M — центр и точка касания третьей окружности (рис. 153). По условию $OO_1=O_1M_1=r$, $OO_2=O_2M_2=R$. Проведем через O_1 прямую, параллельную M_1M_2, и обозначим через L и K ее точки пересечения с OM и O_2M_2. Из подобия треугольников O_1OL и O_1O_2K

находим $OL = \frac{r(R-r)}{R+r}$, а затем — искомый радиус $OM = OL + LM = \frac{r(R-r)}{R+r} + r = \frac{2Rr}{R+r}$.

184. $\frac{15\sqrt{7}}{16}$. Указание. Обозначим $AB = x$, $AK = y$. На основании утверждения задачи 19 имеем $\frac{x}{2} = \frac{y}{1}$. Второе уравнение получим следующим образом. Из треугольника BKC по теореме косинусов найдем $\cos BKC$, после чего запишем теорему косинусов для треугольника ABK относительно угла AKB.

185. $2\sqrt{145}/3$. Указание. Отрезок BD делится медианой CE в отношении $5:1$ (считая от вершины B). С помощью приема, рассмотренного при решении задачи 8 вводной части (проведем через B прямую, параллельную AC, до пересечения с прямой CE и т. д.), найдем отношение $AD:DC = 4:1$. Обозначим $DC = x$, $AD = 4x$. Выразим AB и BC через x (по теореме Пифагора). На основании формулы, выражающей длину медианы через стороны треугольника (задача 21), получим уравнение относительно x.

186. $SQ > RS$. Указание. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из S на PR. Поскольку $\angle RPS = \angle QRP = 45°$, то $SM = PM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Нетрудно проверить, что $SM = \frac{5\sqrt{2}}{2} > MR = 7 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $\operatorname{tg} MRS > 1$ а $\angle MRS > 45°$. Значит, в треугольнике QRS угол QRS тупой, т. е. $SQ > RS$.

187. Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 17.

188. Указание. Проведем через A прямую KL, параллельную MQ (рис. 154, *а*); LR параллельна MK. Докажем, что треугольники ANP и LRQ равны. Поскольку трапеции $MKAP$ и $NALQ$ равнобочные, то $NA = LQ$, $AP = MK = LR$, $\angle LRQ = \angle KMP = \angle APN$, $\angle LQR = \angle ANP$. Из этого следует равенство углов NAP и QLR. Таким образом, треугольники NAP и QLR равны, а значит, $MQ - NP = MQ - RQ = KL$. (Рассмотрим самостоятельно случай, когда точка A лежит вне отрезка KL (рис. 154, *б*).)

189. $3ab/4$. Указание. Проведем через C прямую CM, параллельную AD (рис. 155). Из условия следует, что $AM =$

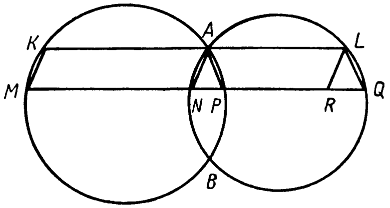


Рис. 154

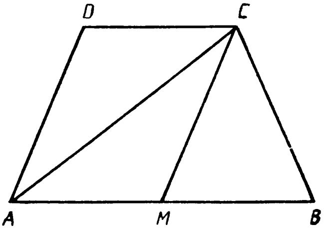


Рис. 155

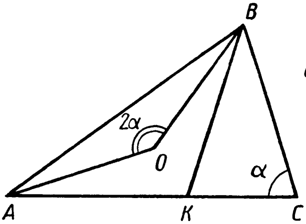


Рис. 156

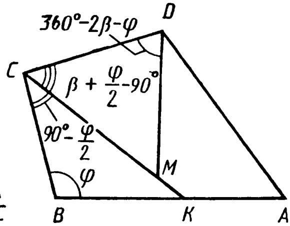


Рис. 157

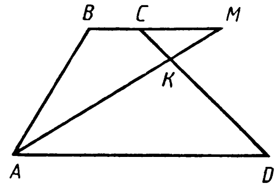


Рис. 158

$=MB=MC$. Значит, M — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Таким образом, $\angle ACB=90°$. Кроме того, треугольник ADC равен треугольнику AMC, а его площадь равна половине площади треугольника ACB, т. е. площадь трапеции $ABCD$ составляет $3/2$ площади треугольника ABC.

190. 108°, 36°, 36°. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 33.

191. $\angle ACB=\angle ABC=72°$, $\angle BAC=36°$. Указание. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, и по условию центр окружности, вписанной в треугольник ABK (рис. 156); $\angle ACB=\alpha$. Тогда $\angle AOB=2\alpha$, $\angle OAB=\angle OBA=90°-\alpha$, $\angle BAK=2\angle BAO=180°-2\alpha$, $\angle ABC=4\angle ABO=360°-4\alpha$. Из условия $\alpha+(180°-2\alpha)+(360°-4\alpha)=180°$ найдем $\alpha=72°$.

192. $\beta-\alpha$. Указание. Обозначим $\angle ABC=\varphi$ (рис. 157). Тогда $\angle ADC=360°-\alpha-\beta-\varphi$. Далее имеем $\angle BCK=90°-\frac{\varphi}{2}$, $\angle CMD=\beta-90°+\frac{\varphi}{2}$, $\angle CDM=180°-2\angle CMD=360°-2\beta-\varphi$ и, наконец, $\angle MDA=\angle ADC-\angle CDM=(360°-\alpha-\beta-\varphi)-(360°-2\beta-\varphi)=\beta-\alpha$.

193. 0,8. Указание. Пусть прямая AM пересекает сторону CD трапеции в точке K (рис. 158). Если h — высота трапеции, а x — высота треугольника AKD, опущенная на сторону AD, то из условия следует соотношение $\frac{15}{2}h\cdot\frac{3}{4}=6x$, откуда $x=\frac{15}{16}h$. Таким образом, $CK:KD=1:15$, $CM=0{,}8$.

194. 4,8. Указание. Треугольники ABC и PBK подобны. Коэффициент подобия равен $|\cos B|$ (см. задачу 36).

195. 90°. Указание. Докажите, что проведенная прямая перпендикулярна одной из сторон, а исходный треугольник является прямоугольным.

196. 1) $\angle A=\angle B=36°$, $\angle C=108°$; 2) $\angle A=132°$, $\angle B=12°$ (или $\angle A=12°$; $\angle B=132°$), $\angle C=36°$. Указание. Возможны два случая. Первый случай: обе биссектрисы пересекают продолжения сторон AC и BC за точку C (рис. 159, a). Обозначим $\angle CAB=\varphi$. Тогда $\angle AMB=\angle MAB=\varphi$, $\angle MBC=\angle MBP=2\varphi$,

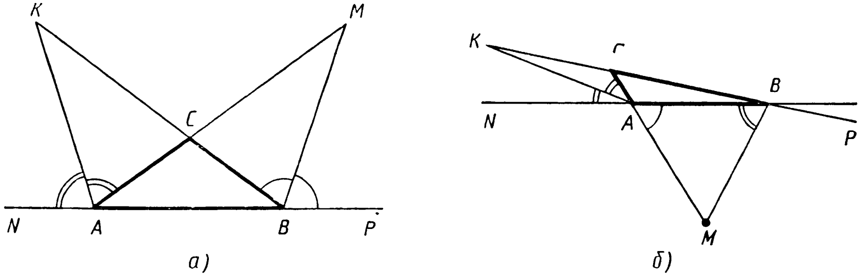


Рис. 159

$\angle BKA = \angle KBA = 180° - 4\varphi$, $\angle KAC = \angle KAN = 360° - 8\varphi$. Сложив три угла с вершиной A, получим $2(360° - 8\varphi) + \varphi = 180°$, $\varphi = 36°$. Второй случай (рис. 159, *б*): с точностью до перестановки A и B. Обозначив $\angle CAB = \varphi$, последовательно находим $\angle BAM = \angle BMA = 180° - \varphi$, $\angle ABM = \angle MBP = 2\varphi - 180°$, $\angle CBA = \angle BKA = 540° - 4\varphi$, $\angle KAN = \angle KAC = 1080° - 8\varphi$ и, наконец, из уравнения $2(1080° - 8\varphi) + \varphi = 180°$ находим $\varphi = 132°$. Формально следовало бы рассмотреть и третий случай, когда обе биссектрисы пересекают продолжения CA и CB соответственно за точки A и B. Нетрудно показать, что этот случай невозможен.

197. $0{,}5\sqrt{97}$. Указание. Можно показать, что угол A не может быть тупым. Обозначив $AD = CB = x$, $DB = 3 - x$ и записав теорему Пифагора для треугольника CBD, получим для x уравнение.

198. $\frac{ab}{a+b}$. Указание. Пусть одна из сторон четырехугольника разделена вершиной ромба в отношении $x:y$ (рис. 160). Из подобия соответствующих треугольников найдем, что сторона ромба, выраженная через диагональ b, равна $\frac{yb}{x+y}$, а ее выражение через диагональ a будет $\frac{xa}{x+y}$. Из равенства $\frac{xb}{x+y} = \frac{ya}{x+y}$ найдем $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, а затем определим сторону ромба.

199. $O < S \leqslant \frac{c^2}{4}$. Указание. Пусть x и y — катеты треугольника. Нам надо определить, в каких пределах может меняться $S = \frac{1}{2}xy$ при условии $x^2 + y^2 = c^2$, $x > 0$, $y > 0$. Из неравенства $x^2 + y^2 \geqslant 2xy = 4S$ следует, что $S \leqslant c^2/4$.

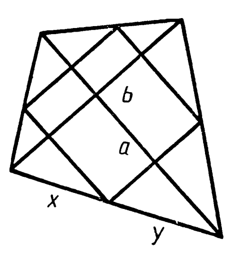


Рис. 160

200. $a - b + c - d + e$. Указание. Используя равенство касательных, проведенных к данной окружности из одной точки, так же, как это делалось для описанного четырехугольника, можно доказать, что в

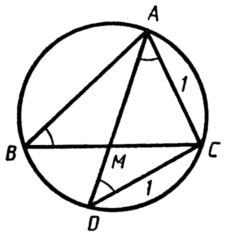


Рис. 161

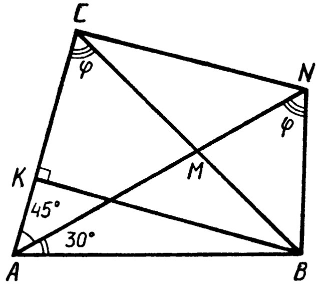


Рис. 162

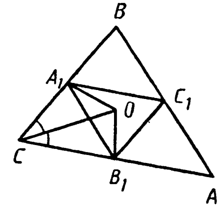


Рис. 163

описанном шестиугольнике (и вообще, в описанном $2n$-угольнике) суммы сторон, взятых через одну, равны.

201. $0{,}8\sqrt{6}$. Указание. Докажите, что из условия (точки A, D, E и C лежат на одной окружности) следует равенство $AB=BC$.

202. $1{,}2\sqrt{3}$. Указание. Если R — искомый радиус, то $S_{ABC}=0{,}5\,(AB+BC)\,R$.

203. $7/4$. Указание. Сначала найдем отношение $\frac{KQ}{QC}$ (см. задачу 8 вводной части). Затем найдем площадь треугольника KBC и, наконец, площадь ABC.

204. 8. Указание. $ABCH$ равнобочная трапеция. Следовательно, $BH=AC$ и $\angle CAE=60°$. Записав теорему косинусов для треугольника CAE, получим уравнение, из которого найдем AC.

205. $\sqrt{5}$. Указание. Произведение площадей треугольников ABE и CDE равно произведению площадей треугольников BCE и ADE (см. решение задачи 25 вводной части). Следовательно, если x и y — площади треугольников BCE и ADE, то $xy=49$, $x+y\leqslant 14$. Из этой системы получим $x=y=7$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

206. $\sqrt{2}$. Указание. Пусть M — середина BC (рис. 161). Имеем $\angle CAD=\angle CDA=\angle CBA$. Таким образом, треугольники MAC и ABC подобны. Из подобия находим $CB:CA=CA:CM$, а поскольку $CM=\frac{1}{2}CB$, то $CB^2=2\,CA^2=2$.

207. $(\sqrt{3}-1)\left(c+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Указание. Пусть $\angle BCA=\varphi$, R — радиус описанной окружности, $\angle ACN=\varphi+30°$. Тогда $AN=$ $=2R\sin(\varphi+30°)=c\,\frac{\sin(\varphi+30°)}{\sin\varphi}=c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)$. Найдем $\operatorname{ctg}\varphi$. Проведем высоту BK (рис. 162): $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{CK}{BK}=\frac{AC-AK}{BK}=$

$$=\frac{b-c\cos 75°}{c\sin 75°}=\frac{b-c\cos(45°+30°)}{c\sin(45°+30°)}=\frac{4b-c(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{c(\sqrt{6}+\sqrt{2})}.$$

208. 10. Указание. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC; O — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 163). В треугольниках COA_1 и COB_1 сторона CO общая, $OA_1=OB_1$, $\angle OCA_1=\angle OCB_1$ (по условию). Из решения задачи 5 следует, что или эти треугольники равны, или углы CA_1O и CB_1O в сумме составляют 180°. В первом случае будет $AC=CB=4$, что невозможно, поскольку $4+4<2\sqrt{19}$. Во втором случае четырехугольник CA_1OB_1 является вписанным. Но $\angle A_1OB_1=2\angle A_1C_1B_1=2\angle ACB$. Значит, $\angle ACB=60°$, поскольку $\angle ACB+\angle A_1OB_1=180°$. Далее, как обычно, с помощью теоремы косинусов получаем уравнение, из которого находим AC.

209. $1+\frac{5\pi}{18}$. Указание. Пусть BM — высота треугольника (рис. 164). Из условия следует, что каждый из углов ABM и CBM больше 45°. В самом деле, если один из них меньше 45°, то второй будет больше 95°, что невозможно, так как оба они — углы в прямоугольных треугольниках. Таким образом, окружность с центром в B и радиуса $\sqrt{2}$ пересекает отрезки MA и MC, а общая часть круга и треугольника представляет собой объединение равнобедренного прямоугольного треугольника KBP с катетами, равными $\sqrt{2}$, и двух секторов круга радиуса $\sqrt{2}$, сумма центральных углов которых равна 50°.

210. $\alpha/2$. Указание. Пусть K — середина AC (рис. 165), $NK=\frac{1}{2}AB$, $\angle NKC=\alpha$, $MK=MC-KC=\frac{1}{2}(CD+CA)-\frac{1}{2}CA=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=NK$. Таким образом, треугольник NKM равнобедренный и $\angle NMC=\frac{1}{2}\angle NKC=\frac{\alpha}{2}$.

211. $\sqrt{7}$. **212.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$. Указание. Заметим, что треугольник BMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\cos\beta$ (см. задачу 36), а MN перпендикулярна OB (задача 9). Таким образом, если R — радиус описанной около ABC окружности, то $S=\frac{1}{2}R\cdot MN$, $MN=AC\cos\beta$, $R=\frac{AC}{2\sin\beta}$. Из этих соотношений следует, что $AC=2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$.

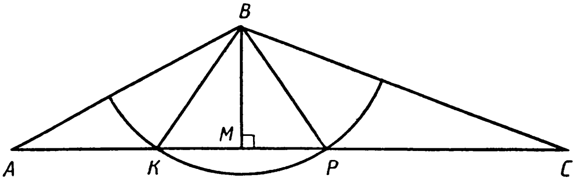


Рис. 164

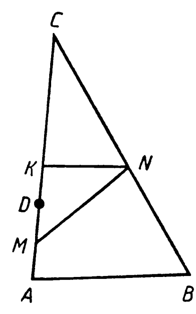


Рис. 165

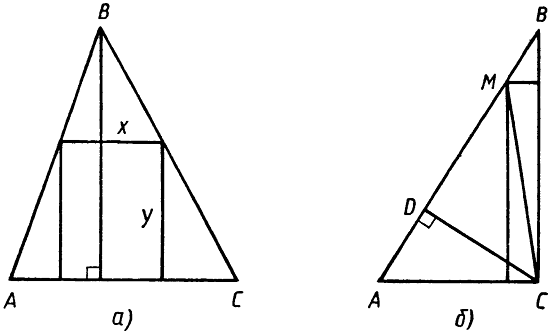


Рис. 166

213. $\frac{6^4 \cdot 17}{5^6}$. Указание. Пусть x и y — стороны прямоугольника (рис. 166, a). Нетрудно получить систему уравнений $\frac{x}{3} = \frac{4-y}{4}$, $x^2+y^2=\left(\frac{87}{25}\right)^2$. Выражая из первого y через x и подставляя во второе уравнение, получим для x квадратное уравнение $\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x+16-\left(\frac{87}{25}\right)^2=0$. Если D — дискриминант этого уравнения, то $\frac{1}{4}D=\left(\frac{16}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\cdot\left[16-\left(\frac{87}{25}\right)^2\right]=\left(\frac{16}{3}\right)^2-\left(\frac{20}{3}\right)^2+\left(\frac{29}{5}\right)^2= =\left(\frac{29}{5}\right)^2-\left(\frac{20}{3}+\frac{16}{3}\right)\left(\frac{20}{3}-\frac{16}{3}\right)=\left(\frac{29}{5}\right)^2-4^2=\left(\frac{29}{5}-4\right)\left(\frac{29}{5}+4\right)= =\left(\frac{21}{5}\right)^2$. Получаем $x_1=\frac{51}{125}$ и $x_2=\frac{429}{125}$. Второе не подходит, так как $x_2>3$. *Замечание.* Можно существенно облегчить вычисления за счет некоторых геометрических соображений. Заметим, что ответ в нашей задаче одинаков для любых треугольников со стороной 3 и высотой, опущенной на эту сторону, равной 4, если основание высоты не выходит за сторону (углы, прилежащие к этой стороне, не тупые). Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 (рис. 166, *б*). Вершина прямоугольника, противолежащая C, есть точка пересечения окружности радиуса 3,48 с гипотенузой AB — точка M. Поскольку $3<3{,}48<4$, то такая точка одна. Высота CD равна $\frac{12}{5}$. Значит, $MD= =\sqrt{\left(\frac{87}{25}\right)^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{87}{25}-\frac{12}{5}\right)\left(\frac{87}{25}+\frac{12}{5}\right)}=\sqrt{\frac{27}{25}\cdot\frac{147}{25}}= =\sqrt{\frac{3^4 7^2}{5^4}}=\frac{63}{25}$. Теперь нетрудно найти AM и MB, а затем площадь прямоугольника.

214. $\sqrt{ab}$. Указание. Пусть M — точка пересечения прямой AB и касательной (рис. 167), α — угол между ними. Имеем $MB \cdot MA = MC^2$ (задача 17). Умножим это равенство на $\sin^2\alpha$, получим $(MB\sin\alpha)\cdot(MA\sin\alpha)=(MC\sin\alpha)^2$. Но $MA\sin\alpha=a$, $MB\sin\alpha=b$, а $MC\sin\alpha$ есть искомое расстояние.

215. $\frac{abc}{mna+nkb+kmc}$. Указание. Обозначения понятны из рисунка 168. Если α — величина угла BAC, то $\angle C_1MB_1 = 180^\circ-\alpha$. Следовательно, $S_{C_1MB_1}=\frac{1}{2}mn\sin\alpha=\frac{mn}{bc}S_{ABC}$. Аналогично $S_{C_1MA_1}=\frac{nk}{ca}S_{ABC}$, $S_{A_1MB_1}=\frac{km}{ab}S_{ABC}$. Сложив эти три равенства, получим $S_{A_1B_1C_1}=\left(\frac{mn}{bc}+\frac{nk}{ca}+\frac{km}{ab}\right)\cdot S_{ABC}$.

216. $\sqrt{240}+\sqrt{20}$, $\sqrt{240}-\sqrt{20}$, $\sqrt{80}+\sqrt{60}$, $\sqrt{80}-\sqrt{60}$. Указание. На рисунке 169 $AC=10\sqrt{3}$, $BD=12$, OP и OK — расстояния от O до диагоналей AC и BD — легко находятся: $OP=\sqrt{100-75}=5$, $OK=\sqrt{100-36}=8$. Поскольку P и K — середины диагоналей AC и BD, нетрудно найти отрезки AM, MC, BM и MD, а затем и стороны четырехугольника $ABCD$. Заметим, что ответы могут быть записаны и иначе. Например, $\sqrt{80}-\sqrt{60}=\sqrt{140-80\sqrt{3}}$.

217. $n=2{,}3$. Если $n=3$, отношение равно 1; если $n=2$, возможны два значения отношения: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Указание. Пусть $AB=A'B'=x$, $AC=A'C'=y$, $BC=z$, $B'C'=z\sqrt{n}$, $n\neq 1$. Записав теорему косинусов для каждого треугольника, получим $z^2=x^2+y^2-xy$, $nz^2=x^2+y^2+xy$. Умножая первое уравнение на n и вычитая из второго, будем иметь $(1-n)x^2+(1+n)xy+(1-n)y^2=0$. Разделив это уравнение на y^2, получим уравнение квадратное относительно $\frac{x}{y}$. Условие неотрицательности дискриминанта даст нам неравенство $3n^2-10n+3\leqslant 0$, откуда $n=2,\ 3$.

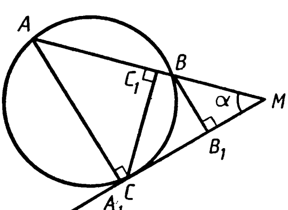


Рис. 167

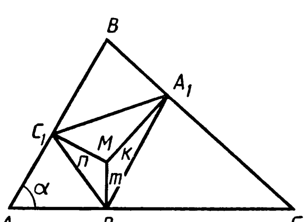


Рис. 168

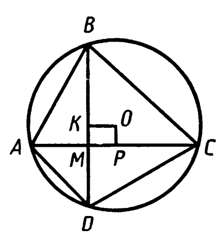


Рис. 169

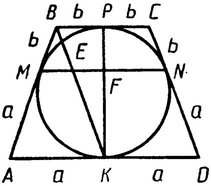


Рис. 170

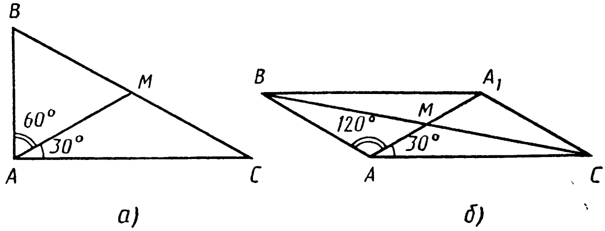


Рис. 171

218. 1:3. Указание. На рисунке 170 P — середина BC. Докажем, что E — середина MF. Пусть $AM=AK=a$, $BM=BP=b$. Из подобия треугольников BME и BAK найдем $ME=\frac{ab}{a+b}$. Из подобия треугольников EFK и BPK, учитывая, что $\frac{FK}{FP}=\frac{AM}{MB}=\frac{a}{b}$, найдем $EF=\frac{ab}{a+b}$. Равенство $ME=EF$ доказано.

219. $\frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. См. задачу 28.

220. 12. Указание. Если $ABCD$ — прямоугольник, то для произвольной точки M выполняется равенство $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. Для доказательства можно поступить, например, следующим образом. Пусть x, y, z, t — расстояния от M до прямых AB, BC, CD и DA соответственно. Имеем $MA^2+MC^2=(x^2+t^2)+(y^2+z^2)=(x^2+y^2)+(t^2+z^2)=MB^2+MD^2$. Из сформулированного выше утверждения будет следовать, что если $MA=3$, $MB=5$, $MC=4$, то $MD=0$, т. е. точка M совпадает с вершиной D прямоугольника.

221. $\sqrt{3}/2$ или $\sqrt{3}$. Указание. Пусть в треугольнике ABC медиана AM равна 1, а высота, опущенная из вершины B, также равна 1, а высота, опущенная из вершины C, равна $\sqrt{3}$. Тогда расстояния от M до сторон AC и AB равны соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а это означает, что $\sin MAC=\frac{1}{2}$, $\sin MAB=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, угол MAC равен 30° или 150°, а угол MAB равен 60° или 120°. Перебирая варианты, легко убедимся, что существуют две возможности. Первая (рис. 171, *а*): $\angle MAC=30°$, $\angle MAB=60°$. Вторая: $\angle MAC=30°$, $\angle MAB=120°$ (рис. 171, *б*). В первом случае треугольник ABC прямоугольный, его площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Во втором случае продолжим AM за точку M и возьмем на продолжении точку A_1 так, что $AM=MA_1$. ABA_1C — параллелограмм. Треуголь-

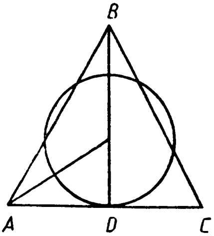


Рис. 172

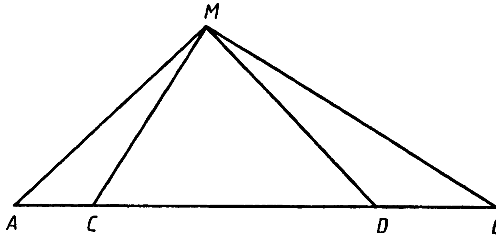


Рис. 173

ник ACA_1 равновелик треугольнику ABC. В треугольнике ACA_1 $AA_1=A_1C=2$, $\angle AA_1C=120°$, площадь треугольника равна $\sqrt{3}$.

222. $\frac{5}{9}$. Указание. Пусть окружность радиуса r касается стороны AC треугольника ABC в точке D (рис. 172). Поскольку эта окружность концентрична с окружностью, описанной около ABC, то D — середина AC. Теперь из условия (окружность радиуса r делит стороны AB и BC на три равные части) на основании теоремы, сформулированной в задаче 17, будет следовать равенство $AB=BC$. Используя эту же теорему, получим, что $\frac{2}{9}AB^2=AD^2=R^2-r^2$. С другой стороны, $AD^2=AB^2-BD^2=AB^2-(R+r)^2$. Из этих соотношений получим $R^2-r^2=\frac{9}{2}(R^2-r^2)-(R+r)^2$, откуда $\frac{r}{R}=\frac{5}{9}$.

223. $\frac{1}{2}(S_1+S_2)+\sqrt{\frac{1}{4}(S_1+S_2)^2-S_1S_2\sin^2\alpha}$. Указание (рис. 173). Обозначим площади треугольников AMB и CMD соответственно x и y. Поскольку $S_{AMD}+S_{CMB}=S_{AMB}+S_{CMD}$, то $x+y=S_1+S_2$. Далее, $xy=\left(\frac{1}{2}AM\cdot MD\right)\cdot\left(\frac{1}{2}CM\cdot MB\right)\sin^2\alpha=S_1S_2\sin^2\alpha$. Таким образом, x и y — корни квадратного уравнения $t^2-(S_1+S_2)t+S_1S_2\sin^2\alpha=0$, причем x — его больший корень.

224. $\frac{a}{2}$. Указание. Если M — точка пересечения прямых l и p общей внешней и общей внутренней касательной, а O_1 и O_2 — центры окружностей, то MO_1 и MO_2 — биссектрисы двух смежных углов, образованных прямыми l и p, а из этого следует, что $\angle O_1MO_2=90°$. Таким образом, все точки, о которых говорится в условии, лежат на одной окружности с диаметром O_1O_2.

225. Указание. Обозначения понятны из рисунка 174. Учитывая равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $KM=KB$, $LA=LN$ или $KE+EM=KL+LB$,

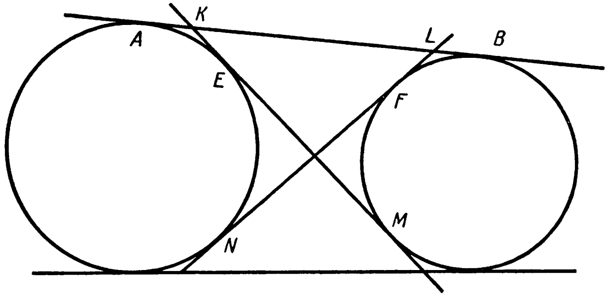


Рис. 174

$LK+KA=LF+FN$. Вычитая эти равенства одно из другого, получим (поскольку $KE=KA$, $LF=LB$, $EM=FN$) $EM-LK=$ $=LK-EM$, откуда $EM=LK$.

226. Указание. Пусть $OD=x$. Записывая для треугольника DOA теорему косинусов, получим для x уравнение x^2-xR- $-R^2=0$, откуда $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}R$. Следовательно, $CD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ и равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R (см. задачу 34). Теперь найдем $MD=\frac{\sqrt{5}+3}{2}R$. Нам надо оценить разность $1{,}2MD-\pi R$. Приближенные вычисления (можно с использованием микрокалькуляторов) дают неравенство $\left|\frac{3(\sqrt{5}+3)}{5}-\pi\right|<0{,}00005$ ($\sqrt{5}\approx 2{,}236068$; точнее, $\sqrt{5}$ отличается от указанного значения на величину, меньшую чем 10^{-6}). Таким образом, погрешность приближенного равенства, о котором говорится в задаче, не превосходит 0,00005 радиуса.

227. $113\sqrt{3}-168$. Указание. Если сторона правильного треугольника равна x, а меньший из углов, образуемых сторонами треугольника со стороной прямоугольника, равной 7, есть φ (рис. 175), то $x\cos\varphi=7$, $x\cos(30°-\varphi)=8$. Раскрывая во втором уравнении $\cos(30°-\varphi)$ по формуле косинуса разности и деля второе уравнение на первое, найдем $\operatorname{tg}\varphi=\frac{16-7\sqrt{3}}{7}$. Затем из равенства $x^2=\frac{49}{\cos^2\varphi}=49(\operatorname{tg}^2\varphi+1)$ находим x^2.

228. 7,5. Указание. Большое основание трапеции видно из концов меньшего основания под тупыми углами. (Докажите.) Из этого следует, что окружность, построенная на большем основании как на диаметре, содержит трапецию. Очевидно, это и есть наименьшая окружность.

229. $3\frac{1}{12}$. Указание. Обозначим через P и Q точки пересечения MN с прямыми AB и BC. Искомый радиус равен наименьшему из двух: радиусу окружности, касающейся сторон AB и CD (он равен 3,5), и радиусу окружности, вписанной в треугольник BPQ. При нахождении последнего можно воспользоваться формулой, данной в задаче 26.

230. 120°. Указание. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC; H — точка их пересечения. Известно (см. задачу 16 вводной части), что для остроугольного треугольника ABC точка H есть точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. центр вписанной в него окружности. Предположим, что данный треугольник является остроугольным. Пусть B — наибольший угол, $\angle B \geqslant 60°$ (рис. 176). Из того, что точки B, C, B_1 и C_1 лежат на одной окружности (с диаметром BC), следует, что $\angle AB_1C_1 = ABC$, а значит, $\angle C_1B_1H = 90° - \angle ABC \leqslant 30°$. Поскольку BB_1 — наименьшая высота треугольника ABC, то радиус окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, будет $r = HB_1 \sin C_1B_1H < BB_1 \sin 30° = \frac{1}{2}BB_1$. Если в треугольнике ABC угол B тупой (легко проверить, что этот треугольник не может быть прямоугольным), то аналогично тому, как решалась задача 16 вводной части, можно доказать, что B — центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$. При этом $\angle BB_1A_1 = \angle ABC - 90°$. Из равенства $0{,}5BB_1 = BB_1 \sin BB_1A_1 = -BB_1 \cos ABC$ найдем $\cos ABC = -0{,}5$.

231. $(1+\sqrt{11})/2$. Указание. Если M — середина AC, то из перпендикулярности BM и биссектрисы угла BCM будет следовать равнобедренность треугольника BCM ($BC = CM$), т. е. $AC = 2$. Пусть O и D — соответственно центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. По условию O, D, C и A лежат на одной окружности. Возможны два случая. Первый случай: O и D — по одну сторону от AC. Если $\angle ABC = \varphi$, то $\angle AOC = 2\varphi$, $\angle ADC = 90° + \frac{\varphi}{2}$ (см. задачу 33). Значит,

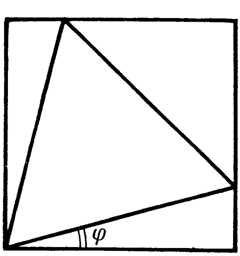


Рис. 175

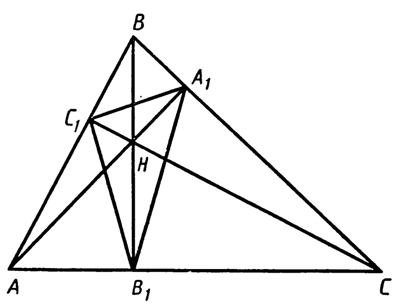


Рис. 176

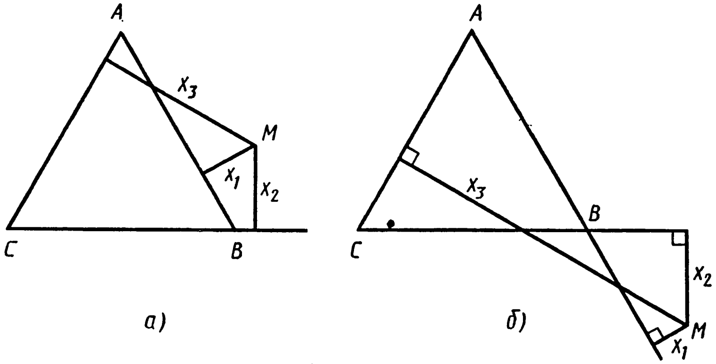


Рис. 177

$90° + \frac{\varphi}{2} = 2\varphi$, $\varphi = 60°$. Второй случай: O и D — по разные стороны от AC. Докажите, что в этом случае точки O, D, C и A не могут лежать на одной окружности.

232. $2\sqrt{3}/3$. Указание. Пусть ABC правильный треугольник со стороной a. Возможны три случая расположения точки M. Первый случай: M — внутри ABC. Тогда (см. задачу 32) высота треугольника ABC равна 11, $a = \frac{22}{\sqrt{3}}$, а его площадь больше 14. Второй случай: M — вне треугольника ABC и внутри угла BCA (или другого угла треугольника, рис. 177, a). Пусть расстояния от M до прямых AB, BC и CA соответственно равны x_1, x_2, x_3. Имеем $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S_{CBM} + S_{ACM} - S_{BAM} = \frac{a}{2}(x_2 - x_1 + x_3)$. Но x_1, x_2, x_3 в некотором порядке равны числам 2, 3 и 6. Следовательно, так как $x_2 - x_1 + x_3 > 0$, $x_2 - x_1 + x_3 \geqslant 5$, $a \geqslant \frac{10}{\sqrt{3}}$, $S_{ABC} > 14$. Третий случай: M — внутри одного из трех углов, вертикальных по отношению к углам треугольника ABC

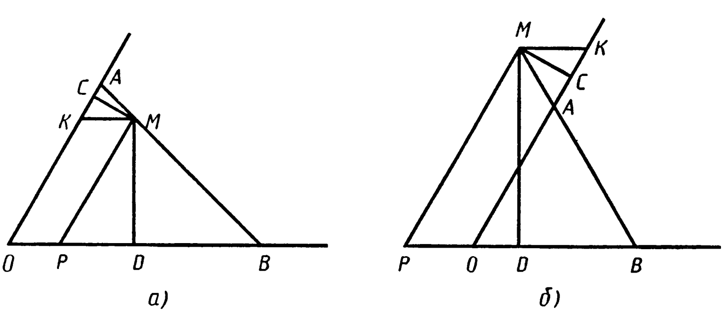


Рис. 178

(рис. 177, *б*). Из равенства $S_{ABC}=S_{AMC}-S_{AMB}-S_{BMC}$ и условия задачи будет следовать, что $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

233. $4\sqrt{3}$. Указание. Возможны два случая: M — внутри данного угла (рис. 178, *а*) и M — вне угла (рис. 178, *б*). Рассмотрим первый случай. Возьмем на сторонах угла точки K и P так, что $OKMP$ — параллелограмм. Если расстояние от M до прямой OK равно $\sqrt{3}$, то $KM=2$, $MP=6$. Обозначим $OA=x$, $OB=y$. Из подобия треугольников AMK и ABO получим $\frac{x-6}{2}=\frac{x}{y}$. Второе уравнение получаем из условия, что периметр треугольника OAB равен 12: $x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=12$. Получившаяся система не имеет решения. Во втором случае для тех же неизвестных будем иметь систему $\frac{6-x}{2}=\frac{6}{y+2}$, $x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=12$. Эта система имеет решение $x=y=4$. (В первом уравнении освобождаемся от знаменателя, во втором уединяем корень, возводим обе части в квадрат и т. д.)

234. $16(4-\sqrt{7})/9$. Указание. Пусть $AKMN$ — ромб, о котором говорится в условии задачи (рис. 179). Обозначим его сторону через x. Из подобия треугольников BCD и BMK найдем $KB=\frac{5}{4}x$. Записав теорему косинусов для треугольника $ABK\left(\cos ABK=\frac{4}{5}\right)$, получим уравнение, из которого определим x.

235. $\sqrt{5}/2$. Указание. Докажите, что вершина ромба, противоположная A, совпадает с серединой BD.

236. $2r^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$. Указание. В треугольнике BMN сторона $BM=2r\sin BAM=2r\sin\alpha$ (рис. 180, *а*), такой же будет и сторона BN. Угол между этими сторонами равен углу $DCM=180°-2\alpha$ (следует рассмотреть также другие возможности расположения точек, например, как показано на рисунке 180, *б*).

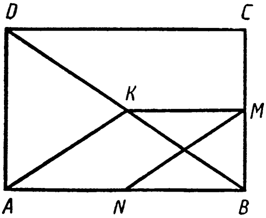


Рис. 179

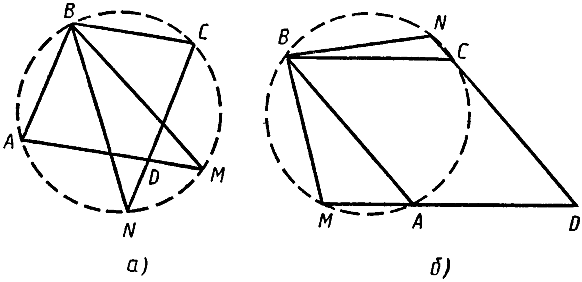


Рис. 180

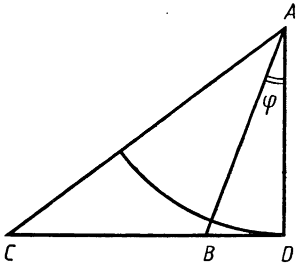


Рис. 181

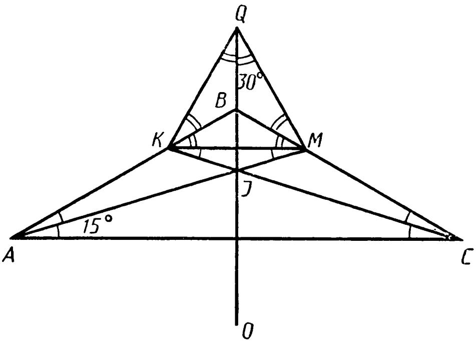


Рис. 182

237. $2\frac{2}{3}$. Указание. Докажите подобие треугольников DCM и MBN (рис. 180, *а, б*).

238. $\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Указание. Надо рассмотреть два случая. Первый случай: треугольник ABC остроугольный. В этом случае задача не имеет решения. Второй случай: один из углов при вершинах B и C тупой. Пусть тупым будет угол ABC, AD — высота треугольника (рис. 181). Обозначим $\angle BAD=\varphi$, $AD=h$. Тогда $S_{ABC}=S_{ACD}-S_{ABD}=\frac{h^2}{2}\left(\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)-\right.$ $\left.-\operatorname{tg}\varphi\right)$. Площадь сектора с радиусом h и центральным углом $\frac{\pi}{6}$ равна $\frac{\pi h^2}{12}$. Получаем для φ уравнение $\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{tg}\varphi=\frac{\pi}{3}$.

239. $\sqrt[4]{12}\,(2-\sqrt{3})$. Указание. На рисунке 182 AM и CK — биссектрисы треугольника ABC; O, I и Q — центры соответственно окружностей: описанной около ABC, вписанной в ABC и проходящей через точки K, M, I. Радиус описанной окружности равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Докажем, что $BM=BQ$. Точки O, I, B и Q лежат на одной прямой. Поскольку Q — центр окружности, описанной около треугольника KIM, то $\angle IQM=2\angle MKI=2\angle KCA=30°$. Значит, $\angle BMQ=\angle MBI-\angle MQB=30°=\angle BQM$. Таким образом, $BQ=BM$. Следовательно, расстояние между центрами рассматриваемых окружностей равно $OQ=OB+BM=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+3}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. (Для нахождения BM можно воспользоваться теоремой о биссектрисе внутреннего угла треугольника — задача 19.) Радиус окружности, описанной около треугольника KIM, равен $KM=\frac{BM}{BC}\times$ $\times AC=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Таким образом, мы знаем радиусы окружностей

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right.$ и $\left.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ и расстояние между их центрами $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$; надо определить длину общей хорды. Задача сводится к нахождению высоты в треугольнике со сторонами $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, опущенной на сторону $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Хорда в два раза больше этой высоты.

240. $ar/(a+2r)$. Указание. На рисунке 183 O — центр вписанной в треугольник ABC окружности; M и K — центры окружностей, указанных в условии. Поскольку прямая MK параллельна BC, то треугольники OMK и OBC подобны. Если x — радиусы окружностей с центрами в M и K, то $MK=2x$; высота треугольника OBC, опущенная на сторону BC, равна r; соответствующая высота треугольника OMK равна $r-x$. Следовательно, $\frac{r-x}{r}=\frac{2x}{a}$.

241. Если $\alpha<\frac{\pi}{3}$, то — два решения: $R^2\sin\alpha\left(1\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; если $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha<\pi$, то — одно решение: $R^2\sin\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Указание. Возможны два случая, изображенные на рисунке 184, *а, б*. В первом случае BC — меньшее основание трапеции и CO параллельна AB, а BO параллельна CD. Во втором случае параллельными являются прямые AB и OD, CD и OA. В первом случае $\angle BOC=\angle OBA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, и, если $\alpha>\frac{\pi}{3}$, $\angle AOD=\frac{3}{2}(\pi-\alpha)$ (если $\alpha<\frac{\pi}{3}$, то O — вне трапеции и угол AOD равен $\left.\frac{3}{2}\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, $S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{COD}+$ $+S_{AOD}=R^2\sin\alpha+\frac{R^2}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{R^2}{2}\cos\frac{3}{2}\alpha=R^2\sin\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Во втором случае $\angle BOC=\angle BOD-\angle COD=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\alpha=$ $=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\alpha$. Этот случай возможен, если $\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\alpha>0$, $\alpha<\frac{\pi}{3}$.

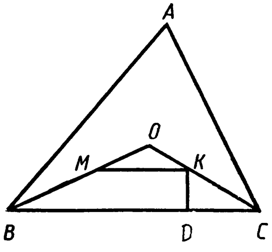


Рис. 183

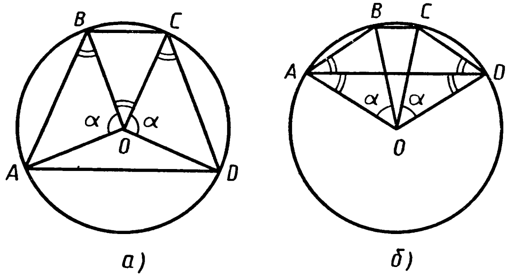


Рис. 184

242. $\frac{c}{6}(3\sqrt{2}-4) \leqslant d < \frac{c}{3}$, где d — расстояние между центром вписанного круга и точкой пересечения медиан. Указание. Пусть O — центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB; M — середина AB (рис. 185). Если A и B фиксированы, а C меняется, то O движется по дуге окружности; концами этой дуги являются точки A и B, а $\angle AOB = 135°$ (см. задачу 33). Точка пересечения медиан треугольника ABC (точка H) описывает полуокружность с центром в точке M и радиуса $\frac{c}{6}$. Если Q — центр окружности, описанной около треугольника AOB, то расстояние между точкой O и точкой пересечения медиан треугольника ABC не может быть меньше, чем отрезок прямой QM, заключенный между двумя указанными дугами; $KP = QK - PM - MQ = QA - \frac{c}{6} - MQ = \frac{c}{2}\sqrt{2} - \frac{c}{6} - \frac{c}{2} = \frac{c}{6}(3\sqrt{2}-4)$. С другой стороны, угол COH тупой, поскольку перпендикуляр к CO в точке O (CO проходит через Q) пересекает отрезок CH. Следовательно, $OH < CH = \frac{c}{3}$. Если C приближается к A (или B), то CH становится близким к $\frac{c}{3}$.

243. $\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2} \leqslant \cos\varphi < 1$. Указание. Пусть диагонали параллелограмма равны $2m$ и $2n$, φ — острый угол между ними. Для определенности будем считать, что $b \geqslant a$. По теореме косинусов $m^2+n^2-2mn\cos\varphi = a^2$, $m^2+n^2+2mn\cos\varphi = b^2$. Складывая и вычитая эти равенства, получим $2(m^2+n^2) = a^2+b^2$, $4mn\cos\varphi = b^2-a^2$. Таким образом, $\cos\varphi = \frac{b^2-a^2}{4mn} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \times \frac{m^2+n^2}{2mn} \geqslant \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$, так как $\frac{m^2+n^2}{2mn} \geqslant 1$.

244. $\frac{2abc}{ab+bc+ca}$. Указание. Обозначения понятны на рисунке 186. Пусть коэффициенты подобия треугольников AB_1C_1, A_2BC_2, A_3B_3C по отношению к треугольнику ABC равны соответственно x, y, z. Имеем $AB_1 = x \cdot AB$, $A_2B = yAB$, $AB + A_2B_1 =$

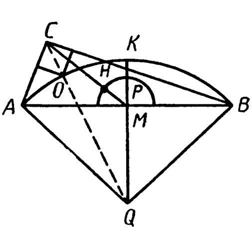


Рис. 185

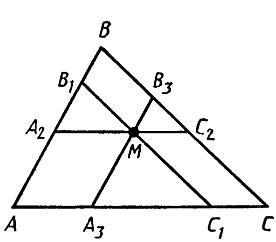


Рис. 186

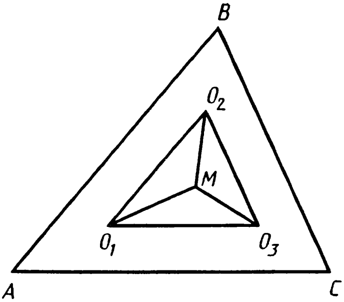


Рис. 187

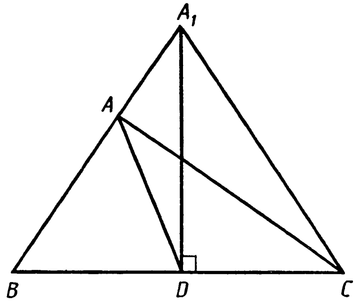


Рис. 188

$=AB_1+A_2B=xAB+yAB$. Таким образом, $A_2B_1=(x+y-1)AB$. Но треугольник A_2B_1M также подобен треугольнику ABC, его коэффициент подобия будет $x+y-1$. Рассмотрим теперь сторону AC, $AA_3=A_2M=(x+y-1)AC$, $A_3C=zAC$. Значит, $AC=AA_3+$ $+A_3C=(x+y-1)AC+zAC=(x+y+z-1)AC$, откуда $x+y+$ $+z=2$. По условию $B_1C_1=A_2C_2=A_3B_3=m$, или $xa=yb=zc=$ $=m$. В соответствии с только что доказанным $x+y+z=\frac{m}{a}+$ $+\frac{m}{b}+\frac{m}{c}=2$, $m=\frac{2abc}{ab+bc+ca}$.

245. $\frac{Rr}{R+r}$. У к а з а н и е. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, указанных в условии (рис. 187). Поскольку каждая из окружностей касается соответствующих сторон треугольника, то AO_1, BO_2, CO_3 — биссектрисы соответствующих углов. Значит, прямые AO_1, BO_2, CO_3 пересекаются в точке O — центре окружности, вписанной в треугольник ABC. Треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны, их стороны соответственно параллельны, у них общий центр вписанной окружности. Если x — радиусы окружностей с центрами O_1, O_2 и O_3, то радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, равен $r-x$. С другой стороны, радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, равен x (по условию окружности с центрами в O_1, O_2 и O_3 и радиусами x имеют общую точку). Следовательно, $\frac{r-x}{r}=\frac{x}{R}$.

246. $\angle BAC=90°$. У к а з а н и е. Восставим к BC в точке D перпендикуляр и обозначим через A_1 его точку пересечения с прямой BA (рис. 188). Поскольку $BA\neq AC$, то точка A_1 отлична от A; $\angle DAC=\angle DA_1C$, так как $\angle DAC=90°-\angle ABC$ (по условию), и $\angle DA_1C=90°-\angle A_1CD=90°-\angle ABC$. Следовательно, точки C, D, A и A_1 лежат на одной окружности. Так как $\angle CDA_1=90°$, то CA_1 — диаметр этой окружности.

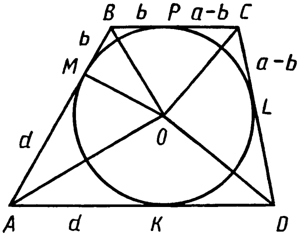


Рис. 189

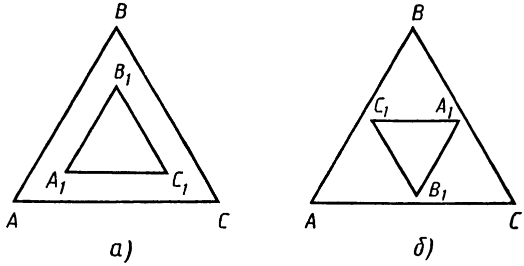


Рис. 190

247. $2\frac{1}{4}$. **248.** $\frac{13}{15}a$. **249.** $\frac{1}{4}(a^2+a\sqrt{a^2+8b^2})$.

250. $\frac{a^2+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$. Указание. Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$; M, P, L и K — точки касания (рис. 189); $BC=a$, $BM=b$, $AM=d$; BO и AO — биссектрисы углов B и A трапеции, сумма этих углов равна $180°$, значит, $\angle ABO+\angle BAO=90°$ и треугольник BAO прямоугольный; OM — радиус окружности, OM — высота в прямоугольном треугольнике, опущенная на гипотенузу. Следовательно, радиус R окружности равен $\sqrt{bd}$. Затем находим последовательно длины отрезков: $BP=b$, $PC=a-b$, $CL=CP=a-b$. Треугольник COD также прямоугольный. Найдем $LD=\frac{OL^2}{CL}=\frac{bd}{a-b}$. Таким образом, мы определили все стороны трапеции и радиус вписанной окружности. Теперь можно найти ее площадь (см. задачу 23).

251. 6. Указание. Проведем через вершину C трапеции $ABCD$ прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с продолжением основания AD (см. также задачу 44). Получим треугольник ACD_1, равновеликий данной трапеции. Стороны AC и CD_1 этого треугольника равны соответствующим диагоналям трапеции. Докажите, что медиана этого треугольника, выходящая из вершины C, параллельна отрезку, соединяющему середины оснований трапеции. Значит, эта медиана равна этому отрезку. Мы пришли к задаче: определить площадь треугольника по двум сторонам и медиане, заключенной между ними. По поводу этой задачи см. вводную часть, с. 175.

252. 3. Указание. Из условия следует, что высота к стороне AC равна двум диаметрам вписанной окружности, т. е. равна 4. Если M, N и K — точки касания вписанной окружности с AB, BC и CA, то $BM=BN=r\operatorname{ctg}\frac{1}{2}ABC=1\cdot\sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}}=3$. Пусть $MA=AK=x$, $KC=CN=y$. Выражая площадь треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности, с одной стороны, и через основание и высоту — с другой, получим $(3+x+y)=(x+y)2$, $x+y=3$.

253. Если $\frac{1}{4}S\leqslant Q<S$, то искомое расстояние будет $\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sqrt{S}-\sqrt{Q})$. Если же $0<Q<\frac{1}{4}S$, то возможны два значения: $\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sqrt{S}\pm\sqrt{Q})$. У к а з а н и е. Возможны два случая расположения треугольника $A_1B_1C_1$ относительно треугольника ABC — рис. 190. В первом случае ограничение: $Q<S$, во втором: $Q<\frac{1}{4}S$.

254. $3r^2\frac{|1-k^2|}{1+k^2}$. У к а з а н и е. Обозначим через M точку пересечения прямых AB и CD, O_1 и O_2 — центры данных окружностей (середины AB и CD). Будем считать, что B и C — соответственно на отрезках AM и DM (рис. 191). Положим $MB=x$, $MC=y$. Тогда $BC^2=x^2+y^2$, $AD^2=(x+2r)^2+(y+2r)^2$, $O_1O_2^2=(x+r)^2+(y+r)^2$.

Получим систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=k^2(x+2r)^2+k^2(y+2r)^2,\\ 4r^2=(x+r)^2+(y+r)^2.\end{cases}$

Эта система симметрична относительно x и y. Решается с помощью обычной замены $x+y=u$, $xy=v$, $(x^2+y^2=u^2-2v)$. Из системы найдем $x+y=r\frac{1-5k^2}{1+k^2}$. Следовательно, $S_{ABCD}=\left|S_{AMD}-S_{BMC}\right|=\left|\frac{1}{2}(x+2r)(y+2r)-\frac{1}{2}xy\right|=|r(x+y)+2r^2|=3r^2\frac{|1-k^2|}{1+k^2}$.

255. $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}+1\right)^2$. У к а з а н и е. См. задачи 37 и 57.

256. $\frac{(a^2+b^2-c^2)c}{4ab}$. У к а з а н и е. (См. задачу 36.) Докажите, что треугольник CMN подобен треугольнику CAB с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{2}\cos C$. Значение $\cos C$ находится по теореме косинусов.

257. $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$. У к а з а н и е. Возьмем в качестве осей координат диагонали ромба $ABCD$ (рис. 192). Точка O_1 — центр окружности, проходящей через точки B и D. Соответственно точка O_2 — центр окружности, проходящей через точки A и C. Имеем $BC^2=OB^2+OC^2=(BO_1^2-OO_1^2)+(CO_2^2-OO_2^2)=R^2+r^2-(OO_1^2+OO_2^2)=R^2+r^2-a^2$.

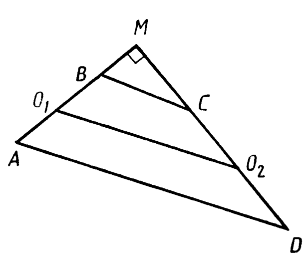


Рис. 191

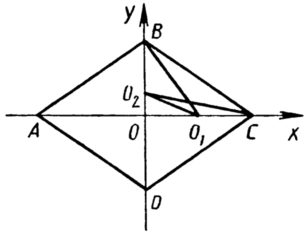


Рис. 192

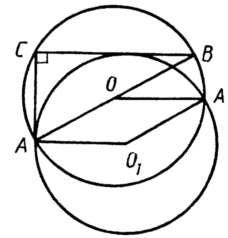


Рис. 193

258. $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$. Указание. Если острый угол ромба равен α, то диагонали ромба будут равны $2r\sin\alpha$ и $2R\sin\alpha$. С другой стороны, отношение диагоналей ромба есть тангенс половины этого угла, т. е. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{R}$, откуда $\sin\alpha=\frac{2Rr}{R^2+r^2}$.

259. $AB=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$, если B лежит внутри данного угла или вертикального к нему; $AB=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$ в остальных случаях. Если M и N — основания перпендикуляров, опущенных из B на стороны угла, то четырехугольник $AMBN$ вписанный, причем AB — диаметр окружности, описанной около него; $\angle MBN=\pi-\alpha$, если B — внутри данного угла или вертикального к нему, $\angle MBN=\alpha$ в остальных случаях, $AB=\frac{MN}{\sin\alpha}$.

260. $2\arcsin\frac{h_ah_b}{l(h_a+h_b)}$. Указание. Обозначим $AC=b$, $BC=a$, $\angle BCA=\alpha$. Имеем $b=\frac{h_a}{\sin\alpha}$, $a=\frac{h_b}{\sin\alpha}$, $l=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$ (см. задачу 27). Значит, $l=\frac{2h_ah_b\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha(h_a+h_b)}$, откуда $\sin\frac{\alpha}{2}=$ $=\frac{h_ah_b}{l(h_a+h_b)}$.

261. $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$. Указание. Пусть (рис. 193) O_1 — центр второй окружности. Из условия следует, что ее радиус равен одному из катетов. Пусть $CA=R$; так как R — радиус описанной окружности, то $\angle CBA=30°$, $CB=R\sqrt{3}$. Если O — середина AB, то $\angle OAO_1=30°$. Пусть A_1 — вторая точка пересечения окружностей, $\angle OA_1O_1=\angle OAO_1=30°$. Следовательно, общей хорде рассматриваемых кругов соответствуют дуги в $150°$, а общая их часть состоит из двух сегментов, соответствующих дугам $150°$, площадь каждого из которых равна $\frac{5}{12}\pi R^2-\frac{R^2}{4}$.

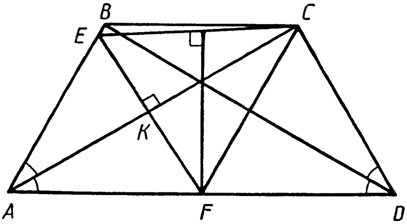


Рис. 194

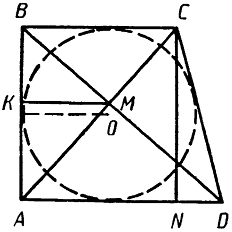


Рис. 195

262. $a^2\sqrt{3}/4$ или $2a^2\sqrt{3}$. Указание. Заметим, что AC и BD (рис. 194) — биссектрисы углов A и D трапеции, а сами эти углы равны 60°. (Докажите.) Поскольку AC перпендикулярна EF и AC — биссектриса угла A, равного 60°, то $AE=AF=EF$. Найдем $AO=2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $CO=a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Треугольники CKE и FKO прямоугольные, подобные. Из подобия следует, что $CK\cdot OK=EK\cdot KF=$ $=\frac{1}{4}EF^2=\frac{1}{3}AK^2$. Обозначим $AK=x$, тогда $KO=2a\frac{\sqrt{3}}{3}-x$, $CK=a\sqrt{3}-x$. Получаем уравнение $\left(2a\frac{\sqrt{3}}{3}-x\right)(a\sqrt{3}-x)=\frac{1}{3}x^2$, $2x^2-5a\sqrt{3}x+6a^2=0$. Из этого уравнения $x_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $x_2=2a\sqrt{3}$. Формально в рассматриваемом нами случае ($AK<AO$) подходит лишь x_1. Однако если K — на продолжении AC за точку C (K не может быть на OC, докажите), то $KO=x-2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $CK=$ $=x-a\sqrt{3}$, и мы получим для x то же самое уравнение. Таким образом, оба корня нам подходят.

263. $\sqrt{S}$. Указание. Как известно (см. задачу 86), треугольники AMB и CMD равновелики. Пусть r — радиус окружности; $AD=a$, $BC=b$; O — центр окружности; K — проекция точки M на AB (рис. 195). Из условия (AB перпендикулярна основаниям) следует, что $MK=\frac{ab}{a+b}$ (см. задачу 44). По свойству описанного четырехугольника $AB+CD=BC+AD$. Значит, $CD=a+b-2r$. Проведем высоту трапеции CN. Имеем $CN=2r$, $ND=|b-a|$, $CD=a+b-2r$. По теореме Пифагора $(a+b-2r)^2=4r^2+(b-a)^2$, откуда $(a+b)r=ab$, $r=\frac{ab}{a+b}$. Таким образом, $MK=r$. Площадь треугольника ABM равна $S=\frac{1}{2}AB\times$ $\times MK=r^2$, $r=\sqrt{S}$.

ПРИМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМАМ (МИНИМАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ)

1 *занятие.* Преобразование алгебраических уравнений. Номера задач: § 1 № 1(В), 2(В), 3(В), 1, 32. (Буква (В) означает, что эта задача из вводной части.) **Д.з. (домашнее задание).** § 1 № 2, 4, 5, 20, 22; § 2 № 1, 2; § 4 № 1, 2, 3, 22, 23.

2 *занятие.* Уравнения. Общие положения. Рациональные и иррациональные уравнения. Номера задач: § 2 № 1(В), 3(В), 4(В), 5(В), 7(В), 12, 22. **Д. з.** § 1 № 3, 11, 21; § 2 № 3, 4, 13, 14, 15, 21, 32; § 4 № 4, 25.

3 *занятие.* Уравнения. Замена неизвестного. Номера задач: § 2 № 11(В), 12(В), 13(В), 14(В), 44, 48. **Д. з.** § 1 № 23; § 2 № 10, 18, 19, 20, 43, 46, 49, 58; § 4 № 5, 8, 32.

4 *занятие.* Системы уравнений. Номера задач: § 2 № 20(В), 21(В), 22(В) 23(В), 120, 122, 124. **Д. з.** § 1 № 24; § 2 № 9, 23, 24, 50, 51, 123, 124, 126, 131; § 4 № 9, 11, 30.

5 *занятие.* Уравнения с абсолютными величинами. Номера задач: § 2 № 30(В), 31(В), 90, 91, 94, 95. **Д. з.** § 2 № 25, 28, 52, 92, 93, 96, 97, 98, 121, 125, 127, 128.

6 *занятие.* Текстовые задачи. Номера задач: § 4 № 1(В), 2(В), 3(В), 4(В), 24, 31, 36. **Д. з.** § 4 № 17, 34, 35, 37, 42, 45; § 2 № 26, 45, 56, 99, 101, 129, 133.

7 *занятие.* Неравенства. Метод интервалов. Номера задач: § 3 № 1(В), 2(В), 3(В), 4(В), 3, 6. **Д. з.** § 3 № 1, 10, 11, 12, 16; § 2 № 100, 102, 130, 136; § 4 № 12, 15, 19.

8 *занятие.* Иррациональные неравенства, неравенства с абсолютной величиной. Номера задач: § 3 № 5(В), 6(В), 17, 19, 48, 50. **Д. з.** § 3 № 12, 18, 20, 35, 51, 52, 53, 54, 70; § 4 № 21, 38, 40; § 5, № 11, 12.

9 *занятие.* Квадратный трехчлен. График. Теорема Виета. Номера задач: § 5 № 1(В), 2(В), 3(В), 1, 2, 7, 9, 13, 18*а*. **Д. з.** § 5 № 3, 4, 8, 10, 18*в*, 19, 20, 60, 72*а, б*; § 7 № 1, 2, 4, 6, 45, 46, 47.

10 *занятие.* Геометрия. Чертеж. Роль числовых данных. Опорные задачи. Номера задач: § 7 № 1(В), 2(В), 3(В), 4(В), 7(В), 8(В), 9(В). **Д. з.** § 7 № 3, 7, 11, 13, 48, 49, 50, 51; § 5 № 5, 6, 14, 15, 16, 61, 74.

11 *занятие.* Геометрия. Методы решения задач. Номера задач: § 7 № 10(В), 11(В), 13(В), 14(В), 5, 14, 17. **Д. з.** § 7 № 15, 16, 18, 52, 53, 54, 55, 56; § 4 № 6, 10, 47, 51.

12 *занятие.* Геометрия. Методы решения задач. Номера задач: § 7 № 15(В), 16(В), 10, 20, 22, 23, 27. **Д. з.** § 7 № 21, 24, 25, 26, 57, 58, 59, 60; § 2 № 76, 103; § 3 № 7, 58.

13 *занятие.* Квадратный трехчлен с параметром. Номера задач: § 5 № 6(В), 7(В), 14(В), 25, 27, 33, 48. **Д. з.** § 5 № 21, 26, 34, 73*а, б*, 92, 93, 100; § 7 № 28, 33, 41, 61, 62, 63.

14 *занятие.* Геометрия. Методы решения задач. Номера задач: § 7 № 19(В), 20(В), 37, 38, 39, 42. **Д. з.** § 7 № 64, 65, 66, 67, 68; § 4 № 18, 39, 49, 52, 53, § 5 № 47, 94, 95.

15 *занятие.* Уравнения и неравенства. Номера задач: § 2 № 24(В), 26(В), 27(В); § 3 № 21, 40, 80. **Д. з.** § 2 № 27, 66, 106; § 3 № 25, 39, 55, 81; § 7 № 69, 70, 71, 72, 73.

16 *занятие.* Уравнения и неравенства. Номера задач: § 2 № 5, 6, 16, 167; § 3 № 23, 69. **Д. з.** § 2 № 166; § 3 № 24, 27, 28, 65, 67; § 6 № 1, 7, 8, 13; § 7 № 74, 75, 76.

17 *занятие.* Натуральные и целые числа. НОД и НОК. Рациональные и иррациональные числа. Номера задач: § 6 № 9(В), 2, 10, 21*а*. **Д. з.** § 6 № 5, 12, 21*б,в*, 86, 90 *а, в*; § 4 № 13, 14, 28, 57, 54; § 7 № 77, 78, 79, 80.

18 *занятие.* Числовые последовательности (прогрессии). Номера задач: § 6 № 101, 103, 108, 112, 124, 133. **Д. з.** § 6 № 102, 104, 107, 125; § 4 № 41, 82, 96; § 5 № 94, 95, 120; § 7 № 81, 82, 83.

19 *занятие.* Квадратный трехчлен. Задачи на максимум и минимум. Номера задач: § 5 № 22(В), 23,(В), 54, 58, 83, 212. **Д. з.** § 5 № 24, 59, 62, 84, 213; § 6 № 14, 22, 87*а*, 105; § 7 № 84, 85, 86, 87.

20 *занятие.* Геометрия. Методы решения задач. Номера задач: § 7 № 26(В), 27(В), 28(В), 29, 30. **Д. з.** § 7 № 40, 88, 89, 90; § 3 № 5, 8, 26, 32, 43, 46, 63, 64.

21 *занятие.* Геометрия. Номера задач: § 7 № 25(В), 31, 34, 35, 36, 44. **Д. з.** § 7 № 32, 43, 91, 92; § 4 № 33, 59, 64, 65, 67, 68, 70.

22 *занятие.* Уравнения и неравенства. Номера задач: § 2 № 9(С), 17, 51(С), 108, 127(С) (Буква (С) означает, что эту задачу уже решали.); § 3 № 36, 60. **Д. з.** Повторение задач § 1—3; § 7 № 93, 94, 95.

23 *занятие.* Текстовые задачи. Номера задач: § 4 № 16, 20, 47(С), 69, 83. **Д. з.** Повторение задач § 4; § 7 № 96, 97, 98.

24 *занятие.* Нестандартные и арифметические текстовые задачи. Номера задач: § 4 № 7(В), 11(В), 12(В), 26, 27. **Д. з.** § 4 № 62, 81, 84, 93, 156; § 7 № 99, 100, 101, 102, 103.

25 *занятие.* Геометрия. Номера задач: § 7 № 104, 105, 106, 107, 108. **Д. з.** Повторение опорных задач по геометрии; § 1 № 18, 27, 30, 32.

26 *занятие.* Геометрия. Номера задач: § 7 № 109, 110, 111, 112, 113. **Д. з.** Повторение опорных задач по геометрии; § 2 № 100, 102, 111; § 3 № 49, 56, 77.

27 *занятие.* Квадратный трехчлен. Номера задач: § 5 № 18*б*, 22, 23, 36, 89, 90, 98*а*. **Д. з.** § 5 № 91, 96, 98*б*; § 3 № 9, 13, 15, 37; § 4 № 63, 69, 71; § 7 № 114, 115.

28 *занятие.* Уравнения. Номера задач: § 2 № 8, 29, 47, 160, 166. **Д. з.** § 2 № 31, 33, 57, 68, 132, 134; § 7 № 116, 117, 118, 119, 120.

29 *занятие.* Текстовые задачи. Номера задач: § 4 № 72, 76, 95, 146, 159. **Д. з.** § 4 № 73, 77, 78, 143; § 5 № 18*г*, 25, 63; § 7 № 121, 122, 123, 124, 125.

30 *занятие.* Квадратный трехчлен. Номера задач. § 5 № 17, 29, 35, 68, 85. **Д. з.** § 5 № 30, 50, 69, 72*в*, 86; § 6 № 11, 16; § 7 № 126, 127, 128, 129, 130.

31 *занятие.* Числа и последовательности. Номера задач: § 6 № 19, 20, 21*б, в*, 25, 49*а*. **Д. з.** § 6 № 23, 24, 28; § 3 № 2, 4, 22, 41, 42, 60, 61; § 7 № 131, 132, 133.

32 *занятие.* Геометрия. Номера задач: § 7 № 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140. Для резерва и повторения 3 занятия.

СОДЕРЖАНИЕ

ББК 22.1я72
Ш26

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук *В. В. Прасолов*;
учитель-методист школы № 67 Москвы *Л. И. Звавич*

Шарыгин И. Ф.

Ш26 **Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1989.— 252 с.: ил. ISBN 5-09-001288-1**

Основная цель данной книги — подготовка учащихся к продолжению образования в высших учебных заведениях, повышение уровня общей математической подготовки. Факультатив строится как углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач.

Ш $\frac{4306020000-709}{103(03)-89}$ инф. письмо — 89, доп. № 1 **ББК 22.1я72**

ISBN 5-09-001288-1

Учебное издание

Шарыгин Игорь Федорович

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

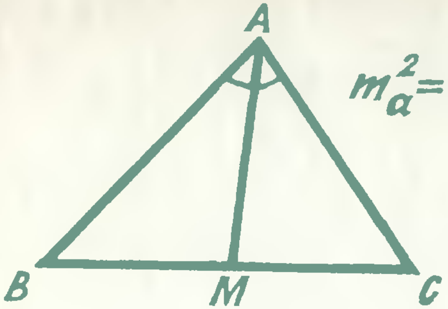
Учебное пособие для 10 класса
средней школы

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова.* Редактор *Т. А. Бурмистрова.* Младший редактор *Л. И. Заседателева.* Художники *А. С. Побезинский, Г. А. Алексеев.* Художественный редактор *Е. Р. Дашук.* Технический редактор *С. С. Якушкина.* Корректор *Н. С. Соболева.* ИБ № 12107. Сдано в набор 27.02.89. Подписано к печати 11.10.89. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 22,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 22,68. Уч.-изд. л. 20,53+0,42 форз. Тираж 424 000 экз. Заказ 497. Цена 75 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

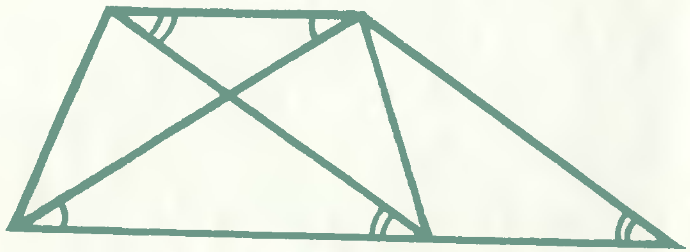
Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

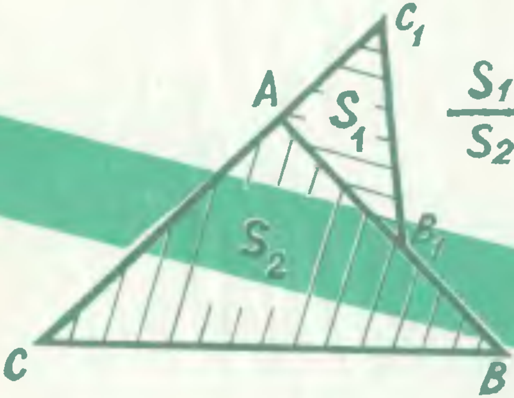
ОПОРНЫЕ ЗАДАЧИ



$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$$

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$$



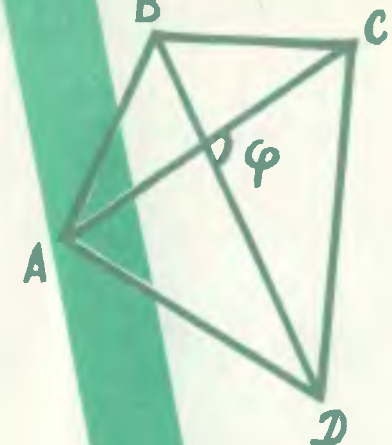


$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AC_1\cdot AB_1}{AC\cdot AB}$$

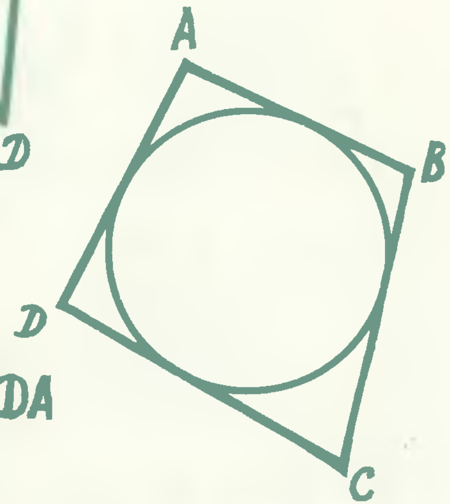
$$S=pr$$

$$x=p-a$$

$$\varphi=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$$



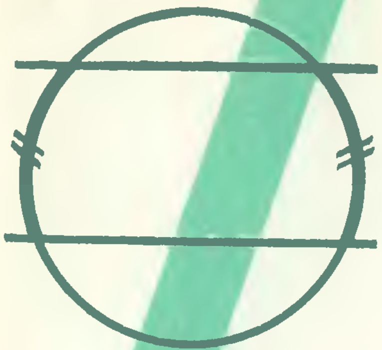
$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi$$

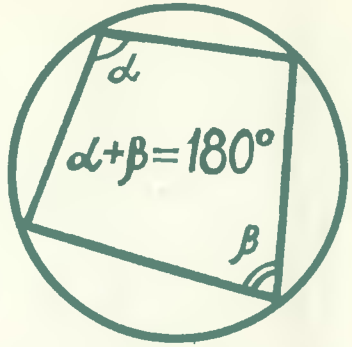


$$AB+CD=BC+DA$$

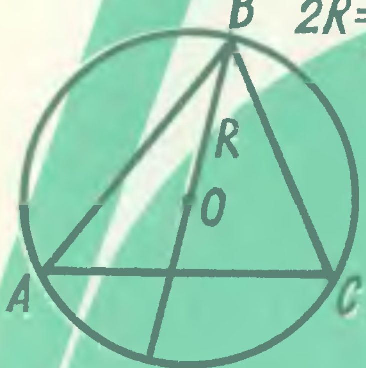
$\Rightarrow$

ОПОРНЫЕ ЗАДАЧИ

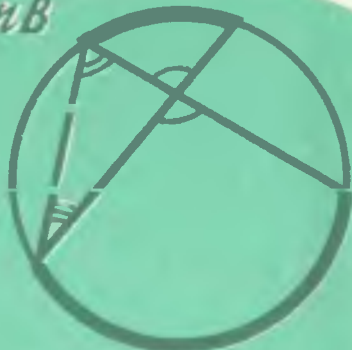


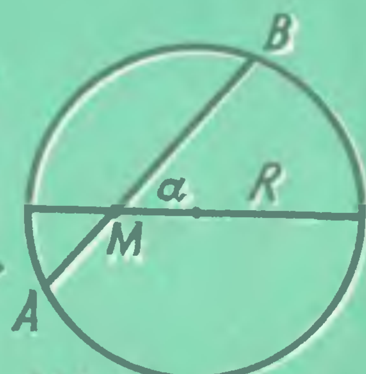


$\alpha+\beta=180^\circ$

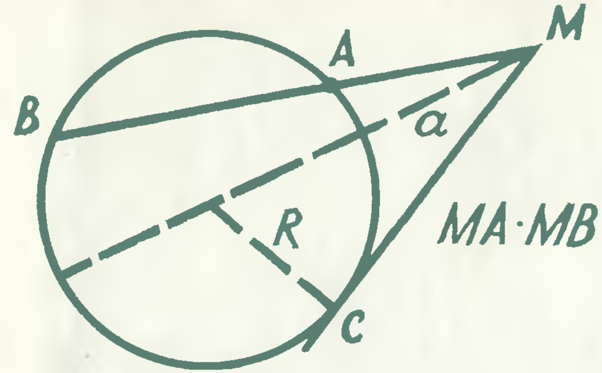


$2R=\dfrac{b}{\sin B}$

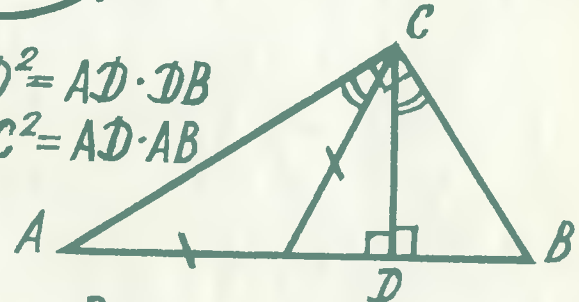




$AM\cdot MB=R^2-a^2$

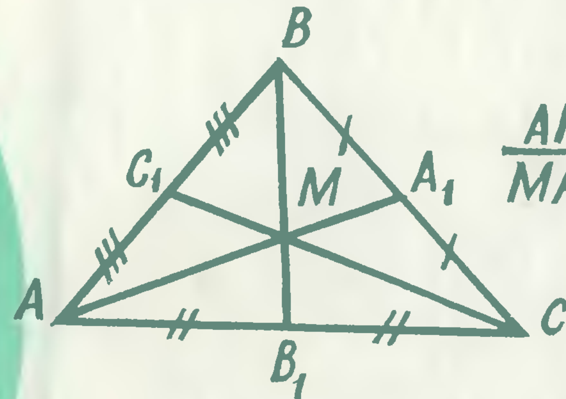


$MA\cdot MB=MC^2=a^2-R^2$



$CD^2=AD\cdot DB$

$AC^2=AD\cdot AB$



$\dfrac{AM}{MA_1}=2$