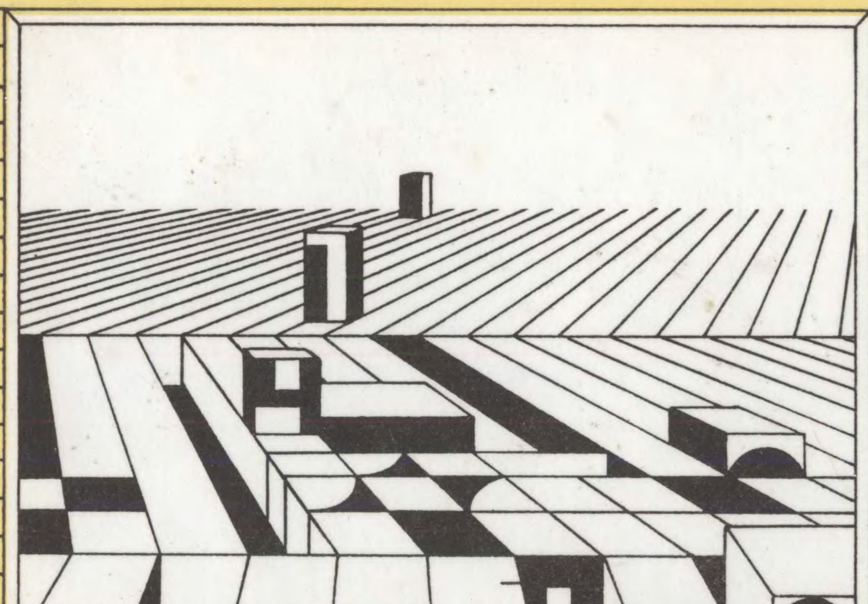
М.Л.Галицкий
М.М.Мошкович
С.И.Шварцбурд

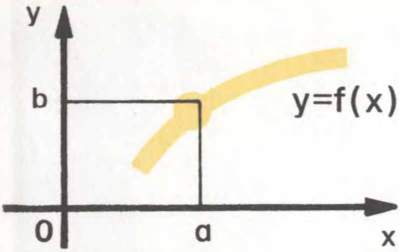
Углубленное изучение алгебры и математического анализа



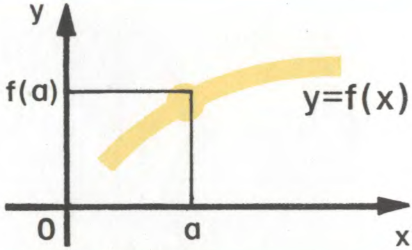
ПРОСВЕЩЕНИЕ

10 – 11

Предел функции. Непрерывность

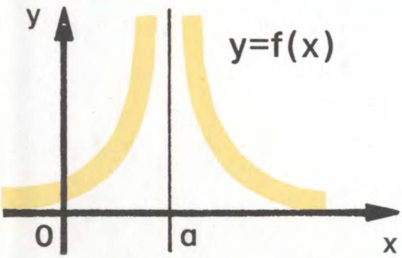


$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

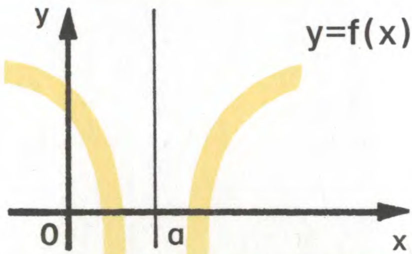


$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Бесконечные пределы функции

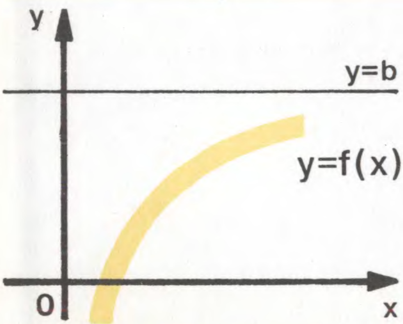


$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

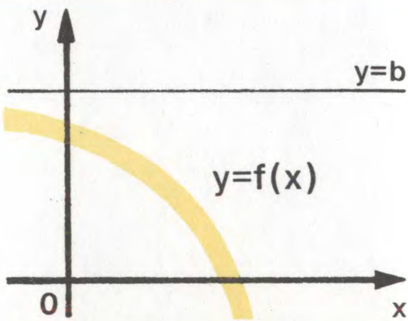


$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Предел функции на бесконечности

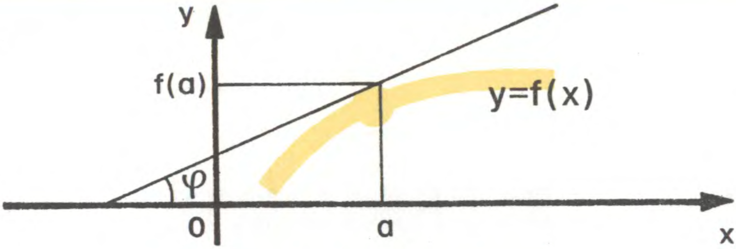


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$



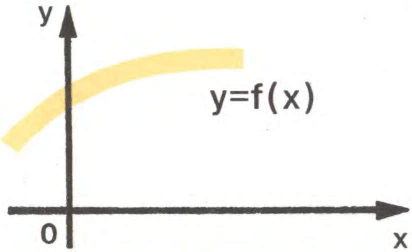
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Производная

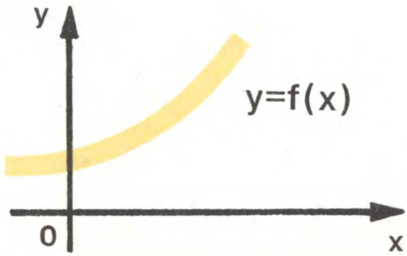


$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

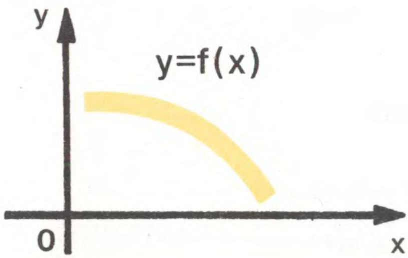
$$f'(a)=\operatorname{tg}\varphi$$



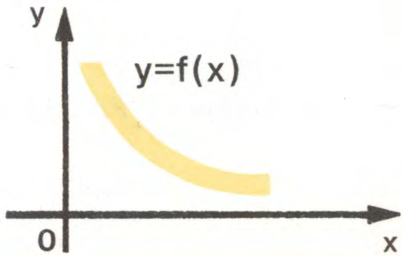
$f'(x)>0 \quad f''(x)<0$



$f'(x)>0 \quad f''(x)>0$



$f'(x)<0 \quad f''(x)<0$



$f'(x)<0 \quad f''(x)>0$

М.Л.Галицкий
М.М.Мошкович
С.И.Шварцбурд

Углубленное изучение алгебры и математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
И ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Под редакцией М. Л. Галицкого

Рекомендовано Главным управлением
развития общего среднего образования
Министерства образования
Российской Федерации

3-е издание, доработанное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1997

УДК 372.8
ББК 74.262.21
Г15

Рецензент

учитель математики школы № 67 Москвы *Л. И. Звавич*

Галицкий М. Л. и др.

Г15 Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Метод. рекомендации и дидакт. материалы: Пособие для учителя / М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд. — 3-е изд., дораб.— М.: Просвещение, 1997.— 352 с.— ISBN 5-09-006592-6.

Данная книга предназначена для учителей, работающих в школах и классах с углубленным изучением математики. Она содержит методические рекомендации по изучению некоторых теоретических вопросов и решению задач, планирование уроков, образцы самостоятельных и контрольных работ по всем темам и экзаменационные работы за 1982—1996 гг.

ББК 74.262.21

ISBN 5-09-006592-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классы с углубленным изучением математики существуют уже давно, они прочно вошли в систему школьного образования, помогли выпуску целого поколения молодых математиков, инженеров и техников.

Предлагаемая читателям книга «Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа» содержит методические рекомендации и дидактические материалы по этому курсу и предназначается для учителей школ и классов с углубленным изучением математики. Эти материалы написаны в соответствии с учебным пособием Н. Я. Виленкина, О. С. Ивашева-Мусатова и С. И. Шварцбурда «Алгебра и математический анализ» для X класса и таким же пособием для XI класса, выпущенными издательством «Просвещение» соответственно в 1995 и 1996 гг. С дидактическими материалами, помещенными в книге, знакомились участники семинаров в Московском городском институте усовершенствования учителей, где авторы вели занятия с учителями школ и классов с углубленным изучением математики.

Данное пособие содержит:

— примерное планирование учебного материала для X и XI классов с углубленным изучением математики;

— решения и рекомендации к решениям наиболее трудных, с точки зрения авторов, задач из вышеназванных учебных пособий;

— методические рекомендации к решению задач по некоторым разделам курса;

— контрольные и самостоятельные работы по всему курсу алгебры и математического анализа для X и XI классов с углубленным изучением математики;

— экзаменационные работы с решениями или указаниями, предлагавшиеся на выпускных экзаменах в предыдущие годы.

Планирование учебного материала дано из расчета 5,5 ч в неделю в X классе и 5 ч в неделю в XI классе.

Рекомендации к решению задач даны по следующим темам: метод математической индукции; применение теоремы Безу и ее следствий к разложению многочлена на множители и решению уравнений высших степеней; нахождение асимптот графиков функций; исследование функций с помощью производной; применение определенного интеграла к нахождению площадей плоских фигур; нахождение наибольшего и наименьшего значений функции; различные способы доказательства неравенств и др.

В настоящей книге именно решение задач рассматривается как главное средство углубленного изучения математики в школе. В ней учитель сможет увидеть, как решение той или иной задачи помогает глубже заглянуть в теоретический материал, сделать то или иное обобщение.

Самостоятельные и контрольные работы в книге даны в шести вариантах и охватывают все темы программного материала. К вариантам № 1 и № 2 решения приведены полностью, а к остальным вариантам даются ответы (к более трудным упражнениям — рекомендации к их решениям). Вычислительная часть предлагаемых работ может быть выполнена с использованием микрокалькуляторов.

Самостоятельные работы рассчитаны на один урок или его часть, причем не обязательно предлагать учащимся всю работу целиком, можно дать часть заданий. Задания выбираются по усмотрению учителя, в зависимости от состава класса и его подготовленности. Возможен пропуск той или иной самостоятельной работы и использование ее упражнений для индивидуальной работы с учащимися.

Контрольные работы рассчитаны на один или два урока. В каждой контрольной работе кроме основной части имеется дополнительная часть, отмеченная знаком «^{0}». Она предназначена для наиболее сильных по успеваемости учащихся, и в том случае, если основная часть работы выполнена на оценку 4 или 5, за дополнительную часть выставляется отдельная оценка. При этом заносить в журнал оценку ниже 4 не рекомендуется, а оценку 4 выставлять только по желанию учащегося. Последняя контрольная работа в XI классе рассчитана на три урока.

Хотя книга «Углубленное изучение алгебры и математического анализа» предназначена для учителей школ и классов с углубленным изучением математики, она может оказать помощь учителям общеобразовательных школ при ведении факультативных занятий и математических кружков.

Пользуемся случаем выразить благодарность В. С. Гершману, оказавшему помощь при подготовке данного издания.

Критические замечания и пожелания просим присылать по адресу: 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Авторы

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Номера уроков	Содержание учебного материала
	X КЛАСС (5 ч в неделю в I полугодии, 6 ч в неделю во II полугодии, всего 187 ч)
	Действительные числа (14 ч)
1—4	Действительные числа и бесконечные десятичные дроби. Рациональные и иррациональные числа. Самостоятельная работа № 1
5—9	Арифметические действия над действительными числами. Обращение периодических десятичных дробей в обыкновенные. Микрокалькуляторы и их применение в вычислениях. Самостоятельная работа № 2
10—13	Координаты на прямой и на плоскости. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении. Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами
14	Контрольная работа № 1
	Многочлены (30 ч)
15—17	Выражения и классы выражений. Тождественные преобразования целых рациональных выражений. Самостоятельная работа № 3
18—21	Полная и неполная индукция. Метод математической индукции. Доказательство тождеств и неравенств методом математической индукции
22	Контрольная работа № 2
23—26	Многочлены от одной переменной. Канонический вид целых рациональных выражений. Деление многочленов с остатком. Самостоятельная работа № 4
27—29	Теорема Безу. Схема Горнера. Корни многочлена, нахождение целых корней многочлена. Теорема Виета
30	Тождественное равенство рациональных выражений, каноническая форма рациональных выражений
31—32	Контрольная работа № 3
33—38	Уравнения, тождества, неравенства. Равносильные уравнения и неравенства. Основные методы решения уравнений. Самостоятельная работа № 5
39—42	Решение и доказательство неравенств
43—44	Контрольная работа № 4
	Функции (18 ч)
45—48	Числовые функции. Способы их задания. График функции. Операции над функциями. Композиция функций

Номера уроков	Содержание учебного материала
49—54	Преобразование графиков функций. Графики линейной, квадратичной и дробно-линейной функций. Самостоятельная работа № 6
55—58	Четные и нечетные функции. Возрастание и убывание функций
59—60	Числовые последовательности. Рекуррентные соотношения
61—62	Контрольная работа № 5
	Предел и непрерывность (25 ч)
63—67	Бесконечно малые функции. Операции над бесконечно малыми функциями. Предел функции на бесконечности. Свойства предела функции при $x \to +\infty$
68—70	Бесконечно большие функции. Горизонтальные и наклонные асимптоты. Самостоятельная работа № 7
71—73	Предел последовательности. Существование предела монотонной и ограниченной последовательности
74	Контрольная работа № 6
75—80	Предел функции в точке и его свойства. Непрерывные функции. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты
81—84	Арифметические операции над непрерывными функциями. Теоремы о промежуточных значениях функций, непрерывных на отрезке
85	Обратная функция
86—87	Контрольная работа № 7
	Производная и ее приложение (35 ч)
88—91	Приращение функций. Дифференцируемые функции. Производная. Физический смысл производной. Дифференциал. Приближенные вычисления. Самостоятельная работа № 8.
92—95	Геометрический смысл производной. Касательная прямая к графику функции и ее уравнение. Непрерывность дифференцируемой функции. Самостоятельная работа № 9
96—99	Техника дифференцирования. Дифференцирование линейной комбинации функций. Дифференцирование степени функции и произведения функций. Дифференцирование дроби. Вторая производная
100—101	Контрольная работа № 8
102—105	Необходимое условие экстремума функции. Отыскание наибольших и наименьших значений функции на отрезке
106—111	Теорема Лагранжа и ее следствия. Исследования функции на возрастание и убывание. Достаточное условие экстремума функции. Исследование графиков функций на выпуклость и точки перегиба. Самостоятельная работа № 10
112—116	Применение производных к исследованию функции и построению графиков, к нахождению наибольших и наименьших значений функции
117—118	Контрольная работа № 9
119—122	Производные и доказательство неравенств. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Приложение бинома Ньютона для приближенных вычислений. Самостоятельная работа № 11

Номера уроков	Содержание учебного материала
	Тригонометрические функции (50 ч)
123—124	Длина дуги. Радианное измерение дуг и углов. Координатная окружность
125—131	Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Периодичность тригонометрических функций. Непрерывность синуса и косинуса. Четные и нечетные тригонометрические функции. Гармонические колебания. Решение тригонометрических уравнений $\sin x=a$, $\cos x=a$ $\left(a=0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm1\right)$; $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ $\left(a=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm1,\ \pm\sqrt{3}\right)$ с использованием единичной окружности
132—133	Контрольная работа № 10
134—138	Тригонометрические формулы сложения. Формулы приведения. Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента. Тригонометрические функции половинного аргумента. Самостоятельная работа № 12
139—142	Преобразование суммы и разности одноименных тригонометрических функций в произведение и произведения этих функций в сумму. Сложение гармонических колебаний
143—144	Контрольная работа № 11
145—149	Дифференцирование тригонометрических функций. Дифференцирование композиции функций. Самостоятельная работа № 13
150—153	Решение простейших тригонометрических уравнений. Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса
154—160	Основные методы решения тригонометрических уравнений
161—162	Контрольная работа № 12
163—166	Доказательство и решение тригонометрических неравенств. Самостоятельная работа № 14
167—171	Обратные тригонометрические функции. Вычисление пределов, связанных с обратными тригонометрическими функциями. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции
172	Контрольная работа № 13
	Повторение (15 ч)
173—176	Предел и непрерывность функции. Производная. Исследование функций с помощью производных
177—180	Многочлены от одной переменной. Теорема Безу и ее следствия
181—183	Уравнения и неравенства с одной переменной
184—185	Контрольная работа № 14
186—187	Решение задач

Номера уроков	Содержание учебного материала
	XI КЛАСС
	(5 ч в неделю, всего 170 ч)
	Интеграл и дифференциальные уравнения (28 ч)
1—9	Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Знакомство с техникой интегрирования. Самостоятельная работа № 1
10—16	Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Начальные условия. Уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение гармонического колебания. Применение дифференциальных уравнений
17	Контрольная работа № 1
18—23	Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл. Формула Ньютона — Лейбница. Применение интеграла к решению геометрических и физических задач. Самостоятельная работа № 2
24—27	Свойства определенного интеграла
28	Контрольная работа № 2
	Показательная, логарифмическая и степенная функции (42 ч)
29—32	Показательная функция, ее свойства и график. Самостоятельная работа № 3
33—36	Логарифмическая функция, ее свойства и график. Самостоятельная работа № 4
37—42	Основные методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств
43—44	Контрольная работа № 3
45—50	Число *e*. Натуральные логарифмы. Некоторые пределы, связанные с числом *e*. Производная показательной и логарифмической функций Самостоятельная работа № 5
51—52	Дифференциальное уравнение процессов органического изменения
53—54	Контрольная работа № 4
55—58	Степенная функция и ее производная. Сравнение роста показательной, логарифмической и степенной функций. Самостоятельная работа № 6
59—62	Преобразование иррациональных выражений. Самостоятельная работа № 7
63—68	Иррациональные уравнения и неравенства
69—70	Контрольная работа № 5
	Многочлены от нескольких переменных. Системы уравнений и неравенств (24 ч)
71—74	Стандартный вид многочлена от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Доказательство неравенств. Самостоятельная работа № 8

Номера уроков	Содержание учебного материала
75—78	Геометрический смысл одного уравнения с двумя переменными. Системы уравнений. Метод исключения, метод алгебраического сложения. Самостоятельная работа № 9
79—80	Метод замены переменных
81—82	Контрольная работа № 6
83—86	Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Системы иррациональных уравнений. Самостоятельная работа № 10
87—90	Системы показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений. Самостоятельная работа № 11
91—92	Решение неравенств с двумя переменными. Понятие о линейном программировании
93—94	Контрольная работа № 7
	Комплексные числа (20 ч)
95—99	Комплексные числа и операции над ними. Самостоятельная работа № 12
100—104	Геометрическое изображение комплексных чисел. Полярная система координат и тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение, деление, возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра
105	Контрольная работа № 8
106—110	Извлечение корня из комплексных чисел. Комплексные корни алгебраических уравнений. Понятие об основной теореме алгебры. Самостоятельная работа № 13
111—112	Применение комплексных чисел
113—114	Контрольная работа № 9
	Элементы комбинаторики (12 ч)
115—125	Основные понятия и принципы комбинаторики. Правило суммы и правило произведения. Формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний (с повторениями и без повторений). Формула Ньютона. Решение комбинаторных задач
126	Контрольная работа № 10
	Элементы теории вероятностей (14 ч)
127—135	Случайные события. Вероятность. Теорема сложения. Независимые случайные события. Условная вероятность. Формула умножения. Самостоятельная работа № 14
136—139	Формула Бернулли. Закон больших чисел
140	Контрольная работа № 11
	Повторение (30 ч)
141—143	Действительные числа. Модуль числа. Числовые функции, их свойства
144—145	Предел и непрерывность функции. Производная и первообразная

Продолжение

Номера уроков	Содержание учебного материала
146—149	Применение производной. Касательная. Исследование функций. Наибольшее и наименьшее значение функции. Решение задач
150—151	Контрольная работа № 12
152—155	Тригонометрические функции и их свойства. Решение тригонометрических уравнений и неравенств. Самостоятельная работа № 15
156—158	Показательная и логарифмическая функции и их свойства. Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Самостоятельная работа № 16
159—162	Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств по всему курсу
163- 164	Комплексные числа
165—167	Контрольная работа № 13
168—170	Решение задач по всему курсу

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

В настоящем разделе приводятся методические рекомендации к решению задач по отдельным темам курса алгебры и математического анализа. В некоторых случаях разъясняется содержание изучаемого материала, сообщаются дополнительные сведения для учителя, приводятся доказательства теорем, выводы формул и т. д. Многие пункты содержат указания к решениям или решения задач из учебных пособий* для X и XI классов. Дополнительные упражнения могут быть использованы учителем при работе в классе и для домашних заданий.

1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции, который принимается как аксиома.

Утверждение $P(n)$, зависящее от натурального числа n, справедливо при любом $n \in \boldsymbol{N}$, если:

1) *утверждение $P(n)$ справедливо при $n=1$;*

2) *для всякого $k \in \boldsymbol{N}$ из справедливости $P(k)$ следует справедливость $P(k+1)$.*

Доказательство методом математической индукции проводится следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется при $n=1$. Эту часть доказательства называют *базисом индукции*. Затем следует часть доказательства, называемая *индукционным шагом*. В этой части доказывают справедливость утверждения при $n=k+1$ в предположении справедливости утверждения при $n=k$ (предположение индукции).

В учебном пособии для X класса рассматривается применение метода математической индукции в задачах на суммирование, доказательство тождеств и неравенств, выводятся формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий. Среди упражнений встречаются также и задачи, связанные с рекуррентным способом задания последовательности. Помимо задач, имеющихся в учебном пособии, полезно предложить учащимся также и задачи на делимость, показать применение метода

---

* См.: Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ для 10 класса.— М.: Просвещение, 1995. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ для 11 класса.— М.: Просвещение, 1996.

математической индукции при решении некоторых геометрических и других задач.

Пример 1. Доказать, что число $7^{n+1}+8^{2n-1}$ делится на 19 при любом натуральном n.

Решение. Если $n=1$, то $7^2+8^1=57$, а 57 делится на 19. Предположим, что для некоторого натурального k число $7^{k+1}+8^{2k-1}$ делится на 19. Докажем, что в таком случае и $7^{k+2}+8^{2k+1}$ делится на 19.

В самом деле,

$$7^{k+2}+8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+1}+64\cdot 8^{2k-1}=7(7^{k+1}+8^{2k-1})+57\cdot 8^{2k-1}.$$

Так как каждое слагаемое полученной суммы делится на 19, то и $7^{k+2}+8^{2k+1}$ также делится на 19. Утверждение доказано.

Пример 2. В плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые?

Решение. Сделав соответствующие рисунки, легко убедиться в том, что одна прямая разбивает плоскость на 2 части, две прямые — на 4 части, три прямые — на 7 частей, четыре прямые — на 11 частей.

Обозначим через $N(n)$ число частей, на которые n прямых разбивают плоскость. Можно заметить, что $N(1)=2$, $N(2)=N(1)+2$, $N(3)=N(2)+3$, $N(4)=N(3)+4$. Естественно предположить, что $N(n)=N(n-1)+n$.

Складывая почленно n равенств:

$$\begin{aligned}&N(1)=2,\\&N(2)=N(1)+2,\\&N(3)=N(2)+3,\\&\dots\dots\dots\dots\\&N(n)=N(n-1)+n,\end{aligned}$$

получим $N(n)=2+2+3+4+\ldots+n$, или

$$N(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Докажем справедливость формулы (1) методом математической индукции.

Для $n=1$ формула уже проверена. Сделав предположение индукции, рассмотрим $k+1$ прямых, удовлетворяющих условию задачи. Выделим из них произвольным образом k прямых. По предположению индукции, они разобьют плоскость на $1+\frac{k(k+1)}{2}$ частей. Оставшаяся $(k+1)$-я прямая разобьется выделенными k прямыми на $k+1$ частей и, следовательно, пройдет по $k+1$ части, на которые плоскость уже была разбита, и каждую из этих частей разделит на 2 части, т. е. добавится еще $k+1$ часть.

Итак, $N(k+1)=N(k)+k+1=1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1=1+$ $+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, что и требовалось доказать.

В ряде случаев бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных n, а лишь для $n \geqslant m$, где m — фиксированное натуральное число. Например, для доказательства свойств многогранников нам пришлось бы начинать с $n=4$.

В этом случае принцип математической индукции формулируется следующим образом.

Пусть m — некоторое натуральное число. Утверждение $P(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, верно для всех натуральных значений $n \geqslant m$, если выполняются два условия:

1) *утверждение $P(n)$ справедливо при $n=m$;*

2) *для всякого натурального $k \geqslant m$ из справедливости $P(k)$ следует справедивость $P(k+1)$.*

Отметим, что так как в этом случае предположение индукции имеет измененный вид (предполагается, что доказываемое утверждение справедливо при $n=k \geqslant m$), то при значениях $n<m$ утверждение может быть как верным, так и неверным. Проведенное доказательство методом математической индукции не дает оснований для утверждения о его справедливости для $1 \leqslant n<m$.

Пример 3. Найти все $n \in \boldsymbol{N}$, для которых справедливо неравенство $2^n>2n^2-3n+1$.

Решение. При $n=1$ неравенство справедливо. Предположим, что для некоторого натурального k имеет место неравенство $2^k>2k^2-3k+1$. Так как неравенство $2^{k+1}>2(k+1)^2-3(k+1)+1$ можно переписать в виде $2^{k+1}-2k^2-k>0$ или $2(2^k-2k^2+3k-1)+$ $+2k^2-7k+2>0$, то для проведения индукционного шага достаточно выполнение неравенства $2k^2-7k+2>0$. Это последнее неравенство верно при $k \geqslant 4$. Следовательно, $m=1$ не может быть базисом индукции — мы не сможем сделать первого же индукционного шага. Естественно попытаться за базис взять $m=4$. В этом случае индукционный шаг выполним, однако непосредственная проверка показывает, что при $n=4$ неравенство $2^n>2n^2-3n+1$ не является верным. Следовательно, $m=4$ также не может служить базисом индукции. Лишь при $m=6$ это неравенство справедливо, так что за базис индукции можно взять $m=6$ (при $m \geqslant 6$ индукционный шаг также выполняется). Следовательно, неравенство $2^n>2n^2-3n+1$ верно при всех натуральных $n \geqslant 6$. Отметим, что для некоторых значений n, меньших 6, $n=1$, 2, это неравенство также справедливо. Таким образом, неравенство справедливо при $n=1$, 2 и $n \geqslant 6$, $n \in \boldsymbol{N}$.

В некоторых задачах принцип математической индукции применяется в следующей форме.

Утверждение $P(n)$, где n — натуральное число, верно для всех натуральных $n \geqslant m$ $(m \in \boldsymbol{N})$, если выполнены два условия:

1) *$P(n)$ справедливо при $n=m$ и $n=m+1$;*

2) *для всякого натурального $k \geqslant m$ из справедливости $P(k)$ и $P(k+1)$ следует справедливость $P(k+2)$.*

В качестве примера рассмотрим упражнение 80 из учебного пособия для IX класса.

Пример 4 (80). Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ составляется по следующему закону: первые два числа a_0 и a_1 даны, каждое же следующее равно полусумме двух предыдущих. Доказать, что

$$a_n=\frac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Решение. Проверим справедливость утверждения при $n=0$ и $n=1$. Имеем:

$$a_0=\frac{2a_1+a_0}{3}-\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{-1}}=a_0,$$

$$a_1=\frac{2a_1+a_0}{3}+\frac{a_1-a_0}{3}=a_1.$$

Докажем, что для всякого натурального k из справедливости утверждения при $n=k-1$ и $n=k$ следует его справедливость и при $n=k+1$.

Имеем:

$$a_{k+1}=\frac{a_{k-1}+a_k}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot\frac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{k-2}\left(\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{k-2}}-\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{k-1}}\right)}{2}=$$

$$=\frac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{k-2}\cdot\frac{2(a_1-a_0)-(a_1-a_0)}{2\cdot 3\cdot 2^{k-1}}=$$

$$=\frac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{k}\cdot\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{k}}.$$

Приведем решение еще нескольких задач из учебного пособия для IX класса.

Пример 5 (85 (2)). Докажите тождество

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

Решение. Пусть

$$A(n)=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}},$$

$$B(n)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

При $n=1$ имеем:

$$A(1)=\frac{x}{1-x^2};\ B(1)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2},\text{ т. е. } A(1)=B(1).$$

Положим для сокращения записи $2^k=m$. Будем иметь:

$$A(k+1)-A(k)=\frac{x^m}{1-x^{2m}};$$

$$B(k+1)-B(k)=\frac{1}{1-x}\left(\frac{x-x^{2m}}{1-x^{2m}}-\frac{x-x^m}{1-x^m}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2m}-(1+x^m)(x-x^m)}{1-x^{2m}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x^m-x^{m+1}}{1-x^{2m}}=\frac{x^m}{1-x^{2m}}.$$

Таким образом, $A(k+1)-A(k)=B(k+1)-B(k)$, $k\in N$. Следовательно, из равенства $A(k)=B(k)$ следует равенство $A(k+1)=$ $=B(k+1)$.

Пример 6 **(86 (5))**. Последовательность Фибоначчи определяется следующими условиями:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}.$$

Докажите, что

$$a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+3}=(-1)^n.$$

Решение. Из условия следует, что $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$. При $n=1$ имеем: $a_2a_3-a_1a_4=1\cdot 2-1\cdot 3=(-1)^1$.

Пусть равенство справедливо при $n=k$, $k\in N$:

$$a_{k+1}a_{k+2}-a_ka_{k+3}=(-1)^k.$$

При $n=k+1$ имеем: $a_{k+2}a_{k+3}-a_{k+1}a_{k+4}=a_{k+2}a_{k+3}-$ $-a_{k+1}(a_{k+3}+a_{k+2})=a_{k+2}a_{k+3}-a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+1}a_{k+2}=(a_{k+1}+a_k)a_{k+3}-$ $-a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+1}a_{k+2}=a_{k+1}a_{k+3}+a_ka_{k+3}-a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+1}a_{k+2}=$ $=-(a_{k+1}a_{k+2}-a_ka_{k+3})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$.

Значит, равенство справедливо при любом натуральном значении n.

Пример 7 **(89 (3))**. Докажите неравенство

$$2^n>n^3,\ n\geqslant 10,\ n\in N.$$

Решение. При $n=10$ неравенство справедливо: $2^{10}>10^3$. Пусть при каком-либо произвольном значении $k\geqslant 10$, $k\in N$, справедливо неравенство $2^k>k^3$. Докажем, что тогда неравенство $2^{k+1}>(k+1)^3$ также справедливо. Имеем: $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^3=k^3+k^3$. Осталось доказать, что при $k\geqslant 10$ $k^3>3k^2+3k+1$. Так как при $k\geqslant 10$ имеем: $k^3-9k^2=k^2(k-9)>0$, то $k^3>9k^2=3k^2+3k^2+3k^2>$ $>3k^2+3k+3>3k^2+3k+1$, что и требовалось доказать.

Дополнительные упражнения

1. Докажите справедливость равенств:

а) $2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$;

б) $5+45+325+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{2n+1}$;

г) $\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(6n+1)}{3(2n+3)}$;

д) $\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}\cdot 2+\frac{4}{5\cdot 6}\cdot 2^2+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\cdot 2^{n-1}=\frac{2^n}{n+3}-\frac{1}{3}$;

е) $\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)}=\frac{n(n+5)}{8(n+1)(n+4)}$;

ж) $3+20+168+\ldots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot n!=2^n\cdot(n+1)!-1$;

з) $\frac{1}{2}\cdot 2!+\frac{2}{2^2}\cdot 3!+\frac{3}{2^3}\cdot 4!+\ldots+\frac{n}{2^n}\cdot(n+1)!=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$.

2. Докажите, что при $n \in N$:

а) n^3+11n кратно 6; б) 7^n+3n-1 кратно 9;

в) 5^n-3^n+2n кратно 4; г) $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19;

д) $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ кратно 17; е) $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ кратно 27.

3. Дано: $a_1=4$, $a_{n+1}=3a_n-2$. Докажите, что $a_n=3^n+1$, $n \in N$.

4. Дано: $a_1=\frac{14}{3}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}(27a_n+32)$. Докажите, что $a_n=\frac{2}{3}(9^n-2)$, $n \in N$.

5. Дано: $a_1=1$, $a_2=9$, $a_{n+2}=9a_{n+1}-20a_n$. Докажите, что $a_n=5^n-4^n$, $n \in N$.

6. Дано: $a_1=3$, $a_2=15$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$. Докажите, что $a_n=4^n-1$, $n \in N$.

7. Дано: $a_1=29$, $a_2=85$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$. Докажите, что $a_n=2^n+3^{n+2}$, $n \in N$.

8. Докажите неравенства:

а) $5^n>7n-3$ при $n \in N$; б) $2^{n-1}>n(n+1)$ при $n \in N$, $n \geqslant 7$;

в) $3^n \geqslant 2^n+n$ при $n \in N$; г) $4^n \geqslant 3^n+n^2$ при $n \in N$;

д) $4^n>3^n+2^n$ при $n \in N$, $n \geqslant 2$.

9. Докажите, что n прямых, лежащих в одной плоскости и имеющих общую точку, делят плоскость на $2n$ частей.

10. Докажите, что n различных точек, лежащих на прямой, делят ее на $n+1$ интервалов (из которых два интервала бесконечны).

11. На сколько частей разбивают пространство n плоскостей, из которых каждые три пересекаются и никакие четыре не имеют общей точки?

Ответ. $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+n+1$.

12. В плоскости проведено n окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три не имеют общей точки. На сколько частей разбивается при этом плоскость?

Ответ. n^2-n+2.

13. Докажите, что сторона правильного многоугольника, имеющего число сторон, равное 2^n, выражается через радиус R описанной около многоугольника окружности следующей формулой:

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ двойки}}}.$$

14. Докажите формулу

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n.$$

15. Докажите, что

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}+$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+\ldots+a_1a_2\ldots a_n.$$

16. Докажите, что если $a>b$ и a, b — положительные числа, то $a^n>b^n$ $(n \in N)$.

17. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$;

б) $2^{n-1}(a^n+b^n)\geqslant(a+b)^n$, если a и b — положительные числа;

в) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

г) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

18. Докажите, что $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

19. Вычислите произведение $A=2^{\frac{1}{2}}\cdot4^{\frac{1}{4}}\cdot8^{\frac{1}{8}}\cdot16^{\frac{1}{16}}\ldots$.

Ответ. $A=4$.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Одним из способов решения уравнений высших степеней является способ разложения на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Этот способ основан на следующем применении теоремы Безу.

Если число α является корнем многочлена $P(x)$, имеющего степень n, то этот многочлен можно представить в виде $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$, где $Q(x)$ — частное от деления $P(x)$ на $x-\alpha$, многочлен степени $n-1$.

Таким образом, если известен хотя бы один корень уравнения $P(x)=0$ степени n, то с помощью теоремы Безу можно свести задачу к решению уравнения степени $n-1$, т. е., как говорят, понизить степень уравнения.

Возникает естественный вопрос: как найти хотя бы один корень уравнения?

В случае уравнения с целыми коэффициентами можно отыскать рациональные, в частности целые корни, если, конечно, они существуют.

Способ отыскания рациональных корней алгебраического уравнения с целыми коэффициентами дается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *является корнем уравнения*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем старшего коэффициента a_0.

Доказательство. Подставив дробь $\frac{p}{q}$ в уравнение (1) и освободившись от знаменателя, получим равенство:

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0. \qquad (2)$$

Перепишем равенство (2) двумя способами:

$$a_nq^n=p(-a_0p^{n-1}-a_1p^{n-2}q-\ldots-a_{n-1}q^{n-1}); \qquad (3)$$

$$a_0p^n=q(-a_1p^{n-1}-\ldots-a_{n-1}pq^{n-2}-a_nq^{n-1}). \qquad (4)$$

Из равенства (3) следует, что произведение $a_n q^n$ делится на p, и поскольку q^n и p взаимно просты, то a_n делится на p. Аналогично из равенства (4) следует, что a_0 делится на q. Теорема доказана.

Укажем на два очевидных следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. *Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.*

Следствие 2. *Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, целые.*

Пример 1. Решить уравнение

$$2x^3-7x^2+5x-1=0.$$

Решение. Найдем рациональные корни уравнения. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения. Тогда p надо искать среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел ± 1, а q — среди положительных делителей старшего коэффициента: 1; 2. Таким образом, рациональные корни уравнения надо искать среди чисел ± 1, $\pm\frac{1}{2}$. Проверка показывает, что корнем уравнения является только число $\frac{1}{2}$.

Разложим левую часть уравнения на множители, учитывая, что нужно вынести за скобку множитель $(2x-1)$. Перепишем уравнение в виде $2x^3-x^2-6x^2+3x+2x-1=0$. Получим: $x^2(2x-1)-$ $-3x(2x-1)+(2x-1)=0$, или $(2x-1)(x^2-3x+1)=0$.

Приравнивая второй множитель к нулю, приходим к квадратному уравнению, имеющему корни $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Как уже отмечалось выше, понижение степени уравнения $P(x)=0$ в случае, когда известен его корень α, сводится к нахождению частного от деления $P(x)$ на $x-\alpha$.

Деление многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

на двучлен $x-\alpha$ удобно выполнять по так называемой схеме Горнера. Обозначим неполное частное при делении $P(x)$ на $x-\alpha$ через $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$, а остаток — через b_n. Так как $P(x)=Q(x)(x-\alpha)+b_n$, то имеет место тождество

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})(x-\alpha)+b_n.$$

Раскроем в правой части этого равенства скобки и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Получим, что $a_0=b_0$ и при $1\leqslant k\leqslant n$ имеют место соотношения $a_k=b_k-\alpha b_{k-1}$. Отсюда следует, что $b_0=a_0$ и $b_k=a_k+\alpha b_{k-1}$ при $1\leqslant k\leqslant n$.

Вычисление коэффициентов многочлена $Q(x)$ и остатка b_n записывают в виде следующей таблицы:

a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
$b_0=a_0$	$b_1=a_1+\alpha b_0$	$b_2=a_2+\alpha b_1$	...	$b_{n-1}=a_{n-1}+$ $+\alpha b_{n-2}$	$b_n=a_n+\alpha b_{n-1}$

Она называется *схемой Горнера*. В первой строке этой таблицы записаны коэффициенты многочлена $P(x)$. Во сторой строке получаются коэффициенты частного и остаток. Старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Если уже заполнено несколько клеток второй строки, то следующая пустая клетка заполняется так: берут стоящее над ней число первой строки и прибавляют к нему произведение α и предыдущего элемента второй строки. В последней клетке второй строки под свободным членом делимого получается остаток от деления.

Так как по теореме Безу $b_n=P(\alpha)$, то схема Горнера позволяет находить значение многочлена $P(x)$ при $x=\alpha$. Во многих случаях вычисление по схеме Горнера удобнее, чем непосредственная подстановка α в многочлен $P(x)$.

Пример 2. Вычислить $P(3)$, где

$$P(x)=4x^5-7x^4+5x^3-2x+1.$$

	4	−7	5	0	−2	1
3	4	5	20	60	178	535

Значит, $P(3)=535$.

Пример 3. Разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен

$$P(x)=2x^4-7x^3-3x^2+5x-1.$$

Решение. Ищем целые корни среди делителей свободного члена: ± 1. Подходит -1. Делим $P(x)$ на $x+1$:

	2	−7	−3	5	−1
−1	2	−9	6	−1	0

$$P(x)=(x+1)(2x^3-9x^2+6x-1).$$

Ищем целые корни кубического многочлена среди делителей его свободного члена: ± 1. Вычисления показывают, что целых корней нет. Так как старший коэффициент многочлена не равен 1, то многочлен может иметь дробные рациональные корни. Дробными корнями могут быть только числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Подходит $\frac{1}{2}$:

	2	-9	6	-1
$\frac{1}{2}$	2	-8	2	0

Имеем:

$$P(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+2)=$$
$$=(x+1)(2x-1)(x^2-4x+1).$$

Трехчлен x^2-4x+1 на множители с целыми коэффициентами не раскладывается.

Ответ. $P(x)=(x+1)(2x-1)(x^2-4x+1)$.

Дополнительные упражнения

1. Докажите, что многочлен с положительными коэффициентами не может иметь положительных корней.

2. Докажите, что число 1 является корнем многочлена тогда и только тогда, когда сумма его коэффициентов равна нулю.

3. Для того чтобы число -1 являлось корнем многочлена, необходимо и достаточно, чтобы сумма его коэффициентов, стоящих на четных местах, равнялась сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах. Докажите.

4. Разложите на множители с целыми коэффициентами:

а) x^3-2x^2-5x+6; б) x^3-3x^2+x+1;
в) $2x^3+5x^2+x-2$; г) x^3-2x-1;
д) $x^4+4x^3-25x^2-16x+84$; е) $x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72$.

5. Решите уравнения:

а) $x^3-5x+4=0$; б) $x^3-3x^2+2=0$; в) $x^3-7x-6=0$;
г) $x^3-8x^2+40=0$; д) $8x^3-4x+1=0$; е) $16x^3-6x-1=0$;
ж) $2x^4-5x^3-x^2+3x+1=0$; з) $2x^4-7x^3-7x^2+3x+1=0$;
и) $x^3-5x^2+3x+1=0$; к) $2x^4-5x^3+5x^2-2=0$.

6. Найдите a и решите уравнение, если известен один из его корней:

а) $2x^3-(a+4)x^2+2(a-1)x+a=0$, $x_1=0{,}5$;
б) $6x^3+2(a-9)x^2-3(2a-1)x+a=0$, $x_1=\frac{1}{3}$.

7. Решите уравнения:

а) $\frac{4(x+3)}{2x^3+x^2-8x-4}-\frac{5}{2x^2-3x-2}=1$;

б) $\frac{x^2-5x-6}{2x^3+3x^2-2x-3}=\frac{4x^2-20}{2x^2+x-3}$.

8. Решите уравнения:

а) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$; б) $(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)=4$;

в) $(x-1)(x-5)^2(x-9)=-39$; г) $(x^2-2x)(2x-3)(2x-1)=2{,}5$;

д) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$; е) $x^4+x^3-16x^2+2x+4=0$;

ж) $x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0$; з) $x^4+2x^3-9x^2-6x+9=0$;

и) $5x+\frac{5}{2x}=2x^2+\frac{1}{2x^2}+4$; к) $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=2$.

9. Многочлен $P(x)=2x^3+x^2+ax+b$ при делении на $x+1$ дает остаток 18, а на $x-2$ делится без остатка. Найдите корни многочлена.

10. Многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ при делении на $x+1$ и на $x+2$ дает остаток 12. Один из корней многочлена $P(x)$ равен 1. Найдите остальные корни многочлена.

11. Решите неравенства:

а) $x^3-4x^2+5x-2\geqslant 0$; б) $x^3-12x+16>0$;

в) $x^3-5x^2+8x-4\leqslant 0$; г) $x^3-7x^2+16x-12<0$;

д) $(x^2-3x)(x-1)(x-2)\leqslant 24$; е) $(x-2)(x-3)^2(x-4)>20$;

ж) $(x^2-6x+8)(x^2-18x+80)<64$; з) $x^3(x+1)\geqslant(13x+12)(x+1)$;

и) $x^3(x-2)\leqslant(7x-6)(x-2)$; к) $\frac{x^3-4x}{x^2+5x+6}\geqslant\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$;

л) $(x^2+5x)(x^2-9x+18)>(x^3-9x)(x^2-x-30)$;

м) $(x^3-16x)(x^2+x-6)>(x^2+4x)(x^2-x-12)$;

н) $\frac{x(x-6)}{2}\geqslant\frac{5x-6}{1-x}$; о) $4x^2|x|-12x^2+9|x|-2<0$.

12. Решите неравенства (a — параметр):

а) $ax^2+1>0$; б) $ax^2-4\leqslant 0$; в) $x^2-ax\leqslant 0$;

г) $ax<\frac{9}{x}$; д) $\frac{a}{x}\geqslant x$; е) $x^2-2ax+1>0$;

ж) $ax^2-2x-1>0$; з) $ax^2+ax-5\leqslant 0$; и) $x^2-ax+a-1\geqslant 0$.

13. При каких значениях параметра a решениями неравенства относительно x являются все действительные числа:

а) $x^2-2x+a-3>0$; б) $ax^2-2x+3>0$; в) $x^2-9x+(a-3)^2\geqslant 0$;

г) $ax^2-6x-1<0$; д) $ax^2-2ax-3\leqslant 0$; е) $\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}\leqslant 2$?

14. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2-4x+1 \geqslant 0, \\ 3x^2-5x+2<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-0{,}25>0, \\ 2x^2-5x+3<0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x^2-6\,|x|+9)(|x|-2)>0, \\ x^2-x-20 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-7x-18 \leqslant 0, \\ (x-2)^2-4\,|x-2|+3 \geqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |2x+3|<2, \\ \dfrac{3x^2-1}{x+2}<\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} |x-2| \geqslant 1, \\ \dfrac{2x+3}{x^2-1}<\dfrac{7}{3}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 10 \leqslant x^2-8x+25<18, \\ 7+6|2x-3|-(2x-3)^2 \leqslant 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4-x}<2, \\ x^3<25x, \\ 16-x^2 \geqslant 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dfrac{x^2-9|x|+14}{x-3}<0, \\ |x-4|\cdot(|x+3|-8)<0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 2x^4+x^3-7x^2+5x-1>0, \\ x^2-2x-1<0. \end{cases}$

Ответы к дополнительным упражнениям

5. в) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=3$; ж) $x_1=-0{,}5$, $x_2=1$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$. **6.** б) $a=-1$, $x_1=-0{,}5$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{5}$. **7.** а) $x_1=-1$, $x_2=-1{,}5$. **8.** а) $x_1=x_2=-4$, $x_{3,4}=-4\pm\sqrt{10}$; в) $x_{1,2}=5\pm\sqrt{13}$, $x_{3,4}=5\pm\sqrt{3}$. **9.** $x_1=0{,}5$, $x_2=2$, $x_3=-3$. **10.** $x_2=-3$, $x_3=2$. **11.** а) $x=1$, $x\geqslant 2$; г) $x<2{,}2<x<3$; о) $-2<x<2$, $x\neq\pm 0{,}5$. **12.** а) При $a\geqslant 0$ x — любое действительное число, при $a<0$ $-\sqrt{-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{-\frac{1}{a}}$; г) при $a\leqslant 0$ $x>0$, при $a>0$ $x<-\frac{3}{\sqrt{a}}$, $0<x<\frac{3}{\sqrt{a}}$. **13.** д) $-3\leqslant a\leqslant 0$.

3. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Первые упражнения по теме основаны на определении предела функции в точке.

Определение 1. Число b называется *пределом функции f в точке a*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Для доказательства того, что число b является пределом функции f при $x\to a$, достаточно найти число $\delta>0$, о котором говорится в определении предела, по заданному $\varepsilon>0$.

Пример 1. Доказать, что

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x-3}=12.$$

Решение. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число. Составим неравенство

$$\left|\frac{2x^2-18}{x-3}-12\right|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Неравенство (1) равносильно неравенству

$$0<|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (2)$$

из которого следует, что в качестве δ можно взять $\frac{\varepsilon}{2}$. В силу равносильности (1) и (2) из неравенства $0<|x-a|<\delta$ будет следовать неравенство (1).

Пример 2. **(342(1))**. Доказать, что

$$\lim_{x\to 4} x^2=16.$$

Решение. Надо доказать, что по любому заданному $\varepsilon>0$ можно подобрать такое $\delta>0$, что из неравенства $0<|x-4|<\delta$ следует неравенство

$$|x^2-16|=|x+4|\cdot|x-4|<\varepsilon. \qquad (3)$$

Число δ будем выбирать постепенно. Сначала рассмотрим окрестность точки 4 радиуса 1 ($\delta=1$), т. е. значения x, для которых $|x-4|<1$. В рассматриваемой окрестности

$$|x+4|=|x-4+8|\leqslant|x-4|+8<9$$

и поэтому $|x+4|\cdot|x-4|<9|x-4|$. Чтобы выполнялось неравенство (3), достаточно, чтобы $|x-4|<\frac{\varepsilon}{9}$. Таким образом, в качестве δ можно взять меньшее из чисел 1 и $\frac{\varepsilon}{9}$, т. е. $\delta=\min\left(1;\ \frac{\varepsilon}{9}\right)$.

Определение 2. Число b называется *правым (левым) пределом* функции f в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что из неравенства $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ следует неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Для обозначения правого (левого) предела функции f в точке a используют следующую символику:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b; \quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=b\right)$$

или более краткую символику:

$$f(a+0)=b; \qquad (f(a-0)=b).$$

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & \text{при } x>0, \\ -1 & \text{при } x<0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке 0 как правый, так и левый пределы, причем $f(+0)=1$, $f(-0)=-1$. В самом деле, в любой «правой полуокрестности» точки 0, т. е. при $0<x<\delta$ $(\delta>0)$, имеем $f(x)=1$, и поэтому для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $|f(x)-1|=|1-1|=0<\varepsilon$; это и означает, что $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$.

Итак, функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$, не имеющая предела в точке 0, имеет в этой точке правый предел, равный 1, и левый предел, равный -1. Тот факт, что правый и левый пределы этой функции не равны друг другу, не является случайным, ибо справедливо следующее утверждение: *предел функции f при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба односторонних предела $f(a-0)=f(a+0)$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться определениями 1 и 2 и учесть, что если неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ справедливо для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, то оно справедливо и для всех значений x, удовлетворяющих каждому из неравенств $a-\delta<x<a$ и $a<x<a+\delta$. Верно и обратное: если неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ справедливо для всех значений x, удовлетворяющих каждому из неравенств $a-\delta_1<x<a$ и $a<x<a+\delta_2$ $(\delta_1>0,\ \delta_2>0)$, то оно справедливо и для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, где $\delta=\min(\delta_1;\ \delta_2)$.

Пример 3. **(352 (6))**. Найти односторонние пределы функции

$$f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ при } x<-1, \\ x^2 \text{ при } -1\leqslant x<2, \\ 5-x \text{ при } x\geqslant 2 \end{cases}$$

в точках $x=-1$ и $x=2$. Существуют ли пределы функции f при $x\to -1$ и $x\to 2$?

Решение. Для значений $x<-1$ функция определяется формулой $f(x)=x+2$. Следовательно, левый предел функции в точке $x=-1$ определяется равенством $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}(x+2)$. Так как предел функции $x+2$ при $x\to -1$ равен 1, то $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to -1-0}(x+2)=\lim\limits_{x\to -1}(x+2)=1$.

Рассуждая аналогично, имеем $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0} x^2=\lim\limits_{x\to -1} x^2=1$.

Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=1$, то $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$.

Аналогично находим, что $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=3$, и так как $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не существует.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление предела функции в точке.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}+2x^{50}-3}{x^{20}-3x^{10}+2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}+2x^{50}-3}{x^{20}-3x^{10}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{100}-1)+2(x^{50}-1)}{(x^{20}-1)-3(x^{10}-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{99}+x^{98}+\ldots+x+1)+2(x^{49}+x^{48}+\ldots+x+1)}{(x^{19}+x^{18}+\ldots+x+1)-3(x^{9}+x^{8}+\ldots+x+1)}=\frac{100+2\cdot 50}{20-3\cdot 10}=-20.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{x+4-9}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{6}.$$

Вычисление пределов, содержащих иррациональности, иногда упрощается введением новой переменной.

Пример 6. Вычислить

$$\lim_{x \to 5} \frac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}.$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x+22} = t$, тогда $x = t^3 - 22$. Если $x \to 5$, то $t \to 3$.

$$\lim_{x \to 5} \frac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5} = \lim_{t \to 3} \frac{3-t}{t^2-27} = -\lim_{t \to 3} \frac{1}{t^2+3t+9} = -\frac{1}{27}.$$

Пример 7. Вычислить

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5}.$$

Решение. Введем подстановку $\sqrt[4]{x+11} = t$. Тогда $x = t^4 - 11$. Если $x \to 5$, то $t \to 2$.

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5} = \lim_{t \to 2} \frac{t-2}{t^4-16} = \lim_{t \to 2} \frac{1}{(t^2+4)(t+2)} = \frac{1}{32}.$$

Пример 8. Вычислить

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11}-2}.$$

Решение.

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11}-2} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} + \dfrac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+11}-2}{x-5}} = \frac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{27}}{\dfrac{1}{32}} = \frac{112}{27}.$$

Рассмотрим несколько упражнений, связанных с понятием непрерывности функции в точке.

Пример 9. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}} & \text{при } x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 2,\ x \neq 1; \\ 1 & \text{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Выяснить, является ли функция f непрерывной в точках: 0; -1; 2; 1.

Решение. Найдем предел функции f при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{2x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-2}{2(x+1)(x-1)} = 1.$$

Имеем: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Следовательно, функция f в точке $x=0$ непрерывна. Легко видеть, что в точках -1, 2, 1 функция f непрерывной не является.

Пример 10. Даны функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{при } x<1, \\ x^2 & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{при } x \leqslant 5, \\ 3x & \text{при } x>5. \end{cases}$$

Исследовать на непрерывность функцию $f(g(x))$.

Решение. Так как $2x-5<1$ при $x<3$, $2x-5 \geqslant 1$ при $3 \leqslant x \leqslant 5$, $3x>1$ при $x>5$, то

$$f(g(x)) = \begin{cases} 3(2x-5)+7 & \text{при } x<3, \\ (2x-5)^2 & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ (3x)^2 & \text{при } x>5. \end{cases}$$

Легко видеть, что точками разрыва функции $f(g(x))$ будут только точки $x=3$ и $x=5$.

Пример 11. Дана функция $f(x) = \frac{x^7-1}{x^2-1}$. Как следует доопределить эту функцию в точке $x=1$, чтобы она стала в этой точке непрерывной?

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^2-1} = \frac{7}{2}$, то доопределяем функцию в точке $x=1$ значением, равным $\frac{7}{2}$, получаем функцию

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^7-1}{x^2-1} & \text{при } x \neq 1, \\ \dfrac{7}{2} & \text{при } x=1, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x=1$.

Пример 12. При каких значениях a и b функция

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{при } x<2, \\ 3 & \text{при } x=2, \\ x^2+b & \text{при } x>2 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x=2$?

Решение. Функция f непрерывна в точке $x=2$, если

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=f(2)=3.$$

Имеем:

$$\begin{cases} 2a+1=3, \\ 4+b=3. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, находим $a=1$, $b=-1$.

Дополнительные упражнения

1. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{9-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^3-3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{32x^5+1}{2x^3-7x^2+6x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{2x^3-3x^2+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-9x+27}{x^4-18x^2+81}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{3x-x^3-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{11}-2x-1}{x^5-2x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{30}-2x^{27}+3x^{13}-2}{x^{37}-5x^{10}+3x^3+1}$;

к) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x^3-3x^2+3x-2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

2. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x^3-7x^2-13x-6}{x^3+x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^5-4x^4+4x^3+2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^3-3x^2+4)^{50}}{(x^2-3x+2)^{100}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-(1+4x)}{x^2+x^7}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x-2)^{30}}{(x^4-2x^3+2x-1)^{10}}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^2+3x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+3x)(1+5x)(1+7x)-(1+16x)}{x^2}$.

3. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{2x+7}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+7}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-\sqrt{x}}{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-1}{x\sqrt{x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt[3]{x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3-x}-1}{4-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{x+17}-2}{x+1}$.

4. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+7}}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3+2x}}{\sqrt[4]{2-14x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{3+x}-2}-\dfrac{\sqrt{5x^2+4x^3}-\sqrt{x^4+8x^3}}{\sqrt{x}-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\left(\dfrac{x^4-x^2\sqrt[3]{4}}{(x-\sqrt[3]{2})^2}-\dfrac{2\,(x^5+x^4\sqrt[3]{2}+x^3\sqrt[3]{4})}{x^3-2}\right)^3$.

5. При каких значениях a функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1} & \text{при } x\neq 1,\\ a & \text{при } x=1\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x_0=1$?

6. При каких значениях a и b функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+3x+1}{x-1} & \text{при } x>1,\\ x+b & \text{при } x\leqslant 1\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x_0=1$?

7. При каких значениях a и b функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+bx+3}{x-1} & \text{при } x<1,\\ x+1 & \text{при } x\geqslant 1\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x_0=1$?

8. Найдите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}$; е) $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{6}}\dfrac{\cos 3x}{2\cos x+\sqrt{3}}$.

9. Найдите пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{3n-1}+\frac{6n^3+1}{1-9n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^3+8}-\frac{n^2}{n+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(2n-1)(n+3)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^n}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 3^{n-1}}{2^{n+1}+3^n}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+2^{n-1}}{2^{n+1}+3}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5+\ldots+(4n-3)}{(2n+1)(1-5n)}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n}{3}\right)$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!}$.

10. Найдите пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5}-n+1)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n-2}-2n-1)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-(2n)}{\sqrt{n^2+1}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

11. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, если известно, что при любом $n\in\mathbf{N}$:

а) $0<a_n<\frac{n+1}{n^2}$; б) $2\leqslant a_n<\frac{2n+7}{n+1}$; в) $\frac{3n+1}{n}<a_n\leqslant\frac{3n+5}{n}$.

Ответы к дополнительным упражнениям

1. д) $\frac{1}{6}$; ж) 3; з) $-\frac{1}{6}$; и) $-\frac{15}{4}$; к) -1. **2.** а) 2; б) $-1{,}5$; г) 3^{50}; д) $\frac{n(n+1)}{2}$; е) 6; ж) $\left(\frac{27}{2}\right)^{10}$; з) 8; и) 86. **3.** г) 4,5; д) $\frac{14}{3}$; е) $\frac{9}{8}$; з) $\frac{1}{32}$. **4.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{8}{21}$; в) -6. **5.** $a=-5$. **6.** $a=-4$, $b=-6$. **7.** $a=5$, $b=-8$. **8.** а) 1; б) -2; в) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; г) $-4\sqrt{3}$. **9.** а) $\frac{5}{9}$; б) 2; в) 4,5; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{5}{3}$; е) 0,5; ж) $-\frac{1}{5}$; з) $\frac{1}{5}$; и) $-\frac{1}{2}$; к) 1. **10.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2; в) 1; г) $-\frac{1}{4}$; д) -1; е) $\frac{a+b}{2}$. **11.** а) 0; б) 2; в) 3.

4. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Напомним основные определения и факты.

Определение 1. Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* f, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 2. Прямая $y=kx+b$ называется *асимптотой* графика функции f при $x\to+\infty$, если функция f представима в виде

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \quad (1)$$

где $$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x)=0.$$

При этом если $k\neq 0$, то асимптота $y=kx+b$ называется *наклонной*, а если $k=0$ — то *горизонтальной*.

Теорема. *Для того чтобы график функции f имел при $x\to+\infty$ асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно существование пределов:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx)=b. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть график функции f имеет при $x\to+\infty$ асимптоту $y=kx+b$, т. е. для f справедливо представление (1). Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k;$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty} (b+\alpha(x))=b.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы (2). Из второго из этих равенств следует, что разность $f(x)-kx-b$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$. Обозначив эту бесконечно малую через $\alpha(x)$, получим для $f(x)$ представление (1). Теорема доказана.

Замечание. Аналогично определяется асимптота (наклонная и горизонтальная) и доказывается теорема для случая $x\to-\infty$.

В качестве примера рассмотрим упражнение 299 из учебного пособия.

299 (4). Для графика функции $f(x)=\frac{x^4-1}{x^4+1}$ горизонтальной асимптотой как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ является прямая $y=1$. Это следует из того, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$. Вертикальных асимптот данная функция не имеет (x^4+1 не обращается в нуль ни в одной точке).

299 (5). График функции $\varphi(x)=\frac{x^4-1}{x^3+6}$ имеет наклонную асимптоту $y=x$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$, так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}=1, \quad \lim_{x\to\infty} (\varphi(x)-x)=0.$$

Это следует также из того факта, что функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде $\varphi(x)=x+\alpha(x)$, где $\alpha(x)=-\frac{6x+1}{x^3+6}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x)=0$.

Вертикальной асимптотой для графика функции $\varphi(x)$ является прямая $x=-\sqrt[3]{6}$, так как $\lim\limits_{x\to-\sqrt[3]{6}} \varphi(x)=\infty$.

Графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ имеют вертикальные асимптоты $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $y=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, соответственно. График функции $y=\operatorname{arctg} x$ имеет при $x \to +\infty$ горизонтальную асимптоту $y=\frac{\pi}{2}$, а при $x \to -\infty$ асимптоту $y=-\frac{\pi}{2}$. График функции $y=\operatorname{arcctg} x$ имеет также две горизонтальные асимптоты: $y=0$ при $x \to +\infty$ и $y=\pi$ при $x \to -\infty$. График функции $y=\log_a x\,(a>0,$ $a \neq 1)$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$.

Рассмотрим еще несколько примеров нахождения асимптот.

Пример 1. $f(x)=\frac{|x|}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-1$. Следовательно, график имеет две горизонтальные асимптоты: $y=1$ и $y=-1$.

Пример 2. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}}{3x+1}$.

Найдем пределы функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Разделим числитель и знаменатель на $|x|$:

$$\varphi(x)=\frac{\frac{\sqrt{x^2+5}}{|x|}}{\frac{3x+1}{|x|}}=\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3\cdot\frac{x}{|x|}+\frac{1}{|x|}}.$$

Пусть $x \to +\infty$. Можно рассмотреть функцию на любом промежутке $(a;\ +\infty)$, где $a \geqslant 0$, например на $(0;\ +\infty)$. Так как в этом случае $|x|=x$, то $f(x)=\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}}$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\frac{1}{3}$.

Пусть $x \to -\infty$. Можно считать, что $x<0$, тогда $|x|=-x$ и $f(x)=-\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}}$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\frac{1}{3}$.

Итак, график функции имеет две горизонтальные асимптоты: $y=\frac{1}{3}$ при $x \to +\infty$ и $y=-\frac{1}{3}$ при $x \to -\infty$.

Пример 3. $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}=0$, то прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$. Заметим, что прямая $y=0$ не является горизонтальной асимптотой графика f при $x \to -\infty$, так как $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$.

Для выяснения расположения графика функции относительно асимптоты необходимо определить знак разности $f(x)-(kx+b)$ отдельно в каждом из случаев: $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Если он будет положителен, то график функции расположен над асимптотой, а если

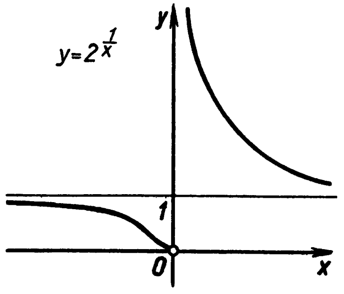


Рис. 1

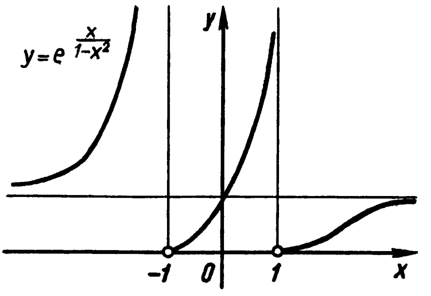


Рис. 2

отрицателен, то под асимптотой; если же разность $f(x)-(kx+b)$ меняет знак, то асимптота пересекает график.

При нахождении вертикальной асимптоты также нужно рассмотреть предел функции отдельно в каждом из случаев: $x\to a+0$ и $x\to a-0$, где a — точка разрыва (полюс) функции.

Пример 4. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$.

Функция f определена для всех значений x, кроме $x=0$. Найдем пределы функции при $x\to\pm\infty$ и при $x\to\pm 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{x}}=1,\quad \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}}=0.$$

Отсюда следует, что $y=1$ — горизонтальная асимптота при $x\to\pm\infty$, а $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to+0$. Так как при $x>0$ имеем $2^{\frac{1}{x}}>1$, а при $x<0$ $0<2^{\frac{1}{x}}<1$, то при $x>0$ график расположен выше асимптоты $y=1$, а при $x<0$ — ниже (рис. 1).

Пример 5. $f(x)=e^{\frac{x}{1-x^2}}$.

Функция определена для всех значений x, кроме $x=\pm 1$. Имеем:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{1-x^2}}=1,\quad \lim_{x\to-1-0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-1+0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{x}{1-x^2}}=0,$$

т. е. $y=1$ — асимптота при $x\to\pm\infty$, $x=-1$ — асимптота при $x\to-1-0$ и $x=1$ — асимптота при $x\to 1-0$. График функции $f(x)$ изображен на рисунке 2.

Пример 6. $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$.

Функция определена при $x\neq 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{\pi}{x}\right)=0$, то вертикальной асимптоты у графика нет. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{\pi}{x}\right)=\infty$, то горизонтальной асимптоты также нет.

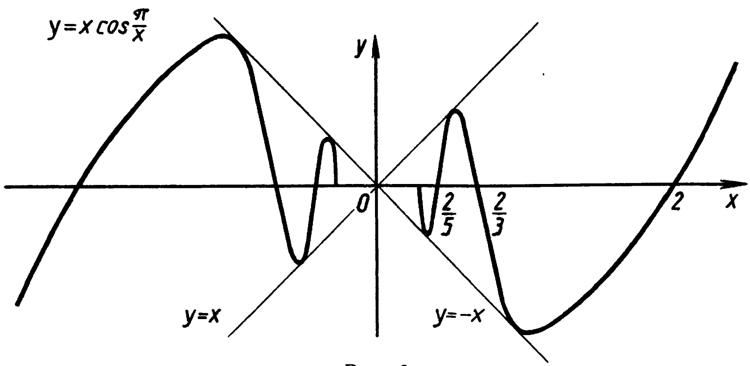


Рис. 3

Выясним, есть ли у графика f наклонная асимптота. Так как

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\pi}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{\pi}{x}-x\right)=-\lim_{x\to\infty}\left(2x\sin^2\frac{\pi}{2x}\right)=-\frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{2x}}{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^2}\right)=0,$$

то прямая $y=x$ — наклонная асимптота графика функции при $x\to\infty$ (рис. 3).

Дополнительные упражнения

Найдите асимптоты графиков функций:

1. $y=\frac{1}{(x-2)^2}$; 2. $y=\frac{x^3}{x^2+9}$; 3. $y=\sqrt{x^2-4}$; 4. $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}$;
5. $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$; 6. $y=\frac{\sin x}{x}$; 7. $y=x\operatorname{arctg}x$; 8. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;
9. $y=\arcsin\frac{1}{x}$; 10. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

Ответы к дополнительным упражнениям

1. $x=2$, $y=0$. **2.** $y=x$. **3.** $y=-x$, $y=x$. **4.** $y=-1$, $y=1$. **5.** $x=-1$, $x=1$, $y=-x$, $y=x$. **6.** $y=0$. **7.** $y=-\frac{\pi}{2}x-1$, $y=\frac{\pi}{2}x-1$. **8.** $y=2x+1$. **9.** $y=0$. **10.** $y=\frac{\pi}{2}$.

5. ПРОИЗВОДНАЯ

Вычисление производной по определению. Согласно определению, значение производной функции f в точке a выражается формулой

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \qquad (1)$$

Положив в формуле (1) $h=x-a$, получим:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \qquad (2)$$

Пример 1. Пользуясь определением производной, вычислить значение производной функции $f(x)=x^3-3x$ в точке 1.

Решение. Для вычисления $f'(1)$ воспользуемся формулой (2):

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x)-(1^3-3\cdot 1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)=0.$$

Пример 2. Найти $f'(2)$, $f'(6)$, если $f(x)=|x^2-6x+5|$. Доказать, что в точках 5 и 1 функция не имеет производной.

Решение. Так как при $1\leqslant x\leqslant 5$ значения функции вычисляются по формуле $f(x)=-x^2+6x-5$, а при $x\geqslant 5$ по формуле $f(x)=x^2-6x+5$, то

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(-x^2+6x-5)-3}{x-2}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=-\lim_{x\to 2}(x-4)=2;$$

$$f'(6)=\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(x^2-6x+5)-5}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x-6}=6.$$

Докажем теперь, что в точке $x=5$ функция не имеет производной. Составим «разностное» отношение:

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{|x^2-6x+5|}{x-5}.$$

Так как односторонние пределы

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5+0}\frac{x^2-6x+5}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x-1)=4;$$

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=-\lim_{x\to 5-0}\frac{x^2-6x+5}{x-5}=-\lim_{x\to 5}(x-1)=-4$$

не равны, то $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$ не существует, т. е. данная функция не имеет производной в точке $x=5$. Аналогично доказывается, что в точке $x=1$ функция также не имеет производной.

Пример 3. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\leqslant 1,\\ ax+b & \text{при } x>1.\end{cases}$$

При каких значениях a и b функция f будет дифференцируемой в точке $x=1$?

Решение. Необходимым условием дифференцируемости функции является ее непрерывность. Функция f будет непрерывна в точке $x=1$, если $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$, т. е. если $a+b=1$, или $b=1-a$.

Для дифференцируемости функции f в точке $x=1$ требуется существование предела

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}. \qquad (3)$$

Для существования предела (3) необходимо и достаточно существование и равенство односторонних пределов

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ и } \lim_{x \to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{a(x-1)}{x-1} = a.$$

Следовательно, должно выполняться равенство $a=2$. Учитывая, что $b=1-a$, находим $b=-1$.

Исследование функции на возрастание и убывание. Напомним условия, обеспечивающие монотонность функции на заданном промежутке.

Теорема 1. *Для того чтобы функция f возрастала (убывала) на данном интервале* (или на открытом луче, или на числовой прямой), *достаточно, чтобы производная f' была положительной (отрицательной) в каждой точке этого интервала* (открытого луча, прямой). *Если при этом функция f непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания)* (достаточно даже соответствующей односторонней непрерывности), *то этот конец можно присоединить к упомянутому промежутку.*

Замечание. Подчеркнем, что требование положительности (отрицательности) производной f' на данном промежутке не является необходимым условием возрастания (убывания) функции на этом промежутке. Так, функция $f(x)=x^3$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, но производная этой функции $f'(x)=3x^2$ не является положительной в каждой точке числовой прямой (она обращается в нуль при $x=0$). Имеет место следующая теорема:

Теорема 1′. *Если производная f' неотрицательна (неположительна) в любой точке некоторого промежутка и равна нулю лишь в конечном числе точек, то функция f возрастает* (соответственно *убывает*) *на этом промежутке.*

Доказательство теорем 1 и 1′ приводится в учебном пособии.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма. *Если функция f возрастает (убывает) на промежутках $(a;\ c]$ и $[c;\ b)$, то f возрастает (убывает) на $(a;\ b)$.*

Доказательство. Пусть $a<x_1<x_2<b$. Если x_1 и x_2 принадлежат оба одному из промежутков $(a;\ c]$, $[c;\ b)$, то $f(x_1)<f(x_2)$, так как f возрастает на соответствующем промежутке. Если же $x_1 \in (a;\ c)$, $x_2 \in (c;\ b)$, то $f(x_1)<f(c)<f(x_2)$. Лемма доказана.

Легко понять, что лемму можно переформулировать и на случай, когда какая-либо из точек a или b будет принадлежать упомянутым промежуткам, или если $a=-\infty$ или $b=+\infty$.

Теорема 2. *Функция f возрастает (убывает) на промежутке I, если производная этой функции положительна (отрицательна) всюду на этом промежутке, за исключением конечного числа точек, в которых функция непрерывна* (в этих точках производная может и не существовать).

Доказательство. Пусть для определенности промежуток I совпадает с некоторым интервалом $(a; b)$ и пусть неравенство $f'(x)>0$ выполняется в каждой точке интервала $(a; b)$, за исключением точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будем считать, что эти точки занумерованы в порядке возрастания, т. е. $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$. Так как на каждом из интервалов $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_n; b)$ выполняется условие $f'(x)>0$ и в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функция непрерывна, то согласно теореме 1 функция возрастает на $(a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_n; b)$. Для завершения доказательства осталось несколько раз последовательно применить доказанную лемму. В самом деле, так как f возрастает на $(a; x_1]$ и $[x_1; x_2]$, то f возрастает на $(a; x_2]$. Далее точно так же доказываем, что f возрастает на $(a; x_3]$ (так как f возрастает на $(a; x_2]$ и $[x_2; x_3]$) и т. д. Через конечное число шагов получим, что функция возрастает на $(a; b)$. Теорема доказана.

В случае $f'(x)<0$ доказательство аналогично.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x)=x^3-2x^2+3x-1$ на монотонность.

Решение. Имеем: $f'(x)=3x^2-4x+3$. Так как дискриминант квадратного трехчлена $3x^2-4x+3$ отрицателен, а старший коэффициент положителен, то $3x^2-4x+3>0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, функция f является возрастающей на всей числовой прямой (теорема 1).

Пример 2. **(459(1)).** Найти промежутки монотонности функции

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+2.$$

Решение. Находим производную $f'(x)=3(x-1)^2$. Так как $f'(x)\geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и $f'(x)=0$ лишь при $x=1$, то согласно теореме 1′ функция возрастает на $\boldsymbol{R}$ (возможна ссылка и на теорему 2).

Пример 3. Исследовать на монотонность функцию

$$f(x)=x^5-5|x-1|.$$

Решение. Функция f непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Представив функцию в виде

$$f(x)=\begin{cases} x^5+5x-5 & \text{при } x<1, \\ x^5-5x+5 & \text{при } x\geqslant 1, \end{cases}$$

находим:

$$f'(x)=\begin{cases} 5(x^4+1) & \text{при } x<1, \\ 5(x^4-1) & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Очевидно, $f'(x)>0$ для всех $x\in \mathbf{R}$, за исключением одной точки $x=1$ (в этой точке производная не существует), в которой функция непрерывна. Следовательно, функция возрастает на $\mathbf{R}$ (теорема 2).

Пример 4 **(459(7))**. Найти промежутки монотонности функции $f(x)=(x-1)^4(x+2)^3$.

Решение. Функция дифференцируема на $\mathbf{R}$. $f'(x)=(x+2)^2\times$ $\times(x-1)^3(7x+5)$. Рассмотрим промежутки $\left(-\infty;-\frac{5}{7}\right]$, $[1;+\infty)$. На этих промежутках $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)=0$ при $x=-2$, $x=-\frac{5}{7}$, $x=1$). Согласно теореме 1′ функция f возрастает на $\left(-\infty;-\frac{5}{7}\right]$ и на $[1;+\infty)$.

Рассмотрим промежуток $\left[-\frac{5}{7};\ 1\right]$. На этом промежутке $f'(x)\leqslant 0$ ($f'(x)=0$ при $x=-\frac{5}{7}$; $x=1$). Согласно теореме 1′ функция убывает на $\left[-\frac{5}{7};\ 1\right]$.

Пример 5. Дано $f(x)=x^3-3|x|$. Найти промежутки монотонности функции f.

Решение. Так как

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x & \text{при } x<0,\\ x^3-3x & \text{при } x\geqslant 0,\end{cases}$$

то

$$f'(x)=\begin{cases} 3(x^2+1) & \text{при } x<0,\\ 3(x^2-1) & \text{при } x>0,\end{cases}$$

$f'(x)=0$ при $x=1$, $f'(x)$ не существует при $x=0$. Точки 0 и 1 разбивают числовую прямую на три интервала, на каждом из которых производная сохраняет постоянный знак: $f'(x)>0$ при $x<0$ и $x>1$, $f'(x)<0$ при $0<x<1$. Учитывая непрерывность функции в точках 0 и 1, заключаем, что функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ 0]$ и $[1;\ +\infty)$ и убывает на $[0;\ 1]$ (теорема 1 или 2).

Пример 6. При каких значениях m функция

$$f(x)=2x^3-3(m+2)x^2+48mx+6x-3$$

возрастает на всей числовой прямой?

Решение. Имеем: $f'(x)=6(x^2-(m+2)x+8m+1)$. Функция f будет возрастающей на $\mathbf{R}$, если $f'(x)\geqslant 0$ при любом $x\in\mathbf{R}$. Так как $f'(x)$ является квадратным трехчленом с положительным старшим коэффициентом, то это условие будет выполняться только в случае, если дискриминант трехчлена неположителен, т. е. если $(m+2)^2-4(8m+1)\leqslant 0$. Решив неравенство, находим нужные значения для m: $0\leqslant m\leqslant 28$.

Геометрический смысл производной. Решение большинства задач по этой теме основано на прямом использовании уравнения касательной:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{1}$$

Необходимо иметь в виду, что угловой коэффициент k касательной равен, с одной стороны, тангенсу угла α между касательной и осью абсцисс, а с другой — значению производной функции f в точке x_0:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0). \tag{2}$$

Рассмотрим некоторые задачи на геометрический смысл производной.

Пример 1. Написать уравнение касательных к графику функции $f(x)=x^2-3x+2$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

Решение. Абсциссы точек касания найдем, решив уравнение $x^2-3x+2=0$. Имеем: $x_1=1$, $x_2=2$. Воспользовавшись уравнением (1), находим искомые уравнения касательных: $y=1-x$ и $y=x-1$.

Пример 2. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к гиперболе $f(x)=-\frac{6}{x}$, проведенная в точке с абсциссой $x_0=\sqrt{6}$?

Решение. Находим производную $f'(x)=\frac{6}{x^2}$. Воспользуемся формулой (2): $\operatorname{tg}\alpha=f'(\sqrt{6})=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Пример 3. Найти угол между касательными к графику функции $f(x)=x^3-7x^2+14x-7$, проведенными в точках с абсциссами 1 и 2.

Решение. $f'(x)=3x^2-14x+14$. Угловые коэффициенты касательных равны: $k_1=f'(1)=3$, $k_2=f'(2)=-2$. Искомый угол φ найдем по формуле $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$. Имеем: $\operatorname{tg}\varphi=1$, откуда $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Пример 4. В какой точке касательная к графику функции $f(x)=x^2$: а) параллельна прямой $y=2x+5$; б) перпендикулярна этой же прямой?

Решение. а) Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент прямой $y=2x+5$ равен $k_1=2$, угловой коэффициент касательной $k_2=2x_0$, где x_0 — абсцисса точки касания. Из уравнения $2x_0=2$ находим $x_0=1$. Значит, касательная должна быть проведена в точке $M(1;\ 1)$.

б) Воспользуемся тем, что прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2=-1$. В нашем случае $k_1=2$, поэтому $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$, и из уравнения $2x_0=-\frac{1}{2}$ находим $x_0=-\frac{1}{4}$. Значит, касательная должна быть проведена в точке $N\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{16}\right)$.

Пример 5. Найти уравнение параболы $y=ax^2+bx+1$, касающейся прямой $y=7x+2$ в точке $M(1;\ 5)$.

Решение. По условию задачи точка $M(1;\ 5)$ лежит на параболе $y=ax^2+bx+1$, следовательно, $a+b+1=5$. Кроме того, из условия задачи следует, что $y'(1)=7$. Так как $y'(x)=2ax+b$, то получаем $2a+b=7$. Решив систему

$$\begin{cases} a+b+1=5, \\ 2a+b=7, \end{cases}$$

находим $a=3$, $b=1$. Уравнение параболы: $y=3x^2+x+1$.

Пример 6. Является ли прямая $y=x-1$ касательной к кривой $y=x^3-2x+1$?

Решение. Решив уравнение $x^3-2x+1=x-1$, находим общие точки прямой и кривой: $M_1(1;\ 0)$ и $M_2(-2;\ -3)$. Производная функции $y=x^3-2x+1$ равна $y'=3x^3-2$ и ее значения в точках пересечения равны $y'(1)=1$, $y'(-2)=10$. Но угловой коэффициент прямой $y=x-1$ равен 1. Следовательно, данная прямая является касательной к кривой $y=x^3-2x+1$ в точке $M_1(1;\ 0)$.

Дополнительные упражнения

1. Докажите, что следующие функции недифференцируемы в указанных точках:

а) $y=x+|x-2|$, $x_0=2$;

б) $y=|x^3-x|$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$;

в) $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x<0, \\ x+2 & \text{при } x\geqslant 0, \end{cases}$ $x_0=0$;

г) $y=\begin{cases} x & \text{при } x\leqslant 1, \\ 3-x & \text{при } x>1, \end{cases}$ $x_0=1$;

д) $y=\sqrt[5]{x^4}$, $x_0=0$;

е) $y=\sqrt{x^4-2x^2+1}$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

2. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=3x^2-8x^3$; б) $y=x^3-6x^2+15x-1$;

в) $y=\sqrt{x}\,(x-3)$; г) $y=\sqrt{x^2-4x-5}$;

д) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; е) $y=\dfrac{3}{4x^3-9x^2+6x}$.

3. Докажите, что данные функции являются монотонными на всей числовой прямой. Укажите, какие из них являются возрастающими, какие — убывающими:

а) $y=-x^3+9x^2-30x-2$;

б) $y=x^5-5x^3+20x-3$;

в) $y=3|x-1|-x^3$;

г) $y=2x^9-3x^6+6x^3-9x^2+18x-3$.

4. Покажите, что любая касательная к кривой $y=x^5+10x-3$ составляет с осью Ox острый угол.

5. На кривой $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ найдите точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

6. В каких точках линии $y=x^3+x-7$ касательная к ней параллельна прямой $y=4x-2$?

7. На параболе $y=x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1=1$, $x_2=3$. Через эти точки проведена прямая. В какой точке параболы касательная будет параллельна проведенной прямой?

8. При каком значении a касательная к параболе $y=ax^2+$ $+x-3$ в точке $M(1;\ a-2)$ параллельна прямой $3y-6x=1$?

9. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $(1;\ 3)$, касающейся графика функции $y=8\sqrt{x}-7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=x^2+4x-1$.

10. Является ли прямая $y=2x-1$ касательной к графику функции $y=\sqrt{4x-3}$?

11. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y=(x+1)^2(x-2)$; б) $y=x(x-1)(x^2-1)$;
в) $y=(x+1)^2(3-x)$; г) $y=(x-2)^2(x+1)^2$;
д) $y=x^3(x^2-1)(x+1)$; е) $y=(x^2-1)^2$;
ж) $y=(x^2-1)^3$; з) $y=(x+1)^2(2-x)^3$;

и) $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-4}$; к) $y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x^2}$; л) $y=\dfrac{2x^2+x+1}{1+x^2}$;

м) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$; н) $y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$; о) $y=\dfrac{x^2-5}{x-2}$;

п) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$; р) $y=\dfrac{x^4-1}{x^2-4}$; с) $y=\dfrac{1+x^2}{x^2-4}$;

т) $y=\dfrac{x^2-1}{x(4-x^2)}$; у) $y=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$; ф) $y=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)}$.

Ответы к дополнительным упражнениям

2. а) Убывает на $(-\infty;\ 0]$ и на $\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$, возрастает на $\left[0;\ \frac{1}{4}\right]$; б) возрастает на R; в) убывает на $[0;\ 1]$, возрастает на $[1;\ +\infty)$; г) возрастает на $[5;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -1]$; д) возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и на $(-1;\ 0)$, убывает на $[0;\ 1)$ и на $(1;\ +\infty)$; е) возрастает на $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$, убывает на $(-\infty;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$, $[1;\ +\infty)$.
3. а) Убывает; б) возрастает; в) убывает; г) возрастает. **5.** $(0;\ 1)$. **6.** $(1;\ -5)$, $(-1;\ -9)$. **7.** $(2;\ 4)$. **8.** 0,5. **9.** $y=2x+1$. **10.** Является.

6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Существует ряд приемов и способов решения тригонометрических уравнений (неравенств), предусмотреть которые общей теорией не представляется возможным. Назовем некоторые из них: метод замены переменной, разложение на множители, введение вспомогательного аргумента, применение рационализирующих подстановок, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и наоборот, использование свойств симметрических многочленов, применение оценок и неравенств, использование свойств элементарных функций и т. д.

Рассмотрим на примерах некоторые приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$; б) $\sin(\pi \cos 4x) = 1$; в) $\cos(\sqrt{4-|x|}) = 0$.

Решение. а) $\sin 2x = 0{,}5$, $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$,

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Имеем: $\pi \cos 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т. е. $\cos 4x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Но $|\cos 4x| \leqslant 1$, поэтому $k=0$. Имеем $\cos 4x = 0{,}5$, его решением является $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Имеем: $\sqrt{4-|x|} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $0 \leqslant \sqrt{4-|x|} \leqslant 2$, то $k=0$. Таким образом, получаем уравнение $\sqrt{4-|x|} = \frac{\pi}{2}$, его решением является $x = \pm\left(4 - \frac{\pi^2}{4}\right)$.

Пример 2. Решить уравнение $4\sin^3 x + \cos^2 x + 3\sin x = 2{,}75$. Найти все решения уравнения, удовлетворяющие условию:

а) $\cos x \leqslant 0$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; в) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение может быть переписано в виде:

$$16\sin^3 x - 4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0.$$

Решив его как уравнение третьей степени относительно $\sin x$, получим: $\sin x = 0{,}5$,

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Из полученной совокупности хорошо видно, что условию а) удовлетворяют числа $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, условию б) только число $x = \frac{5\pi}{6}$, а условию в) число $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{7\pi}{6}$.

Пример 3. Решить уравнение:

а) $2\sin 2x - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x$;

б) $\sin 2x \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Решение. а) Так как $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, то перепишем данное уравнение в виде:

$$4\sin x \cos x - 2\cos x + 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} = 0$$

и разложим его левую часть на множители. Имеем:

$$2\cos x(2\sin x-1)+\sqrt{3}\,(2\sin x-1)=0,$$

$$(2\sin x-1)(2\cos x+\sqrt{3})=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0{,}5,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

б) Имеем: $\sin 2x(\operatorname{tg} x-1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x=0,\\ \cos x\neq 0,\end{cases}\\ \operatorname{tg} x=1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение:
а) $3\sin 2x+\cos 2x-4\cos^2 x=1$;
б) $|\sin x-2\cos x|=\sin x$;
в) $2\cos 3x=3\sin x+\cos x$.

Решение. Все три уравнения являются примерами уравнений, приводящихся к *однородным.*

а) Так как $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, то перепишем данное уравнение в виде

$$6\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x-4\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x,$$

или

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0.$$

Легко видеть, что числа $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, не являются решениями данного уравнения. Следовательно, разделив все его члены на $\cos^2 x\neq 0$, получим уравнение, равносильное данному:

$$\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \operatorname{tg} x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=\operatorname{arctg} 2+\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \operatorname{arctg} 2+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

$$\text{б) } |\sin x-2\cos x|=\sin x\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x-2\cos x=\sin x,\\ \sin x-2\cos x=-\sin x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\cos x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

в) Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то уравнение можно переписать в виде:

$$8\cos^3 x - 6\cos x = 3\sin x + \cos x,$$

или

$$8\cos^3 x = 3\sin x + 7\cos x,$$
$$8\cos^3 x = (3\sin x + 7\cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Так как числа $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, не являются корнями данного уравнения, то разделим все его члены на $\cos^3 x$, получим уравнение, равносильное данному:

$$8 = (3\,\mathrm{tg}\, x + 7)(\mathrm{tg}^2 x + 1).$$

Раскрыв скобки, придем к уравнению

$$3\,\mathrm{tg}^3 x + 7\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0,$$

решив которое получим:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = -1, \\ \mathrm{tg}\, x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\mathrm{arctg}\,\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим уравнения, при решении которых можно применять *метод введения вспомогательного аргумента*. К таким уравнениям относятся уравнения, линейные относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Данное уравнение после деления всех его членов на $\sqrt{a^2 + b^2}$ приводится к виду: $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, где φ — вспомогательный угол такой, что $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 5. Решить уравнение $4\sin x + 5\cos x = 6$.

Решение. Так как $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{4}{\sqrt{41}} \sin x + \frac{5}{\sqrt{41}} \cos x = \frac{6}{\sqrt{41}}.$$

Так как $\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{41}}, \quad \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \left(\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{5}{4}\right).$$

Имеем: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{6}{\sqrt{41}}$,

$$\sin(x+\varphi)=\frac{6}{\sqrt{41}}\left(\varphi=\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}\right).$$

Так как $\left|\frac{6}{\sqrt{41}}\right|<1$, то окончательно получаем:

$$x=-\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}+(-1)^k\arcsin\frac{6}{\sqrt{41}}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Отметим, что уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$ можно решать также и с помощью универсальной подстановки.

Пример 6. Решить уравнение:

а) $\sin 5x=\sin 3x$; б) $\cos x^2+2\sin^2 x=1$; в) $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg} 3x$.

Воспользуемся *условиями равенства одноименных тригонометрических функций:*

$$\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha-\beta=2\pi n,\\ \alpha+\beta=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

$$\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha\pm\beta=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Решение.

а) $\sin 5x=\sin 3x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x-3x=2\pi n,\\ 5x+3x=\pi+2\pi n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.\end{array}\right.$

Ответ. $\pi n,\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}$.

б) Имеем: $\cos x^2=1-2\sin^2 x\Leftrightarrow\cos x^2=\cos 2x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-2\pi n=0,\\ x^2+2x-2\pi n=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{1+2\pi n},\\ x=-1\pm\sqrt{1+2\pi n}\end{array}\right.\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ответ. $\pm1\pm\sqrt{1+2\pi n}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

в) $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg} 3x\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\pi n,\\ \cos 3x\neq0\\ \cos 5x\neq0.\end{cases}\Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$,

Ответ. $\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$2\cos^2 x-3\cos x+\sin x+1=0.$$

Решение. Данное уравнение может быть сведено к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

верных для всех $x\neq\pi+2\pi n$. Отметим, что замена $\sin x$ и $\cos x$ выражениями, содержащими $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, может привести к потере корней вида $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Удовлетворяют ли эти значения x исходному уравнению, выясняется проверкой.

Выполнив в данном уравнении подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, которую называют *универсальной,* получим уравнение

$$3t^4+t^3-t^2+t=0.$$

Оно имеет корни $t_1=0$, $t_2=-1$. Возвращаясь к переменной x, получим совокупность уравнений $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$, откуда $x=2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Осталось проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Имеем:

$$2\cos^2(\pi+2\pi n)-3\cos(\pi+2\pi n)+\sin(\pi+2\pi n)+1\neq 0.$$

Ответ. $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение $8\cos^4 x+\cos 2x+4\sin^2 2x=3$.

Решение. При решении таких уравнений удобно использовать *формулы понижения степени*

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Обозначив $\cos 2x=t$, используя формулу $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, получим уравнение

$$8\left(\frac{1+t}{2}\right)^2+t+4(1-t^2)=3.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим уравнение $2t^2-5t-3=0$. Учитывая, что $|t|\leqslant 1$, находим $t=-\frac{1}{2}$, т. е. $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение $\cos x+\sin\frac{x}{4}=2$.

Решение. Так как функции $\cos x$ и $\sin\frac{x}{4}$ имеют наибольшее значение, равное 1, то сумма их равна 2, если $\cos x=1$ и $\sin\frac{x}{4}=1$ одновременно, т. е.

$$\begin{cases}\cos x=1,\\ \sin\frac{x}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\pi k,\\ x=2\pi+8\pi n\end{cases}\Leftrightarrow x=2\pi+8\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Ответ. $2\pi+8\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$.

Пример 10. Решить неравенство $\frac{1}{\cos x} \geqslant 2\cos x + 1$.

Решение. Обозначив $\cos x = t$, получим неравенство

$$\frac{1}{t} \geqslant 2t + 1 \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(t+1)}{t} \leqslant 0.$$

Решив его методом интервалов, получим: $t \leqslant -1$, $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$.

Возвращаясь к переменной x, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x \leqslant -1, \\ 0 < \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ 0 < \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнения:

а) $\sin(\pi \cos x) = 0$;

б) $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x\right) = \frac{1}{4}$;

в) $\cos(\operatorname{tg} x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}(\sin x) = \sqrt{3}$;

д) $(x^2 - 2)|\sin x| = \sin x$;

е) $(x^2 + 2)\cos x = 3x|\cos x|$;

ж) $|4 - x^2| \sin x = x^2 - 4$;

з) $\sin 4x \operatorname{ctg} x = 0$;

и) $|\cos x| \cos x + \sin^2 x = 0{,}5$;

к) $|\sin x| \cos x = 0{,}5$.

2. Найдите все решения уравнения $(\cos(\pi x^2))\cos(\pi(x^2 + 1)) = -1$, удовлетворяющие неравенству $4x^2 - 8x + 3 < 0$.

3. Решите уравнения сведением к алгебраическому относительно какой-либо тригонометрической функции:

а) $10\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

б) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x = 3$;

в) $1 + 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + \cos 2x = 0$;

г) $\sin 3x - 10\cos^2 x - 5\sin x + 6 = 0$.

4. Найдите все решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $\sqrt{3}\sin x - 2\cos^2 x = 1$, $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$;

б) $1 - 5|\cos x| + 2\sin^2 x = 0$, $\sin x \leqslant 0$;

в) $\cos x + (1 + \cos x)\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x \leqslant 0$;

г) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$, $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} < 0$;

д) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$,

1) $\sin x \leqslant 0$; 2) $x \in [\pi;\ 2\pi]$; 3) $x \in [-\pi;\ 0]$;

е) $2 + 6\sin x \cos x = \cos 4x$,

1) $\cos x \leqslant 0$, 2) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, 3) $x^2 - 3x + 2 < 0$;

ж) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{|\sin x|}{\cos x} - 2 = 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

з) $2\cos 3x - \cos x = \sqrt{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

5. Решите уравнения способом разложения на множители:
а) $1 + \sin 2x = 2\sin x + \cos x$;
б) $4\sin 2x \sin x - 2\cos x + 4\sin^2 x - 1 = 0$;
в) $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$;
г) $(1 - \operatorname{ctg} x)\sin^2 x = \cos x - \sin x$;
д) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x \sin 3x = \sin 3x$;
е) $\operatorname{tg} 3x \sin 4x = \sin 4x$.

6. Решите уравнения сведением к однородным:
а) $|\sin x| = \cos x$; б) $|\sin x| = |\cos x|$; в) $\sqrt{3}\,|\sin x| = -\cos x$;
г) $|3\sin x + \cos x| = -2\cos x$; д) $2\sin x\,|\cos x| = \cos 2x$;
е) $3\cos^2 x = 2\sin 2x$; ж) $5\sin^2 x - 1 = 3\sin x \cos x$;
з) $\sin x \sin 2x + 2\cos x \cos 2x + 10\cos^3 x + 4\sin^3 x = 2\sin x$.

7. Решите уравнения с помощью введения вспомогательного аргумента:
а) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$; б) $\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x = 2$;
в) $6\sin x \cos x - 4\cos 2x = 5$; г) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sqrt{3}\sin x$.

8. Докажите, что уравнения не имеют решений:
а) $5\sin x - 7\cos x = 9$; б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{27}$;
в) $\sin 3x + \sin 10x \cos 3x = \frac{3}{2}$; г) $\sqrt{a-1}\sin x + a\cos x = 2a$.

9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения имеют решения:
а) $5\sin x + 24\cos^2\frac{x}{2} = a$; б) $3\sin x \cos x - 4\sin^2 x = a$;
в) $a\sin 2x + 2\cos^2 x = 2a$.

10. Решите уравнения, используя условия равенства одноименных тригонометрических функций:
а) $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 5x$; б) $\cos 6x = 1 - 2\sin^2 x$;
в) $\cos x = \sin 5x$; г) $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$;
д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}(\pi \sin x)$; е) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x)$.

11. Решите уравнение, применив универсальную подстановку:
а) $10\cos 2x + 8 = \operatorname{tg} x$; б) $3\sin 2x + \cos 2x = 2 + \operatorname{tg} x$;
в) $2\sin^2 x + \cos x - 3\sin x + 1 = 0$;

г) $6\cos x+12\sin x+25\sin x\cos x+6=0$.

12. Решите уравнения, используя формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму:

а) $\sin x+\sin 3x=4\cos^2 x$;

б) $\cos x-\cos 5x=2\sin^2 3x$;

в) $\cos 5x+\cos 3x=\cos 9x+\cos 7x$;

г) $\sin 5x-\sin 3x=\sin 9x-\sin 7x$;

д) $\sin x+2\sin 10x\cos 3x=0$;

е) $\sin x\sin 2x-\sin 3x\sin 4x=\cos 5x\cos 2x$;

ж) $\cos 2x\cos 5x+\sin 4x\sin 3x=\cos 3x\cos 2x$;

з) $\sin 4x\sin 6x+\sin x\cos 3x=\sin x\sin 3x+\sin 4x\cos 6x$;

и) $\cos x-4\sin x\cos^2 x-\cos 3x=\sin 2x-\cos 2x-1$;

к) $1-3\cos 2x+\sin 2x=4\sin x-2\cos x$.

13. Решите уравнения, используя формулы понижения степени:

а) $1-\cos 4x+2\cos^2 x=0$;

б) $\cos 4x+2\sin^4 x=0$;

в) $\sin^2 x+\cos^2 2x-\sin 3x\cos x=1$;

г) $1+8\sin^2 2x\cos 2x=4\sin^2 3x$;

д) $\cos 4x=4\sin^2 x+8\cos^4 x-4$;

е) $2\sin^6 x+6\cos^6 x+\cos 4x=0$;

ж) $5\sin^4 2x-4\sin^2 2x\cos^2 2x-\cos^4 2x+4\cos 4x=0$.

14. Решите уравнения, используя подстановки $\sin x+\cos x=t$, $\sin x-\cos x=t$, $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=t$ и др.:

а) $\sin 2x=2(1+\sin x+\cos x)$; б) $2\cos x-\sin 2x=2+2\sin x$;

в) $\sin 2x+3\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=5$; г) $\sin 2x-4\sin x=4+4\cos x$;

д) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-3(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)+4=0$;

е) $2(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)=\sqrt{3}(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)-2\sqrt{3}$;

ж) $4\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+6\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x-8=0$;

з) $|\sin x+\cos x|=1+2\sin 2x$; и) $|\cos x-\sin x|=1-2\sin 2x$;

к) $|\sin x+\cos x|=1+\sin 2x$; л) $2\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

15. Решите уравнения:

а) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=3-\sin 2x$; б) $2(\sin 2x-\cos 2x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$;

в) $\dfrac{2}{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|}=\dfrac{3+\cos 2x}{2}$; г) $|\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x|=\dfrac{3}{\sin^2 2x}-4$;

д) $5\cos 2x=-4(\sin^4 x+\cos^4 x)$; е) $\sin^4 x+\cos^4 x=0{,}75\sin 4x$.

16. Решите уравнения, используя ограниченность синуса и косинуса:

а) $\sin\frac{x}{3}-\cos 6x=2$; б) $\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2$;

в) $\sin 2x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$; г) $\sin 3x+\cos 2x=-2$;

д) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=1$; е) $\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$;

ж) $|\sin x|=\cos 2x-1$; з) $|\cos x|=\sin 3x-1$;

и) $\sqrt{\cos x+\sqrt{3}\sin x-2}-\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\sqrt{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}}+\cos\frac{2x}{3}=-1$.

17. Решите уравнения:

а) $\operatorname{ctg} x\,|\sin x|=0{,}5$; б) $\frac{2|\sin x|}{\sin x}=2\cos x+1$;

в) $2\sin^2 x+\sin x^2=1$; г) $2\cos^2 x-\cos x^2=1$;

д) $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\cos x\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\cos x\right)$; е) $\sin \pi x^2=\sin\pi(x^2+2x)$;

ж) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg} 3x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

з) $12\operatorname{ctg} 2x-4\operatorname{ctg}^3 2x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=14$;

и) $\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

к) $1+8\sin 2x\cos^2 2x=4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$;

л) $\operatorname{tg} 3x\cos x+\sin x+\sqrt{2}\sin 4x=0$;

м) $\sin 3x-3=\cos 4x+5\cos 2x$;

н) $\sin 5x+\sin 3x=4\sin 2x$;

о) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

18. Решите уравнения:

а) $\frac{3\cos x}{1+\sin x}=1$; б) $\frac{\sin 2x}{1+\cos x}=-2\sin x$;

в) $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x-3\sqrt{2}\cos x-1}{1+\sin 2x}=1$;

г) $\frac{\sin 4x}{4\sin x-\sin 3x}=\cos x$;

д) $\frac{\sin 3x+\sin x}{|\cos x|}=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$;

е) $4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}$;

ж) $2\sin x-\frac{1}{\cos x}=\frac{2\cos x-\sin x}{\operatorname{ctg} x}$;

з) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=\frac{(1+\cos 2x)\operatorname{tg} x}{\cos x}$.

19. Найдите все решения уравнений, принадлежащие указанным промежуткам:

а) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-1+\cos x=2\cos 2x$; $x\in[\pi;\ 2\pi]$;

б) $1+\cos 4x+\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}=2\sin^2 x$; $x\in[0;\ \pi]$.

20. Решите уравнения:

а) $2\sin 6x=\operatorname{tg} 2x-2\sin 2x$;

б) $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\operatorname{tg} x$;

в) $\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x$;

г) $\sin 4x\,(2+\sin 14x)=2\operatorname{ctg} 3x\cos 4x$;

д) $\cos 3x+\cos x\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$;

е) $2(\cos^4 x+\sin x\sin 2x+\sin^4 x)=\cos x-\sin^2 2x+4\cos 2x$;

ж) $4\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+2\cos^2\frac{x}{2}+20\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)+7=\cos x$;

з) $2\sin^2 x+2\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+2\sqrt{2}\sin x+3=0$;

и) $2(\cos 3x+\sin x\sin 2x)=4\cos^3 x+3\operatorname{tg} x$;

к) $\cos 2x+4\sin x\sin^2 2x+2\sin x\cos 4x=0$.

21. Решите уравнения:

а) $\sin x\cos^6 x-\sin^6 x\cos x=\sin 2x$;

б) $\sin^3 x\cos^7 x-\cos^3 x\sin^7 x=\cos 2x$;

в) $3\sin 4x-8\sin^2 2x=1$;

г) $\cos x+\cos^2 x+\sin^3 x=0$;

д) $2\sin^2 x=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\sin^2 x}-2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg} x$;

е) $2(\sin 3x-\sin 2x\cos x)=3\operatorname{ctg} x-4\sin^3 x$;

ж) $\cos x(1+\cos x)-1=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}-\sin x(1+\sin x)$;

з) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x-\cos x}=\sqrt{2}$;

и) $\frac{\sin 2x-\cos x}{\sin x-\cos 2x}=1$;

к) $\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos x+\cos 4x+\sqrt{3}\sin 3x}{2\cos x-1}=1$.

22. Решите уравнения:

а) $\cos x+\sqrt{1-\sin 2x}=0$; б) $\sin x=\sqrt{1+\sin 2x}$;

в) $\frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\sin x}=2\cos x-1$; г) $\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{\cos x}=2\sin x-1$;

д) $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}$;

е) $\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x=-2\sqrt{2-2\cos 2x}$;

ж) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+16\operatorname{ctg}^2 x-8}=\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x$.

23. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

24. Найдите все x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2}<|3x-2\pi|\leqslant\pi$ и являющиеся решениями уравнения

$$\sin x+\cos x-\cos 2x=\cos 3x-\sin 2x-1.$$

25. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение:

а) $2\cos^2 x+(2a+1)\sin x-a-2=0$ имеет на отрезке $[0; \pi]$ ровно три корня;

б) $2\cos^2 3x+(4a^2-7)\cos 3x+2a^2-4=0$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ ровно пять корней.

26. Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнения имеют решения. Найдите эти решения:

а) $\sin^2 x-3\sin x+a=0$;

б) $\cos^4 x-(a+1)\cos^2 x-(a+2)=0$;

в) $a\sin x+2\sqrt{a+1}\cos x=2a+1$;

г) $\sin 2x-(a+2)(\sin x+\cos x)+2a+1=0$;

д) $\sin^4 x+\cos^4 x=a$;

е) $\dfrac{a^2}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+a^2-2}{\cos 2x}$.

27. Решите неравенства:

а) $\sin x\cos x>\frac{1}{4}$;

б) $\sqrt{3}\cos x-\sin x>\sqrt{2}$;

в) $\sin(2\pi\cos x)<0$;

г) $\cos(0{,}5\pi\sin x)>\frac{1}{2}$;

д) $\sin^2 x\leqslant 0{,}5$;

е) $|\cos x|<0{,}5\sqrt{3}$;

ж) $2\sin^2 x-\sin x<0$;

з) $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x\geqslant 0$;

и) $\sin 2x>\cos 2x$;

к) $\sqrt{3}\sin x+\cos x<0$;

л) $\operatorname{tg}^2 3x>1$;

м) $\left|\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right|<\sqrt{3}$.

28. Решите неравенства:

а) $11\sin x+\cos 2x\leqslant 6$;

б) $\cos 2x<2+\sqrt{3}\cos x$;

в) $2\cos^2 x-7\sin x>5$;

г) $2(\sin^2 x+1)<7\cos x$;

д) $\sqrt{3}(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)>4$;

е) $2\operatorname{tg} 2x\leqslant 3\operatorname{tg} x$;

ж) $2\cos^4 x\leqslant 0{,}5+\cos 2x$;

з) $2\cos 2x-5<4\sqrt{3}\sin x$;

и) $4\sin x+\dfrac{3}{\sin x}<8$;

к) $4\cos x-\dfrac{5}{\cos x}>8$;

л) $\sin 2x-6\sin x+\sqrt{3}\cos x<\sqrt{27}$.

29. Решите неравенства на указанных промежутках:

а) $\sqrt{2}\,(\sin 2x-\cos x)+2\sin x>1,\ x\in[0;\ \pi]$;

б) $\sqrt{2}\,(\sin 2x+\sin x)-2\cos x<1,\ x\in[0;\ \pi]$;

в) $\sin x<\sin 2x\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$;

г) $\sin 2x\sin x>\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

30. Решите неравенства:

а) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x<0$;

б) $\cos x+\cos 3x>\cos 2x+\cos 4x$;

в) $\cos x\cos 3x<\cos 5x\cos 7x$;

г) $2\cos 2x+\sin 2x<\operatorname{ctg} x$;

д) $5\sin^2 x+\sin^2 2x>4\cos 2x$;

е) $2\cos^3 x+\cos x-3\sin^2 x+3<0$;

ж) $\dfrac{1+\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}{4+4\sin x+2\cos x+\sin 2x}>0$.

31. Найдите область определения функций:

а) $y=\sqrt{2\sin x-1}+\sqrt{7x-x^2}$;

б) $y=\sqrt{1-2\cos x}+\sqrt{10x-x^2}$;

в) $y=\dfrac{1}{2\sin x-1}+\sqrt{6x-x^2}$;

г) $y=\dfrac{1}{\sin x}-\sqrt{9x-x^2-14}$;

д) $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

Ответы к дополнительным упражнениям

1. а) $\frac{\pi n}{2}$; г) $(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n$; д) -1; $\sqrt{3}$; πn, $n\in\mathbf{Z}$; ж) $-\frac{\pi}{2}$; ± 2; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{N}$; з) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$*; и) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **2.** 1; $\sqrt{2}$. **4.** а) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{7\pi}{6}$; ж) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$. **5.** д) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. **6.** г) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(2n+1)$; з) $-\operatorname{arctg}2+\pi n$. **8.** в) Указание: $|\sin 3x+\sin 10x\cos 3x|\leqslant\sqrt{1+\sin^2 10x}<\frac{3}{2}$. **9.** б) $-4{,}5\leqslant a\leqslant 0{,}5$. **10.** д) $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n$; е) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n$. **11.** в) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$. **13.** ж) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **15.** в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **16.** а) $\frac{3\pi}{2}+6\pi n$; б) $2\pi+8\pi n$; д) $\frac{\pi}{6}+\pi n$; ж) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; и) $\frac{7\pi}{3}+4\pi n$; к) $\frac{9\pi}{2}+12\pi n$. **17.** д) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; м) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; н) $\frac{\pi n}{2}$; о) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$. **18.** г) $\frac{\pi}{6}(2n+1)$;

---

* Здесь и далее $n\in\mathbf{Z}$.

е) $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$. **19.** а) $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$. **20.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+$ $+\frac{\pi n}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$; д) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; е) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; и) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+$ $+\pi n$; к) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi n$. **21.** г) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2\pi n$; д) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; е) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; з) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$, $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}+2\pi n$; и) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi n$; к) πn, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **22.** д) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; е) πn; ж) $\frac{\pi}{3}+\pi n$. **23.** $\frac{21\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{8}$.

25. а) $a=1$; б) $a=\pm\sqrt{2}$. **26.** а) $-4\leqslant a\leqslant 2$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2}+\pi n$; б) $-2\leqslant a\leqslant -1$, $x=\pm\arccos\sqrt{a+2}+\pi n$; в) $-1\leqslant a\leqslant 1$, $x=\arcsin\frac{a}{a+2}\pm$ $\pm\arccos\frac{2a+1}{a+2}+2\pi n$; г) $|a|\leqslant\sqrt{2}$, $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{a}{\sqrt{2}}+2\pi n$; д) $0{,}5\leqslant a\leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2}$; е) $|a|>1$, $|a|\neq\sqrt{3}$, $x=\pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{1+a^2}}+\pi n$.

28. ж) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; з) $x\neq(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$. **29.** а) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}<x\leqslant\pi$; б) $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{4}$. **30.** ж) $\frac{\pi}{3}+4\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+4\pi n$, $\frac{3\pi}{2}+4\pi n<x<3\pi+4\pi n$.

31. а) $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{13\pi}{6};\ 7\right]$; в) $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};\ 6\right]$; д) $\left(2;\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла.

Если функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;\ b]$, *то определенный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции* (рис. 4):

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Следующая теорема часто используется при решении задач.

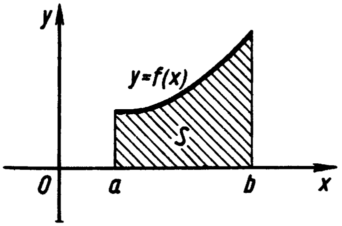


Рис. 4

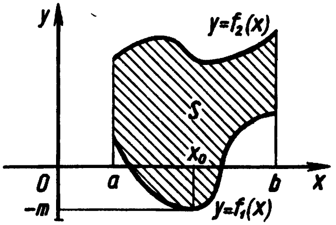


Рис. 5

Если фигура ограничена графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, причем для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, то площадь фигуры может быть вычислена по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (2)$$

Доказательство формулы (2) в случае, когда функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ неотрицательны на отрезке $[a; b]$, приводится в учебном пособии.

Приводим доказательство формулы (2) в общем случае. Пусть наименьшее значение непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f_1(x)$ равно $f_1(x_0)=-m<0$ $(m>0)$ (рис. 5). Рассмотрим фигуру, ограниченную графиками функций $y=f_1(x)+m$, $y=f_2(x)+m$ и прямыми $x=a$, $x=b$, т. е. фигуру, получающуюся из данной параллельным переносом вдоль оси Oy. Так как $f_2(x)+m \geqslant f_1(x)+m \geqslant 0$, то

$$S=\int_a^b ((f_2(x)+m)-(f_1(x)+m))\,dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx.$$

Очевидно, такую же площадь имеет и данная фигура. Формула (2) доказана.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-9$ и $y=-x^2+4x-3$ (рис. 6).

Решение. Находим абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x)=x^2-9$ и $f_2(x)=-x^2+4x-3$. Равенство $x^2-9= =-x^2+4x-3$ справедливо при $x=-1$, $x=3$. Так как при $-1 \leqslant x \leqslant 3$ разность значений функций $f_2(x)-f_1(x)=-2(x+1)\times \times(x-3) \geqslant 0$, то, применяя формулу (2), находим:

$$S=\int_{-1}^{3} ((-x^2+4x-3)-(x^2-9))\,dx=-2\int_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)\,dx=21\frac{2}{3}.$$

Отметим, что если в формуле (2) положить $f_1(x)=0$, $f_2(x)= =f(x) \geqslant 0$, то получим уже знакомую формулу (1):

$$S=\int_a^b f(x)\,dx;$$

если же взять $f_1(x)=f(x) \leqslant 0$, $f_2(x)=0$ (рис. 7), то

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=-1$.

Решение. График функции $y=x^3$ $(x \in [-1; 0])$ расположен ниже оси Ox (рис. 8). Поэтому для вычисления площади применим формулу (3):

$$S=-\int_{-1}^{0} x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{4}.$$

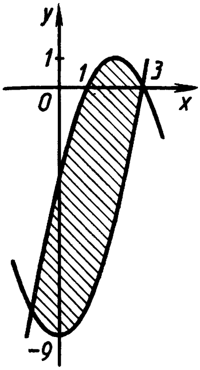


Рис. 6

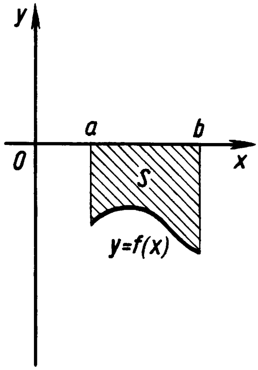


Рис. 7

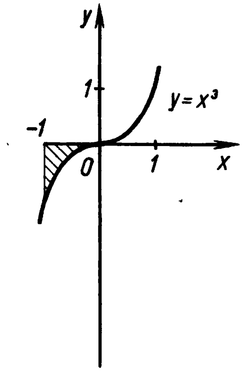


Рис. 8

В большинстве встречающихся на практике случаев при решении задачи на нахождение площади фигуры удается данную фигуру разбить на конечное множество таких частей, к каждой из которых применима какая-нибудь из формул (1) — (3).

Так, если $y=f(x)$ ($x \in [a; b]$) — непрерывная функция, график которой пересекает ось абсцисс в конечном числе точек (рис. 9), то из формул (1) и (3) следует, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью Ox и прямыми $x=a$; $x=b$, вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right]$ оси Ox, графиком функции $y=\cos x$ и прямой $x=\frac{7\pi}{6}$.

Решение. Решив уравнение $\cos x=0$, получим, что график функции $y=\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right]$ пересекает ось Ox в точках $x_1=-\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$ (рис. 10). Следовательно,

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} |\cos x|\, dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \cos x dx=3,5.$$

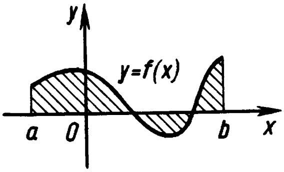


Рис. 9

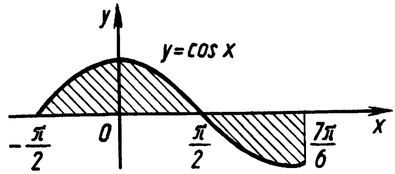


Рис. 10

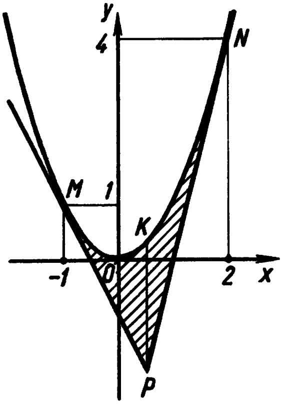


Рис. 11

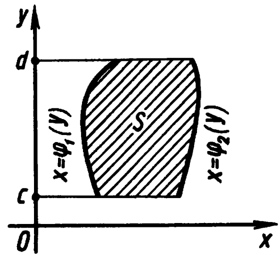


Рис. 12

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2$ и касательными к графику функции $y=x^2$ в точках $x_1=-1$ и $x_2=2$.

Решение. Площадь фигуры равна сумме площадей фигур MPK и KPN (рис. 11). К каждой из них применима формула (2). Находим уравнения касательных: $y=-2x-1$, $y=4x-4$ и абсциссу их точки пересечения: $x_0=0{,}5$. Вычисляем искомую площадь:

$$S=\int\limits_{-1}^{0,5}(x^2-(-2x-1))\,dx+\int\limits_{0,5}^{2}(x^2-(4x-4))\,dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0,5}(x+1)^2\,dx+\int\limits_{0,5}^{2}(x-2)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{0,5}+\frac{1}{3}(x-2)^3\Big|_{0,5}^{2}=2{,}25.$$

Замечание 1. Если на отрезке $[a;\ b]$ выполняется одно из неравенств:

$$f_2(x)\geqslant f_1(x) \text{ или } f_1(x)\geqslant f_2(x),$$

то площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$, может быть вычислена по формуле:

$$S=\left|\int\limits_a^b(f_1(x)-f_2(x))\,dx\right|. \qquad (4)$$

Замечание 2. Если фигура ограничена линиями $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, где $c<d$ и $\varphi_2(y)\geqslant\varphi_1(y)$ на $[c;\ d]$ (рис. 12), то ее площадь может быть вычислена по формуле:

$$S=\int\limits_c^d(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))\,dy, \qquad (5)$$

получающейся из формулы (2) после перемены ролей x и y. Очевидно, из формулы (5) можно получить формулу, аналогичную формуле (4).

Дополнительные упражнения

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$; б) $y=8x-x^2$, $y=0$; в) $y=2x^3$, $y=0$, $x=2$; г) $y=\sqrt{2x-1}$, $y=0$, $x=5$; д) $y=\sqrt{1-x}$, $y=0$, $x=-3$; е) $y=\sqrt{4-|x|}$, $y=0$; ж) $y=x^2$, $y=(x-2)^2$, $y=0$; з) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{8-x}$, $y=0$; и) $y=\operatorname{tg}^2 x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$; к) $y=\cos 2x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$, $y=0$; л) $y=\sin^2 x$, $x\in[0;\ \pi]$, $y=0$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x^2$, $y=4$; б) $y=x^3$, $x=0$, $y=8$; в) $y=\sqrt{|x|}$, $y=2$; г) $y=4x-x^2$, $y=3$; д) $y=x^2-4x+6$, $y=6-x$; е) $y=8x-x^2-10$, $y=8-x$; ж) $y=\sin^2 x$, $y=\cos^2 x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=2x^2$, $y=0$, $x=-1$; б) $y=x^2-4x$, $y=0$; в) $y=3x-x^2$, $y=-4$; г) $y=-x^2+2x+1$, $y=x-1$; д) $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+2$; е) $y=18x-x^2$, $y=x^2+8x-12$; ж) $y=x^2-6x+5$, $y=5-2x-x^2$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4x+5$, касательной к ней в точке $M(4;\ 5)$ и прямой $x=1$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x-3$ и касательными к ней в точках $M(0;\ -3)$ и $N(3;\ 0)$.

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2a$, касательной к ней $y=2x-5$ и прямой $x=3$.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x^3}$, $y=0$, $x=3$ и касательной к графику функции $y=\frac{1}{x^3}$ в точке с ординатой, равной 1.

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=1+\cos\pi x$ и $y=2x^2-2$, пересекающимися в точках, абсциссы которых — целые числа.

9. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{3|x|+x}{2}$ и $y=ax^2$, равна $\frac{3}{32}$?

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin|x|$ и $y=|x|-\pi$.

Ответы к дополнительным упражнениям

1. а) $4\frac{2}{3}$; в) 8; г) 9; е) $10\frac{2}{3}$; ж) $\frac{2}{3}$. 2. д) 4,5; е) 4,5; ж) 1. 3. а) 0,5; б) $10\frac{2}{3}$; в) $20\frac{5}{6}$; г) 4,5; д) 3; е) $\frac{343}{3}$. 4. 9. 5. $2\frac{1}{4}$. 6. $2\frac{2}{3}$. 7. $\frac{5}{18}$. 8. $4\frac{2}{3}$. 9. $a=4$. 10. $4+\pi^2$.

8. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЧИСЛОМ e

При решении задач по этой теме используются так называемые «замечательные пределы»:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1, \tag{3}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^\alpha-1}{\alpha}=1. \tag{4}$$

Доказательство формул (1) и (2) приводится в учебном пособии. Приведем доказательство формул (3) и (4). Имеем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ln\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ln e=1.$$

Для доказательства формулы (4) введем подстановку $e^\alpha-1=\beta$. Тогда $\ln(1+\beta)=\alpha$; $\beta\to 0$ при $\alpha\to 0$. Имеем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^\alpha-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=1.$$

Из формулы (3) непосредственно следует, что если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x\to a$ и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}; \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\ln(1+\beta(x))}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \tag{6}$$

Докажем, например, равенство (6).

Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\ln(1+\beta(x))}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\dfrac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}}{\dfrac{\ln(1+\beta(x))}{\beta(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Аналогично доказывается и равенство (5).

Рассмотрим некоторые упражнения из учебного пособия.

169(3). Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Так как

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=\left((1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}\right)^{(\sin x-1)\cdot\operatorname{tg} x},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}=e,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x-1)\operatorname{tg} x=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)=0,$$

то

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=e^0=1.$$

170 (2,3). Вычислить пределы:

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Решение. 2) Пусть $x-a=t$, тогда $x=t+a$ и $t\to 0$ при $x\to a$. Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+a)-\ln a}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{t}=\frac{1}{a}.$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos ax-1)\ln\left(\cos ax^{\frac{1}{\cos ax-1}}\right)}{(\cos bx-1)\ln\left(\cos bx^{\frac{1}{\cos bx-1}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}=\frac{a^2}{b^2},\qquad \text{так как}\quad \lim_{x\to 0}\cos ax^{\frac{1}{\cos ax-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos bx^{\frac{1}{\cos bx-1}}=e.$$

172 (1,3). Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение.

$$1)\ f(x)=\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\frac{2\ln|x|+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0{,}2$.

3) Так как
$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}}\right)^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}$$
и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2\cos 2x}=1{,}5,\ \text{то}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{1{,}5}.$$

173 (1,2). Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin cx-\sin dx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}$.

Решение. 1) Так как

$$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin cx-\sin dx}=\frac{a\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\cdot\frac{e^{bx}-1}{bx}}{c\cdot\frac{\sin cx}{cx}-d\cdot\frac{\sin dx}{dx}} \text{ и } \lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1;$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1, \text{ то } \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin cx-\sin dx}=\frac{a-b}{c-d}.$$

При решении упражнения 173 (2) можно использовать равенство (6).

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\frac{3}{4}.$$

9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств достаточно полно рассмотрены в учебном пособии для XI класса.

Остановимся на некоторых вопросах, связанных с равносильностью уравнений, источниками потери и приобретения корней при решении логарифмических уравнений.

При преобразовании логарифмических выражений часто используются формулы:

$$a^{\log_a x}=x, \tag{1}$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y, \tag{2}$$

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y, \tag{3}$$

$$\log_a x^{\alpha}=\alpha\log_a x, \tag{4}$$

где $a>0$, $a\neq 1$.

Особенность формул (1) — (4) заключается в следующем: если их левую и правую части рассматривать независимо друг от друга, то замечаем, что они определены на разных множествах значений переменных. Например, в формуле (1) левая часть определена при $x>0$, а правая при любом $x\in\boldsymbol{R}$. В формулах (2) и (3) левые части определены для всех пар чисел x и y одного знака, а правые лишь для $x>0$, $y>0$. В формуле (4) при $\alpha=2k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $k\neq 0$ левая часть определена для всех $x\neq 0$, правая же только при $x>0$.

Отмеченное обстоятельство означает, что применение этих формул может изменить область определения уравнения, т. е. привести к неравносильным уравнениям.

Так, замена выражения $a^{\log_a f(x)}$ выражением $f(x)$, так же как и применение формул потенцирования:

$$\begin{gathered}\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a (f(x)\,g(x)),\\ \log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a \frac{f(x)}{g(x)},\\ 2k\log_a f(x)=\log_a (f(x))^{2k}\ (k\in \boldsymbol{Z},\ k\neq 0),\end{gathered}\tag{I}$$

вообще говоря, расширяет область определения уравнения, что может привести к появлению посторонних корней. Применение же формул логарифмирования:

$$\begin{gathered}\log_a (f(x)\,g(x))=\log_a f(x)+\log_a g(x),\\ \log_a \frac{f(x)}{g(x)}=\log_a f(x)-\log_a g(x),\\ \log_a (f(x))^{2k}=2k\log_a f(x)\,(k\in \boldsymbol{Z},\ k\neq 0),\end{gathered}\tag{II}$$

наоборот, может привести к потере корней ввиду возможного сужения области определения уравнения.

Появляющиеся при потенцировании посторонние корни устанавливают обычно с помощью проверки (подстановкой в исходное уравнение). В случае, когда такая проверка затруднительна, целесообразнее заменить исходное уравнение равносильной системой, состоящей из данного уравнения и необходимых неравенств. В полученной смешанной системе уравнения решают, а неравенства проверяют. При этом иногда удается заменить систему более простой и облегчить необходимую проверку.

Пример 1. Решить уравнение

$$3^{\log_3 (x^2-2x-1)}+x=2.\tag{5}$$

Решение. Применив формулу (1), получим уравнение

$$x^2-2x-1+x=2,\tag{6}$$

корни которого

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Теперь достаточно проверить, какое из полученных чисел удовлетворяет неравенству

$$x^2-2x-1>0.\tag{7}$$

Однако проверку корней можно упростить следующим образом. Переписав уравнение (6) в виде

$$x^2-2x-1=2-x,\tag{8}$$

видим, что выражение x^2-2x-1 положительно тогда и только тогда, когда $x<2$. Таким образом, вместо проверки неравенства (7) можно осуществить проверку условия $x<2$. Теперь легко видеть, что только $x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ является корнем исходного уравнения.

Решение уравнения (5) можно оформить следующим образом:

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1>0, \\ x^2-2x-1+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1>0, \\ x^2-2x-1=2-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x>0, \\ x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_2 x+\log_2(4x-x^2-1)=1. \qquad (9)$$

Решение. Уравнение (9) равносильно системе:

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 4x-x^2-1>0, \\ \log_2 x(4x-x^2-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 4x-x^2-1>0, \\ x(4x-x^2-1)=2 \end{cases} (*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x(4x-x^2-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x^3-4x^2+x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}. \end{array} \right.$$

В системе (*) неравенство $4x-x^2-1>0$ можно опустить, так как оно следует из неравенства $x>0$ и уравнения $x(4x-x^2-1)=2$ этой системы.

В отличие от уравнений, в случае решения неравенства проверка, как правило, неосуществима, поэтому необходимо выполнять лишь равносильные преобразования.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_2 x+\log_2(x^3-2x+3)>\log_2(x^4-2). \qquad (10)$$

Решение. Неравенство (10) равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x>0, \\ x^3-2x+3>0, \\ x^4-2>0, \\ x(x^3-2x+3)>x^4-2. \end{cases} \qquad (11)$$

Заметим, что неравенство $x^3-2x+3>0$ системы (11) следует из остальных неравенств системы. Следовательно,

$$(11) \Leftrightarrow \begin{cases} x>\sqrt[4]{2}, \\ 2x^2-3x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt[4]{2}<x<2.$$

Ответ. $\sqrt[4]{2}<x<2$.

Как мы уже отмечали, применение формул логарифмирования (II) может привести к потере корней, чего, естественно, допускать не следует. Как же быть, если при решении уравнения или неравенства мы сталкиваемся с необходимостью использовать эти формулы? Чтобы формулы логарифмирования не приводили к потере корней, ими пользуются в виде:

$$\log_a (f(x) g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$
$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|, \qquad \text{(III)}$$
$$\log_a (f(x))^{2k} = 2k \log_a |f(x)|.$$

Отметим, что первые две формулы группы (III) также не являются универсальными, так как они могут привести к расширению области определения уравнения и, следовательно, появлению посторонних корней. Но это не так опасно, как сужение области определения и потеря корней. Как уже отмечалось, посторонние корни могут быть установлены с помощью проверки.

Укажем на возможность такого преобразования уравнения, при котором формулы логарифмирования не приводят ни к потере корней, ни к приобретению посторонних корней. Оно заключается, в случае необходимости, в переходе от уравнения вида

$$\log_a (f(x) g(x)) = h(x) \qquad (12)$$

к совокупности (дизъюнкции) уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \log_a f(x) + \log_a g(x) = h(x), \\ \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x)) = h(x), \end{array}\right.$$

равносильной уравнению (12).

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_2^2 (\sin x \cos x) = \log_2 \sin^2 x \cdot \log_2 \cos^2 x. \qquad (13)$$

Решение. Уравнение (13) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} (\log_2 \sin x + \log_2 \cos x)^2 = 4 \log_2 \sin x \cdot \log_2 \cos x, & (14) \\ (\log_2 (-\sin x) + \log_2 (-\cos x))^2 = 4 \log_2 (-\sin x) \cdot \log_2 (-\cos x). & (15) \end{array}\right.$$

Преобразуя каждое из уравнений (14) и (15), получаем:

$$\left[\begin{array}{l} (\log_2 \sin x - \log_2 \cos x)^2 = 0, \\ (\log_2 (-\sin x) - \log_2 (-\cos x))^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 \sin x = \log_2 \cos x, \\ \log_2 (-\sin x) = \log_2 (-\cos x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Отметим, что если воспользоваться формулами группы (III), то мы получим уравнение

$$(\log_2 |\sin x| + \log_2 |\cos x|)^2 = 4 \log_2 |\sin x| \cdot \log_2 |\cos x|, \qquad (16)$$

являющееся следствием уравнения (13).

Уравнение (16) равносильно уравнению

$$\log_2 |\sin x| = \log_2 |\cos x|,$$

корни которого: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Посторонними корнями являются: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Отбросив их, получаем: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Отметим, что применение равенства

$$\log_a (f(x))^{2k}=2k\log_a |f(x)| \quad (k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0)$$

приводит к равносильному уравнению. Левая и правая части равенства определены при одних и тех же значениях x.

По той же причине приводит к равносильному уравнению применение формулы

$$\log_{(\varphi(x))^{2k}} f(x)=\frac{1}{2k}\log_{|\varphi(x)|} f(x).$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_4 x^2+\log_{x^6} 64=2. \tag{17}$$

Решение.

$$(17) \Leftrightarrow \log_2|x|+\log_{|x|}2=2 \Leftrightarrow \log_2|x|=1 \Leftrightarrow |x|=2.$$

Ответ. ± 2.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2 (x^2-14x+49)^8}+6\log_4\sqrt{14-2x}=7. \tag{18}$$

Решение.

Заметим, что $x<7$, преобразуем подкоренное выражение следующим образом:

$$\log_2 (x^2-14x+49)^8=16\log_2|x-7|=16\log_2 (7-x).$$

Следовательно,

$$(18) \Leftrightarrow 8\sqrt{\log_2 (7-x)}+3\log_2 (7-x)=11.$$

Обозначив $\sqrt{\log_2 (7-x)}$ через y, получим $3y^2+8y-11=0$, откуда $y=1$. Далее имеем: $\sqrt{\log_2 (7-x)}=1$, откуда $x=5$.

Примером преобразований, которые могут привести как к потере корней, так и к приобретению посторонних корней, может служить также переход к новому основанию логарифма, содержащему переменную.

Если при решении уравнения применяется формула

$$\log_{g(x)} f(x)=\frac{\log_{h(x)} f(x)}{\log_{h(x)} g(x)}, \tag{19}$$

то могут быть потеряны корни, при которых $h(x)\leqslant 0$ или $h(x)=1$. Например, если в уравнении

$$\log_{2x} x=\log_{\frac{8}{x}} x \tag{20}$$

перейти к основанию x, то получится уравнение

$$\frac{1}{\log_x (2x)}=\frac{1}{\log_x \frac{8}{x}},$$

единственным корнем которого является $x=2$. Однако легко видеть, что $x=1$ является корнем уравнения (20), но этот корень оказался потерянным. Это произошло при использовании формулы перехода к основанию x. Переход к основанию x сузил область определения уравнения (появилось дополнительное ограничение $x\neq 1$, но как раз $x=1$ является корнем уравнения).

Значит, прежде чем переходить к основанию x, необходимо было сначала выяснить, не является ли $x=1$ корнем данного уравнения, включить его в ответ, так как оно оказалось корнем уравнения, а затем, рассмотрев случай $x\neq 1$, воспользоваться формулой перехода. В данной задаче выбор нового основания, равного x, не являлся необходимым, переход к основанию 2 не осложнил бы решения задачи, но позволил бы избежать потери корня.

Отметим, что применение формулы (19) справа налево может привести к расширению области определения уравнения. При этом посторонними корнями могут оказаться те значения x, при которых основание логарифмов $h(x)$ не удовлетворяет условиям $0<h(x)\neq 1$.

При решении логарифмических уравнений иногда удобно пользоваться следующей формулой:

$$u^{\log_a v}=v^{\log_a u}\ (u>0;\ v>0;\ a>0;\ a\neq 1). \qquad (21)$$

Для доказательства формулы (21) достаточно найти логарифмы по основанию a от $u^{\log_a v}$ и $v^{\log_a u}$. Эти логарифмы будут равны одному и тому же выражению $\log_a u\cdot\log_a v$. Из равенства логарифмов по одному основанию будет следовать справедливость формулы (21).

Пример 7. Решить уравнение

$$2^{\log_5 x}+3x^{\log_5 2}=8.$$

Решение. Заменив $x^{\log_5 2}$ выражением $2^{\log_5 x}$, получим уравнение $4\cdot 2^{\log_5 x}=8$, равносильное данному. Решив его, получим $x=5$.

Некоторые показательные и логарифмические уравнения удается решить, используя свойство монотонности показательной и логарифмической функций.

Пример 8. Решить уравнение

$$3^x+4^x=7.$$

Решение. Легко угадать и проверить, что $x=1$ — корень данного уравнения. Покажем, что других корней уравнение иметь не может. Воспользуемся тем, что при $a>1$ функция a^x является возрастающей. При $x>1$ имеем: $3^x+4^x>7$, а при $x<1$ имеем: $3^x+4^x<7$, т. е. уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Справедливы следующие общие утверждения, которые можно использовать при решении уравнений (и неравенств).

а) Если функция f возрастает (убывает) на множестве X, то уравнение $f(x)=b$ не может иметь на этом множестве более одного корня.

б) Если на множестве X функция f возрастает, а функция φ

убывает, то уравнение $f(x)=\varphi(x)$ не может иметь на множестве X более одного корня.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_2 x+3\log_2(x+3)=6.$$

Решение. Воспользуемся тем, что сумма двух возрастающих функций есть функция, возрастающая на их общей области определения. Теперь ясно, что данное уравнение не может иметь более одного корня. Легко заметить, что $x=1$ — корень данного уравнения. Ясно, что он единственный.

Пример 10. Решить уравнение

$$4^x+(x-13)\cdot 2^x-2x+22=0.$$

Решение. Решив квадратное относительно 2^x уравнение, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x=2, \qquad (22) \\ 2^x=11-x. \qquad (23) \end{array}\right.$$

Корнем уравнения (22) является $x=1$, причем в силу возрастания функции 2^x этот корень единственный.

Далее замечаем, что так как $y=2^x$ является функцией возрастающей, а функция $y=11-x$ — убывающей, то уравнение (23) также не может иметь более одного корня. Легко угадать единственный корень уравнения (23): $x=3$.

Ответ. 1; 3.

Свойство монотонности можно использовать также и при решении неравенств.

Пример 11. Решить неравенство

$$8^x+3\cdot 2^{x+1}<7.$$

Решение. Функция $f(x)=8^x+3\cdot 2^{x+1}$ возрастает на $\boldsymbol{R}$ как сумма двух возрастающих функций. Легко видеть, что $x=0$ — единственный корень уравнения $f(x)=7$. Следовательно, неравенство $f(x)<7$ удовлетворяется при $x<0$.

Ответ. $x<0$.

В заключение рассмотрим две задачи, при решении которых используются оценки левой и правой части уравнения (неравенства).

Пример 12. Решить уравнение

$$\log_2(x^2+4)-\log_2 x=4x-x^2-2. \qquad (24)$$

Решение. Левая часть уравнения определена при $x>0$ и равна $\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)$. Поскольку $x+\frac{4}{x}\geqslant 4$ при $x>0$ (неравенство Коши!), то $\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)\geqslant 2$.

Кроме того, при любом x имеем:

$$4x-x^2-2=2-(x-2)^2\leqslant 2.$$

Следовательно, уравнение (24) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)=2, \\ 4x-x^2-2=2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x=2.$$

Пример 13. Решить неравенство

$$\log_3(4-\sin 3x)\leqslant\cos\frac{12x}{5}. \tag{25}$$

Решение. Оценим снизу левую часть неравенства. Так как $\sin 3x\leqslant 1$, то

$$\log_3(4-\sin 3x)\geqslant 1. \tag{26}$$

Правую часть неравенства оценим сверху:

$$\cos\frac{12x}{5}\leqslant 1. \tag{27}$$

Из неравенств (26) и (27) следует, что неравенство (25) может иметь место только в случае, когда одновременно выполняются условия

$$\log_3(4-\sin 3x)=1 \text{ и } \cos\frac{12x}{5}=1.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 3x=1, & (28) \\ \cos\frac{12x}{5}=1. & (29) \end{cases}$$

Приведем два способа решения этой системы.

I способ. Найдем общий период функций $\sin 3x$ и $\cos\frac{12x}{5}$. Период функции $\sin 3x$ равен $T_1=\frac{2\pi}{3}$; период функции $\cos\frac{12x}{5}$ равен $T_2=\frac{5\pi}{6}$. Так как $\frac{T_1}{T_2}=\frac{4}{5}$, то $5T_1=4T_2$. Следовательно, $T=5T_1=4T_2=\frac{10\pi}{3}$ — общий период указанных функций.

Найдем общие корни уравнений (28) и (29) на каком-нибудь промежутке, имеющем длину $\frac{10\pi}{3}$, например на $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$. Найдем корни уравнения (28):

$$\sin 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Промежутку $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ принадлежат: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$.

Найдем теперь корни уравнения (29). Имеем:

$$\cos\frac{12x}{5}=1 \Leftrightarrow x=\frac{5\pi k}{6},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Промежутку $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ принадлежат: 0, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$.

Таким образом, общим корнем уравнений (28) и (29) на $\left[0; \frac{10\pi}{3}\right)$ является $x=\frac{5\pi}{6}$. Отсюда следует, что все решения системы уравнений (28) — (29) записываются в виде:

$$x=\frac{5\pi}{6}+\frac{10\pi m}{3}, \quad m\in \boldsymbol{Z}.$$

II способ. Общие корни уравнений (28) и (29) можно найти, составив и решив уравнение

$$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}=\frac{5\pi k}{6} \qquad (30)$$

в целых числах.

Уравнение (30) перепишем в виде $1+4n=5k$, или

$$k-1=4(n-k). \qquad (31)$$

Из (31) следует, что $k-1$ должно быть кратно 4, т. е. $k-1=4m$, где $m\in \boldsymbol{Z}$.

Итак, имеем: $k=4m+1$, $m\in \boldsymbol{Z}$, откуда

$$x=\frac{5\pi}{6}(4m+1)=\frac{5\pi}{6}+\frac{10\pi m}{3}, \quad m\in \boldsymbol{Z}.$$

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнения:

а) $4{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x}\cdot 3^{x+1}=4\cdot 2^x$; б) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot 2^{|x|}=(2\sqrt{2})^{x^2-2}$;

в) $3\cdot 2^{x^2-1}=5\cdot 2^{1-x}-2^{x^2}$; г) $9^x-2^{x+0{,}5}=8\sqrt{2}\cdot 2^x-3^{2x-1}$;

д) $2^{2x+9}+5\cdot 2^{x+4}-3=0$; е) $3\cdot 4^{|x|}-7\cdot 2^{1+|x|}+8=0$;

ж) $2\cdot 9^x+3\cdot 6^x=9\cdot 4^x$; з) $2\cdot 3^{1+3|x|}+1=9^{|x|}+2\cdot 3^{1+|x|}$;

и) $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^x=12$; к) $9^x+9^{-x}-3^{x+1}-3^{1-x}-3^{1-x}+4=0$;

л) $8^x+8^{-x}-5(2^x+2^{-x})+8=0$; м) $27^x-12^x+2\cdot 18^x-2\cdot 8^x=0$.

2. Решите уравнения:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{4}{3}=2^x$; б) $4^x-(7-x)2^x+12-4x=0$;

в) $8-x\cdot 2^x+2^{3-x}=x$; г) $3^{x-1}\cdot x^2+(3^x-2^x)x=2^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}$;

д) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=(2\sqrt{2})^x$; е) $\frac{2^{x+3}}{4^x+16}=x^2-4x+5$.

3. Решите уравнения:

а) $4^{\sin x}-2^{2+\sin x}+3=0$; б) $3^{\sin^2 x}+4\cdot 3^{\cos^2 x}=13$;

в) $4^{\sin x}+2\cdot 4^{\cos x}=3\cdot 2^{\sin x+\cos x}$;

г) $5^{1+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-24\cdot 5^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-5=0$.

4. Решите неравенства:

а) $|2^x-5|<3$; б) $3^{x^2}>81\cdot 27^{|x|}$; в) $(x^2-2x-3)(2^x-8)\leqslant 0$;
г) $5^{\cos 2x}+70\leqslant 3\cdot 25^{\cos^2 x}$; д) $2^{x^2-2x-1}+3\cdot 2^{x^2-2x-2}-2^{x^2-2x-3}>6$;
е) $2^{6x+11}-3\cdot 2^{3x+6}+4<0$; ж) $4^{|2x-1|}-3\cdot 2^{1+|2x-1|}+8<0$;
з) $2^{2x+1}+3^{2x+1}>5\cdot 6^x$; и) $2^{2x^2+1}+2^{4x+3}\geqslant 17\cdot 2^{x^2+2x}$;
к) $2^{2x^2-4x+1}-9\cdot 2^{x^2-2x}+4<0$; л) $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}\leqslant 10$;
м) $\dfrac{3\cdot 9^x+5}{3^{x+1}-1}\leqslant 4$; н) $\dfrac{4^x+5}{2^{x+1}-1}\geqslant 3$;
о) $\dfrac{9^x+4^x}{6^x-9^x}\geqslant 5$; п) $\dfrac{5\cdot 15^x+9^x+6}{2\cdot 15^x+25^x+3}\leqslant 2$;
р) $(x^2+1)^{3x-1}\geqslant (x^2+1)^2$; с) $|x|^{x^2-2x-3}<1$;
т) $(x^2+x+1)^x<1$; у) $(2\cdot 3^{x-2}+3^{-x})^{2-x}>1$.

5. Решите неравенство $4^x-2^{x+1}-3<0$. Верно ли, что $\sqrt{2}$ является решением данного неравенства?

6. Решите неравенство $9^{x-0,5}-3^{x-1}\log_2 56+\log_2 7<0$. Верно ли, что число $\dfrac{1}{\lg 9}$ является решением неравенства?

7. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}2^{\sin^2 \pi x}\geqslant 1, \\ 9^{|x^2-3x|}-82\cdot 3^{|x^2-3x|}+81<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}\leqslant 1, \\ \dfrac{0{,}5^{x^2-2x}-0{,}125}{0{,}5^{x^2-2x}-2}\leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{2^{x+1}+x^2-10}{2^x-8}<1, \\ 8^{x^2}-4^{5-x^2}>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{3^x+x^2-19}{3^x-9}>2, \\ 3^{4-x^2}-27^{x^2}>0. \end{cases}$

8. Решите уравнения:

а) $5^{3^{\log_2 x}}=6$; б) $2^{x^2-2x}=3^{x-2}$; в) $3^{\sin x}=2^{\operatorname{tg} x}$;
г) $2^{|\log_2 x|}=3$; д) $3\cdot 2^{|\log_2 x|}=7-4x^2$;
е) $(16-x^2)\lg \sin x=0$; ж) $(\sin x)\cdot \lg(16-x^2)=0$;
з) $\log_{\cos x}(\cos 2x+3\sin x)=0$; и) $\log_{\frac{3x}{\pi}}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$;
к) $\log_{8\cos^2 x}\sin x=-0{,}5$; л) $\log_{0{,}8(3x-x^2)}\sin \pi(x^2-2x+5{,}25)=0$.

9. Решите уравнения:

а) $\lg \sin x=\lg \cos x$; б) $\log_2 \sin 2x=\log_2(-\cos x)$;
в) $\log_7(\sin 3x+\sin x)=\log_7(-\sin 2x)$;
г) $\log_{9-x^2}\sin^2 x=\log_{9-x^2}0{,}5$;
д) $\log_{4-x^2-3x}(\cos x-\cos 3x)=\log_{4-x^2-3x}\sin 2x$;
е) $|\sin x|\cdot(\log_2(20-x^2)-1)=\sin x$.

10. Решите уравнения:

а) $2\log_2 x+\log_2(3-x)=1$; б) $2\log_2\sin x-\log_2\cos x=-0{,}5$;

в) $\log_2\sin x+\log_2\cos x=-2$; г) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$;

д) $0{,}5\log_2(x-2)^4+2\log_2(1-x)=2+\frac{2}{3}\log_2 27$;

е) $\log_2^2 x^2-2\log_2 x-4^{\log_8 2\sqrt{2}}=0$; ж) $\log_2(2^{2x-1}-4)\log_2(4^x-8)=6$;

з) $\log_2^2\sqrt{2x-1}+\log_2^2\sqrt{4x-2}+\log_2^2\sqrt{8x-4}=3{,}5$;

и) $\log_x\sqrt[3]{9}+2\log_x(x\sqrt[3]{3})+(\log_x\sqrt[3]{81})^2=22$;

к) $\log_2(3x^2+5x-2)=1+\log_2(3x-1)\log_2(x+2)$;

л) $\log_2^2 x+(x-5)\log_2 x+6-2x=0$;

м) $4^{\log_2^3 x}=x^{1+\log_2 x}$; н) $x^{\lg(25x)}=16$;

о) $x^{\log_6 x}=3\cdot 2^{3\log_6 x-2}$; п) $3^{\log_4 x}=6-x^{\log_2 3}$.

11. Решите уравнения:

а) $\log_2 x+\log_{x^2} 8=2{,}5$; б) $\log_3 x^2+\log_{x^4} 27=2{,}5$;

в) $\log_4^2(4x^2)+\log_2\frac{4}{x}=5$; г) $\log_{0{,}5\sin 2x}\sin x\cdot\log_{0{,}5\sin 2x}\cos x=0{,}25$;

д) $\log_3(5\operatorname{tg}^2 x)=2\log_9 5+2\log_{\frac{1}{3}}(2\cos x)$;

е) $25^x-5^x\log_2 56+3\log_2 7=0$; ж) $49^x-7^x\log_2 12+2\log_2 3=0$;

з) $\log_{|x|}(x^2-2x)-\log_{|x-2|}\frac{x-2}{x}=\frac{5}{2}$;

и) $\log_2^2(x^2-x)\cdot\log_2\frac{x-1}{x}+\log_2^2 x^2=4$;

к) $\log_2^2(x^2-x)=\log_2^2|x|+\log_2^2|x-1|$;

л) $\log_{0{,}5}(0{,}5\sin 2x)=\log_{0{,}5}^2\operatorname{tg} x+\log_{0{,}5}\sin^2 x$;

м) $\log_{\sin x}(1-\cos 2x)=2^{\cos 8x}+\log_{\sin x} 2$; н) $\log_3 x=\log_4(x^2-5)$;

о) $\log_6(x^2+9)-\log_6 x=6x-x^2-8$.

12. Сколько корней имеют уравнения:

а) $\log_{2\pi} x=\cos x$; б) $\log_2 x=-\cos x$; в) $\log_{\frac{1}{32}} x=\cos x$?

13. Решите неравенства:

а) $\log_3\frac{2x-1}{x-3}<1$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(|x-2|-3)>0$;

в) $\log_2\frac{(x-3)^2}{3x-1}<1$; г) $\log_{\frac{1}{8}}(x^3-4x+5)<-1$;

д) $\log_3(4+\log_{0{,}5}(x^2+2x))>0$; е) $\log_6(3^{2\log_3(4-x)}+3x-10)<1$;

ж) $\log_3(4^x-3\cdot 2^{x+1}+8)<1$; з) $\log_2(x^2-4|x|+4)<0$;

и) $x^{\frac{1}{\log_3 x}}\cdot\log_2 x<1$; к) $2^{|\log_2 x|}<4{,}5x-x^2$;

л) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|\log_2 x|}\geqslant x^2-2x+2$; м) $0{,}5^{\log_{0{,}5}^2 x}\leqslant x^3$.

14. Решите неравенства:

а) $(9^x-10\cdot 3^{x-1}+1)\lg^2(4x-1)<0$;

б) $(2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4)\lg^2(x+3)>0$;

в) $(2^x-3)(2\log_2 x-1)\log_2^2 x\leqslant 0$;

г) $\dfrac{(7x^2-10x+3)\lg^2(x+1)}{2-5^x}>0$;

д) $(5x-x^2)\log_{\frac{1}{5}}(|x|-2)>0$; е) $\dfrac{1-2x+\log_2(6x)}{x-2}\leqslant -2$;

ж) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{0,2}(x^2-0,8)}\leqslant 1$;

з) $\log_4 x^2<\log_2(4-x)+\log_2(3-x)$;

и) $\log_2(x-3)<\log_4(5-x)^2$;

к) $2\log_4 x+\log_2(x^3-11x+18)>3$;

л) $\log_2 x^2<\log_2(8-x^2)$;

м) $\lg(9^{\lg x}+1)\geqslant 1-\lg 3+\lg 3$.

15. Решите неравенства:

а) $4\log_4^2 x-8\log_4 x-5>0$;

б) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}^2 x-3\log_{\frac{1}{2}} x+2)\leqslant 1$;

в) $\log_2\sqrt{x}-2\log_{\frac{1}{4}}^2 x+1>0$;

г) $\log_4^2(2x)+3\log_2 x<4$;

д) $\log_{\frac{4}{x}} 2>\log_x 2$;

е) $2\log_2(2x-1)-\log_{2x-1}16<2$; ж) $\log_2 x^4+2\log_{4x^2}8<4$;

з) $4(\log_2^2 x+\log_x^2 2)-12(\log_2 x-\log_x 2)+1>0$;

и) $\log_2^2(3x^2-5x-2)-3\log_2(3x-2)<1{,}5\log_2(1-x)^2-2$.

16. Решите неравенства:

а) $\log_{x-1}(2x^2-9x+13)\geqslant 2$; б) $\log_{x-2}\sqrt{22-x}\leqslant 1$;

в) $\log_{2x-6}(x^2-9)<2$; г) $\log_{5|x|-4}x^2>1$;

д) $\log_{3^{2-x^2}}(1{,}5-|x-1|)\leqslant 0$; е) $\log_{2x-x^2}\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)^2>0$;

ж) $\log_x\dfrac{|3x-4|}{x-1}<1$;

з) $\log_{3-x}\dfrac{1}{|x|}>1$;

и) $(0{,}05)^{-\log_{x-0,25}x}\geqslant(2\sqrt{5})^{\log_{x-0,25}(4x-1)}$;

к) $\log_{2^x}\left(\dfrac{1}{17}\cdot 2^{2x+1}+\dfrac{8}{17}\right)\geqslant 1$; л) $\log_{2x-1}(9^x-2\cdot 3^{x+2}+81)<0$.

17. Решите неравенства:

а) $\log_{x-1}2\log_4\sqrt[3]{\dfrac{6-5x}{6x-5}}\leqslant\dfrac{1}{6}$;

б) $\log_{\frac{5-x}{4}}(x-2)\log_{x-2}(6x-x^2)\geqslant\log_{\frac{5-x}{4}}(3x^2-10x+15)$;

в) $\dfrac{1}{\log_3(2x-1)\cdot\log_{x-1}9}<\dfrac{\log_3\sqrt{2x-1}}{\log_3(x-1)}$;

г) $5^{\log_9 x}<2-x^{\log_3 5}$;

д) $3^{\log_4 x}>6-x^{\log_2 3}$;

е) $\log_3(4+\cos 6x)\leqslant\sin\dfrac{x}{3}$; ж) $\log_4\left(5-\sin\dfrac{x}{4}\right)\leqslant\cos x$;

з) $\sqrt{\lg \sin x} < 9 - x^2$; и) $\log_2(4 - \sqrt{x+1}) > \log_3 x$.

18. Найдите область определения функций:

а) $y = \sqrt{9 \cdot 2^{x+1} - 4^x - 32} + \lg \sin x$;

б) $y = \sqrt{\log_{0,3}(5^{2x+1} - 4 \cdot 5^x)}$;

в) $y = \log_5 (\sqrt{27^{\lg x - 2}} - \sqrt[3]{9^{2 - \lg x}})$.

19. Найдите все решения неравенства $\log_{0,2}(29 - 4x - 2x^2) < -2$, являющиеся решениями уравнения $|2x+5| + 2|x-1| = 7$.

20. Найдите все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(x+1) - 1$ является решением неравенства $16x^2 - a^4 \leqslant 0$.

21. При каких значениях a многочлен

$$P(x) = x^4 + (a+3)x^2 + (4^a - 5 \cdot 2^{a+1} + 16)x + 2^a + 1$$

является квадратом многочлена второй степени?

22. Для каждого значения параметра a найдите все решения неравенства

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{8 + \log_a x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x} \quad (a > 0;\ a \neq 1),$$

принадлежащие интервалу $0 < x < 1$.

23. Найдите тот корень уравнения

$$\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x + a = 0 \quad (a < 0),$$

который больше 1.

24. Найдите все значения a, для которых неравенство

$$a \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 3a + 1 > 0$$

будет справедливо при всех значениях x.

25. Решите уравнения (неравенства) (a — параметр):

а) $4^{-|x-1|} - 2^{2-|x-1|} - a = 0$;

б) $4^{|x|} - 2^{|x|+1} + a = 0$;

в) $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$;

г) $\log_2(1 + a \cdot 4^x) = x + 1$;

д) $\log_{\frac{1}{5}}(4^x + a) + (x+1)\log_5 2 = 0$;

е) $x^{1 + \log_a x} > a^2 x$ ($a > 0$; $a \neq 1$);

ж) $\log_a(1 - x^2) \geqslant 1$ ($a > 0$; $a \neq 1$);

з) $\log_{x+2}(2x + a) = 1$;

и) $\log_{2x}(x^2 + a) = 1$;

к) $4^x - (a+1)2^x + a \leqslant 0$;

л) $\log_2^2 \cos x - 2a \log_2 \cos x + 2 - a^2 = 0$.

26. Найдите все значения a, для которых уравнение

$$1 + \log_2(ax) = 2\log_2(1 - x)$$

имеет единственное решение.

27. Найдите все значения a, для которых уравнение

$$\log_3(9^x + a) = x$$

имеет два действительных и различных корня.

28. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x+4^{-x}-(a+1)(2^x+2^{-x})+a+2=0$$

имеет единственное решение.

Ответы к дополнительным упражнениям

1. а) -1; 3; г) 1,5; з) 0; к) 0. **2.** а) 1; б) 1; 2; в) 2; г) -2; 1; д) 2; е) 2. **3.** а) πn, $n\in\mathbf{Z}$. **4.** и) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 3$, $x=1$; л) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; н) $-1<x\leqslant 1$, $x\geqslant 2$; р) $x=0$, $x\geqslant 1$; с) $1<x<3$; т) $x<-1$; у) $x<\log_3 1{,}5$; $1<x<2$. **7.** а) 1; 2; б) -1; 3; в) $x<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<x<3$; г) $-1<x<1$. **8.** б) 2; $\log_2 3$; г) 3; $\frac{1}{3}$; е) -4; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ж) 0; $\pm\pi$; $\pm\sqrt{15}$; л) 1,5. **9.** д) $\frac{\pi}{6}$; е) -4; 0; $\pm\pi$; $\sqrt{19}$. **10.** в) $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; и) $3^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{4}{15}}$; н) 0,01; 4; о) $\frac{4}{3}$; 6. **11.** б) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt[4]{27}$; г) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; е) $\log_5 3$; $\log_5\log_2 7$; з) -2; 4; н) 3; о) 3. **12.** а) Один; б) два; в) одиннадцать. **13.** в) $1<x<11$, $x\neq 3$; и) $0<x<\sqrt[3]{2}$, $x\neq 1$; к) $0{,}5<x<3{,}5$; л) $x=1$. **14.** а) $0{,}25<x<0{,}5$; $0{,}5<x<1$; в) $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\log_2 3$; $x=1$; з) $x<0$, $0<x<2$; к) $x>2$; м) $0<x\leqslant 0{,}1$; $x\geqslant 10$. **15.** ж) $0<|x|<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}<|x|<\sqrt{2}$. **16.** а) $2<x\leqslant 3$; $x\geqslant 4$; е) $\frac{1}{2}<x<2$, $x\neq 1$, $x\neq 1{,}5$. **17.** б) $\frac{5}{2}\leqslant x<5$, $x\neq 3$; е) $\frac{3\pi}{2}+6\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; ж) $2\pi+8\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; з) $\frac{\pi}{2}$; и) $-1\leqslant x<3$. **18.** а) $1\leqslant x<\pi$; б) $\log_5 0{,}8<x\leqslant 0$. **19.** $-2{,}5\leqslant x<-1+\sqrt{3}$. **20.** $|a|\geqslant 2$. **21.** При $a=3$. **22.** При $a>1$ $0<x<\frac{1}{a^4}$; при $0<a<1$ $0<x<a^8$. **23.** $x=0{,}5^{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}}$. **25.** а) При $-3\leqslant a<0$ $x=1\pm\log_2(2-\sqrt{4+a})$, при $a<-3$, $a\geqslant 0$ решений нет; б) при $a\leqslant 1$ $x=\pm\log_2(1+\sqrt{1-a})$, при $a>1$ решений нет; в) при $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2 a$, при остальных a решений нет; г) при $a=0$ $x=-1$, при $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2\frac{1\pm\sqrt{1-a}}{a}$, при $a<0$ $x=\log_2\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$, при $a>1$ решений нет; д) при $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2(1\pm\sqrt{1-a})$, при $a\leqslant 0$ $x=\log_2(1+\sqrt{1-a})$, при $a>1$ решений нет; е) при $a>1$ $0<x<a^{-\sqrt{2}}$, $x>a^{\sqrt{2}}$, при $0<a<1$ $a^{\sqrt{2}}<x<a^{-\sqrt{2}}$; ж) при $a>1$ решений нет, при $0<a<1$ $-1<x\leqslant-\sqrt{1-a}$, $\sqrt{1-a}\leqslant x<1$; з) при $a<4$, $a\neq 3$ $x=2-a$, при остальных a решений нет; и) при $0<a<\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}<a\leqslant 1$ $x=1\pm\sqrt{1-a}$, при $a\leqslant 0$ $x=1+\sqrt{1-a}$, при $a=\frac{3}{4}$ $x=1{,}5$, при $a>1$ решений нет; к) при $a>1$ $0\leqslant x\leqslant\log_2 a$, при $a=1$ $x=0$, при $0<a<1$ $\log_2 a\leqslant x\leqslant 0$, при $a\leqslant 0$ $x\leqslant 0$; л) при $a<-\sqrt{2}$, $a\geqslant\sqrt{2}$ $x=\pm\arccos 2^{a-\sqrt{2(a^2-1)}}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1$ $x=\pm\arccos 2^{a\pm\sqrt{2(a^2-1)}}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при $-1<a<\sqrt{2}$ решений нет. **26.** $a>0$, $a=-2$. **27.** $0<a<\frac{1}{4}$. **28.** $a=2$.

10. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

При решении задач по теме используются формулы:

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \qquad (1)$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u', \qquad (2)$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0,\ a > 0,\ a \neq 1), \qquad (3)$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \qquad (4)$$

где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция.

Из формул (1), (2) и (4) следует, что

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

В случае, когда функция $u = u(x)$ является линейной, $u = kx + b$, формулы (2) и (4) принимают вид:

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b},$$

$$(\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b} \quad (kx + b > 0)$$

и в соответствии с ними имеем:

$$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C; \quad \int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \ln|kx+b| + C \quad (k \neq 0).$$

Пример 1. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции

$$f(x) = \ln(2x+4) + x^2 + x.$$

Решение. Функция определена на $(-2;\ +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1)}{x+2}, \quad x > -2.$$

Критические точки функции: $-1{,}5$ и -1.

Легко видеть, что $f'(x) > 0$ при $-2 < x < -1{,}5$, $x > -1$; $f'(x) < 0$ при $-1{,}5 < x < -1$.

Следовательно, функция (непрерывная в точках $-1{,}5$ и -1) возрастает на $(-2;\ -1{,}5]$ и на $[-1;\ +\infty)$, убывает на $[-1{,}5;\ -1]$.

Тогда $x_1 = -1{,}5$ — точка максимума, точка $x_2 = -1$ — точка минимума функции.

Пример 2. Исследовать функцию $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена всюду, кроме точки $x_0 = 2$.

$$D(f) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty).$$

2) Функция не является ни четной, ни нечетной:

$$-2 \in D(f),\ 2 \notin D(f).$$

3) Уравнение $f(x)=0$ корней не имеет. График функции не пересекает оси абсцисс.

4) Функция непрерывна на $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. На каждом из этих промежутков функция сохраняет постоянный знак: $f(x)>0$ при $x>2$, $f(x)<0$ при $x<2$.

Точка $x_0=2$ — точка разрыва функции.

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 2-0} f(x)=-\infty.$$

Прямая $x=2$ — вертикальная асимптота графика функции.

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Далее, так как $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x-2}=0$, то $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$. Это значит, что прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота графика функции $f(x)$ при $x\to -\infty$.

6) Имеем: $f'(x)=\frac{(x-3)\,e^x}{(x-2)^2}$. Так как $f'(x)>0$ при $x>3$, $f'(x)<0$ при $x<2$, $2<x<3$ (рис. 13), то $f(x)$ возрастает на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2)$ и $(2; 3]$ (учтена непрерывность функции в точке 3).

7) Имеем: $f''(x)=\frac{(x^2-6x+10)\cdot e^x}{(x-2)^3}$. Так как при $x>2$ $f''(x)>0$, а при $x<2$ $f''(x)<0$, то на промежутке $(2; +\infty)$ график функции обращен выпуклостью вниз, а на промежутке $(-\infty; 2)$ выпуклостью вверх.

8) Так как $f(0)=-0{,}5$, то график функции пересекает ось ординат в точке $M(0; -0{,}5)$.

Учитывая проведенное исследование, строим график функции (рис. 14).

Пример 3. Найти число положительных корней уравнения $e^x=ax^2$ в зависимости от a $(a>0)$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{e^x}{x^2}=a.$$

Проведем исследование функции $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$ на $(0; +\infty)$.

Имеем: $f'(x)=\frac{(x-2)\,e^x}{x^3}$, $x>0$.

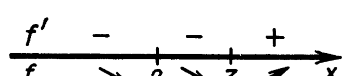


Рис. 13

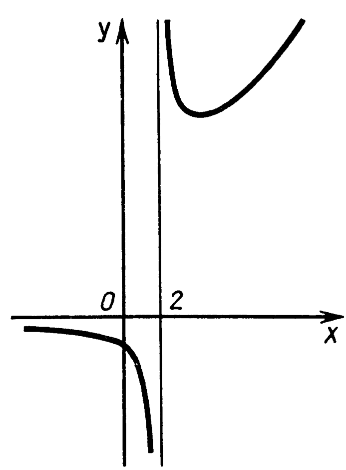


Рис. 14

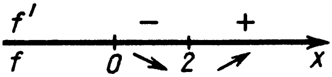


Рис. 15

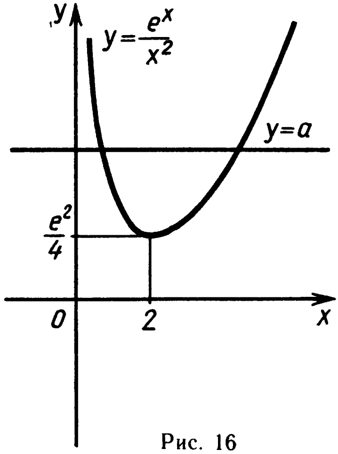


Рис. 16

Так как $f'(x)<0$ при $0<x<2$, $f'(x)>0$ при $x>2$ (рис. 15), то на $(0;\ 2]$ функция убывает, а на $[2;\ +\infty)$ возрастает.

Наименьшее значение на $(0;\ +\infty)$ функция принимает в точке $x_0=2$. Это наименьшее значение равно $f(2)=$ $=0{,}25e^2$.

Учитывая непрерывность функции и тот факт, что $f(x)\to+\infty$ при $x\to+0$ и при $x\to+\infty$ приходим к выводу, что $E(f)=[0{,}25e^2;\ +\infty)$ и, следовательно, данное уравнение имеет один корень, если $a=0{,}25e^2$; два корня, если $a>0{,}25e^2$. При $0<a<0{,}25e^2$ уравнение корней не имеет (рис. 16).

Рассмотрим задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Задача 1 (радиоактивный распад). Известно, что при радиоактивном распаде скорость распада пропорциональна имеющемуся количеству вещества. Найти закон радиоактивного распада, если количество вещества в начальный момент времени $t=0$ равно m_0, а период полураспада (время, за которое распадается половина имеющегося вещества) равен T.

Решение. Пусть $m(t)$ — масса вещества в момент времени t. Согласно условию задачи получаем дифференциальное уравнение

$$m'(t)=-km(t), \text{ где } k>0. \tag{1}$$

В уравнении (1) поставлен знак «минус» потому, что $m(t)$ — функция убывающая, следовательно, $m'(t)<0$.

Разделив в уравнении (1) переменные, получим:

$$\frac{dm}{m}=-kdt,$$

проинтегрировав, имеем:

$$\ln m=-kt+\ln C,\quad m=Ce^{-kt}. \tag{2}$$

Константа C находится из условия $m(0)=m_0$:

$$m_0=Ce^{-k\cdot 0}=C, \text{ т. е. } C=m_0.$$

Окончательно получаем:

$$m(t)=m_0e^{-kt}. \tag{3}$$

Зная период полураспада T, найдем коэффициент k. Так как $m(T)=0{,}5m_0$, то из (3) находим: $m_0e^{-kT}=0{,}5m_0$, $e^{-kT}=0{,}5$, $kT=\ln 2$, $k=\frac{\ln 2}{T}$; $m=m_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$.

В физике закон радиоактивного распада обычно выражают через период полураспада T:

$$m(t)=m_0(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}}=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Таким образом, получаем следующий закон радиоактивного распада:

$$m=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Задача 2. Моторная лодка движется в стоячей воде со скоростью 5 м/с. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 40 с ее скорость стала равной 2 м/с. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки, определите скорость лодки через 2 мин после выключения мотора.

Решение. Составим уравнение движения лодки на основании второго закона Ньютона: $-ma=F_{\text{сопр}}$, а так как $F_{\text{сопр}}=kv$, то $-ma=kv$, или $mv'+kv=0$, откуда

$$v'=-\frac{k}{m}v.$$

Решив полученное дифференциальное уравнение, находим:

$$v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Используя начальные условия, получим: $2=5e^{-40\cdot\frac{k}{m}}$, откуда

$$e^{-\frac{k}{m}}=\sqrt[40]{\frac{2}{5}}.$$

Поэтому через 2 мин после выключения мотора скорость лодки будет равна $v=5\cdot\left(\sqrt[40]{\frac{2}{5}}\right)^{120}=0{,}32$ м/с.

Ответ. 0,32 м/с.

Задача 3. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$, если отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной, проведенной через произвольную точку кривой, равен удвоенной ординате точки касания.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка искомой кривой.

Уравнение касательной в точке M имеет вид:

$$Y-y=y'(x)(X-x),\qquad(1)$$

где X, Y — текущие координаты точек касательной.

Из условия задачи следует, что $Y=2y$ при $X=0$.

Тогда из уравнения (1) получаем: $2y-y=-xy'$, т. е. $y=-xy'$. Так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0.$$

Откуда

$$\ln|y|+\ln|x|=\ln C_1;\quad xy=C.$$

Учитывая, что кривая должна проходить через точку A (1; 2), находим $C=2$, и, следовательно, уравнение кривой имеет вид $xy=2$. Искомая кривая — гипербола.

Дополнительные упражнения

1. Вычислите значение производной функции в указанной точке.

а) $y=\sqrt{5+e^{2x}}$, $x_0=\ln 2$; б) $y=xe^{\sin \pi x}$, $x_0=1$;

в) $y=\frac{8^x+4^x+3\cdot 2^x}{\ln 2}$, $x_0=\log_4 3$; г) $y=\frac{e^{3x-6}}{x^2}$, $x_0=2$;

д) $y=x^2\ln(2x-1)$, $x_0=1$; е) $y=\frac{\ln(2x+3)}{x}$, $x_0=-1$;

ж) $y=\ln^3 x+5\ln^2 x$, $x_0=e$; з) $y=x\ln^2(3-2x)$, $x_0=1$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции в указанной точке:

а) $y=e^{1-x}\sin\frac{\pi x}{2}$, $x_0=1$; б) $y=e^{\cos 2x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

в) $y=0{,}5x\ln(2x-3)$, $x_0=2$; г) $y=x^2\ln(3-x)$, $x_0=2$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции:
а) $y=e^{2x-1}+2x$, параллельной прямой $y=4x+1$;
б) $y=x^2-\ln(2x-1)$, параллельной прямой $y=2x-3$.

4. Прямая $y=-3x\ln 2-5$ является касательной к графику функции

$$f(x)=4^x-3\cdot 2^{x+1}+x\ln 2.$$

Найдите координаты точки касания.

5. При каком значении a прямая $y=9x+a$ является касательной к графику функции $f(x)=\frac{9^x-3^{x+1}}{\ln 3}$?

6. При каком значении a прямая $y=ax$ является касательной к графику функции $y=e^{x-1}-3x$?

7. При каком значении a $(a>0)$ кривая $y=a\ln x$ имеет с графиком функции $f(x)=2x^2$ одну общую точку?

8. Найдите критические точки функции:

а) $y=2^x+2^{3-x}+x\ln 4$; б) $y=(x^2+5x+7)e^{-x}$;

в) $y=0{,}5x\ln x-x\ln 2$; г) $y=e^{x^2-4x}-x^2+4x$;

д) $y=2x-x^2\ln 2-x\cdot 2^{3-x}$; е) $y=x^3(2+3\ln x)-36x\ln x+1$.

9. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $y=2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+(2\ln 2)x-3$; б) $y=(2x^2-3x)e^x$;

в) $y=3+2x-x^2-2xe^{3-x}$; г) $y=(11+x-x^2)e^{-x}$;

д) $y=x+\ln(x^2-3)$; е) $y=\ln(x^2-6x+9)+2x$;
ж) $y=x(x-3)\ln x+0{,}5x^2+7$; з) $y=x^2+3x+\ln(2x+6)$.

10. Постройте график функции:

а) $y=e^{\frac{1}{x}}$; б) $y=e^{\frac{1}{1-x^2}}$;

в) $y=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$; г) $y=(x^2-3)e^x$;

д) $y=x-\ln(x+1)$; е) $y=x^2-2x-2\ln(x-1)$;

ж) $y=x^2+4\ln(3-x)$; з) $y=x^3\ln^2 x$.

11. Найдите число решений уравнения в зависимости от a: а) $e^x=ax\ (a>0)$; б) $\ln x=\dfrac{a}{x}$; в) $\ln x=ax^2$.

12. Вычислите интеграл:

а) $\int(4^x+2^x)\ln 2dx$; б) $\int\dfrac{(e^x-1)^3}{e^x}dx$;

в) $\int\dfrac{3x+1}{x-2}dx$; г) $\int\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$;

д) $\int\dfrac{x^2}{x-2}dx$; е) $\int\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2}dx$; ж) $\int\dfrac{3+5xe^{1-2x}+\sqrt{x}}{x}dx$.

13. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_0^{\ln 2}(e^x+e^{-x})dx$; б) $\int\limits_0^{\log_3 2}(3^x-1)^2dx$; в) $\int\limits_2^3\dfrac{xdx}{x-1}$; г) $\int\limits_1^e\dfrac{1+\lg x}{x}dx$.

14. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=e^{2x}$, $y=2+e^x$, $x=1$; б) $y=e^{x+1}$, $y=e^{2x}$, $x=\ln 5$;

в) $y=e^x-1$, $y=5(1-e^{-x})$; г) $y=\dfrac{2}{x}$, $y=\dfrac{10x-21}{2x-5}$.

15. Решите уравнение $\int\limits_0^{\ln 2}(e^{2a+2x}-e^{a-x})dx=1$.

16. Решите неравенство $\int\limits_0^x(9^t-3^{t+1})dt\leqslant 0$.

17. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'=-3y$; б) $y'=\dfrac{2y}{x}$; в) $y'=2x(y-1)$;

г) $y'=3y+2$; д) $y'=y\cos x$; е) $y'=y\operatorname{ctg} x$.

18. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

а) $2y'\sqrt{x}=y$, $y(4)=1$; б) $(x+1)y'+xy=0$, $y(0)=1$;

в) $\operatorname{tg} x\cdot dy=ydx$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$; г) $\sin 2xdy=2y\cos 2xdx$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$;

д) $y'=y\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$; е) $xy'=5y$, $y(1)=2$.

19. Найдите наименьшее значение функции $y=f(x)$, если $(x-1)y'=2y-1$ и $f(2)=1$.

20. Найдите наибольшее значение функции $y=f(x)$, если $2y\cos 2x dx=(1+\sin 2x)dy$ и $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

21. Постройте график функции $y=f(x)$, если:

а) $2y\sin 2x dx+\cos 2x dy=0$ и $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-1$;

б) $\sin 3x dy=3y\cos 3x dx$ и $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$.

22. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;\ 1)$, для которой угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен удвоенной ординате точки касания. Изобразите эту кривую.

23. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;\ 3)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

24. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;\ 3)$, расстояние от любой точки которой до начала координат равно длине отрезка касательной к кривой в этой точке от рассматриваемой точки до тóчки пересечения с осью абсцисс.

25. Период полураспада некоторого вещества равен 1000 лет. Сколько останется этого вещества через 100 лет?

Ответы к дополнительным упражнениям

1. а) $\frac{4}{3}$; в) $6+12\sqrt{3}$; д) 2; ж) $\frac{13}{e}$. **2.** а) $y=2-x$; в) $y=2x-4$. **3.** а) $y=4x$; б) $y=2x-\frac{3}{4}-\ln 2$. **4.** $(0;\ -5)$. **5.** $a=-9$. **6.** $a=-2$. **7.** $a=4e$. **8.** д) 2; $\frac{1}{\ln 2}$; е) 2; $\frac{1}{e}$. **9.** а) Возрастает на $(-\infty;\ -2)$, $[1,\ +\infty)$, убывает на $[-2;\ 1]$; в) убывает на $(-\infty;\ 1]$, $[3;\ +\infty)$, возрастает на $[1;\ 3]$; д) возрастает на $(-\infty;\ -3]$; $(\sqrt{3};\ +\infty)$, убывает на $[-3;\ -\sqrt{3})$; ж) возрастает на $\left(0;\ \frac{1}{e}\right]$, $[1{,}5;\ +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e};\ 1{,}5\right]$. **11.** а) Два решения при $a>e$, одно решение при $a=e$, нет решений при $0<a<e$; б) одно решение при $a\geqslant 0$ и $a=-\frac{1}{e}$, два решения при $-\frac{1}{e}<a<0$, нет решений при $a<-\frac{1}{e}$; в) одно решение при $a\leqslant 0$, $a=\frac{1}{2e}$, два решения при $0<a<\frac{1}{2e}$, нет решений при $a>\frac{1}{2e}$. **13.** а) 1,5; б) $\log_3\frac{2}{\sqrt{e}}$; в) $1+\ln 2$; г) $1+\frac{\lg e}{2}$. **14.** а) $0{,}5e^2-e-2+\ln 4$; б) $12{,}5-5e+0{,}5e^2$; в) $6\ln 5-8$; г) $7{,}5-8\ln 2$. **15.** $a=0$. **16.** $0\leqslant x\leqslant\log_3 5$. **17.** а) $y=Ce^{-3x}$; б) $y=Cx^2$. **18.** а) $y=e^{\sqrt{x-2}}$; б) $y=(1+x)e^{-x}$; в) $y=-2\sin x$; г) $y=3\sin 2x$. **19.** 0,5. **20.** 1. **21.** а) $y=-2\cos 2x$; б) $y=2\sin 3x$. **22.** $y=e^{2x}$. **23.** $y^2=9x$. **24.** $xy=6$, $y=1{,}5x$. **25.** $\frac{m_0}{\sqrt[10]{2}}$.

11. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение $A(x)=B(x)$ называется *иррациональным*, если хотя бы одно из выражений $A(x)$ или $B(x)$ иррационально. Так, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2}=2x-1$, $\sqrt[3]{x-1}=2$, $\sqrt[4]{x-5}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{7-x}$ и т. д.

В некоторых случаях можно сделать вывод о решении иррационального уравнения, не прибегая к преобразованиям. Так, например, уравнения $\sqrt{5x-2}=-1$, $\sqrt{x-5}=3-x$ не имеют решений, что следует из определения арифметического корня. Аналогично легко видеть, что каждое из уравнений $\sqrt{x-2}=6-3x$ и $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-5x}=0$ имеет единственный корень, равный 2.

Один из основных методов решения иррациональных уравнений — метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень. Отметим, что уравнение $A^n(x)=B^n(x)$ при n четном является следствием уравнения $A(x)=B(x)$, а при n нечетном равносильно уравнению $A(x)=B(x)$. Следовательно, при возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней и поэтому необходима проверка корней.

Иррациональное уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} \varphi(x)\geqslant 0, & (1) \\ f(x)=\varphi^{2n}(x). & (2) \end{cases} \qquad (*)$$

Заметим, что приписывать неравенство $f(x)\geqslant 0$ в системе $(*)$ излишне — оно следует из уравнения (2).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x^3-3x+1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x(x^2-x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=0{,}5(1\pm\sqrt{5}) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0{,}5(1+\sqrt{5}).$$

Ответ. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x}=-\sqrt{2}\cos x.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x\leqslant 0, \\ 2\cos 2x+\sqrt{3}\sin x=2\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\leqslant 0, \\ 2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+2\pi n, \\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \end{array}\right. n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ. $\pi+2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{3x-4}=\sqrt[3]{x}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб по формуле

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Получим уравнение, равносильное данному:

$$4x-6+3\sqrt[3]{(x-2)(3x-4)}\,(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-4})=x. \qquad (1)$$

Заменим выражение в скобках выражением $\sqrt[3]{x}$. Получим:

$$\sqrt[3]{(x-2)(3x-4)\,x}=2-x. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является следствием уравнения (1), поэтому необходимо будет сделать проверку. Возведем в куб левую и правую части уравнения (2):

$$x(x-2)(3x-4)=(2-x)^3.$$

Последнее уравнение имеет корни: $x_1=2$, $x_2=1$.
Проверка показывает, что $x_2=1$ — посторонний корень.

Ответ. 2.

Некоторые иррациональные уравнения удается решить с помощью введения новой переменной.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}=3$.

Решение. Положив $\sqrt[4]{2x-1}=y$, где $y\geqslant 0$, перепишем уравнение в виде $y^2-2y-3=0$. Корнями этого уравнения служат $y_1=3$, $y_2=-1$. Имеем: $\sqrt[4]{2x-1}=3$, $x=41$.

Ответ. 41.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x-1}=x-a$ (a — параметр).

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$x-1-\sqrt{x-1}+1-a=0 \qquad (1)$$

и рассмотрим его как квадратное относительно $\sqrt{x-1}$. Находим дискриминант уравнения $D=4a-3$. Уравнение (1) имеет решение только в случае, если $a\geqslant\frac{3}{4}$.

Имеем:

$$\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-1}=\dfrac{1-\sqrt{4a-3}}{2}, & (2)\\ \sqrt{x-1}=\dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2}. & (3)\end{array}\right.$$

Заметим, что уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда $1-\sqrt{4a-3}\geqslant 0$, т. е. при $a\leqslant 1$. Решив уравнения (2) и (3), получим при $\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant 1$:

$$x_1=\frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}, \quad x_2=\frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{3}.$$

Таким образом, приходим к следующему ответу:

при $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$ уравнение имеет два корня: x_1 и x_2; при $a > 1$ уравнение имеет один корень: x_2; при $a < \frac{3}{4}$ решений нет.

Некоторые иррациональные уравнения удается решить, используя свойство монотонности функций.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x-3} = 5 - x$.

Решение. Так как функция $\sqrt{x-3}$ является возрастающей, а функция $5 - x$ убывающей (на общей области определения), то уравнение не может иметь более одного корня. Легко угадывается единственный корень уравнения: $x_0 = 4$.

Ответ. 4.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3$.

Решение. Функция $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3}$ возрастающая на всей области определения. Легко видеть, что $x_0 = 1$ — корень уравнения. Других корней уравнение иметь не может.

Ответ. 1.

Рассмотрим уравнение с параметром, при решении которого удобно использовать свойство монотонности функций и идею замены переменной.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$.

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2}$ определена и возрастает на промежутке $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$. Наименьшее значение она принимает в точке $\frac{2}{3}$; $E(f) = \left[\frac{2\sqrt{6}}{3};\ +\infty\right)$. Следовательно, при $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение, при $a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ решений нет.

Итак, пусть $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Переписав уравнение в виде

$$\sqrt{3x-2} = a - \sqrt{x+2}, \tag{1}$$

возведем обе его части в квадрат:

$$3x - 2 = a^2 - 2a\sqrt{x+2} + x + 2. \tag{2}$$

Уравнение (2) является следствием уравнения (1). Перепишем его в виде:

$$2(x+2) + 2a\sqrt{x+2} - a^2 - 8 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) является квадратным относительно $\sqrt{x+2}$. Решив его, получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+2} = \dfrac{-a - \sqrt{3a^2+16}}{2}, & (4) \\ \sqrt{x+2} = \dfrac{-a + \sqrt{3a^2+16}}{2}. & (5) \end{array}\right.$$

При $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ уравнение (4) решений не имеет, а уравнение (5) имеет корень

$$x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}.$$

Так как при любом $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ исходное уравнение имеет корень, и притом только один, то найденный корень и является корнем исходного уравнения.

Ответ. При $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}$, при $a<\frac{2\sqrt{6}}{3}$ решений нет.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x^2-ax+2}=x-1$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2-ax+2=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ (a-2)x=1. \end{cases}$$

При $a=2$ система решений не имеет, при $a \neq 2$ получим

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x=\frac{1}{a-2}. \end{cases}$$

Заметив, что $\frac{1}{a-2} \geqslant 1$ при $2<a \leqslant 3$, приходим к ответу: при $2<a \leqslant 3$ $x=\frac{1}{a-2}$, при $a \leqslant 2$, $a>3$ решений нет.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с решением иррациональных неравенств.

Пример 10. Решить неравенство $\sqrt{x-4}<6-x$.

Решение. Переписав неравенство в виде

$$x+\sqrt{x-4}<6,$$

рассмотрим функцию $f(x)=x+\sqrt{x-4}$. Эта функция определена и возрастает на промежутке $[4;+\infty)$. Легко видеть, что уравнение $x+\sqrt{x-4}=6$ имеет единственный корень: $x=5$. Следовательно, данное неравенство будет выполняться при $4 \leqslant x<5$.

Ответ. $4 \leqslant x<5$.

Пример 11. Решить неравенство $\sqrt{2x+7}>\frac{x+5}{2}$.

Решение. Положим $\sqrt{2x+7}=y$. Тогда $x=\frac{y^2-7}{2}$. Исходное неравенство примет вид:

$$y^2-4y+3<0.$$

Имеем:

$$1<y<3,$$
$$1<\sqrt{2x+7}<3,$$
$$1<2x+7<9,$$
$$-3<x<1.$$

Ответ. $-3<x<1$.

П р и м е р 12. Решить неравенство $\sqrt{x^3+x-9}>x-1$.

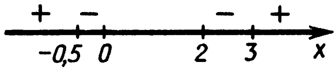


Рис. 17

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая: а) $x\geqslant1$; б) $x<1$. В случае а) имеем:

$$\begin{cases} x\geqslant1, \\ x^3+x-9>(x-1)^2. \end{cases}$$

Заметим, что приписывать неравенство $x^3+x-9\geqslant0$ в системе нет необходимости — оно следует из второго неравенства системы. Решив систему, получим: $x>2$.

В случае б) решений нет, так как при $x<1$ $x^3+x-9<0$.

О т в е т. $x>2$.

При решении иррациональных неравенств можно также применять метод интервалов. Этот метод основан на следующем утверждении.

Если функция f на интервале $(a;\ b)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

П р и м е р 13. Решить неравенство

$$\frac{4x^2-8x-5}{\sqrt{3x^2-6x}}\leqslant\frac{2x+1}{3}.$$

Р е ш е н и е. Область определения неравенства $(-\infty;\ 0)\cup\cup(2;\ +\infty)$. На области определения данное неравенство равносильно следующему: $(2x+1)(6x-15-\sqrt{3x(x-2)})\leqslant0$. Для решения последнего неравенства применим метод интервалов. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(2x+1)(6x-15-\sqrt{3x(x-2)}).$$

Решив уравнение $f(x)=0$, находим ее нули: $-0{,}5$; 3. На каждом из промежутков $(-\infty;\ -0{,}5)$, $(-0{,}5;\ 0)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ +\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак. Легко видеть, что если $x<-0{,}5$, то $f(x)>0$, а если $-0{,}5<x<0$, то $f(x)<0$. Далее, так как $f(1{,}5)<0$, а $f(4)>0$, то $f(x)<0$ при $2<x<3$ и $f(x)>0$ при $x>3$ (рис. 17).

О т в е т. $-0{,}5\leqslant x<0$, $2<x\leqslant3$.

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-3}+\sqrt{12-4x}=0$;
б) $\sqrt{x^2-5x}=3x-x^2$;
в) $\sqrt[3]{9-x}=x+1$;
г) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5$;
д) $\sqrt{2+4x-x^2}=2-x$;
е) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-2x}=1$;
ж) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$;
з) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{6x-1}=\sqrt[3]{2x+1}$.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\, x$;
б) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0$;

в) $\sqrt{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x}=-2\cos x$; г) $\sqrt{1+\sqrt{3}\sin 2x}+\sqrt{10}\sin x=0$;

д) $\sqrt{\sin 3x+\sin x}=\sqrt{\sin 2x}$; е) $\sqrt{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{2}\cos 2x$;

ж) $\cos x-\sin x=\sqrt{2\sin^2 x-1}$, $x\in[-\pi;\ \pi]$;

з) $\sqrt{1-2\cos^2 x}+\sin x+\cos x=0$, $x\in[0;\ 2\pi]$;

и) $\sqrt{2-2\sin^2 x}-\sqrt{\cos 2x}=1$;

к) $\sqrt{\dfrac{4\sin^2\left(\pi+\frac{3x}{2}\right)-3}{2\cos x}}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

л) $\sqrt{3+24\sin^2 2x\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)}+2\sqrt{3}\sin 3x=0$.

3. Решите уравнения:

а) $\dfrac{3(x-3)+4\sqrt{2x^2-7x+6}}{2x(x-2)}=1$;

б) $\sqrt{4x^2-\sqrt{x}-2}=3\sqrt{x}-2x$;

в) $\sqrt{19-x}+\sqrt[4]{2x^2-45x+133}=6\sqrt{7-2x}$;

г) $\sqrt{x-3+\sqrt{2x-7}}+\sqrt{x+1+3\sqrt{2x-7}}=7\sqrt{2}$;

д) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-8x+7}=\sqrt{x^2-24x+23}$;

е) $3\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(6-3x)}+\log_3(x^2-4x+4)=8$;

ж) $\sqrt{1+\log_3\sqrt{x}}\cdot\log_x 9+\sqrt{2}=0$;

з) $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\cdot\log_3 x+1=0$;

и) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

4. Решите неравенства:

а) $\sqrt{x-3}<5-x$; б) $\sqrt{9-3x}+\sqrt{4-x}>\sqrt{2x+25}$;

в) $\sqrt{x^2+2x-8}>2x-5$; г) $\sqrt{-x^2+8x-12}>10-2x$;

д) $\sqrt{-x^2-2x+3}>x+1$; е) $\sqrt{x^3+2x-32}>x-2$;

ж) $\sqrt{x^2-3x-4}<x-2$; з) $\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant x-2$;

и) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}>\sqrt{x}$; к) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$;

л) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x-3}>\sqrt{x}$; м) $\sqrt{x-3}+\sqrt{11-x}\leqslant 2\sqrt{2}$;

н) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}<\sqrt{4x-7}+\sqrt{5x-9}$.

5. Решите неравенства:

а) $(x-3)(x-5)\sqrt{x^2-10x+24}\leqslant 0$;

б) $(x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)}\geqslant 0$;

в) $\frac{(x-3)(x-5)}{1-x}\sqrt{\frac{x-4}{x-2}}\leqslant 0$; г) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+5}\sqrt{x+9}\leqslant 0$;

д) $(x^2-7x+10)(\sqrt{7-2x}-x-4)>0$;

е) $\frac{x-3\sqrt{x-2}}{x^2-6x-27}\leqslant 0$; ж) $\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x^2-4x}}\leqslant\frac{x+1}{2\sqrt{3}}$.

6. Решите неравенства:

а) $\sqrt{2-\sqrt{2+x}}<3^{\log_9(x+3)}$;

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>3^{\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$;

в) $\sqrt{7-\log_2(x-1)^2}+\log_2(1-x)^4>4$;

г) $\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3}\geqslant\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$;

д) $\frac{x-5}{\sqrt{4-x}}>\frac{x-5}{x-3}$;

е) $2x^2-3x+7<7\sqrt{(2x-1)(x-1)}$;

ж) $x^2-5x+6<3\sqrt{(x-1)(x-4)}$;

з) $\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x+2}}+4<5\sqrt[4]{\frac{x+2}{2x+1}}$.

7. Решите неравенства:

а) $x\sqrt{3-x}<-2$; б) $x\sqrt{3-x}>-2$;

в) $x\sqrt{5-\frac{4}{x}}<-3$; г) $x\sqrt{3-\frac{1}{x}}<-2$;

д) $\sqrt{x^3-3x^2+2x}>x-1$; е) $\sqrt{x^3-5x^2+6x}\leqslant x-2$;

ж) $x^2+4x\sqrt{x-1}\leqslant 12(x-1)$; з) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x}\leqslant\sqrt{6-x}+0{,}5$;

и) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+1>\sqrt{2x-1}$; к) $\sqrt{9-\frac{3}{x}}<3x-\sqrt{3x-\frac{3}{x}}$.

8. Решите неравенства:

а) $\sqrt{2^{1+2x}-1}<2-2^x$; б) $\sqrt{26-25^x}>6-5^x$;

в) $2^x-1\geqslant\sqrt{4^x+2^{x+1}-3}$; г) $3^x-1<\sqrt{9^x-3^x-2}$;

д) $\log_2(\sqrt{x+4}-x-2)\leqslant 0$; е) $\log_{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{x^2-2x-3})\leqslant 0$;

ж) $\sqrt{2\log_4 x}>\log_2\sqrt{x}$; з) $\log_2\frac{4}{x}-2\sqrt{\log_2\sqrt{x}}+2<0$;

и) $\sqrt{1-\log_5(x^2-4x+5)}<\log_5(5x^2-20x+25)$;

к) $\sqrt{\log_4(-4+8x-2x^2)}>\log_2(-2+4x-x^2)$;

л) $5^{2x-12-3\sqrt{x-3}}-4\cdot 5^{x-6}<5^{1+3\sqrt{x-3}}$.

9. Решите уравнения и неравенства (a и b — параметры):

а) $\sqrt{x-3}=x-a$;

б) $\sqrt{x^2-ax+3a}=2-x$;

в) $\sqrt{x-a}=b-x$;

г) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+7}=a$;

д) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-2}=a$;

е) $\sqrt{2x^2-2ax+1}=x-2$;

ж) $\sqrt{3x-a}=a-2x$;

з) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=a$;

и) $x+\sqrt{1-x^2}=a$;

к) $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$;

л) $x-2\sqrt{x}+a<0$;

м) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+7}>a$.

Ответы к дополнительным упражнениям

2. а) πn, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ж) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$; и) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; к) $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** д) -2; 1; е) -1; ж) $\frac{1}{3}$; и) 2. **4.** а) $3\leqslant x<4$; б) $-12{,}5\leqslant x<0$; в) $x\leqslant -4$, $2\leqslant x<\frac{11+\sqrt{22}}{3}$; д) $-3\leqslant x<\sqrt{2}-1$; ж) $4\leqslant x<8$; з) $x=2$, $x\geqslant 3$; и) $0\leqslant x<1$; л) $\frac{3}{4}\leqslant x<1$; н) $x>2$. **5.** а) $3\leqslant x\leqslant 4$, $x=6$; б) $x\geqslant 6$, $x=1{,}5$, $x=2$, $x=3$; в) $1<x<2$, $x\geqslant 5$, $x=4$; д) $x<-1$, $2<x\leqslant 3{,}5$; е) $2\leqslant x\leqslant 3$, $6\leqslant x<9$; ж) $-1\leqslant x<0$, $4<x\leqslant 6$. **6.** а) $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x\leqslant 2$; б) $\frac{5}{4}<x<2$; в) $1+2^{\frac{3}{8}}<x\leqslant 1+2^{\frac{7}{2}}$, $1-2^{\frac{7}{2}}\leqslant x<1-2^{\frac{3}{8}}$; г) $-1\leqslant x\leqslant 0$; $x=4$; е) $-3{,}5<x<0$, $1{,}5<x<5$; ж) $0<x<\frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5+\sqrt{13}}{2}<x<5$; з) $-0{,}5<x<1$. **7.** а) $x<-1$; б) $-1<x\leqslant 3$; в) $x<-1$; г) $x<-1$; д) $0\leqslant x<1$, $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; е) $x=2$, $3\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{2}$; ж) $x=2$; з) $x<0$, $x=2$; и) $0{,}5\leqslant x<1$, $x>1$. **8.** а) $-0{,}5\leqslant x<0$; б) $0<x<1$; в) $x=0$; г) $x>1$; д) $\frac{\sqrt{5}-5}{2}\leqslant x<0$; е) $x\geqslant 3$; ж) $1<x<16$; з) $x>4$; и) $0\leqslant x\leqslant 4$, $x\neq 2$; к) $2-0{,}5\sqrt{6}\leqslant x\leqslant 2+0{,}5\sqrt{6}$, $x\neq 2$; л) $3\leqslant x<19$. **9.** а) При $2{,}75\leqslant a\leqslant 3$ $x=0{,}5(2a+1\pm\sqrt{4a-11})$, при $a\geqslant 3$ $x=0{,}5(2a+1+\sqrt{4a-11})$, при $a<2{,}75$ решений нет; б) при $-4\leqslant a<4$ $x=\frac{3a-4}{a-4}$, при $a<-4$, $a\geqslant 4$ решений нет; в) при $b\geqslant a$ $x=0{,}5(2b+1-\sqrt{4b-4a+1})$, при $b<a$ решений нет; г) при $a\geqslant 3$ $x=3a^2+11-2a\sqrt{2a^2+18}$, при $a<3$ решений нет; д) при $0{,}5\sqrt{6}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$ $x=3a^2-1\pm 2a\sqrt{2a^2-3}$, при $a>\sqrt{3}$ $x=3a^2-1+2a\sqrt{2a^2-3}$, при $a<0{,}5\sqrt{6}$ решений нет; е) при $a\geqslant\frac{9}{4}$ $x=a-2+\sqrt{a^2-4a+7}$, при $a<\frac{9}{4}$ решений нет; ж) при $a\geqslant 0$ $x=\frac{1}{8}(4a+3-\sqrt{8a+9})$, при $a<0$ решений нет; з) при $\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2$ $x=2\pm\frac{\sqrt{4a^2-a^4}}{2}$, при $a<\sqrt{2}$, $a>2$ решений нет; и) при $1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ $x=0{,}5(a\pm\sqrt{2-a^2})$, при $-1\leqslant a<1$ $x=0{,}5(a-\sqrt{2-a^2})$, при $a<-1$, $a>\sqrt{2}$ решений нет; к) при $0<a\leqslant 1$ $x=\pm 0{,}25\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$, при $a\leqslant 0$, $a>1$ решений нет; л) при $0\leqslant a<1$ $2-a-2\sqrt{1-a}<x<2-a+2\sqrt{1-a}$, при $a<0$ $0\leqslant x<2-a+2\sqrt{1-a}$, при $a\geqslant 1$ решений нет; м) при $a\geqslant 3$ $x>3a^2+11-2a\sqrt{2a^2+18}$, при $a<3$ $x\geqslant 2$.

12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

При доказательстве неравенств используются самые разнообразные приемы и методы.

Иногда нужный результат можно получить исходя из определения, т. е. из рассмотрения разности между левой и правой частями неравенства, иногда полезным оказывается использование некоторого известного неравенства или оценка левой и правой частей неравенства. Иногда неравенство удается доказать путем сведе́ния его с помощью равносильных преобразований к очевидному (верному) неравенству.

Пример 1. Доказать, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух.

Решение. Пусть a — положительное число. Имеем: $a+\frac{1}{a}-2=\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0$, следовательно, $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

Пример 2. Доказать неравенство

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc.$$

Решение. Сложив верные неравенства

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$
$$a^2+c^2\geqslant 2ac,$$
$$b^2+c^2\geqslant 2bc$$

и разделив почленно на 2, получим доказываемое неравенство.

Пример 3. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию, то $a_{k+1}a_{n-k}\geqslant a_1a_n$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$.

Решение. Пусть d — разность прогрессии. Тогда

$$a_{k+1}a_{n-k}-a_1a_n=(a_1+dk)(a_1+d(n-k-1))-a_1(a_1+d(n-1))=$$
$$=d^2k(n-k-1)\geqslant 0, \text{ так как } 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

Пример 4. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\sqrt{a_1a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Решение. В силу неравенства Коши,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Далее, $a_{k+1}a_{n-k}\geqslant a_1a_n$ (для $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$) (см. пример 3). Поэтому

$$(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^2=(a_1a_n)(a_2a_{n-1})\cdot\ldots\cdot(a_na_1)\geqslant(a_1a_n)^n,$$

или

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\geqslant\sqrt{a_1a_n}.$$

Пример 5. Доказать, что последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей.

Решение. Рассмотрим $n+1$ положительных чисел

$$1;\ \underbrace{1+\frac{1}{n};\ 1+\frac{1}{n};\ \dots;\ 1+\frac{1}{n}}_{n\ \text{чисел}}$$

и применим к ним неравенство Коши. Получим:

$$\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\ \text{т. е. } 1+\frac{1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\ \text{или}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторые упражнения из учебного пособия.

274. Доказать неравенства:

1) $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{2}$; 2) $x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}$; 3) $x^8+y^8\geqslant\frac{1}{128}$

при условии, что $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и $x+y=1$.

Решение.

1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2xy\geqslant 1-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$;

2) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\geqslant\frac{1}{4}-2x^2y^2\geqslant\frac{1}{4}-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$;

3) $x^8+y^8=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4\geqslant\frac{1}{64}-2x^4y^4\geqslant\frac{1}{64}-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^8=\frac{1}{128}$.

275. Доказать неравенства:

3) $n!\geqslant n^{\frac{n}{2}}$; 4) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$;

13) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$; 14) $\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)}\geqslant\sqrt[3]{abc}+$
$+\sqrt[3]{klm}$ $(a>0;\ b>0;\ c>0;\ k>0;\ l>0;\ m>0)$;

16) $\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{n+1}{2}$;

17) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<3$;

18) $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\leqslant\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\leqslant 4$;

19) $(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$ $(x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$;

23) $(a+b)^n\leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

Решение.

3) Воспользуемся неравенством из примера 4. Взяв $a_1=1$, $a_2=2$, .., $a_n=n$, получим: $\sqrt{1\cdot n}\leqslant\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$, или $\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}$, откуда $n!\geqslant n^{\frac{n}{2}}$.

Знак равенства имеет место лишь при $n=1$ и при $n=2$.

4) Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ данное неравенство верно, так как $3>2\sqrt{2}$. Пусть данное неравенство верно при $n=k$; докажем, что оно будет верным и при $n=k+1$. Имеем:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+1}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+2\sqrt{k+2}-2=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}\right)+2\sqrt{k+2}-2>$$

$$>\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}\right)+2\sqrt{k+2}-2=2\sqrt{k+2}-2.$$

13) Неравенство справедливо при $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Решение. Пусть $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$. Тогда $a+b+c=x+y+z$, $a=y+z-x$, $b=x+z-y$, $c=x+y-z$. Имеем:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}=$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3\geqslant 2+2+2-3=3.$$

14) Возведем обе части данного неравенства в куб:

$$abc+bck+acl+ckl+abm+bkm+alm+klm\geqslant \tag{1}$$

$$\geqslant abc+klm+3\sqrt[3]{abcklm}\,(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}).$$

Неравенство (1) перепишем в виде:

$$(abm+bck+acl)+(alm+bkm+ckl)\geqslant \tag{2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{abcklm}\cdot(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm}).$$

Для доказательства неравенства (2) применим к каждому слагаемому левой части неравенство Коши:

$$abm+bck+acl\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2klm},$$

$$alm+bkm+ckl\geqslant 3\sqrt[3]{abck^2l^2m^2}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим неравенство (2).

16) Воспользуемся неравенством из примера 4. Положив $a_1=1$, $a_2=2$, ..., $a_n=n$, получим:

$$\sqrt{1\cdot n}\leqslant\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\leqslant\frac{1+n}{2},$$

т. е. $\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{n+1}{2}$.

17) Из результата примера 5 следует, что последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей: $a_n<a_{n+1}$, т. е.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Для доказательства того, что $a_n<3$ (или, что то же самое, $a_{n+1}<3$), можно воспользоваться формулой Ньютона.

18) Пусть $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Тогда $b_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$. Имеем:

$$b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1};\ b_{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n;$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n:\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Согласно неравенству Бернулли,

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\geqslant 1+\frac{n}{n^2-1}.$$

Так как $1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{n}{n^2}=\frac{n+1}{n}$, то $\frac{b_{n-1}}{b_n}>\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1$, т. е. $b_n<b_{n-1}$; неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ доказано.

По неравенству Бернулли,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geqslant 1+\frac{n+1}{n}=2+\frac{1}{n}>2.$$

Осталось доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\leqslant 4\ (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

При $n=2$ и $n=3$ неравенство выполняется.

При $n\geqslant 4$ имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)<$$

$$<3\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=3+\frac{3}{n-1}\leqslant 4.$$

19) Указание. Примените неравенство Коши к числам a_1, a_2, ..., ..., a_n, а затем к числам $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ..., $\frac{1}{a_n}$ и перемножьте полученные неравенства.

23) Применим метод математической индукции. При $n=1$ неравенство справедливо. Предположим, что справедливо неравенство $(a+b)^k\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)$. Тогда

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)=$$

$$=2^{k-1}(a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb)\leqslant 2^{k-1}\cdot 2(a^{k+1}+b^{k+1})=$$

$$=2^k(a^{k+1}+b^{k+1}),$$

так как разность $(a^{k+1}+b^{k+1})-(ab^k+a^kb)=(a-b)(a^k-b^k)\geqslant 0$ и, следовательно, $ab^k+a^kb\leqslant a^{k+1}+b^{k+1}$.

13. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Решение систем линейных уравнений. Линейным уравнением с переменными x_1, x_2, ..., x_n называется уравнение вида

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_x=b. \qquad (1)$$

Числа a_1, a_2, ..., a_n — коэффициенты уравнения — любые действительные числа.

Для решения системы m линейных уравнений с n переменными удобно пользоваться методом Гаусса.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Дана система

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 3x+0{,}5y=4. \end{cases} \qquad (1)$$

Преобразуем ее в равносильную систему так, чтобы коэффициент при x во втором уравнении равнялся нулю. С этой целью умножим первое уравнение на $-1{,}5$ и прибавим почленно ко второму уравнению системы. Получим систему

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ -4y=-8, \end{cases} \qquad (2)$$

откуда легко находим, что $y=2$, $x=1$.

Ответ. (1; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+3y-5z=-7, \\ 3x+5y+4z=25. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Прибавляя почленно первое уравнение, умноженное на -2, ко второму уравнению системы и, умноженное на -3, к третьему уравнению системы, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y-7z=-19, \\ 2y+z=7. \end{cases} \qquad (4)$$

Заметим, что второе и третье уравнения системы (4) содержат только переменные y и z. Исключим из третьего уравнения переменную y. Для этого умножим почленно второе уравнение на -2 и прибавим к третьему уравнению:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ y-7z=-19, \\ z=3. \end{cases} \qquad (5)$$

Подставив $z=3$ во второе уравнение системы (5), находим: $y=2$. Далее, подставив $y=2$ и $z=3$ в первое уравнение, находим: $x=1$. Итак, данная система имеет единственное решение (1; 2; 3).

Системы вида (2) и (5) называются треугольными.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-y+3z=5, \\ x-3y+4z=1. \end{cases} \qquad (6)$$

Решение. Постараемся привести систему к треугольному виду:

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2, \\ -5y+5z=1, \\ -5y+5z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2, \\ -5y+5z=1, \\ 0\cdot z=-2. \end{cases}$$

Последнее уравнение противоречиво, система не имеет решений.

Рассмотрим систему, в которой число переменных не равно числу уравнений.

Пример 4.

$$\begin{cases} x-2y+3z=5, \\ 2x-3y+2z=1. \end{cases} \qquad (7)$$

Умножив первое уравнение на -2 и прибавив почленно ко второму уравнению, получим:

$$\begin{cases} x-2y+3z=5, \\ y-4z=-9. \end{cases}$$

Перенесем слагаемые, содержащие переменную z, в правую часть уравнений. Система примет вид:

$$\begin{cases} x-2y=5-3z, \\ y=4z-9. \end{cases} \qquad (8)$$

Относительно переменных x и y система (8) имеет треугольный вид. Находим:

$$\begin{cases} x=5z-13, \\ y=4z-9. \end{cases}$$

Система (7) имеет бесконечно много решений вида $(5z-13; 4z-9; z)$, где z — любое действительное число.

Ответ: $(5z-13; 4z-9; z)$, где $z \in \boldsymbol{R}$.

При исследовании систем двух линейных уравнений с двумя переменными удобно пользоваться следующей геометрической интерпретацией.

Будем считать, что в каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. В этом случае каждое уравнение системы является уравнением некоторой прямой на координатной плоскости.

Эти прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают. В первом случае система имеет одно решение, во втором не имеет решений, а в третьем система имеет бесконечное множество решений.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a+1)x+2y=2a+4, \\ x+ay=3. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Воспользуемся геометрической интерпретацией системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Начнем со случая $a=0$. При $a=0$ система, очевидно, имеет единственное решение.

Пусть теперь $a\neq 0$. Перепишем систему (9) в виде:

$$\begin{cases} y=-0{,}5\,(a+1)\,x+a+2, \\ y=-\frac{1}{a}\,x+\frac{3}{a}. \end{cases} \tag{10}$$

Угловой коэффициент прямой, задаваемой первым уравнением системы, равен $-0{,}5\,(a+1)$, а угловой коэффициент прямой, задаваемой вторым уравнением системы, равен $-\frac{1}{a}$. Поэтому при $-0{,}5\,(a+1)\neq -\frac{1}{a}$, т. е. при $a\neq 1$ и $a\neq -2$ эти прямые пересекаются, и, следовательно, система имеет единственное решение. Найдем это решение.

Приравнивая правые части уравнений системы (10), получаем: $-0{,}5\,(a+1)\,x+a+2=-\frac{x}{a}+\frac{3}{a}$, откуда после упрощений находим: $x=\frac{2\,(a+3)}{a+2}$ ($a\neq 1$; $a\neq -2$). Подставив найденное значение x в любое из уравнений системы (10), имеем $y=\frac{1}{a+2}$. При $a=-2$ прямые параллельны и не имеют общих точек. Подставив $a=-2$ в исходную систему, получим систему $\begin{cases} x-2y=0, \\ x-2y=3, \end{cases}$ явно не имеющую решений.

При $a=1$ прямые совпадают, система имеет бесконечно много решений. Подставив $a=1$, получим систему $\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=3, \end{cases}$ равносильную одному уравнению $x+y=3$, все решения которого имеют вид $(t;\ 3-t)$, где $t\in \boldsymbol{R}$.

Ответ. При $a\neq -2$, $a\neq 1$ система имеет единственное решение: $x=\frac{2\,(a+3)}{a+2}$; $y=\frac{1}{a+2}$; при $a=-2$ система решений не имеет; при $a=1$ система имеет бесконечно много решений $(t;\ 3-t)$, где $t\in \boldsymbol{R}$.

Отметим, что исследование можно провести и без использования геометрической интерпретации. Проиллюстрируем это решение на том же примере.

Умножим второе уравнение системы на -1 и прибавим к первому уравнению, умноженному на $\frac{a}{2}$, получим:

$$(a^2+a-2)\,x=2\,(a^2+2a-3), \text{ или}$$
$$(a+2)(a-1)\,x=2\,(a+3)(a-1). \tag{11}$$

Если $a\neq -2$, $a\neq 1$, то уравнение (11) имеет одно решение:

$x=\frac{2(a+3)}{a+2}$. Подставляя найденное значение x в любое из уравнений системы, находим: $y=\frac{1}{a+2}$. При $a=-2$ система $\begin{cases} x-2y=0, \\ x-2y=3 \end{cases}$ несовместна, при $a=1$ система $\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=3 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений, и мы получили такой же результат, что и раньше.

Решение нелинейных систем уравнений. Решение систем уравнений основано на правилах перехода к равносильным системам или к следствиям. При решении систем уравнений применяются различные методы: разложение на множители, исключение переменных, алгебраического сложения, замены переменных и др.

Дадим указания и краткие решения некоторых упражнений из учебного пособия.

293 (3). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=x^2, \\ 3y-x=y^2. \end{cases}$$

Решение. Выразив $y=x^2-x$ из первого уравнения системы и подставив во второе, получим уравнение $x^4-2x^3-2x^2+4x=0$, корни которого $x=0$, $x=2$, $x=\pm\sqrt{2}$. Решениями исходной системы являются: (0; 0), (2; 2), $(\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$.

295. Решите системы уравнений:

7) $\begin{cases} x^4+y^4+x^3y+xy^3=\frac{112}{9}x^2y^2, \\ x+y=4; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a, \\ x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b. \end{cases}$

7) Указание. Первое из уравнений системы является однородным уравнением. Разделите почленно на y^4.

10) Указание. Первое уравнение системы можно привести к виду $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt{a}$, если вынести за скобки в первом подкоренном выражении $\sqrt[3]{x^4}$ и во втором $\sqrt[3]{y^4}$.

298. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^y=243, \\ (1024)^{\frac{1}{y}}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=y^{\frac{2}{3}}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2(y-x)-\log_8(3y-5x)=0, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \cos^2 y+3\sin x\sin y=0, \\ 21\cos 2x-\cos 2y=10; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} y=a, \\ \operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} y=2; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \sqrt{a-x}-\sqrt{y-x}=\sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x}+\sqrt{y-x}=\sqrt{y}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=1, \\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=1. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

1) Из первого уравнения находим: $x=243^{\frac{1}{y}}$; подставив его во второе уравнение, получим: $1024^{\frac{1}{y}}=\frac{4}{9}\cdot 243^{\frac{2}{y}}$, или $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{10}{y}}=\frac{4}{9}$, откуда $y=5$. Затем находим $x=3$.

О т в е т. (3; 5).

2) У к а з а н и е. Логарифмированием обоих уравнений по основанию 10 сведите систему к рациональной относительно переменных $u=\frac{\lg x}{\lg y}$, $v=\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}$.

О т в е т. $\left(\frac{16}{81};\ \frac{4}{9}\right)$.

3) Из первого уравнения находим: $(y-x)^3=3y-5x$. Разделив полученное уравнение почленно на второе уравнение системы, получим: $5(y-x)^3=(3y-5x)(x^2+y^2)$. После преобразований имеем: $y(2y^2-10xy+12x^2)=0$.

О т в е т. (1; 2); $(-\sqrt{5};\ 0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

7) Из первого уравнения находим $\sin x=-\frac{\cos^2 y}{3\sin y}$ $(\sin y\neq 0$, так как в противном случае $\sin y=\cos y=0)$ и, подставляя во второе уравнение (заменив в нем $\cos 2x$ на $1-2\sin^2 x$), после преобразований получаем:

$$2\cos^2 2y+25\cos 2y-13=0,$$

откуда $\cos 2y=\frac{1}{2}$. Тогда из второго уравнения получаем: $\cos 2x=\frac{1}{2}$. Система уравнений $\begin{cases}\cos 2y=\frac{1}{2},\\ \cos 2x=\frac{1}{2}\end{cases}$ является следствием исходной системы. Решив ее, получаем:

$$\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Выбираем пары чисел x и y таким образом, чтобы $\sin x$ и $\sin y$ имели разные знаки (см. первое уравнение исходной системы).

О т в е т.

$$\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z};\end{cases}\qquad \begin{cases}x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ y=(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

8) Система разрешима, если $a<0$ или $a\geqslant 2$:

$$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-2a}}{2}+\pi k, & k\in\mathbf{Z}, \\ y=\operatorname{arctg}\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-2a}}{a}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

11) Указание. Перепишите систему в виде:

$$\begin{cases} \sqrt{a-x}=\sqrt{y-x}+\sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x}=\sqrt{y}-\sqrt{y-x}, \end{cases}$$

возведите каждое из уравнений в квадрат и сложите полученные уравнения. Система имеет решение при $a\geqslant b>0$.

Ответ. $x=\dfrac{ab}{a+b}$; $y=\dfrac{a+b}{4}$.

12) Указание. Возведите каждое из уравнений системы в квадрат, затем, после уединения корня и повторного возведения в квадрат, получите систему:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{4}, \\ x^2-y^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\dfrac{5}{8};\ \dfrac{3}{8}\right)$.

Дополнительные упражнения

1. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=3; \\ 2x-3y=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 6x-3y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ 6x+2y=14; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ax+y=3a-1, \\ x+ay=2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (a+2)\,x+y=3, \\ ax+2y=1. \end{cases}$

2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений:

а) $\begin{cases} (a+1)\,x+2y=a, \\ x+(a+2)\,y=0 \end{cases}$ не имеет решений;

б) $\begin{cases} ax+(a+6)\,y=3, \\ x+ay=a-2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

3. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-3y+5z=-1, \\ -5x+2y-z=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x+5y+2z=3, \\ 2x+4y+z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+z=3, \\ -2x+y+3z=1, \\ x+7y+6z=8. \end{cases}$

4. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2=4x+5y, \\ y^2=5x+4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+y^2x=-2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3-y^3=65, \\ x^2y-xy^2=-20; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+3xy+2y=-4, \\ 3x-xy+y=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy+2y^2+2x-y=7, \\ 3xy-y^2+6x+3y=20. \end{cases}$

5. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4x-4y+3=0, \\ xy+2x+2y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x+y)=3xy, \\ x^2+y^2+2x+2y-7xy+3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=22, \\ xy=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5(x^4+y^4)=41(x^2+y^2), \\ x^2+xy+y^2=13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+6xy+4y^2=20, \\ x+2y+xy=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25, \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\left(\dfrac{y-x}{x}\right)^2=1, \\ 2y^2-x^2=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+xy=5, \\ xy+\dfrac{6(x-y)}{x+y}=4. \end{cases}$

6. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2+3xy+2y^2=4, \\ 4x^2-4xy-y^2=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ 2x^2-xy-y^2=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-3xy+2=0, \\ y^2+xy-3=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3-2y^3=6, \\ 2x^2y-xy^2=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0, \\ x|x|+y|y|=-2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ 2x^2y-xy^2=6; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 4y^2-3xy=2x-y, \\ 5x^2-3y^2=4x-2y. \end{cases}$

7. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{x^2+4y}=2y-x, \\ x\sqrt{x^2-y^2}=2x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x^2-4xy+y^2}=x-y, \\ \sqrt{x^2+16|y|}=3+|y|-2x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+3\sqrt{xy}=1, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \sqrt{x+2y}-\sqrt{x-1}=1, \\ \sqrt{5-2y}+2=\sqrt{x+2y}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=x, \\ \dfrac{x}{y}=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-y}}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \end{cases}$

з) $\begin{cases} (x+y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=65, \\ (x-y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=185; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

8. Решите иррациональные уравнения сведением к рациональным системам:

а) $\sqrt[4]{49-2x}+\sqrt[4]{33+2x}=4$; б) $\sqrt[4]{17-x}+\sqrt{x-1}=2$;

в) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{2-x}=1$; г) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$;

д) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$; е) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

9. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3^{x+y}+3^x+3^y=7, \\ 3^{2x+y}+3^{x+2y}=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2x+y)^{\frac{1}{x}}=9, \\ (2x+y)\cdot 2^x=18; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (3y^2+1)\log_3 x=4, \\ (\sqrt[4]{x})^{2y^2+10}=27; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3=y^{-1}, \\ x^{y+4x}=y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y^{25x}=4^{200}, \\ x-\log_2(8y)=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x}=\frac{7}{9}, \\ 2\log_7(x+y)=x-y; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} (3x-y)^{x+y}=4, \\ 48^{\frac{1}{x+y}}=27x^2-18xy+3y^2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2\cdot 15^x+15^y=5^x\cdot 3^{-y}, \\ 2\cdot 3^{x-y}-5^{y-x}=3\cdot 9^x. \end{cases}$

10. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} (1+\log_x y)\log_2 x=3, \\ \log_{\sqrt[3]{y}}(y^4x^2)-0{,}5\log_{\sqrt{x}} y^4=7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\log_2\frac{1}{y}\cdot\log_{\frac{1}{x}} 4=y\sqrt{y}\,(\log_x 4-2), \\ \log_{y^6} 4\cdot\log_{\sqrt[4]{2}} x=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg^2\frac{x}{y}=3\lg^2 x+\lg^2 y, \\ \lg^2(y-3x)+\lg x\lg y=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\sqrt{y}} x^2+\log_x y=5, \\ \dfrac{2\log_3^2 x}{\log_3 y}=5-2^{\frac{y}{x}}+\log_9 x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log^2_{\frac{2}{3}} x+\log^2_{\frac{2}{3}} y-\log^2_{\frac{2}{3}}(x+y)=1, \\ \log_{\frac{3}{2}} x\cdot\log_{\frac{3}{2}} y+\log_{\frac{3}{2}}(x+y)=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2\log_2(x+y)-\log_2 x=2\log_{16} 4-\log_{\frac{1}{2}}(3y-x), \\ \log_2\dfrac{xy+3}{x^2+3x+1-y}=2\log_4\dfrac{y}{x}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^{\log_5 y}+y^{\log_5 x}=50, \\ \log_{25} x+\log_{25} y=1{,}5; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^{1+\log_7 y}=49x, \\ \log_7 y-\log_7 x=1. \end{cases}$

11. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sin y + \cos 2x = 2, \\ x + y = \frac{5\pi}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \\ x - y = \frac{4\pi}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y - x = \frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sin y = 5 \sin x, \\ 3 \cos x + \cos y = 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x + \cos y = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{11}{16}, \\ \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{5}{8}; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2 \cos y = 1; \end{cases}$

л) $\begin{cases} 3 \sin (x - 2y) + 2 \sin y \cos (x - y) = 0, \\ \cos (x - y) = 3 \cos (x + y); \end{cases}$

м) $\begin{cases} \frac{1}{2} \cos y (\cos x - \cos y) = \cos \frac{x+y}{2} \sin y \sin \frac{y-x}{2}, \\ 2y - x = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

н) $\begin{cases} \sin (2x + y) = 2 \sin y, \\ \sin (2y + x) = 3 \sin x. \end{cases}$

12. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \cos x = \sin y, \\ \sqrt{2 - 2 \cos 2x} = 2 \cos 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x = 2 \cos y, \\ \sqrt{1 + \cos 2x} = -\sqrt{2} \cos 2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x = 2 \sin y, \\ \sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cos 2y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{\cos 2y + \cos x} = -\cos y, \\ \sqrt{3} \sin y - \cos x = \sin^2 y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{\sin x} = \cos y, \\ \cos 2x = \sin^2 y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sqrt{\cos x + \sin y} = -\sin x, \\ \cos x - \sin y = \cos^2 x. \end{cases}$

13. Найдите все решения системы уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $\begin{cases} \sin 2x = \sin y, \\ \sin x = \cos y, \end{cases}$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; б) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1, \end{cases}$ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$;

в) $\begin{cases} |\sin x| \sin y = -0{,}25, \\ \cos (x + y) + \cos (x - y) = 1{,}5, \end{cases}$ $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{-x}+2^{x}\cos 2y+\cos y=0, \\ 2^{-x}-2^{x}\sin 2y-\sin y=0. \end{cases}$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}(8-y), \\ \log_2 y=\log_2(4y-y^2)-\log_2 x. \end{cases}$$

16. Найдите все пары $(x;\ y)$, удовлетворяющие условиям:

а) $\begin{cases} 2^{|x-3|}=3^{2-y}, \\ |y-3|+y^2+1\leqslant 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{\sqrt{y-1}}=3^{2-x}, \\ |x-4|+x^2\leqslant 3x. \end{cases}$

17. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ y+z=5, \\ xz=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+yz=-4, \\ yz+xz=-9, \\ xy+xz=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=-1, \\ xy+yz+xz=-10, \\ x^2+y^2+z^2=29; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=27; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3=xyz+2, \\ y^3=xyz+3, \\ z^3=xyz-3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4, \\ x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=18; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 x+\log_4 z=3{,}5, \\ \log_4 x+\log_4 y+\log_2 z=4{,}5, \\ \log_4 x+\log_2 y+\log_4 z=4. \end{cases}$

Ответы к дополнительным упражнениям

1. а) $(4;\ -1)$; б) нет решений; в) бесконечно много решений вида $(t;\ 7-3t)$, $t\in \boldsymbol{R}$; г) при $a\neq\pm 1$ единственное решение: $x=\dfrac{3a+2}{a+1}$, $y=-\dfrac{1}{a+1}$; при $a=-1$ нет решений; при $a=1$ бесконечно много решений вида $(t,\ 2-t)$, $t\in\boldsymbol{R}$; д) при $a\neq-4$ единственное решение: $x=\dfrac{5}{a+4}$, $y=\dfrac{2-2a}{a+4}$; при $a=-4$ нет решений. **2.** а) $a=-3$; б) $a=3$. **3.** а) $(1;\ 1;\ 0)$; б) $\left(1-1{,}5t;\ \dfrac{t}{2};\ t\right)$; $t\in\boldsymbol{R}$; в) нет решений. **4.** а) $(0;\ 0)$, $(9;\ 9)$, б) $(-4;\ -2)$, $(4;\ 2)$. Указание. Введите подстановки: $xy=u$, $\dfrac{x}{y}=v$. Для нахождения x^2 и y^2 почленно перемножьте и разделите эти равенства; в) $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, д) $(1;\ -1)$, $(-1;\ 3)$. **5.** б) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$; г) $(\mp 3;\ \mp 1)$, $(\mp 1;\ \mp 3)$. **6.** д) $(-1;\ -1)$, $(-1{,}5;\ 0{,}5)$; ж) $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $\left(\dfrac{297}{265};\ -\dfrac{27}{53}\right)$. **7.** а) $(-1;\ 0)$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; б) $(0;\ -9)$, $(0;\ -1)$, $(1;\ 0)$; г) $(-4;\ -1)$, $(-1;\ -4)$; д) $(5;\ 2)$; е) $(0{,}25;\ 0{,}2)$; з) $(9;\ -4)$, $(16;\ -3)$; и) $(4;\ 4)$ **8.** а) $-16;\ 24$; б) 1; в) $1;\ 2$; г) $1;\ 2;\ 10$; д) $3;\ -24;\ -88$; е) $\dfrac{16}{25}$

Указание: $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{1-x}=v$, $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=w$. Уравнение сводится к системе

$u+w=1$, $u^2+v^2=1$, $w^2=u^2-v$. **9.** а) $(0;\ 1)$, $(1,\ 0)$; г) $(1;\ 1)$, $\left(2;\frac{1}{8}\right)$; ж) $\left(\frac{5}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$; з) $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ **10.** а) $(2,\ 4)$, $(2^{12};\ 2^{-9})$; б) $\left(2^{\frac{3}{5}};\ 2^{\frac{2}{5}}\right)$; в) $(1;\ 4)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; г) $(9;\ 9)$, $\left(\sqrt[3]{\log_2 5};\ \sqrt[3]{(\log_2 5)^4}\right)$; д) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; е) $(1;\ 1)$, $(c;\ 3c)$, где $c>0$, $c\in\boldsymbol{R}$. **11.** а) $\left(2\pi n;\ \frac{5\pi}{2}-2\pi n\right)$*; б) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ -\frac{7\pi}{6}+\pi n\right)$; д) $\left(n+\frac{1}{3};\ n+\frac{2}{3}\right)$; е) $(2\pi k;\ \pi+2\pi n)$; л) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; н) $(\pi k;\ \pi n)$, $\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;\ \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$. **12.** а) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi n\right)$; б) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; г) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+2\pi n\right)$, $\left(\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; е) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n\right)$. **13.** а) $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)$. **14.** $\left(0;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(0{,}5;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$. **15.** $(4-\pi;\pi)$. **16.** а) $(3;\ 2)$; б) $(2;\ 1)$. **17.** а) $(2;\ 2;\ 3)$, $(-3;\ 7;\ -2)$; б) $(1;\ 2;\ -3)$, $(-1;\ -2;\ 3)$; в) $(-3;\ 2;\ 4)$, $(2;\ -3;\ 4)$, $(-4;\ 3;\ -2)$, $(3;\ -4;\ -2)$; д) $(3;\ 3;\ 3)$; е) $(2;\ \sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{3})$, $(\sqrt[3]{0{,}5};\ \sqrt[3]{1{,}5};\ -\sqrt[3]{4{,}5})$; ж) $(1;\ 1;\ 4)$, $(1;\ 4;\ 1)$, $(4;\ 1;\ 1)$; з) $(2;\ 4;\ 8)$.

14. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Формирование умения решать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений — одна из самых важных целей изучения математического анализа в школе. Решение задач этого типа, основанное на применении производной, имеет большую прикладную направленность.

Известно, что если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т. е. график функции имеет на этом отрезке точки с наибольшей (M) и наименьшей (m) ординатой (рис. 18).

Если функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение в некоторой внутренней точке отрезка $[a;\ b]$, то это наибольшее (наименьшее) значение совпадает с наибольшим (наименьшим) максимумом (минимумом) функции f внутри $[a;\ b]$. Но может оказаться, что наибольшее (наименьшее) значение функции достигается не во внутренней точке отрезка $[a;\ b]$, а на одном из его концов. На рисунке 18 функция f, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$, в точках x_1 и x_3 имеет максимумы, а в точке x_2 — минимум. Наибольшее значение функция принимает в точке x_3 — в точке

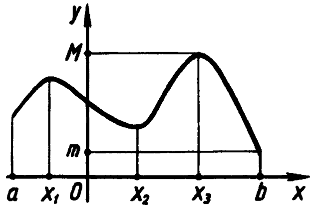


Рис. 18

* Здесь и далее $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

наибольшего из максимумов. Свое наименьшее значение функция принимает на правом конце отрезка — в точке b. Заметим, что функция f в точке b не имеет экстремума, так как справа от точки b функция не определена.

Поэтому правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, формулируется следующим образом.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке и имеющей на нем конечное число критических точек, нужно найти значения функции во всех критических точках и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее. (Критической точкой функции называется внутренняя точка области ее определения, в которой производная равна нулю или не существует.)

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=5\sqrt{2x+1}-x$ на отрезке [4; 40].

Решение. Находим критические точки функции, лежащие внутри данного отрезка:

$$f'(x)=\frac{5}{\sqrt{2x+1}}-1,$$

$$\begin{cases} f'(x)=0, \\ 4<x<40 \end{cases} \Leftrightarrow x=12.$$

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке: $f(4)=11$, $f(12)=13$, $f(40)=5$. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[4,40]} f(x)=f(12)=13, \quad \min_{[4,40]} f(x)=f(40)=5.$$

Пример 2. Дана функция $f(x)=|x^2-6x+5|$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [2; 6].

Решение. Рассмотрим функцию f на отрезке [2; 6]:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x-5 & \text{при } 2\leqslant x<5, \\ x^2-6x+5 & \text{при } 5\leqslant x\leqslant 6. \end{cases}$$

Для нахождения критических точек функции f, непрерывной на [2; 6], нужно найти внутренние точки отрезка [2; 6], в которых производная равна нулю или не существует. Имеем:

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+6 & \text{при } 2<x<5, \\ 2x-6 & \text{при } 5<x<6. \end{cases}$$

В точке $x=5$ производная не существует; $f'(x)=0$ при $x=3$. Итак, критические точки: 3 и 5.

Вычисляем значение функции в критических точках и на концах отрезка: $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(5)=0$, $f(6)=5$;

$$\max_{[2,6]} f(x)=f(6)=5, \quad \min_{[2,6]} f(x)=f(5)=0.$$

Замечание. При нахождении критических точек можно ис-

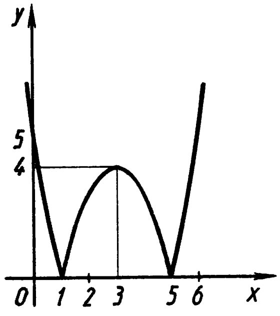


Рис. 19

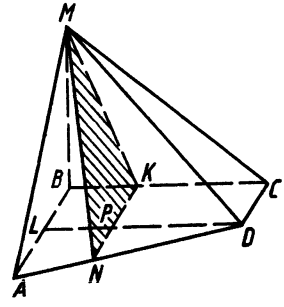


Рис. 20

пользовать соображения геометрического характера, изобразив схематически график функции (рис. 19).

Приведем пример задачи геометрического содержания, которая сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.

Пример 3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой AB и CD параллельны, угол ABC прямой. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Через вершину M и произвольную точку K, взятую на ребре BC, проведено сечение, параллельное прямой AB. Найти наибольшую и наименьшую площади сечения, если $AB=2$, $BC=5$, $CD=1$, $MB=2\sqrt{2}$.

Решение. Сечением пирамиды является прямоугольный треугольник MKN (рис. 20). Проведем DL — высоту трапеции. Точку пересечения прямых DL и KN обозначим через P. Пусть $BK=x$, тогда $KC=PD=5-x$, $AL=1$, $PK=1$, $MK=\sqrt{x^2+8}$. Из подобия треугольников PDN и LDA находим: $\frac{PN}{AL}=\frac{PD}{LD}$, откуда $PN=\frac{5-x}{5}$ и $KN=\frac{5-x}{5}+1=\frac{10-x}{5}$.

Площадь сечения MKN равна $s(x)=\frac{1}{2}KM\cdot KN=\frac{1}{10}(10-x)\times$ $\times\sqrt{x^2+8}$, где $0\leqslant x\leqslant 5$. (Заметим, что при $x=0$ и $x=5$ сечениями являются соответственно треугольники AMB и MCD.) Перепишем формулу для площади в виде:

$$s(x)=\frac{1}{10}\sqrt{(10-x)^2(x^2+8)},\quad 0\leqslant x\leqslant 5.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=(10-x)^2(x^2+8)$, где $0\leqslant x\leqslant 5$. Найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0;\ 5]$. $f'(x)=$ $=4(x-10)(x^2-5x+4)$, где $0\leqslant x\leqslant 5$, $f'(x)=0$ при $x=1$ и $x=4$. Вычисляем $f(0)=800$, $f(1)=729$, $f(4)=864$, $f(5)=825$. Таким образом, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается в точке 4, наименьшее в точке 1. В тех же точках соответственно достигаются наибольшее и наименьшее значения функции $s(x)$. Находим $s(4)=1{,}2\sqrt{6}$,

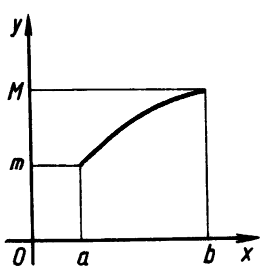


Рис. 21

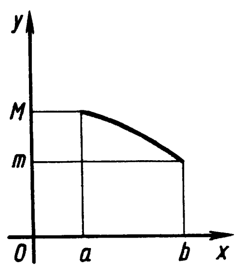


Рис. 22

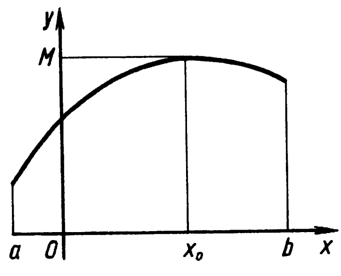


Рис. 23

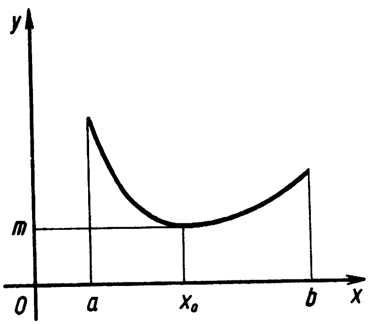


Рис. 24

$s(1)=2{,}7$. Наибольшая площадь сечения равна $1{,}2\sqrt{6}$, наименьшая 2,7.

Отметим два частных случая, когда наибольшее (наименьшее) значение находится наиболее просто.

1. Если функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$, то ее наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах отрезка (рис. 21, 22). Заметим, что минимумы и максимумы функции на отрезке $[a;\ b]$ в этом случае отсутствуют, а наибольшее и наименьшее значения у непрерывной функции на отрезке обязательно существуют.

2. Если функция f, заданная на отрезке $[a;\ b]$, возрастает на $[a;\ x_0]$ и убывает на $[x_0;\ b]$ (рис. 23), то $f(x_0)$ является наибольшим значением функции на отрезке $[a;\ b]$. Аналогичное замечание и для наименьшего значения (рис. 24).

Пример 4. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=x\ln 5-x\ln x$$

на отрезке $\left[\frac{5}{3};\ 2{,}5\right]$.

Решение. $f'(x)=\ln 5-\ln x-1=\ln\frac{5}{e}-\ln x$, $f'(x)=0$ при $x=\frac{5}{e}$. Сравнение значений функции на концах отрезка и в критической точке приводит к сложным вычислениям. Вместо этого проведем исследование функции на монотонность. Учитывая непрерывность функции в точке $x_0=\frac{5}{e}$ и тот факт, что при $\frac{5}{3}\leqslant x<\frac{5}{e}$ производная положительна, а при $\frac{5}{e}<x\leqslant 2{,}5$ отрицательна, приходим к выводу, что на промежутке $\left[\frac{5}{3};\ \frac{5}{e}\right]$ функция возрастает, а на промежутке $\left[\frac{5}{e};\ 2{,}5\right]$ убывает. Это и означает, что значение функ-

ции в точке $x_0=\frac{5}{e}$ является наибольшим из всех значений функции на данном отрезке.

Отметим, что наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке, тесно связаны с таким понятием, как множество значений функции на этом отрезке, а именно имеет место следующая теорема.

Множество значений функции f, непрерывной на отрезке $[a; b]$, есть отрезок $[m; M]$, где $m=\min\limits_{[a, b]} f(x)$, $M=\max\limits_{[a, b]} f(x)$.

Так, в примере 1 множество значений функции на рассматриваемом промежутке есть отрезок $[5; 13]$, в примере 2 — отрезок $[0; 5]$.

Многие задачи, в том числе геометрического содержания (см. пример 5), приводят к необходимости отыскания наибольшего или наименьшего значения функции на открытом промежутке, конечном или бесконечном. Нужно иметь в виду, что функция, заданная на открытом промежутке, даже если она непрерывна, может не иметь на нем наибольшего или наименьшего значения либо ни того, ни другого. Так, например, функция $y=x^2$ на интервалах $(-5; -1)$, $(2; 5)$, $(1; +\infty)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения, а на интервалах $(-3; 2)$, $(-\infty; +\infty)$ — наибольшего.

Совершенно очевидно, что правило нахождения наибольшего и наименьшего значений, сформулированное выше для функции, заданной на отрезке, неприменимо к функции, заданной на открытом промежутке (не исключена возможность отсутствия какого-либо из этих значений). В этом случае для решения задачи обычно проводят исследование функции на монотонность либо выясняют поведение функции вблизи концевых точек или при $x\to\pm\infty$. Иногда полезно представить график функции схематически.

Пример 5. Правильная треугольная призма имеет объем 16 дм^3. Найти длину стороны основания призмы с наименьшей полной поверхностью.

Решение. Полная поверхность призмы вычисляется по формуле $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3ah$, где a — сторона основания, h — высота призмы. По условию задачи объем призмы равен 16 дм^3, т. е. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h=16$, откуда $h=\frac{64}{a^2\sqrt{3}}$. Имеем:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+\frac{128}{a}\right),\ a>0.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции на промежутке $(0; +\infty)$.

Проведем исследование функции на монотонность:

$$S'=\frac{\sqrt{3}\,(a^3-64)}{a^2},\ a>0.$$

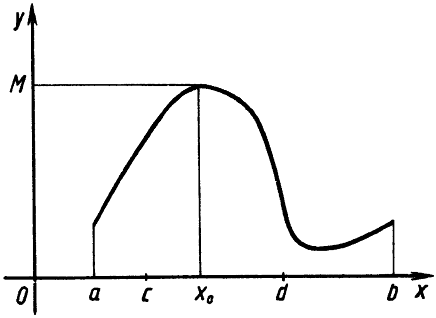


Рис. 25

Так как на промежутке (0; 4] функция убывает, а на промежутке [4; $+\infty$) возрастает, то значение функции в точке $x_0=4$ наименьшее из всех ее значений на промежутке (0; $+\infty$).

Итак, полная поверхность призмы наименьшая при стороне основания 4 дм.

В случае, если исследование на монотонность затруднительно, часто помогает следующее очевидное утверждение.

Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на множестве X в некоторой точке $x_0 \in X$, то на любом подмножестве X_1 множества X, содержащем точку x_0, функция будет принимать наибольшее (наименьшее) значение в той же точке x_0.

Например, функция, график которой изображен на рисунке 25, наибольшее значение на отрезке $[a; b]$ принимает в точке x_0. Ясно, что наибольшее значение этой функции на любом промежутке $[c; d]$ (или $(c; d)$), содержащем точку x_0 и содержащемся в $[a; b]$, достигается также в точке x_0.

Пример 6. Дана функция $f(x)=x\sin 2x+0{,}5\cos 2x$. Найти наименьшее значение функции на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Решение. Находим производную $f'(x)=2x\cos 2x$. Замечаем, что на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ находится лишь одна критическая точка функции $x_0=\frac{3\pi}{4}$. Рассмотрим функцию f на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Вычисляем значение функции на концах отрезка и в критической точке: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-0{,}5$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{4}$, $f(\pi)=0{,}5$. Видим, что наименьшее значение функции f на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ достигается в точке $x_0=\frac{3\pi}{4}$ — внутренней точке отрезка. Следовательно, наименьшее значение функции на любом промежутке, являющемся подмножеством отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ и содержащем точку $x_0=\frac{3\pi}{4}$, достигается в этой же точке. Интервал $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ является подмножеством отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ и точка $x_0=\frac{3\pi}{4}$ принадлежит этому интервалу; следовательно, наименьшее значение функции на $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ достигается в точке $x_0=\frac{3\pi}{4}$.

$$\min_{\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)} f(x)=\min_{\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{4}.$$

Среди задач на наибольшее и наименьшее значение немало таких, решение которых сводится к исследованию квадратного трехчлена. В этом случае наряду с применением производной можно применить хорошо известный прием выделения полного квадрата. Следует также обратить внимание на тот факт, что функция $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ достигает экстремального значения при $x_0=-\frac{b}{2a}$, причем если $a>0$, то $f(x_0)$ — минимальное, а если $a<0$ — максимальное значение функции. Можно также построить схематически график функции, используя соображения геометрического характера.

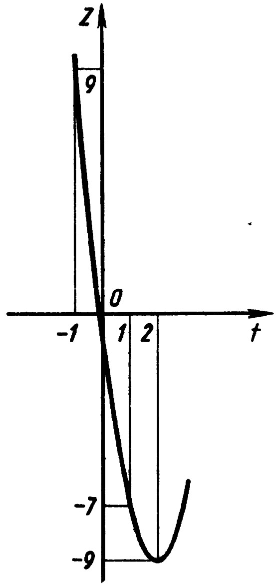


Рис. 26

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\cos 2x-8\cos x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

Решение. Представим данную функцию в виде $f(x)=2\cos^2 x-8\cos x-1$, сделаем замену $\cos x=t$. Так как $-1\leqslant t\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, то задача свелась к нахождению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $\varphi(t)=2t^2-8t-1$ на отрезке $[-1;\ 1]$ (рис. 26). Критическая точка $t_0=2$ не принадлежит отрезку $[-1;\ 1]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка. Вычислив $\varphi(-1)=9$, $\varphi(1)=-7$, получаем, что наибольшее и наименьшее значения функции $\cos 2x-8\cos x$ соответственно равны 9 и -7.

Решение, приведенное в примере 7, поучительно еще и тем, что оно показывает, как удачная замена переменной может облегчить нахождение производной и критических точек. Так, например, задачу о нахождении наибольшего (или наименьшего) значения функции $\cos^2 x\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ с помощью подстановки $\sin x=t$ можно свести к более простой задаче нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $(1-t^2)t=t-t^3$ на отрезке $[0;\ 1]$, а нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции $\log_2^3 x-6\log_2^2 x+9\log_2 x+3$ на отрезке $[2;\ 8]$ подстановкой $\log_2 x=t$ сводится к нахождению наибольшего (наименьшего) значения функции t^3-6t^2+9t+2 на отрезке $[1;\ 3]$.

Пример 8. Найти наименьшее значение функции

$$y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+3.$$

Решение. Преобразуем функцию следующим образом:

$$y=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+3=$$
$$=(x^2-5x+4)^2+2(x^2-5x+4)+1+2=(x^2-5x+5)^2+2.$$

Ясно, что наименьшее значение функции равно 2 и достигается оно при $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

При решении многих задач на наибольшее и наименьшее значения можно применять неравенство Коши, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое положительных чисел:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}. \qquad (1)$$

Следует иметь в виду, что в неравенстве (1) равенство будет иметь место лишь в том случае, если все числа a_1, a_2, ..., a_n равны. В связи с этим часто удобно пользоваться следующими следствиями неравенства Коши:

1) произведение n положительных величин с данной (постоянной) суммой становится наибольшим, когда все эти величины равны;

2) сумма n положительных величин с данным (постоянным) произведением становится наименьшей, когда все эти величины равны.

Пример 9. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной полной поверхностью найти тот, объем которого наибольший.

Решение. Пусть x, y, z — измерения прямоугольного параллелепипеда, S — полная поверхность, V — объем.

Очевидно, $S=2(xy+yz+xz)$, $V=xyz$. Заметив, что сумма величин xy, yz и zx равна $\frac{S}{2}$, т. е. является постоянной, приходим к выводу, что произведение $xy\cdot yz\cdot xz=V^2$ принимает наибольшее значение, если $xy=yz=xz$, т. е. при $x=y=z$. Таким образом, искомым параллелепипедом является куб.

Пример 10. Дан угол α и точка M внутри его. Каким образом следует провести через точку M прямую, чтобы она отсекла от угла треугольник наименьшей площади?

Решение. Пусть AB — произвольная прямая, проходящая через данную точку M (рис. 27). Обозначим $OB=x$, $OA=y$. Проведем через точку M прямые $MM_1\parallel OB$ и $MM_2\parallel OA$. Обозначим $MM_1=a$, $MM_2=b$. Числа a и b заданы (фактически они являются косоугольными координатами точки M). Из подобия треугольников AM_1M и AOB имеем:

$$\frac{a}{x}=\frac{y-b}{y}, \text{ или } \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1. \qquad (1)$$

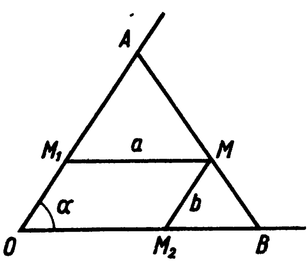


Рис. 27

Так как площадь треугольника AOB вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}xy\sin\alpha$, то она будет иметь наименьшее значение при наименьшем значении произведения xy. По теореме о средних (с учетом (1)) получим:

$$1=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)^2\geqslant\left(2\sqrt{\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}}\right)^2=4\frac{ab}{xy}, \qquad (2)$$

откуда $$xy\geqslant 4ab. \qquad (3)$$

В неравенстве (2) (а значит, и в неравенстве (3)) равенство будет достигаться в том и только в том случае, когда $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{1}{2}$, откуда $x=2a$, $y=2b$ и данная точка M является серединой AB. Итак, прямая, отсекающая от данного угла треугольник наименьшей площади, должна быть проведена через точку M так, чтобы отрезок ее AB делился в этой точке пополам.

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений можно решать различными способами. Общий метод решения таких задач основан на применении аппарата дифференциального исчисления. Однако решение с помощью производной не всегда является лучшим. В некоторых случаях решение с помощью элементарных приемов проще и изящнее. Следует показывать учащимся различные способы решения одной и той же задачи. Так, в примере 5 наименьшее значение функции $f(a)=a^2+\frac{128}{a}$ при $a>0$ можно найти также и с помощью неравенства о средних.

Действительно, представив функцию в виде $f(a)=a^2+\frac{64}{a}+\frac{64}{a}$ и применив неравенство Коши, получим:

$$f(a)\geqslant 3\sqrt[3]{a^2\cdot\frac{64}{a}\cdot\frac{64}{a}}=48.$$

Равенство будет иметь место лишь в случае, когда $a^2=\frac{64}{a}$, т. е. при $a=4$. Итак, наименьшее значение функции равно $f(4)=48$.

Применение различных приемов решения задач способствует активизации мыслительной деятельности учащихся, вызывает у них интерес к решению задач и к изучению математики в целом.

Пример 11. Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^4+3}{x}$$

на интервале $(0;\ +\infty)$.

Решение. Перепишем функцию следующим образом:

$$y=x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения суммы положительных величин, произведение которых постоянно:

$$x^3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1.$$

Следовательно, наименьшее значение суммы будет достигаться при равенстве всех слагаемых, т. е. при $x^3=\frac{1}{x}$, откуда $x=1$. Наименьшее значение функции на интервале $(0;\ +\infty)$ равно 4.

Пример 12. В правильной четырехугольной пирамиде сумма высоты и стороны основания равна 3. Найти наибольший возможный объем пирамиды.

Решение. Пусть x — сторона основания, h — высота пирамиды, V — объем пирамиды. $V=\frac{1}{3}x^2h$. По условию задачи $x+h=3$. Следовательно, объем пирамиды равен $V(x)=\frac{1}{3}x^2(3-x)$; $0<x<3$. Представим $V(x)$ следующим образом:

$$V(x)=\frac{1}{6}x^2(6-2x);\ 0<x<3.$$

Рассмотрим произведение $x^2(6-2x)$ как произведение трех положительных множителей $x\cdot x\cdot(6-2x)$, сумма которых постоянна. Наибольшее значение произведения достигается лишь в случае, если $x=6-2x$, т. е. при $x=2$. Следовательно, наибольший объем пирамиды равен $V(2)=\frac{4}{3}$.

Рассмотрим несколько задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функций.

Пример 13. Найти множество значений функции

$$y=a\sin\omega x+b\cos\omega x\ (a^2+b^2\neq 0).$$

Решение. Записав функцию в виде

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right) \qquad (1)$$

и заметив, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, приходим к выводу, что существует такое α, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha,$$

и функция может быть записана в виде:

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\alpha). \qquad (2)$$

Из (2) следует, что наибольшее значение функции равно $\sqrt{a^2+b^2}$, наименьшее $(-\sqrt{a^2+b^2})$. Множество значений функции — отрезок $[-\sqrt{a^2+b^2};\ \sqrt{a^2+b^2}]$.

Пример 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x.$$

Решение. Перепишем функцию в виде:

$$y=\frac{a}{2}(1-\cos 2x)+\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c}{2}(1+\cos 2x),$$

или

$$y=\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c-a}{2}\cos 2x+\frac{a+c}{2},$$

и, применив результат примера 13, получим, что наибольшее и наименьшее значения функции соответственно равны:

$$\frac{a+c\pm\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}.$$

Пример 15. Среди прямоугольных треугольников с данной гипотенузой c найти тот, который имеет наибольший радиус вписанной окружности. Найти этот радиус.

Решение. Пусть a и b — катеты, α — один из острых углов, r — радиус вписанной окружности. Тогда имеем:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$$

так как наибольшее значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$ равно $\sqrt{2}$ $\left(\text{при } \alpha=\frac{\pi}{4}\right)$, то наибольшее значение радиуса равно $\frac{c(\sqrt{2}-1)}{2}$.

Итак, среди прямоугольных треугольников с данной гипотенузой наибольший радиус вписанной окружности имеет равнобедренный треугольник.

Дополнительные упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанных промежутках:

а) $y=-4x^2+5x-8$ на $[2;\ 3]$;
б) $y=x^3+3x^2-2$ на: 1) $[-2;\ 2]$; 2) $(-\infty;\ 0)$;
в) $y=|x-3|$ на: 1) $[0;\ 4]$; 2) $[4;\ 5]$;
г) $y=x^2+|x+2|$ на $[-3;\ -1]$;
д) $y=|x^2-6x|$ на $[-1;\ 3]$;
е) $y=1-\cos 4x+\cos 2x$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
ж) $y=5\sin x+0{,}5\sin 2x-2x$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;
з) $y=e^{-2x}\cos 2x$ на $\left[0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$;
и) $y=\frac{2x+1}{x-2}$ на $[-1;\ 1]$;
к) $y=\frac{3^{x+2}+2\cdot 3^{-x-1}}{\ln 3}$ на $[-1;\ 1]$.

2. При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 4 см имеет наибольшую площадь?

3. Две вершины прямоугольника лежат на диаметре полуокружности, а две другие на полуокружности. Вычислите наибольший периметр прямоугольника, вписанного в полукруг радиуса 5 см.

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник

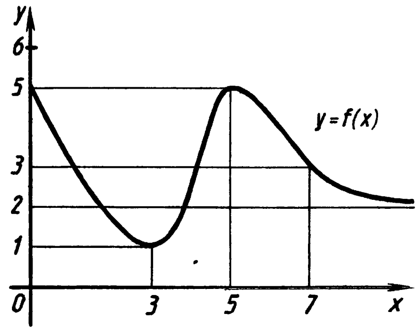


Рис. 28

с острым углом φ. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30° и имеют длину l. При каком значении φ объем пирамиды будет наибольшим? Вычислите этот наибольший объем.

5. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей только через вершину A. Каким должен быть угол между стороной AB и осью вращения, чтобы объем полученного тела вращения был наибольшим?

6. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=e^x$ и прямыми $y=0$; $x=0$; $x=1$. В какой точке кривой $y=e^x$ $(0<x<1)$ следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

7. На рисунке 28 изображен график функции f. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутках: а) $[0; 5]$; б) $[3; +\infty)$; в) $(5; 7]$; г) $(5; +\infty)$, если известно, что на промежутке $[5; +\infty)$ функция f убывает и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Ответы к дополнительным упражнениям

1. а) -14, -29; б) 1) 18, -2; 2) 2, не существует; в) 1) 3, 0; 2) 2, 1; г) 10, 2; д) 9, 0; е) $2\frac{1}{8}$, -1; ж) 0, $\frac{2\pi}{3}-\frac{11\sqrt{3}}{4}$; з) 1, $-\frac{e^{-0,75\pi}}{\sqrt{2}}$; и) $\frac{1}{3}$, -3; к) $\frac{245}{9\ln 3}$; $\frac{5}{\ln 3}$.
2. $2(\sqrt{2}-1)$ см. **3.** $10\sqrt{5}$ см. 4. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{l^3}{8}$. 5. 45°. **6.** $(0,5; \sqrt{e})$. 7. а) 5, 1; б) 5, 1, в) наибольшего нет, наименьшее 3; г) нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ X КЛАССА

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1 **С-1**

1. Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{2}{5+2x}-\frac{2}{5-2x}-\frac{4x^2-45}{4x^2-25}=0?$$

2. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что $10^r=2$.
3. При каких целых значениях a уравнение

$$4x^2+ax+9=0$$

имеет рациональные корни, сумма которых является целым числом?

Вариант 2 **С-1**

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3-x}=\frac{x^2-15}{x^2-9}.$$

2. Докажите, что число $\sqrt{5}$ не является рациональным.
3. При каких целых значениях a квадратное уравнение

$$ax^2+20x+9=0$$

имеет рациональные корни, сумма которых является целым числом?

Вариант 3 **С-1**

1. Докажите, что уравнение

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$$

имеет один корень.
2. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что $5^r=3$.
3. При каких натуральных значениях a корни уравнения

$$9x^2-24x-a^2=0$$

рациональны?

Вариант 4 **С-1**

1. Найдите все корни уравнения

$$\frac{2}{7+2x}-\frac{4x^2-77}{4x^2-49}=\frac{2}{7-2x}.$$

2. Докажите, что число $\sqrt[4]{2}$ не является рациональным.
3. При каких целых значениях a уравнение

$$2x^2+ax+8=0$$

имеет рациональные корни и их сумма — целое число?

Вариант 5 **С-1**

1. Докажите, что уравнение

$$\frac{2}{5+x}-\frac{x^2-45}{x^2-25}=\frac{2}{5-x}$$

имеет один корень.
2. Докажите, что число $\sqrt[5]{9}$ не является рациональным.
3. При каких целых значениях a квадратное уравнение

$$ax^2+10x+8=0$$

имеет рациональные корни, сумма которых — целое число?

Вариант 6 **С-1**

1. Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{1}{3+2x}-\frac{4x^2-15}{4x^2-9}=\frac{1}{3-2x}?$$

2. Докажите, что число $\sqrt[3]{6}$ не является рациональным.
3. При каких натуральных значениях a корни уравнения $4x^2-6x-a^2=0$ рациональны?

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1 **С-2**

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $\sqrt{3}$ и $\frac{23}{17}$ с точностью до 0,0001.
2. Укажите пример двух неравных иррациональных чисел α и β, разность которых есть число рациональное.
3. Докажите, что если α и β — иррациональные числа и $a\neq\beta$, то их частное и разность не могут одновременно быть рациональными числами.
4. Решите неравенства:
а) $||x-1|-3|<2$; б) $x^2-2|x|-15\geqslant0$.

Вариант 2 **С-2**

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $\sqrt{5}$ и $\frac{43}{31}$ с точностью до 0,0001.

2. Приведите пример двух неравных иррациональных чисел α и β, частное которых — число рациональное.
3. Даны иррациональные числа α и β, $\alpha \neq \beta$, причем $\alpha - \beta$ — число рациональное. Докажите, что $\alpha + 2\beta$ — иррациональное число. Рациональным или иррациональным является число $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2$?
4. Решите неравенства:

   а) $\frac{|x-1|-2}{|x-1|-3} \leqslant 2$; б) $3x^2 - 8|x| + 4 < 0$.

Вариант 3 **С-2**

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $\sqrt{7}$ и $\frac{40}{31}$ с точностью до 0,0001.
2. Приведите пример двух иррациональных чисел α и β, сумма которых — число рациональное.
3. Докажите, что если сумма и произведение двух иррациональных чисел α_1 и α_2 есть числа рациональные, то α_1 и α_2 имеют вид $a \pm \sqrt{b}$, где a и b — рациональные числа.
4. Решите неравенства:

   а) $||2x-3|-1| > 2$; б) $3x^2 - 5|x| + 2 \leqslant 0$.

Вариант 4 **С-2**

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $\sqrt{3}$ и $\frac{23}{19}$ с точностью до 0,0001.
2. Приведите пример двух иррациональных чисел α и β, произведение которых — число рациональное.
3. Числа a, b и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ рациональные. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — рациональные числа ($a \neq b$).
4. Решите неравенства:

   а) $\frac{1-|x|}{3-|x|} < 1$; б) $(2x-1)^2 - 18|2x-1| + 45 \leqslant 0$.

Вариант 5 **С-2**

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $\sqrt{10}$ и $\frac{53}{41}$ с точностью до 0,0001.
2. Приведите пример двух иррациональных чисел α и β, чтобы число $\alpha + 2\beta$ было числом рациональным.
3. Числа α и β иррациональные, причем $\alpha + \beta$ — число рациональное и $\alpha \neq -\beta$. Докажите, что число $\alpha - 2\beta$ иррациональное. Рациональным или иррациональным является число $\alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2$?
4. Решите неравенства:

   а) $||2x+1|-5| \leqslant 4$; б) $3x^2 + 8|x| - 3 > 0$.

Вариант 6 **С-2**

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $\sqrt{11}$ и $\frac{61}{53}$ с точностью до 0,0001.

2. Приведите пример двух иррациональных чисел α и β, чтобы число $2\alpha-\beta$ было рациональным.
3. α и β — числа иррациональные, причем $\alpha-2\beta$ — число рациональное, $\alpha\neq 2\beta$. Докажите, что число $\alpha+3\beta$ иррациональное. Рациональным или иррациональным является число $\alpha^2+\alpha\beta-6\beta^2$?
4. Решите неравенства:

   а) $\frac{|3x-2|-2}{|3x-2|-1}<2$; б) $(x-1)^2-2|x-1|-63<0$.

Контрольная работа № 1

Вариант 1 **К-1**

1. Даны точки $A(-2; 5)$, $B(2; 2)$, $C(10; 0)$.

   а) Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

   б) Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Найдите координаты точки D.
2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|x-3|+|2+x|\leqslant 2x+3$.

3^0. Докажите, что число $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$ не является рациональным числом.

Вариант 2 **К-1**

1. Даны точки $K(1; 3)$, $M(9; 3)$, $P(-7; 9)$.

   а) Докажите, что треугольник KMP тупоугольный.

   б) Пусть KA — биссектриса треугольника KMP. Найдите координаты точки A.
2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|x+3|-|2-x|\geqslant 3x-2$.

3^0. Докажите, что число $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ не является рациональным числом.

Вариант 3 **К-1**

1. Даны точки $A(-7; 15)$, $B(10; 10)$, $C(4; 4)$.

   а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

   б) Пусть CM — биссектриса треугольника ABC. Найдите координаты точки M.
2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|3-x|+|x+4|<3$.

3^0. Докажите, что число $3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Вариант 4 **К-1**

1. Даны точки $K(-7; -3)$, $M(2; 9)$, $H(-13; 5)$.

   а) Докажите, что треугольник KMH остроугольный.

   б) KB — биссектриса треугольника KMH. Найдите координаты точки B.

2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|5-2x|+|x+3|\geqslant 5$.

3^0. Докажите, что число $\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом.

Вариант 5 **К-1**

1. Даны точки $D(-4;\ -5)$, $E(3;\ 2)$, $K(8;\ -3)$.
   а) Докажите, что треугольник DEK прямоугольный.
   б) EC — биссектриса треугольника DEK. Найдите координаты точки C.
2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|2x-7|+|x-8|\leqslant 8$.

3^0. Докажите, что число $3\sqrt{3}-5\sqrt{5}+7\sqrt{7}$ не является рациональным числом.

Вариант 6 **К-1**

1. Даны точки $A(-2;\ -9)$, $B(-7;\ 3)$, $C(-13;\ -5)$.
   а) Докажите, что треугольник ABC остроугольный.
   б) BE — биссектриса треугольника ABC. Найдите координаты точки E.
2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите неравенство $|4-2x|-|5x-12|>6$.

3^0. Докажите, что число $\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1 **С-3**

1. При каких значениях a справедливо равенство

$$\left(\frac{3a+1}{6a}+\frac{4}{3a+3}-2\right):\frac{3a+1}{3a+3}-\frac{3a^2-5a+1}{2a}=\frac{2-3a}{2}?$$

2. Докажите тождество

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=(x-y)(y-z)(x-z).$$

3. Докажите, что если натуральное число не кратно 5, то квадрат этого числа при делении на 5 не может дать остаток, равный 2.

Вариант 2 **С-3**

1. При каких значениях a справедливо равенство

$$\frac{a+6}{a^2-6a}\cdot\left(6a-a^2+\frac{a-6}{9a+54}\right)-\frac{1-54a}{9a}=-a?$$

2. Разложите на множители $(xy+xz+yz)(x+y+z)-xyz$.

3. Докажите, что если число не кратно 7, то квадрат этого числа при делении на 7 не может дать остаток, равный 3.

Вариант 3 **С-3**

1. При каких значениях a справедливо равенство
$$\left(\frac{3a+4}{6a+6}+\frac{4}{3a+6}-2\right):\frac{3a+4}{3a+6}-\frac{3a^2+a-1}{2a+2}=-\frac{3a+1}{2}?$$

2. Докажите тождество $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=$ $=(x-y)(y-z)(z-x)$.

3. Докажите, что если число не кратно 6, то квадрат этого числа при делении на 6 не может дать остаток, равный 2.

Вариант 4 **С-3**

1. При каких значениях a справедливо равенство
$$\frac{a+9}{a^2-9}\cdot\left(\frac{a-3}{9a+81}+9-a^2\right)+\frac{161+54a}{9a+27}+a=-3?$$

2. Разложите на множители $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

3. Докажите, что если число не кратно 5, то квадрат этого числа при делении на 5 не может дать остаток, равный 3.

Вариант 5 **С-3**

1. При каких значениях a справедливо равенство
$$\left(\frac{3a-2}{6a-6}+\frac{4}{3a}-2\right)\cdot\frac{3a}{3a-2}-\frac{3a^2-11a+9}{2a-2}+\frac{3a-3}{2}=1?$$

2. Докажите тождество
$x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)+z(x+y)(x^2-y^2)=$
$=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

3. Докажите, что если число не кратно 7, то квадрат этого числа при делении на 7 не может дать остаток, равный 5.

Вариант 6 **С-3**

1. При каких значениях a справедливо равенство
$$\left(\frac{a-8}{9(a+4)}-a^2+10a-16\right):\frac{a^2-10a+16}{a+4}+\frac{54a-109}{9a-18}+a=2?$$

2. Разложите на множители $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.
3. Докажите, что если число не кратно 6, то квадрат этого числа при делении на 6 не может дать остаток, равный 5.

Контрольная работа № 2

Вариант 1 **К-2**

1. Докажите методом математической индукции, что
$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{6}{5\cdot7}+\frac{20}{7\cdot9}+\ldots+\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)}\cdot2^{n-1}=\frac{2n}{2n+3}-\frac{1}{3}.$$

2. Докажите, что 7^n+3^{n+1} делится на 4 при всех натуральных значениях n.

3. При каких значениях k сумма кубов корней трехчлена $kx^2-6kx+2k+3$ равна 72?

4^0. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1=3$, $x_2=6$, $x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=-1$, $n\in N$. Докажите, что $x_n=2^n+n$, $n\in N$.

Вариант 2 **К-2**

1. Докажите методом математической индукции, что

$$2+18+60+\ldots+n(n+1)(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(3n-1).$$

2. Докажите, что $7\cdot5^{2n-1}+2^{3n+1}$ делится на 17 при любом натуральном значении n.

3. При каких значениях b сумма квадратов корней трехчлена $bx^2+(b+2)x-4b$ равна $10\frac{7}{9}$?

4^0. Докажите, что при $n\in N$, $n\geqslant5$ справедливо неравенство $2^n\geqslant n^2+n+2$.

Вариант 3 **К-2**

1. Докажите методом математической индукции, что

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}=1-\frac{n+1}{3^n}.$$

2. Докажите, что 10^n-9n-1 делится на 81 при $n\in N$.

3. При каких значениях k модуль разности корней трехчлена $kx^2+2(k+1)x-12$ равен 8?

4^0. Докажите, что если $a_1=2$, $a_2=8$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$, $n\in N$, то $a_n=3^n-1$, $n\in N$.

Вариант 4 **К-2**

1. Докажите методом математической индукции, что

$$4+60+\ldots+(n+1)(3n-1)\cdot4^{n-1}=n^2\cdot4^n.$$

2. Докажите, что $6^{n+1}+7^{2n-1}$ делится на 43 при любом натуральном значении n.

3. При каких значениях a сумма квадратов корней трехчлена $(a-1)x^2+ax-3(a-1)$ равна 10?

4^0. Докажите, что при $n\in N$, $n\geqslant4$ имеет место неравенство $3^n>5n^2$.

Вариант 5 **К-2**

1. Докажите методом математической индукции, что

$$\frac{1\cdot8}{4\cdot7}+\frac{2\cdot11}{7\cdot10}+\ldots+\frac{n(3n+5)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(n+1)}{3n+4}.$$

2. Докажите, что для любого натурального n справедливо утверждение: $3^{2n}-8n-1$ кратно 16.

3. При каких значениях a модуль разности квадратов корней трехчлена $(a+1)x^2+(a+3)x-4a-4$ равен 15?
4^0. Докажите, что если $a_1=1$, $a_2=5$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $n\in N$, то $a_n=3^n-2^n$, $n\in N$.

Вариант 6 **К-2**

1. Докажите методом математической индукции, что
$$3\cdot 2+4\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\dots+(n+2)2^n=(n+1)2^{n+1}-2.$$
2. Докажите, что для любого натурального n справедливо утверждение: $5\cdot 9^{n-1}+2^{4n-3}$ кратно 7.
3. При каких значениях k сумма кубов корней трехчлена $2kx^2-(k+1)x-4k$ равна 7?
4^0. Докажите, что при $n\in N$, $n\geqslant 6$ справедливо неравенство $2^n>n(n+4)$.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1 **С-4**

1. Выполните деление с остатком x^3-3x+2 на $x-2$.
2. Многочлен $P(x)$ при делении на $x-1$ дает остаток 3, а при делении на $x-2$ дает остаток 5. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^2-3x+2.
3. Найдите все значения a, при которых выражение
$$\sqrt{x^4+ax^3+15x^2-18x+9}$$
является многочленом второй степени относительно x.

Вариант 2 **С-4**

1. Выполните деление с остатком x^5+2 на $x-1$.
2. Многочлен $P(x)$ при делении на $x-1$, $x+1$, $x-2$ дает в остатке соответственно 4, 2, 8. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^3-2x^2-x+2.
3. Докажите, что многочлен x^3+5 не делится на приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами.

Вариант 3 **С-4**

1. Выполните деление с остатком x^6-2 на x^2-x+1.
2. Многочлен $P(x)$ делится на $x-1$ без остатка, а при делении на $x+2$ дает остаток 3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^2+x-2.
3. Найдите все значения a и b, при которых многочлен
$$x^4-a^2x^3+74x^2+bx+25$$
является квадратом многочлена второй степени относительно x с целыми коэффициентами.

Вариант 4 **С-4**

1. Выполните деление с остатком x^4-3x^2+1 на $x-2$.
2. Многочлен $P(x)$ делится без остатка на $x-a$ и на $x-b$ $(a\neq b)$. Докажите, что $P(x)$ делится без остатка на $(x-a)(x-b)$.
3. Докажите, что если n кратно 3, $n\in N$, то x^n-1 делится без остатка на x^2+x+1.

Вариант 5 **С-4**

1. Выполните деление с остатком x^4+x+1 на x^2+1.
2. Многочлен $P(x)$ при делении на $x-2$ дает в остатке 5, а при делении на $x+5$ дает в остатке -2. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x^2+3x-10$.
3. Представьте многочлен $9x^4-6x^3+ax^2-4x+4$ в виде квадрата трехчлена. При каких значениях a это возможно?

Вариант 6 **С-4**

1. Выполните деление с остатком x^8-1 на x^2+2.
2. Многочлен $P(x)$ делится без остатка на $x-1$ и $x+1$, а при делении на $x+3$ дает в остатке 8. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^3+3x^2-x-3.
3. Докажите, что многочлен x^6+x^2+a не делится на многочлен x^3+x+a ни при каких значениях a.

Контрольная работа № 3

Вариант 1 **К-3**

1. При каких значениях a и b многочлен $2x^4+3x^3-ax^2+bx-3$ делится без остатка на $x+3$, а при делении на $x-2$ дает остаток, равный 5?
2. Найдите целые корни многочлена $x^4-27x^2-14x+120$.
3. Докажите, что нечетная степень числа 48, увеличенная на 1, кратна 7.
4. Разложите на множители методом неопределенных коэффициентов многочлен $x^4-10x^3+27x^2-14x+2$.

5^0. Разложите на множители многочлен $x^{12}-3x^6+1$.

Вариант 2 **К-3**

1. При каких значениях m и n многочлен x^3+mx+n делится без остатка на трехчлен $x^2+3x+10$?
2. Разложите на линейные множители многочлен
$$x^4+2x^3-13x^2-38x-24.$$
3. Докажите, что четная натуральная степень числа 57, уменьшенная на 1, кратна 203.
4. Разложите на множители методом неопределенных коэффициентов многочлен $x^4-12x^3+43x^2-42x+6$.

5^0. Разложите на множители многочлен $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

Вариант 3 К-3

1. При каких значениях m и n многочлен $3x^4-2x^3+mx+n$ делится без остатка на $x-2$, а при делении на $x-1$ дает остаток, равный (-14)?
2. Разложите на линейные множители многочлен
$$x^4+10x^3+37x^2+60x+36.$$
3. Докажите, что четная натуральная степень числа 43, уменьшенная на 1, кратна 77.
4. Разложите на множители методом неопределенных коэффициентов многочлен $x^4+x^3-5x^2+13x-6$.

5^0. Разложите на множители многочлен $a^{16}+a^8+1$.

Вариант 4 К-3

1. При каких значениях a и b многочлен $2x^4+ax^3+bx-2$ делится без остатка на трехчлен x^2-x-2?
2. Разложите на множители многочлен $x^4+x^3-6x^2-4x+8$.
3. Докажите, что нечетная натуральная степень числа 17, увеличенная на 1, кратна 9.
4. Разложите на множители методом неопределенных коэффициентов многочлен $x^4-4x^3-20x^2+13x-2$.

5^0. Разложите на множители многочлен
$$(x^2-6x+3)(x^2-6x+5)-15.$$

Вариант 5 К-3

1. При каких значениях a и b многочлен $3x^4-2x^3+14x^2+ax+b$ при делении на $(x+2)$ дает остаток, равный 101, а на $(x+1)$ делится без остатка?
2. Найдите целые корни многочлена $x^4-4x^3+5x^2+22x-24$.
3. Докажите, что четная степень числа 19, уменьшенная на 1, кратна 36.
4. Разложите на множители методом неопределенных коэффициентов многочлен $x^4-x^3-67x^2-11x+6$.

5^0. Разложите на множители многочлен x^8+4x^4+16.

Вариант 6 К-3

1. При каких значениях k и p многочлен $x^4-px^2+kx-12$ делится на многочлен x^2-2x-3?
2. Разложите на линейные множители многочлен
$$x^4+4x^3-19x^2-46x+120.$$
3. Докажите, что нечетная степень числа 21, увеличенная на 1, кратна 11.
4. Разложите методом неопределенных коэффициентов на множители многочлен $x^4+6x^3-21x^2+78x-16$.

5^0. Разложите на множители многочлен
$$(x^2-5x+3)(x^2-5x-5)-9.$$

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1 **С-5**

1. Найдите действительные корни уравнения $3x^3-5x^2+3x-5=0$.
2. Найдите действительные корни уравнения
$$2x^4+3x^3-8x^2-9x+6=0.$$
3. Решите уравнение $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=144$.

Вариант 2 **С-5**

1. Найдите действительные корни уравнения
$$4x^5+8x^4+5x^3+10x^2-3x-6=0.$$
2. Найдите действительные корни уравнения
$$2x^4-5x^3-x^2+5x+2=0.$$
3. Решите уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)=6$.

Вариант 3 **С-5**

1. Найдите действительные корни уравнения
$$3x^5-6x^4+4x^3-8x^2-3x+6=0.$$
2. Найдите действительные корни уравнения
$$5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0.$$
3. Решите уравнение $(x-3)(x+2)(x-6)(x-1)+56=0$.

Вариант 4 **С-5**

1. Найдите действительные корни уравнения
$$2x^5+4x^4-5x^3-10x^2-7x-14=0.$$
2. Найдите действительные корни уравнения
$$4x^4-3x^3-8x^2+3x+4=0.$$
3. Решите уравнение $(x+2)(x-3)(x+4)=126$.

Вариант 5 **С-5**

1. Найдите действительные корни уравнения
$$3x^5-6x^4-8x^3+16x^2-16x+32=0.$$
2. Найдите действительные корни уравнения
$$3x^4-4x^3-7x^2+4x+4=0.$$
3. Решите уравнение $(x+3)(x-2)(x-6)(x+7)=-180$.

Вариант 6 **С-5**

1. Найдите действительные корни уравнения
$$2x^5+6x^4-7x^3-21x^2-4x-12=0.$$
2. Найдите действительные корни уравнения
$$2x^4-7x^3-5x^2+7x+3=0.$$
3. Решите уравнение $(x+6)(x-7)(x+2)(x-3)+180=0$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1 **К-4**

1. Докажите, что если $A(x)>0$ для всех x, при которых определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то неравенства $f(x)<\varphi(x)$ и $f(x)A(x)<\varphi(x)A(x)$ равносильны.

2. Докажите, что при $a>0$ имеет место неравенство

$$(a+3)(a+6)(a+2)(a+1)>96a^2.$$

3. Решите неравенство $\frac{(x^2+3x-18)(4x^2-4x+1)}{(x^2-5x+6)(3x^2-8x+14)}<0.$

4. Решите уравнение $\frac{2}{x-3}-\frac{3x}{2-2x}=\frac{3}{x^2-1}$.

5^0. Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство $x^2+10y^2-6xy+10x-26y+30>0$.

Вариант 2 **К-4**

1. Докажите, что если функция $A(x)$ определена для всех значений x, при которых определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то неравенства $f(x)>\varphi(x)$ и $f(x)+A(x)>\varphi(x)+A(x)$ равносильны.
2. Докажите, что неравенство

$$\frac{(a^2+3a+1)(a^4-a^2+1)}{a^3}\geqslant 5$$

выполняется при значениях $a>0$. При каких значениях a имеет место равенство?

3. Решите неравенство $\frac{(3x^2-5x+2)(x^2-4x+4)}{7-6x-x^2}<0.$

4. Решите уравнение $\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{x+1}$.

5^0. Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство $x^2+y^2+xy+x-y+3>0$.

Вариант 3 **К-4**

1. Докажите, что если $A(x)<0$ для всех значений x, при которых определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то неравенства $f(x)<\varphi(x)$ и $f(x)A(x)>\varphi(x)A(x)$ равносильны.
2. Докажите, что при $n>0$ имеет место неравенство

$$(5+n)(n+4)(n+8)(n+2)>128n^2\sqrt{5}.$$

3. Решите неравенство $\frac{(x^2-5x-6)(5x^2+2x+2)}{(9x^2-6x+1)(-3x^2+x+2)}<0.$

4. Решите уравнение $\frac{2x}{3(x-1)}+\frac{4}{4-x^2}=\frac{1}{x+2}$.

5^0. Известно, что число $\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^3-(a+2)x^2+bx-2a=0$ (a и b — целые). Найдите значения a и b и остальные корни уравнения.

Вариант 4 **К-4**

1. Докажите, что если $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$ при всех значениях x, то неравенства $f(x)<\varphi(x)$ и $f^2(x)<\varphi^2(x)$ равносильны.
2. Докажите, что при $a>2$ имеет место неравенство
$$a^3-4a^2+6a-4>0.$$
3. Решите неравенство $\dfrac{4x^2-5x-6}{(5-x^2-4x)(4x^2-4x+1)}>0.$
4. Решите уравнение $\dfrac{12}{x^2-9}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2}{x-3}$.

5^0. Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство $2x^2+9y^2-6xy+6y+3>0$.

Вариант 5 **К-4**

1. Докажите, что если функция $A(x)$ определена для всех значений x, при которых определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то неравенства $f(x)\leqslant\varphi(x)$ и $f(x)+A(x)\leqslant\varphi(x)+A(x)$ равносильны.
2. Докажите, что если $a>0{,}8$, то имеет место неравенство
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{5a-4}\right)(8a-5)\geqslant 9.$$
При каких значениях a имеет место равенство?
3. Решите неравенство $\dfrac{(x^2-4x-5)(9x^2-6x+1)}{(x^2-2x-15)(5x^2-x+4)}>0.$
4. Решите уравнение $\dfrac{12}{4-x^2}=\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3}{x-2}$.

5^0. Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство $4x^2+26y^2-20xy-12x+34y+14>0$.

Вариант 6 **К-4**

1. Докажите, что если $A(x)>0$ для всех x, при которых определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то неравенства $f(x)\geqslant\varphi(x)$ и $f(x)A(x)\geqslant\varphi(x)A(x)$ равносильны.
2. Докажите, что неравенство $4a^4-12a^3+13a^2-6a+1\geqslant 0$ выполняется при всех действительных значениях a. При каких значениях a имеет место равенство?

3. Решите неравенство $\frac{(x^2-5x-6)(3x^2+2x+1)}{(3x^2-12x+12)(x^2+x+8)}<0$.

4. Решите уравнение $\frac{6}{x^2-9}+\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-3}$.

5⁰. Известно, что число $1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^3+ax^2+bx+a+2=0$ (a и b — целые). Найдите значения a и b и остальные корни уравнения.

Самостоятельная работа № 6

Вариант 1 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. Найдите $f\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)$.
2. Изобразите схематически график функции $y=\frac{3x^2+3x-6}{x^2-1}$.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ 5)$ и $B(1;\ -2)$, и прямой, параллельной ей, проходящей через точку $C(1;\ -1)$. Найдите отношение площадей треугольников, отсекаемых этими прямыми от осей координат.

Вариант 2 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=\frac{1-2x^2}{1+2x^2}$. Найдите $f\left(\sqrt{\frac{1-b}{2b+2}}\right)$.
2. Изобразите схематически график функции $y=\frac{20+6x-2x^2}{x^2-x-6}$.
3. Прямая, проходящая через точку $C(-2;\ 1)$, параллельна прямой, проходящей через точки $A(-2;\ -6)$ и $B(7;\ 3)$.
   а) Напишите уравнения этих прямых.
   б) Найдите отношение периметров треугольников, отсекаемых прямыми от осей координат.

Вариант 3 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$. Найдите $f\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{2(1-c)}\right)$.
2. Изобразите схематически график функции $y=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(1;\ 2)$ и $H(0;\ 5)$, и прямой, параллельной ей, проходящей через точку $P(-3;\ -2)$. Найдите отношение площадей треугольников, отсекаемых этими прямыми от осей координат.

Вариант 4 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Найдите $f\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right)$.

2. Изобразите схематически график функции $y=\frac{4x^2+x-5}{2x^2-x-1}$.

3. Прямая, проходящая через точку $M(-3;\ -4)$, параллельна прямой, проходящей через точки $P(2;\ 0)$ и $K(0{,}5;\ -1)$.

а) Напишите уравнения этих прямых.

б) Найдите отношение периметров треугольников, отсекаемых прямыми от осей координат.

Вариант 5 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=\frac{3x^2-1}{3x^2+1}$. Найдите $f\left(\sqrt{\frac{c+1}{3(1-c)}}\right)$.

2. Изобразите схематически график функции $y=\frac{6x^2+6x}{x^2-1}$.

3. Прямая, проходящая через точку C, параллельна прямой, проходящей через точки $A(5;\ 2)$ и $B(-1;\ -2)$.

а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку C, если C является точкой пересечения прямых $2x+y=-7$ и $x+2y=-8$.

б) Найдите отношение площадей треугольников, отсекаемых прямой AB и параллельной ей прямой, проходящей через точку C, от осей координат.

Вариант 6 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$. Найдите $f\left(\sqrt{\frac{3(y+1)}{1-y}}\right)$.

2. Изобразите схематически график функции $y=\frac{4x-8}{x^2+2x-8}$.

3. Через точку A, являющуюся точкой пересечения прямых $x=1$ и $3x-y=7$, проведена прямая, параллельная прямой, проходящей через точки $C(1;\ -1)$ и $D(5;\ 5)$.

а) Напишите уравнения этих прямых.

б) Найдите отношение периметров треугольников, отсекаемых этими прямыми от осей координат.

Контрольная работа № 5

Вариант 1 **К-5**

1. Докажите, что произведение двух нечетных функций есть функция четная на их общей области определения.

2. Дана функция $y=\frac{8}{x^2-6x+13}$.

а) Найдите наибольшее значение функции.

б) Докажите, что на промежутке $[3;\ +\infty)$ функция убывает.

3. Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$f(x)=|x-2|+3|x|+\sqrt{x^2+4x+4}.$$

4. Даны функции $f(x)=2x^2-1$ и $\varphi(x)=\sqrt{3x-1}$. Найдите $f(\varphi(x))$; $\varphi(f(x))$.

5^0. Найдите наибольшее значение функции

$$y=2x-\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{4x^2+20x+25}.$$

Вариант 2 **К-5**

1. Докажите, что если функция $f(x)$ убывает на множестве X и $k>0$, то функция $k\cdot f(x)$ также убывает на множестве X.
2. Дана функция $y=\dfrac{13}{x^2+2x+3}$.

   а) Найдите наибольшее значение функции.

   б) Докажите, что на промежутке $(-\infty;\ -1]$ функция возрастает.
3. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$f(x)=(x^3-3x^2+1)(x+2)^6-(x^3+3x^2-1)(x-2)^6.$$
4. Даны функции $f(x)=(x-2)^2$ и $\varphi(x)=\sqrt{x}$. Найдите $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$.

5^0. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}-2x.$$

Вариант 3 **К-5**

1. Докажите, что произведение четной функции на нечетную есть функция нечётная на их общей области определения.
2. Дана функция $y=\dfrac{9}{3x^2+6x+7}$.

   а) Найдите наибольшее значение функции.

   б) Докажите, что на промежутке $(-\infty;\ -1]$ функция возрастает.
3. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$f(x)=\frac{(2x-3)\cdot|x+4|}{(x+1)(3x-1)}+\frac{(2x+3)\cdot|x-4|}{(x-1)(3x+1)}.$$
4. Найдите $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$, если $f(x)=4x^4-4x^2$, $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$.

5^0. Найдите наибольшее значение функции

$$y=2x-\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2+12x+9}.$$

Вариант 4 **К-5**

1. Если функция $y=f(x)$ возрастает на множестве X и $a<0$, то функция $y=af(x)$ убывает на множестве X. Докажите.
2. Функцию $y=\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2-9}$ представьте в виде суммы четной и нечетной функций.
3. Найдите наибольшее значение функции $y=-2x^4+3x^2-6$ и докажите, что на интервале $\left(0;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ функция возрастает.
4. Найдите $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$, если $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $\varphi(x)=3x^2-1$.

5^0. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{x^2-14x+49}-\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2}.$$

Вариант 5 **К-5**

1. Докажите, что если функция $f(x)$ убывает на множестве X и $k<0$, то функция $kf(x)$ возрастает на множестве X.
2. Дана функция $y=\frac{11}{x^2-6x+11}$.
   а) Найдите наибольшее значение функции.
   б) Докажите, что на промежутке $[3; +\infty)$ функция убывает.
3. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x+1}+\frac{x^2+3x+2}{x^3-4x-1}.$$
4. Даны функции $f(x)=1-3x^2$ и $\varphi(x)=\sqrt{1-2x}$. Найдите $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$.

5^0. Найдите наибольшее значение функции
$$y=3x-\sqrt{9x^2-6x+1}-\sqrt{4x^2-12x+9}.$$

Вариант 6 **К-5**

1. Докажите, что сумма двух нечетных функций есть функция нечетная на их общей области определения.
2. Дана функция $y=\frac{8}{2x-x^2-3}$.
   а) Найдите наименьшее значение функции.
   б) Докажите, что на промежутке $(-\infty; 1]$ функция убывает.
3. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(3x-2)(x+1)}\cdot|2x-1|-\frac{x^3+2x^2}{(3x+2)(x-1)}\cdot|2x+1|.$$
4. Даны функции $f(x)=3x^4-2x^2$ и $\varphi(x)=\sqrt{3x+1}$. Найдите $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$.

5^0. Найдите наименьшее значение функции
$$y=\sqrt{9x^2-6x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}-3x.$$

Самостоятельная работа № 7

Вариант 1 **С-7**

1. Найдите асимптоту графика функции $y=\frac{x^3+3}{x^2-3x+2}$.
2. Докажите, что функция $f(x)=\frac{3x}{2x-1}-1{,}5$ бесконечно малая при $x\to\infty$.
3. Найдите луч $(M; +\infty)$, на котором выполняется неравенство $|x^2-4x+3|>10^4$.

Вариант 2 **С-7**

1. Найдите асимптоту графика функции $y=\frac{x^2-2x}{x^2-x-6}$.

2. Докажите, что при $x \to \infty$ функция $\varphi(x)=\frac{2}{\frac{4x+5}{x-4}-4}$ бесконечно большая.

3. Найдите луч $(M;+\infty)$, на котором выполняется неравенство

$$\left|\frac{x+1}{x^2+3x}\right|<0{,}001.$$

Вариант 3 **С-7**

1. Найдите асимптоту графика функции $y=\frac{2x^3+3x}{x^2+3x+2}$.

2. Докажите, что функция $f(x)=\frac{5x+4}{x+1}-5$ бесконечно малая при $x \to \infty$.

3. Найдите луч $(M;+\infty)$, на котором выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^3-4x^2+3x+1}{x^2-6x+5}\right|>10^5.$$

Вариант 4 **С-7**

1. Найдите асимптоту графика функции $y=\frac{2x^3+15}{x^2-6x-7}$.

2. Докажите, что при $x \to -\infty$ функция $y=4x^4-5x^3+8x^2+7$ бесконечно большая.

3. При каких значениях a функция $y=\frac{ax^2+3x+4}{2x^2+3}-2$ будет бесконечно малой при $x \to +\infty$? Найдите луч $(M;+\infty)$, на котором выполняется неравенство $|y|<0{,}01$.

Вариант 5 **С-7**

1. Найдите асимптоту графика функции $y=\frac{4x^2-8x+7}{x^2-3x-10}$.

2. Найдите луч $(M;+\infty)$, на котором выполняется неравенство $|x^3-8x+1|>10^9$.

3. При каких значениях a функция $y=\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}-x^2+a$ будет бесконечно малой при $x \to \infty$?

Вариант 6 **С-7**

1. Найдите асимптоту графика функции $y=\frac{7x^2-8x+2}{x^2+7x+6}$.

2. При каких значениях a и b функция $f(x)=\frac{ax^2+2x+1}{3x+1}-bx$ будет бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$? Найдите луч $(M;+\infty)$, на котором выполняется неравенство $|f(x)|<0{,}0001$.

3. Докажите, что функция $y=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$ бесконечно большая при $x \to \infty$.

Контрольная работа № 6

Вариант 1 К-6

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2|x|-1}{x-3} & \text{при } x<2,\\ \dfrac{3x+5}{1+2x} & \text{при } x\geqslant 2.\end{cases}$ Найдите пределы этой функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.
2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+(-1)^n}{6n-(-1)^n}-\dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}\right)$.
3. Найдите четвертый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 8, сумма второго и третьего членов равна 3, а знаменатель прогрессии является числом рациональным.

4^0. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{2n+1}-\dfrac{3n+1}{4}\right)$.

Вариант 2 К-6

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2x-4} & \text{при } x\leqslant 1,\\ \dfrac{1-|x-2|}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$ Найдите пределы этой функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.
2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3}{1+5n^2}+\dfrac{1-3n^2}{3n+1}\right)$.
3. Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна $\dfrac{2}{3}$, а третий член равен $\dfrac{1}{4}$.

4^0. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1}}{5\cdot 2^{n+1}+3}$.

Вариант 3 К-6

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{4-|x|} & \text{при } x<-5,\\ \dfrac{2x+5}{x+6} & \text{при } x\geqslant -5.\end{cases}$ Найдите пределы этой функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.
2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(-3)^n+2^n}{(-3)^{n-1}+2^{n+1}}+\dfrac{(2+3n)^2}{(3n-1)(n+1)}\right)$.
3. Найдите четвертый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 3, а сумма первого и третьего членов равна $\dfrac{13}{9}$.

4^0. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(6n-5)(6n+1)}\right)$.

Вариант 4 **К-6**

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{5-2x} & \text{при } x<2,\\ \dfrac{x}{|3-x|+1} & \text{при } x\geqslant 2.\end{cases}$ Найдите пределы этой функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6\cdot 4^n+1}{3\cdot 2^n+1}-2^{n+1}\right)$.

3. Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 4, разность между первым и третьим членами равна $\frac{7}{16}$, а знаменатель прогрессии является числом рациональным.

4^0. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}-\dfrac{4n^2+2n-6}{3(2n+1)}\right)$.

Вариант 5 **К-6**

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3+2|x|}{4x-1} & \text{при } x<0,\\ \dfrac{9x}{3x+2} & \text{при } x\geqslant 0.\end{cases}$ Найдите пределы этой функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}-n\right)$.

3. Найдите четвертый член бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами, если ее сумма равна $\frac{3}{4}$, а третий член равен $\frac{1}{9}$.

4^0. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+6+36+\ldots+6^{n-1}}{4\cdot 6^{n+2}+1}$.

Вариант 6 **К-6**

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{|x|-1} & \text{при } x\leqslant -5,\\ \dfrac{|x|-|7-x|}{3x+20} & \text{при } x>-5.\end{cases}$ Найдите пределы этой функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+5)}-\dfrac{(n+3)(n+4)}{n+5}\right)$.

3. Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна $\frac{4}{3}$, разность между первым и третьим членами равна 1,5, а знаменатель прогрессии является числом рациональным.

4^0. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right)$.

Контрольная работа № 7

Вариант 1 К-7

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+4x^2+6x+3}{2x^2+3x+1}$.

2. Дана функция $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{при } x < -1, \\ 2-x^2 & \text{при } -1 \leqslant x < 2, \\ -3 & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.
б) Найдите $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

3. Докажите, что уравнение $x^3 - 5x + 3 = 0$ на промежутке $[-3; -2]$ имеет корень. Найдите значение этого корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).
4. Докажите, что функция $g(x) = x^2 - 6x + 10$ необратима. Найдите функцию, обратную $g(x)$ на промежутке $[3; +\infty)$, и постройте ее график.
5. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2n-1)^2 - (2n)^2}{4n^2 - 3}$.

6^0. Найдите значения параметров a и b из условия

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4bx^2+5}{2x-1} + ax \right) = 1{,}5.$$

Вариант 2 К-7

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-7x}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+5x^2-7x+1}{2x^2+3x-5}$.

2. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{при } x \leqslant -2, \\ x^2+1 & \text{при } -2 < x < 2, \\ \frac{5}{x-1} & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.
б) Найдите $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.

3. Докажите, что уравнение $x^3 + x - 11 = 0$ на промежутке $[2; 3]$ имеет корень. Найдите значение этого корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).
4. Докажите, что функция $g(x) = x^2 + 8x + 10$ необратима. Найдите функцию, обратную данной на промежутке $(-\infty; -4]$, и постройте ее график.

5. Найдите $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^2-4^2+6^2-8^2+\ldots+(4k-2)^2-(4k)^2}{4k^2+3k+4}$.

6^0. При каких значениях a функция

$$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{2x^2-6x}{x-3} & \text{при } x<3,\\ ax+2 & \text{при } x\geqslant 3\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x=3$?

Вариант 3 **К-7**

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x+5}{2x^2-5x-7}$.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{при } x<-2,\\ \sqrt{x+3} & \text{при } -2\leqslant x\leqslant 6,\\ -1 & \text{при } x>6.\end{cases}$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.
б) Найдите $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$.

3. Докажите, что уравнение $2x^3-5x+1=0$ на промежутке $[0;\ 1]$ имеет корень. Найдите значение корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).

4. Составьте функцию, обратную функции $g(x)=3+\sqrt{x-4}$, и постройте ее график.

5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6^2-9^2+12^2-15^2+\ldots+(6n)^2-(6n+3)^2}{18n^2+7}$.

6^0. При каком значении a функция

$$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{при } |x|<1,\\ 4x-a & \text{при } |x|\geqslant 1\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x=1$?

Вариант 4 **К-7**

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{3}{x\sqrt{x}-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-5x+2}{3x^2-5x+2}$.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{при } x<-1,\\ |x-1| & \text{при } -1\leqslant x<2,\\ \frac{2-3x}{x} & \text{при } x\geqslant 2.\end{cases}$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.
б) Найдите пределы этой функции при $x\to 3$, $x\to 0$, $x\to -105$.

3. Докажите, что уравнение $3x^3-6x-5=0$ на промежутке $[1; 2]$ имеет корень. Найдите значение корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).
4. Докажите, что функция $g(x)=-x^2+8x-10$ необратима. Найдите функцию, обратную ей на луче $[4; +\infty)$, и постройте ее график.
5. Найдите $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots+(2k)^2-(2k+1)^2}{3k-2k^2}$.

6^0. Найдите постоянные a и b из условия:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

Вариант 5 **К-7**

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+4x+1}{3x^2+5x+2}$.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x} & \text{при } x<0,\\ \dfrac{2x+10}{3x+1} & \text{при } 0\leqslant x<2,\\ 3 & \text{при } x\geqslant2.\end{cases}$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.
б) Вычислите пределы этой функции при $x\to10$, $x\to-10$, $x\to1$.

3. Докажите, что уравнение $3x^3-2x^2+2=0$ на промежутке $[-1; 0]$ имеет корень. Вычислите значение корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).
4. Докажите, что функция $g(x)=\sqrt{x+5}-4$ обратима. Составьте $g^{-1}(x)$ и постройте график обратной функции.
5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^2-5^2+6^2-7^2+\ldots+(2n+2)^2-(2n+3)^2}{4n-6n^2}$.
6. При каких значениях b функция
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-12x}{x-4} & \text{при } x<4,\\ b^2x-4 & \text{при } x\geqslant4\end{cases}$$
будет непрерывной в точке $x=4$?

Вариант 6 **К-7**

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to17}\dfrac{4-\sqrt{x-1}}{x^2-17x}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3+4x^2-x-2}{3x^2+7x+2}$.

2. Дана функция $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{5}{x} & \text{при } x\leqslant-1,\\ -6x & \text{при } -1<x\leqslant0,\\ 0 & \text{при } x>0.\end{cases}$

а) Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график.

б) Вычислите пределы этой функции при $x \to 3$, $x \to -0{,}5$, $x \to -5$.

3. Докажите, что уравнение $2x^3+3x-4=0$ на промежутке $[0;\ 1]$ имеет корень. Найдите значение этого корня с точностью до 0,1 (используйте микрокалькулятор).
4. Является ли функция $g(x)=3-2x-x^2$ обратимой функцией? Составьте функцию $g^{-1}(x)$ на промежутке $(-\infty;\ -1]$ и постройте график полученной функции.
5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+(2n+1)^2-(2n+2)^2}{3n-7n^2}$.

6^0. При каких значениях c и d

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{cx^3+7}{3x^2-4}+d(x-1)\right)=2?$$

Самостоятельная работа № 8

Вариант 1 **С-8**

1. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенные значения выражений: а) $3{,}013^3$; б) $\sqrt[3]{27{,}018}$. Ответы проверьте на микрокалькуляторе.
2. Найдите значения производной функции $y=|x+3|$ в точках $x=0$, $x=-3$.
3. При каких значениях $n\in \boldsymbol{N}$ $\left|\dfrac{3n}{2n-1}-1{,}5\right|<0{,}02$?

Вариант 2 **С-8**

1. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенные значения выражений: а) $4{,}007^4$; б) $\sqrt[4]{16{,}47}$. Ответы проверьте на микрокалькуляторе.
2. Найдите $f'(a)$, если $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ и функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0=a$.
3. Не пользуясь понятием предела, докажите, что последовательность $\left(\dfrac{n^2-3n+5}{n^2+1}\right)$ ограниченная.

Вариант 3 **С-8**

1. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенные значения выражений: а) $2{,}003^5$; б) $\sqrt[5]{243{,}33}$. Ответы проверьте на микрокалькуляторе.
2. Найдите значения производной функции $y=|x-1|+|x|$ в точках $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$.
3. Докажите, что последовательность $\left(\dfrac{5n+3}{2n+3}\right)$ возрастающая.

Вариант 4 **С-8**

1. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенные значения выражений: а) $2{,}007^3$; б) $\sqrt[3]{27{,}57}$. Ответы проверьте на микрокалькуляторе.

2. Докажите, что функция $f(x)=|x-a|\,\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0=a$ и $\varphi(a)\neq 0$, не имеет производной в точке $x_0=a$.
3. При каких значениях $n\in N$ $\left|\frac{7n+13}{3n+3}-2\frac{1}{3}\right|<0{,}03$?

Вариант 5 **С-8**

1. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенные значения выражений: а) $2{,}013^4$; б) $\sqrt[4]{80{,}71}$. Ответы проверьте на микрокалькуляторе.
2. Найдите значения производной функции $y=\sqrt[5]{x^4}$ в точках $x_0=1$, $x_1=0$.
3. Не пользуясь понятием предела, докажите, что последовательность $\left(\frac{n^2+3n+4}{n^2+2}\right)$ ограниченная.

Вариант 6 **С-8**

1. Пользуясь понятием дифференциала, найдите приближенные значения выражений: а) $1{,}995^5$; б) $\sqrt[5]{31{,}79}$. Ответы проверьте на микрокалькуляторе.
2. Найдите $f'(a)$, если $f(x)=|x-a|\,\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная в точке $x_0=a$ функция и $\varphi(a)=0$.
3. Докажите, что последовательность $\left(\frac{3n+8}{2n-1}\right)$ убывающая.

Самостоятельная работа № 9

Вариант 1 **С-9**

1. Каково взаимное расположение касательной к графику функции $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ и прямой $y=3-2x$?
2. Докажите, что касательная к графику функции $y=2x^3$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ является асимптотой графика функции $y=\frac{6x^2+34x+22}{x+5}$.
3. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2$.

Вариант 2 **С-9**

1. Через точку $M(2;\,8)$ к кривой $y=x^3$ проведена касательная l. Найдите все общие точки прямой l и кривой $y=x^3$.
2. Докажите, что наклонная асимптота графика функции
$$y=\frac{2x^2+7x+4}{2x+3}$$
параллельна касательной к графику $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0=0{,}25$.
3. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{n}k(2k+1)$.

Вариант 3 **С-9**

1. Каково взаимное расположение касательной к графику функции $y=x^3$ в точке с абсциссой $x_0=1$ и прямой $y=3x+5$?
2. Найдите точку пересечения касательной к графику функции $y=x^2+3$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ и наклонной асимптоты графика функции $y=\frac{4x^2+8x+3}{2x+4}$.
3. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^3$.

Вариант 4 **С-9**

1. При каком значении a прямая $y=3x+a$ является касательной к графику функции $y=x^3$?
2. Найдите координаты точки пересечения касательной к графику функции $y=3-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-3$ и асимптоты графика функции $y=\frac{3x^2+3x+4}{x^2-2x+17}$.
3. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{n}k(3k-1)$.

Вариант 5 **С-9**

1. Каково взаимное расположение касательной к графику функции $y=4-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=2$ и прямой $y=8-4x$?
2. Найдите координаты точек пересечения касательной к графику функции $y=7-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=3$ с асимптотами графика функции $y=\frac{x^3-2x^2+3}{x^2-4x+3}$.
3. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(k+1)$.

Вариант 6 **С-9**

1. Является ли прямая $y=6x+4$ касательной к графику функции $y=2x^3$? Если является, то найдите координаты точки касания. Найдите все общие точки прямой $y=6x+4$ и кривой $y=2x^3$.
2. Докажите, что касательная к графику функции $y=x^2-4$ в точке с абсциссой $x_0=-2$ и наклонная асимптота графика функции $y=\frac{8x^2-4x+9}{3-2x}$ параллельны.
3. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{n}(3k-2)^2$.

Контрольная работа № 8

Вариант 1 **К-8**

1. Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$s(t)=t^3-\frac{3t^2}{2}+2t-1 \text{ (см)}.$$

а) Найдите ее скорость в момент времени $t=3$ с.

б) В какой момент времени ускорение будет равно 9 см/с^2?

2. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}+2}{x}$.
3. Дана функция $\varphi(x)=\frac{x+2}{3-x}$. К ее графику в точке $x_0=2$ проведена касательная l.

   а) Напишите уравнение касательной l.

   б) Существует ли касательная к графику функции φ, отличная от l и параллельная l? Если существует, найдите ее уравнение.
4. Дана функция $g(x)=3x(2x-1)^5$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x)>0$; в) $g'(x)\leqslant 0$.
5. Дифференцируема ли функция $y=\left|\frac{x^2-1}{1-x}\right|$ в области ее определения?

6^0. Известно, что $(x-2)^{50}=a_0x^{50}+a_1x^{49}+...+a_{49}x+a_{50}$. Найдите сумму $50a_0+49a_1+...+2a_{48}+a_{49}$.

Вариант 2 **К-8**

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t)=2t^3-2{,}5t^2+3t+1 \text{ (м)}.$$

   а) Найдите скорость точки в момент времени $t=1$ с.

   б) В какой момент времени ускорение будет равно 19 м/с^2?
2. Найдите $f'(4)$, если $f(x)=\frac{32-2x^2\sqrt{x}}{x^2}$.
3. Дана функция $\varphi(x)=\frac{1-x}{x+4}$. К ее графику проведена касательная m в точке с абсциссой $x_0=-3$.

   а) Напишите уравнение касательной m.

   б) Существует ли касательная к графику функции φ, отличная от m и параллельная m? Если существует, найдите ее уравнение.
4. Дана функция $g(x)=2x(1-x)^5$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x)\geqslant 0$; в) $g'(x)<0$.
5. Докажите, что функция $y=|1-x^2|$ в точках $x=1$ и $x=-1$ недифференцируема.

6^0. Известно, что $(3-2x)^{40}=a_0x^{40}+a_1x^{39}+...+a_{39}x+a_{40}$. Найдите сумму $40\cdot 39a_0+39\cdot 38a_1+...+3\cdot 2a_{37}+2a_{38}$.

Вариант 3 **К-8**

1. Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$s(t)=t^3+\frac{3t^2}{2}-4t+3 \text{ (м)}.$$

   а) Найдите ее скорость в момент времени $t=2$ с.

б) В какой момент времени ускорение будет равно 9 м/с^2?

2. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=\frac{x\sqrt{x}+4x}{2\sqrt{x}}$.
3. К графику функции $\varphi(x)=\frac{x-3}{4-x}$ в точке с абсциссой $x_0=3$ проведена касательная l.
   а) Напишите уравнение касательной l.
   б) Существует ли касательная к графику функции φ, отличная от l и параллельная l? Если существует, найдите ее уравнение.
4. Дана функция $g(x)=2x(1-3x)^7$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x)\geqslant 0$; в) $g'(x)<0$.
5. Докажите, что функция $y=\sqrt{81-18x^2+x^4}$ в точках 3 и -3 недифференцируема.

6^0. Известно, что $3(4x-3)^{30}=b_0x^{30}+b_1x^{29}+\ldots+b_{29}x+b_{30}$. Найдите $30b_0+29b_1+\ldots+2b_{28}+b_{29}$.

Вариант 4 **К-8**

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t)=2t^3+\frac{5t^2}{2}-7t+3 \text{ (см)}.$$

   а) Найдите ее скорость в момент времени $t=1$ с.
   б) В какой момент времени ускорение будет равно 11 см/с^2?
2. Найдите $f'(9)$, если $f(x)=\frac{243x-2x^3\sqrt{x}}{x^3}$.
3. К графику функции $\varphi(x)=\frac{2-x}{x+3}$ в точке с абсциссой $x_0=-4$ проведена касательная m.
   а) Напишите уравнение касательной m.
   б) Существует ли касательная к графику функции φ, отличная от m и параллельная m? Если существует, найдите ее уравнение.
4. Дана функция $g(x)=2x(3x-1)^5$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x)>0$; в) $g'(x)\leqslant 0$.
5. Докажите, что в точках 2 и -2 функция $y=\sqrt{x^4-8x^2+16}$ недифференцируема.

6^0. Известно, что $3(3x+4)^{20}=c_0x^{20}+c_1x^{19}+\ldots+c_{19}x+c_{20}$. Найдите $20\cdot 19c_0-19\cdot 18c_1+\ldots-3\cdot 2c_{17}+2c_{18}$.

Вариант 5 **К-8**

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+0{,}5 \text{ (м)}.$$

а) Найдите ее скорость в момент времени $t=3$ с.

б) В какой момент времени ускорение будет равно 4 м/с^2?

2. Найдите $f'(9)$, если $f(x)=\dfrac{27\sqrt{x}+8x^2}{x\sqrt{x}}$.

3. К графику функции $\varphi(x)=\dfrac{3-x}{x+4}$ в точке с абсциссой $x_0=-3$ проведена касательная m.

   а) Напишите уравнение касательной m.

   б) Существует ли касательная к графику функции $\varphi(x)$, отличная от m и параллельная m? Если существует, найдите ее уравнение.

4. Дана функция $g(x)=2x(3x+4)^5$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x)\geqslant 0$; в) $g'(x)<0$.

5. Дана функция $h(x)=x|x|$.

   а) Найдите $h'(3)$, $h'(-5)$.

   б) Пользуясь определением производной, найдите $h'(0)$.

6^0. Известно, что $4(2x+1)^{15}=a_0x^{15}+a_1x^{14}+\ldots+a_{14}x+a_{15}$. Найдите $15a_0-14a_1+\ldots-2a_{13}+a_{14}$.

Вариант 6 **К-8**

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t)=6t^3+2t-7 \text{ (м)}.$$

   а) Найдите ее скорость в момент времени $t=3$ с.

   б) В какой момент времени ускорение будет равно 54 м/с^2?

2. Найдите $f'(1)$, если $f(x)=\dfrac{2x-x^4\sqrt{x}+1}{x^4}$.

3. К графику функции $\varphi(x)=\dfrac{x+2}{3+x}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$ проведена касательная l.

   а) Напишите уравнение касательной l.

   б) Существует ли касательная к графику функции φ, отличная от l и параллельная l? Если существует, найдите ее уравнение.

4. Дана функция $g(x)=3x(5x-4)^3$. Найдите все значения x, при которых: а) $g'(x)=0$; б) $g'(x)>0$; в) $g'(x)\leqslant 0$.

5. Дана функция $h(x)=2x+|x-1|$.

   а) Найдите $h'(0)$, $h'(3)$.

   б) Пользуясь определением производной, докажите, что функция h недифференцируема в точке $x_0=1$. Является ли функция непрерывной в точке $x_0=1$?

6^0. Известно, что $(3x-2)^{25}=B_0x^{25}+B_1x^{24}+B_2x^{23}+\ldots+B_{23}x^2+B_{24}x+B_{25}$. Найдите $25\cdot 24B_0+24\cdot 23B_1+23\cdot 22B_2+\ldots+2B_{23}$.

Самостоятельная работа № 10

Вариант 1 **С-10**

1. Найдите промежутки возрастания, убывания, экстремумы, промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y=-\frac{1}{3}x^3+5x^2+12$.
2. Найдите экстремумы функции $y=2x^2-\sqrt{x}$.
3. Через точку $M(0; 3)$ к графику функции $y=\frac{1}{x}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

Вариант 2 **С-10**

1. Найдите промежутки возрастания, убывания, экстремумы, промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y=2x^3+3x^2-12x+5$.
2. Найдите экстремумы функции $y=x^2(\sqrt{x}-1)$.
3. Через точку $M(2; 0)$ к графику функции $y=3-x^2$ проведены касательные. Напишите уравнения этих касательных.

Вариант 3 **С-10**

1. Найдите промежутки возрастания, убывания, экстремумы, промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y=\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+12x+16$.
2. Найдите экстремумы функции $y=x^2\sqrt{1-2x}$.
3. Через точку $M(-1; 0)$ к графику функции $y=\sqrt{2x-1}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

Вариант 4 **С-10**

1. Найдите промежутки возрастания, убывания, экстремумы, промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$.
2. Найдите экстремумы функции $y=(2-x)\sqrt{x^2+x+1}$.
3. Через точку $M(2; 0)$ к графику функции $y=\sqrt{1-x}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

Вариант 5 **С-10**

1. Найдите промежутки возрастания, убывания, экстремумы, промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y=-\frac{2}{3}x^3-4x^2+13$.
2. Найдите экстремумы фунции $y=8x^2-\sqrt{2x}$.
3. Через точку $M(0; 2)$ к графику функции $y=\frac{2}{x}$ проведена касательная. Напишите уравнение этой касательной.

Вариант 6 **С-10**

1. Найдите промежутки монотонности, экстремумы, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции $y=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-12x+18$.
2. Найдите экстремумы функции $y=4x^2\sqrt{1-4x}$.
3. Через точку $M(1;\ 3)$ к графику функции $y=\sqrt{1-x}$ проведена касательная. Напишите уравнение этой касательной.

Контрольная работа № 9

Вариант 1 **К-9**

1. Дайте определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Докажите теоремы о непрерывности суммы и произведения двух непрерывных в точке функций.
2. Исследуйте функцию и постройте ее график: $y=\frac{x^2}{x+1}$.
3. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, разность прогрессии $d\geqslant 0{,}5$. При каком значении d произведение первого, четвертого и пятого членов будет наибольшим?

4^0. Докажите, что функция $y=0{,}2x^5+x^4+2x^3+2x^2+5x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 2 **К-9**

1. Дайте определение производной функции в точке. Докажите теорему о производной суммы двух дифференцируемых функций.
2. Исследуйте функцию и постройте ее график: $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.
3. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

4^0. Докажите, что функция $y=-0{,}2x^5+0{,}5x^4-x^3+x^2-x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 3 **К-9**

1. Дайте определение критических точек и точек экстремума. Докажите теорему о достаточном условии существования экстремума.
2. Исследуйте функцию и постройте ее график: $y=\frac{x+2}{x^3}$.
3. Число 180 представьте в виде суммы трех неотрицательных слагаемых так, чтобы два из них относились как $1:2$, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

4^0. Докажите что функция $y=-0{,}2x^5+0{,}5x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 4 **К-9**

1. Дайте определение предела функции в точке. Докажите теорему о непрерывности дифференцируемой в данной точке функции.

2. Исследуйте функцию и постройте ее график: $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.
3. Число 8 представьте в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма квадратов множителей была наименьшей.
4. Докажите, что функция $y=0{,}8x^5-x^4+3x^3-2x^2+4x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 5 **К-9**

1. Докажите теорему о производной степени и произведения двух функций.
2. Исследуйте функцию и постройте ее график: $y=\frac{x^2}{x-1}$.
3. В арифметической прогрессии второй член равен 6. При каком значении разности прогрессии $d\leqslant 2$ произведение первого, третьего и шестого членов прогрессии будет наименьшим?
4. Докажите, что функция $y=0{,}2x^5-1{,}5x^4+7\frac{2}{3}x^3-21x^2+52x+7$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Вариант 6 **К-9**

1. Докажите теорему о производной частного.
2. Исследуйте функцию и постройте ее график: $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.
3. Разность двух положительных чисел равна 13,75. Каковы должны быть эти числа, чтобы разность между удвоенным квадратом большего числа и кубом меньшего числа была наибольшей?
4. Докажите, что функция $y=-0{,}8x^5-3x^4+2\frac{1}{3}x^3+12x^2-16x+8$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Самостоятельная работа № 11

Вариант 1 **С-11**

1. Докажите неравенство $\left(\frac{a+b}{2}\right)^7\leqslant\frac{a^7+b^7}{2}$, $a>0$, $b>0$.
2. Найдите разложение бинома $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.
3. Упростите выражение
$$(3-2x)^4+8x(3-2x)^3+24x^2(3-2x)^2+32x^3(3-2x)+16x^4.$$

Вариант 2 **С-11**

1. Докажите неравенство $\left(\frac{a+3}{2}\right)^5\leqslant\frac{a^5+243}{2}$, $a>0$.
2. Найдите разложение бинома $(a^2-a^{-1})^7$.
3. Упростите выражение
$$(2x-1)^4-8x(2x-1)^3+24x^2(2x-1)^2-32x^3(2x-1)+16x^4.$$

Вариант 3 **С-11**

1. Докажите неравенство $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-3} \leqslant \frac{a^{-3}+b^{-3}}{2}$, $a>0$, $b>0$.
2. Найдите разложение бинома $(b^2+b^{-1})^6$.
3. Упростите выражение
$$(2-3x)^4+12x(2-3x)^3+54x^2(2-3x)^2+108x^3(2-3x)+81x^4.$$

Вариант 4 **С-11**

1. Докажите неравенство $(0{,}5a+1)^4 \leqslant \frac{a^4+16}{2}$, $a>0$.
2. Найдите разложение бинома $(a^3+a^{-2})^7$.
3. Упростите выражение
$$(2x+1)^5-10x(2x+1)^4+10x^2(2x+1)^3-80x^3(2x+1)^2+$$
$$+80x^4(2x+1)-32x^5.$$

Вариант 5 **С-11**

1. Докажите неравенство $\left(\frac{2c+1}{4}\right)^3 \leqslant \frac{8c^3+1}{16}$, $c>0$.
2. Найдите разложение бинома $(2a-a^{-1})^7$.
3. Упростите выражение
$$(3x-1)^4-12x(3x-1)^3+54x^2(3x-1)^2-108x^3(3x-1)+81x^4.$$

Вариант 6 **С-11**

1. Докажите неравенство $\left(\frac{1+3b}{6}\right)^{-3} \leqslant \frac{27+b^{-3}}{2}$, $b>0$.
2. Найдите разложение бинома $(x^{-3}-2x^2)^6$.
3. Упростите выражение
$$(4x-3)^4-16x(4x-3)^3+96x^2(4x-3)^2-256x^3(4x-3)+256x^4.$$

Контрольная работа № 10

Вариант 1 **К-10**

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$ и $\frac{2\pi}{3}<\alpha<2\pi$. Найдите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
2. Упростите выражение $\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha} : \left(1+\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right)$.

3. Дана функция $f(x)=\sin\frac{3}{2}x+5\cos\frac{3}{4}x$.
   а) Найдите $f(0)$, $f(7\pi)$, $f(-12\pi)$.
   б) Покажите, что число 8π является периодом этой функции.
   в) Найдите основной период функции f.
4. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$\varphi(x)=x^3+2\sin x+\operatorname{ctg} x.$$
5. Решите уравнение $2\sin^3 x+3\sin^2 x-2\sin x=0$.
6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. Постройте график этой функции.
7^0. Докажите, что $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)<\frac{m^4+1}{m^2}$.

Вариант 2 **К-10**

1. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите значения $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.
2. Упростите выражение $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$.
3. Дана функция $f(x)=\sin 2x+5\cos 4x$.
   а) Найдите $f(0)$, $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.
   б) Покажите, что число 3π является периодом функции f.
   в) Найдите наименьший положительный период функции f.
4. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$\varphi(x)=-3x^2+2\cos x+3x\sin x.$$
5. Решите уравнение $2\cos^3 x+5\cos^2 x-3\cos x=0$.
6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Постройте график этой функции.
7^0. Докажите, что
$$\left|\frac{\sec x-\cos x}{\operatorname{tg} x+1}+\frac{\operatorname{cosec} x-\sin x}{\operatorname{ctg} x+1}\right|>\frac{1}{2}.$$

Вариант 3 **К-10**

1. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
2. Упростите выражение $\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

3. Дана функция $f(x)=3\operatorname{tg}\frac{3}{4}x+5\cos 2x$.

а) Найдите $f(0)$, $f(8\pi)$, $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

б) Покажите, что число 8π является периодом функции f.

в) Найдите наименьший положительный период функции f.

4. Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$\varphi(x)=3x\,|x|-2\sin x+3\operatorname{tg} x.$$

5. Решите уравнение $2\sin^3 x-3\sin^2 x-2\sin x=0$.

6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. Постройте график этой функции.

7^0. Докажите, что

$$\frac{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\sec^2 x+\operatorname{tg} x}-\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}<\frac{a^4+1}{2a^2}.$$

Вариант 4 **К-10**

1. Известно, что $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите значения $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

3. Дана функция $f(x)=4\operatorname{ctg} 3x+5\sin 4x$.

а) Найдите $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

б) Покажите, что число 3π является периодом функции f.

в) Найдите наименьший положительный период функции f.

4. Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$\varphi(x)=3(x^2-1)-2\,|\sin x|+x^3\operatorname{tg} x.$$

5. Решите уравнение $2\cos^3 x+5\cos^2 x+2\cos x=0$.

6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Постройте график этой функции.

7^0. Докажите, что $(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(1+\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha-1)\leqslant 1$.

Вариант 5 **К-10**

1. $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $a<0$. Найдите значения остальных тригонометрических функций.

2. Докажите, что если $A=\frac{1}{1-\sin\alpha}$, а $B=\frac{1}{1+\sin\alpha}$, то $4A^2B^2-$ $-2AB=A^2+B^2$.
3. Дана функция $f(x)=\cos 4x-2{,}5\sin 2x$.
   а) Найдите $f(0)$, $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.
   б) Докажите, что число 5π является периодом функции f.
   в) Найдите основной период функции f.
4. Исследуйте на четность и нечетность функцию $\varphi(x)=\cos\frac{x^2-x}{x-1}$.
5. Решите уравнение $2\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x=0$.
6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$. Постройте график этой функции.

7^0. Докажите, что $\left|\frac{1-\cos^2 x}{\sin x+\cos x}+\frac{1-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\right|>0{,}5$.

Вариант 6 **К-10**

1. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2a}{a^2-1}$, где $a<-1$. Найдите значения остальных тригонометрических функций.
2. Докажите, что если $M=\sec\alpha+1$, а $N=\sec\alpha-1$, то $M^2-4=$ $=N(2M-N)$.
3. Дана функция $f(x)=2\sin 2{,}5x-3\cos 0{,}75x$.
   а) Найдите $f(0)$, $f(5\pi)$, $f(-10\pi)$.
   б) Покажите, что число 16π является периодом f.
   в) Найдите основной период функции f.
4. Исследуйте на четность и нечетность функцию
$$\varphi(x)=\sin\frac{x^{31}-x^{29}}{x^2-1}.$$
5. Решите уравнение $4\sin^3 x=\sin x$.
6. Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонического колебания, заданного формулой $y=-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. Постройте график этой функции.

7^0. Докажите, что $\left|\frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}\right|<\frac{b^4+1}{2b^2}$.

Самостоятельная работа № 12

Вариант 1 **С-12**

1. Упростите выражение $\cos(\pi+2\alpha)+\sin(\pi+2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.
2. Решите уравнение $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=1$.

3. Найдите основной период функции $y=1-8\sin^2 x\cos^2 x$.

4. Проверьте равенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sin\frac{\alpha}{4},\ \text{если}\ \pi<\alpha<2\pi.$$

Вариант 2 **С-12**

1. Упростите выражение $\sin(\pi-2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-2\alpha)$.

2. Решите уравнение $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=\sqrt{3}$.

3. Найдите наименьший положительный период функции

$$y=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x.$$

4. Проверьте равенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\cos\frac{\alpha}{4},\ \text{если}\ \pi<\alpha<2\pi.$$

Вариант 3 **С-12**

1. Упростите выражение $\sin(\pi+2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi+2\alpha)$.

2. Решите уравнение $\sin 3x+\cos 3x=-\sqrt{2}$.

3 Найдите наименьший положительный период функции

$$y=\sin 2x\,\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

4. Проверьте равенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=-\cos\frac{\alpha}{4},\ \text{если}\ 3\pi<\alpha<4\pi.$$

Вариант 4 **С-12**

1. Упростите выражение $\cos(\pi-2\alpha)-\sin(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Решите уравнение $\cos 5x-\sin 5x=-1$.

3. Найдите наименьший положительный период функции

$$y=\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x.$$

4. Проверьте равенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sin\frac{\alpha}{4},\ \text{если}\ 3\pi<\alpha<4\pi.$$

Вариант 5 **С-12**

1. Упростите выражение $\cos(\pi+2\alpha)+\cos(1{,}5\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Решите уравнение $\cos 5x-\sqrt{3}\sin 5x=-1$.

3. Найдите основной период функции $f(x)=16\sin^2 x\cos^2 x-1$.

4. Проверьте равенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sin\frac{\alpha}{2},\text{ если } \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

Вариант 6 **С-12**

1. Упростите выражение $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.
2. Решите уравнение $\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}$.
3. Найдите основной период функции $y=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\cos 2x$.
4. Проверьте равенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=-\cos\frac{\alpha}{2},\text{ если } \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi.$$

Контрольная работа № 11

Вариант 1 **К-11**

1. Докажите тождество $\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.
2. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}+1$.
3. Решите уравнение $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.
4. Проверьте равенство $\frac{1}{\sin 10°}-4\sin 70°=2$.
5. Найдите угол между асимптотой графика функции $y=\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+1}$ и касательной к этому графику в точке с абсциссой $x_0=1$.

6^0. Докажите тождество

$$1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}.$$

Вариант 2 **К-11**

1. Докажите тождество $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$.
2. Найдите $\sin(\alpha-2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$, $\operatorname{tg}\beta=-0{,}75$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
3. Решите уравнение $\cos 2x+\cos x=\sin 3x$.
4. Проверьте равенство $\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\sqrt{3}$.
5. Найдите угол между наклонной асимптотой графика функции

$$y=\frac{2x^2-4x+7}{x+3}$$

и касательной к этому графику, проведенной в точке с абсциссой $x_0=-1$.

6^0. Докажите тождество

$$1-2\cos 4\alpha+2\cos 8\alpha-2\cos 12\alpha=-\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Вариант 3 **К-11**

1. Докажите тождество $\dfrac{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.
2. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=1-\sqrt{2}$.
3. Решите уравнение $\cos 2x-\cos 3x=\sin 5x$.
4. Проверьте равенство $4\cos 20°=\sqrt{3}\operatorname{ctg} 20°-1$.
5. Найдите угол между наклонной асимптотой графика функции $y=\dfrac{3x^2-5x+6}{x-4}$ и касательной к графику этой функции, проведенной в точке с абсциссой $x_0=1$.

6^0. Докажите тождество

$$\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\ldots+\frac{1}{\cos 9x\cos 10x}=\frac{2\sin 9x}{\sin 2x\cos 10x}.$$

Вариант 4 **К-11**

1. Докажите тождество $\dfrac{\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$.
2. Найдите $\cos(2\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.
3. Решите уравнение $\cos 3x+\cos 2x=\sin 5x$.
4. Вычислите без применения таблиц $\cos\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{3\pi}{10}$.
5. Найдите угол между касательной к графику функции

$$y=\frac{2x^3-5x^2+4}{x^2-2x+2},$$

проведенной в точке с абсциссой $x_0=0$, и асимптотой графика этой функции.

6^0. Докажите тождество

$$8\operatorname{ctg} 24\alpha+4\operatorname{tg} 12\alpha+2\operatorname{tg} 6\alpha+\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{ctg} 3\alpha.$$

Вариант 5 **К-11**

1. Докажите тождество $\dfrac{(1+\operatorname{tg} 2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg} 2\alpha}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

2. Найдите $\cos(2\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{3}{4}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.
3. Решите уравнение $\sin 2x+\sin x=\sin 3x$.
4. Проверьте равенство $\operatorname{ctg}70°-\sqrt{3}=-4\cos 70°$.
5. Найдите угол между касательной к графику функции $y=\frac{2x^2+6x+7}{x+2}$, проходящей через точку $A(-2;\ 4)$, и наклонной асимптотой графика этой функции.

6^0. Докажите тождество

$$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha=\frac{\sin 5\alpha\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha}.$$

Вариант 6 **К-11**

1. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$.
2. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=3-\sqrt{2}$.
3. Решите уравнение $\sin 3x+\sin 2x=\sin 5x$.
4. Проверьте равенство $\dfrac{1-2\cos 80°}{\cos 80°}=4\cos 20°$.
5. Найдите угол между наклонной асимптотой графика функции

$$y=\frac{x^2-5x+20}{x-5}$$

и касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=1$.

6^0. Докажите тождество

$$\frac{1}{\cos 2x\cos 4x}+\frac{1}{\cos 4x\cos 6x}+\frac{1}{\cos 6x\cos 8x}+\ldots+\frac{1}{\cos 18x\cos 20x}=$$
$$=\frac{2\sin 18x}{\sin 4x\cos 20x}.$$

Самостоятельная работа № 13

Вариант 1 **С-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin 3x+\sin 4x}{x^2\sin 3x}$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=1+\sin^2 2x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{6}$.
3. Найдите $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{\pi-2}{6}\right)$, если:

а) $f(x)=\dfrac{1-4\sin x}{2-3\cos x}$;

б) $g(x)=x\sin(3x+1)+2\operatorname{ctg}(3x+1)$.

4. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}.$$

Вариант 2 **С-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-2\cos x+\cos 4x}{x^2\cos x}$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=1+\cos^2 2x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{3}$.
3. Найдите $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{\pi-3}{2}\right)$, если:

   а) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x-2}$;

   б) $g(x)=x\cos(2x+3)-3\operatorname{tg}(2x+3)$.
4. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\operatorname{ctg} 2x(1+\operatorname{tg} 2x)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}.$$

Вариант 3 **С-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-\sin 2x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\cos x}$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\sin^2 3x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{2}$.
3. Найдите $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{3\pi+2}{6}\right)$, если:

   а) $f(x)=\frac{2\cos x+\sin x}{3\sin x-\cos x}$;

   б) $g(x)=4\operatorname{ctg}(1-3x)-x\sin(3x-1)$.
4. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{\cos^2(-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)}.$$

Вариант 4 **С-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\sqrt{2}-\cos 2x-\sin 2x}{(8x-\pi)^2}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\cos^2 3x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{3}$.

3. Найдите $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{5-3\pi}{2}\right)$, если:

а) $f(x)=\frac{2\cos x-3\sin x}{1+4\cos x}$;

б) $g(x)=3\operatorname{tg}(5-2x)-x\cos(5-2x)$.

4. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi+x)}{\operatorname{ctg}(\pi-x)}.$$

Вариант 5 **С-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\sin 2x-0{,}5\cos x+0{,}5\cos^2 5x}{5x^2\cos x}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=2\cos^2 2x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{2}$.

3. Даны функции:

а) $f(x)=x\sin(2x+4)+2\operatorname{ctg}(2x+4)$;

б) $g(x)=\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos x-2}$.

Найдите $f'\left(\frac{\pi-8}{4}\right)$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(\pi-x)\cdot\sin(2\pi+x)}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Вариант 6 **С-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 4x-2\cos 2x}{\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)^2\cos 2x}+\frac{4x}{\pi}\right)$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=3-2\sin^2 3x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{12}$.

3. Даны функции:

а) $f(x)=\frac{3\cos 2x-2\sin 2x}{1-4\sin 2x}$;

б) $g(x)=3\operatorname{ctg}(2x-5)+x\sin(2x-5)$.

Найдите $f'(\pi)$, $g'\left(\frac{\pi+10}{4}\right)$.

4. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(\pi-2x)(1-\operatorname{tg} 2x)}{1+\operatorname{ctg}(\pi-2x)}.$$

Контрольная работа № 12

Вариант 1 К-12

1. Решите уравнение $2\sin(5x+3)+3\cos^2(5x+3)=3{,}25$.
2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\sin(4x-2)$ и $y=-\cos(3x+5)$.
3. Решите уравнение $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$.
4. Докажите, что при $a>0$, $b>0$ уравнение

$$a\sin 5x+2\sqrt{ab+b^2}\cos 5x+2a=-4b$$

не имеет решений.

5. Найдите $\alpha+\beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}75$, $\operatorname{tg}\beta=7$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.

6^0. Решите уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=1\frac{3}{4}.$$

Вариант 2 К-12

1. Решите уравнение $2\cos(3x+5)+3\sin^2(3x+5)=3\frac{1}{4}$.
2. При каких значениях x функции $y=\operatorname{tg}(4x+3)$ и $y=\operatorname{ctg}(x+5)$ принимают равные значения?
3. Решите уравнение $2\cos^2 2x+\cos x+\cos 9x=1$.
4. Докажите, что уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=5$$

не имеет решений.

5. Найдите $\alpha-\beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}6$, $\operatorname{ctg}\beta=4$; $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, $2\pi<\beta<2\frac{1}{2}\pi$.

6^0. Решите уравнение

$$\sin^2 2x+\cos^2 4x+2\sin 2x=3+2\cos 4x+2\sin 2x\cos 4x.$$

Вариант 3 К-12

1. Решите уравнение $4\cos(4x-1)+12\sin^2(4x-1)=11$.
2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\cos(5x-2)$ и $y=-\sin(4x+1)$.
3. Решите уравнение $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.
4. Докажите, что уравнение

$$a\sin 7x+2\sqrt{18-3a}\cos 7x=18-2a+3\sin 7x$$

не имеет решений.

5. Найдите $\alpha+\beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}75$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

6^0. Решите уравнение

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=-0{,}5.$$

Вариант 4 **К-12**

1. Решите уравнение $4\sin(5x+1)+7\cos^2(5x+1)=7\frac{1}{4}$.
2. При каких значениях x функции $y=\operatorname{ctg}(2x-3)$ и $y=\operatorname{tg}(7x+1)$ принимают равные значения?
3. Решите уравнение $2\sin^2 2x+\sin x+\sin 9x=1$.
4. Докажите, что уравнение

$$\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\operatorname{tg} 3x\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=3$$

не имеет решений.

5. Найдите $\alpha-\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=1\frac{2}{3}$; $\pi<\alpha<1{,}5\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

6^0. Решите уравнение

$$\sin^2 2x+\cos^2 4x-2\sin 2x=3-2\cos 4x+2\sin 2x\cos 4x.$$

Вариант 5 **К-12**

1. Решите уравнение $2\sin(2x+4)+5\cos^2(2x+4)=4{,}75$.
2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\operatorname{tg}(3-4x)$ и $y=\operatorname{ctg}(5-x)$.
3. Решите уравнение $2\cos^2 x+\cos 3x+\cos 4x=1$.
4. Докажите, что уравнение

$$a\sin 3x+2\sqrt{2a^2+6a+4}\cos 3x=-6a-8$$

не имеет решений.

5. Найдите $2\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

6^0. Решите уравнение

$$\sin^2 3x+\cos^2 6x+3\sin 3x+2=3\cos 6x+2\sin 3x\cos 6x.$$

Вариант 6 **К-12**

1. Решите уравнение $3\cos(2x+1)-3\sin^2(2x+1)=-3{,}75$.
2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y=\cos(x^2-5x+1) \text{ и } y=\sin(2x-x^2).$$

3. Решите уравнение $\sin^2\frac{5x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2 2x=2$.
4. Докажите, что уравнение

$$\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\operatorname{ctg} 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos 4x=4$$

не имеет решений.

5. Найдите $2\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$, $\operatorname{tg}\beta=7$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<1{,}5\pi$.

6^0. Решите уравнение

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=-\frac{1}{2}.$$

Самостоятельная работа № 14

Вариант 1 **С-14**

1. Может ли выражение $3\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha$ принимать значение: а) 4,45; б) $\sqrt{17}$ (используйте микрокалькулятор)?
2. Найдите множество значений функции
$$y=13\sin\left(\frac{\pi}{12}+4x\right)\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right).$$
При каких значениях x функция принимает наибольшее и наименьшее значения?
3. Решите неравенство $2+\cos 2x<3\cos x$.

Вариант 2 **С-14**

1. Докажите, что $\sin^{20}2x+\cos^{40}2x\leqslant 1$. При каких значениях x достигается равенство?
2. Используя микрокалькулятор, сравните значения функции
$$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$$
с числом 0,934.
3. Решите неравенство $\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x>3$.

Вариант 3 **С-14**

1. Докажите неравенство $4\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 4{,}5$. При каких значениях α достигается равенство?
2. Может ли функция $f(x)=8\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(2x+\frac{5\pi}{8}\right)$ принимать значение: а) $-3\sqrt{5}$; б) 1,18 (используйте микрокалькулятор)?
3. Решите неравенство $2\sin^2 2x+2\cos^2 x>3$.

Вариант 4 **С-14**

1. Решите неравенство $\cos^{15}x+\sin^{18}x\geqslant 1$.
2. Используя микрокалькулятор, сравните значения функции
$$y=4\sin\left(\frac{\pi}{12}-3x\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$$
с числом $\sqrt{7{,}469}$.
3. Решите неравенство $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\geqslant 2$.

Вариант 5 **С-14**

1. Докажите, что $|1+\sqrt{3}\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha|\leqslant\dfrac{a^4+1}{a^2}$.
При каких значениях a и α достигается равенство?
2. Используя микрокалькулятор, докажите, что значения функции

$y=6\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)$ заключены между числами $-2{,}224$ и $3{,}777$.

3. Решите неравенство $\sin 3x > 4\sin^2 x$.

Вариант 6 **С-14**

1. Докажите, что $\sin^{13}\alpha+\cos^{15}\alpha\leqslant 1$. При каких значениях α достигается равенство?
2. Используя микрокалькулятор, сравните значения функции

$y=4\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$ с $\operatorname{tg} 76°$.

3. Решите неравенство $\cos 3x+4\cos x<1$.

Контрольная работа № 13

Вариант 1 **К-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$.
2. Вычислите:

а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$; б) $\arcsin(\sin 5)$.

3. Решите неравенство $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Решите неравенство $\arcsin x<\arccos x$.

5^0. Решите неравенство $\sin 3x>\sin 5x$.

Вариант 2 **К-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\arcsin 2x)\operatorname{arctg} 2x}{(x^2-x)\arcsin 3x}$.
2. Вычислите:

а) $\cos\left(2\arcsin\frac{7}{25}\right)$; б) $\arccos(\cos 4)$.

3. Решите неравенство $\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x\leqslant\frac{1}{2}$.
4. Решите неравенство $\operatorname{arctg} x<\operatorname{arcctg} x$.

5^0. Решите неравенство $\cos^2 x-\cos^2 4x<0$.

Вариант 3 **К-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{4x-\pi}{3\arcsin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

2. Вычисите:

а) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$; б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}2)$.

3. Решите неравенство $\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\geqslant-\frac{1}{2}$.
4. Решите неравенство $\arccos x<\arcsin x$.
5^0. Решите неравенство $\cos 3x-\cos 2x\leqslant 0$.

Вариант 4 **К-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2x)\arcsin 5x}{x^2\cos 2x}$.
2. Вычислите:

а) $\cos\left(2\arccos\frac{24}{25}\right)$; б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}6)$.

3. Решите неравенство $\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Решите неравенство $\arccos(x^2-4x+3)>\frac{\pi}{2}$.
5^0. Решите неравенство $\sin 2x+\sin 4x\geqslant 0$.

Вариант 5 **К-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x\sin 4x}$.
2. Вычислите:

а) $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; б) $\arcsin(\sin 6)$.

3. Решите неравенство $\cos\frac{\pi}{6}\cos 3x-\sin\frac{\pi}{6}\sin 3x\geqslant-\frac{1}{2}$.
4. Решите неравенство $\arcsin\frac{2x^2-9x+8}{2}<\frac{\pi}{6}$.
5^0. Решите неравенство $\sin^2 x-\cos^2 2x>0$.

Вариант 6 **К-13**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 3x-\sin x)\arcsin x}{5x^2}$.
2. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$; б) $\arccos(\cos(-5))$.

3. Решите неравенство $\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x\leqslant\frac{1}{2}$.
4. Решите неравенство $\operatorname{arctg}3x-\operatorname{arcctg}3x>0$.
5^0. Решите неравенство $\cos^2 x-\sin^2 2x\geqslant 0$.

Контрольная работа № 14

Вариант 1 **К-14**

1. Решите неравенство $\frac{9-x^2}{3x+1} \geqslant \frac{2}{x}$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $f(x)=\frac{3-x^2}{x+2}$. Найдите асимптоты и постройте график этой функции.
3. Разложите на множители многочлен $x^3+8x+24$.
4. Докажите, что при всяком $n \in N$ число $10^n+45n-1$ кратно 27.
5. Найдите все решения уравнения $\sin 2x+\cos x+2\sin x=-1$, удовлетворяющие условию $0<x<5$.

Вариант 2 **К-14**

1. Решите неравенство $\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{16}{x^2+4}$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $f(x)=\frac{4x}{9}(3-x)^3$. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба и постройте график этой функции.
3. Решите уравнение $x^4-x^3-10x^2-x+1=0$.
4. Докажите, что если n — натуральное число и $n \geqslant 4$, то $2^n<n!$.
5. Найдите все решения уравнения $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=-2$, удовлетворяющие условию $0<x<4$.

Вариант 3 **К-14**

1. Решите неравенство $2x+\frac{1}{x^2} \leqslant 3$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $y=\frac{2x^2}{3-x}$. Найдите асимптоты и постройте график этой функции.
3. Разложите на множители $(x-2)(x-3)^2(x-4)-12$.
4. Докажите, что при $n \in N$ 3^n+2n-1 делится на 4.
5. Найдите все решения уравнения
$$\sqrt{3}\sin x+2\cos x=\sqrt{3}+\sin 2x,$$
удовлетворяющие условию $0<x<2$.

Вариант 4 **К-14**

1. Решите неравенство $\frac{x+6}{3x-2} \leqslant \frac{3x+2}{x^2}$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $y=\frac{2x}{3}(x-2)^3$. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба и постройте график этой функции.
3. Решите уравнение $x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0$.

4. Докажите, что при $n \geqslant 5$ и $n \in N$ имеет место неравенство $2^n < 2 \cdot (n-1)!$.
5. Найдите все решения уравнения

$$5 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin^2 x = 2,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 5$.

Вариант 5 **К-14**

1. Решите неравенство $\frac{9}{x} \leqslant \frac{18-x^2}{6-x}$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $y = \frac{x(x-3)^3}{2}$. Найдите промежутки выпуклости, точки перегиба и постройте график функции.
3. Решите уравнение $2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0$.
4. Докажите, что при всех $n \in N$ $5^n + 4n + 7$ кратно 8.
5. Найдите все решения уравнения $2 \sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 4x + 1 = 0$, удовлетворяющие условию $0 < x < 2$.

Вариант 6 **К-14**

1. Решите неравенство $\frac{4x}{3x+1} \leqslant \frac{1}{x^2}$.
2. Установите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции $y = \frac{4-x^2}{x+3}$. Найдите асимптоты и постройте график этой функции.
3. Решите уравнение $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x + 16 = 0$.
4. Докажите, что при $n \geqslant 3$, $n \in N$ справедливо неравенство $2^n < 0{,}5\,(n+1)!$.
5. Найдите все решения уравнения $\sin 4x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos 2x - \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $0 < x < 1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ XI КЛАССА

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1 **С-1**

1. Вычислите интегралы:

   а) $\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2}{x^3}\,dx$; б) $\int \left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2 dx$.
2. Докажите, что функция $F(x) = 3x + \sin^2 3x$ является первообразной для функции $f(x) = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.
3. Постройте график функции

$$y = \sin x \sqrt{\cos^2 x} + \cos x \sqrt{\sin^2 x}.$$

Есть ли у этой функции точки, в которых она недифференцируема?

Вариант 2 **С-1**

1. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{x^2-3x+4}{x\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int \cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(4x+\frac{7\pi}{4}\right)dx$.

2. Докажите, что функция $F(x)=3x+2\sin 2x+0{,}25\sin 4x$ является первообразной для функции $f(x)=8\cos^4 x$.

3. Постройте график функции

$$y=\sqrt{\sin^2 2x}+2\sin x\cos x.$$

Есть ли у этой функции точки, в которых она недифференцируема?

Вариант 3 **С-1**

1. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{3\sin^2 x-2\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$; б) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2. Докажите, что функция $F(x)=4x+\cos^2 4x$ является первообразной для функции $f(x)=8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$.

3. Постройте график функции

$$y=\cos x\sqrt{\cos^2 x}-\sin x\sqrt{\sin^2 x}.$$

Есть ли у этой функции точки, в которых она недифференцируема?

Вариант 4 **С-1**

1. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{x^4-2x^3+3}{3x^2}\,dx$; б) $\int \sin\left(5x+\frac{9\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{4}\right)dx$.

2. Докажите, что функция $F(x)=3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}$ является первообразной для функции $f(x)=8\sin^4 2x$.

3. Постройте график функции

$$y=\sqrt{1-4\sin^2 x\cos^2 x}-\cos^2 x+\sin^2 x.$$

Есть ли у этой функции точки, в которых она недифференцируема?

Вариант 5 **С-1**

1. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{2x^3+x^2+2x+2}{1+x^2}\,dx$; б) $\int \left(\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}\right)^2 dx$.

2. Докажите, что функция $F(x)=5x+\cos^2\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$ является первообразной для функции $f(x)=10\cos^2\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Постройте график функции

$$y=\sin x\sqrt{\sin^2 x}+\cos x\sqrt{\cos^2 x}.$$

Есть ли у этой функции точки, в которых она недифференцируема?

Вариант 6 **С-1**

1. Вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{4\cos^2 x+\cos 2x}{1-\cos 2x}\,dx$; б) $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,dx$.

2. Докажите, что функция

$$F(x)=6x+4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+0{,}5\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$$

является первообразной для функции $f(x)=16\sin^4\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.

3. Постройте график функции

$$y=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}-2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}.$$

Есть ли у этой функции точки, в которых она недифференцируема?

Контрольная работа № 1

Вариант 1 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $y'=xy^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=-2$.
2. Материальная точка массы $m=1$ движется по прямой под действием силы, которая меняется по закону $F(t)=8-12t$. Найдите закон движения точки $x=x(t)$, если в момент времени $t=0$ ее координата равна 0 и скорость равна 1. В какой момент времени скорость точки будет максимальной?
3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+9y=0$ и начальным условиям $f(0)=3$, $f'(0)=9$. Найдите ее наименьшее значение на отрезке $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$.

4^0. Для функции $f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } x<0,\\ \sin x \text{ при } x\geqslant 0\end{cases}$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Постройте график первообразной.

Вариант 2 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $x^2y'=y^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Найдите кривую, проходящую через начало координат, если пер-

перпендикуляр к любой касательной к этой кривой, проведенной через точку касания, пересекает ось Ox в точке, абсцисса которой на 2 единицы больше абсциссы точки касания.

3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+16y=0$ и начальным условиям $f(0)=2$, $f'(0)=-8$. Найдите ее наибольшее значение на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

4[0]. Для функции $f(x)=\begin{cases}\cos x \text{ при } x<0,\\ 1 \text{ при } x\geqslant 0\end{cases}$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку $M(1;\ 2)$. Постройте график этой первообразной.

Вариант 3 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $y'\sin^2 x=\cos^2 y$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$.
2. Ускорение точки (при движении по прямой) в момент времени t равно $1+\sin 2t$. Найдите закон движения точки $x=x(t)$, если в момент времени $t=0$ координата точки равна 2 и скорость равна 1.
3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''=-9y$ и начальным условиям $f(0)=3$, $f'(0)=-9$. Найдите ее наименьшее значение на отрезке $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

4[0]. Для функции $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x<1,\\ x \text{ при } x\geqslant 1\end{cases}$ найдите первообразную F, график которой проходит через начало координат. Постройте график этой первообразной.

Вариант 4 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $x^4y'=y^{-2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=-1$.
2. Найдите кривую, проходящую через точку $M(1;\ 0)$, если известно, что перпендикуляр к любой касательной к этой кривой, проведенный через точку касания, проходит через начало координат.
3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''=-16y$ и начальным условиям $f(0)=2$, $f'(0)=8$. Найдите ее наибольшее значение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{6}\right]$.

4[0]. Для функции $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^2} \text{ при } x<0,\\ \cos 2x \text{ при } x\geqslant 0\end{cases}$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$. Постройте график этой первообразной.

Вариант 5 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $x^{-5}y'=2y^4$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=-1$.
2. Материальная точка массы $m=1$ движется по прямой под действием постоянной силы $F=-2$. Найдите закон движения точки $x=x(t)$, если в начальный момент времени $t=0$ координата равна 10 и скорость равна 3. В какой момент времени точка вернется в исходное положение?
3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+4y=0$ и начальным условиям $f(0)=3$, $f'(0)=6$. Найдите ее наибольшее значение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4^0. Для функции $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\cos^2 x} \text{ при } -\frac{\pi}{2}<x<0,\\ \frac{1}{1+x^2} \text{ при } x\geqslant 0\end{cases}$ найдите ту первообразную F, график которой проходит через начало координат. Постройте график этой первообразной.

Вариант 6 **К-1**

1. Найдите решение дифференциального уравнения $y'\cos^2 x=$ $=\sin^2 y$, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi)=\frac{3\pi}{2}$.
2. Найдите кривую, проходящую через начало координат, если известно, что перпендикуляр к любой касательной к этой кривой, проведенный через точку касания, пересекает ось Oy в точке, ордината которой на 0,5 больше ординаты точки касания.
3. Функция $y=f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+y=0$ и начальным условиям $f(0)=5$, $f'(0)=5$. Найдите наименьшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4^0. Для функции $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x<1,\\ \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x\geqslant 1\end{cases}$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку $M(0;1)$. Постройте график этой первообразной.

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1 **С-2**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt[3]{32x}$.
2. Найдите значения A и B, при которых функция $f(x)=A\cos 2\pi x+$ $+B$ удовлетворяет условиям $f'\left(\frac{1}{4}\right)=-2$ и $\int\limits_0^3 f(x)\,dx=6$.

3. Вычислите работу, совершаемую при сжатии пружины на 10 см, если известно (по закону Гука), что действующая сила пропорциональна сжатию пружины и что для сжатия на 1 см необходима сила в 20 Н.
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int_1^3 \sqrt{4x-x^2-3}\,dx$.

Вариант 2 **С-2**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin^2 2x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ и осью Ox.
2. Найдите значения A, B и C, при которых функция $f(x)=Ax^2+$ $+Bx+C$ удовлетворяет условиям $f'(1)=0$, $f(2)-f'(2)=2$, $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{3}$.
3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=6t-t^2$ (м/с). Найдите длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int_0^6 |x-3|\,dx$.

Вариант 3 **С-2**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8\sqrt{2}x^2$ и $y=\cos \pi x$.
2. Найдите значения A и B, при которых функция $f(x)=Ax+B$ удовлетворяет условиям $f(2)-f'(2)=1$, $\int_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant 0{,}25$.
3. Силой в 180 Н пружина растягивается на 2 см. Первоначальная длина пружины 20 см. Какую нужно совершить работу, чтобы растянуть пружину до 25 см?
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int_{-2}^{-1} \sqrt{-2x-x^2}\,dx$.

Вариант 4 **С-2**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt[4]{8x}$ и $y=\frac{x^3}{4}$.
2. Найдите значения A и B, при которых функция $f(x)=A\cos\frac{\pi}{2}x+$ $+B$ удовлетворяет условиям $f'(1)=1{,}5$ и $\int_0^2 f(x)\,dx=3$.

3. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно тело двигалось со скоростью $v_1(t)=3t^2+4t$ (м/с), другое — со скоростью $v_2(t)=2t$ (м/с). Какое расстояние будет между телами через 4 с?
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_0^2 ||x-1|-1|\,dx$.

Вариант 5 **С-2**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x}{1+2x^2+x^4}$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.
2. Найдите значения A, B и C, при которых функция вида $f(x)=Ax^2+Bx+C$ удовлетворяет условиям $f'(0)=2$, $f(1)-f'(1)=1$, $\int\limits_0^3 f(x)\,dx=0$.
3. Пружина растягивается на 2 см под действием силы в 60 Н. Какую надо затратить работу, чтобы растянуть пружину на 12 см?
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_0^2 \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

Вариант 6 **С-2**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos^2 2x\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ и осью Ox.
2. Найдите значения A и B, при которых функция $f(x)=Ax+B$ удовлетворяет условиям $f(1)f'(1)\leqslant -2$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=2$.
3. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно тело двигалось со скоростью $v_1=9t^2+2t$ (м/с), другое — со скоростью $v_2=2t$ (м/с). Через сколько секунд расстояние между ними было равно 81 м?
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_0^4 (|x-1|+|3-x|)\,dx$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1 **К-2**

1. Вычислите интеграл $\int\limits_{0,5}^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. Решите неравенство $\int\limits_0^1 (2t^3z-t^2)\,dz\geqslant 0$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=0{,}5x^2-3x+2$ и $y=x-4$.

4^0. При каких значениях x, $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$, обращается в нуль та из первообразных функции $f(x)=2\cos 2x-\sin x$, которая при $x=\pi$ имеет значение, равное -1?

Вариант 2 **К-2**

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$.

2. Решите неравенство $\int\limits_0^1 (tz^3+z^2)\,dt>0$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2-6x+4$ и $y=4-x^2$.

4^0. Напишите уравнение касательной, параллельной оси абсцисс, к графику функции $f(x)=\int\limits_0^x(\sin t-\sin 2t)\,dt$, $x\in\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4}\right]$.

Вариант 3 **К-2**

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^2\frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^4}}$.

2. Решите неравенство $\int\limits_1^2\left(\frac{24x}{y^2}-9x^2\right)dy\geqslant 4$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+x+6$ и $y=6-3x$.

4. Найдите максимумы функции

$$f(x)=\int\limits_0^x(\sin 2t-\cos t)\,dt,\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Вариант 4 **К-2**

1. Вычислите интеграл $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{3x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Решите неравенство $\int\limits_0^1\left(\frac{2v}{u}+3uv^2\right)dv>2$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=3-|x|$ и $y=x^2-3$.

4^0. При каких значениях $x\in[0;\ 2\pi]$ обращается в нуль та из первообразных функции $f(x)=\cos x-\sin x$, которая при $x=\frac{3\pi}{2}$ равна -2?

Вариант 5 К-2

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{x^6+64}$.

2. Решите неравенство $\int\limits_1^2 \left(\frac{2y^2}{x^2}+\frac{4}{3}yx\right)dx > -1$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $|y|=2x-x^2$.

4^0. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=\int\limits_0^x (\cos 2t+\cos t)\,dt,\quad \pi < x < \frac{3\pi}{2},$$

параллельной прямой $x+y=1$.

Вариант 6 К-2

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+2x)^3}$.

2. Решите неравенство $\int\limits_0^1 \left(v+\frac{16u^3}{v}\right)du \leqslant 4$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x+6$, $y=x-4$, $x=0$, $x=3$.

4^0. Найдите минимумы функции

$$f(x)=\int\limits_0^x (2\cos^2 t-\sin 2t),\quad 0\leqslant x\leqslant \pi.$$

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1 С-3

1. Постройте график функции $y=\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}+2^x$.

2. Найдите все корни уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, удовлетворяющие неравенству $x^2-8x+12\leqslant 0$.

3. Дана функция $f(x)=7^{\frac{x^2-3}{x}}$.
Найдите: а) $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{x^2-2x}$.

Вариант 2 С-3

1. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|+1-x}$.

2. Решите неравенство $(7x-x^2-6)(\sqrt{5}-25^{\cos^2 x})^2>0$.

3. Дана функция $f(x)=\frac{2^x+2^{1-x}-3}{2^{x+1}-4^x}$.

Найдите: а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$.

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y=(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x.$$

Вариант 3 **С-3**

1. Постройте график функции $y=(0{,}25)^{|x|}\cdot 2^x$.
2. Найдите все корни уравнения $0{,}3^{1-\operatorname{tg}^2 x}=1$, удовлетворяющие неравенству $x^2-6x+5<0$.
3. Дана функция $f(x)=3^{\frac{2x^2}{x^2-1}}$.
Найдите: а) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$.
4. Найдите наибольшее значение функции $y=\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{4x-x^2}$.

Вариант 4 **С-3**

1. Постройте график функции $y=\sqrt{3\cdot 3^{2x+1}-6\cdot 3^x+1}+3^{x+1}$.
2. Решите неравенство $(3+2x-x^2)(4^{\sin^2 x}-2)^2>0$.
3. Дана функция
$$f(x)=\frac{4^x-2^{1+x}}{8^x-2^{x+2}}.$$
Найдите: а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$.
4. Найдите наименьшее значение функции $y=7^{x^2+2x}$.

Вариант 5 **С-3**

1. Постройте график функции $y=2^{|x-1|}\cdot 0{,}5^{-x}$.
2. Найдите все корни уравнения $16^{\cos^2 x}=8$, удовлетворяющие неравенству $x^2-7x+10<0$.
3. Дана функция $f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}$.
Найдите: а) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$.
4. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{3^x}{9^x+1}$.

Вариант 6 **С-3**

1. Постройте график функции $y=\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}+\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2. Решите неравенство $(x^2-x-6)\left(\frac{1}{5}-0{,}008^{\operatorname{ctg}^2 x}\right)^2<0$.

3. Дана функция $f(x)=\frac{8^x-2\cdot 4^x+1}{8^x-2^x}$.
Найдите: а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

4. Найдите наименьшее значение функции $y=5^{1+x}+5^{1-x}$.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1 **С-4**

1. Решите уравнение $2^{2x+|x|}=\frac{1}{3}$.

2. Упростите выражение $0{,}2^{\log_5 0{,}5}+\log_{\sqrt{3}}\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7+2\sqrt{10}}$.

3. Постройте график функции
$$y=-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)+\log_3\sqrt{9x^2-6x+1}.$$

4. Зная, что $\log_{12} 3=a$, найдите $\log_4 36$.

Вариант 2 **С-4**

1. Решите уравнение $2^{|x-3|+2x}=63$.

2. Упростите выражение $4^{3\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})-4\log_4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$.

3. Постройте график функции
$$y=\log_{0{,}5}(16-8x+x^2)+\log_2(2x-8).$$

4. Зная, что $\log_2 3=a$, $\log_5 3=b$ и $\log_7 3=c$, найдите $\log_{140} 9$.

Вариант 3 **С-4**

1. Решите уравнение $3^{\left|\frac{x}{2}-1\right|+x}=8$.

2. Упростите выражение $5^{\log_{\sqrt{5}} 2}+\log_3\frac{5-2\sqrt{6}}{9}+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

3. Постройте график функции
$$y=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2-4x+1}.$$

4. Зная, что $\log_2 3=a$, $\log_5 2=b$, найдите $\log_{60} 8$.

Вариант 4 **С-4**

1. Решите уравнение $0{,}7^{3|x|-x}=2$.

2. Упростите выражение $6^{\log_{\sqrt{6}}(7+\sqrt{35})+2\log_6 \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}$.

3. Постройте график функции
$$y=\log_3\left(2-\frac{x}{3}\right)-\log_{\frac{1}{3}}(x^2-12x+36).$$

4. Зная, что $\log_{20} 4=a$, найдите $\log_{25} 10$.

Вариант 5 **С-4**

1. Решите уравнение $0{,}2^{2x-|x-1|}=0{,}03$.

2. Упростите выражение $3^{\log_{\frac{1}{3}} 0{,}04}+\log_{25}(3+2\sqrt{2})-\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{2}-1)$.

3. Постройте график функции
$$y=\log_2(|x-4|+x).$$

4. Зная, что $\log_3 6=a$, $\log_5 6=b$, $\log_{105} 6=c$, найдите $\log_7 6$.

Вариант 6 **С-4**

1. Решите уравнение $7^{\frac{x}{3}+\frac{|x-1|}{4}}=2$.

2. Упростите выражение $\left(\frac{1}{4}\right)^{9\log_8 \frac{3-\sqrt{5}}{2}+4\log_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}(5+3\sqrt{5})}$.

3. Постройте график функции
$$y=|\log_3(x-2)|+\log_3(3x-6).$$

4. Зная, что $\log_3 2=a$, $\log_5 3=b$, найдите $\log_{30} 18$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1 **К-3**

1. Решите уравнение $(x^2-4)\log_3(1-x^2-3x)=0$.
2. Решите неравенство $6^{3x-2}\leqslant 2^{2x}3^{5x-6}$.
3. Решите уравнение
$$\log_2(2^x+1)+\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 3=\log_2 3-x.$$
4. Решите неравенство $\log_2 \sin x-3\log_{\sin x} 2>2$.
5. Решите уравнение $\log_2 \cos x=\log_4 \sin 2x$.

6^0. Сравните числа $\log_7 8$ и $\log_6 7$.

Вариант 2 К-3

1. Решите уравнение $(x^2-x-2)\log_2(x^2-4x+4)=0$.
2. Решите неравенство $7^{\operatorname{tg} x}+7^{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\leqslant\frac{50}{7}$.
3. Решите уравнение

$$\log_9^2(27x)-2\log_3\frac{\sqrt{3x}}{3}=4^{0,5+\log_8 2\sqrt{2}}.$$

4. Решите неравенство $\log_{x^2-\frac{5}{4}}(4^x-3\cdot 2^{x+1}+9)\leqslant 0$.
5. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}(-\sin x)=\frac{1}{2}+\log_3\frac{\sin 2x}{2}$.

6^0. Сравните числа $\log_{24}72$ и $\log_{12}18$.

Вариант 3 К-3

1. Решите уравнение $\left(2x-\frac{1}{x}-1\right)\log_{0,5}(1-x^2)=0$.
2. Решите неравенство $5^{2x^2-3x}+5^{4x^2-6x+2}>26$.
3. Решите уравнение

$$\log_7(3^{x-1}+\log_{\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}0{,}125)+x(\log_7 21-1)=1+\log_7 9.$$

4. Решите неравенство $\log_2\cos x-\log_{\cos x}4\leqslant 1$.
5. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(4\cos x)=\log_3\sin x$.

6^0. Сравните числа $\log_6 7$ и $\log_5 6$.

Вариант 4 К-3

1. Решите уравнение $\operatorname{tg}\pi x\log_3\left(\frac{5}{2}x-x^2\right)=0$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-\frac{3}{x}-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{27}}$.
3. Решите уравнение

$$\log_3 5+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\log_3 2=\log_3(2^{\frac{1}{x}}+\log_{8\sqrt{5}}25).$$

4. Решите неравенство $\log_4^2(2x)+3\log_2 x<4$.
5. Решите уравнение $\log_{0,5}\sin x=2\log_{0,25}(-\cos x)$.

6^0. Сравните числа $\log_3 6$ и $\log_{18}72$.

Вариант 5 К-3

1. Решите уравнение $\left(1+\frac{2}{x}\right)\log_5(3x-x^2+1)=0$.
2. Решите неравенство $5^{\sin\pi x}+5^{1-\sin\pi x}\geqslant 6$.
3. Решите уравнение

$$\lg(2^x+1)+x(2-\lg 50)=\lg 3-\lg 5-0{,}5\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}2.$$

4. Решите неравенство $2\log_2 x-\log_x 16<2$.

5. Решите уравнение $1+\log_{\sqrt{2}}\cos x=\log_2(3-3\sin x)$.

6^0. Сравните числа $\log_{10}11$ и $\log_9 10$.

Вариант 6 **К-3**

1. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\pi x\log_3(4x^2-4x+1)=0$.
2. Решите неравенство $4\cdot 3^{4x-2}-9\cdot 2^{4x-2}<5\cdot 6^{2x-1}$.
3. Решите уравнение

$$2\log_4^2(8x)+3\log_2\sqrt{\frac{x}{2}}=3^{\frac{9}{4}\log_{3\sqrt{3}}4}.$$

4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(2x+5)+\log_5(16-x^2)\leqslant 1$.
5. Решите уравнение $\log_5(\sqrt{2}\sin x)=\log_{25}(2+\cos x)$.

6^0. Сравните числа $\log_2 6$ и $\log_{24}648$.

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1 **С-5**

1. Дана функция $f(x)=(2x+1)e^{2x}$.

а) Найдите промежутки монотонности, точки экстремума функции, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

б) Найдите множество значений функции, если $x\in[-2;\ 0]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2+1-\ln(2x-1)$, паралелльной оси Ox.
3. Для функции $f(x)=\frac{x+1}{x}$, где $x>0$, найдите первообразную $F(x)$, которая при $x=e$ принимает значение, равное e. В каких точках кривая $y=F(x)$ пересекает ось Ox?

Вариант 2 **С-5**

1. Дана функция $f(x)=x+\ln(x^2+1)$.

а) Найдите промежутки монотонности, точки экстремума функции, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

б) Найдите множество значений функции, если $x\in[-3;\ 0]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\frac{2x+1}{e^{2x}}$ в точке ее максимума.
3. Вычислите $\int e^{3\cos x+2}\sin x\,dx$.

Вариант 3 **С-5**

1. Дана функция $f(x)=\frac{2^x+2^{1-x}+x\ln 2}{\ln 2}$.

а) Найдите промежутки монотонности, точки экстремума функции, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

б) Найдите множество значений функции, если $x\in[-1;\ 1]$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\ln(5-x^2)$, параллельной прямой $y=-4x$.

3. Для функции $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x<0, \\ e^x & \text{при } x\geqslant 0 \end{cases}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(-1; 2)$.

Вариант 4 **С-5**

1. Дана функция $f(x)=x-1-\ln(2x-6)$.
   а) Найдите промежутки монотонности, точки экстремума функции, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
   б) Найдите множество значений функции, если $x\in[4; 5]$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=e^x+ +e^{-x}$, параллельной прямой $y=1{,}5x$.
3. Для функции $f(x)=1+e^{2x}$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M\left(\frac{1}{2}; \frac{e}{2}\right)$. Найдите координаты точки пересечения кривой $y=F(x)$ с осью Ox.

Вариант 5 **С-5**

1. Дана функция $f(x)=\frac{4^x-3\cdot 2^x}{\ln 2}+x$.
   а) Найдите промежутки монотонности, точки экстремума функции, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
   б) Найдите множество значений функции, если $x\in[0; 1]$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2- -3x+\ln x$ в точке ее минимума.
3. Вычислите $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$.

Вариант 6 **С-5**

1. Дана функция $f(x)=x-1+\ln(3-x)$.
   а) Найдите промежутки монотонности, точки экстремума функции, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
   б) Найдите множество значений функции, если $x\in[0; 2]$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=xe^{2x^2-5x}$ в точке ее минимума.
3. Для функции $f(x)=-1-\frac{1}{x\ln 4}$, где $x>0$, найдите первообразную $F(x)$, которая при $x=2$ принимает значение, равное 2,5. В каких точках кривая $y=F(x)$ пересекает ось Ox?

Контрольная работа № 4

Вариант 1 **К-4**

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+15}{3x+1}\right)^{x-1}$.

2. Исследуйте на экстремум и монотонность функцию
$$f(x)=x^2-\ln(2x-1).$$
3. Найдите кривую, проходящую через точку $M\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, зная, что угловой коэффициент касательной в каждой точке этой кривой равен отношению ординаты этой точки к ее абсциссе, взятому с противоположным знаком.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^{3-x}$, $y=4^x$, $y=16$.
5. Найдите все корни уравнения $|\cos x|=2\cos x+\sin x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

6^0. При каких значениях a уравнение
$$4^x-(a+3)\cdot 2^x+4a-4=0$$
имеет один корень?

Вариант 2 **К-4**

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}{\ln(1+\sin 3x)}$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{25^x-2\cdot 5^{x+1}}{\ln 5}$ на отрезке $[0;\ 2]$.
3. Скорость охлаждения тела по закону Ньютона пропорциональна разности температур тела и среды. В резервуаре с температурой 10° тело остыло от 100° до 70° за 30 мин. Через сколько минут оно остынет до 50°?
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$, $y=4$, $x=1$.
5. Найдите все корни уравнения $2|\sin x|\cos x=\sin^2 x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

6^0. При каких значениях a уравнение
$$25^x-(a-4)\,5^x-2a^2+10a-12=0$$
не имеет действительных корней?

Вариант 3 **К-4**

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+7}{4x+1}\right)^{x+2}$.
2. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=0{,}5x\ln x-x\ln 3$ на отрезке $[3;\ 4{,}5]$.
3. При прямолинейном движении тело удаляется от фиксированной точки. Скорость движения в любой момент времени численно равна $\frac{1}{3}$ пройденного пути. Найдите путь, скорость и ускорение как функцию времени, если в начальный момент времени пройденный путь равен e.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3^x$, $y=4-x$, $y=1$.

5. Найдите все корни уравнения $|\sin x| = 2\sin x + \cos x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

6^0. При каких значениях a уравнение

$$36^x + (a-1)\,6^x + a - 2a^2 = 0$$

имеет два действительных и различных корня?

Вариант 4 **К-4**

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\operatorname{tg} 3x}$.
2. Исследуйте на экстремум и монотонность функцию

$$y = x^2 - 2x - \ln(1-2x).$$

3. Найдите кривую, проходящую через точку $N(0;\ 2)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен произведению координат точки касания.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - e^x$ и $y = e^{-x} - \dfrac{4}{3}$.
5. Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \cos x\,|\cos x|$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

6^0. При каких значениях a уравнение

$$9^x - 3^{x+1} - a^2 + 5a - 4 = 0$$

имеет один действительный корень?

Вариант 5 **К-4**

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-1}$.
2. Докажите, что функция $y = e^{-2x}\sin x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ убывает.
3. К началу радиоактивного распада имелся 1 г радия A. Через сколько минут его останется 0,125 г, если его период полураспада равен 3 мин? (Известно, что скорость уменьшения массы радиоактивного вещества $m(t)$ со временем t пропорциональна его количеству.)
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{6-4x}{x}$ и $y = 4 - 2x$.
5. Найдите все корни уравнения $|\cos x| = 2\sin x - \cos x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

6^0. При каких значениях a уравнение

$$49^x + (a-1)\,7^x - 2a^2 + 4a - 2 = 0$$

не имеет ни одного действительного корня?

Вариант 6 **К-4**

1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\arcsin 2x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 5x)}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{3^x+3^{2-x}}{\ln 3}+8x \text{ на отрезке } [-1;\ 2].$$

3. Найдите кривую, проходящую через точку $M(0;\ -2)$, для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x}{x-2}$, $y=x$, $x=-4$.
5. Найдите все корни уравнения $\sin^2 x=|\sin x|\cos x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

6^0. При каких значениях a уравнение

$$16^x-(5-a)\,4^x+6-2a=0$$

имеет два действительных и различных корня?

Самостоятельная работа № 6

Вариант 1 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=(1-2\sin 3x)^{\frac{4}{3}}$.
   Найдите: а) $D(f)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6^x+3^x-x^3}{6^x-3^x+x^5}$.
3. Исследуйте функцию $y=x^2(1-\ln x)$ и постройте ее график.

Вариант 2 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=(\sin x-\cos x)^{-\sqrt{2}}$.
   Найдите: а) $D(f)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+3x}{\ln x+5x}$.
3. Исследуйте функцию и постройте ее график:
$$y=x\cdot e^{1-x^2}.$$

Вариант 3 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=(\cos^2 2x-0{,}25)^{\frac{3}{2}}$.
   Найдите: а) $D(f)$; б) $f'(0)$.
2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x+2^x-x^2}{4^{x-1}-2^x+3x^3}$.
3. Исследуйте функцию и постройте ее график:
$$y=x(2-\ln x)^2.$$

Вариант 4 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=(1-\operatorname{tg} 2x)^{\pi}$.
   Найдите: а) $D(f)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^7}+2}$.

3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y=\frac{e^{2x-1}}{x^2}.$$

Вариант 5 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=(\cos 2x+\sin 2x)^{\frac{8}{3}}$.
Найдите: а) $D(f)$; б) $f'(0)$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+x^2+3}{5^x-4x^2-7}$.

3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y=\frac{1+\ln x}{x^2}.$$

Вариант 6 **С-6**

1. Дана функция $f(x)=(4\sin^2 x-3)^{-\frac{2}{3}}$.
Найдите: а) $D(f)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+\ln x+2x^2}{\ln^3 x+3\ln x-3x^3}$.

3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y=\frac{1+x^2}{e^x}.$$

Самостоятельная работа № 7

Вариант 1 **С-7**

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{a+\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}\right)^2(a^2+ab-2b^2)^2.$$

2. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)(2x-\sqrt{4x^2+3})$.

3. Постройте график функции $y=\operatorname{tg} x\sqrt{2+2\cos 2x}$.

Вариант 2 **С-7**

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{m-\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-1}-\frac{m+\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+1}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{mn^3}+\sqrt[4]{m^3n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{1-\sqrt{mn}}{\sqrt[4]{mn}}\right)^{-1}.$$

2. Найдите $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{1-\sqrt{\cos x}}$.

3. Постройте график функции $y=\sqrt{(1-|x-2|)^2}$.

Вариант 3 **С-7**

1. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^{-1}b^{3}}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-1}}.$$

2. Найдите $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4-\sqrt{x+15}}{2\sqrt{x}-\sqrt{5-x^2}}$.

3. Постройте график функции $y=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{2-2\cos 2x}}$.

Вариант 4 **С-7**

1. Упростите выражение

$$\frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^3+2m^2:\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}+\frac{3\sqrt{mn}-3n}{m-n}.$$

2. Найдите $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-12}}{\sqrt{1+2x}-3}$.

3. Постройте график функции $y=\operatorname{ctg} x\sqrt{1-\cos 2x}$.

Вариант 5 **С-7**

1. Упростите выражение

$$(a^2\sqrt{b})^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

2. Найдите $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}-1}{2-\sqrt{5x+4}}$.

3. Постройте график функции $y=\sqrt{(|x-3|-2)^2}$.

Вариант 6 **С-7**

1. Упростите выражение

$$(x+y^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

2. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(\sqrt{9x^2+2}-3x)$.

3. Постройте график функции $y=\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$.

Контрольная работа № 5

Вариант 1 **К-5**

Решите уравнения:

1. $\sqrt{7-\sqrt{x^2-4x+4}}=x-3$.
2. $\sqrt{1-2\cos x}=\sin x$.
3. $\sqrt[3]{x+5}=\sqrt{x+1}$.

Решите неравенства:

4. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}>\sqrt{x}$.

5. $\sqrt{\log_2 x-\log_4 \sqrt{2x}}>0{,}5$.

6⁰. $7+2x\geqslant 2\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+9}$.

Вариант 2 **К-5**

Решите уравнения:

1. $x+\sqrt{3+\sqrt{x^2-2x+1}}=4$.

2. $\sqrt{2-\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{2}\cos x$.

3. $\sqrt{2x^2-5x+12}+2x^2=5x$.

Решите неравенства:

4. $\sqrt{5-x^2}\geqslant x+1$.

5. $2^{x+\sqrt{x}}+4^x\leqslant 6\cdot 4^{\sqrt{x}}$.

6⁰. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}\geqslant 3^{2-x}+3^{x-2}$.

Вариант 3 **К-5**

Решите уравнения:

1. $x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=4$.

2. $\sqrt{3-2\cos x}=-\sqrt{3}\sin x$.

3. $\sqrt[4]{\frac{x+1}{3-x}}+\sqrt[4]{\frac{3-x}{x+1}}=2{,}5$.

Решите неравенства:

4. $(x^2-1)\sqrt{x^2-4x+3}\geqslant 0$.

5. $\sqrt{1-\log_5(x+2)}<\log_5(5x+10)$.

6⁰. $2\sqrt{x^2+3x}\geqslant 9-2x-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}$.

Вариант 4 **К-5**

Решите уравнения:

1. $2+\sqrt{3-\sqrt{x^2-2x+1}}=x$.

2. $\sqrt{4-3\sin x}=-2\cos x$.

3. $\sqrt{3x^2-6x+7}+x^2=2x+7$.

Решите неравенства:

4. $\frac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{5-x}\geqslant 0$.

5. $\sqrt{5-4^x}>2^x-1$.

6^0. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}+\cos 2\pi x\geqslant 5$.

Вариант 5 **К-5**

Решите уравнения:

1. $x+\sqrt{3-\sqrt{x^2-6x+9}}=2$.
2. $\sqrt{9+2\cos x}=-3\sin x$.
3. $2x\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}-1=0$.

Решите неравенства:

4. $2\sqrt{x}+2-\sqrt{x-1}>3$.
5. $\sqrt{\log_3 x}-2\log_9\sqrt{\frac{x}{3}}>0{,}5$.

6^0. $2x+5>2\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+5}$.

Вариант 6 **К-5**

Решите уравнения:

1. $\sqrt{6-\sqrt{x^2+4x+4}}-x=2$.
2. $\sqrt{1-2\sin x}=\cos x$.
3. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}=3$.

Решите неравенства:

4. $(x^2-9)\sqrt{x^2+3x-10}\leqslant 0$.
5. $\sqrt{10-9^x}>4-3^x$.

6^0 $\sqrt{6-x}-|x-5|+\sqrt{x-4}\geqslant 2$.

Самостоятельная работа № 8

Вариант 1 **С-8**

1. Найдите отношение $\frac{x}{y}$, если $\dfrac{x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2}=1{,}5$.
2. Дано квадратное уравнение $x^2-2x-1=0$, корни которого α и β. Составьте новое квадратное уравнение с корнями $\alpha+2\beta$ и $\beta+2\alpha$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y=2^x+9\cdot 2^{2-x}$ и установите, при каком значении x оно достигается.
4. Решите уравнение $\cos x+2\sin^3 x=0$.

Вариант 2 **С-8**

1. Найдите значение выражения $\frac{\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}$ если $\operatorname{tg}\alpha=2$.
2. Дано квадратное уравнение $x^2-2x-2=0$, корни которого α и β. Не решая уравнения, найдите $\alpha^5+\beta^5$.
3. Докажите неравенство

$$(a^3+b)(a+b^3)\geqslant 4a^2b^2\ (a>0,\ b>0)$$

и установите, при каких значениях a и b имеет место знак равенства.

4. Решите уравнение $9^{x^2+3x}+2\cdot 6^{x^2+3x}=3\cdot 4^{x^2+3x}$.

Вариант 3 **С-8**

1. Известно, что $\frac{x^4-2x^2y^2}{x^2y^2+y^4}=1{,}6$. Найдите $\frac{y}{x}$.
2. При каких значениях a сумма квадратов корней трехчлена $x^2+(a+2)x+a$ равна 3?
3. Докажите, что при всех $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$\left(2\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(2\cos\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\geqslant 8.$$

При каких значениях $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ имеет место знак равенства?

4. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$.

Вариант 4 **С-8**

1. Известно, что $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$; найдите значение выражения $\frac{x^2+y^2}{x^2-3xy+2y^2}$.
2. Дано квадратное уравнение $2x^2-2x-1=0$, корни которого α и β. Составьте новое квадратное уравнение с корнями $\alpha^3\beta$ и $\alpha\beta^3$.
3. Докажите, что при $a>0$, $b>0$ справедливо неравенство $(a^2+ab+b^2)\left(ab+\frac{16}{a^3b^3}\right)\geqslant 24$. При каких значениях a и b имеет место знак равенства?
4. Решите уравнение $\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x=2\cos x$.

Вариант 5 **С-8**

1. Найдите значение выражения $\frac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$.
2. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a+1)x+a^2=0$ будет наибольшей?
3. Докажите, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ справедливо неравенство

$$a^5b+b^5c+c^5a\geqslant 3a^2b^2c^2.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2^2(x+2)-3\log_2(x+2)\log_2(1-x)+2\log_2^2(1-x)=0.$$

Вариант 6 **С-8**

1. Найдите отношение $\frac{y}{x}$, если $\frac{(y+x)(y-2x)}{x^2+3y^2}=-0{,}5$.
2. Дано квадратное уравнение $x^2-3x+1=0$, корни которого α и β. Не решая уравнения, найдите $\frac{\alpha^4\beta+\alpha\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}$.
3. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+x+4}{x+1}$ на $(0;+\infty)$.
4. Решите уравнение $2\sin^3 x+4\cos^3 x=3\sin x$.

Самостоятельная работа № 9

Вариант 1 **С-9**

1. Являются ли равносильными системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y=3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} xy=y^2, \\ 2x+y=3? \end{cases}$$

2. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} ax+y=1, \\ x+y=2, \\ x-y=a? \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2-x+2y=6, \\ 1{,}5x^2+3y^2-x+5y=12. \end{cases}$$

Вариант 2 **С-9**

1. Какой совокупности систем уравнений равносильна система уравнений

$$\begin{cases} x^2=(y-1)^2, \\ (x-4)(y-2x)=x(2x-y)? \end{cases}$$

2. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} x+y=2, \\ y+z=4, \\ x+z=2a, \\ x+2y+3z=a? \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+2x^2y-9=0, \\ x-y-x^2y+3=0. \end{cases}$$

Вариант 3 **С-9**

1. Являются ли равносильными системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x-2y=4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+2y=0, \\ (3x-2y)^2=16? \end{cases}$$

2. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x+ay=3, \\ ax+y=3? \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2-\frac{2x}{y}+3xy-2=0, \\ 2x^2y^2+2xy-1-\frac{3x}{y}=0. \end{cases}$$

Вариант 4 **С-9**

1. Какой совокупности систем уравнений равносильна система уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2=x+y, \\ (x+y)(y+1)=2x(y+1)\,? \end{cases}$$

2. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} x-y=2, \\ y-z=3, \\ 2x-z=a, \\ x+y+z=2? \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y+2xy=3, \\ y-x-xy=-3. \end{cases}$$

Вариант 5 **С-9**

1. Являются ли равносильными системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (x-y)(x^2+4y^2)=x^2+4y^2, \\ x+y=1? \end{cases}$$

2. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ ax-2y=4, \\ x+ay=2? \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+\frac{x}{x+y}=5{,}5, \\ x+3y-\frac{2x}{x+y}=3. \end{cases}$$

Вариант 6 **С-9**

1. Какой совокупности систем уравнений равносильна система уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x-2y)=2x-4y, \\ (x-2)^2+y(x-2)-2y^2=0? \end{cases}$$

2. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ y+2z=0, \\ z+2x=3a, \\ x+y+2z=a^2? \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2y^4+x^2y+5xy^2+2=0, \\ 3x^2y^4+x^2y+3xy^2-1=0. \end{cases}$$

Контрольная работа № 6

Вариант 1 **К-6**

1. Постройте график уравнения $x^2+y^2-2y-8=0$.
2. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (a+1)x+y=3, \\ 2x-(a-2)y=6 \end{cases}$$

не имеет решений?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-2xy=-1, \\ x^2+y^2+3xy=11. \end{cases}$$

4. На нефтепромысле сначала работали две буровые установки, а через некоторое время вступила в строй третья установка, в результате чего производительность нефтепромысла увеличилась в 2 раза. Сколько процентов производительность второй установки составляет от производительности первой, если известно, что за три месяца первая и третья установки выдают нефти столько же, сколько вторая за полтора года?
5. Решите уравнение $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 3x$.

6^0. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=10, \\ xy-z^2=25. \end{cases}$$

Вариант 2 **К-6**

1. Постройте график уравнения $|x-1|+|y|=2$.
2. При каких значениях b система

$$\begin{cases} x-(b-1)y=2, \\ (b+2)x+2y=4+b^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+2x^2y-3y^3=0, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

4. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 15 км,

а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 8 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу, когда первый закончит переход?

5. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$.

6⁰. Решите систему $\begin{cases} x^2+4y^2+8=z, \\ 6x+4y-z\geqslant 2. \end{cases}$

Вариант 3 **К-6**

1. Постройте график уравнения $y^2-x^2=1-2x$.
2. При каких значениях m система

$$\begin{cases} (m+1)x-y=m, \\ (m-3)x+my=-9 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-xy+y=1, \\ x^2+y^2+2x+2y=11. \end{cases}$$

4. Продают три куска ткани. Продали третью часть первого куска, половину второго и весь третий кусок, в котором была $\frac{1}{8}$ часть всей ткани. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось ее столько же, сколько было во втором куске?

5. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 7x$.

6⁰. Решите систему уравнений $\begin{cases} y+x-z=1, \\ 2xy-z^2=1. \end{cases}$

Вариант 4 **К-6**

1. Постройте график уравнения $x^2+y^2-4x+3=0$.
2. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x+ay=1, \\ ax-3ay=2a+3 \end{cases}$$

не имеет решений?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-y^2=2. \end{cases}$$

4. Два мотоциклиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются через 1 ч 20 мин. Сколько времени требуется первому из них на весь путь от A до B, если известно, что второй затратил на этот же путь на 2 ч меньше?
5. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 4x$.

6^0. Решите систему

$$\begin{cases} 2y-2x-z=1, \\ x^2+y^2+2yz+1\leqslant 0. \end{cases}$$

Вариант 5 **К-6**

1. Постройте график уравнения $|x|+|y+2|=1$.
2. При каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases} bx+y=3, \\ x+by=3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3+xy=11, \\ x+y=3. \end{cases}$$

4. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются через 2 ч 40 мин. Если бы они оба выехали из пункта A и поехали в пункт B, причем второй выехал бы на 3 ч позже первого, то второй велосипедист догнал бы первого, пройдя $\frac{3}{4}$ расстояния от A до B. Сколько времени потребуется первому велосипедисту на путь из A в B?
5. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 6x$.

6^0. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=6, \\ 2(xy+2z)=z^2+13. \end{cases}$$

Вариант 6 **К-6**

1. Постройте график уравнения $||x|-|y||=1$.
2. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} (m-1)x+y=3, \\ 2x+my=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^3+x^2y-2x^3=0, \\ x^2+2xy=3. \end{cases}$$

4. Объем A составляет третью часть суммы объемов B и C, а объем B пятую часть суммы объемов A и C. Какую часть сумма объемов A и B составляет от объема C?
5. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} 5x$.

6^0. Решите систему

$$\begin{cases} x^2+3y^2-2yz+1\leqslant 0, \\ z-2x+y=1. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 10

Вариант 1 **С-10**

1. Решите систему уравнений и дайте ее геометрическую интерпретацию:

$$\begin{cases} 4x+2y=5, \\ 6x+3y=7{,}5. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+3y-2z=7, \\ 3x+2y+5z=0. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=4\sqrt{xy}, \\ x+4y=2. \end{cases}$$

Вариант 2 **С-10**

1. Решите систему уравнений (m — параметр)

$$\begin{cases} m^2x+y=1, \\ 8x+2y=m. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-z=-1, \\ 3x-2y+4z=9, \\ 2x+3y+2z=1. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+3\sqrt{xy}=2, \\ 2\sqrt{xy}-y=3. \end{cases}$$

Вариант 3 **С-10**

1. Решите систему уравнений и дайте ее геометрическую интерпретацию:

$$\begin{cases} 4x+y=6, \\ 10x+2{,}5y=16. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y+z=-1, \\ 2x+3y+4z=5, \\ 3x-2y-2z=-7. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt[4]{xy}, \\ x+y=17. \end{cases}$$

Вариант 4 **С-10**

1. Решите систему уравнений (m — параметр)

$$\begin{cases} x+(m+1)y=1, \\ mx+2y=m. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y-z=-1, \\ 4x+5y-3z=6, \\ 2x+3y-2z=3. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{xy}-2\sqrt{xy}=1, \\ x^2+y^2-x-y+3xy=3. \end{cases}$$

Вариант 5 **С-10**

1. Решите систему уравнений и дайте ее геометрическую интерпретацию

$$\begin{cases} x+3y=2, \\ 3x-y=-4. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -x+y+z=-3, \\ 2x+2y-3z=3, \\ 3x+4y+5z=-6. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-5}=2. \end{cases}$$

Вариант 6 **С-10**

1. Решите систему уравнений (m — параметр)

$$\begin{cases} mx+y=1, \\ x+my=-1. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -x-y+z=3, \\ 5x+2y+3z=-4, \\ 3x+4y-2z=-9. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=14, \\ y^2+x\sqrt{xy}=-7. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 11

Вариант 1 **С-11**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+1}\cdot 2^{y}=\frac{1}{9}, \\ y-x=3. \end{cases}$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (1-\cos 2x)\operatorname{tg} y=1{,}5, \\ \operatorname{tg} y-\cos x=0{,}5, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant \pi$, $\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$.

3. Найдите все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 16\log_2^2 x+1=2\log_2 y, \\ \log_2 x^2\geqslant \log_4 y. \end{cases}$$

Вариант 2 **С-11**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^{1-0{,}2\log_x y}=x^{\frac{4}{5}}, \\ 2+\log_x\left(1-\frac{3y}{x^2}\right)=\log_x 4. \end{cases}$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{2}, \\ \sin x+\cos 2y=-1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant \pi$, $\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$.

3. Найдите все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x}-5=4y(y+2), \\ 2^{x-2}-y\leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 3 **С-11**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^{x}=16, \\ 625^{\frac{1}{x}}=2{,}5y. \end{cases}$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x=\sqrt{2}\sin y, \\ \cos 2x+\sqrt{2}\cos y=0, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

3. Найдите все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} \log_2^2 x+1=2\log_2 y^2, \\ \log_4 x\geqslant \log_2 y. \end{cases}$$

Вариант 4 **С-11**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)\,3^{y-x}=\dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y)=x-y. \end{cases}$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{2}, \\ \cos x+\sin 2y=1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \pi$.

3. Найдите все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+2}-5=y(y-2), \\ 2^x+1\leqslant y. \end{cases}$$

Вариант 5 **С-11**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{x+2y}{4}}=y^4, \\ y^{\frac{x+2y}{2}}=x^2\ (x>0;\ y>0). \end{cases}$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x=\sin y, \\ 2\sin x+\sqrt{3}\cos 2y=0, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

3. Найдите все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 9\log_2^2 x+1=\log_2 y^2, \\ \log_2 x\geqslant \log_8 y. \end{cases}$$

Вариант 6 **С-11**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(xy)\log_2\dfrac{x}{y}=3, \\ \log_2^2 x^2+\log_2^2 y^2=20. \end{cases}$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} -\cos x+\cos 4y=1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant \pi$.

3. Найдите все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 4^x=4y^2+1, \\ 2^{2x-1}\leqslant 2y. \end{cases}$$

Контрольная работа № 7

Вариант 1 **К-7**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{y+z}{xyz}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+z}{xyz}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(1+\sqrt{x+y})=1-\log_9 x, \\ x^3+x^2y=4. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x+\sin 2y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите площадь полученной фигуры:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ y\geqslant |x|-1. \end{cases}$$

5^0. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y-\sqrt{x}=a, \\ y-x=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 2 **К-7**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=-4, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3y}=x-y, \\ 2^{x+1}-6=2^y. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos(x+y)=2\cos(x-y), \\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите площадь полученной фигуры:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2x, \\ |y|+1 \leqslant x. \end{cases}$$

5^0. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y-x=0, \\ y=\sqrt{x-a} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 3 **К-7**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=6, \\ x_2+x_3+x_4-x_1=0, \\ x_3+x_4+x_1-x_2=2, \\ x_4+x_1+x_2-x_3=4. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (\sqrt{x+y}+3)\cdot 2^x=5\sqrt{x+y}, \\ 2x+\log_2(x+y)=4. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{6}, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите площадь полученной фигуры:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 2, \\ |y| \leqslant 2-x, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

5^0. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x}, \\ y=a-x \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 4 **К-7**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(3-\sqrt{x-2y})=1-\log_4 y, \\ xy^2=2y^3+1. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 \operatorname{tg} x+\log_3 \operatorname{tg} y=0{,}5, \\ \operatorname{tg} x \cos y=\frac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите площадь полученной фигуры:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2y, \\ y\leqslant 1-|x|\sqrt{3}. \end{cases}$$

5^0. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=0, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 5 **К-7**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+x_3+x_4=7, \\ x_3+x_4+x_1=8, \\ x_4+x_1+x_2=2. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2 x+\log_2\left(\frac{x^2}{4}-xy\right)=0, \\ \sqrt{x+4y^2}=x-2y. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите площадь полученной фигуры:

$$\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 2, \\ 2+y\geqslant |x|, \\ y\leqslant -1. \end{cases}$$

5^0. При каких значениях $a\geqslant 0$ система уравнений

$$\begin{cases} y-\sqrt{x}=0, \\ y-ax=a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 6 К-7

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-z=xyz, \\ x-2y+z=2xyz, \\ x+y-3z=3xyz. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2^{x+1}-3)\,2^{y-1}=1, \\ \sqrt{3x+y^2}=x+y. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x=3\sin y, \\ 2\cos y+\cos x=-1. \end{cases}$$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите площадь полученной фигуры:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ |y|\leqslant x\sqrt{3}. \end{cases}$$

5^0. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y+\sqrt{x}=a, \\ y+x=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Самостоятельная работа № 12

Вариант 1 С-12

1. Дано: $z_1=3+i$, $z_2=2i$.

Найдите: а) $\frac{z_2}{\bar{z}_1}$; б) $\left(\frac{z_1+z_2}{3\bar{z}_2}\right)^8$.

2. Решите уравнение $x^2-4x+20=0$.
3. При каких $x\in\boldsymbol{R}$ и $y\in\boldsymbol{R}$ числа

$$z_1=x^2+yi-5-\frac{7}{i} \text{ и } z_2=-y-x^2i-4i$$

будут сопряженными?

4. Докажите, что квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

Вариант 2 С-12

1. Дано: $z_1=1+2i$, $z_2=-3i$.

Найдите: а) $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$; б) $\left(\frac{\bar{z}_1-iz_2}{2z_2}\right)^6$.

2. Решите уравнение $x^2-6x+13=0$.
3. При каких $x\in\boldsymbol{R}$ и $y\in\boldsymbol{R}$ числа

$$z_1=x-\frac{y^2}{i}-4+5i \text{ и } z_2=y^2+1-3xi$$

будут противоположными?

4. Докажите, что квадрат натурального числа или делится на 4, или при делении на 4 дает в остатке 1.

Вариант 3 **С-12**

1. Дано: $z_1=3i$, $z_2=4-i$.

   Найдите: а) $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$; б) $\left(\frac{z_1-z_2}{4\bar{z}_1}\right)^6$.
2. Решите уравнение $x^2+2x+26=0$.
3. При каких $x\in\boldsymbol{R}$ и $y\in\boldsymbol{R}$ числа

$$z_1=2x^2-\frac{3}{i}-yi-1 \text{ и } z_2=y-3+x^2i-2i$$

   будут равными?
4. Докажите, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

Вариант 4 **С-12**

1. Дано: $z_1=4+3i$, $z_2=-i$.

   Найдите: а) $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$; б) $\left(\frac{z_1+\bar{z}_2}{4z_2}\right)^{12}$.
2. Решите уравнение $x^2+4x+40=0$.
3. При каких $x\in\boldsymbol{R}$ и $y\in\boldsymbol{R}$ числа

$$z_1=x-\frac{y^2}{i}-4i+4 \text{ и } z_2=y-8+x^2i-4i$$

   будут противоположными?
4. Докажите, что если натуральное число не делится на 5, то его квадрат, увеличенный или уменьшенный на 1, делится на 5.

Вариант 5 **С-12**

1. Дано: $z_1=3+4i$, $z_2=i$.

   Найдите: а) $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$; б) $\left(\frac{\bar{z}_1+z_2}{3z^2}\right)^{14}$.
2. Решите уравнение $x^2-10x+34=0$.
3. При каких $x\in\boldsymbol{R}$ и $y\in\boldsymbol{R}$ числа

$$z_1=x^2+4y-yi \text{ и } z_2=4+y-\frac{2}{i}-x^2i$$

   будут сопряженными?
4. Докажите, что разность между квадратом натурального числа, не делящимся на 3, и 1 делится на 3.

Вариант 6 **С-12**

1. Дано: $z_1=4i$, $z_2=i-3$.

   Найдите: а) $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$; б) $\left(\frac{\bar{z}_1+z_2}{3z_1}\right)^6$.
2. Решите уравнение $x^2+8x+41=0$.
3. При каких $x\in\boldsymbol{R}$ и $y\in\boldsymbol{R}$ числа

$$z_1=y^2-\frac{x}{i}-2x+4i \text{ и } z_2=3-\frac{y^2}{i}-3xi$$

   будут равными?

4. Докажите, что произведение квадрата натурального числа на натуральное число, предшествующее этому квадрату, делится на 12.

Контрольная работа № 8

Вариант 1 **К-8**

1. Представьте в тригонометрической форме:

   а) $z=2i$; б) $z=1+\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

2. Пусть $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sin\frac{\pi}{24}+i\cos\frac{\pi}{24}$.

   Вычислите $(z_1z_2)^8$.

3. Изобразите на рисунке множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases}2\leqslant|z-i|\leqslant 4,\\ 0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 2.\end{cases}$$

4^0. Найдите наименьшее и наибольшее значения $|z|$, если

$$z=\sin 2\alpha+i(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

Вариант 2 **К-8**

1. Представьте в тригонометрической форме:

   а) $z=1-\sqrt{2}$; б) $z=1-\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Пусть $z_1=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$.

   Вычислите $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12}$.

3. Изобразите на рисунке множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z-3|=2|z|$.

4^0. Найдите наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если

$$z=3\sin\alpha+i\cos\alpha.$$

Вариант 3 **К-8**

1. Представьте в тригонометрической форме:

   а) $z=-3i$; б) $z=1-i\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

2. Пусть $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$.

   Вычислите $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{6}$.

3. Изобразите на рисунке множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases}1\leqslant|z-1|\leqslant 2,\\ 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant \sqrt{3}.\end{cases}$$

4^0. Найдите наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если

$$z=\cos 2\alpha+i(\sin\alpha-\cos\alpha).$$

Вариант 4 К-8

1. Представьте в тригонометрической форме:

а) $z=\sqrt{5}+1$; б) $z=1+\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Пусть $z_1=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2=1+i\sqrt{3}$.

Вычислите $(z_1z_2)^{12}$.

3. Изобразите на рисунке множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z+2i|\leqslant|z-1|$.

4^0. Найдите наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если

$$z=1+2\cos\alpha-i\sin\alpha.$$

Вариант 5 К-8

1. Представьте в тригонометрической форме:

а) $z=\sqrt{5}-3$; б) $z=1-\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha\left(\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right)$.

2. Пусть $z_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_2=-1+i\sqrt{3}$.

Вычислите $(z_1z_2)^{18}$.

3. Изобразите на рисунке множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases}|z|\leqslant 2,\\|z-3i|\geqslant 3.\end{cases}$$

4^0. Найдите наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если

$$z=\sin 2\alpha-i(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

Вариант 6 К-8

1. Представьте в тригонометрической форме:

а) $z=(1-\sqrt{2})i$; б) $z=1-i\operatorname{ctg}\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Пусть $z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$.

Вычислите $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{12}$.

3. Изобразите на рисунке множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\frac{|z-i|}{|z-5i|}=\frac{1}{3}.$$

4^0. Найдите наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если

$$z=\sin\alpha+i(2+\cos\alpha).$$

Самостоятельная работа № 13

Вариант 1 С-13

1. Найдите значения $\sqrt[3]{-i}$.
2. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1=2$, $x_2=3-2i$.

3. Сумма квадратов корней уравнения $x^3-3x^2+\lambda x-2=0$ равна 1. Найдите λ и решите это уравнение.

Вариант 2 **С-13**

1. Найдите значения $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.
2. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1=-1$, $x_2=3+4i$.
3. Сумма кубов корней уравнения $x^3-x^2+\lambda x-1=0$ равна 1. Найдите λ и решите это уравнение.

Вариант 3 **С-13**

1. Найдите значения $\sqrt[3]{1-i}$.
2. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1=x_2=1$, $x_3=i$.
3. Произведение двух корней уравнения $x^3+\lambda x-2=0$ равно 2. Найдите λ и решите это уравнение.

Вариант 4 **С-13**

1. Найдите значения $\sqrt{-i}$.
2. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1=-2$, $x_2=i$, $x_3=1-i$.
3. Сумма квадратов корней уравнения $x^3-\lambda x^2+7x-5=0$ $(\lambda>0)$ равна -5. Найдите λ и решите это уравнение.

Вариант 5 **С-13**

1. Найдите значения $\sqrt[3]{1+i}$.
2. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1=1-i$, $x_2=1+2i$.
3. Сумма кубов корней уравнения $x^3+x^2+x-\lambda=0$ равна -1. Найдите λ и решите это уравнение.

Вариант 6 **С-13**

1. Найдите значения $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.
2. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1=1$, $x_2=x_3=1-i$.
3. Сумма двух корней уравнения $x^3-x^2+\lambda=0$ равна 2. Найдите λ и решите это уравнение.

Контрольная работа № 9

Вариант 1 **К-9**

1. Решите уравнение на множестве комплексных чисел
$$6x^4-19x^3+25x^2-19x+6=0.$$
2. Решите в комплексных числах уравнение $z^2+\bar{z}=0$.

3. При каком значении $a \in \boldsymbol{R}$ число

$$x_1 = \frac{8}{\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20} + i\cos\frac{3\pi}{20}\right)\right)^5}$$

является корнем уравнения

$$x^3 - (a+3)x^2 + 6a^2x + a^2 - 5 = 0?$$

Найдите остальные корни уравнения при найденном значении a.
4. Решите уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5\cos 3x$.
5. Решите неравенство $(2^x - 3)(2x^2 - 7x + 6) < 0$.
6^0. Решите в целых числах уравнение $2x + 3y = 7$.

Вариант 2 **К-9**

1. Решите уравнение на множестве комплексных чисел

$$10x^4 + 39x^3 + 49x^2 + 39x + 10 = 0.$$

2. Решите в комплексных числах уравнение $|z| - 2z = 2i - 1$.
3. При каком значении $b \in \boldsymbol{R}$ число

$$x_1 = \frac{32}{\left(\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}}$$

является корнем уравнения

$$x^3 - (b+6)x^2 + 8b^2x - 7 + b^2 = 0?$$

Найдите остальные корни уравнения при найденном значении b.
4. Решите уравнение $5\sin x - 12\cos x = 13\sin 5x$.
5. Решите неравенство $\dfrac{3^x - 5}{2x^2 - 5x + 3} > 0$.
6^0. Решите уравнение в целых числах $2xy - 3y^2 - 4y + 2x = 2$.

Вариант 3 **К-9**

1. Решите уравнение на множестве комплексных чисел

$$6x^4 + 19x^3 + 25x^2 + 19x + 6 = 0.$$

2. Решите в комплексных числах уравнение $z|z| + 2z + i = 0$.
3. При каком значении $a \in \boldsymbol{R}$ число

$$x_1 = \frac{32}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} - i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\right)^9}$$

является корнем уравнения

$$x^3 + (2-a)x^2 - 4a^2x + 5 + a^2 = 0?$$

Найдите остальные корни уравнения при найденном значении a.
4. Решите уравнение $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\sin 7x$.
5. Решите неравенство $(7^x - 4)(3x^2 - 5x + 2) > 0$.
6^0. Решите уравнение в целых числах $3x - 2y = 8$.

Вариант 4 **К-9**

1. Решите уравнение на множестве комплексных чисел

$$10x^4-39x^3+49x^2-39x+10=0.$$

2. Решите в комплексных числах уравнение $|z|=2i(\bar{z}+1)$.
3. При каком значении $b\in\mathbf{R}$ число

$$x_1=\frac{32}{\left(\sqrt[4]{2}\left(\sin\frac{5\pi}{8}-i\cos\frac{5\pi}{8}\right)\right)^{18}}$$

является корнем уравнения

$$x^3-(b+1)x^2-2b^2x+3+b^2=0?$$

Найдите остальные корни уравнения при найденном значении b.
4. Решите уравнение $2\sqrt{5}\cos 3x-4\sin 3x=6\cos 5x$.
5. Решите неравенство $\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0$.

6^0. Решите в целых числах уравнение $x(x+y-1)=y+1$.

Вариант 5 **К-9**

1. Решите уравнение на множестве комплексных чисел

$$12x^4+37x^3+49x^2+37x+12=0.$$

2. Решите в комплексных числах уравнение $|z|=i(2\bar{z}+1)$.
3. При каком значении $a\in\mathbf{R}$ число

$$x_1=\frac{8}{\left(\sqrt[10]{2}\left(\sin\frac{9\pi}{20}+i\cos\frac{9\pi}{20}\right)\right)^{25}}$$

является корнем уравнения

$$x^3+(2-a)x^2+4a^2x+1+a^2=0?$$

Найдите остальные корни уравнения при найденном значении a.
4. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=2\cos 5x$.
5. Решите неравенство $(3^x-15)(2x^2-7x+5)>0$.

6^0. Решите в целых числах уравнение $3x-5y=0$.

Вариант 6 **К-9**

1. Решите уравнение на множестве комплексных чисел

$$12x^4-37x^3+49x^2-37x+12=0.$$

2. Решите в комплексных числах уравнение $|z|=1+2i\bar{z}$.
3. При каком значении $b\in\mathbf{R}$ число

$$x_1=\frac{4}{\left(\sqrt[4]{2}\left(\sin\frac{3\pi}{8}-i\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right)^{6}}$$

является корнем уравнения

$$x^3+bx^2+(b^2-1)x-4+2b^2=0?$$

Найдите остальные корни уравнения при найденном значении b.

4. Решите уравнение $2\sin 2x+\sqrt{21}\cos 2x=5\sin 7x$.
5. Решите неравенство $\frac{6^x-3}{3x^2-2x}<0$.

6^0. Решите в целых числах уравнение $2x^2-3xy+2x+3y=3$.

Контрольная работа № 10

Вариант 1 **К-10**

1. Сколько чисел, меньших 10^5, можно записать из цифр 7, 6, 4? Сколько среди них нечетных?
2. Найдите сумму четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 3, 7, 7, 5.
3. Найдите все корни уравнения
$$\sqrt{3\sin 2x+2\cos^2 x}=2\sqrt{2}\sin x,$$
принадлежащие $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

4^0. Докажите, что $5^n+12n+15$ при любом натуральном n кратно 16.

Вариант 2 **К-10**

1. Сколько существует различных треугольников, длины сторон которых принимают значения: 8, 10, 12 и 14 см? Сколько среди них равносторонних, равнобедренных и разносторонних?
2. Сколько чисел, меньших 1000, можно составить из цифр 5, 7 и 3?
3. Найдите все корни уравнения
$$\sqrt{2+3\sin x\cos x-2\cos 2x}=-\cos x,$$
принадлежащие $[0;\ \pi]$.

4^0. Докажите, что $3^n+5^n+7^n+1$ кратно 4 при любом натуральном n.

Вариант 3 **К-10**

1. Сколько чисел, меньших 10^4, можно составить из цифр 3, 5, 8? Сколько среди них четных?
2. Найдите сумму четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 8, 3, 3, 4.
3. Найдите все корни уравнения
$$\sqrt{3\cos^2 x-\sin 2x}=-\sin x,$$
принадлежащие $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

4^0. Докажите, что 5^n+3^n+2 кратно 4 при любом четном $n\in N$.

Вариант 4 **К-10**

1. Сколько существует прямоугольных параллелепипедов, измерения которых являются целыми числами от 5 до 14? Сколько среди них правильных призм?

2. Чему равна сумма четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 2, 5, 5, 5?
3. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{\cos 2x+5\sin x\cos x+3}=2\cos x,$$

принадлежащие $[0;\ \pi]$.

4^0. Докажите, что 7^n+3n-1 кратно 9 при $n\in\boldsymbol{N}$.

Вариант 5 **К-10**

1. Сколько чисел, меньших 10^4, можно составить из цифр 1, 2, 4, 6? Сколько среди них нечетных?
2. Найдите сумму трехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 3, 3, 2.
3. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{-3\sin 2x-4\cos^2 x}=\sqrt{2}\sin x,$$

принадлежащие $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

4^0. Докажите, что 7^n+11^n+4 делится на 6 при любом четном $n\in\boldsymbol{N}$.

Вариант 6 **К-10**

1. Сколько существует различных треугольников, длины сторон которых принимают значения: 5, 6, 7, 8, 9? Сколько среди них равносторонних, равнобедренных и разносторонних?
2. Сколько чисел, меньших 10^4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
3. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{1+3\sin x\cos x-\cos 2x}=\sqrt{5}\cos x,$$

принадлежащие $[\pi;\ 2\pi]$.

4^0. Докажите, что 16^n-4^n-3n делится на 9 при $n\in\boldsymbol{N}$.

Самостоятельная работа № 14

Вариант 1 **С-14**

1. В партии из 40 деталей 5 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что взятые наугад 4 детали окажутся без дефектов?
2. В первой команде шахматистов 7 гроссмейстеров и 3 мастера спорта, а во второй 4 гроссмейстера и 6 мастеров спорта. Сборная, составленная из игроков первой и второй команд, содержит 10 человек: 8 человек из первой команды и 2 человека из второй. Из сборной команды наугад выбирается один шахматист. Какова вероятность того, что он гроссмейстер?
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cos y=0,\\ \cos^2 x-\cos 2y=\frac{7}{4}.\end{cases}$$

Вариант 2 **С-14**

1. Собрание, состоящее из 30 человек, среди которых 8 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Найдите вероятность того, что в делегацию войдут двое мужчин и одна женщина, считая, что все присутствующие равноправны быть избранными.
2. Из 10 винтовок, среди которых 6 снайперских и 4 обычные, наугад выбирается одна и из нее производится выстрел. Какова вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки 0,9, а из обычной 0,7?
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin y}\,\sin 2x = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y. \end{cases}$$

Вариант 3 **С-14**

1. На стеллаже 20 учебников, 7 из них в переплете. Наугад выбираются 4 учебника. Какова вероятность того, что все они будут в переплете?
2. Детали от двух станков поступают в общий бункер. Вероятность выпуска бракованной детали для первого станка равна 0,02, для второго 0,01. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Какова вероятность того, что взятая наугад из бункера деталь будет бракованной?
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{-\cos y}\cdot\sin x = 0, \\ \sin y + \cos 2x = 1{,}5. \end{cases}$$

Вариант 4 **С-14**

1. В партии из 40 деталей 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что взятые наугад 3 детали окажутся без дефектов?
2. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого цеха и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго 5%. Найдите вероятность того, что одна взятая наугад болванка не имеет дефектов.
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x}\cdot\sin 2y = 0, \\ \sin^2 y - \cos 2x = 1{,}5. \end{cases}$$

Вариант 5 **С-14**

1. Собрание, состоящее из 35 человек, среди которых 14 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найдите вероятность того, что в делегацию войдут две женщины, считая, что все присутствующие равноправны быть избранными.
2. Группа учащихся состоит из 10 отличников, 7 хорошо успевающих и 3 успевающих слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить с равной вероятностью как отличную, так и хорошую оценку. Хорошо успевающие учащиеся могут получить с равной вероятностью отличные, хорошие и удовлетворительные оценки.

Слабоуспевающие могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один учащийся. Какова вероятность того, что он получит хорошую оценку?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos 2y = 0, \\ \sqrt{2} \sin y + \sin^2 x = \cos x + 1{,}25. \end{cases}$$

Вариант 6 **С-14**

1. В лотерее разыгрывается 100 билетов, из которых 20 выигрышных. Некто покупает 5 билетов. Какова вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выиграет?
2. Детали на сборку попадают с двух автоматических линий. Известно, что первая линия дает 2% брака, вторая 4%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первой линии поступило 50 деталей, а со второй 30 деталей.
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \sin 2y = 0, \\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5. \end{cases}$$

Контрольная работа № 11

Вариант 1 **К-11**

1. На карточке спортлото написаны числа от 1 до 49. Какова вероятность того, что наугад зачеркнутое число на этой карточке кратно 6?
2. В магазин вошли 11 покупателей. Вероятность совершить покупку каждым из них равна 0,1. Какова вероятность того, что 7 из них совершат покупку?
3. Решите неравенство $3^x < 6^{2x-1}$.
4. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}25$, если $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5^0. При каких значениях a неравенство $\log_{\frac{3-a}{3}}\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) < 2$ выполняется при любом действительном значении x?

Вариант 2 **К-11**

1. В круг радиуса 10 см вписан квадрат. Какова вероятность того, что наугад поставленная в данном круге точка не попадет на квадрат?
2. Из последовательности чисел 101, 102, 103, ..., 200 выбирают подряд с возвращением 10 чисел. Какова вероятность того, что среди них кратных 8 будет не более одного?

3. Решите неравенство $\log_2^2 (x-1)^2 < 4$.

4. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}5 + \cos 2x$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

5^0. При каких действительных значениях a неравенство

$$2(1-a)\cdot 9^{2x} + a < 1 + (2-a)\, 3^{4x+1}$$

не имеет решений?

Вариант 3 **К-11**

1. Записаны подряд все натуральные числа от 1 до 51. Какова вероятность того, что наугад зачеркнутое число при делении на 5 дает остаток, равный 1?
2. В мастерской работают 10 станков. Для каждого станка вероятность выхода из строя к концу рабочего дня равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня выйдут из строя 3 станка.
3. Решите неравенство $5^{1-2x} < 3^x$.
4. Решите уравнение $\cos^4 x + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}25$, если $x \in \left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

5^0. При каких действительных значениях a неравенство

$$\log_{a-3} (|x| + 4) \geqslant 2$$

справедливо при всех действительных значениях x?

Вариант 4 **К-11**

1. Около круга радиуса 6 см описан правильный треугольник. Какова вероятность того, что наугад поставленная в построенном треугольнике точка не попадет на круг?
2. Из последовательности чисел 5, 6, 7, ..., 100 выбирают наугад с возвращением 8 чисел. Какова вероятность того, что среди них кратных 7 будет не более одного?
3. Решите неравенство $\log_2^2 (x+2)^2 > 4$.
4. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{16} + \cos 2x$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

5^0. При каких действительных значениях a неравенство

$$2^{2x+1}(a-2) + 4^x (1-a) > a - 2$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 5 **К-11**

1. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение очков, выпавших на обеих костях, не больше 24.
2. В магазин входят 8 покупателей. Найдите вероятность того, что 3

из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку каждого из них равна 0,3.

3. Решите неравенство $2^{3x-1}>3^{2x+1}$.

4. Решите уравнение $\cos^4\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos^4 x=0{,}25$, если $x\in\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

5⁰. При каких действительных значениях a неравенство

$$\log_{\frac{a}{a-1}}(x^2+3)>1$$

справедливо при всех действительных значениях x?

Вариант 6 **К-11**

1. В круг радиуса 3 см вписан правильный шестиугольник. Какова вероятность того, что наугад поставленная в круге точка не попадет на шестиугольник?
2. Из последовательности чисел 25, 26, 27, ..., 99 выбирают наугад с возвращением 8 чисел. Какова вероятность того, что среди них кратных 6 будет не более двух?
3. Решите неравенство $\log_3^2(2x+1)^2<4$.
4. Решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+\sin x\cos x$, если $x\in[0;\ \pi]$.

5⁰. При каких действительных значениях a неравенство

$$(a-1)\,4^x+2^{2x+1}(3-a)+a>1$$

справедливо при всех действительных значениях x?

Контрольная работа № 12

Вариант 1 **К-12**

1. Дана функция $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\sin x}}+\sqrt{\frac{10-x^2}{x^4-11x^2+18}}$.

   а) Найдите область определения функции f.

   б) Назовите хотя бы одно рациональное и одно иррациональное число из области определения f.

   в) Является ли функция f четной или нечетной?

   г) Найдите предел функции f при $x\to 0$.

2. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами сумма первого и третьего членов равна $\frac{5}{4}$, разность между первым и пятым членами равна $\frac{15}{16}$. Найдите отношение суммы квадратов членов прогрессии к квадрату суммы всех ее членов.

3. В правильную четырехугольную пирамиду, объем которой V, вписана правильная четырехугольная призма, вершины верхнего основания которой лежат на боковых ребрах пирамиды, а плоскость нижнего основания призмы является плоскостью основания пирамиды. Найдите наибольший возможный объем призмы.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{2x}$, касательной к этой кривой в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$, и прямой $y=0$.

5^0. Решите уравнение

$$\sin 2x\left(3\sin 2x-\cos\frac{x}{2}\right)=\cos 2x\left(2+\sin\frac{x}{2}-3\cos 2x\right).$$

Вариант 2 **К-12**

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^2}{\sin 3x}+\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\sqrt{3-x^2}}{1-x^2}$.

   а) Найдите область определения функции f.
   б) Назовите хотя бы одно рациональное и одно иррациональное число из области определения f.
   в) Выясните, является ли функция f четной или нечетной.
   г) Найдите $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{3}{4}$, второй ее член равен $-\frac{1}{3}$. Найдите сумму квадратов всех членов этой прогрессии.
3. Каждая из боковых сторон и меньшее основание трапеции равны a. Найдите большее основание трапеции так, чтобы ее площадь была наибольшей.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+1$, касательной к ней в точке с абсциссой $x_0=1$, и прямой $x=0$.

5^0. Решите уравнение $3^{\sin x}=4-\cos^2\frac{4x}{3}$.

Вариант 3 **К-12**

1. Дана функция $f(x)=\log_9\dfrac{\sin 3x}{x}-\dfrac{\sqrt{4x^2-x^4+5}}{\cos\pi x}-x$.

   а) Найдите область определения функции f.
   б) Назовите хотя бы одно рациональное и одно иррациональное число из области определения f.
   в) Выясните, является ли функция f четной или нечетной.
   г) Найдите предел функции f при $x\to 0$.
2. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{2}{3}$, а сумма кубов ее членов равна $\frac{8}{9}$. Найдите пятый член прогрессии.

3. Найдите размеры открытого бассейна объемом 18 м^3 с дном в форме прямоугольника, стороны которого относятся как 1:3, так, чтобы на облицовку стен и дна пошло наименьшее количество материала.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=\sqrt{1-x}$, касательной к ней в точке с абсциссой $x_0=0$, и прямой $y=0$.

5^0. Решите уравнение

$$\sin^2 x-\cos^2 3x=2\,|\sin 3x|+|\sin x|-\frac{9}{4}.$$

Вариант 4 **К-12**

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}+\dfrac{\operatorname{tg} 2\pi x}{\sqrt{2-6x^4-11x^2}}$.

   а) Найдите область определения функции f.
   б) Назовите хотя бы одно рациональное и одно иррациональное число из области определения f.
   в) Выясните, является ли функция f четной или нечетной.
   г) Найдите $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма членов, стоящих на четных местах, в два раза меньше суммы всех членов прогрессии, стоящих на нечетных местах. Найдите пятый член прогрессии, если сумма первых пяти членов прогрессии равна 31.
3. Площадь равнобедренной трапеции с углом при основании 60° равна $2\sqrt{3}$ дм^2. Найдите длину высоты трапеции наименьшего периметра.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^3$ и касательной к этой линии в точке с абсциссой $x_0=1$.

5^0. Решите уравнение

$$\cos x\left(4-\cos\frac{x}{2}-5\cos x\right)=\sin x\left(5\sin x-\sin\frac{x}{2}\right).$$

Вариант 5 **К-12**

1. Дана функция $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{4\sin 4x}{x}}+\sqrt{(2x^2+1)(6-x^2)}+x$.

   а) Найдите область определения функции f.
   б) Назовите хотя бы одно рациональное и одно иррациональное число из области определения f.
   в) Выясните, является ли функция f четной или нечетной.
   г) Найдите предел функции f при $x\to 0$.
2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 8, а сумма первых пяти ее членов равна $7\frac{3}{4}$. Найдите шестой член прогрессии.

3. Объем правильной треугольной пирамиды равен $\sqrt{3}$. Угол наклона боковой грани к плоскости основания равен φ. При каком значении φ площадь боковой поверхности пирамиды наименьшая?
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=2\sqrt{\frac{x}{2}}-1$, касательной к этой линии в точке с абсциссой $x_0=2$, и прямой $x=0$.

5^0. Решите уравнение $2^{|\cos 2x|}=\frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sqrt{2}}$.

Вариант 6 **К-12**

1. Дана функция $f(x)=\frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 2\pi x}+\sqrt{\frac{x^2+4}{9-5x^2}}$.

а) Найдите область определения функции f.
б) Назовите хотя бы одно рациональное и одно иррациональное число из области определения f.
в) Выясните, является ли функция f четной или нечетной.
г) Найдите $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма квадратов всех ее членов равна $\frac{16}{3}$. Найдите первые четыре члена прогрессии.
3. В круг радиуса R вписана трапеция так, что ее большее основание является диаметром круга. Какой угол образует боковая сторона трапеции с большим основанием, если площадь трапеции наибольшая?
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2+2x+1$, касательной к ней в точке с абсциссой $x_0=1$, и прямой $x=-1$.

5^0. Решите уравнение $\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos\frac{12x}{5}=5-3\cos^2 x$.

Самостоятельная работа № 15

Вариант 1 **С-15**

1. Найдите $E(f)$, если $f(x)=\sin 2x+2\cos x$ и $D(f)=\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.
2. Решите неравенство $\sin 2x-\sin x>\sin 3x$.
3. Решите уравнение $\arccos(\sin(2\operatorname{arctg} x))=0$.

Вариант 2 **С-15**

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin x\cos 2x$ на $[0;\ \pi]$.
2. Решите неравенство $\cos 3x-\cos 2x>\cos 4x$.
3. Решите уравнение $\arcsin(\operatorname{ctg}(0{,}5\arcsin x))=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 3 **С-15**

1. Найдите $E(f)$, если $f(x)=\sin 2x-2\cos x$ и $D(f)=\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Решите неравенство $\cos x-\sin 3x<\sin x$.
3. Решите уравнение $\operatorname{arctg}(\sin(2\arccos x))=\frac{\pi}{4}$.

Вариант 4 **С-15**

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=0{,}5\cos x\sin 2x$ на $[-\pi;\ \pi]$.
2. Решите неравенство $\sin 4x-\sin 3x>\sin 5x$.
3. Решите уравнение $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg} x))=0$.

Вариант 5 **С-15**

1. Найдите $E(f)$, если $f(x)=\sin x+\cos 2x$ и $D(f)=[0;\ \pi]$.
2. Решите неравенство $\sin x+\cos x>\cos 3x$.
3. Решите уравнение $\arccos(\operatorname{tg}(0{,}5\arcsin x))=0$.

Вариант 6 **С-15**

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin x\sin 2x$ на $[-\pi;\ \pi]$.
2. Решите неравенство $\sin x+\cos 3x<\cos x$.
3. Решите уравнение $\operatorname{arcctg}(\cos(2\arcsin x))=\frac{\pi}{4}$.

Самостоятельная работа № 16

Вариант 1 **С-16**

1. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2^x}{\sin 2^{x-2}\cos 2^{x-2}}=2\sqrt{3}$.
2. Решите неравенство $\log_4(x-2)^2+\log_2(x+1)\leqslant 1$.
3. Найдите точки экстремума функции
$$y=\log_2^3 x-3\log_2 x+1.$$

Вариант 2 **С-16**

1. Решите уравнение $\dfrac{\sin(3\cdot 2^x)}{3\sin 2^{x-1}-4\sin^3 2^{x-1}}=2$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(x-8)^2+\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27$.
3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции
$$y=e^{-2x}+4e^{-x}+6x+\sqrt{3}.$$

Вариант 3 **С-16**

1. Решите уравнение $\dfrac{\sin 4^{1+x}}{\sin 4^x \cos 4^x}=4.$

2. Решите неравенство $\log_3(4-x)+\log_9(2-x)^2\leqslant 1.$

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=(2^x-1)^2(2^x-4).$$

Вариант 4 **С-16**

1. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2^{x+1}}{1-2\sin^2 2^{x-1}}=-1.$

2. Решите неравенство $\log_9(2x-3)^2+\log_3(2-2x)\leqslant\log_3 2.$

3. Найдите точки экстремума функции

$$y=\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}.$$

Вариант 5 **С-16**

1. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3^{x+1}}{2\cos^2\left(\frac{3^x}{2}\right)-1}=1.$

2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(x-4)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqslant\log_{\frac{1}{2}} 3.$

3. Найдите точки экстремума функции

$$y=e^{-x}(x^2+x-5).$$

Вариант 6 **С-16**

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4^x}{(\cos 4^{x-1}+\sin 4^{x-1})(\cos 4^{x-1}-\sin 4^{x-1})}=-\sqrt{3}.$$

2. Решите неравенство $\log_4(x-2)^2+\log_2(1-x)\geqslant 1+\log_2 3.$

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=\dfrac{x^3}{\ln x}.$

Контрольная работа № 13

Вариант 1 **К-13**

1. Найдите все действительные значения x и y, при которых комплексные числа

$$z_1=\log_y\left(\frac{x}{2}\right)+2xi \text{ и } z_2=\log_{\frac{x}{2}} y-yi$$

будут сопряженными.

2. Найдите все решения уравнения

$$\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}(1-\sin 2x),$$

принадлежащие $[0;\ 2\pi]$.

3. Решите неравенство $4^{x^2-x+2}+64^x<17\cdot 2^{x^2+2x}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^3-3x$ и касательной к ней в точке с абсциссой $x_0=-1$.

5. В основании четырехугольной пирамиды $EABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро ED является высотой пирамиды. Длина высоты равна длине сторон основания пирамиды и равна 3 дм. Найдите наибольший объем пирамиды, вершина которой лежит на ребре AD, а основанием является сечение пирамиды $EABCD$ плоскостью параллельной прямым BC и ED.

Вариант 2 **К-13**

1. Найдите все действительные значения a, при которых равны комплексные числа

$$z_1=3+2a+i(a^4+2) \text{ и } z_2=6-a^2+i(4-a).$$

2. Решите неравенство $\log_2(5-x^2)>\log_2(|x|-1)$.

3. Найдите все значения α, при которых уравнение

$$x^2-x\cos\alpha-0{,}5\cos 4\alpha=0$$

имеет два действительных различных корня, сумма квадратов которых равна 0,25.

4. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y=x^3+1$, $x=2$, $y=0$.

5. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. Через ребро основания AB и точку M, взятую на ребре B_1C_1, проведено сечение. Найдите наибольшую и наименьшую площади сечения, если высота призмы равна 2 см, а высота основания 3 см.

Вариант 3 **К-13**

1. Известно, что число i является одним из корней уравнения

$x^4-(2a+b+1)x^3+(3a+5b)x^2-8x+13=0$, где $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$.

Найдите значения a и b и решите уравнение при найденных значениях a и b.

2. Решите уравнение

$$16\log_4^2\frac{x}{\sqrt[8]{2}}-9\log_8(2x)=8^{-\frac{4}{3}}.$$

3. Решите неравенство $\cos 2x+\cos x\geqslant 0$, где $x\in[-\pi;\ \pi]$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-4x+3$ и касательной к графику функции $y=(3x-1)\,e^{1-x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.
5. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, имеющая наибольший объем. Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.

Вариант 4 **К-13**

1. Найдите все значения $a \in \mathbf{R}$, для которых комплексные числа
$$z_1=9^a+3+i\log_5(6-a) \text{ и } z_2=4\cdot 3^a+i\log_{0,5}(a+1)$$
будут сопряженными.
2. Решите неравенство $4\sqrt{x^2+3x} \geqslant -5x-12$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3}, \\ \sin y=2\sin x. \end{cases}$$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=\frac{x+1}{x-1}$, касательной к ней в точке $M(2;\ 3)$, и прямой $x=4$.
5. В конусе объема V расположен второй конус так, что его вершина лежит на основании данного конуса, а основанием является сечение данного конуса плоскостью, параллельной его основанию. Найдите наибольший возможный объем второго конуса.

Вариант 5 **К-13**

1. Вычислите $(1+i\sqrt{3})^{17}+(1-i\sqrt{3})^{17}$.
2. Решите уравнение $\log_2(\sqrt{2}\sin x)=\log_4(\cos 4x-\cos 6x)$.
3. Решите неравенство $9^{-x}+2\cdot 3^{1+x}>7$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y=\sqrt{3-x} \text{ и } y=|x+1|-2.$$
5. Длины двух непересекающихся ребер треугольной пирамиды равны a, все остальные ребра имеют длину, равную 1. При каких значениях a объем пирамиды будет наибольшим? Вычислите этот объем.

Вариант 6 **К-13**

1. Найдите все действительные значения x и y, при которых комплексные числа
$$z_1=\log_{2x} y+xi \text{ и } z_2=\log_y(2x)+2yi$$
будут равными.

2. Найдите все решения уравнения

$$\cos x - \sin x = 1 - \sin 2x,$$

удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right| \leqslant \frac{\pi}{8}$.

3. Решите уравнение $2^{2x+1} + 18 \cdot 2^{-2x} - 11 \cdot 2^x - 33 \cdot 2^{-x} + 26 = 0$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt,$$

параллельной прямой $x - y + 1 = 0$.

5. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг боковой стороны, был наибольшим?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ И КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ ДЛЯ X КЛАССА

Вариант 1 С-1

1. Один корень, $x=4{,}5$.

2. Пусть $10^{\frac{p}{q}}=2$, где $p\in\boldsymbol{N}$, $q\in\boldsymbol{N}$. Тогда $10^p=2^q$. Левая часть равенства делится на 10, правая нет. Равенство верным быть не может.
3. Корни рациональны, если $a^2-144=n^2$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Так как $x_1+x_2=$ $=-\frac{a}{4}$ — целое число, то $a=4k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Имеем: $16k^2-144=n^2$, т. е. n^2 кратно 16, $n=4p$, $p\in\boldsymbol{Z}$. Далее, $k^2-p^2=9$, $(k+p)(k-p)=9$. Так как k и p целые, то возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} k+p=9,\\ k-p=1;\end{cases}\qquad \begin{cases} k+p=1,\\ k-p=9;\end{cases}\qquad \begin{cases} k+p=-9,\\ k-p=-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} k+p=-1,\\ k-p=-9;\end{cases}\qquad \begin{cases} k+p=3,\\ k-p=3;\end{cases}\qquad \begin{cases} k+p=-3,\\ k-p=-3.\end{cases}$$

Решив каждую систему уравнений в отдельности, получим: $k=\pm3$, $k=\pm5$. Следовательно, $a=\pm12$, $a=\pm20$. Ответ: $a=\pm12$, $a=\pm20$.

Вариант 2 С-1

1. 5. 3. Из условия следует, что $x_1+x_2=-\frac{20}{a}$. Так как x_1+x_2 — целое, то a может принимать значения ±1; ±2; ±4; ±5; ±10; ±20. Корни рациональны, если $100-9a=k^2$, $k\in\boldsymbol{Z}$; этому условию удовлетворяет только $a=4$. Ответ: $a=4$.

Вариант 3 С-1

1. Решив уравнение, получим $x=3$. 3. Корни рациональны, если $144+9a^2=m^2$, $m\in\boldsymbol{Z}$. Очевидно, m^2 кратно 9, $m=3k$. Имеем: $16+a^2=k^2$, $k^2-a^2=16$, откуда $|k|=5$, $|a|=3$. Ответ: $a=3$.

Вариант 4 С-1

1. $x=5{,}5$. 3. $a=\pm8$, $a=\pm10$.

Вариант 5 С-1

1. Решив уравнение, получим $x=9$. 3. $a=2$.

Вариант 6 С-1

1. Уравнение имеет один корень $x=2{,}5$. **3.** $a \doteq 2$.

Вариант 1 С-2

1. $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$, $\frac{23}{17} \approx 1{,}35294$,

$\sqrt{3}+\frac{23}{17} \approx 3{,}0850$, $\sqrt{3}-\frac{23}{17} \approx 0{,}3791$,

$\sqrt{3} \cdot \frac{23}{17} \approx 2{,}3434$, $\sqrt{3} : \frac{23}{17} \approx 1{,}2802$.

2. $\alpha=4{,}123123312333\ldots$, $\beta=2{,}012012201222\ldots$, тогда $\alpha-\beta=2{,}111\ldots$.

3. Допустим противное: $\frac{\alpha}{\beta}=r_1$, $\alpha-\beta=r_2$, где r_1 и r_2 — рациональные числа, тогда $\beta=\frac{r_2}{r_1-1}$. Так как из условия следует, что $r_1 \neq 1$, r_2 и r_1-1 — рациональные числа, то $\frac{r_2}{r_1-1}$ — рациональное число, т. е. β — рациональное число, а это противоречит условию. Следовательно, частное и разность двух неравных иррациональных чисел одновременно не могут быть рациональными числами.

Вариант 2 С-2

1. $\sqrt{5} \approx 2{,}23607$, $\frac{43}{31} \approx 1{,}38710$,

$\sqrt{5}+\frac{43}{31} \approx 3{,}6232$, $\sqrt{5}-\frac{43}{31} \approx 0{,}8490$,

$\sqrt{5} \cdot \frac{43}{31} \approx 3{,}1017$, $\sqrt{5} : \frac{43}{31} \approx 1{,}6121$.

2. $\alpha=1{,}5\sqrt{3}$, $\beta=7\sqrt{3}$, тогда $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{14} \in \boldsymbol{Q}$.

3. $\alpha+2\beta=(\alpha-\beta)+3\beta$. Так как $\alpha-\beta$ — рациональное число, а 3β — иррациональное, то $\alpha+2\beta$ — иррациональное число.

$$\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta).$$

Так как $\alpha+2\beta$ — иррациональное число, а $\alpha-\beta \neq 0$ — рациональное число, то $(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)$ — иррациональное число.

Вариант 3 С-2

1. $\approx 3{,}9361$; $\approx 1{,}3554$; $\approx 3{,}4139$; $\approx 2{,}0505$.

3. Пусть $\alpha_1+\alpha_2=r_1$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2=r_2$, где r_1 и r_2 — рациональные числа. Решим уравнение $x^2-r_1x+r_2=0$:

$$x=\frac{r_1 \pm \sqrt{r_1^2-4r_2}}{2}.$$

Пусть $\frac{r_1}{2}=a$, а $\frac{1}{4}(r_1^2-4r_2)=b$, тогда $x=a \pm \sqrt{b}$, где x является или α_1, или α_2.

Вариант 4 С-2

1. $\approx 2{,}9426$; $\approx 0{,}5215$; $\approx 2{,}0967$; $\approx 1{,}4308$.

2. Из равенства $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ следует, что число $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рационально. Но тогда число $\sqrt{a}$, являющееся полусуммой рациональных чисел $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, рационально. Точно так же доказывается рациональность $\sqrt{b}$.

Вариант 5 С-2

1. $\approx 4{,}4550$; $\approx 1{,}8696$; $\approx 4{,}0878$; $\approx 2{,}4463$.

Вариант 6 С-2

1. $\approx 4{,}4676$; $\approx 2{,}1657$; $\approx 3{,}8172$; $\approx 2{,}8817$.

Вариант 1 К-1

1. а) $AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $AC=\sqrt{12^2+5^2}=13$, $BC=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$. Воспользуемся теоремой косинусов: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times$ $\times BC\cdot\cos B$, $\cos B=\frac{25+68-169}{20\sqrt{17}}<0$; следовательно, $90°<B<180°$, т. е. треугольник ABC тупоугольный.

б) По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{13},\ \lambda=\frac{5}{13},$$

$$x_D=\frac{2+\frac{5}{13}\cdot 10}{1+\frac{5}{13}}=4\frac{2}{9},\ y_D=\frac{2+\frac{5}{13}\cdot 0}{1+\frac{5}{13}}=1\frac{4}{9}.$$

Ответ: $D\left(4\frac{2}{9};\ 1\frac{4}{9}\right)$.

2. Рассмотрим промежутки: а) $x<-2$; б) $-2\leqslant x<3$; в) $x\geqslant 3$.

а) $\begin{cases} x<-2, \\ -x+3-2-x\leqslant 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ x\geqslant -0{,}5 \end{cases}$ нет решений;

б) $\begin{cases} -2\leqslant x<3, \\ -x+3+2+x\leqslant 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leqslant x<3, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leqslant x<3;$

в) $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x-3+x+2\leqslant 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3, \\ 0\cdot x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 3.$

Ответ: $x\geqslant 1$.

3. Пусть $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}=r$, где r — рациональное число. Тогда $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}=r-5\sqrt{5}$,

$$35+12\sqrt{6}=r^2+125-10r\sqrt{5},$$
$$12\sqrt{6}+10r\sqrt{5}=r^2+90,$$
$$864+500r^2+240r\sqrt{30}=(r^2+90)^2,$$
$$240r\sqrt{30}=(r^2+90)^2-864-500r^2,$$
$$\sqrt{30}=\frac{(r^2+90)^2-864-500r^2}{240r}=r_1,\ r_1\in\boldsymbol{Q}.$$

Пришли к противоречию: r_1 — рациональное число, а $\sqrt{30}$ — число иррациональное, следовательно, r не может быть рациональным числом.

Вариант 2 К-1

1. а) Вычислим длины сторон треугольника MKP: $MK=8$, $MP=2\sqrt{73}$, $KP=10$. Воспользовавшись теоремой косинусов, получим, что $\cos MKP<0$, следовательно, $90°<\angle MKP<180°$, т. е. треугольник MKP тупоугольный.

б) По свойству биссектрисы угла треугольника имеем:
$$\frac{MA}{AP}=\frac{MK}{KP}=0{,}8,\ \lambda=0{,}8,\ x_A=1\frac{8}{9},\ y_A=5\frac{2}{3}.$$

2. $x\leqslant 2\frac{1}{3}$.

3. Пусть $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}=r$, $r\in\boldsymbol{Q}$, $r\neq 0$. Имеем: $3+4+3\sqrt[3]{12}\,(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})=r^3$, $7+3\sqrt[3]{12}\,r=r^3$, $\sqrt[3]{12}=\frac{r^3-7}{3r}$. Получилось, что $\sqrt[3]{12}$ — рациональное число.

Вариант 3 К-1

1. а) $\cos ACB=0\Rightarrow\triangle ACB$ — прямоугольный;

б) $\frac{AM}{MB}=\frac{11}{6}$, $\lambda=\frac{11}{6}$. Ответ: $M\left(4;\ 11\frac{13}{17}\right)$.

2. $|3-x|+|x+4|\geqslant|3-x+x+4|=7$; решений нет.

Вариант 4 К-1

1. а) $MK=15$, $KH=10$, $MH=\sqrt{241}$, $MH>MK>KH$, $\cos MKH>0\Rightarrow\angle MKH$ — острый, треугольник MKH остроугольный;

б) $\frac{MB}{BH}=1{,}5$, $\lambda=1{,}5$. Ответ: $B(-7;\ 6{,}6)$.

2. x — любое действительное число.

Вариант 5 К-1

1. а) $DE=7\sqrt{2}$, $DK=2\sqrt{37}$, $EK=5\sqrt{2}$, $\cos DEK=0$, $\angle DEK$ — прямой; б) $C\left(3;\ -3\frac{5}{6}\right)$.

2. $2\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 7$.

Вариант 6 К-1

1. а) $AB=13$, $AC=\sqrt{137}$, $BC=10$, $\cos ACB>0$, $\angle ACB$ — острый; б) $E\left(-8\frac{5}{23};\ -6\frac{17}{23}\right)$.

2. Решений нет.

Вариант 1 С-3

1. $a\neq 0$, $a\neq -1$, $a\neq -\frac{1}{3}$.

2. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=x^2(y-z)+$
$+y^2(z-y+y-x)+z^2(x-y)=x^2(y-z)-y^2(y-z)-$
$-y^2(x-y)+z^2(x-y)=(y-z)(x^2-y^2)-(x-y)(y^2-z^2)=$
$=(x-y)(y-z)(x-z)$.

3. Числа, не кратные 5, составляют четыре подмножества множества натуральных чисел $\{5n\pm 1\mid n\in \boldsymbol{N}\}$, $\{5n\pm 2\mid n\in \boldsymbol{N}\}$; квадраты этих чисел при делении на 5 дают остатки или 1, или 4.

Вариант 2 С-3

1. $a\neq 0$, $a\neq 6$, $a\neq -6$.

2. Раскрывая скобки, находим:
$x^2y+2xyz+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2=x^2(y+z)+$
$+xy(y+z)+xz(y+z)+yz(y+z)=(y+z)(x+y)(x+z)$.

Вариант 3 С-3

1. $a\neq -1$, $a\neq -2$, $a\neq -1\frac{1}{3}$.

Вариант 4 С-3

1. $a\neq -3$, $a\neq 3$, $a\neq -9$. 2. $(x+y)(x+z)(y+z)$.

Вариант 5 С-3

1. $a\neq 1$, $a\neq 0$, $a\neq \frac{2}{3}$.

Вариант 6 С-3

1. $a\neq -4$, $a\neq 2$, $a\neq 8$. 2. $3(x-y)(y-z)(z-x)$.

Вариант 1 К-2

1. Обозначим данное утверждение через $P(n)$, где $n\in \boldsymbol{N}$. $P(1)$ — справедливо, так как при $n=1$ левая и правая части равенства принимают значение $\frac{1}{15}$. Докажем, что $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ для $k\in \boldsymbol{N}$. Имеем:

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{6}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2k-1}{(2k+1)(2k+3)}\,2^{k-1}+\frac{2k+1}{(2k+3)(2k+5)}\,2^k=$$
$$=\frac{2^k}{2k+3}-\frac{1}{3}+\frac{2k+1}{(2k+3)(2k+5)}\,2^k=\frac{2^k(2k+5+2k+1)}{(2k+3)(2k+5)}-\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{2^{k+1}}{2k+5}-\frac{1}{3}.$$

Итак, утверждение справедливо при $n=1$, и из его справедливости при $n=k$ следует, что оно верно и при $n=k+1$. Значит, утверждение справедливо для любого натурального значения n.

2. Обозначим данное утверждение через $P(n)$, где $n \in \mathbf{N}$. Докажем справедливость утверждения для $n=1$. Действительно, $7^1+3^2=16$, а 16 кратно 4.

Докажем, что $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \in \mathbf{N}$. Имеем:

$$7^{k+1}+3^{k+2}=(3+4)\,7^k+3^{k+2}=4\cdot 7^k+3\,(7^k+3^{k+1}).$$

Так как по предположению индукции 7^k+3^{k+1} кратно 4, а $4\cdot 7^k$ также кратно 4, то наше утверждение доказано.

3. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трехчлена, тогда

$$x_1+x_2=6, \qquad (1)$$

$$x_1x_2=\frac{2k+3}{k}, \qquad (2)$$

$$(3k)^2-k\,(2k+3)\geqslant 0. \qquad (3)$$

Из условия вытекает, что $k\neq 0$. Так как $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2\,(x_1+x_2)$, то, учитывая (1) и (2), имеем:

$$72=216-18\,\frac{2k+3}{k},$$

откуда находим: $k=0{,}5$. Условие (3) выполняется. Ответ: $k=0{,}5$.

4. При $n=1$ и $n=2$ утверждение справедливо: $a_1=2+1=3$, $a_2=4+2=6$. Пусть $x_k=2^k+k$, $x_{k+1}=2^{k+1}+k+1$. Докажем, что тогда $x_{k+2}=2^{k+2}+k+2$. Имеем:

$$x_{k+2}=3x_{k+1}-2x_k-1=$$

$$=3\,(2^{k+1}+k+1)-2\,(2^k+k)-1=2\cdot 2^{k+1}+k+2=2^{k+2}+k+2.$$

Итак, утверждение справедливо при $n=1$ и при $n=2$, а из его справедливости при $n=k$ и $n=k+1$ следует, что оно справедливо и при $n=k+2$. Значит, оно имеет место для всех натуральных значений n.

Вариант 2 К-2

2. $a_n=7\cdot 5^{2n-1}+2^{3n+1}$. При $n=1$ имеем: $a_1=51$ делится на 17. $a_{k+1}=8a_k+7\cdot 17\cdot 5^{2k-1}$, $k\in\mathbf{N}$. Отсюда следует, что если a_k делится на 17, то a_{k+1} также делится на 17.

3. Обозначим корни трехчлена через x_1 и x_2. Из условия имеем, что $b\neq 0$, тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b+2}{b}, \\ x_1x_2=-4, \\ x_1^2+x_2^2=10\,\dfrac{7}{9}. \end{cases}$$

Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$, имеем:

$$10\,\frac{7}{9}=\frac{(b+2)^2}{b^2}+8,\quad \frac{b+2}{b}=\pm\frac{5}{3},\ \text{или}\ b_1=3,\ b_2=-\frac{3}{4}.$$

4. При $n=5$ неравенство справедливо: $32 \geqslant 32$. Пусть $2^k \geqslant k^2 + k + 2$ ($k \geqslant 5$). Докажите, что тогда $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2 + (k+1) + 2$, т. е. $2^{k+1} \geqslant k^2 + 3k + 4$. Имеем:

$$2^{k+1} - k^2 - 3k - 4 = 2(2^k - k^2 - k - 2) + k^2 - k.$$

Осталось убедиться в том, что при $k \geqslant 5$ справедливо неравенство $k^2 - k = k(k-1) \geqslant 0$. Но это очевидно.

Вариант 3 **К-2**

3. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, $\frac{4(k+1)^2}{k^2} + \frac{48}{k} = 64$, $15k^2 - 14k - 1 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{15}$.

Вариант 4 **К-2**

3. $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{2}{3}$. **4.** $3^{k+1} - 5(k+1)^2 = 3(3^k - 5k^2) + 5(2k^2 - 2k - 1) > 0$, так как $2k^2 - 2k - 1 > 0$ при $k \geqslant 4$.

Вариант 1 **С-4**

2.
$$P(x) = (x-1)Q_1(x) + 3, \qquad (1)$$
$$P(x) = (x-2)Q_2(x) + 5. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $P(1) = 3$, $P(2) = 5$.
Пусть $P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$, или

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b. \qquad (3)$$

Подставив в (3) последовательно $x=1$ и $x=2$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ 2a + b = 5, \end{cases}$$

откуда $a = 2$, $b = 1$. Ответ: $2x + 1$.

3. Будем искать многочлен второй степени в виде $x^2 + mx + n$. Тогда должно выполняться тождество

$$(x^2 + mx + n)^2 = x^4 + ax^3 + 15x^2 - 18x + 9, \text{ или}$$
$$x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)x^2 + 2mnx + n^2 = x^4 + ax^3 + 15x^2 - 18x + 9.$$

Полученное равенство будет тождеством, если

$$\begin{cases} 2m = a, \\ m^2 + 2n = 15, \\ 2mn = -18, \\ n^2 = 9. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, находим $a = -6$.

$$\sqrt{x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9} = x^2 - 3x + 3.$$

Ответ: $a = -6$.

Вариант 2 С-4

2. По условию

$$P(x)=(x-1)Q_1(x)+4, \quad (1)$$
$$P(x)=(x+1)Q_2(x)+2, \quad (2)$$
$$P(x)=(x-2)Q_3(x)+8. \quad (3)$$

Пусть $P(x)=(x^3-2x^2-x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$, или

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c. \quad (4)$$

Из (1), (2) и (3) следует, что $P(1)=4$, $P(-1)=2$, $P(2)=8$. Тогда из (4) получаем:

$$\begin{cases} a+b+c=4, \\ a-b+c=2, \\ 4a+2b+c=8. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, находим $a=b=1$, $c=2$. Ответ: x^2+x+2.

3. Пусть $x^3+5=(x^2+mx+n)(x+a)$, где m и n — целые. Имеем тождество: $x^3+5=x^3+(m+a)x^2+(ma+n)x+na$, откуда

$$\begin{cases} m+a=0, \\ ma+n=0, \\ na=5. \end{cases}$$

Так как $a=-m$, то $n=m^2$. Подставив эти значения a и n в последнее уравнение системы, получаем равенство $m^3=-5$, которое ни при каком целом m верным быть не может.

Вариант 3 С-4

2. $-x+1$. 3. $a=\pm 4$, $b=-80$.

Вариант 4 С-4

2. Пусть $P(x)=(x-a)Q_1(x)$, $P(x)=(x-b)Q_2(x)$, $P(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+mx+n$.

Так как $P(a)=P(b)=0$, то имеем:

$$ma+n=0, \quad (1)$$
$$mb+n=0. \quad (2)$$

Так как $a\neq b$, то из (1) и (2) находим $m=n=0$.

3. $x^{3k}-1=(x^3)^k-1=(x^3-1)M(x)$.

Вариант 5 С-4

2. $x+3$. 3. $a=13$, $(3x^2-x+2)^2$, или $(-3x^2+x-2)^2$.

Вариант 6 С-4

2. x^2-1. 3. Докажите, что равенство

$$x^6+x^2+a=(x^3+x+a)(x^3+mx^2+nx+1)$$

не является тождеством ни при каких значениях a, m, n.

1. Пусть $P(x)=2x^4+3x^3-ax^2+bx-3$, тогда $P(-3)=78-9a-3b$, $P(2)=53-4a+2b$.

Из условия имеем: $P(-3)=0$, $P(2)=5$; получаем систему уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} 3a+b=26, \\ 2a-b=24, \end{cases}$$

откуда $a=10$, $b=-4$.

2. Пусть $P(x)=x^4-27x^2-14x+120$, $P(2)=0$, следовательно, $x_1=2$ — корень многочлена $P(x)$. Воспользуемся схемой Горнера и разделим многочлен $P(x)$ на $x-2$:

	1	0	−27	−14	120
2	1	2	−23	−60	0

Получим $P_1(x)=x^3+2x^2-23x-60$, $P_1(-3)=0$, следовательно, $x^2=-3$ — корень данного многочлена. Разделим многочлен $P_1(x)$ на двучлен $x+3$:

	1	2	−23	−60
−3	1	−1	−20	0

Получим многочлен $P_2(x)=x^2-x-20$, корни которого $x_3=-4$, $x_4=5$. Следовательно, корнями многочлена являются числа $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=-4$, $x_4=5$.

3. Если n — нечетное, то

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\ldots-a+1). \qquad (1)$$

Следовательно, при нечетном n из (1) следует, что $48^n+1=49k$ ($k\in N$) кратно 49 и, следовательно, кратно 7.

4. Пусть $P(x)=x^4-10x^3+27x^2-14x+2=(x^2+ax+b)\cdot(x^2+cx+k)$, где a, b, c, k — целые числа, тогда $x^4-10x^3+27x^2-14x+2=x^4+(a+c)x^3+(b+k+ac)x^2+(ak+bc)x+bk$. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} a+c=-10, & (1) \\ b+k+ac=27, & (2) \\ ak+bc=-14, & (3) \\ bk=2. & (4) \end{cases}$$

Для решения задачи достаточно найти одно решение системы в целых числах. Одним из решений уравнения (4) в целых числах является пара $b=1$, $k=2$. Одним из решений системы

$$\begin{cases} a+c=-10, \\ ac=24 \end{cases}$$

является $a=-4$, $c=-6$. Найденные числа $a=-4$, $b=1$, $c=-6$ и $k=2$ удовлетворяют уравнению (3), следовательно, $x^4-10x^3+27x^2-14x+2=(x^2-4x+1)(x^2-6x+2)$.

5. $x^{12}-3x^6+1=(x^6-1)^2-x^6=(x^6+x^3-1)(x^6-x^3-1)$.

Вариант 2 К-3

1. Разделим многочлен x^3+mx+n на трехчлен $x^2+3x+10$.

$$\begin{array}{l|l} x^3+0\cdot x^2+mx+n & x^2+3x+10 \\ \cline{2-2} x^3+3x^2\ \ +10x & x-3 \\ \cline{1-1} \quad -3x^2\ \ +(m-10)\,x+n & \\ \quad -3x^2\ \ -\qquad 9x-30 & \\ \hline \qquad\qquad (m-1)\,x+(n+30). & \end{array}$$

Так как деление выполняется без остатка, то $(m-1)\,x+(n+30)=$ $=0$, а это возможно (при любом значении x) только в случае, если $m=1$, $n=-30$.

2. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-4)$.

3. Пусть n — натуральное число, тогда $2n$ — четное натуральное число. Тогда $57^{2n}-1=3249^n-1=3248\cdot A$, где $A\in \boldsymbol{N}$, но $3248=$ $=203\cdot 16$.

4. $P(x)=(x^2-6x+1)(x^2-6x+6)$.

5. Пусть $x^2+x+1=y$, тогда

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=y(y+1)-12=y^2+y-12=$$
$$=(y+4)(y-3)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x+2)(x-1)(x^2+x+5).$$

Вариант 3 К-3

1. $m=-17$, $n=2$. **2.** $(x+3)^2(x+2)^2$. **4.** $(x^2+3x-2)(x^2-2x+3)$. **5.** $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)(a^8-a^4+1)$.

Вариант 4 К-3

1. $a=-5$, $b=5$. **2.** $(x-1)(x-2)(x+2)^2$. **4.** $(x^2-7x+2)(x^2+3x-1)$. **5.** $x(x-2)(x-4)(x-6)$.

Вариант 5 К-3

1. $a=0$, $b=-19$. **2.** $x=1$, $x=-2$. **4.** $(x^2-9x+2)(x^2+8x+3)$. **5.** $(x^4+2x^2+4)(x^4-2x^2+4)$.

Вариант 6 К-3

1. $p=3$, $k=-14$. **2.** $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$. **4.** $(x^2+9x-2)(x^2-3x+8)$. **5.** $(x+1)(x-1)(x-4)(x-6)$.

Вариант 1 С-5

1. Разложив на множители левую часть уравнения, получим: $(3x-5)(x^2+1)=0$. Единственный действительный корень уравнения $x=1\frac{2}{3}$.

2. Разложим левую часть уравнения на множители, представив $8x^2$ как $2x^2+6x^2$, получим:

$$(2x^4+3x^3-2x^2)-(6x^2+9x-6)=x^2(2x^2+3x-2)-$$
$$-3(2x^2+3x-2)=(2x^2+3x-2)(x^2-3), \quad (2x^2+3x-2)(x^2-3)=0,$$

откуда $2x^2+3x-2=0$, или $x^2-3=0$. Решив каждое квадратное уравнение, получим: $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=\sqrt{3}$.

3. Преобразуем левую часть уравнения:

$$((x-2)(x+1))((x+3)(x-4))=(x^2-x-2)(x^2-x-12)=$$
$$=y(y+10)=y^2+10y, \text{ где } y=x^2-x-12.$$

Получим уравнение $y^2+10y-144=0$, откуда $y_1=8$, $y_2=-18$. Но $y=x^2-x-12$. Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-12=8, \\ x^2-x-12=-18. \end{array}\right.$$

Первое из них имеет корни 5 и 4, второе корней не имеет. Ответ: $x_1=4$, $x_2=5$.

Вариант 2 С-5

1. Сгруппировав последовательно по два члена, получим:

$$4x^4(x+2)+5x^2(x+2)-3(x+2)=0, \ (x+2)(4x^4+5x^2-3)=0.$$

Ответ: $x_1=-2$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{73}-5)}$.

2. Так как $x^2\neq 0$, то, разделив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Пусть $x-\frac{1}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Следовательно, $2(y^2+2)-$ $-5y-1=0$, $y_1=1$, $y_2=1\frac{1}{2}$.

Имеем: $\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=1, \\ x-\frac{1}{x}=1\frac{1}{2}, \end{array}\right.$ откуда $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=-\frac{1}{2}$, $x_4=2$.

3. Так как $(x-1)(x-2)(x-3)=1\cdot2\cdot3$, то легко находим одно из возможных решений: $x=4$. Раскрыв скобки, получим: x^3- $-6x^2+11x-12=0$. Разделив левую часть уравнения на $x-4$, получим уравнение $x^2-2x+3=0$, которое действительных корней не имеет. Ответ: $x=4$.

Вариант 3 С-5

1. $x_1=2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{3}}$. 2. $x_1=x_2=1$.

3. $x_1=-1$, $x_2=5$, $x_{3,4}=2\pm2\sqrt{2}$.

Вариант 4 С-5

1. $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm 0{,}5\sqrt{14}$. 2. $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{8}$.
3. $x = 5$.

Вариант 5 С-5

1. $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = -2$. 2. $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -\frac{2}{3}$.
3. $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{2}$.

Вариант 6 С-5

1. $x_1 = -3$, $x_{2,3} = \pm 2$. 2. $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{4}$.
3. $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{2}$.

Вариант 1 К-4

2. Так как $a > 0$, то $a + 3 \geqslant 2\sqrt{3a}$, $a + 6 \geqslant 2\sqrt{6a}$, $a + 2 \geqslant 2\sqrt{2a}$, $a + 1 \geqslant 2\sqrt{a}$. Так как левые и правые части неравенств — положительные числа и a не могут одновременно равняться 1, 2, 3, 6 то

$$(a+3)(a+6)(a+2)(a+1) > 96a^2.$$

3. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x+6)(x-3)(2x-1)^2}{(x-2)(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+6)(2x-1)^2}{x-2} < 0, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} < x < 2. \end{array} \right.$$

4. Имеем: $\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{2(x-1)} = \frac{3}{x^2-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2-1) + 3x(x-3)(x+1) = 6(x-3), \\ x \neq 3, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 2x^2 - 15x + 14 = 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \\ x = -\frac{7}{3}, \end{array} \right. \\ x \neq 3, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\frac{7}{3}. \end{array} \right.$$

Ответ: 2; $-\frac{7}{3}$.

5. Преобразуем левую часть неравенства: $x^2 + 10y^2 - 6xy + 10x - 26y + 30 = (x - 3y + 5)^2 + (y^2 + 4y + 4) + 1 = (x - 3y + 5)^2 + (y + 2)^2 + 1 > 0$. Другой способ решения: см. вариант 2, № 5.

Вариант 2 К-4

2. Преобразуем левую часть неравенства к следующему виду: $\frac{a^2+3a+1}{a}\cdot\frac{a^4-a^2+1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}+3\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}-1\right)\geqslant(2+3)(2-1)=5.$

Равенство имеет место только при $a=1$.

3. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)^2}{-(x+7)(x-1)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1,\\ x\neq2,\\ \dfrac{x-\frac{2}{3}}{x+7}>0.\end{cases}$$

Ответ: $x<-7$, $\frac{2}{3}<x<1$, $1<x<2$, $x>2$.

4. Освободившись от знаменателя, получаем уравнение $2x^3-7x^2+9=0$, являющееся следствием исходного. Из трех его корней $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=1{,}5$ посторонним корнем является $x_1=-1$. Ответ: 3; 1,5.

5. Рассмотрим левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно x: $P(x)=x^2+(y+1)x+y^2-y+3$. Первый коэффициент $P(x)$ положителен, а дискриминант отрицателен: $(y+1)^2-4y^2+4y-12=-3(y-1)^2-9<0$. Следовательно, $P(x)>0$ при любом x.

Вариант 3 К-4

3. $x<-1$, $-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<x<1$, $x>6$. **4.** 3, $\frac{1}{2}$.

5. Так как $\sqrt{2}$ — корень уравнения, то имеем: $(\sqrt{2})^3-2(a+2)+b\sqrt{2}-2a=0$, или

$$4(a+1)=(b+2)\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Так как a и b — целые, то из (1) следует, что $b=-2$. В противном случае $\sqrt{2}=\frac{4(a+1)}{b+2}$ — число рациональное. Если $b=-2$, то $a=-1$. Таким образом, получаем уравнение $x^3-x^2-2x+2=0$, корни которого $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. Ответ: $a=-1$, $b=-2$, $x_1=1$, $x_2=-\sqrt{2}$.

Вариант 4 К-4

3. $-5<x<-0{,}75$, $1<x<2$. **4.** 1; -2.

Вариант 5 К-4

2. $a=1$. **3.** $x<-3$, $-1<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<x<5$, $x>5$. **4.** 1; $-1{,}5$.

Вариант 6 К-4

2. $4a^4-12a^3+13a^2-6a+1=(a-1)^2(2a-1)^2\geqslant0$.
Равенство выполняется при $a=1$ и $a=0{,}5$.

3. $-1<x<2$, $2<x<6$. **4.** -1. **5.** $a=-2$, $b=-1$, $x_1=0$, $x_2=1-\sqrt{2}$.

Вариант 1 С-6

1.
$$f\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)^2+1}{\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)^2-1}=\frac{\frac{a+1}{a-1}+1}{\frac{a+1}{a-1}-1}=a,\text{ где } |a|\geqslant 1,\ a\neq 1.$$

2. Преобразуем дробь $\frac{3x^2+3x-6}{x^2-1}=\frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=3+\frac{3}{x+1}$.

Следовательно, $y=3+\frac{3}{x+1}$, где $x\neq 1$. График изображен на рисунке 29.

3. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ 5)$ и $B(1;\ -2)$, имеет вид: $\frac{y+2}{5+2}=\frac{x-1}{3-1}$, или $y=3{,}5x-5{,}5$.

Уравнение прямой, параллельной ей и проходящей через точку $C(1;\ -1)$, запишется в виде:
$$y=3{,}5(x-1)-1,\text{ или } y=3{,}5x-4{,}5.$$

Прямые $y=3{,}5x-5{,}5$ и $y=3{,}5x-4{,}5$ отсекают от оси ординат отрезки, длины которых соответственно равны 5,5 и 4,5. Так как прямые параллельны, то отсекаемые ими треугольники подобны. Следовательно,
$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{5{,}5}{4{,}5}\right)^2=\frac{121}{81}.$$

Вариант 2 С-6

1. b, где $-1<b\leqslant 1$. 2. $y=\frac{4}{x-3}-2$, где $x\neq -2$ (рис. 30). 3. Уравнение прямой AB: $\frac{y+6}{9}=\frac{x+2}{9}$, или $y=x-4$; уравнение прямой, параллельной AB, проходящей через $C(-2;\ 1)$: $y=x+3$.

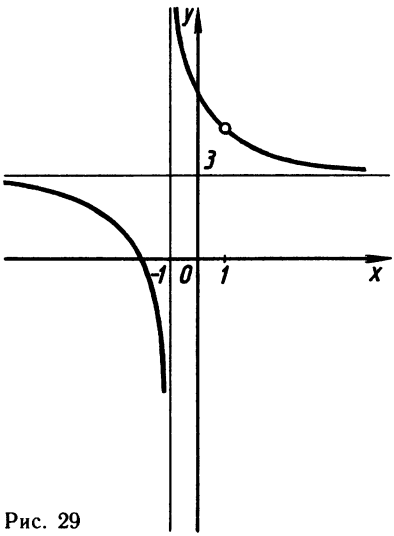


Рис. 29

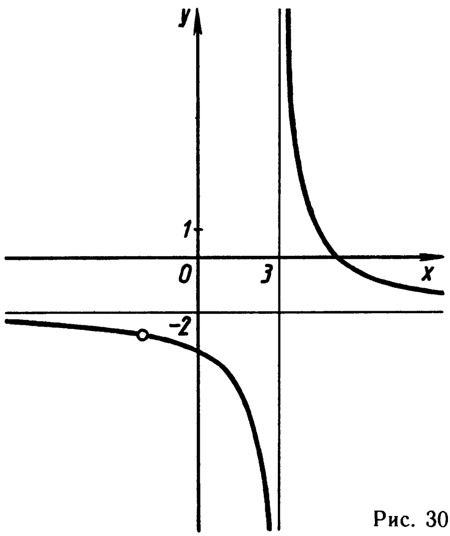


Рис. 30

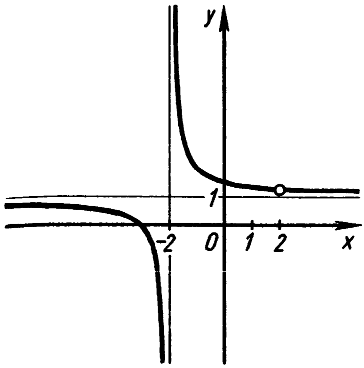


Рис. 31

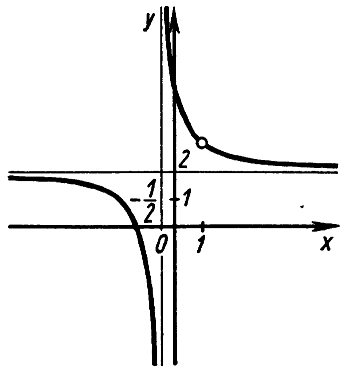


Рис. 32

Отсекаемые от осей координат прямоугольные треугольники подобны. Прямая $y=x-4$ отсекает от оси абсцисс отрезок длиной 4, а прямая $y=x+3$ — отрезок длиной 3. Из подобия треугольников следует, что $\frac{P_1}{P_2}=\frac{4}{3}$.

Вариант 3 **С-6**

1. $f\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{2(1-c)}\right)=c$, где $-1\leqslant c<1$. 2. $y=1+\frac{1}{x+2}$, где $x\neq 2$ (рис. 31). 3. $y=-3x+5$, $y=-3x-11$, $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{5}{11}\right)^2=\frac{25}{121}$.

Вариант 4 **С-6**

1. k, где $-1<k\leqslant 1$. 2. $y=\frac{3}{2x+1}+2$, где $x\neq 1$ (рис. 32).
3. а) $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$, $y=\frac{2}{3}x-2$; б) $\frac{P_1}{P_2}=\frac{2}{3}$.

Вариант 5 **С-6**

1. c, где $-1\leqslant c<1$. 2. $y=\frac{6}{x-1}+6$, где $x\neq -1$.
3. а) $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$; б) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{25}$.

Вариант 6 **С-6**

1. y, где $-1\leqslant y<1$. 2. $y=\frac{4}{x+4}$, где $x\neq 2$.
3. а) $y=1{,}5x-2{,}5$, $y=1{,}5x-5{,}5$; б) $\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{11}$.

Вариант 1 **К-5**

2. а) $y=\frac{8}{(x-3)^2+4}$, так как $\min\limits_{R}((x-3)^2+4)=4$, то $\max\limits_{R} y=y(3)=2$.
3. $f(-x)=f(x)$. Функция четная.

4. $f(\varphi(x))=2(\sqrt{3x-1})^2-1=6x-3$, где $x\geqslant\frac{1}{3}$;

$\varphi(f(x))=\sqrt{3(2x^2-1)-1}=\sqrt{6x^2-4}$.

5. Из условия имеем: $y=2x-|x-2|-|2x+5|$.

Если $x\leqslant-2{,}5$, то $y=5x+3$; $\max\limits_{(-\infty,\ -2,5]} y=y(-2{,}5)=-9{,}5$.

Если $-2{,}5\leqslant x\leqslant 2$, то $y=x-7$; $\max\limits_{[-2,5,\ 2]} y=y(2)=-5$.

Если $x\geqslant 2$, то $y=-x-3$; $\max\limits_{[2;\ +\infty)} y=y(2)=-5$. (В каждом из случаев учтена монотонность функции.) Таким образом, $\max\limits_{R} y=-5$.

Вариант 2 К-5

1. Пусть $x_1<x_2$, $x_1\in X$, $x_2\in X$. Так как функция f — убывающая, то $f(x_1)>f(x_2)$. Так как $k>0$, то $kf(x_1)>kf(x_2)$, т. е. функция $kf(x)$ — убывающая на множестве X.

2. а) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{13}{x^2+2x+3}=\frac{13}{(x+1)^2+2};$$

так как $\min\limits_{R}((x+1)^2+2)=2$, то $\max\limits_{R} y=y(-1)=6{,}5$.

б) Пусть $h(x)=x^2+2x+3$. Так как функция $h(x)$ — убывающая на рассматриваемом промежутке и $h(x)>0$, то функция $y=\frac{13}{h(x)}$ — возрастающая на промежутке $(-\infty;\ -1]$.

3. $f(-x)=f(x)$. Функция четная.

4. $f(\varphi(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x}-2)^2$; $\varphi(f(x))=\varphi((x-2)^2)=\sqrt{(x-2)^2}=$ $=|x-2|$.

5. Если $x\leqslant 0{,}5$, то $y=-5x+4$; $\min\limits_{(-\infty,\ 0,5]} y=1{,}5$.

Если $0{,}5\leqslant x\leqslant 3$, то $y=-x+2$; $\min\limits_{[0,5;\ 3]} y=-1$.

Если $x\geqslant 3$, то $y=x-4$; $\min\limits_{[3,\ +\infty)} y=-1$.

Следовательно, $\min\limits_{R} y=y(3)=-1$.

Вариант 3 К-5

2. а) $\max\limits_{R} y=y(-1)=2\frac{1}{4}$. 4. $f(\varphi(x))=4x(x+1)$, $x\geqslant-1$; $\varphi(f(x))=|2x^2-1|$. 5. -3.

Вариант 4 К-5

2. $y=\frac{2x^3}{x^2-9}+\frac{x^2+1}{x^2-9}$. 3. $y=-2\left(x^2-\frac{3}{4}\right)^2-4\frac{7}{8}$; $\max\limits_{R} y=-4\frac{7}{8}$.

4. $f(\varphi(x))=\begin{cases} 1, \text{ если } |x|>\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ -1, \text{ если } |x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

$\varphi(f(x))=2$, где $x\neq 0$.

5. -2.

Вариант 5 К-5

2. а) 5,5. 3. Функция нечетная. 4. $f(\varphi(x))=6x-2$, где $x\leqslant 0{,}5$; $\varphi(f(x))=\sqrt{6x^2-1}$. 5. -1.

Вариант 6 К-5

2. -4. 3. Функция четная. 4. $f(\varphi(x))=27x^2+12x+1$, $x\geqslant -\frac{1}{3}$; $\varphi(f(x))=|3x^2-1|$. 5. $\frac{1}{3}$.

Вариант 1 С-7

1. $y=x+3$. 2. Докажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $M>0$, что при $|x|>M$ выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. Имеем: $|f(x)|=\left|\frac{3}{4x-2}\right|<\varepsilon$, отсюда $|4x-2|>\frac{3}{\varepsilon}$. Так как $|4x-2|\geqslant$ $\geqslant|4x|-2$, то достаточно решить неравенство $4|x|-2>\frac{3}{\varepsilon}$. Решив это неравенство, получим: $|x|>\frac{1}{4}\left(2+\frac{3}{\varepsilon}\right)$. Положим $M=\frac{3+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Из наших рассуждений следует, что при $|x|>M$ выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. Следовательно, функция f — бесконечно малая при $x\to\infty$.

3. $|x^2-4x+3|\geqslant x^2-4x+3=(x-2)^2-1$. Решив неравенство $(x-2)^2-1>10^4$, получим, что на луче $(M;+\infty)$, где $M=2+$ $+\sqrt{1+10^4}$, выполняется неравенство $|x^2-4x+3|>10^4$.

Другое решение. Рассмотрим функцию $f(x)=|x^2-4x+3|$ на луче $(3;+\infty)$. При $x>3$ $f(x)=x^2-4x+3$.

Имеем: $\begin{cases} x>3, \\ x^2-4x+3>10^4 \end{cases} \Leftrightarrow x>2+\sqrt{1+10^4}$.

Вариант 2 С-7

1. $y=1$. 2. Чтобы доказать, что $\varphi(x)$ — бесконечно большая функция, достаточно доказать, что $f(x)=\frac{4x+5}{x-4}-4$ — бесконечно малая функция при $x\to\infty$.

3. При $x>1$ имеем:

$$\left|\frac{2x+1}{x^2+3x}\right|=\frac{2x+1}{x^2+3x}<\frac{2x+x}{x^2+3x}=\frac{3}{x+3}.$$

Решив неравенство $\frac{3}{x+3}<0{,}001$ (учитывая, что $x>1$), находим $x>2997$. На любом луче $(M;+\infty)$, где $M\geqslant 2997$, выполнено неравенство $\left|\frac{2x+1}{x^2+3x}\right|<0{,}001$. Можно взять, например, $M=3000$.

Вариант 3 С-7

1. $y=2x-6$. 3. При $x>5$ имеем:

$$\left|\frac{x^3-4x^2+3x+1}{x^2-6x+5}\right|=\left|x+2+\frac{10x-9}{x^2-6x+5}\right|=x+2+\frac{10x-9}{x^2-6x+5}>x+2.$$

Решив неравенство $x+2>10^5$, находим $x>10^5-2$; $M=10^5-2$.

Вариант 4 С-7

1. $y=2x+12$. 3. $a=4$. При $a=4$ имеем: $y=\frac{3x-2}{2x^2+3}$. При $x>1$ имеем: $|y|=\left|\frac{3x-2}{2x^2+3}\right|=\frac{3x-2}{2x^2+3}<\frac{3}{2x^2}=\frac{3}{2x}$. Решив неравенство $\frac{3}{2x}<$ $<0{,}01$ (учитывая, что $x>1$), находим $x>150$. Искомый луч $(M;\ +\infty)$, где $M\geqslant 150$ (например, $(160;\ +\infty)$).

Вариант 5 С-7

1. $y=4$. 2. При $x>3$ имеем: $|x^3-8x+1|=|x(x^2-8)+1|=$ $=x(x^2-8)+1=x^3-8x+1>x^3-8x$. Найдем луч, принадлежащий $(3;\ +\infty)$, на котором выполнено неравенство $x^3-8x>\frac{x^3}{2}$ (1). Решив (1) (с учетом того, что $x>3$), находим: $x>4$. Итак, при $x>4$ имеем: $|x^3-8x+1|>\frac{x^3}{2}$. Из неравенства $\frac{x^3}{2}>10^9$ находим $x>1000\sqrt{2}$. Следовательно, на любом луче $(M;\ +\infty)$, где $M\geqslant 1000\sqrt{2}$ (например, $M=2000$), выполнено неравенство $|x^3-8x+1|>10^9$. 3. $a=0$.

Вариант 6 С-7

1. $y=7$. 2. $a=6$, $b=2$.

Вариант 1 К-6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2|x|-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{x-3}=-2;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{1+2x}=1{,}5.$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+(-1)^n}{6n-(-1)^n}-\frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{6-\frac{(-1)^n}{n}}-\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right)=-\frac{2}{3}.$$

3. Пусть a_1 — первый член, q — знаменатель прогрессии. По условию задачи $\frac{a_1}{1-q}=8$, $a_1q+a_1q^2=3$. Исключив из этих равенств a_1, получим уравнение $8q^3-8q+3=0$. Подстановкой $2q=z$ приводим уравнение к виду: $z^3-4z+3=0$. Легко видеть, что $z=1$ является

корнем этого уравнения. Понизив степень, получаем квадратное уравнение $z^2+z-3=0$, оба корня которого иррациональны. Из условия $2q=z$ находим $q=0{,}5$. Далее находим $a_1=4$, $a_4=a_1q^3=0{,}5$.
4. Так как $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{1+3n-2}{2}n=\frac{n(3n-1)}{2}$, то искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(3n-1)}{2(2n+1)}-\frac{3n+1}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n-1}{4(2n+1)}=-\frac{7}{8}.$$

Вариант 2 К-6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2x-4}=\frac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-|x-2|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-(x-2)}{x}=-1.$

2. $\frac{1}{3}$. **3.** $\frac{1}{16}$. **4.** 0,3.

Вариант 3 К-6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. **2.** 0. **3.** $\frac{8}{27}$. **4.** $\frac{1}{6}$.

Вариант 4 К-6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0{,}5$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. **2.** $-\frac{2}{3}$. **3.** $\frac{81}{256}$. **4.** $\frac{1}{3}$.

Вариант 5 К-6

1. $-0{,}5$; 3. **2.** -4. **3.** $\frac{2}{27}$. **4.** $\frac{1}{720}$.

Вариант 6 К-6

1. -3; 0. **2.** -5. **3.** $\frac{1}{8}$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант 1 К-7

1. а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+3x+3)}{(x+1)(2x+1)}=-1.$

2. а) Из теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного непрерывных функций следует, что функция f непрерывна в любой точке $x\neq-1$ и $x\neq2$. Исследуем функцию на непрерывность в точках $x=-1$ и $x=2$.

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(2-x^2)=1$, поэтому $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$. Итак, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=1$. Следовательно, функция f непрерывна в точке $x=-1$.

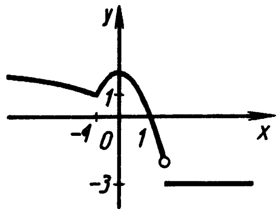


Рис. 33

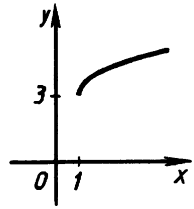


Рис. 34

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (2 - x^2) = \lim_{x \to 2} (2 - x^2) = -2;$$
$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (-3) = \lim_{x \to 2} (-3) = -3.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ не существует. Следовательно, функция f в точке $x=2$ непрерывной не является, $x=2$ — точка разрыва функции (рис. 33).

б) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 1{,}5$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5) = -3$.

3. Пусть $P(x) = x^3 - 5x + 3$, $P(-3) = -9 < 0$, $P(-2) = 5 > 0$. Так как $P(x)$ — непрерывная функция и на концах отрезка $[-3; -2]$ имеет разные знаки, то она обращается в нуль хотя бы в одной внутренней точке этого отрезка. Найдем значение корня с точностью до 0,1. Разобьем отрезок $[-3; -2]$ на 10 равных частей, получим точки: -3; $-2{,}9$; $-2{,}8$; ...; -2. Так как $P(-2{,}5) = -0{,}125 < 0$, $P(-2{,}4) = 1{,}176 > 0$, то $x \approx -2{,}5$, $x \approx -2{,}4$ — приближенные значения корня с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком соответственно.

4. Функция $g(x)$ необратима, так как при $y > 1$ уравнение $x^2 - 6x + 10 = y$ имеет два корня. На промежутке $[3; +\infty)$ функция g монотонная (возрастающая), следовательно, на этом промежутке существует функция g^{-1}. Решим уравнение $x^2 - 6x + 10 = y$ относительно x $(x \geqslant 3)$. Имеем: $x = 3 + \sqrt{y-1}$. Значит, $g^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ (рис. 34).

5. $$\lim_{n \to \infty} \frac{-1\cdot 3 - 1\cdot 7 - \ldots - 1\cdot(4n-1)}{4n^2 - 3} = -\lim_{n \to \infty} \frac{(3+4n-1)\,n}{2(4n^2-3)} = -0{,}5.$$

6. $$\varphi(x) = \frac{(4b+2a)\,x^2 - ax + 5}{2x - 1};$$

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 1{,}5, \text{ если } \begin{cases} 4b + 2a = 0, \\ -\dfrac{a}{2} = 1{,}5, \end{cases} \text{ откуда } a = -3,\ b = 1{,}5.$$

Вариант 2 К-7

1. а) $$\lim_{x \to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{x(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x \to 7} \frac{7-x}{x(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{28};$$

б) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 1}{2x + 5} = \frac{6}{7}.$$

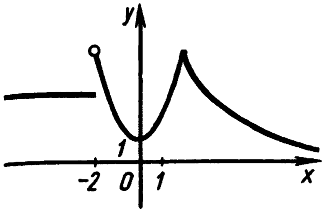


Рис. 35

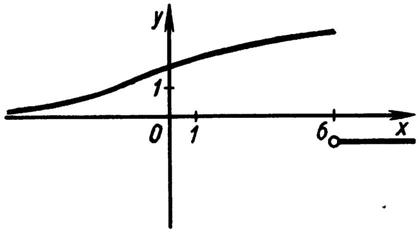


Рис. 36

2. а) Функция непрерывна в любой точке $x \neq -2$ и $x \neq 2$. Исследуем функцию на непрерывность в точках $x = \pm 2$; $\lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = 5$. Так как $\lim\limits_{x \to -2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2+0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ не существует. В точке $x = -2$ непрерывности нет. Так как $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = f(2) = 5$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, то в точке $x = 2$ функция непрерывна (рис. 35).

б) $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = f(7) = \frac{5}{6}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = 3$.

3. Пусть $\varphi(x) = x^3 + x - 11$, тогда $\varphi(3) = 19 > 0$, а $\varphi(2) = -1 < 0$, и так как $\varphi(x)$ непрерывна, то существует точка $c\ (2 < c < 3)$, в которой $\varphi(c) = 0$. Найдем c с точностью до 0,1. Разобьем отрезок [2; 3] на 10 равных частей: 2; 2,1; 2,2; ...; 2,9; 3. Найдем $\varphi(2,1) \approx 0,46 > 0$. Так как в точках 2 и 2,1 функция имеет разные знаки, то $x \approx 2,0$ с точностью до 0,1 с недостатком и $x \approx 2,1$ с точностью до 0,1 с избытком.

4. Так как при $y > -6$ уравнение $x^2 + 8x + 10 = y$ имеет два корня, то функция необратима. Функция $x^2 + 8x + 10$ на промежутке $(-\infty; -4]$ убывающая и потому на этом промежутке обратима. Решив уравнение $x^2 + 8x + 10 = y$ при $x \leqslant -4$ относительно x, получим $x = -4 - \sqrt{6 + y}$. Обратная функция имеет вид: $y = -4 - \sqrt{6 + x}$.

5. $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{-2 \cdot 6 - 2 \cdot 14 - 2 \cdot 22 - \ldots - 2(8k - 2)}{4k^2 + 3k + 4} =$
$= \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{-2(6 + 14 + 22 + \ldots + (8k - 2))}{4k^2 + 3k + 4} = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{-2k(8k + 4)}{2(4k^2 + 3k + 4)} = -2.$

6. $\lim\limits_{x \to 3-0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x(x-3)}{x-3} = 6,$
$\lim\limits_{x \to 3+0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 3} (ax + 2) = 3a + 2;$
$3a + 2 = 6,\ a = \frac{4}{3}.$

Вариант 3 К-7

1. а) $-0,5$; б) $-\frac{7}{9}$. **2.** Рис. 36. **3.** $\approx 0,2$ с недостатком.
4. $(x-3)^2 + 4$, $x \geqslant 3$. **5.** -1. **6.** 4,5.

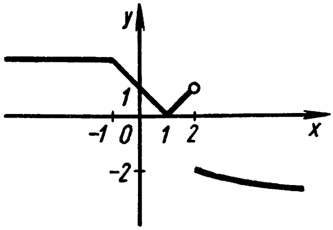


Рис. 37

Вариант 4 К-7

1. а) 1; б) 2. 2. Рис. 37. 3. $\approx 1{,}7$ с недостатком. 5. 1. 6. $a=1$, $b=-1$.

Вариант 5 К-7

1. а) $\frac{1}{3}$; б) 1. 3. $\approx -0{,}7$ с недостатком. 5. $\frac{1}{3}$. 6. $b=2$ или $b=-2$.

Вариант 6 К-7

1. а) $-\frac{1}{136}$; б) $-1{,}4$. 3. $\approx 0{,}8$ с недостатком. 5. $\frac{2}{7}$. 6. $c=6$, $d=-2$.

Вариант 1 С-8

1. Воспользуемся формулой для приближенного вычисления значения функции вблизи точки a: $f(a+h)=f(a)+f'(a)h$.

а) Рассмотрим функцию $f(x)=x^3$, $a=3$, $h=0{,}013$, $f(a)=f(3)=27$, $f'(x)=3x^2$, $f'(a)=f'(3)=27$, $f(3{,}013)\approx 27+27\cdot 0{,}013=27+0{,}351=27{,}351$. На микрокалькуляторе $3{,}013^3\approx 27{,}3525$.

б) Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=27$, $h=0{,}018$. $f(a)=f(27)=\sqrt[3]{27}=3$, $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(a)=f'(27)=\frac{1}{27}$. $f(27{,}018)\approx 3+\frac{1}{27}\cdot 0{,}018=3+0{,}000(6)=3{,}000(6)$. На микрокалькуляторе $\sqrt[3]{27{,}018}\approx 3{,}0006665$.

2. $\frac{y(h)-y(0)}{h}=\frac{|h+3|-3}{h}=1$, при $h>-3$.

$y'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{y(h)-y(0)}{h}=1$, $\frac{y(-3+h)-y(-3)}{h}=\frac{|h|}{h}$.

Но $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ не существует. Следовательно, функция не имеет производной в точке $x_0=-3$.

3. $\left|\frac{3n}{2n-1}-1{,}5\right|<0{,}02$, $\left|\frac{1{,}5}{2n-1}\right|<0{,}02$; так как $n\in N$, то $\frac{1{,}5}{2n-1}<0{,}02$, $n>38$.

Вариант 2 С-8

1. а) 257,792; б) 2,015. 2. $f'(a)=\varphi(a)$.

3. $0<\frac{n^2-3n+5}{n^2+1}<\frac{n^2+5}{n^2}\leqslant\frac{n^2+5n^2}{n^2}=6$.

Вариант 3 С-8

1. а) 32,24; б) 3,0008. 2. $y'(0)$ и $y'(1)$ не существуют, $y'(2)=2$.

Вариант 4 С-8

1. а) 8,084; б) 2,984. 3. $n\geqslant 66$.

Вариант 5 **С-8**

1. а) 16,416; б) 2,997. 2. $y'(1)=\frac{4}{5}$, $y'(0)$ не существует.

Вариант 6 **С-8**

1. а) 31,60; б) 1,997. 2. $f'(a)=0$.

Вариант 1 **С-9**

1. Параллельны. 2. Уравнение касательной $y+2=6(x+1)$, или $y=6x+4$. Так как $\frac{6x^2+34x+22}{x+5}=6x+4+\frac{2}{x+5}$, то $y=6x+4$ — уравнение наклонной асимптоты.

3. $$1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3},$$

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=2^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Другое решение. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-2n(n+1)+n=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Вариант 2 **С-9**

1. $M(2;\ 8)$, $N(-4;\ -64)$. 3. $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

Вариант 3 **С-9**

1. Параллельны. 2. (0,5; 1). 3. $n^2(2n^2-1)$.

Вариант 4 **С-9**

1. $a=\pm 2$. 2. $(-1{,}5;\ 3)$. 3. $n^2(n+1)$.

Вариант 5 **С-9**

1. Совпадают. 2. (2; 4), (1; 10), (3; -2). 3. $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

Вариант 6 **С-9**

1. Является; координаты точки касания $(-1;\ -2)$; кроме точки касания, общей точкой является точка (2; 16). 3. $\frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$.

Вариант 1 **К-8**

1. а) $v=s'(t)=3t^2-3t+2$, $s'(3)=20$ м/с;
б) $a=v'(t)=6t-3$, $6t-3=9$, $t=2$ с.

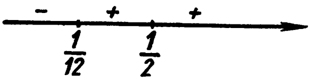


Рис. 38

2. $f(x)=8\sqrt{x}+\frac{2}{x}$, $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$, $f'(1)=2$.

3. а) $\varphi(x)=\frac{x+2}{3-x}$, $x_0=2$, $\varphi(2)=4$, $\varphi'(x)=$ $=\frac{3-x+x+2}{(3-x)^2}=\frac{5}{(3-x)^2}$, $\varphi'(2)=5$.

Уравнение касательной: $y-4=5(x-2)$, или $y=5x-6$.

б) Угловой коэффициент касательной равен 5. Следовательно, $\frac{5}{(3-x)^2}=5$. Отсюда $x_0=2$ или $x_0=4$. Напишем уравнение касательной к графику функции φ в точке с абсциссой $x_0=4$. Имеем $\varphi(4)=-6$. Уравнение касательной: $y+6=5(x-4)$, или $y=5x-26$.

4. $g(x)=3x(2x-1)^5$. Находим производную:

$$g'(x)=3((2x-1)^5+10x(2x-1)^4)=3(2x-1)^4(12x-1).$$

а) $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{12}, \\ x=\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

б) $g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{12}<x<\frac{1}{2}, \\ x>\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

в) $g'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant\frac{1}{12}, \\ x=\frac{1}{2} \text{ (рис. 38)}. \end{array}\right.$

5. $y=\left|\frac{x^2-1}{1-x}\right|=|x+1|$, $x\neq 1$; $\frac{y(-1+h)-y(-1)}{h}=\frac{|-1+h+1|-0}{h}=$ $=\frac{|h|}{h}$. Но $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ не существует. Следовательно, $y'(-1)$ не существует.

6. Находим производные левой и правой частей равенства: $50(x-2)^{49}=50a_0x^{49}+49a_1x^{48}+48a_2x^{47}+\ldots+2a_{48}x+a_{49}$. При $x=1$ имеем: $50a_0+49a_1+48a_2+\ldots+2a_{48}+a_{49}=-50$.

•

Вариант 2 К-8

1. а) $v(t)=x'(t)=6t^2-5t+3$ (м/с), $v(1)=4$ (м/с);

б) $a(t)=v'(t)=12t-5$ (м/с^2), $12t-5=19$, $t=2$ (с).

2. $f(x)=\frac{32}{x^2}-2\sqrt{x}$, $f'(x)=(32x^{-2}-2\sqrt{x})'=-\frac{64}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(4)=-1{,}5$.

3. а) $\varphi'(x)=\frac{-5}{(x+4)^2}$, $x_0=-3$, $\varphi(-3)=4$, $\varphi'(-3)=-5$, $y-4=-5(x+3)$, $y=-5x-11$.

б) Угловой коэффициент касательной равен -5. Имеем: $-\frac{5}{(x+4)^2}=-5$. Отсюда $x_0=-3$ или $x_0=-5$. Уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0=-5$: $y+6=$ $=-5(x+5)$, или $y=-5x-31$.

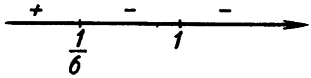


Рис. 39

4. $g'(x)=2((1-x)^5-5x(1-x)^4)=2(1-x)^4(1-6x)$.

а) $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{6}, \\ x=1; \end{array}\right.$ б) $g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant\frac{1}{6}, \\ x=1; \end{array}\right.$

в) $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{6}<x<1, \\ x>1 \text{ (рис. 39)}. \end{array}\right.$

5. Пусть

$$F(x)=|1-x^2|,\ \frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\frac{|1-(1+h)^2|-|1-1|}{h}=$$
$$=\frac{|-2h-h^2|}{h}=\frac{|h|\cdot|2+h|}{h}.$$

Так как $\lim\limits_{h\to+0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=2$, $\lim\limits_{h\to-0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=-2$, то $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$ не существует. Следовательно, $F'(1)$ не существует, т. е. функция в точке $x=1$ не является дифференцируемой. Аналогично доказывается, что функция недифференцируема и в точке $x=-1$.

6. Взяв первую и вторую производные от левой и правой частей равенства, получим:

$$40\cdot 39a_0x^{38}+39\cdot 38a_1x^{37}+38\cdot 37a_2x^{36}+\ldots+2a_{38}=6240(3-2x)^{38}.$$

Положив $x=1$, имеем:

$$40\cdot 39a_0+39\cdot 38a_1+38\cdot 37a_2+\ldots+2a_{38}=6240.$$

Вариант 3 К-8

1. а) 14 м/с; б) 1 с. **2.** 1,5. **3.** а) $y=x-3$; б) $y=x-7$. **4.** а) $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{3}$; б) $x\leqslant\frac{1}{24}$, $x=\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{24}<x<\frac{1}{3}$, $x>\frac{1}{3}$. **6.** 360.

Вариант 4 К-8

1. а) 4 м/с; б) 0,5 с. **2.** -1. **3.** а) $y=-5x-26$; б) $y=-5x-6$. **4.** а) $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{18}<x<\frac{1}{3}$, $x>\frac{1}{3}$; в) $x\leqslant\frac{1}{18}$, $x=\frac{1}{3}$. **6.** 10 260.

Вариант 5 К-8

1. а) 3,5 м/с; б) 4,5 с. **2.** 1. **3.** а) $y=-7x-15$; б) $y=-7x-43$. **4.** а) $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{9}$; б) $x=-\frac{4}{3}$, $x\geqslant-\frac{2}{9}$; в) $x<-\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{9}$. **5.** а) $h'(3)=6$, $h'(-5)=10$; б) $h'(0)=0$. **6.** 120.

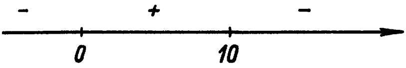


Рис. 40

Вариант 6 К-8

1. а) 164 м/с; б) 1,5 с. **2.** $-10{,}5$. **3.** а) $y=x+2$; б) $y=x+6$. **4.** а) 0,2; 0,8; б) $0{,}2<x<0{,}8$, $x>0{,}8$; в) $x\leqslant 0{,}2$, $x=0{,}8$. **5.** а) $h'(0)=1$, $h'(3)=3$. **6.** 5400.

Вариант 1 С-10

1. Пусть $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+5x^2+12$. Имеем: $f'(x)=x(10-x)$, $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=10$. Знаки f' указаны на рисунке 40. Функция убывает на промежутках $(-\infty;\ 0]$, $[10;\ +\infty)$, возрастает на $[0;\ 10]$, $x=0$ — точка минимума, $f_{\min}=f(0)=12$; $x=10$ — точка максимума, $f_{\max}=f(10)=178\frac{2}{3}$. $f''(x)=10-2x$, $f''(x)=0$ при $x=5$, $f''(x)>0$ при $x<5$, $f''(x)<0$ при $x>5$. График функции выпуклый вверх на промежутке $[5;\ +\infty)$, выпуклый вниз (вогнутый) на $(-\infty;\ 5]$, $x=5$ — точка перегиба. **2.** Пусть $\varphi(x)=2x^2-\sqrt{x}$. Имеем: $\varphi'(x)=\frac{8x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$; $\varphi'(x)=0$ при $x=0{,}25$, $\varphi'(x)>0$ при $x>0{,}25$, $\varphi'(x)<0$ при $0<x<0{,}25$, $x=0{,}25$ — точка минимума. **3.** Пусть $N\left(x_0;\ \frac{1}{x_0}\right)$ — точка касания, $x_0\neq 0$. Так как $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$, то $y'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$, и уравнение касательной в точке с абсциссой $x=x_0$ запишется в виде:

$$y-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0).$$

Точка $M(0;\ 3)$ принадлежит касательной, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению этой касательной: $3-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}$, откуда $x_0=\frac{2}{3}$. Тогда $y(x_0)=\frac{3}{2}$, $y'(x_0)=-\frac{9}{4}$. Уравнение искомой касательной имеет вид: $y=-\frac{9}{4}x+3$.

Вариант 2 С-10

1. Пусть $f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$, $f'(x)=6(x-1)(x+2)$, $f'(x)=0$ при $x=-2$, $x=1$.

Знаки производной показаны на рисунке 41. Схематически стрелками указаны промежутки возрастания и убывания функции. $x=-2$ — точка максимума, $f_{\max}=f(-2)=25$; $x=1$ — точка минимума, $f_{\min}=f(1)=-2$. $f''(x)=12(x+0{,}5)$, $f''(x)=0$ при $x=-0{,}5$. Знаки второй производной, промежутки выпуклости и вогнутости показаны на рисунке 42. В последующих вариантах мы также будем поль-

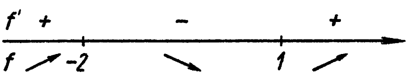


Рис. 41

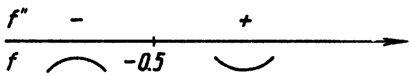


Рис. 42

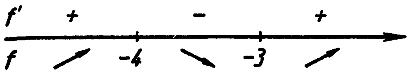


Рис. 43

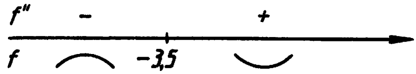


Рис. 44

зоваться схематическим изображением поведения функции. Точка $x=-0{,}5$ — точка перегиба.

2. Пусть $\varphi(x)=x^2(\sqrt{x}-1)$, $\varphi'(x)=2{,}5x\sqrt{x}-2x$. $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{16}{25}$, $\varphi'(x)>0$ при $x>\frac{16}{25}$, $\varphi'(x)<0$ при $0<x<\frac{16}{25}$. Следовательно, $x=\frac{16}{25}$ — точка минимума, $\varphi_{\min}=\varphi\left(\frac{16}{25}\right)=-\frac{256}{3125}$.

3. Если $N(x_0;\ 3-x_0^2)$ — точка касания, то уравнение касательной запишется в виде:

$$y-(3-x_0^2)=-2x_0(x-x_0).$$

Точка $M(2;\ 0)$ принадлежит касательной. Получаем уравнение $x_0^2-4x_0+3=0$, откуда $x_0=1$ или $x_0=3$. Уравнение касательной в точке $x_0=1$: $y=-2x+4$. Уравнение касательной в точке $x_0=3$: $y=-6x+12$.

Вариант 3 **С-10**

1. $y'(x)=(x+3)(x+4)$, $y'(x)=0$ при $x=-4$, $x=-3$ (рис. 43). $x=-4$ — точка максимума, $y_{\max}=y(-4)=\frac{8}{3}$; $x=-3$ — точка минимума, $y_{\min}=y(-3)=2{,}5$. Точка $x=-3{,}5$ является точкой перегиба (рис. 44).

2. $y'(x)=\frac{x(2-5x)}{\sqrt{1-2x}}$, $y'(x)=0$ при $x=0$, $x=\frac{2}{5}$. Знаки производной и промежутки монотонности указаны на рисунке 45.
$x=0$ — точка минимума, $y_{\min}=y(0)=0$;
$x=\frac{2}{5}$ — точка максимума, $y_{\max}=y\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{125}$.

3. $y=\frac{x+1}{\sqrt{3}}$.

Вариант 4 **С-10**

1. $y'(x)=(x+3)(x-1)$, $y'(x)=0$ при $x=-3$, $x=1$ (рис. 46). $x=-3$ — точка максимума, $y_{\max}=y(-3)=10$; $x=1$— точка мини-

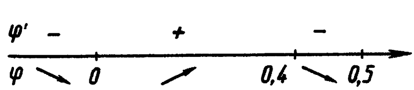


Рис. 45

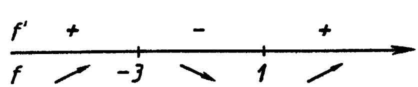


Рис. 46

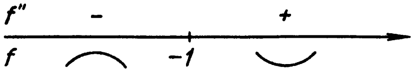


Рис. 47

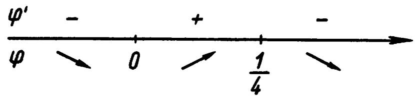


Рис. 48

мума, $y_{\min}=y(1)=-\frac{2}{3}$. $x=-1$ — точка перегиба (рис. 47).

2. $y'(x)=\frac{-2x(x-0{,}25)}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $y'(x)=0$ при $x=0$, $x=\frac{1}{4}$ (рис. 48).

$x=0$ — точка минимума, $y_{\min}=y(0)=2$; $x=\frac{1}{4}$ — точка максимума, $y_{\max}=y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{16}\sqrt{21}$. 3. $y=-0{,}5x+1$.

Вариант 5 — С-10

1. Промежутки убывания $(-\infty;\ -4]$, $[0;\ +\infty)$, промежуток возрастания $[-4;\ 0]$. $y_{\min}=y(-4)=-8\frac{1}{3}$, $y_{\max}=y(0)=13$. График функции выпуклый вниз на промежутке $(-\infty;\ -2]$ и выпуклый вверх на промежутке $[-2;\ +\infty)$, $x=-2$ — точка перегиба.

2. $y_{\min}=y\left(\frac{1}{8}\right)=-\frac{3}{8}$. 3. $y=2-0{,}5x$.

Вариант 6 — С-10

1. Промежутки убывания $(-\infty;\ 2]$, $[6;\ +\infty)$, промежуток возрастания $[2;\ 6]$. $y_{\min}=y(2)=7\frac{1}{3}$, $y_{\max}=y(6)=18$. График функции выпуклый вверх на промежутке $[4;\ +\infty)$, выпуклый вниз на $(-\infty;\ 4]$, $x=4$ — точка перегиба.

2. $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(0{,}2)=\frac{4\sqrt{5}}{125}$.

3. $y=-\frac{1}{12}x+\frac{37}{12}$.

Вариант 1 — К-9

2. 1) $D(f)=\{x \mid x\neq -1\}$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) $y=0$ при $x=0$, $y\geqslant 0$ при $x\geqslant -1$, $y<0$ при $x<-1$.

4) $y'=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; $y'=0$ при $x=-2$, $x=0$; $y'>0$ при $x<-2$, $x>0$; $y'<0$ при $-2<x<-1$, $-1<x<0$. В точках $x=-2$ и $x=0$ функция непрерывна. Следовательно, функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ +\infty)$, убывает на промежутках $[-2;\ -1)$ и $(-1;\ 0]$ (рис. 49). $x=-2$ — точка максимума, $y_{\max}=y(-2)=$

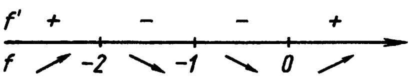


Рис. 49

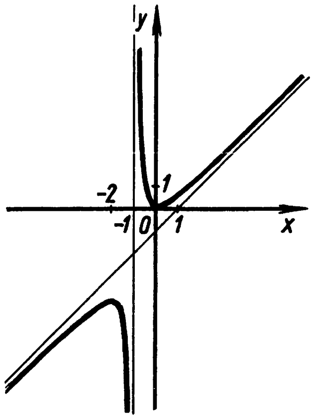


Рис. 50

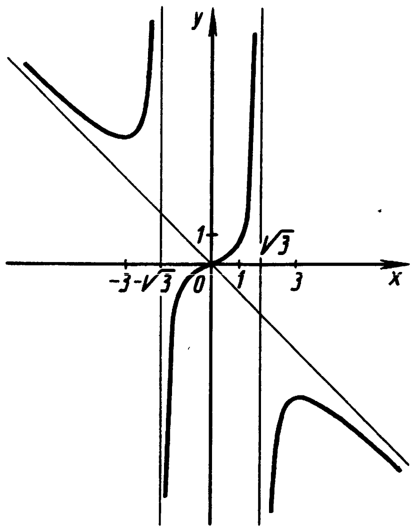


Рис. 52

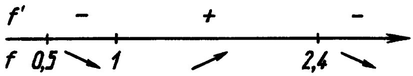


Рис. 51

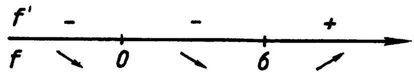


Рис. 53

$=-4$; $x=0$ — точка минимума, $y_{\min}=y(0)=0$.

5) $y''=\frac{2}{(1+x)^3}$; $y''>0$ при $x>-1$, $y''<0$ при $x<-1$. На промежутке $(-\infty;\ -1)$ график функции обращен выпуклостью вверх, на промежутке $(-1;\ +\infty)$ — выпуклостью вниз.

6) Так как $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$, то прямая $x=-1$ — вертикальная асимптота графика функции. Так как $\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$, то прямая $y=x-1$ — наклонная асимптота. График функции изображен на рисунке 50.

3. По условию задачи $a_6=3$, $d\geqslant 0{,}5$. Имеем: $a_1=3-5d$, $a_4=3-2d$, $a_5=3-d$; $a_1a_4a_5=(3-5d)(3-2d)(3-d)$. Рассмотрим функцию $f(d)=(3-5d)(3-2d)(3-d)$, где $d\geqslant 0{,}5$. $f'(d)=$ $=-6(5d^2-17d+12)$, где $d\geqslant 0{,}5$. $f'(d)=0$ при $d=1$, $d=2{,}4$ (рис. 51).

Ясно, что наибольшее значение функция принимает в одной из точек: $d=0{,}5$ или $d=2{,}4$. Найдем значения функции в этих точках: $f(0{,}5)=2{,}5$, $f(2{,}4)=\frac{243}{25}$. Так как $f(2{,}4)>f(0{,}5)$, то наибольшее значение функция $f(d)$ на промежутке $[0{,}5;\ +\infty)$ принимает в точке $d=2{,}4$.

4. $y'=x^2(x+2)^2+2(x+1)^2+3>0$, следовательно, функция возрастающая.

Вариант 2 **К-9**

2. 1) $D(f)=\{x \mid x\neq\pm\sqrt{3}\}$.

2) Так как для любого x из области определения функции $y(-x)=-y(x)$, то функция нечетная.

3) $y=0$ при $x=0$, $y>0$ при $0<x<\sqrt{3}$ и $x<-\sqrt{3}$, $y<0$ при $-\sqrt{3}<x<0$ и $x>\sqrt{3}$.

4) $y'=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$. Так как функция нечетная, то можно провести исследование, ограничиваясь значениями $x\geqslant 0$. Функция возрастает на промежутках $[0;\ \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\ 3]$, убывает на промежутке $[3;\ +\infty)$; $x=3$ — точка максимума, $y_{\max}=y(3)=-4{,}5$.

5) $y''=\frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}$.

График обращен выпуклостью вверх при $x>\sqrt{3}$ и выпуклостью вниз при $0\leqslant x<\sqrt{3}$. (Учитывая, что для $-\sqrt{3}<x\leqslant 0$ график обращен выпуклостью вверх, получаем, что $x=0$ — точка перегиба.)

6) $x=\sqrt{3}$ — вертикальная асимптота. Найдем наклонную асимптоту графика функции:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=0,$$

$y=-x$ — наклонная асимптота. График функции изображен на рисунке 52.

3. Первое число x, тогда второе число $x-8$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3(x-8)$. $f'(x)=4x^2(x-6)$; $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=6$ (рис. 53). На промежутке $(-\infty;\ 6]$ функция убывает, на промежутке $[6;\ +\infty)$ функция возрастает. Следовательно, наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума $x=6$. Итак, первое число равно 6, второе число равно -2.

4. $y'=-(x^2-x+1)^2<0$, или $y'=-(x^2(x-1)^2+(x-1)^2+x^2)<0$, следовательно, функция убывающая.

Вариант 3 **К-9**

2. $y'=-\frac{2(x+3)}{x^4}$; $x=-3$ — точка максимума, $y_{\max}=y(-3)=\frac{1}{27}$. $y''=\frac{6(x+4)}{x^5}$, $x=-4$ — точка перегиба.

График изображен на рисунке 54. **3.** 40, 80, 60.

Вариант 4 **К-9**

2. $y'=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; $x=0$ — точка максимума, $y_{\max}=y(0)=0$. $y''=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$.

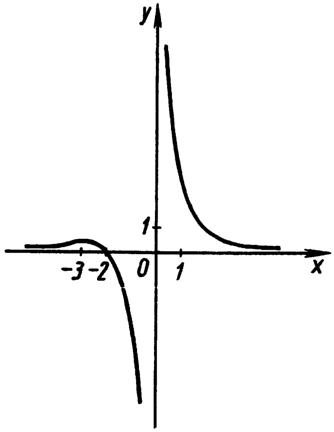


Рис. 54

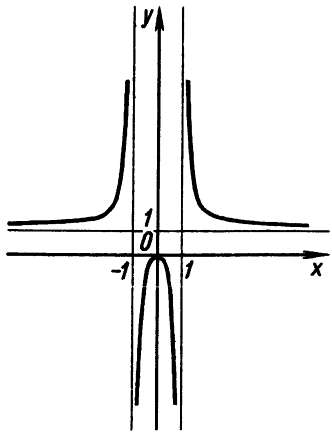


Рис. 55

График изображен на рисунке 55. **3.** $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

Вариант 5 **К-9**

2. $y'=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; $x=0$ — точка максимума, $y_{\max}=y(0)=0$; $x=2$ — точка минимума, $y_{\min}=y(2)=4$. $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$. **3.** -4.

Вариант 6 **К-9**

2. $y'=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$; $x=-2\sqrt{3}$ — точка максимума, $y_{\max}=y(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$; $x=2\sqrt{3}$ — точка минимума. $y_{\min}=y(2\sqrt{3})=3\sqrt{3}$. $y''=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

3. 5; 18,75.

Вариант 1 **С-11**

1. Рассмотрим функцию $f(x)=x^7$. Имеем: $f'(x)=7x^6$, $f''(x)=42x^5$, $f''(x)>0$ при $x>0$, т. е. выпуклость графика функции направлена вниз; следовательно,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2},\text{ т. е. }\left(\frac{a+b}{2}\right)^7\leqslant\frac{a^7+b^7}{2}\text{ для } a>0,\ b>0.$$

2. $$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6=(x^2)^6+6(x^2)^5\left(-\frac{1}{x}\right)+15(x^2)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^2+$$
$$+20(x^2)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3+15(x^2)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4+6x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5+\left(-\frac{1}{x}\right)^6=$$
$$=x^{12}-6x^9+15x^6-20x^3+15-6x^{-3}+x^{-6}.$$

3. Данное выражение можно представить в виде: $((3-2x)+2x)^4=$ $=3^4=81$.

Вариант 2 **С-11**

1. Рассмотрим функцию $f(x)=x^5$. Имеем: $f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3$, $f''(x)>0$ при $x>0$, т. е. выпуклость графика функции направлена вниз; следовательно,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Положив $x_1=a$, $x_2=3$, получим:

$$\left(\frac{a+3}{2}\right)^5\leqslant\frac{a^5+243}{2}.$$

2. $$(a^2-a^{-1})^7=(a^2)^7+7(a^2)^6(-a^{-1})+21(a^2)^5(-a^{-1})^2+$$
$$+35(a^2)^4(-a^{-1})^3+35(a^2)^3(-a^{-1})^4+21(a^2)^2(-a^{-1})^5+$$
$$+7(a^2)(-a^{-1})^6+(-a^{-1})^7=a^{14}-7a^{11}+21a^8-35a^5+35a^2-$$
$$-21a^{-1}+7a^{-4}-a^{-7}.$$

3. Данное выражение можно представить в виде: $(2x-1-2x)^4=1$.

Вариант 3 **С-11**

2. $b^{12}+6b^9+15b^6+20b^3+15+6b^{-3}+b^{-6}$.
3. $(2-3x+3x)^4=16$.

Вариант 4 **С-11**

2. $a^{21}+7a^{16}+21a^{11}+35a^6+35a+21a^{-4}+7a^{-9}+a^{-14}$.
3. $(2x+1-2x)^5=1$.

Вариант 5 **С-11**

2. $128a^7-448a^5+672a^3-560a+280a^{-1}-84a^{-3}+14a^{-5}-a^{-7}$.
3. $(3x-1-3x)^4=1$.

Вариант 6 **С-11**

2. $x^{-18}-12x^{-13}+60x^{-8}-160x^{-3}+240x^2-192x^7+64x^{12}$.
3. $(4x-3-4x)^4=81$.

Вариант 1 **К-10**

1. $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{7}{24}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. а) $f(0)=5$, $f(7\pi)=1-\frac{5}{\sqrt{2}}$, $f(-12\pi)=-5$.

б) $$f(x+8\pi)=\sin\frac{3}{2}(x+8\pi)+5\cos\frac{3}{4}(x+8\pi)=\sin\left(\frac{3}{2}x+12\pi\right)+$$
$$+5\cos\left(\frac{3}{4}x+6\pi\right)=\sin\frac{3}{2}x+5\cos\frac{3}{4}x=f(x).$$

в) $$T_1=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3},\quad T_2=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3};\quad T_1=4\cdot\frac{\pi}{3},\quad T_2=8\cdot\frac{\pi}{3},\quad T=8\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}.$$

4. Функция нечетная.
5. $\sin x(2\sin^2 x+3\sin x-2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2},\\ \sin x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

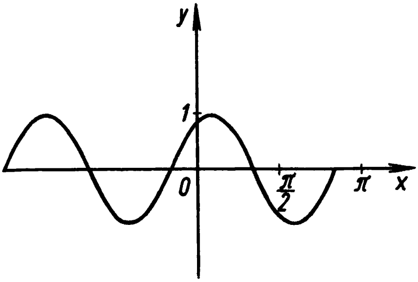


Рис. 56

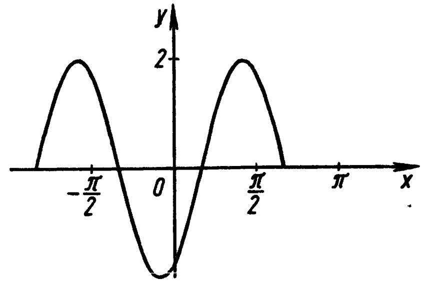


Рис. 57

6. $A=1$, $\omega=2$, $T=\pi$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. График функции изображен на рисунке 56.

7. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$
$$=\sin\alpha+\cos\alpha<2.$$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$\frac{m^4+1}{m^2}=m^2+\frac{1}{m^2}\geqslant 2.$$

Следовательно, неравенство верное.

Вариант 2 К-10

1. $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$. 2. $2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

3. а) $f(0)=5$, $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}-5}{2}$, $f\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=-4$.

б) $f(x+3\pi)=\sin 2(x+3\pi)+5\cos 4(x+3\pi)=\sin 2x+5\cos 4x=$ $=f(x)$.

в) $T_1=\pi$, $T_2=\frac{\pi}{2}$, $T=\pi$.

4. Функция четная.

5. $\cos x(2\cos^2 x+5\cos x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2},\\ \cos x=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

6. Преобразуем правую часть равенства, получим:

$$y=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right);$$

тогда $A=2$, $\omega=2$, $T=\pi$, $\varphi=\frac{5\pi}{3}$. График функции изображен на рисунке 57.

7. $\left|\frac{1-\cos^2 x}{\sin x+\cos x}+\frac{1-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\right|=\frac{1}{|\sin x+\cos x|}>\frac{1}{2}$, так как $|\sin x+\cos x|\leqslant|\sin x|+|\cos x|<2$.

Вариант 3 К-10

1. $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 0. **3.** а) $f(0)=5$, $f(8\pi)=5$, $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=$ $=-2{,}5$; в) $T=4\pi$. **4.** Функция нечетная.

5. $\pi n,\quad -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$.

6. $y=2\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$. $A=2$, $\omega=2$. $T=\pi$, $\varphi=\frac{4\pi}{3}$.

7. Преобразуем левую часть неравенства, получим: $\sin x\cos x<1$. Преобразуем правую часть неравенства, получим: $\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\geqslant 1$. Следовательно, неравенство верное.

Вариант 4 К-10

1. $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$. **2.** $\sin^2\alpha$.

3. а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{11\pi}{4}\right)=4$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$; в) $T=\pi$. **4.** Функция четная. **5.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$.

6. $y=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$. $A=2$, $\omega=2$, $T=\pi$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

7. После упрощения левой части неравенства получим:

$$4\cos^2\alpha\sin^2\alpha=4\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=4\cos^2\alpha-4\cos^4\alpha=$$
$$=1-(1-2\cos^2\alpha)^2\leqslant 1.$$

Вариант 5 К-10

1. $|\cos\alpha|=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Так как $a<0$, то α принадлежит III или IV четверти. Если α принадлежит III четверти, то

$$\cos\alpha=-\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{a}{|b|},\ \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{|b|}{a},\ \sec\alpha=$$
$$=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Если α принадлежит IV четверти, то $\cos\alpha=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{|b|},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{|b|}{a},\ \sec\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

3. а) $f(0)=1$, $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=1{,}5$, $f\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{5\sqrt{3}-2}{4}$; в) $T=\pi$.

4. $x\neq 1$, следовательно, область определения функции несиммет-

рична относительно нуля. Функция не является четной и не является нечетной.

5. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 6 **К-10**

1. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a^2-1}{2a}$, $|\cos\alpha|=\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

Так как $a<-1$, то α принадлежит либо II, либо IV четверти. Если α принадлежит IV четверти, то $\cos\alpha=\frac{a^2-1}{a^2+1}$, $\sin\alpha=\frac{2a}{a^2+1}$. Если α принадлежит II четверти, то $\cos\alpha=\frac{1-a^2}{1+a^2}$, $\sin\alpha=\frac{-2a}{a^2+1}$.

3. а) $f(0)=-3$, $f(5\pi)=\frac{4-3\sqrt{2}}{2}$, $f(-10\pi)=0$; в) $T=8\pi$.

4. Функция нечетная. 5. $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 1 **С-12**

1. $$\cos(\pi+2\alpha)+\frac{\sin(\pi+2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos(\pi+2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi+2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\pi+2\alpha-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=1.$$

Возможен и другой способ решения:

$$-\cos 2\alpha+\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

2. $\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x=\frac{1}{2}$,

$$\sin 5x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 5x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\left[\begin{array}{l}5x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ 5x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5},\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

3. $f(x)=1-8\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 2x=\cos 4x$, $T=\frac{\pi}{2}$.

4. $A=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Так как $\pi<\alpha<2\pi$, то $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$. Имеем:

$A=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$. Далее, так как $\pi<\alpha<2\pi$, то $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{2}$. Получаем $A=\sin\frac{\alpha}{4}$.

Вариант 2 С-12

1. $\sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos 2\alpha = 1$.

2. $\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

3. $y = \frac{1}{8}\sin 8x$, $T = \frac{\pi}{4}$.

4. $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)} =$
$= \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \cos\frac{\alpha}{4}$.

Вариант 3 С-12

1. 1. 2. $-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. π.

Вариант 4 С-12

1. 1. 2. $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n$, $-\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{\pi}{2}$.

Вариант 5 С-12

1. 1. 2. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}n$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\frac{\pi}{2}$.

Вариант 6 С-12

1. 1. 2. $\frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. π.

Вариант 1 К-11

1. $\frac{(1 + \operatorname{tg}\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

2. Воспользуемся формулой $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$, то $\sin 2\alpha = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} =$
$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - (\sqrt{2} - 1)^2}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$.

3. $$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2},$$
$$\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}\right)\right) = 0,$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{2}=0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0,\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}n,\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

4. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=\frac{1-4\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ}=2.$$

5. Угловой коэффициент асимптоты $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$. Найдем угловой коэффициент касательной:

$$y'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x^2+1)-2x(x^3-2x^2+3)}{(x^2+1)^2},$$

$$k_2=y'(1)=-1{,}5,\ \operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-1{,}5-1}{1-1{,}5}\right|=5,$$

$\varphi\approx 78^\circ\ 41'$, где φ — угол между асимптотой и касательной.

6. $$1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=$$

$$=\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos 4\alpha+2\sin\alpha\cos 6\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha+\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}.$$

Вариант 2 К-11

1. $\sqrt{2}$. 2. $\frac{204}{325}$. 3. $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 3 К-11

2. $\operatorname{tg}\alpha=-(1+\sqrt{2}),\ \sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg}2\alpha=1$.

3. $\frac{2\pi n}{5},\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$.

6. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Имеем:

$$\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos 2x\cos x},$$

$$\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x=\frac{\sin x}{\cos 3x\cos 2x},$$

. . . .

$$\operatorname{tg}10x-\operatorname{tg}9x=\frac{\sin x}{\cos 10x\cos 9x}.$$

Складывая почленно, получим:

$$\operatorname{tg} 10x-\operatorname{tg} x=\sin x\left(\frac{1}{\cos 2x\cos x}+\ldots+\frac{1}{\cos 10x\cos 9x}\right),$$

откуда находим:

$$\frac{1}{\cos 2x\cos x}+\ldots+\frac{1}{\cos 10x\cos 9x}=\frac{\operatorname{tg} 10x-\operatorname{tg} x}{\sin x}=\frac{2\sin 9x}{\sin 2x\cos 10x}.$$

Вариант 4 К-11

2. $\cos(2\alpha-\beta)=-\frac{123}{845}$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5},\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$.

4. $-0{,}5$. **5.** Прямые параллельны, угол $\varphi=0$.

6. Воспользуемся формулой $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$, или $2\operatorname{ctg}2\alpha+$ $+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$. Имеем:

$$8\operatorname{ctg}24\alpha+4\operatorname{tg}12\alpha+2\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{tg}3\alpha=$$
$$=4(2\operatorname{ctg}24\alpha+\operatorname{tg}12\alpha)+2\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{tg}3\alpha=$$
$$=4\operatorname{ctg}12\alpha+2\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{tg}3\alpha=$$
$$=2(2\operatorname{ctg}12\alpha+\operatorname{tg}6\alpha)+\operatorname{tg}3\alpha=2\operatorname{ctg}6\alpha+\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{ctg}3\alpha.$$

Вариант 5 К-11

2. $\frac{123}{845}$. **3.** $\frac{2\pi n}{3},\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 6 К-11

2. $\sin 2\alpha=\frac{4+\sqrt{2}}{6},\ \cos 2\alpha=\frac{4-\sqrt{2}}{6},\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

3. $\frac{2\pi n}{5},\ \frac{2\pi}{3}(3n\pm1),\ \pi(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 1 С-13

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 3x\cos x-2\sin 3x}{x^2\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-1.$

2. $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{4},\ y'(x)=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x;\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$. Уравнение касательной: $y=x\sqrt{3}+\frac{7}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

3. а) $f'(x)=\frac{-4\cos x(2-3\cos x)-3\sin x(1-4\sin x)}{(2-3\cos x)^2},\ f'(\pi)=\frac{4}{5}$;

б) $g'(x)=\sin(3x+1)+x\cdot3\cos(3x+1)-\frac{6}{\sin^2(3x+1)}$.

Если $x=\frac{\pi-2}{6}$, то $3x+1=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $g'\left(\frac{\pi-2}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+$ $+\frac{\pi}{2}\cdot3\cos\frac{\pi}{2}-\frac{6}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=-5.$

4. Областью определения данной функции является множество действительных чисел, не равных $\frac{\pi}{4}n$, где $n\in\mathbf{Z}$. Преобразуем правую часть равенства:

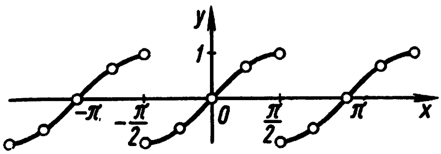


Рис. 58

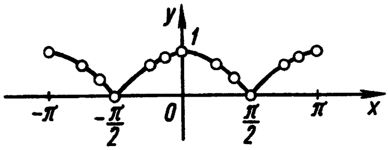


Рис. 59

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=|\cos x|\cdot\frac{(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)}{(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{ctg} x)}=$$
$$=|\cos x|\operatorname{tg} x.$$

Если из графика функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } -\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ -\sin x \text{ при } \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n\end{cases}$$

исключить точки с абсциссами $x=\frac{\pi}{4}n$, где $n\in\boldsymbol{Z}$, то получим график данной функции (рис. 58).

Вариант 2 С-13

1. -9. 2. $y=x\sqrt{3}+\frac{5}{4}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 3. а) $f'(\pi)=-0{,}5$; б) $g'\left(\frac{\pi-3}{2}\right)=-7$.

4. Областью определения функции является множество действительных чисел, не равных $\frac{\pi k}{4}$ и $\frac{\pi}{8}(4k+3)$, где $k\in\boldsymbol{Z}$. Преобразуем правую часть равенства:

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\operatorname{ctg} 2x(1+\operatorname{tg} 2x)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=|\cos x|\cdot\frac{\operatorname{ctg} 2x+1}{1+\operatorname{ctg} 2x}=|\cos x|.$$

Если из графика функции $f(x)=|\cos x|$ исключить точки с абсциссами $\frac{\pi k}{4}$ и $\frac{\pi}{8}(4k+3)$, где $k\in\boldsymbol{Z}$, то получим график данной функции (рис. 59).

Вариант 3 С-13

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-\sin 2x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(1-\sin x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}}\right)^2=1.$

2. $y=1$. 4. Исключив из графика функции

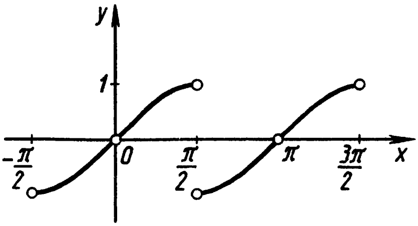


Рис. 60

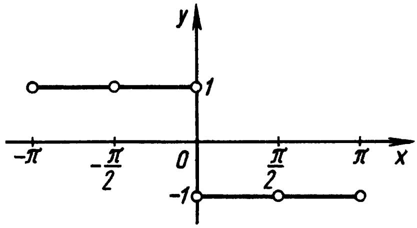


Рис. 61

$$f(x)=\begin{cases} \sin x \text{ при } -\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ -\sin x \text{ при } \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n, \ n\in \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

точки с абсциссами $\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, получим график данной функции (рис. 60).

Вариант 4 **С-13**

1. $\frac{\sqrt{2}}{32}$. **2.** $y=1$.

4. Графиком данной функции будет график функции

$$y=\begin{cases} -1 \text{ при } 2\pi n<x<\pi+2\pi n, \\ 1 \text{ при } -\pi+2\pi n<x<2\pi n, \ n\in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$$

если исключить из него точки с абсциссами $\frac{\pi}{2}n$, где $n\in \boldsymbol{Z}$ (рис. 61).

Вариант 5 **С-13**

1. $-6{,}25$. **2.** $y=2$.

Вариант 6 **С-13**

1. 0. **2.** $y=-6x+\frac{\pi}{2}+2$.

Вариант 1 **К-12**

1. Заменим $\cos^2(5x+3)$ на $1-\sin^2(5x+3)$, получим уравнение $3\sin^2(5x+3)-2\sin(5x+3)+0{,}25=0$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} \sin(5x+3)=\frac{1}{2}, \\ \sin(5x+3)=\frac{1}{6}; \end{array}\right.$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{30}-\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{5},$$

$$x=(-1)^n\cdot\frac{1}{5}\arcsin\frac{1}{6}-\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{5}, \ n\in \boldsymbol{Z}.$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x+2\right)=\cos(\pi-3x-5) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-4x+2=\pm(\pi-3x-5)+$ $+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $7-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{14}-\frac{3}{7}+\frac{2\pi n}{7},\ n\in\mathbf{Z}$.

3. Преобразуем левую часть равенства, используя формулу $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, получим:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=2,$$

$$2\cos^2 x+2\cos 5x\cos x=0,\ \cos x(\cos x+\cos 5x)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\cos(\pi-5x),\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Так как $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}\subset\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3} \,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$, то уравнение имеет корни: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, где $n\in\mathbf{Z}$.

4. Перепишем данное уравнение в виде:

$$a\sin 5x+2\sqrt{ab+b^2}\cos 5x=-2(a+2b).$$

Разделим обе части уравнения на d, где

$$d=\sqrt{a^2+(2\sqrt{ab+b^2})^2}=a+2b>0,$$

получим:

$$\frac{a}{a+2b}\sin 5x+\frac{2\sqrt{ab+b^2}}{a+2b}\cos 5x=-2,$$

$$\sin(5x+\varphi)=-2,\ \text{где}\ \varphi=\arccos\frac{a}{a+2b}.$$

Уравнение решений не имеет.

5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{4}{3}+7}{1-\frac{4}{3}\cdot 7}=-1$. Так как $\pi<\alpha+\beta<2\pi$, то $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

6. Воспользуемся формулой $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, получим уравнение

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=-0{,}5.$$

Умножим обе части уравнения на $2\sin x$:

$$2\sin x\cos 2x+2\sin x\cos 4x+2\sin x\cos 6x+2\sin x\cos 8x=-\sin x.$$

Заменим произведение тригонометрических функций суммой:

$$\sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x + \sin 9x - \sin 7x + \sin x = 0,$$

откуда $\sin 9x = 0$, $x = \frac{\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Так как числа $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (корни уравнения $\sin x = 0$), не являются корнями исходного уравнения, то необходимо исключить из значений n числа, кратные 9.

Ответ: $\frac{\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 9k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вариант 2 **К-12**

1. $\pm\frac{\pi}{9} - \frac{5}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{6} - \frac{5}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Решим уравнение:

$$\operatorname{tg}(4x+3) = \operatorname{ctg}(x+5),\ \operatorname{tg}(4x+3) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x - 5\right),$$

$$4x + 3 = \frac{\pi}{2} - x - 5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};\ x = \frac{\pi}{10} - 1{,}6 + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}.$$

3. $$\cos 4x + 2\cos 5x \cos 4x = 0,$$
$$\cos 4x(1 + 2\cos 5x) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0, \\ \cos 5x = -\frac{1}{2},\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \\ x = \pm\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

4. Чтобы данное уравнение имело решение, необходимо выполнение условия: $\sin x = \sin 2x = \sin 3x = \sin 4x = \sin 5x = 1$, но если $\sin x = 1$, то $\sin 2x = 0$. Следовательно, уравнение решений не имеет.

5. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{1\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}} = 1$. Так как $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $-\frac{5\pi}{2} < -\beta < -2\pi$, то $-\frac{3\pi}{2} < \alpha - \beta < -\frac{\pi}{2}$ и $\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}$.

6. $$(\sin 2x - \cos 4x)^2 + 2(\sin 2x - \cos 4x) - 3 = 0,$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{2}}{2} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Вариант 3 **К-12**

1. $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{4}\left(\pi - \arccos\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $\frac{\pi}{2} + 3 + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{18} + \frac{1}{9} + \frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. $\frac{7\pi}{4}$. 6. $\frac{2\pi n}{9}$, $n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 9k$, $k\in\mathbf{Z}$. Указание. Умножить обе части уравнения на $2\sin\frac{x}{2}$.

Вариант 4 К-12

1. $(-1)^k\frac{\pi}{30}-\frac{1}{5}+\frac{\pi k}{5}$, $\frac{1}{5}(-1)^k\arcsin\frac{1}{14}+\frac{\pi k}{5}-\frac{1}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2. $\frac{\pi}{18}+\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{9}$, $n\in\mathbf{Z}$. 3. $(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. $\frac{3\pi}{4}$. 6. $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 5 К-12

1. $(-1)^k\frac{\pi}{12}-2+\frac{\pi}{2}k$, $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\arcsin 0{,}1}{2}+\frac{\pi k}{2}-2$, $k\in\mathbf{Z}$.

2. $1{,}6-\frac{\pi}{10}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. 3. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

5. $\frac{7\pi}{4}$. 6. $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{3}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 6 К-12

1. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n-0{,}5$, $n\in\mathbf{Z}$. 2. $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}+\frac{1}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

$7\pm\sqrt{41-4\pi+16\pi n}$, где $n\geqslant 0$, $n\in\mathbf{Z}$. 3. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. $\frac{7\pi}{4}$. 6. $\frac{\pi n}{9}$, $n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 9k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 1 С-14

1. $3\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha=0{,}5(3+5\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha)<$
$<0{,}5(3+\sqrt{34})<0{,}5(3+5{,}83)<4{,}45$.
$0{,}5(3-\sqrt{34})<\sqrt{17}<4{,}2<0{,}5(3+\sqrt{34})$.
Ответ: а) Не может; б) может.

2. $13\sin\left(\frac{\pi}{12}+4x\right)\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=6{,}5\left(\sin\left(8x-\frac{7\pi}{12}\right)+\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$\max\limits_R y=6{,}5\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ при $x=\frac{13\pi}{96}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$;

$\min\limits_R y=6{,}5\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ при $x=\frac{\pi}{96}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Множество значений функции: $\left[\frac{13}{4}(\sqrt{2}-2);\ \frac{13}{4}(\sqrt{2}+2)\right]$.

3. $2+2\cos^2 x-1<3\cos x\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\cos x<1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<2\pi k$, $2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 2 С-14

1. $\sin^{20} 2x \leqslant \sin^2 2x$, равенство достигается при $2x = \pi n$ или $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\cos^{40} 2x \leqslant \cos^2 2x$, равенство достигается при $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $2x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Сложив почленно неравенства, получим: $\sin^{20} 2x + \cos^{40} 2x \leqslant \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$. Равенство достигается при $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} > 3 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \operatorname{arctg} 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Вариант 3 С-14

1. Равенство достигается при $\alpha = 0{,}5 \arccos 0{,}8 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) Может; б) не может. **3.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 4 С-14

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $y < \sqrt{7{,}469}$. **3.** $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 5 С-14

1. Равенство достигается при $|a| = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 6 С-14

1. Равенство достигается при $\alpha = 2\pi n$ или $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $y < \operatorname{tg} 76°$. **3.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 1 К-13

1. $\frac{\pi}{2} - x = t$, $x = \frac{\pi}{2} - t$, $t \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{2t}{\arcsin t} = 2.$$

2. а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)=$
$=2\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)=$
$=2\cdot\frac{12}{13}\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{120}{169}$;

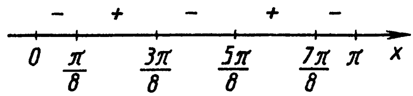


Рис. 62

б) $\arcsin(\sin 5)=\arcsin(\sin(5-2\pi))=5-2\pi$, так как $-\frac{\pi}{2}<$ $<5-2\pi<\frac{\pi}{2}$.

3. Упростив левую часть неравенства, получим: $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant$ $\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя единичную окружность, имеем:

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{6}+2\pi n,$$
$$\frac{\pi}{24}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{24}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

4. Так как $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $|x|\leqslant 1$, то $\arccos x=\frac{\pi}{2}-$ $-\arcsin x$. Тогда исходное неравенство примет вид: $\arcsin x<$ $<\frac{\pi}{2}-\arcsin x$, или $\arcsin x<\frac{\pi}{4}$, откуда $-1\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Обозначим $f(x)=\sin 3x-\sin 5x$. Так как период функции f равен 2π и функция f нечетная, то достаточно найти решения неравенства $f(x)>0$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

Уравнение $\sin 3x-\sin 5x=0$ имеет на отрезке $[0;\ \pi]$ корни: 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, π.

Применив метод интервалов, находим решения неравенства $f(x)>0$ на $[0;\ \pi]$ (рис. 62): $\frac{\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$.

Теперь учтем нечетность функции f. Решениями неравенства на $(-\pi;\ 0]$ будут: $-\frac{\pi}{8}<x<0$, $-\frac{5\pi}{8}<x<-\frac{3\pi}{8}$, $-\pi<x<-\frac{7\pi}{8}$. Наконец, учитывая периодичность функции f, находим все решения неравенства.

Ответ: $\frac{\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{8}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{8}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{8}+$ $+2\pi n<x<2\pi n$, $-\frac{5\pi}{8}+2\pi n<x<-\frac{3\pi}{8}+2\pi n$, $-\pi+2\pi n<x<$ $<-\frac{7\pi}{8}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 2 **К-13**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin 2x)\,\mathrm{arctg}\,2x}{(x^2-x)\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x-1}\cdot\frac{\mathrm{arctg}\,2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\arcsin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=-1\frac{1}{3}$.

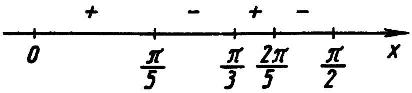


Рис. 63

2. а) $\cos\left(2\arcsin\frac{7}{25}\right)=$
$=1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{7}{25}\right)=$
$=1-\frac{98}{625}=\frac{527}{625}$;

б) $\arccos(\cos 4)=\arccos(\cos(2\pi-4))=2\pi-4$, так как $2\pi-4\in[0;\ \pi]$.

3. $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x\leqslant\pi+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

4. Так как $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$.

Подставив в данное неравенство $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$ вместо $\operatorname{arcctg} x$, получим $\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{4}$, откуда $x<1$.

5. Преобразуем левую часть неравенства, получим: $\cos 2x-\cos 8x<0$. Пусть $f(x)=\cos 2x-\cos 8x$. Так как функция f четная и ее период равен π, то достаточно найти решения неравенства $f(x)<0$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Находим корни уравнения $f(x)=0$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{5}$.

Применив метод интервалов (рис. 63), находим решения неравенства $f(x)=2\sin 5x\sin 3x<0$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$: $\frac{\pi}{5}<x<\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{5}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Так как функция f четная, то решениями неравенства $f(x)<0$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ будут: $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{2\pi}{5},\ -\frac{\pi}{3}<x<-\frac{\pi}{5}$. Учитывая периодичность функции f (заменив промежуток $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{2\pi}{5}$ промежутком $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{5}$), находим все решения неравенства.

Ответ: $\frac{\pi}{5}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \frac{2\pi}{5}+\pi n<x<\frac{3\pi}{5}+\pi n,$
$-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<-\frac{\pi}{5}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Вариант 3 К-13

1. $1\frac{1}{3}$. 2. а) $\frac{120}{169}$; б) 0,5. 3. $-\frac{\pi}{2}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1$. 5. $-\frac{2\pi}{5}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{5}+2\pi n,\ \frac{4\pi}{5}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{6\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Вариант 4 К-13

1. 10. 2. а) $\frac{527}{625}$; б) $6-\pi$. 3. $\frac{7\pi}{24}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{24}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

4. $1<x<3$. **5.** $\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант 5 **К-13**

1. $\frac{3}{4}$. **2.** а) $\frac{7}{25}$; б) $6-2\pi$. **3.** $-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$.
4. $1<x\leqslant 2$, $2{,}5 \leqslant x<3{,}5$.
5. $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант 6 **К-13**

1. 0,4. **2.** а) $\frac{1}{3}$; б) $2\pi-5$. **3.** $\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
4. $x>\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант 1 **К-14**

1. $\frac{2}{x}-\frac{9-x^2}{3x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-3x+2}{x(3x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+2)}{x(3x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -2, \\ -\frac{1}{3}<x<0, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \leqslant -2$, $-\frac{1}{3}<x<0$, $x=1$.

2. Функция определена при любом $x \neq -2$.

$$f'(x)=-\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}.$$

Критические точки функции: $x=-3$, $x=-1$ (рис. 64); $x=-3$ — точка минимума, $f_{\min}=f(-3)=6$; $x=-1$ — точка максимума, $f_{\max}=f(-1)=2$. Функция возрастает на $[-3; -2)$ и на $(-2; -1]$, функция убывает на $(-\infty; -3]$ и на $[-1; +\infty)$.

Найдем асимптоты графика функции. Так как $\lim\limits_{x \to -2} \frac{3-x^2}{x+2}=\infty$, то прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой. Найдем наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{x^2+2x}=-1,\ b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x^2}{x+2}+x\right)=2.$$

Прямая $y=2-x$ является наклонной асимптотой. График функции изображен на рисунке 65.

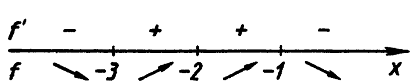


Рис. 64

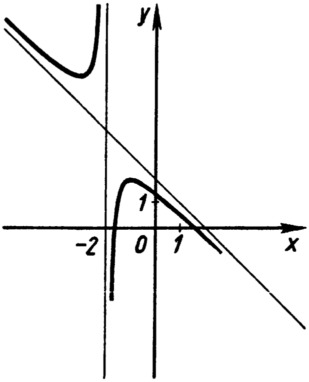


Рис. 65

3. $x^3+8x+24=x^3+2x^2-2x^2-4x+12x+$
$+24=(x+2)(x^2-2x+12)$.

4. При $n=1$ имеем: $10+45-1=54$, $54:27=2$. Докажем, что из справедливости утверждения для $n=k$, где $k \in \mathbf{N}$, следует справедливость утверждения для $n=k+1$.

$$10^{k+1}+45(k+1)-1=$$
$$=10(10^k+45k-1)-405k+54.$$

Так как $10(10^k+45k-1)$ кратно 27 (по допущению), а $(405k):27=15k$ и 54 кратно 27, то $10^{k+1}+45(k+1)-1$ кратно 27.

5. π, $\frac{7\pi}{6}$.

Вариант 2 К-14

1. После преобразований получим: $\frac{(x+2)^2(x-4)}{x+1} \leqslant 0$.

Ответ: $-1<x\leqslant 4$, $x=-2$.

2. $D(f)=\mathbf{R}$; $f(x)=0$ при $x=0$, $x=3$.

$$f'(x)=\frac{4}{9}(x-3)^2(3-4x).$$

Критические точки функции: $\frac{3}{4}$, 3 (рис. 66); $x=\frac{3}{4}$ — точка максимума, $f_{\max}=f\left(\frac{3}{4}\right)=3\frac{51}{64}$.

Функция возрастает на $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$, убывает на $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

$$f''(x)=\frac{8}{3}(3-x)(2x-3), \; f''(x)=0$$

при $x=1{,}5$, $x=3$.

График функции выпуклый вверх на $(-\infty; 1{,}5]$, $[3; +\infty)$, выпуклый вниз (вогнутый) на $[1{,}5; 3]$ (рис. 67), $x=1{,}5$ и $x=3$ — точки перегиба. График функции изображен на рисунке 68.

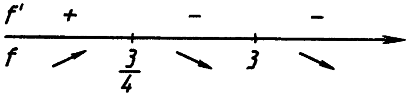


Рис. 66

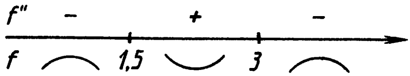


Рис. 67

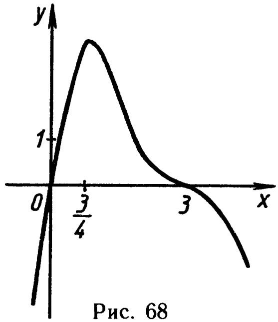


Рис. 68

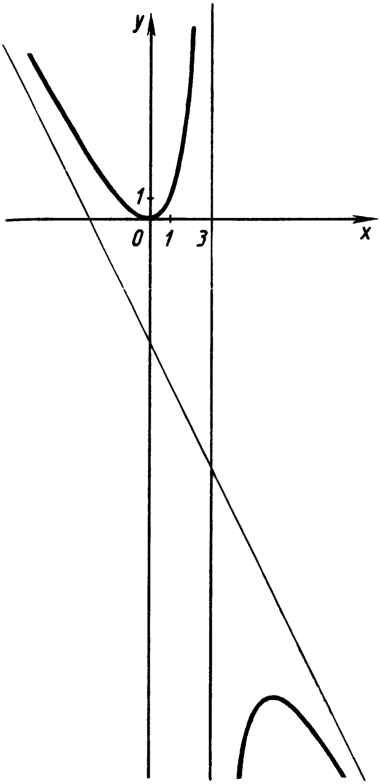


Рис. 69

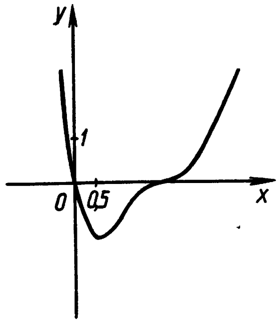


Рис. 70

3. $x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0.$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-3, \\ x+\frac{1}{x}=4, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, \\ x=2\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

4. При $n=4$ имеем $2^4=16$, а $4!=24$, т. е. утверждение справедливо. Докажем, что из справедливости утверждения при $n=k$, где $k\in \boldsymbol{N}$ и $k\geqslant 4$, следует справедливость утверждения при $n=k+1$. Имеем:

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k<2\cdot k!<(k+1)\cdot k!=(k+1)!.$$

5. $3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$, $(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2=0$; $\operatorname{tg} x=$ $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

Вариант 3 **К-14**

1. $x\leqslant -0{,}5$, $x=1$. 2. График изображен на рисунке 69.
3. $x^2-6x+8=y$. Имеем: $(x^2-6x+9)(x^2-6x+8)-12=y(y+1)-$ $-12=y^2+y-12=(y+4)(y-3)=(x^2-6x+12)(x^2-6x+5)=$ $=(x-1)(x-5)(x^2-6x+12)$.
5. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$.

Вариант 4 К-14

1. $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x < \frac{2}{3}$, $x=2$. 2. График изображен на рисунке 70.

3. $1 \pm \sqrt{2}$, $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. 5. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Вариант 5 К-14

1. $-6 \leqslant x < 0$, $x=3$, $x>6$. 3. $x_1=x_2=1$, $x_3=2{,}5$. 5. $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$.

Вариант 6 К-14

1. $x=-0{,}5$, $-\frac{1}{3}<x<0$, $0<x\leqslant 1$. 3. $3 \pm \sqrt{5}$. 5. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{12}$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ И КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ ДЛЯ XI КЛАССА

Вариант 1 С-1

1. а) $\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2}{x^3}\,dx = \int (4x^{-3} - 12x^{-\frac{5}{2}} + 9x^{-2})\,dx = -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x\sqrt{x}} - -\frac{9}{x} + C.$

б) Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2 = \left(\frac{2\sin x \cos x - 2\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2 = 4\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 2x.$$

Тогда имеем:

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

2. Докажем, что $F'(x) = f(x)$. Имеем:

$$F'(x) = 3 + 6\sin 3x \cos 3x = 3 + 3\sin 6x = 3(1+\sin 6x) = $$
$$= 3\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)\right) = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = f(x).$$

3. После упрощения получаем: $y = \sin x\,|\cos x| + \cos x\,|\sin x|$. Так как период этой функции равен 2π, то достаточно построить ее график на отрезке $[0; 2\pi]$, а затем, воспользовавшись периодичностью функции, построить график на всей прямой.

На $[0; 2\pi]$ имеем:

$$y = \begin{cases} \sin 2x & \text{при } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi, \\ -\sin 2x & \text{при } \pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

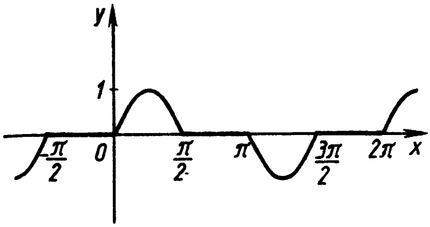


Рис. 71

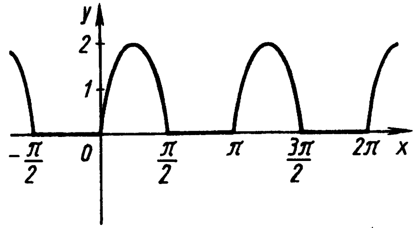


Рис. 72

График функции показан на рисунке 71.

Функция недифференцируема в точках вида $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Вариант 2 С-1

1. а) $\int\frac{x^2-3x+4}{x\sqrt{x}}\,dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{3}{2}})\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}-$
$-8x^{-\frac{1}{2}}+C.$

б) $\int\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(4x+\frac{7\pi}{4}\right)dx=$
$=\frac{1}{2}\int\left(\cos(6x+\pi)+\cos\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)\right)dx=$
$=\frac{1}{2}\int(-\cos 6x-\sin 2x)\,dx=-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

2. $F'(x)=3+4\cos 2x+\cos 4x=3+4\cos 2x+2\cos^2 2x-1=$
$=2(\cos 2x+1)^2=8\cos^4 x.$

3. Перепишем функцию в виде: $y=|\sin 2x|+\sin 2x$. Учитывая, что период этой функции равен π, строим ее график на отрезке $[0;\ \pi]$. Имеем:

$$y=\begin{cases}2\sin 2x \text{ при } 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 0 \text{ при } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

Используя периодичность, строим график на всей прямой (рис. 72). Функция недифференцируема в точках вида $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Вариант 3 С-1

1. а) $2{,}5\,\mathrm{tg}\,x-3{,}5x+C$; б) $\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C$.

3. Рис. 73. Функция дифференцируема на всей числовой прямой (в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, производная равна нулю).

Вариант 4 С-1

1. а) $\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{x}+C$; б) $\frac{1}{14}\sin 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$.

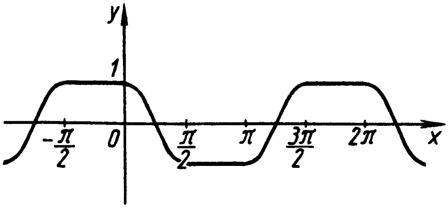


Рис. 73

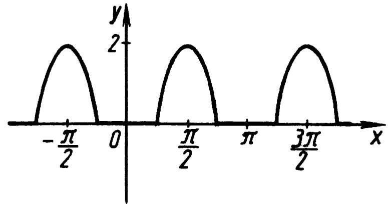


Рис. 74

3. Рис. 74. Функция недифференцируема в точках $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 5 — С-1

1. а) $x^2+x+\operatorname{arctg} x+C$; б) $-2\operatorname{ctg} 2x-4x+C$.

Вариант 6 — С-1

1. а) $-2{,}5\operatorname{ctg} x-3x+C$; б) $0{,}1\,(2x+1)^{2,5}-\frac{1}{6}(2x+1)^{1,5}+C$.

Вариант 1 — К-1

1. Разделяя переменные, получаем: $\frac{dy}{y^2}=xdx$. (Так как $y(1)=-2\neq 0$, то функция $y(x)=0$ не является решением уравнения.) Интегрируя, имеем: $-\frac{1}{y}=0{,}5x^2+C$. Найдем теперь такое значение для C, чтобы выполнялось условие $y(1)=-2$. Имеем: $-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}+C$, откуда $C=0$. Таким образом, получаем $-\frac{1}{y}=0{,}5x^2$, т. е. $y=-\frac{2}{x^2}$. Ответ: $y=-\frac{2}{x^2}$.

2. Согласно второму закону Ньютона $mx''=F$. В нашем случае $m=1$, $F=8-12t$. Следовательно, требуется решить уравнение $x''=8-12t$. Имеем: $x'=8t-6t^2+C_1$, $x=4t^2-2t^3+C_1t+C_2$; $x(0)=C_2=0$, $v(0)=C_1=1$, поэтому $x(t)=4t^2-2t^3+t$. Скорость максимальная, если $V'(t)=8-12t=0$, откуда $t=\frac{2}{3}$ (с).

Ответ: $x(t)=4t^2-2t^3+t$, $t=\frac{2}{3}$ (с).

3. Общим решением дифференциального уравнения $y''+9y=0$ является функция $f(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. Найдем производную: $f'(x)=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x$. Так как $f(0)=3$, $f'(0)=9$, то $C_1=C_2=3$. Искомая функция имеет вид: $f(x)=3\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Критические точки функции: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. Отрезку $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$ принадлежит только точка $\frac{\pi}{12}$. Находим: $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=3\sqrt{2}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$. Ответ: 3.

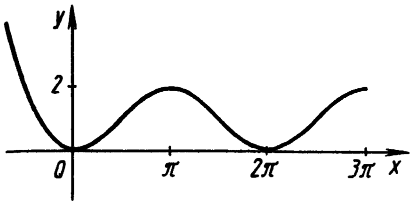


Рис. 75

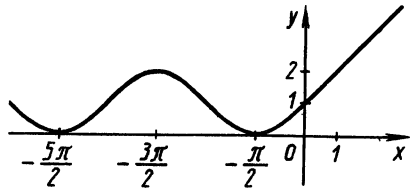


Рис. 76

4. $F(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x<0, \\ 1-\cos x \text{ при } x\geqslant 0. \end{cases}$

График первообразной изображен на рисунке 75.

Вариант 2 **К-1**

1. Разделим переменные: $y^{-3}dy=x^{-2}dx$. Интегрируя, имеем: $-\frac{1}{2y^2}=-\frac{1}{x}+C$. Учитывая условие $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, находим $C=0$. Следовательно, $y^2=0{,}5x$. Условию $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяет функция $y=\sqrt{0{,}5x}$. Ответ: $y=\sqrt{0{,}5x}$.

2. Пусть $(x;\ y)$ — произвольная точка кривой $y=f(x)$. Угловой коэффициент касательной в точке $(x;\ y)$ равен $y'(x)$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной касательной, равен $-\frac{1}{y'(x)}$. Уравнение этой прямой, проходящей через точку касания, имеет вид:

$$Y-y(x)=-\frac{1}{y'(x)}(X-x). \qquad (1)$$

Так как $Y=0$ при $X=x+2$, то из (1) получаем: $y(x)=\frac{2}{y'(x)}$. Таким образом, задача свелась к нахождению частного решения дифференциального уравнения $yy'=2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0$. Имеем: $ydy=2dx$, $y^2=4x+C$. Так как кривая должна проходить через начало координат, то $y(0)=0$ и, следовательно, $C=0$. Уравнение кривой имеет вид: $y^2=4x$. Ответ: $y^2=4x$.

3. Решением дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, является функция $y=2(\cos 4x-\sin 4x)$. Критической точкой функции, принадлежащей отрезку $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right]$, является точка $x_0=\frac{3\pi}{16}$. Наибольшего значения функция достигает на правом конце отрезка: $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$. Ответ: -2.

4. $F(x)=\begin{cases} 1+\sin x \text{ при } x<0, \\ x+1 \text{ при } x\geqslant 0. \end{cases}$

График первообразной изображен на рисунке 76.

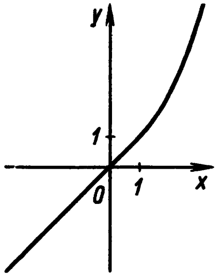


Рис. 77

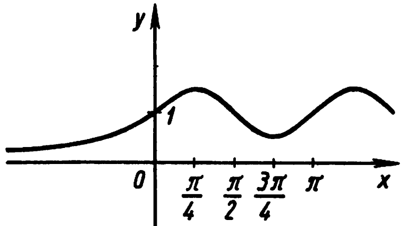


Рис. 78

Вариант 3 К-1

1. $y=x+\frac{\pi}{2}$. 2. $0{,}5t^2+1{,}5t+2-0{,}25\sin 2t$. 3. $-3\sqrt{2}$.

4. $F(x)=\begin{cases} x \text{ при } x<1, \\ 0{,}5(x^2+1) \text{ при } x\geqslant 1 \end{cases}$ (рис. 77).

Вариант 4 К-1

1. $y=-\frac{1}{x}$. 2. $x^2+y^2=1$. 3. $2\sqrt{2}$.

4. $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x} \text{ при } x<0, \\ 1+0{,}5\sin 2x \text{ при } x\geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 78).

Вариант 5 К-1

1. $y=-\frac{1}{x^2}$. 2. $-t^2+3t+10$, $t=3$ с. 3. $3\sqrt{2}$.

4. $F(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ при } -\frac{\pi}{2}<x<0, \\ \operatorname{arctg} x \text{ при } x\geqslant 0. \end{cases}$

Вариант 6 К-1

1. $y=x+\frac{\pi}{2}$. 2. $y=x^2$. 3. 5.

4. $F(x)=\begin{cases} x+1 \text{ при } x<1, \\ 2\sqrt{x} \text{ при } x\geqslant 1. \end{cases}$

Вариант 1 С-2

1. Решив уравнение $x^2=\sqrt[3]{32x}$, находим абсциссы точек пересечения графиков функций $x_1=0$ и $x_2=2$.

$$S=\int_0^2(\sqrt[3]{32x}-x^2)\,dx=\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{32}\,x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=3\frac{1}{3}.$$

2. $f'(x)=-2\pi A\sin 2\pi x$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)=-2$, $-2\pi A=-2$, $A=\frac{1}{\pi}$. Из условия $\int_0^3 f(x)\,dx=6$ следует, что $B=2$. Ответ: $A=\frac{1}{\pi}$, $B=2$.

3. По закону Гука сила сжатия равна $F(s)=ks$, где s (в метрах) — величина сжатия пружины, $0\leqslant s\leqslant 0{,}1$. Для нахождения коэффициента k воспользуемся тем, что по условию $F(0{,}01)=20$. Имеем: $20=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=2\cdot 10^3\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$, и поэтому $F(s)=2\cdot 10^3 s$ (Н), $0\leqslant s\leqslant 0{,}1$.

Вычислим работу по формуле $A=\int\limits_0^l F(s)\,ds$. Имеем:

$$A=\int\limits_0^{0,1} 2\cdot 10^3 s\,ds=2\cdot 10^3\cdot\frac{s^2}{2}\Big|_0^{0,1}=10 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: 10 Дж.

4. $y=\sqrt{4x-x^2-3} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4x-x^2-3, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=1, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$

Следовательно, требуется найти площадь полукруга с центром $M(2;\ 0)$ радиуса $R=1$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Вариант 2 С-2

1. $\begin{cases} \sin^2 2x=0, \\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

2. $f'(x)=2Ax+B$. Так как $f'(1)=0$, то $2A+B=0$. (1)
Так как $f(2)-f'(2)=2$, то $B+C=2$ (2).

Условие $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{3}$ дает $\frac{A}{3}+\frac{B}{2}+C=\frac{2}{3}$ (3).

Решив систему уравнений (1), (2) и (3), находим: $A=-1$, $B=2$, $C=0$.

3. Решив уравнение $6t-t^2=0$, находим время от начала пути ($t=0$) до остановки ($t=6$ (с)).

$$S=\int\limits_0^6(6t-t^2)\,dt=\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^6=36 \text{ (м)}.$$

4. $S=9$.

Вариант 3 С-2

1. $\frac{\sqrt{2}}{12\pi}(12-\pi)$. **2.** $A=1{,}5$, $B=-0{,}5$. **3.** 11,25 Дж. **4.** $S=\frac{\pi}{4}$.

Вариант 4 С-2

1. 2,2. 2. $A=-\frac{3}{\pi}$, $B=1{,}5$. 3. 80 м. 4. $S=1$.

Вариант 5 С-2

1. 0,25. 2. $A=-1$, $B=2$, $C=0$. 3. 21,6 Дж. 4. $S=\pi$.

Вариант 6 С-2

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $A=-2$, $B=3$. 3. 3 с. 4. $S=10$.

Вариант 1 К-2

1. $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=(-2\sqrt{4-x^2})\Big|_{0,5}^{1}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

2. Так как $\int\limits_0^1 (2t^3z-t^2)\,dz=(t^3z^2-t^2z)\Big|_0^1=t^3-t^2$, то данное неравенство равносильно неравенству $t^3-t^2\geqslant 0$. Решив последнее неравенство, получим $\left[\begin{array}{l} t=0, \\ t\geqslant 1. \end{array}\right.$

Ответ: $t=0$, $t\geqslant 1$.

3. Пусть $f(x)=x-4$, $g(x)=0{,}5x^2-3x+2$. Решив уравнение $f(x)=g(x)$, получим: $x_1=2$, $x_2=6$. Так как при $2\leqslant x\leqslant 6$ разность $f(x)-g(x)=-0{,}5x^2+4x-6=-0{,}5(x-2)(x-6)\geqslant 0$, то на отрезке $[2; 6]$ график функции f расположен не ниже графика функции g и, следовательно, площадь фигуры равна:

$$S=\int\limits_2^6 (f(x)-g(x))\,dx=\int\limits_2^6 (-0{,}5x^2+4x-6)\,dx=5\frac{1}{3}.$$

4. Любая первообразная данной функции имеет вид:

$$F(x)=\sin 2x+\cos x+C.$$

Из условия $F(\pi)=-1$ получаем, что $C=0$. Таким образом, задача свелась к решению системы

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2x+\cos x=0, \\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \sin x=-0{,}5, \end{array}\right. \\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}, \\ x=\frac{7\pi}{6}, \\ x=\frac{3\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Вариант 2 С-2

1. Замечаем, что $d(1+x^3)=3x^2dx$. Поэтому, сделав подстановку $1+x^3=t$, получаем $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{t}\,dt$, так как $3x^2dx=dt$, следовательно,

$$\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{52}{9}.$$

2. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\int_0^1 (tz^3+z^2)\,dt=\frac{z^3t^2}{2}\Big|_0^1+z^2t\Big|_0^1=\frac{z^3}{2}+z^2.$$

Неравенство принимает вид: $z^2(z+2)>0$. Решив его методом интервалов, получаем $z>-2$, $z\neq 0$ Ответ: $-2<z<0$, $z>0$.

3. Пусть $f(x)=4-x^2$, $g(x)=x^2-6x+4$. Уравнение $f(x)=g(x)$ имеет два корня: 0 и 3. Разность $f(x)-g(x)=2x(3-x)\geqslant 0$, если $0\leqslant x\leqslant 3$. Следовательно, площадь фигуры равна:

$$S=2\int_0^3 (3x-x^2)\,dx=9.$$

4. $f'(x)=\sin x-\sin 2x$, $x\in\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{4}\right]$. Так как касательная должна быть параллельна прямой $y=0$, то ее угловой коэффициент равен 0. Абсциссу точки касания найдем, решив систему

$$\begin{cases}\sin x-\sin 2x=0,\\ \frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}.\end{cases}$$

Ее решением является $x_0=\frac{5\pi}{3}$. Найдем значение функции f в точке $x_0=\frac{5\pi}{3}$:

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\int_0^{\frac{5\pi}{3}}(\sin t-\sin 2t)\,dt=-\cos t\Big|_0^{\frac{5\pi}{3}}+\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{5\pi}{3}}=-\frac{1}{4}.$$

Уравнение касательной: $y=-\frac{1}{4}$.

Вариант 3 К-2

1. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}$. 2. $x=\frac{2}{3}$. 3. $10\frac{2}{3}$. 4. $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Вариант 4 К-2

1. $3(2-\sqrt{2})$. 2. $0<u<1$, $u>1$. 3. $14\frac{2}{3}$. 4. $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=2\pi$.

Вариант 5 К-2

1. $\frac{\pi}{96}$. 2. $y\neq -1$. 3. $2\frac{2}{3}$. 4. $y=-x+\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Вариант 6 К-2

1. $\frac{2}{9}$. 2. $v<0$ и $v=2$. 3. $16\frac{1}{2}$. 4. $y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$.

Вариант 1 С-3

1. Подкоренное выражение равно $(2^x-1)^2$. Следовательно, $y=|2^x-1|+2^x$, или

$$y=\begin{cases} 2^{x+1}-1 \text{ при } x\geqslant 0, \\ 1 \text{ при } x<0. \end{cases}$$

График изображен на рисунке 79.

2. Данное уравнение равносильно уравнению $\sin^2 x=\frac{1}{4}$, корнями которого являются числа $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Решив неравенство $x^2-8x+12\leqslant 0$, получаем $2\leqslant x\leqslant 6$. Корнями, удовлетворяющими условию $2\leqslant x\leqslant 6$, являются числа: $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.

3. а) Так как $\lim\limits_{x\to +0}\frac{x^2-3}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -0}\frac{x^2-3}{x}=+\infty$ и $7>1$, то $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=+\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-3}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-3}{x}=-\infty$, следовательно, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.

4. Наименьшее значение функции $y=x^2-2x$ равно $y(1)=-1$. Функция $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ убывающая. Следовательно, наибольшее значение функции $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-2x}$ равно $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}=\sqrt{2}$.

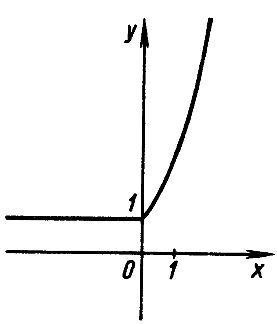


Рис. 79

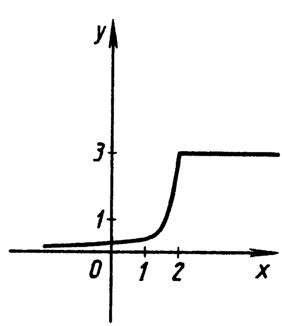


Рис. 80

Вариант 2

1. Запишем функцию в виде:

$$y=\begin{cases}3 & \text{при } x\geqslant 2,\\ 3^{2x-3} & \text{при } x<2.\end{cases}$$

График изображен на рисунке 80.

2. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}7x-x^2-6>0,\\ \sqrt{5}-25^{\cos^2 x}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<6,\\ \cos x\neq\pm\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Исключив из промежутка $1<x<6$ числа $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, получим ответ: $1<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}<x<6$.

3. а) Так как $f(x)=\frac{2^x+2^{1-x}-3}{2^{x+1}-4^x}=\frac{2^{2x}-3\cdot 2^x+2}{4^x(2-2^x)}=\frac{(2^x-1)(2^x-2)}{4^x(2-2^x)}=$
$=\frac{1-2^x}{4^x}$, $x\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{4}$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x}(2^{-x}-1)=$
$=+\infty$.

4. Числа $(3+2\sqrt{2})^x$ и $(3-2\sqrt{2})^x$ взаимно обратные, поэтому $y\geqslant 2$. Очевидно, что $y=2$ при $x=0$. Следовательно, 2 является наименьшим значением функции.

Вариант 3

1. График функции изображен на рисунке 81. **2.** $x_1=\frac{3\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$.
3. а) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=0$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=9$. **4.** 9.

Вариант 4

1. График функции изображен на рисунке 82. **2.** $-1<x<-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}<x<3$. **3.** а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{4}$;
б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{7}$.

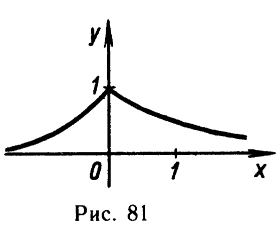


Рис. 81

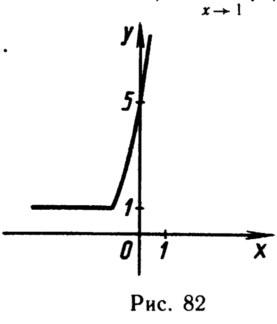


Рис. 82

Вариант 5 С-3

2. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=1$.

4. $y=\dfrac{1}{3^x+\frac{1}{3^x}}\leqslant 0{,}5$.

Вариант 6 С-3

2. $-2<x<-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}<x<3$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-0{,}5$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$. **4.** 10.

Вариант 1 С-4

1. Рассмотрим два случая: а) $x\geqslant 0$; б) $x<0$. Согласно определению модуля в случае а) получаем уравнение $2^{3x}=\frac{1}{3}$, которое решений не имеет, так как $2^{3x}\geqslant 1$ при $x\geqslant 0$, а $\frac{1}{3}<1$.

В случае б) уравнение принимает вид $2^x=\frac{1}{3}$. Его решением является $x=-\log_2 3<0$. Ответ: $x=-\log_2 3$.

2. Обозначим данное выражение через A. Имеем:

$$A=(5^{\log_5 0{,}5})^{-1}+\log_3\frac{81}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}+\log_3(7+2\sqrt{10})=$$

$$=2+\log_3\frac{81\,(7+2\sqrt{10})}{7+2\sqrt{10}}=2+\log_3 81=6.$$

3. Проведем тождественные преобразования второго слагаемого:

$$\log_3\sqrt{9x^2-6x+1}=\log_3\sqrt{(3x-1)^2}=\log_3|3x-1|=1+\log_3\left|x-\frac{1}{3}\right|.$$

Областью определения исходной функции является промежуток $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$. Но при $x<\frac{1}{3}$ справедливы равенства:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)=-\log_3\left(\frac{1}{3}-x\right),$$

$$\log_3\left|x-\frac{1}{3}\right|=\log_3\left(\frac{1}{3}-x\right).$$

Следовательно, функция может быть записана в виде:

$$y=1+2\log_3\left(\frac{1}{3}-x\right).$$

Для построения ее графика перепишем функцию в виде:

$$y=1+2\log_3\left(-\left(x-\frac{1}{3}\right)\right).$$

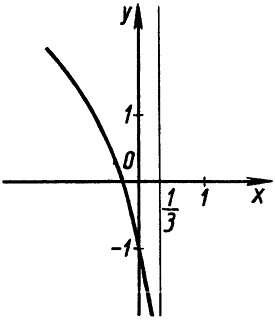


Рис. 83

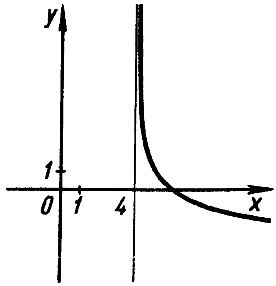


Рис. 84

Следовательно, график исходной функции может быть получен из графика функции $y=\log_3 x$ в результате следующих преобразований:

1) симметрия относительно оси ординат,
2) растяжение от оси абсцисс с коэффициентом 2,
3) параллельный перенос, при котором начало координат $O(0;\ 0)$ переходит в точку $A\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$.

График функции изображен на рисунке 83.

4. $\log_4 36=\dfrac{\log_{12} 36}{\log_{12} 4}=\dfrac{\log_{12}(12\cdot 3)}{\log_{12}\dfrac{12}{3}}=\dfrac{1+\log_{12} 3}{1-\log_{12} 3}=\dfrac{1+a}{1-a}$.

Вариант 2 **С-4**

1. Рассмотрим два случая: а) $x\geqslant 3$; б) $x<3$.

В случае а) имеем: $2^{3x-3}=63$, т. е. $8^{x-1}=63$. Но при $x\geqslant 3$ $8^{x-1}\geqslant 64$ и, следовательно, решений нет.

В случае б) уравнение принимает вид $2^{3+x}=63$, откуда $x=\log_2 63-3$. Легко проверить, что условие $x<3$ выполняется. Ответ: $x=\log_2 63-3$.

2. Обозначим данное выражение через A. Имеем:

$$A=4^{3\log_2 1{,}5\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})-2\log_2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=$$
$$=4^{2\log_2\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}=4^{\log_2 5}=25.$$

3. Область определения функции: $x>4$. Следовательно,

$$\log_{0,5}(16-8x+x^2)=\log_{0,5}(x-4)^2=$$
$$=2\log_{0,5}|x-4|=2\log_{0,5}(x-4),$$
$$\log_2(2x-8)=-\log_{0,5} 2-\log_{0,5}(x-4)=1-\log_{0,5}(x-4).$$

Таким образом, функция может быть записана в виде: $y=1+\log_{0,5}(x-4)$. График функции изображен на рисунке 84.

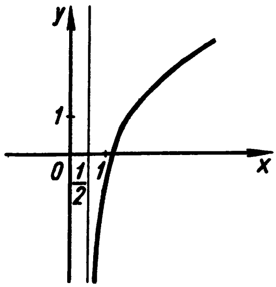


Рис. 85

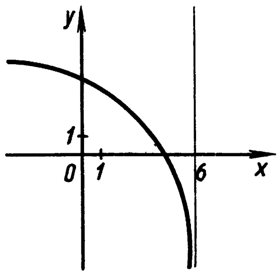


Рис. 86

4. Замечаем, что $140=2^2\cdot5\cdot7$. Следовательно,
$$\log_{140}9=\frac{2}{\log_3 140}=\frac{2}{\log_3(2^2\cdot5\cdot7)}=\frac{2}{2\log_3 2+\log_3 5+\log_3 7}=$$
$$=\frac{2}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{2abc}{2bc+ac+ab}.$$

Вариант 3 С-4

1. $x=2(\log_3 8-1)$. **2.** 2. **3.** График функции $y=1+2\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ изображен на рисунке 85. **4.** $\frac{3b}{2b+ab+1}$.

Вариант 4 С-4

1. Решений нет. **2.** 7. **3.** $y=3\log_3(6-x)-1$. График функции изображен на рисунке 86. **4.** $\frac{a-2}{4(a-1)}$.

Вариант 5 С-4

1. $x=-1+\log_{0,2}0{,}03$. **2.** 25. **4.** $\frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$.

Вариант 6 С-4

1. $x=\frac{3+12\log_7 2}{7}$. **2.** 0,000125. **4.** $\frac{b(a+2)}{ab+b+1}$.

Вариант 1 К-3

1. Корнями данного уравнения являются корни уравнения $x^2-4=0$, при которых множитель $\log_3(1-x^2-3x)$ определен, а также корни уравнения $\log_3(1-x^2-3x)=0$. Ответ: -3; -2; 0.

2. Разделим обе части неравенства на 6^{3x-2} ($6^{3x-2}>0$ при любом x). Получим неравенство $\left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}\geqslant1$, т. е. $\left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}\geqslant\left(\frac{9}{2}\right)^0$, равносильное данному. Так как $\frac{9}{2}>1$, то последнее неравенство равносильно неравенству $x-2\geqslant0$, откуда $x\geqslant2$. Ответ: $x\geqslant2$.

3. Так как $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 3 = -2$ и $x = \log_2 2^x$, то данное уравнение равносильно следующему:

$$\log_2 (2^x + 1) + \log_2 2^x = 2 + \log_2 3. \qquad (1)$$

Потенцируя в левой и правой частях уравнения (1), получаем уравнение

$$4^x + 2^x = 12. \qquad (2)$$

Ответ: $\log_2 3$.

4. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin 2x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 0{,}5 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Имеем:

$$\sqrt{\frac{\log_7 8}{\log_6 7}} = \sqrt{\log_7 8 \cdot \log_7 6} < \frac{\log_7 8 + \log_7 6}{2} = \frac{\log_7 48}{2} < 1.$$

Следовательно, $\log_7 8 < \log_6 7$. Возможен другой способ решения: $\log_7 8 - 1 = \log_7 \frac{8}{7}$, $\log_6 7 - 1 = \log_6 \frac{7}{6}$. Очевидно, $\log_7 \frac{8}{7} < \log_6 \frac{7}{6}$.

Вариант 2 К-3

1. -1; 1; 3. 2. $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 3, $\frac{1}{27}$. 4. $-1{,}5 < x < -0{,}5\sqrt{5}$, $1{,}5 < x < \log_2 3$, $\log_2 3 < x \leqslant 2$. 5. $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Имеем:

$$\log_{24} 72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 24} = \frac{3 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3};$$

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Пусть $\log_2 3 = t$ $(t > 1)$.

$$\log_{24} 72 - \log_{12} 18 = \frac{3+2t}{3+t} - \frac{1+2t}{2+t} = \frac{3}{(3+t)(2+t)} > 0.$$

Следовательно, $\log_{24} 72 > \log_{12} 18$.

Вариант 3 К-3

1. $-0{,}5$. 2. $x < 0$, $x > 1{,}5$. 3. 2. 4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\log_6 7 < \log_5 6$.

Вариант 4 К-3

1. 1, 2. **2.** $-1 \leqslant x < 0$, $x \geqslant 3$. **3.** $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$. **4.** $2^{-15} < x < 2$. **5.** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** $\log_3 6 > \log_{18} 72$.

Вариант 5 К-3

1. 3. **2.** $2n + \frac{1}{2}$, $2n - 1 \leqslant x \leqslant 2n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1. **4.** $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < 4$. **5.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** $\log_{10} 11 < \log_9 10$.

Вариант 6 К-3

1. $\frac{2n+1}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. **2.** $x < 1{,}5$. **3.** 2, 2^{-10}. **4.** $-1 \leqslant x < 4$. **5.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** $\log_2 6 > \log_{24} 648$.

Вариант 1 С-5

1. а) $f'(x) = 2e^{2x} + 2(2x+1)e^{2x} = 4e^{2x}(x+1)$; $f'(x) = 0$ при $x = -1$, $f'(x) < 0$ при $x < -1$, $f'(x) > 0$ при $x > -1$. На промежутке $(-\infty; -1]$ функция убывает, на промежутке $[-1; +\infty)$ возрастает, $x_0 = -1$ — точка минимума.

$f''(x) = 4e^{2x}(2x+3)$; $f''(x) = 0$ при $x = -1{,}5$, $f''(x) < 0$ при $x < -1{,}5$, $f''(x) > 0$ при $x > -1{,}5$. График функции обращен выпуклостью вверх на промежутке $(-\infty; -1{,}5]$, выпуклостью вниз на промежутке $[1{,}5; +\infty)$, $x_1 = -1{,}5$ — точка перегиба.

б) Функция f всюду непрерывна. Поэтому множество ее значений на любом отрезке есть отрезок $[m; M]$, где m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на этом отрезке. Из пункта а) следует, что наименьшее значение функции на отрезке $[-2; 0]$ равно $f(-1) = -e^{-2}$. Для нахождения наибольшего значения сравним $f(-2)$ и $f(0)$. Имеем: $f(-2) = -3e^{-4}$, $f(0) = 1$. Следовательно, наибольшее значение функции на $[-2; 0]$ равно 1. Множество ее значений на $[-2; 0]$ есть отрезок $[-e^{-2}; 1]$.

2. $y' = 2x - \frac{2}{2x-1} = \frac{2(2x^2 - x - 1)}{2x-1}$, $x > \frac{1}{2}$; $y' = 0$ при $x = 1$. Уравнение касательной: $y = 2$.

3. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, где $x > 0$. $F(x) = x + \ln x + C$.

Из условия $F(e) = e$ находим: $C = -1$. Следовательно, первообразная имеет вид: $F(x) = x + \ln x - 1$.

Уравнение $x + \ln x - 1 = 0$, или $\ln x = 1 - x$ имеет корень $x = 1$. Других корней это уравнение иметь не может, так как функция $y = \ln x$ возрастающая, а $y = 1 - x$ убывающая. Таким образом, кривая $y = x + \ln x - 1$ пересекает ось Ox в точке $M(1; 0)$.

Вариант 2 С-5

1. а) $f'(x)=1+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}$; $f'(x)=0$ при $x=-1$. При любом значении $x\neq-1$ производная $f'(x)>0$. Отсюда следует, что функция возрастает на всей числовой прямой, точек экстремума нет.

$$f''(x)=\frac{2(x+1)(x^2+1)-2x(x+1)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

Учитывая знаки второй производной, приходим к выводу, что график функции обращен выпуклостью вверх на промежутках $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$ и выпуклостью вниз на $[-1;\ 1]$, $x_1=-1$ и $x_2=1$ — точки перегиба.

б) Так как функция возрастает на $\boldsymbol{R}$, то она возрастает и на $[-3;\ 0]$. Следовательно, наибольшее значение ее на этом отрезке равно $f(0)=0$, наименьшее значение равно $f(-3)=-3+\ln 10$. Множество значений функции f: $[-3+\ln 10;\ 0]$.

2. $y'=-4xe^{-2x}$. Точка $x_0=0$, очевидно, есть точка максимума функции. Уравнение касательной: $y=1$.

3. $\int e^{3\cos x+2}\sin x\,dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x+2}\,d(3\cos x+2)=-\frac{1}{3}e^{3\cos x+2}+C.$

Вариант 3 С-5

1. а) Функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$, $x_0=0$ — точка минимума. График обращен выпуклостью вниз на всей числовой прямой. Точек перегиба нет.

б) $\left[\frac{3}{\ln 2};\ \frac{9}{2\ln 2}-1\right]$.

2. $y=8-4x$. 3. $F(x)=\begin{cases} x+3 & \text{при } x<0, \\ e^x+2 & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$

Вариант 4 С-5

1. а) $(3;\ 4]$ — промежуток убывания, $[4;\ +\infty)$ — промежуток возрастания, $x_0=4$ — точка минимума. График обращен выпуклостью вниз на всей области определения. Точек перегиба нет.

б) $[3-\ln 2;\ 4-\ln 4]$.

2. $3x-2y+5-3\ln 2=0$. 3. $F(x)=0{,}5e^{2x}+x-0{,}5$. Кривая $y=F(x)$ проходит через начало координат, других точек пересечения с осью Ox нет.

Вариант 5 С-5

1. а) $[-1;\ 0]$ — промежуток убывания, $(-\infty;\ -1]$, $[0;\ +\infty)$ — промежутки возрастания; $x_0=-1$ — точка максимума, $x_1=0$ — точка минимума. График обращен выпуклостью вверх на промежутке $(-\infty;\ \log_2 0{,}75]$, выпуклостью вниз на $[\log_2 0{,}75;\ +\infty)$, $x_3=\log_2 0{,}75$ — точка перегиба.

б) $\left[-\frac{2}{\ln 2};\ 1-\frac{2}{\ln 2}\right]$.

2. $y=-2$. 3. 1,5.

Вариант 6 С-5

1. а) $(-\infty; 2]$ — промежуток возрастания, $[2; 3)$ — промежуток убывания; $x_0=2$ — точка максимума. График обращен выпуклостью вверх на всей области определения. Точки перегиба отсутствуют.
б) $[\ln 3-1;\ 1]$.

2. $y=e^{-3}$. 3. $F(x)=5-x-\frac{\ln x}{\ln 4}$; $F(x)=0$ при $x=4$.

Вариант 1 К-4

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+15}{3x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{14}{3x+1}\right)^{x-1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{14}}\right)^{\frac{3x+1}{14}}\right)^{\frac{14(x-1)}{3x+1}}=e^{\frac{14}{3}}.$$

2. Областью определения функции является промежуток $(0{,}5; +\infty)$. В любой точке области определения функция имеет производную. Найдем производную функции f:

$$f'(x)=\frac{2(2x+1)(x-1)}{2x-1};\quad x>\frac{1}{2}.$$

По теореме Ферма все точки экстремума должны удовлетворять уравнению $f'(x)=0$, $x>\frac{1}{2}$ (так как $f(x)$ имеет производную на всей области определения). Решая систему $\begin{cases} f'(x)=0, \\ x>\frac{1}{2}, \end{cases}$ находим: $x=1$.

Так как на промежутке $\frac{1}{2}<x<1$ производная $f'(x)<0$, а на промежутке $1<x<+\infty$ производная $f'(x)>0$ и в точке $x_0=1$ функция непрерывна, то $x_0=1$ является точкой минимума функции: $y_{\min}=f(1)=1$. Используя признак возрастания (убывания) функции, приходим к выводу, что на промежутке $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$ функция убывает, на промежутке $[1; +\infty)$ возрастает. 3. Из условия следует, что $y'=-\frac{y}{x}$. Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем: $xy=C$. По условию $y(2)=\frac{1}{2}$, значит, $C=1$. Таким образом, искомой кривой является гипербола, уравнение которой $xy=1$.

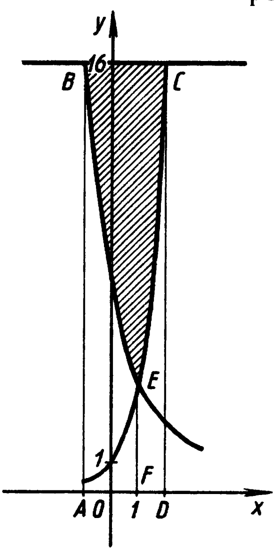


Рис. 87

4. Построим графики функций $y=2^{3-x}$, $y=4^{x}$

и $y=16$ (рис. 87). Найдем абсциссы точек их пересечения. Имеем: $2^{3-x}=4^x$ при $x=1$, $2^{3-x}=16$ при $x=-1$, $4^x=16$ при $x=2$.

Искомая площадь равна: $S=S_{ABCD}-(S_{ABEF}+S_{FECD})$. $ABCD$ — прямоугольник, $S_{ABCD}=3\cdot 16=48$. Фигуры $ABEF$ и $FECD$ — криволинейные трапеции и, следовательно,

$$S_{ABEF}=\int\limits_{-1}^{1} 2^{3-x}\,dx=-\frac{2^{3-x}}{\ln 2}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{12}{\ln 2};$$

$$S_{FECD}=\int\limits_{1}^{2} 4^x\,dx=\frac{4^x}{2\ln 2}\Bigg|_{1}^{2}=\frac{6}{\ln 2}.$$

Таким образом, искомая площадь равна: $S=48-\frac{18}{\ln 2}$.

5. Рассмотрим два случая: а) $\cos x\geqslant 0$; б) $\cos x<0$.

В случае а) имеем:

$$\begin{cases}\cos x\geqslant 0,\\ \operatorname{tg} x=-1,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases} \Leftrightarrow\quad x=\frac{7\pi}{4}.$$

В случае б) имеем:

$$\begin{cases}\cos x<0,\\ \operatorname{tg} x=-3,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases} \Leftrightarrow\quad x=\pi-\operatorname{arctg} 3.$$

Ответ: $x_1=\frac{7\pi}{4}$, $x_2=\pi-\operatorname{arctg} 3$.

6. Решив квадратное уравнение относительно 2^x, находим:

$\left[\begin{array}{l}2^x=a-1,\\ 2^x=4.\end{array}\right.$ Если $a\leqslant 1$, то уравнение $2^x=a-1$ решений не имеет и, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=2$. Исходное уравнение будет иметь единственное решение и тогда, когда $a-1=4$, т. е. при $a=5$. Очевидно, что во всех остальных случаях уравнение будет иметь два различных корня.

Ответ: $a\leqslant 1$, $a=5$.

Вариант 2 К-4

1. Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}{\ln(1+\sin 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}.$$

2. $\frac{375}{\ln 5}$, $-\frac{25}{\ln 5}$.

3. По закону Ньютона имеем: $\frac{dT}{dt}=k(T-10)$. Разделяя переменные, получим: $\frac{dT}{T-10}=k\,dt$, откуда $\ln(T-10)=kt+C$.

Так как $T(0)=100$, то $C=\ln 90$. Из условия $T(30)=70$ находим, что $k=-\frac{1}{30}\ln\frac{3}{2}$. Имеем: $\ln(T-10)=\ln 90-\frac{t}{30}\ln\frac{3}{2}$. При $T=50$ получаем: $\frac{t}{30}\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{9}{4}$, т. е. $t=60$.

Ответ: Через 60 мин.

4. $S=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(4-\frac{2}{x}\right)dx=2-\ln 4$.

5. 0, π, 2π, $\operatorname{arctg} 2$, $2\pi-\operatorname{arctg} 2$.

6. Решив квадратное относительно 5^x уравнение, находим: $\left[\begin{array}{l}5^x=2a-6,\\ 5^x=2-a.\end{array}\right.$ Очевидно, исходное уравнение не будет иметь ни одного корня, если будут одновременно выполнены условия: $2a-6\leqslant 0$ и $2-a\leqslant 0$. Решив полученную систему неравенств, получим $2\leqslant a\leqslant 3$.

Вариант 3 К-4

1. $e^{1,5}$. **2.** $f'(x)=\dfrac{\ln x-\ln\frac{9}{e}}{2}$. Так как функция убывает на $\left[3;\ \frac{9}{e}\right]$ и возрастает на $\left[\frac{9}{e};\ 4{,}5\right]$, то наименьшее значение достигается в точке $x_0=\frac{9}{e}$ и равно $f\left(\frac{9}{e}\right)=\frac{9}{e}\left(0{,}5\ln\frac{9}{e}-\ln 3\right)=-\frac{9}{2e}$. **3.** $s=e^{\frac{1}{3}t+1}$, $s'=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t+1}$, $s''=\frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t+1}$. **4.** $S=1+\frac{2}{\ln 3}$. **5.** $x_1=\frac{3\pi}{4}$, $x_2=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **6.** $0<a<\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$.

Вариант 4 К-4

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $x=0$ — точка минимума; при $x\leqslant 0$ функция убывает, при $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ возрастает. **3.** $y=2e^{0,5x^2}$. **4.** $S=\frac{4}{3}(5\ln 3-4)$. **5.** $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{3\pi}{2}$, $x_3=\operatorname{arctg} 0{,}5$, $x_4=\pi-\operatorname{arctg} 0{,}5$.

6. $a\leqslant 1$, $a\geqslant 4$ и $a=2{,}5$.

Вариант 5 К-4

1. e^6. **3.** 9 мин. **4.** $S=8-6\ln 3$. **5.** $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\pi$. **6.** $a=1$.

Вариант 6 К-4

1. $\frac{2}{5}$. **2.** $\min\limits_{[-1;\ 2]} f(x)=f(0)=\frac{10}{\ln 3}$, $\max\limits_{[-1,\ 2]} f(x)=f(2)=\frac{10}{\ln 3}+16$.

3. $y=e^x-3$. 4. $S=12-2\ln 3$. 5. $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=2\pi$, $x_4=\frac{\pi}{4}$, $x_5=\frac{7\pi}{4}$. 6. $a<3$, $a\neq 1$.

Вариант 1 С-6

1. а) Область определения функции состоит из всех таких x, для которых выполнено условие $1-2\sin 3x\geqslant 0$. Решив неравенство, получим: $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

б) $f'(x)=\frac{4}{3}(1-2\sin 3x)^{\frac{1}{3}}(-6\cos 3x)$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=8$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6^x+3^x-x^3}{6^x-3^x+x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{x^3}{6^x}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{x^5}{6^x}}=1$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{6^x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{6^x}=0$.

3. Функция определена при $x>0$. Функция дифференцируема на всей области определения. Найдем производную: $y'(x)=x(1-2\ln x)$; $y'(x)=0$ при $x=\sqrt{e}$.

Так как $y'(x)>0$ при $0<x<\sqrt{e}$, $y'(x)<0$ при $x>\sqrt{e}$ и в точке $x=\sqrt{e}$ функция непрерывна, то на промежутке $(0;\ \sqrt{e}]$ функция возрастает, а на промежутке $[\sqrt{e};\ +\infty)$ убывает; точка $x=\sqrt{e}$ является точкой максимума. Вычислим значение функции в точке максимума: $y(\sqrt{e})=\frac{e}{2}$.

Найдем вторую производную: $y''(x)=-(1+2\ln x)$. Исследуя функцию с помощью второй производной, приходим к выводу, что $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ — точка перегиба, так как при $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ $y''(x)>0$, а при $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ $y''(x)<0$.

Найдем пределы функции при $x\to+0$ и $x\to+\infty$. Так как $x^2(1-\ln x)=x^2-x^2\ln x$, то найдем $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\ln x)$. Пусть $x=e^{-t}$, т. е. $\ln x=-t$. Тогда при $x\to+0$ $t\to+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\ln x)=-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{2t}}=0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}x^2(1-\ln x)=0$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(1-\ln x)=-\infty$. График функции изображен на рисунке 88.

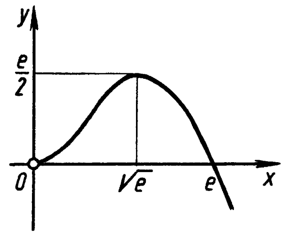


Рис. 88

Вариант 2 С-6

1. а) Область определения функции найдем, решив неравенство $\sin x - \cos x > 0$, или $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, откуда $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^{1+\sqrt{2}}}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}$.

2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x + 3x}{\ln x + 5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln^2 x}{x} + 3}{\frac{\ln x}{x} + 5} = \frac{3}{5}.$$

3. Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, то прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции. Функция нечетная. Найдем производную: $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$. Так как $f'(x) < 0$ при $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и при $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и так как функция в точках $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ непрерывна, то на промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ функция убывает, а на промежутке $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ возрастает. Точка $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ является точкой минимума, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — точкой максимума; $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

Найдем вторую производную: $f''(x) = 2x(2x^2 - 3) \cdot e^{1-x^2}$. Точки перегиба: $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. График функции изображен на рисунке 89.

Вариант 3 С-6

1. а) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) 0. 2. 4. 3. Рис. 90.

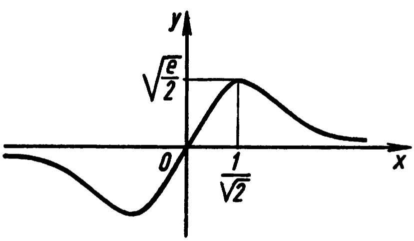


Рис. 89

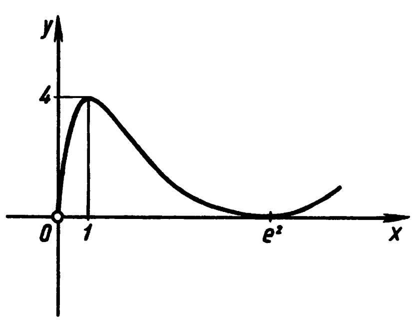


Рис. 90

Вариант 4 С-6

1. а) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$;
б) -2π. **2.** 0.
3. Рис. 91.

Вариант 5 С-6

1. а) $-\frac{\pi}{8}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;
б) $\frac{16}{3}$. **2.** 0.

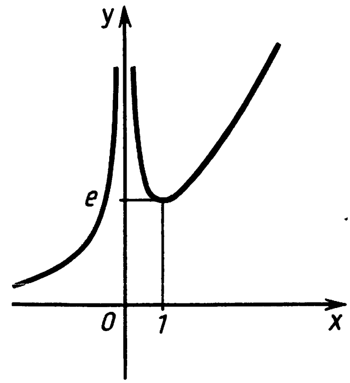


Рис. 91

Вариант 6 С-6

1. а) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) 0. **2.** $-\frac{2}{3}$.

Вариант 1 С-7

1. Обозначим данное выражение через A. Имеем:

$$A=\left(\frac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{3\sqrt{a}\,(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2(a-b)^2(a+2b)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2(a-b)^2(a+2b)^2=4a\,(a+2b)^2.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}(3x+5)(2x-\sqrt{4x^2+3})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3\,(3x+5)}{2x+\sqrt{4x^2+3}}=$$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}=-\frac{9}{4}.$$

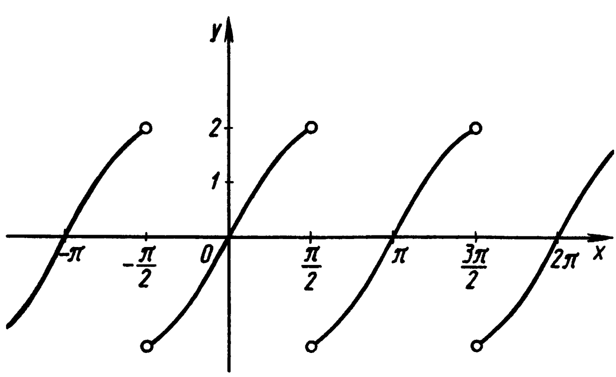


Рис. 92

3. $y=\operatorname{tg} x\sqrt{2+2\cos x}$.
Так как $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, то

$$y=2\operatorname{tg} x|\cos x|, \text{ или}$$

$$y=\begin{cases} 2\sin x, & \text{если } \cos x>0, \\ -2\sin x, & \text{если } \cos x<0. \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке 92.

Вариант 2 С-7

1. Обозначим данное выражение через A.

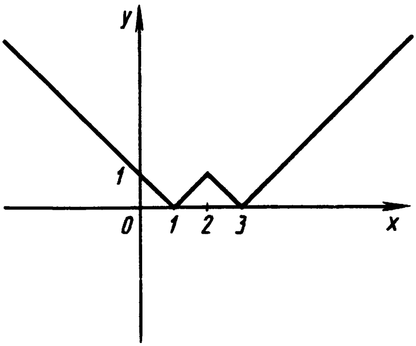


Рис. 93

$$A=(\sqrt[3]{m}\,(\sqrt[3]{m}+1)-\sqrt[3]{m^2})\left(\sqrt[4]{mn}+\frac{1-\sqrt{mn}}{\sqrt[4]{mn}}\right)^{-1}=\sqrt[3]{m}\sqrt[4]{mn}=$$

$$=m^{\frac{7}{12}}n^{\frac{1}{4}}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{1-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\sqrt{1-3x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{1-3x^2}}=6\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=6.$$

3. $y=||x-2|-1|$. Построим график функции $y=|x|$. Затем строим график функции $\varphi(x)=|x-2|-1$. Он может быть получен из графика функции $y=|x|$ параллельным переносом, при котором начало координат переходит в точку $A(2;\ -1)$. Наконец, строим график функции $y=|\varphi(x)|$ (рис. 93).

Вариант 3 С-7

1. $\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. 2. $-\frac{1}{12}$. 3. График изображен на рисунке 94.

Вариант 4 С-7

1. 3. 2. $-5{,}25$. 3. График изображен на рисунке 95.

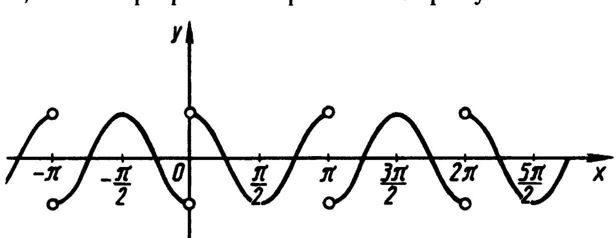


Рис. 94

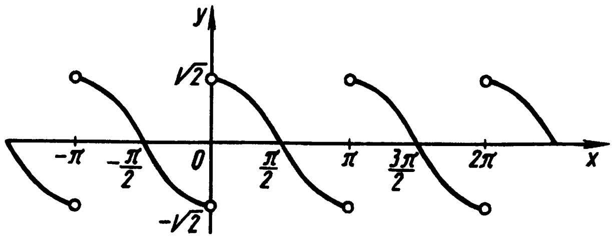


Рис. 95

Вариант 5 С-7

1. $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$. 2. $\frac{4}{5}$.

Вариант 6 С-7

1. $(x-y)^{\frac{2}{3}}$. 2. $\frac{2}{3}$.

Вариант 1 К-5

1. $\sqrt{7-\sqrt{x^2-4x+4}}=x-3 \Leftrightarrow \sqrt{7-|x-2|}=x-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3, \\ \sqrt{9-x}=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3, \\ x^2-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

2. $\sqrt{1-2\cos x}=\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\geqslant 0, \\ 1-2\cos x=\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\geqslant 0, \\ \cos^2 x-2\cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\geqslant 0, \\ \cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

3. Возведем обе части уравнения в шестую степень. Получим уравнение $x^3+2x^2-7x-24=0$, единственным действительным корнем которого является $x=3$.

Проверка показывает, что 3 — корень исходного уравнения.

4. $\sqrt{2x+7}>\sqrt{x}+\sqrt{5-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 5, \\ x+1>\sqrt{5x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 5, \\ 2x^2-3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 5, \\ \left[\begin{array}{l} x<0{,}5, \\ x>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leqslant x<0{,}5, \\ 1<x\leqslant 5. \end{array}\right.$$

5. Данное неравенство равносильно следующему:
$\sqrt{\log_2 x}-\frac{1}{4}(1+\log_2 x)>0{,}5$. Введем подстановку: $\sqrt{\log_2 x}=t$;

$t^2-4t+3<0$, $1<t<3$. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $1<\sqrt{\log_2 x}<3$, откуда $2<x<2^9$.

6. Пусть $\sqrt{x}-\sqrt{x+9}=y$, $y<0$. Тогда $2x+9-2\sqrt{x^2+9x}=y^2$, или $2x-2\sqrt{x^2+9x}=y^2-9$.

Данное неравенство принимает вид: $y^2-y-2\geqslant 0$. Оно равносильно совокупности неравенств $y\leqslant -1$, $y\geqslant 2$. Так как $y<0$, то окончательно имеем: $y\leqslant -1$, или $\sqrt{x}-\sqrt{x+9}\leqslant -1$. Решив это неравенство, получим: $0\leqslant x\leqslant 16$.

Вариант 2 К-5

1. 2. **2.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** 1, 1,5. **4.** $-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 1$.
5. $0\leqslant x\leqslant\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

6. Рассмотрим левую часть неравенства:

$$A=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1};\ A\geqslant 0,\ 1\leqslant x\leqslant 3.$$

Имеем: $A^2=2+2\sqrt{(3-x)(x-1)}$. Так как $\sqrt{(3-x)(x-1)}\leqslant \leqslant\frac{(3-x)+(x-1)}{2}=1$, то $A^2\leqslant 4$. Учитывая, что $A\geqslant 0$, получаем $A\leqslant 2$. При этом $A=2$ только при $x=2$.

Рассмотрим правую часть неравенства: $B=3^{2-x}+3^{x-2}\geqslant 2$. $B=2$ только при $x=2$. Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} A\geqslant B, \\ A\leqslant 2, \\ B\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2, \\ B=2. \end{cases}$$

Но $A=B=2$ только при $x=2$. Ответ: $x=2$.

Вариант 3 К-5

1. $x=1$. **2.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
3. $x_1=\frac{47}{17}$, $x_2=-\frac{13}{17}$. **4.** $x\leqslant -1$, $x\geqslant 3$, $x=1$. **5.** $-1<x\leqslant 3$.
6. $x\geqslant 1$.

Вариант 4 К-5

1. $x=3$. **2.** $x=\pi+2\pi n$, $x=\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $x_1=-1$, $x_2=3$. **4.** $x=1$, $4\leqslant x<5$. **5.** $x<1$. **6.** $x=3$.

Вариант 5 К-5

1. $x=1$. **2.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\arccos\frac{2}{9}+\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.
3. $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$. **4.** $x\geqslant 1$, $x\neq 2$. **5.** $1<x<81$. **6.** $x\geqslant 0$.

Вариант 6 К-5

1. $x=0$. **2.** $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $x=16$. **4.** $2\leqslant x\leqslant 3$ и $x=-5$. **5.** $0<x<1$. **6.** $x=5$.

Вариант 1 С-8

1. Из равенства $\frac{x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2}=1{,}5$ следует, что $y\neq 0$. Разделив числитель и знаменатель дроби на y^2, получим:

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)+3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}=1{,}5.$$

Решив полученное уравнение относительно $\frac{x}{y}$, находим $\frac{x}{y}=1$ или $\frac{x}{y}=-5$.

2. Найдем сумму и произведение корней нового квадратного уравнения: $(\alpha+2\beta)+(\beta+2\alpha)=3(\alpha+\beta)=6$,

$$(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)=5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta=7,$$

так как по теореме Виета $\begin{cases}\alpha+\beta=2,\\ \alpha\beta=-1.\end{cases}$

Новое квадратное уравнение имеет вид: $x^2-6x+7=0$.

3. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел:

$$2^x+9\cdot 2^{2-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 9\cdot 2^{2-x}},\ \text{или}\ 2^x+9\cdot 2^{2-x}\geqslant 12.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда слагаемые 2^x и $9\cdot 2^{2-x}$ равны. Имеем: $2^x=9\cdot 2^{2-x}$, откуда $x=\log_2 6$. Таким образом, наименьшее значение функции равно 12 при $x=\log_2 6$.

4. Записав уравнение в виде:

$$\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)+2\sin^3 x=0,$$

получим уравнение третьей степени, однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$. Решив его, находим:

$$\operatorname{tg} x=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Вариант 2 С-8

1. По условию $\operatorname{tg}\alpha=2$, значит, $\cos\alpha\neq 0$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^3\alpha$, получим:

$$\frac{\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^3\alpha+3\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^3\alpha}.$$

Значение дроби равно $\frac{20}{9}$.

2. Так как $\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)=(\alpha+\beta)\times$ $\times(\alpha^4+\beta^4-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2)$, то для решения задачи надо найти $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ и $\alpha^4+\beta^4$. Имеем: $\alpha+\beta=2$, $\alpha\cdot\beta=-2$, $\alpha^2+\beta^2=8$, $\alpha^4+\beta^4=56$. Следовательно, $\alpha^5+\beta^5=152$.

3. Указание. Воспользуйтесь очевидными неравенствами

$$a^3+b\geqslant 2\sqrt{a^3b},\quad a+b^3\geqslant 2\sqrt{ab^3}.$$

4. -3; 0. Указание. Разделите обе части уравнения на 4^{x^2+3x}.

Вариант 3 **С-8**

1. $\pm 0{,}5$. 2. $a=-1$. 3. $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 4. $\frac{9}{7}$.

Вариант 4 **С-8**

1. -13. 2. $16x^2+16x+1=0$. 3. $a=b=\sqrt{2}$. 4. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 5 **С-8**

1. $-0{,}7$. 2. $a=1$. 3. $a^5b+b^5c+ac^5\geqslant 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6}=3a^2b^2c^2$.
4. $-0{,}5$; $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Вариант 6 **С-8**

1. 1; $-0{,}6$. 2. $2\frac{4}{7}$. 3. $\frac{x^2+x+4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-1\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=3$, $x+1=\frac{4}{x+1}$ при $x=1$ $(x>0)$.
4. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 1 **С-9**

1. Вторая система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x=y, \\ 2x+y=3; \end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases} y=0, \\ 2x+y=3. \end{cases}$$

Пара чисел (1,5; 0), являющаяся решением системы б), не является решением системы $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y=3. \end{cases}$

Следовательно, исходные системы уравнений не равносильны.

2. Складывая и вычитая второе и третье уравнения системы, получаем:

$$x=\frac{a+2}{2},\quad y=\frac{2-a}{2}.$$

Подставив найденные значения x и y в первое уравнение системы, имеем:

$$\frac{a(a+2)}{2}+\frac{2-a}{2}=1,\ \text{или}\ a^2+a=0,$$

откуда $a=0$, $a=-1$. Легко проверить, что как при $a=0$, так и при $a=-1$ система совместна. Ответ: $a=0$, $a=-1$.

3. Заменяя второе уравнение системы уравнением, получающимся от сложения первого уравнения, умноженного на -3, и второго, умноженного на 2, получим, что исходная система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2-x+2y=6, \\ x=6-4y, \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} (6-4y)^2+2y^2-(6-4y)+2y=6, \\ x=6-4y. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет два корня: $y_1=1$, $y_2=\frac{4}{3}$. Система имеет два решения: $(2;\ 1)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.

Вариант 2 С-9

1. Исходная система уравнений равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x=y-1, \\ x-4=-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x=y-1, \\ y-2x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y, \\ x-4=-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y, \\ y-2x=0. \end{cases}$$

2. Складывая первые три уравнения, имеем: $x+y+z=a+3$. Из первого, второго и третьего уравнений последовательно находим: $z=a+1$, $x=a-1$, $y=3-a$. Подставив найденные значения x, y и z в последнее уравнение исходной системы, получаем: $a=-8$. Легко проверить, что при $a=-8$ система совместна.

Ответ: $a=-8$.

3. Умножив второе уравнение системы на 2 и сложив с первым уравнением, получим уравнение $(x-y)^2+2(x-y)-3=0$, откуда $x-y=1$, или $x-y=-3$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x-y=1, \\ x^2y=4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x-y=-3, \\ x^2y=0. \end{cases}$$

В случае а) имеется одно решение $(2;\ 1)$, в случае б) два решения: $(0;\ 3)$, $(-3;\ 0)$.

Ответ: $(2;\ 1)$, $(0;\ 3)$, $(-3;\ 0)$.

Вариант 3 С-9

1. Не являются. **2.** $a=2$. **3.** $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $\left(2\sqrt{13};\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-2\sqrt{13};\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Вариант 4 С-9

1. $\begin{cases} x+y=0, \\ x+y=2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=0, \\ y+1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=1, \\ y+1=0. \end{cases}$

2. $a=8$. **3.** $(2;\ 1)$, $(3;\ 0)$.

Вариант 5 С-9

1. Являются. **2.** $a=0$, $a=\pm 2$. **3.** $(1;\ 1)$.

Вариант 6 С-9

1. $\begin{cases} x+y=2, \\ x-2=y; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2, \\ x-2=-2y; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=0, \\ x-2=y; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=0, \\ x-2=-2y. \end{cases}$

2. $a=0$, $a=\frac{4}{3}$. **3.** $(-1;\ 1)$, $\left(\frac{35}{\sqrt[3]{105}};\ -\frac{3}{\sqrt[3]{105}}\right)$.

Вариант 1 К-6

1. Перепишем уравнение в виде: $x^2+(y-1)^2=9$. Графиком уравнения является окружность с центром в точке $M(0;\ 1)$ радиуса 3. **2.** При $a=2$ система принимает вид:

$$\begin{cases} 3x+y=3, \\ 2x=6. \end{cases}$$

Ее решением является пара чисел $x=3$, $y=-6$.

Пусть $a\neq 2$. Угловой коэффициент прямой, задаваемой первым уравнением системы, равен $-(a+1)$, а угловой коэффициент прямой, задаваемой вторым уравнением системы, равен $\frac{2}{a-2}$. Для того чтобы система не имела решений, т. е. чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы их угловые коэффициенты были равны: $-(a+1)=\frac{2}{a-2}$, откуда находим: $a_1=0$, $a_2=1$. При $a=0$ система принимает вид:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

и имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают). При $a=1$ система принимает вид:

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 2x+y=6 \end{cases}$$

и решений не имеет. Ответ: $a=1$.

3. Подстановка $x+y=u$, $xy=v$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} u=2v-1, \\ u^2+v=11, \end{cases}$$

решениями которой являются пары чисел:

$$\begin{cases} u=3, \\ v=2; \end{cases} \begin{cases} u=-3{,}5, \\ v=-1{,}25. \end{cases}$$

Решив совокупность двух систем

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3{,}5, \\ xy=-1{,}25, \end{cases}$$

получаем:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-7+\sqrt{69}}{4}, \\ y=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{4}, \\ y=\dfrac{-7+\sqrt{69}}{4}. \end{cases}$$

7. Пусть x, y, z — производительности I, II и III установок соответственно. Имеем систему:

$$\begin{cases} x+y+z=2(x+y), \\ 3(x+z)=18y. \end{cases}$$

Обозначив $\frac{y}{x}=t$, $\frac{z}{x}=v$, получим:

$$\begin{cases} 1+t+v=2+2t, \\ 1+v=6t, \end{cases}$$

откуда $t=\frac{2}{5}$, т. е. $\frac{y}{x}=\frac{2}{5}$. Следовательно, производительность второй установки составляет 40% от производительности первой.

5. Из уравнения следует: $3x=x+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. Но при $n=2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$ числа $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ не являются решениями уравнения. При $n=2k$ получаются числа $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, которые являются корнями исходного уравнения. Ответ: $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

6. Из второго уравнения системы следует, что $xy\geqslant 25$. Но $y=10-x$, т. е. $x(10-x)\geqslant 25$, откуда $(x-5)^2\leqslant 0$ и, следовательно, $x=5$. Теперь находим: $y=5$, $z=0$.

Проверкой убеждаемся в верности найденного решения. Ответ: (5; 5; 0).

Вариант 2 К-6

1. График уравнения $|x-1|+|y|=2$ (1) может быть получен из графика уравнения $|x|+|y|=2$ (2) параллельным переносом $\vec{r}\,(1;\ 0)$, т. е. переносом, при котором начало координат переходит в точку $M\,(1;\ 0)$.

График уравнения (2) симметричен относительно осей Ox и Oy, так как уравнение (2) не меняется при замене y на $-y$ и x на $-x$. Следовательно, график уравнения (2) можно построить сначала только в I четверти (где $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$ и уравнение принимает вид $x+y=1$), а затем последовательно отобразить его относительно оси Oy во II четверть и относительно оси Ox в III и IV четверти. График уравнения (2) изображен на рисунке 96, а график уравнения (1) — на рисунке 97.

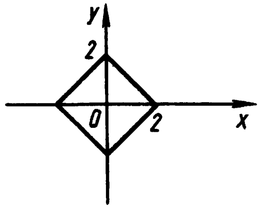


Рис. 96

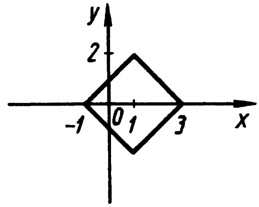


Рис. 97

2. Система имеет бесконечно много решений, если прямые, задаваемые уравнениями системы, совпадают. Так как при $b=1$ прямые различны, то рассмотрим случай $b \neq 1$. В этом случае для совпадения прямых необходимо равенство их угловых коэффициентов. Имеем:

$$\frac{1}{b-1}=-\frac{b+2}{2}.$$

Решив уравнение, находим: $b_1=0$, $b_2=-1$. Прямые будут совпадать только при $b=0$. Ответ: $b=0$.

3. Первое уравнение системы является однородным уравнением третьей степени относительно x и y. Так как никакая пара чисел вида $(x;\ 0)$ не является решением системы, то, разделив все члены уравнения $x^3+2x^2y-3y^3=0$ на y^3, получим уравнение

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3=0,$$

откуда находим, что $\frac{x}{y}=1$. Система уравнений

$$\begin{cases} x=y, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

равносильна исходной. Ее решениями являются $(1;\ 1)$ и $(-1;\ -1)$.

4. Пусть v_1 и v_2 — скорости пешеходов, s — расстояние между A и B. Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2v_1}=\dfrac{s-15}{v_2}, \\[2mm] \dfrac{s}{2v_2}=\dfrac{s-8}{v_1}. \end{cases}$$

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{2(s-15)}{s}, \\[2mm] \dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{s}{2(s-8)}. \end{cases}$$

Приравняв правые части, получаем:

$$\frac{2(s-15)}{s}=\frac{s}{2(s-8)},$$

откуда находим $s=24$. Но тогда $\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{4}$. Искомая величина $s-s\cdot\frac{v_2}{v_1}$ равна 6 км.

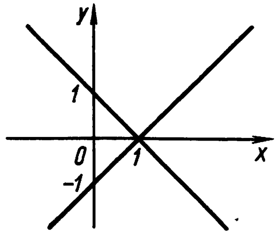


Рис. 98

5. Из уравнения следует, что $3x=\pi n$, или $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Но при $n=3k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ получаются числа вида $x=\pi k$, при которых не определены как левая, так и правая части уравнений. При $n=3k\pm1$ получаем $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

6. Подставив $z=x^2+4y^2+8$ в неравенство $6x+4y-z\geqslant2$, получим: $(x-3)^2+(2y-1)^2\leqslant0$. Отсюда следует, что $x=3$, $y=\frac{1}{2}$. Из первого уравнения системы находим $z=18$. Ответ: $\left(3;\ \frac{1}{2};\ 18\right)$.

Вариант 3 К-6

1. Рис. 98. **2.** $m\neq1$, $m\neq-3$. **3.** (1; 2), (2; 1), (1; -4), (-4; 1). **4.** 50%. **5.** $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** (1; 1; 1).

Вариант 4 К-6

1. Окружность с центром (2; 0) радиуса 1. **2.** $a=0$. **3.** (1; 1), (-1; -1). **4.** 4 ч. **5.** Нет решений. **6.** (2; 1; -3).

Вариант 5 К-6

2. $b=1$, $b=-1$. **3.** (2; 1), (1; 2). **4.** 8 ч. **5.** $\frac{\pi}{2}n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** $\left(3;\ \frac{3}{2};\ 2\right)$.

Вариант 6 К-6

2. $m\neq2$, $m\neq-1$. **3.** (1; 1), (-1; -1). **4.** $\frac{5}{7}$. **5.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** (2; 1; 4).

Вариант 1 С-10

1. Умножив второе уравнение на $\frac{2}{3}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}4x+2y=5, & (1)\\ 4x+2y=5, & (2)\end{cases}$$

равносильную одному уравнению $4x+2y=5$, имеющему бесконечно много решений вида $\left(t;\frac{5-4t}{2}\right)$, где $t\in\boldsymbol{R}$. Прямые (1) и (2) совпадают. Ответ: $\left(t;\ \frac{5-4t}{2}\right)$, $t\in\boldsymbol{R}$.

2. Прибавляя почленно первое уравнение системы, умноженное на -2, ко второму уравнению и, умноженное на -3, к третьему уравнению, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ y-4z=5, \\ -y+2z=-3, \end{cases}$$

Прибавив почленно второе уравнение полученной системы к третьему уравнению, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ y-4z=5, \\ z=-1, \end{cases}$$

откуда последовательно находим $z=-1$, $y=1$, $x=1$.
Ответ: $(1;\ 1;\ -1)$.
3. Возводя первое уравнение системы в квадрат, получаем:

$$\begin{cases} x+4\sqrt{xy}+4y=16xy, \\ x+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\sqrt{xy}=8xy, \\ x+4y=2. \end{cases}$$

Первое уравнение последней системы является квадратным относительно $\sqrt{xy}$. Решив его, находим: $\sqrt{xy}=0{,}5$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} xy=0{,}25, \\ x+4y=2. \end{cases}$$

Ее решение $\left(1;\ \frac{1}{4}\right)$ является решением исходной системы.
Ответ: $(1;\ 0{,}25)$.

Вариант 2 С-10

1. Прибавляя почленно второе уравнение системы к первому уравнению, умноженному на -2, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2(4-m^2)x=m-2, \\ 8x+2y=m. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая: а) $m=2$; б) $m=-2$; в) $m\neq\pm2$.

В случае а) получаем:

$$\begin{cases} 0\cdot x=0, \\ 4x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow 4x+y=1.$$

Система имеет бесконечно много решений вида $(t;\ 1-4t)$, где $t\in\mathbf{R}$.

В случае б) получаем систему:

$$\begin{cases} 0\cdot x=-4, \\ 4x+y=-1, \end{cases}$$

не имеющую решений.

В случае в) имеем:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{4+2m}, \\ y=\dfrac{m^2+2m+4}{4+2m}. \end{cases}$$

Ответ: При $m=2$ бесконечно много решений: $(t;\ 1-4t)$, $t\in\boldsymbol{R}$; при $m=-2$ решений нет; при $m\neq\pm2$ одно решение $\left(-\frac{1}{4+2m};\ \frac{m^2+2m+4}{4+2m}\right)$.

2. $(1;\ -1;\ 1)$.

3. Из условия следует, что $x\neq0$, $y\neq0$ и что x и y должны быть одного знака.

Если $x>0$, $y>0$, то $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$, и система принимает вид:

$$\begin{cases} x+3\sqrt{x}\sqrt{y}=2, \\ 2\sqrt{x}\sqrt{y}-y=3. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножив первое уравнение системы (1) на 3 и сложив со вторым уравнением, умноженным на -2, получаем уравнение, являющееся следствием системы (1):

$$3x+5\sqrt{x}\sqrt{y}+2y=0\,(x>0;\ y>0). \qquad (2)$$

Уравнение (2), очевидно, решений не имеет. Следовательно, и система (1) не имеет решений.

Если $x<0$, $y<0$, то $\sqrt{xy}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$. Обозначив $-x=x_1$, $-y=y_1$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1+3\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}=2, \\ 2\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}+y_1=3. \end{cases} \qquad (3)$$

Решив эту систему, находим:

а) $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1=\frac{4}{7}, \\ y_1=\frac{9}{7}. \end{cases}$

Ответ: $(-1;\ -1)$, $\left(-\frac{4}{7};\ -\frac{9}{7}\right)$.

Вариант 3 С-10

1. Нет решений. Прямые параллельны. **2.** $(-1;\ 1;\ 1)$.
3. $(1;\ 16)$, $(8{,}5;\ 8{,}5)$.

Вариант 4 С-10

1. При $m=1$ бесконечно много решений: $(1-2t;\ t)$, $t\in\boldsymbol{R}$; при $m=-2$ бесконечно много решений: $(t+1;\ t)$, $t\in\boldsymbol{R}$; при $m\neq1$, $m\neq-2$ одно решение $(1;\ 0)$. **2.** $(1;\ 1;\ 1)$. **3.** $(1;\ 1)$.

Вариант 5 С-10

1. $(-1;\ 1)$. **2.** $(1;\ -1;\ -1)$. **3.** $(1;\ 9)$, $\left(\frac{25}{9};\ \frac{49}{9}\right)$.

Вариант 6 С-10

1. При $m=1$ нет решений, при $m=-1$ бесконечно много решений: $(t-1;\ t)$, $t\in\boldsymbol{R}$; при $m\neq\pm1$ одно решение $\left(\frac{1}{m-1};\ \frac{1}{1-m}\right)$.
2. $(-1;\ -1;\ 1)$. **3.** $(-4;\ -1)$.

Вариант 1

1. $\begin{cases} 3^{x+1}\cdot 2^y=\frac{1}{9}, \\ y-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+1}\cdot 2^{x+3}=3^{-2}, \\ y=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x=6^{-3}, \\ y=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=0. \end{cases}$

Ответ: $(-3;\ 0)$.

2. Из второго уравнения найдем $\operatorname{tg} y=0{,}5+\cos x$ и подставим в первое уравнение:

$$2\sin^2 x\,(0{,}5+\cos x)=1{,}5,$$
$$2\,(1-\cos^2 x)(0{,}5+\cos x)=1{,}5,$$
$$8\cos^3 x+4\cos^2 x-8\cos x+2=0.$$

Применив подстановку $2\cos x=t$, приводим уравнение к виду: $z^3+z^2-4z+2=0$, откуда $z_1=1$, $z_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$. Следовательно, $\cos x=\frac{1}{2}$, или $\cos x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Так как $0\leqslant x\leqslant\pi$, то $x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Подставив $x=\frac{\pi}{3}$ во второе уравнение исходной системы, находим $\operatorname{tg} y=1$, и так как $\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$, то $y=\frac{5\pi}{4}$. Аналогично находим, что если $x=\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, то $y=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Так как $x>0$, $y>0$, то неравенство $\log_2 x^2\geqslant\log_4 y$ равносильно неравенству $\log_2 y\leqslant 4\log_2 x$ (1). Из первого уравнения системы находим:

$$\log_2 y=\frac{1}{2}(1+16\log_2^2 x). \qquad (2)$$

Подставив в (1) значение $\log_2 y$ из (2), получаем неравенство:

$$\frac{1}{2}(1+16\log_2^2 x)\leqslant 4\log_2 x.$$

Далее имеем: $(4\log_2 x-1)^2\leqslant 0$, $x=\sqrt[4]{2}$. Из (1) находим $y=2$.

Ответ: $(\sqrt[4]{2};\ 2)$.

Вариант 2

1. Пусть пара чисел $(x;\ y)$ есть решение исходной системы. Тогда, очевидно, $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$. Прологарифмировав обе части первого уравнения по основанию x, получим уравнение

$$(1-0{,}2\log_x y)\log_x y=\frac{4}{5}, \qquad (1)$$

являющееся квадратным относительно $\log_x y$. Решив его, получим $\log_x y=1$ или $\log_x y=4$, откуда $y=x$ или $y=x^4$.

Если $y=x$, то второе уравнение исходной системы принимает вид:

$$2+\log_x\left(1-\frac{3}{x}\right)=\log_x 4. \qquad (2)$$

Решив уравнение (2), получим $x=4$. Таким образом, (4; 4) — одно из решений исходной системы.

Если $y=x^4$, то второе уравнение исходной системы не имеет решений. Ответ: (4; 4).

2. Перепишем второе уравнение системы в виде:

$$\cos 2y = -1 - \sin x. \qquad (1)$$

Так как по условию $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $\sin x \geqslant 0$ и уравнение (1) выполняется только если $\sin x = 0$, т. е. при $x=0$ или $x=\pi$. Если $x=0$, то $y=\frac{5\pi}{2}$, и условие $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ не выполнено. Если $x=\pi$, то $y=\frac{3\pi}{2}$, условие $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$ выполнено. Ответ: $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Из первого уравнения системы находим: $2^x = 5+4y(y+2)$. Из неравенства $2^{x-2} - y \leqslant 1$ находим: $2^x \leqslant 4(y+1)$. Следовательно, $5+4y(y+2) \leqslant 4(y+1)$, или $(2y+1)^2 \leqslant 0$, откуда $y=-0,5$. Ответ: (1; —0,5).

Вариант 3 С-11

1. (4; 2). **2.** $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$. **3.** $(2; \sqrt{2})$.

Вариант 4 С-11

1. (4; 1). **2.** $\left(2\pi; \frac{\pi}{2}\right)$. **3.** (1; 3).

Вариант 5 С-11

1. (1; 1), (4; 2). **2.** $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$. **3.** $(\sqrt[3]{2}; 2)$.

Вариант 6 С-11

1. (4; 2), (—4; —2), (4; 0,5), (—4; —0,5), (0,25; 2), (—0,25; —2), (0,25; 0,5), (—0,25; —0,5).

2. $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. **3.** (0,5; 0,5).

Вариант 1 К-7

1. Переписав уравнения в виде:

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{2}{3},$$

с помощью замены $\frac{1}{yz}=a$, $\frac{1}{xz}=b$, $\frac{1}{xy}=c$ получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a+b=\frac{1}{2}, \\ b+c=\frac{5}{6}, \\ a+c=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Сложив полученные уравнения, находим: $a+b+c=1$, откуда $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{2}$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy=2, \\ xz=3, \\ yz=6. \end{cases}$$

Перемножив полученные уравнения, имеем: $xyz=\pm 6$. Если $xyz=6$, то $x=1$, $y=2$, $z=3$; если $xyz=-6$, то $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$. Ответ: $(1;\ 2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ -3)$.

2. Так как $\log_9 x=\log_3\sqrt{x}$, то, потенцируя в первом уравнении, получаем систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x+y})=3, \\ x^2(x+y)=4. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x+y=\frac{4}{x^2}$ и подставляем в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)=3, \\ x^2(x+y)=4. \end{cases}$$

Приведем первое уравнение системы к виду: $x-3\sqrt{x}+2=0$, откуда $\sqrt{x}=1$, $\sqrt{x}=2$, или $x_1=1$, $x_2=4$.
Окончательно имеем:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4, \\ y=-\frac{15}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 3)$, $\left(4;\ -\frac{15}{4}\right)$.

3. Перепишем второе уравнение системы в виде:

$$\cos x+\sin 2y-\sin\frac{\pi}{3}=0.$$

Воспользовавшись формулой

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

получаем:

$$\cos x+2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=0. \qquad (1)$$

Но из первого уравнения исходной системы имеем:

$$y+\frac{\pi}{6}=x. \qquad (2)$$

Следовательно, уравнение (1) примет вид:

$$\cos x+2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\cos x=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) равносильно совокупности уравнений:
а) $\cos x=0$; б) $1+2\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

В случае а) имеем:

$$\begin{cases}\cos x=0,\\ x-y=\frac{\pi}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

В случае б) получаем: $\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, откуда

$$\left[\begin{array}{l}y-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ y-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}y=2\pi n,\\ y=\frac{4\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $x=y+\frac{\pi}{6}$, имеем:

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ y=2\pi n;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\\ y=\frac{4\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n;\end{cases} \quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ y=2\pi n.\end{cases}$

Ответ можно записать также в виде: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

4. Множество решений первого неравенства есть круг с центром в начале координат радиуса 1 (рис. 99). Множество решений второго неравенства есть угол, заштрихованный на рисунке 100. Множеством решений системы является пересечение полученных множеств (рис. 101). Площадь полученной фигуры равна площади полукруга, равной $\frac{\pi}{2}$, сложенной с площадью треугольника, равной 1.

Ответ: $\frac{\pi+2}{2}$.

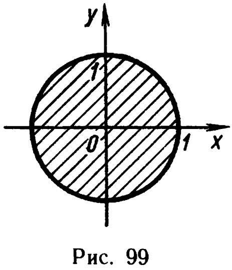


Рис. 99

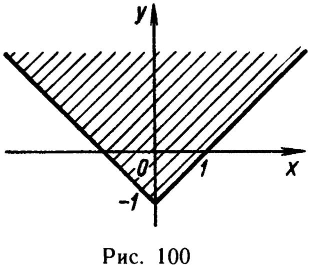


Рис. 100

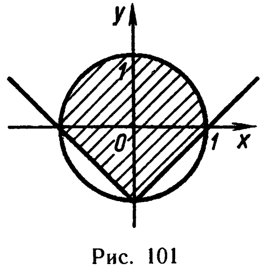


Рис. 101

5. Подставляя $y=1+x$ из второго уравнения системы в первое, получим уравнение:

$$x-\sqrt{x}-a+1=0, \qquad (1)$$

квадратное относительно $\sqrt{x}$. Его дискриминант $D=4a-3$ неотрицателен при $a\geqslant\frac{3}{4}$. При этих значениях a имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2},\\ \sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{4a-3}}{2}.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Совокупность (2) будет иметь единственное решение, когда $a=\frac{3}{4}$ и когда $\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}<0$, т. е. при $a>1$.

Ответ: $a=\frac{3}{4}$, $a>1$.

Вариант 2 К-7

1. (1; 2; 3; 4).

2. Из первого уравнения системы следует, что $y\leqslant x\,(1)$. Возведем в квадрат обе части первого уравнения системы. Имеем: $x^2-3y=$ $=x^2-2xy+y^2$, или

$$3y-2xy+y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}y=0, & (2)\\ y=2x-3. & (3)\end{array}\right.$$

Учитывая (2), имеем: $\begin{cases}x=\log_2 3{,}5,\\ y=0,\end{cases}$ причем условие (1) выполняется. Используя (3), получаем уравнение $2^{x+1}-6=2^{2x-3}$, имеющее корни $x_1=2$ и $x_2=\log_2 12$. Если $x=2$, то $y=1$. Так как из (1) и (3) следует, что $x\leqslant 3$, а $\log_2 12>3$, то, отбрасывая $x_2=\log_2 12$, приходим к выводу, что решениями исходной системы являются пары чисел $(\log_2 3{,}5;\ 0)$ и $(2;\ 1)$. Ответ: $(\log_2 3{,}5;\ 0)$, $(2;\ 1)$.

3. Из первого уравнения системы получаем $\cos x\cos y=$ $=-3\sin x\sin y$. Следовательно, исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases}\cos x\cos y=\dfrac{3}{4}, & (1)\\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{4}. & (2)\end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2) и складывая их, получим:

$$\begin{cases}\cos(x+y)=1,\\ \cos(x-y)=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases}x+y=2\pi n,\\ x-y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases}x+y=2\pi n,\\ x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\end{cases}$$

где $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

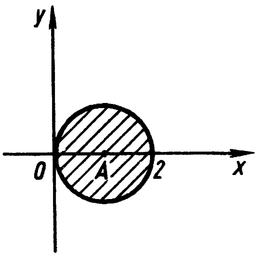


Рис. 102

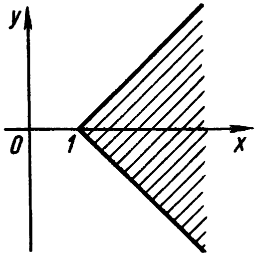


Рис. 103

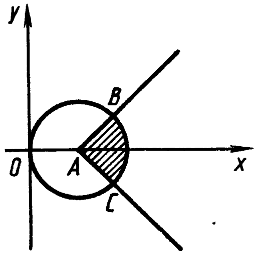


Рис. 104

В случае а) получаем:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\pi(n+k), \\ y=-\frac{\pi}{6}+\pi(n-k). \end{cases}$$

В случае б) получаем:

$$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}+\pi(n-k), \\ y=\frac{\pi}{6}+\pi(n-k), \quad n\in\mathbf{Z}, \quad k\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\ \frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. Так как неравенство $x^2+y^2\leqslant 2x$ можно переписать в виде $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$, то множеством его решений является круг с центром в точке A (1; 0) радиуса 1 (рис. 102). Множеством решений неравенства $|y|+1\leqslant x$ является угол, изображенный на рисунке 103. Множество решений системы есть пересечение полученных множеств (рис. 104), т. е. сектор BAC. Так как центральный угол сектора равен 90°, а радиус 1, то его площадь равна $\frac{\pi}{4}$.

5. Имеем:

$$\begin{cases} y-x=0, \\ y=\sqrt{x-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x, & (1) \\ x=\sqrt{x-a}. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x^2=x-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, & (3) \\ x^2-x+a=0. & (4) \end{cases}$$

Дискриминант уравнения (4) $D=1-4a$ неотрицателен при $a\leqslant\frac{1}{4}$. При этих значениях a имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \\ x=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}. \end{array}\right.$$

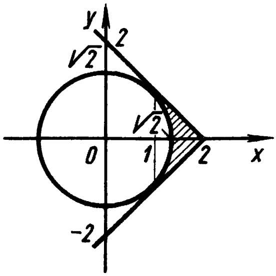


Рис. 105

Учитывая условие (3), делаем вывод, что уравнение (4), а значит, и исходная система имеют единственное решение, если $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}<0$, т. е. при $a<0$ и если $a=\frac{1}{4}$.

Ответ: $a<0$, $a=\frac{1}{4}$.

Вариант 3 К-7

1. (3; 2; 1; 0). 2. (1; 3).

3. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}-\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n;\ -\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

4. Рис. 105. Площадь равна $\frac{4-\pi}{2}$.

5. Подставив во второе уравнение системы $y=\sqrt{1-x}$, перепишем его в виде: $\sqrt{1-x}=a-x$. Обозначив $\sqrt{1-x}=t\geqslant 0$, получим уравнение $t^2-t+a-1=0$, откуда $t=\frac{1\pm\sqrt{5-4a}}{2}$. Единственное решение будет в случае, когда $a=\frac{5}{4}$ и когда $\frac{1-\sqrt{5-4a}}{2}<0$, т. е. при $a<1$. Ответ: $a=\frac{5}{4}$, $a<1$.

Вариант 4 К-7

1. (1; 2; 1). 2. (3; 1). 3. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, где $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
4. $\frac{\pi}{6}$; сектор круга с центром (0; 1), радиусом 1 и дугой 60°.
5. $a<0$, $a=\frac{1}{4}$.

Вариант 5 К-7

1. (0; −1; 5; 3). 2. $\left(2;\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4};\ -\frac{3}{16}\right)$. 3. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
4. $S=\frac{4-\pi}{2}$. 5. $a=0$, $a=\frac{1}{2}$.

Вариант 6 К-7

1. (0; 0; 0), (1; −1; −1), (−1; 1; 1). 2. (1; 1). 3. $(2\pi k;\ \pi+2\pi n)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 4. $\frac{\pi}{3}$. Круговой сектор с центром круга (0; 0), радиусом 1 и дугой 120°. 5. $a=\frac{1}{4}$, $a<0$.

Вариант 1 С-12

1. а) $\frac{z_2}{\bar{z}_1}=\frac{2i}{3-i}=\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=-0{,}2+0{,}6i$;

б) $\left(\frac{z_1+z_2}{3\bar{z}_2}\right)^8=\frac{(1+i)^8}{2^8}=\frac{(2i)^4}{2^8}=\frac{1}{16}$.

2. $x^2-4x+20=0$, $(x-2)^2=-16$, $x-2=\pm 4i$, $x=2\pm 4i$. Можно решить, пользуясь формулой корней квадратного уравнения.

3. Комплексные числа $z_1=x^2-5+(y+7)i$ и $z_2=-y-(x^2+4)i$ будут сопряженными, если выполнены условия:

$$\begin{cases} x^2-5=-y, \\ y+7=x^2+4. \end{cases}$$

Решив систему, находим: $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=-2$, $y_2=1$.
Ответ: (2; 1), (—2; 1).

4. Имеем: $(2n+1)^2-1=4n(n+1)$. Так как $n(n+1)$ делится на 2, то $4n(n+1)$ кратно 8.

Вариант 2 С-12

1. а) $\frac{\bar{z}_2}{z_1}=\frac{3i}{1+2i}=\frac{3i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1{,}2+0{,}6i$;

б) $\left(\frac{\bar{z}_1-iz_2}{2z_2}\right)^6=\left(\frac{1-2i-3}{2(-3i)}\right)^6=\frac{(1+i)^6}{-3^6}=\frac{8}{729}i$.

2. $x^2-6x+13=0$, $x=3\pm\sqrt{9-13}=3\pm\sqrt{-4}=3\pm 2i$.

3. $(2;\ -1)$, $(2;\ 1)$. 4. Пусть A — данное натуральное число. Если $A=4n$, то A^2 делится на 4; если $A=4n\pm 1$, то A^2 при делении на 4 дает в остатке 1; если $A=4n+2$, то A^2 делится на 4.

Вариант 3 С-12

1. а) $\frac{3}{17}+\frac{12}{17}i$; б) $-\frac{8i}{729}$. 2. $-1\pm 5i$. 3. $(1;\ 4)$, $(-1;\ 4)$.

4. $(2n+1)^2-(2m+1)^2=4(n(n+1)-m(m+1)) \vdots 8$.

Вариант 4 С-12

1. а) $3+4i$; б) -64. 2. $-2\pm 6i$. 3. $(2;\ 2)$.

Вариант 5 С-12

1. а) $-4+3i$; б) $-128i$. 2. $5\pm 3i$. 3. $(1;\ 1)$, $(-1;\ 1)$.
4. $(3n\pm 1)^2-1=9n^2\pm 6n$ кратно 3.

Вариант 6 С-12

1. а) $-0{,}4-1{,}2i$; б) $\frac{1}{512}i$. 2. $-4\pm 5i$. 3. $\left(-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -\sqrt{2}\right)$.
4. $n^2(n^2-1)=(n-1)n(n+1)n$. Из трех последовательных натуральных чисел $n-1$, n и $n+1$ одно делится на 3. Легко видеть, что данное выражение делится также и на 4.

Вариант 1 К-8

1. а) $z=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; б) $z=1+\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha=$
$=2\cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)=$
$=-2\cos\alpha(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$. Так как $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $-2\cos\alpha>0$ и, следовательно, $-2\cos\alpha$ — модуль, а $\pi+\alpha$ — аргумент данного комплексного числа.

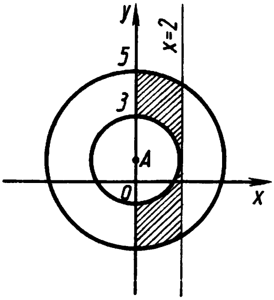


Рис. 106

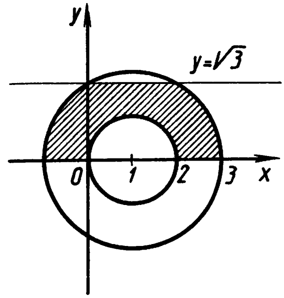


Рис. 107

2. $z_1=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
$z_2=-\sin\frac{\pi}{24}+i\cos\frac{\pi}{24}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)=\cos\frac{13\pi}{24}+$
$+i\sin\frac{13\pi}{24}$.
$z_1z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{13\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{13\pi}{24}\right)\right)=2\left(\cos\frac{17\pi}{24}+i\sin\frac{17\pi}{24}\right)$;
$(z_1z_2)^8=2^8\left(\cos\frac{17\pi}{3}+i\sin\frac{17\pi}{3}\right)=128\,(1-i\sqrt{3})$.

3. Множество точек, удовлетворяющих первому неравенству, есть кольцо с центром в точке A (0; 1), с радиусами 2 и 4. Множество точек, удовлетворяющих второму неравенству, есть полоса с границами $x=0$ и $x=2$. Прямая $x=2$ является касательной к окружности $x^2+(y-1)^2=4$ (рис. 106).

4. $|z|=\sqrt{\sin^2 2\alpha+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha+1}$.
Найдем наибольшее и наименьшее значения подкоренного выражения. Пусть $\sin 2\alpha=t$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. Тогда задача сводится к нахождению наименьшего и наибольшего значений функции $\varphi(t)=t^2+$ $+t+1$ на $[-1;\ 1]$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$.

Вариант 2 К-8

1. а) $z=1-\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)(\cos\pi+i\sin\pi)$;
б) $z=1-\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,(\sin\alpha+i\cos\alpha)=$
$=-2\sin\alpha\,(-\sin\alpha-i\cos\alpha)=-2\sin\alpha\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

2. $z_2=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$;
$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12}=\frac{1}{2^{12}}\left(\cos\frac{11\pi}{2}+i\sin\frac{11\pi}{2}\right)=-\frac{i}{2^{12}}$.

3. Пусть $z=x+yi$, где $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$. Тогда $z-3=x-3+yi$, $|z-3|=$
$=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Из условия имеем: $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$, откуда $(x+1)^2+$
$+y^2=4$.

Ответ. Окружность с центром в точке $A(-1;\ 0)$ радиуса 2.

4. $|z|=\sqrt{9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sqrt{8\sin^2\alpha+1}$.
Наибольшее значение $|z|$ равно 3, наименьшее 1.

Вариант 3 К-8

1. а) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

б) $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha))$.

2. $64i$. 3. Часть кольца с центром $(1;\ 0)$ и радиусами 1 и 2, заключенная между $y=0$ и $y=\sqrt{3}$ (рис. 107). 4. $\max|z|=1{,}5$, $\min|z|=0$.

Вариант 4 К-8

1. а) $(\sqrt{5}+1)(\cos 0+i\sin 0)$;

б) $-2\cos\alpha(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha))$.

2. $-4096i$. 3. Полуплоскость, расположенная ниже прямой $y=$ $=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$, включая точки этой прямой. 4. $\max|z|=3$, $\min|z|=$ $=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Вариант 5 К-8

1. а) $(3-\sqrt{5})(\cos\pi+i\sin\pi)$; б) $-2\sin\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$. 2. $-2^{18}i$. 3. Пересечение двух кругов с центрами $(0;\ 0)$, $(0;\ 3)$ и радиусами 2 и 3. 4. $\min|z|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\max|z|=\sqrt{3}$.

Вариант 6 К-8

1. а) $(\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; б) $-\frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$. 2. $-\frac{1}{4096}i$. 3. Окружность с центром $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ и радиусом 1,5. 4. $\max|z|=3$, $\min|z|=1$.

Вариант 1 С-13

1. $-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

$$\sqrt[3]{-i}=\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}=$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right);\ k=0,\ 1,\ 2.$$

Если $k=0$, то $\sqrt[3]{-i}=0{,}5(\sqrt{3}-i)$;

если $k=1$, то $\sqrt[3]{-i}=i$;

если $k=2$, то $\sqrt[3]{-i}=-0{,}5(\sqrt{3}+i)$.

Ответ: i, $0{,}5(\sqrt{3}-i)$, $-0{,}5(\sqrt{3}+i)$.

2. $x_1=2$, $x_2=3-2i$, $x_3=3+2i$.

$a(x-2)(x-3+2i)(x-3-2i)=0$, $a\neq 0$, $a\in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $a(x^3-8x^2+25x-26)=0$, $a\neq 0$, $a\in \boldsymbol{R}$. (В дальнейшем множитель a будем опускать.)

3. Согласно теореме Виета имеем: $x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\lambda$, $x_1x_2x_3=2$. Воспользуемся тождеством $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$. Имеем: $9=1+2\lambda$, откуда $\lambda=4$. Уравнение примет вид: $x^3-3x^2+4x-2=0$. Решив его, находим: $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm i$. Ответ: $\lambda=4$, $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm i$.

Вариант 2 С-13

1. $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}=$
$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)\right)$; $k=0,1$.

При $k=0$ $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

при $k=1$ $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

2. $x_1=-1$, $x_2=3+4i$, $x_3=3-4i$; $(x+1)(x-3-4i)(x-3+4i)=0$. Ответ: $x^3-5x^2+19x+25=0$.

3. По теореме Виета имеем: $x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\lambda$, $x_1x_2x_3=1$. Воспользовавшись формулой $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)$, или $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)((x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3))$, получаем $-2=1-3\lambda$, откуда $\lambda=1$. Подставив $\lambda=1$ в уравнение, имеем: $x^3-x^2+x-1=0$. Корнями уравнения являются $x_1=1$, $x_2=i$, $x_3=-i$. Ответ: $\lambda=1$; $x_1=1$; $x_{2,3}=\pm i$.

Вариант 3 С-13

1. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

2. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$. **3.** $\lambda=1$; $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

Вариант 4 С-13

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. **2.** $x^5-x^3+4x^2-2x+4=0$. **3.** $\lambda=3$; $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm 2i$.

Вариант 5 С-13

1. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(-1+i)$, $-\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$. **3.** $\lambda=-1$; $x_1=-1$, $x_2x_3=\pm i$.

Вариант 6 С-13

1. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$; $k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$
2. $x^5-5x^4+12x^3-16x^2+12x-4=0.$
3. $\lambda=2;\ x_1=-1,\ x_{2,3}=1\pm i.$

Вариант 1 К-9

1. Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то оно равносильно уравнению

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-19\left(x+\frac{1}{x}\right)+25=0.$$

Обозначив $x+\frac{1}{x}=y$, получим уравнение $6y^2-19y+13=0$, корни которого 1 и $\frac{13}{6}$.

Решив совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=1, \\ x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}, \end{array}\right.$$

находим корни исходного уравнения.

Ответ: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. Пусть $z=x+iy$, тогда $\bar{z}=x-iy$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$.

Имеем: $(x+iy)^2+x-iy=0$, или $x^2-y^2+x+(2xy-y)i=0$. Воспользовавшись условием равенства комплексного числа нулю, получаем:

$$\begin{cases} x^2-y^2+x=0, \\ y(2x-1)=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-1$, $y_2=0$; $x_3=\frac{1}{2}$, $y_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_4=\frac{1}{2}$, $y_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Так как $\left(\sin\frac{3\pi}{20}+i\cos\frac{3\pi}{20}\right)^5=\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\sin\frac{7\pi}{20}\right)^5=\cos\frac{7\pi}{4}+$ $+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, то $x_1=1+i$. Подставив $x=1+i$ в данное уравнение, получим:

$$(1+i)^3-(a+3)(1+i)^2+6a^2(1+i)+a^2-5=0, \text{ или}$$
$$7a^2-7+i(6a^2-2a-4)=0.$$

Учитывая, что $a\in\boldsymbol{R}$, и используя условие равенства комплексного числа нулю, имеем:

$$\begin{cases} a^2=1, \\ 3a^2-a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1.$$

При $a=1$ исходное уравнение принимает вид:

$$x^3-4x^2+6x-4=0.$$

Решив его, найдем корни: 2, $1+i$, $1-i$.

4. Разделив почленно обе части уравнения на 5, получим:

$$\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\cos 3x.$$

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то существует такое α, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Далее имеем: $\cos(x-\alpha)=\cos 3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x-\alpha+2\pi n, \\ 3x=-(x-\alpha)+2\pi n, \ n\in \boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\alpha}{2}+\pi n, \\ x=\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi n}{2}, \ n\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Так как $\alpha=\arccos\frac{4}{5}$, то

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}+\pi n, \\ x=\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}+\frac{\pi n}{2}, \ n\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

5. Нулями функции $f(x)=(2^x-3)(2x^2-7x+6)$ являются числа $\log_2 3$, $\frac{3}{2}$ и 2. Так как $\frac{3}{2}<\log_2 3<2$, то, решив неравенство методом интервалов, получим:

$$\left[\begin{array}{l} x<\frac{3}{2}, \\ \log_2 3<x<2. \end{array}\right.$$

6. Перепишем уравнение в виде: $2(x+y)+y=7$ (1). Обозначим $x+y=n$ (2). Тогда уравнение (1) примет вид: $2n+y=7$ (3), откуда $y=7-2n$ (4). Учитывая (2) и (4), находим: $x=n-(7-2n)=3n-7$.

Итак, решением данного уравнения являются все пары вида:

$$\begin{cases} x=3n-7, \\ y=7-2n, \text{ где } n\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Вариант 2 **К-9**

1. $-\frac{2}{5}$, $-\frac{5}{2}$, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. Пусть $z=x+iy$, $x\in \boldsymbol{R}$, $y\in \boldsymbol{R}$, тогда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Имеем: $\sqrt{x^2+y^2}-2(x+iy)=-1+2i$, откуда

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-2x=-1, \\ y=-1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x=\frac{4}{3}$, $y=-1$. Ответ: $z=\frac{4}{3}-i$.

3. $b=-1$; $x_1=3$, $x_{2,3}=1\pm i$.

4. $-\frac{1}{4}\arccos\frac{5}{13}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{6}\arccos\frac{5}{13}+\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. $1<x<\log_3 5$, $x>1{,}5$.

6. Перепишем уравнение в виде:

$$2x(y+1)=3y^2+y+2. \qquad (1)$$

Так как при $y=-1$ равенство (1) не выполняется, то разделим обе его части на $y+1$, имеем:

$$2x=\frac{3y^2+y+2}{y+1}, \text{ или } 2x=3y+1+\frac{1}{y+1}.$$

Так как $2x$ и $3y+1$ — целые, то число $\frac{1}{y+1}$ должно быть также целым. Но это возможно только в случае, если $y+1=1$ или $y+1=-1$. Отсюда находим: $y=0$ или $y=-2$. Получаем пары целых чисел: $x_1=1$, $y_1=0$; $x_2=-3$, $y_2=-2$.

Возможен и другой путь рассуждений. Перепишем уравнение в виде:
$2x(y+1)-(3y^2+4y+1)=1$, или $2x(y+1)-(y+1)(3y+1)=1$, $(y+1)(2x-3y-1)=1$, откуда имеем:

$$\begin{cases} y+1=1, \\ 2x-3y-1=1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y+1=-1, \\ 2x-3y-1=-1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 0), $(-3, -2)$.

Вариант 3 К-9

1. $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **2.** $z=(1-\sqrt{2})i$. **3.** $a=1$, $x_{1,2}=1\pm i$, $x_3=-3$. **4.** $\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{9}n$, $\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi}{5}n$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** $\frac{2}{3}<x<\log_7 4$, $x>1$. **6.** $(2k;\ 3k-4)$, где $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 4 К-9

1. 2,5; 0,4; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **2.** $z=-1+\frac{i}{\sqrt{3}}$. **3.** $b=-1$; $x_{1,2}=1\pm i$, $x_3=-2$. **4.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}+\pi n$, $-\frac{1}{8}\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** $x<2{,}5$, $\log_2 6<x<3$. **6.** $(0;\ -1)$, $(2;\ -1)$.

Вариант 5 К-9

1. $-\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **2.** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$. **3.** $a=-1$, $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_3=-1$. **4.** $\frac{\pi}{12}+\pi n$, $-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** $1<x<\log_3 15$, $x>2{,}5$. **6.** $(5k;\ 3k)$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 6 К-9

1. $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **2.** $z=-\frac{1}{3}i$. **3.** $b=1$; $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_3=1$. **4.** $\frac{1}{5}\arccos\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $-\frac{1}{9}\arccos\frac{2}{5}+\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}k$, $k\in\mathbf{Z}$. **5.** $x<0$, $\log_6 3<x<\frac{2}{3}$. **6.** (2; 3), (0; 1).

Вариант 1 К-10

1. К числам, меньшим 10^5, относятся все однозначные, двузначные, трехзначные, четырехзначные и пятизначные числа, составленные из цифр 7, 6, 4. Их количество равно:

$$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\frac{3\cdot(3^5-1)}{2}=363.$$

Нечетных чисел будет: $1+3+3^2+3^3+3^4=121$.

2. Количество четырехзначных чисел равно: $P(1;\ 2;\ 1)=\frac{4!}{1!\,2!\,1!}=12$. Числа 3 и 5 в каждом разряде встретятся $P(2;\ 1)=\frac{3!}{2!\,1!}=3$ раза, а число 7 в каждом разряде встретится $P_3=3!=6$ раз. Поэтому сумма всех четырехзначных чисел равна:

$$1111\,(3\cdot3+7\cdot6+3\cdot5)=73\,326.$$

3. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 3\sin 2x+2\cos^2 x=8\sin^2 x.\end{cases}$$

Решив однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнение

$$4\sin^2 x-3\sin x\cos x-\cos^2 x=0,$$

получим: $\operatorname{tg} x=1$, $\operatorname{tg} x=-0{,}25$. Учитывая условия $\sin x\geqslant 0$ и $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, получим: $x=\pi-\operatorname{arctg}0{,}25$. Ответ: $x=\pi-\operatorname{arctg}0{,}25$.

4. При $n>1$ имеем:

$$5^n+12n+15=(4+1)^n+12n+15=$$
$$=(4^n+C_n^14^{n-1}+C_n^24^{n-2}+\ldots+C_n^{n-2}4^2+C_n^{n-1}4+1)+12n+15=$$
$$=(4^n+C_n^14^{n-1}+\ldots+C_n^{n-2}4^2)+(C_n^{n-1}4+1+12n+15)=$$
$$=(4^n+C_1^n4^{n-1}+\ldots+C_n^{n-2}4^2)+(4n+1+12n+15)=$$
$$=4^n+C_n^14^{n-1}+\ldots+C_n^{n-2}4^2+16n+16.$$

Так как каждое слагаемое делится на 16, то и сумма делится на 16. При $n=1$ значение данного выражения равно 32 и также делится на 16.

Вариант 2 К-10

1. Количество различных треугольников равно числу сочетаний с повторениями из 4 элементов по 3:

$$\bar{C}_4^3=\frac{6!}{3!\,3!}=20.$$

Из них число разносторонних треугольников равно числу сочетаний из 4 элементов по 3, т. е. $C_4^3=4$. Равносторонних треугольников будет 4, следовательно, равнобедренных будет 12.

2. К числам, меньшим 1000, относятся однозначные, двузначные и трехзначные числа, составленные из цифр 5, 7 и 3. Их число равно: $3+3^2+3^3=39$.

3. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x\leqslant 0, \\ 2+3\sin x\cos x-2\cos 2x=\cos^2 x. \end{cases}$$

Решив полученное однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнение

$$4\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x=0,$$

получим: $\operatorname{tg} x=-1$, $\operatorname{tg} x=0{,}25$. Так как $\cos x\leqslant 0$ и $x\in[0;\ \pi]$, то окончательно получаем $x=\frac{3\pi}{4}$.

4. При $n\geqslant 2$ имеем:

$3^n=(2+1)^n=(2^n+C_n^1 2^{n-1}+\ldots+C_n^{n-2}2^2)+(C_n^{n-1}2+1)$,

$5^n=(4+1)^n=(4^n+C_n^1 4^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}4)+1$,

$7^n=(6+1)^n=(6^n+C_n^1 6^{n-1}+\ldots+C_n^{n-2}6^2)+(C_n^{n-1}6+1)$.

Так как в каждом из равенств первое слагаемое правой части делится на 4, то достаточно убедиться, что выражение

$$(2C_n^{n-1}+1)+1+(6C_n^{n-1}+1)+1$$

также делится на 4. Имеем: $(2n+1)+1+(6n+1)+1=8n+4$ делится на 4. При $n=1$ значение выражения равно 16 и, очевидно, делится на 4.

Вариант 3 К-10

1. 120, 40. **2.** 59994. **3.** $2\pi-\operatorname{arctg} 3$. **4.** $(4+1)^n+(4-1)^n+2\,\vdots\,4$.

Вариант 4 К-10

1. 220, 100. **2.** 18887. **3.** 0.

Вариант 5 К-10

1. 340, 85. **2.** 888. **3.** $\frac{3\pi}{4}$, $\pi-\operatorname{arctg} 2$.

Вариант 6 К-10

1. 35; разносторонних 10, равносторонних 5.
2. $4+4^2+4^3+4^4=340$. **3.** $2\pi-\operatorname{arctg} 2{,}5$. **4.** $16^n-4^n-3n=$ $=(15+1)^n-(3+1)^n-3n$.

1. 4 детали из 40 можно выбрать C_{40}^4 способами. Вероятность выбора 4 деталей без дефектов равна $\frac{C_{35}^4}{C_{40}^4} \approx 0{,}573$.

2. Нас интересует событие A — «выбранный из сборной шахматист-гроссмейстер». Рассмотрим два события: X_1 — «выбранный шахматист из первой команды», X_2 — «выбранный шахматист из второй команды». Эти события несовместны и $X_1 \cup X_2 = U$, где U — достоверное событие. Кроме того, из условия задачи следует, что $P(X_1)=0{,}8$, $P(X_2)=0{,}2$, $P(A|X_1)=0{,}7$, $P(A|X_2)=0{,}4$. Пользуясь формулой полной вероятности, получим:

$$P(A)=0{,}8\cdot 0{,}7+0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}64.$$

3. Данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin x=0, \\ \cos^2 x-\cos 2y=\frac{7}{4}; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \cos y=0, \\ \cos^2 x-\cos 2y=\frac{7}{4}. \end{cases}$$

В случае а) имеем:

$$\begin{cases} \sin x=0, \\ 1-\cos 2y=\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0, \\ \cos 2y=-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}, \\ y=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Так как $\cos 2y=2\cos^2 y-1$, то в случае б) имеем:

$$\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \cos y=0, \\ \cos^2 x=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \cos y=0, \\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}, \\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pi n;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k\right), \left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 2 С-14

1. Делегацию из 3 человек можно выбрать C_{30}^3 способами. Двух мужчин можно выбрать C_{22}^2 способами, а одну женщину C_8^1 способами. Следовательно, делегацию, состоящую из двух мужчин и одной женщины, можно выбрать $C_{22}^2\cdot C_8^1$ способами. Тогда искомая вероятность равна:

$$p=\frac{C_{22}^2\cdot C_8^1}{C_{30}^3}\approx 0{,}455.$$

2. 0,82.

3. Система равносильна совокупности систем:

а) $\begin{cases} \sin y=0, \\ \cos x+\cos^2 y=0{,}25+\sin y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin y\geqslant 0, \\ \sin 2x=0, \\ \cos x+\cos^2 y=0{,}25+\sin y. \end{cases}$

Ответ: $\left(\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k;\ \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(2\pi k;\ (-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{8}-1}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 3 С-14

1. $\approx 0{,}0072$. 2. 0,0175. 3. $\left(\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 4 С-14

1. $\approx 0{,}723$. 2. 0,915. 3. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 5 С-14

1. $\frac{C_{14}^2\cdot C_{21}^1}{C_{35}^3}\approx 0{,}292$. 2. $\frac{5}{12}$. 3. $\left(\pi+2\pi n;\ (-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{8}+\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 6 С-14

1. $1-\frac{C_{80}^5}{C_{100}^5}\approx 0{,}68$. 2. 0,0275. 3. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Вариант 1 К-11

1. Чисел, кратных 6, всего 8, следовательно, $p=\frac{8}{49}\approx 0{,}163$.

2. Вероятность совершить покупку каждым покупателем $p=0{,}1$. Тогда $q=1-0{,}1=0{,}9$. По формуле Бернулли находим:

$$P_{7,11}=C_{11}^7\cdot 0{,}1^7\cdot 0{,}9^4\approx 22\cdot 10^{-6}.$$

3. $3^x<6^{2x-1}\Leftrightarrow 3^x<\frac{36^x}{6}\Leftrightarrow 12^x>6\Leftrightarrow x>\log_{12}6$.

4. Применяя формулы $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, имеем:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

После упрощений получаем уравнение $\cos 2x+\sin 2x=1$, корнями которого, удовлетворяющими условию $\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$, являются числа $x_1=\pi$ и $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

5. Для того чтобы неравенство выполнялось при любом x, необходимо, чтобы $0<\frac{3-a}{3}<1$. В этом случае данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{1}{4}>\left(\frac{3-a}{3}\right)^2, \text{ или } x^2+\frac{1}{4}-\left(\frac{3-a}{3}\right)^2>0.$$

Ясно, что последнее неравенство будет выполняться при любом x в том и только в том случае, если $\frac{1}{4}-\left(\frac{3-a}{3}\right)^2>0$. Таким образом, задача свелась к решению системы

$$\begin{cases} 0<\frac{3-a}{3}<1, \\ \left(\frac{3-a}{3}\right)^2<\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0<\frac{3-a}{3}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}<a<3.$$

Вариант 2 К-11

1. Площадь квадрата равна 200 см^2, площадь круга 100π см^2. Следовательно, вероятность того, что наугад поставленная точка не попадет на квадрат, равна:

$$p=\frac{100\pi-200}{100\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}\approx 0{,}363.$$

2. Среди данных чисел, кратных 8, будет 13 $(101\leqslant 8n\leqslant 200)$. Вероятность выбрать из данных 100 чисел число, кратное 8, равна $\frac{13}{100}=0{,}13$. Так как выбранное число возвращается обратно, то имеем повторение независимых испытаний. Вероятность события A — «в результате 10 испытаний чисел, кратных 8, будет извлечено не более одного» — равна:

$$P(A)=P_{0,10}+P_{1,10}=C_{10}^0\cdot 0{,}13^0\cdot 0{,}87^{10}+C_{10}^1\cdot 0{,}13\cdot 0{,}87^9\approx 0{,}620.$$

3. Имеем:

$$\log_2^2(x-1)^2<4\Leftrightarrow\log_2^2|x-1|<1\Leftrightarrow -1<\log_2|x-1|<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}<|x-1|<2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}<x<3, \\ -1<x<\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

4. $$\sin^4 x+\cos^4 x=0{,}5+\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=0{,}5+\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=0{,}5+\cos 2x\Leftrightarrow\cos^2 2x-2\cos 2x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.\ \text{Ответ: } \frac{3\pi}{4}.$$

5. После упрощений получаем:

$$(a-4)81^x<1-a. \qquad (1)$$

Рассмотрим 3 случая: а) $a<4$; б) $a=4$; в) $a>4$.

В случае а) неравенство (1) принимает вид: $81^x>\frac{1-a}{a-4}$ и всегда имеет решение.

В случае б) неравенство (1) принимает вид: $0\cdot 81^x<-3$ и решений не имеет.

В случае в) неравенство (1) принимает вид: $81^x<\frac{1-a}{a-4}$ и при $a>4$, очевидно, решений не имеет.

Ответ: $a\geqslant 4$.

Вариант 3 К-11

1. $\approx 0{,}216$. **2.** $\approx 0{,}0574$. **3.** $x>\log_{75}5$. **4.** $\frac{7\pi}{4}$; 2π. **5.** $4<a\leqslant 5$.

Вариант 4 К-11

1. $\frac{9-\pi\sqrt{3}}{9}$. **2.** $\approx 0{,}670$. **3.** $x<-4$, $-2{,}5<x<-2$, $-2<x<-1{,}5$, $x>0$. **4.** $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$. **5.** $a<2$; $a>3$.

Вариант 5 К-11

1. $\frac{8}{9}$. **2.** $\approx 0{,}254$. **3.** $x<\log_{\frac{8}{9}}6$. **4.** $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$. **5.** $a>1{,}5$.

Вариант 6 К-11

1. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2\pi}$. **2.** $\approx 0{,}878$. **3.** $-2<x<-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}<x<1$. **4.** 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π. **5.** $1\leqslant a\leqslant 5$.

Вариант 1 К-12

1. а) Область определения функции найдем, решив систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin x}\geqslant 0, & (1)\\[2mm] \dfrac{10-x^2}{x^4-11x^2+18}\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

Ясно, что если α — одно из решений системы, то и $-\alpha$ также является ее решением. Это значит, что область определения функции f симметрична относительно начала координат. Очевидно, достаточно найти только положительные решения системы. Положительными решениями неравенства (2) будут числа из промежутков $0<x<\sqrt{2}$ и $3<x\leqslant\sqrt{10}$. Пересечением этих промежутков с мно-

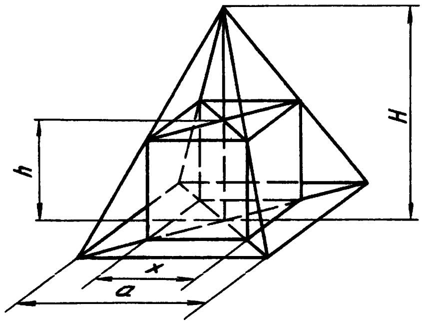


Рис. 108

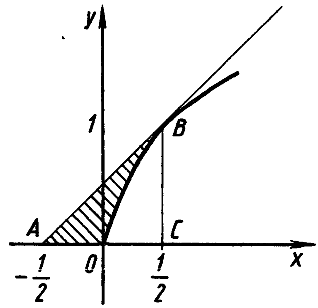


Рис. 109

жеством положительных решений неравенства $\frac{x}{\sin x} > 0$ будут промежутки $0 < x < \sqrt{2}$ и $3 < x < \pi$ (так как $\pi < 3{,}15$, а $\sqrt{10} > 3{,}15$, то $\pi < \sqrt{10}$). Таким образом, область определения функции состоит из промежутков: $-\pi < x < -3$, $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2}$, $3 < x < \pi$.

б) Рациональное число 1, иррациональное $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) Функция является четной: $f(-x) = f(x)$.

г) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. Из условия имеем:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = \frac{5}{4}, \\ a_1 - a_1 q^4 = \frac{15}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q^2) = \frac{5}{4}, & (1) \\ a_1(1-q^4) = \frac{15}{16}. & (2) \end{cases}$$

После почленного деления (2) на (1) получаем $1 - q^2 = \frac{3}{4}$. Учитывая, что $q > 0$, находим $q = \frac{1}{2}$.

Пусть S — сумма всех членов, а S_1 — сумма квадратов всех членов прогрессии. Тогда

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad S_1 = \frac{a_1^2}{1-q^2};$$

$$\frac{S_1}{S^2} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q} = \frac{1}{3}.$$

3. Пусть a и H соответственно сторона основания и высота пирамиды, а x и h — сторона основания и высота призмы (рис. 108).

Объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} a^2 H$, а объем призмы — по формуле $V_1 = x^2 h$.

Справедливо равенство: $\frac{H-h}{H} = \frac{x}{a}$, откуда $h = \frac{H}{a} \cdot (a - x)$.

Таким образом, объем призмы равен: $V_1=\frac{H}{a}x^2(a-x)$, $0<x<a$.

Исследуем на экстремум функцию $f(x)=x^2(a-x)$, $0<x<a$:

$$\begin{cases} f'(x)=0, \\ 0<x<a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax-3x^2=0, \\ 0<x<a \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}.$$

Так как при $0<x<\frac{2a}{3}$ $f'(x)>0$, а при $\frac{2a}{3}<x<a$ $f'(x)<0$ и так как в точке $x=\frac{2a}{3}$ функция f непрерывна, то на промежутке $\left(0;\ \frac{2a}{3}\right]$ функция возрастает, а на промежутке $\left[\frac{2a}{3};\ a\right)$ убывает. Следовательно, наибольшее значение на рассматриваемом промежутке функция принимает в точке $x=\frac{2a}{3}$. Так как $\frac{H}{a}$ — положительная постоянная, то при $x=\frac{2a}{3}$ объем V призмы принимает наибольшее значение. При $x=\frac{2a}{3}$ имеем $h=\frac{H}{3}$ и $V_1=\frac{4}{27}a^2h=\frac{4}{9}V$.

4. Уравнение касательной: $y=x+0{,}5$. Площадь S искомой фигуры получим, если из площади S_1 треугольника ABC вычтем площадь S_2 криволинейной трапеции OBC (рис. 109): $S=S_1-S_2$. Имеем:

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x}\,dx=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $S=\frac{1}{6}$.

5. Данное уравнение равносильно следующему:

$$2\cos 2x+\sin\frac{5x}{2}=3, \qquad (1)$$

которое, в свою очередь, равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos 2x=1, & (2) \\ \sin\frac{5x}{2}=1. & (3) \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$\begin{cases} x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, & (4) \\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5},\ k\in\mathbf{Z}. & (5) \end{cases}$$

Требуется выяснить, при каких n и k уравнения (2) и (3) будут иметь общие корни. Так как общий период функций, входящих в уравнение (1), равен 4π, то сначала достаточно найти решения уравнения на отрезке $[0;\ 4\pi]$. Уравнение (2) на этом отрезке имеет корни: 0; π; 2π; 3π; 4π, а уравнение (3) — корни: $\frac{\pi}{5}$; π; $\frac{9\pi}{5}$; $\frac{13\pi}{5}$; $\frac{17\pi}{5}$. Единственным общим корнем уравнений (2) и (3) на $[0;\ 4\pi]$ является $x=\pi$.

Итак, все корни уравнения (1) могут быть записаны в виде $x=\pi+4\pi m=\pi(1+4m)$, $m\in\mathbf{Z}$.

Рассмотрим другой способ решения.

Приравняв правые части (4) и (5), получим уравнение в целых числах: $5n-4k=1$. Решим его. Имеем: $n-4(k-n)=1$ (6). Пусть $k-n=m$ ($m\in\mathbf{Z}$) (7). Тогда уравнение (6) примет вид: $n-4m=1$, откуда

$$\begin{cases} n=1+4m, & (8)\\ k=1+5m,\ m\in\mathbf{Z}. & (9)\end{cases}$$

Формулы (8) и (9) содержат все решения уравнения $5n-4k=1$ в целых числах. Подставляя $n=1+4m$ в (4) (или $k=1+5m$ в (5)), получаем: $x=\pi(1+4m)$, $m\in\mathbf{Z}$.

Вариант 2 К-12

1. а) Область определения функции найдем из условия:

$$\begin{cases} \sin 3x\neq 0,\\ \cos x\neq 0,\\ 3-x^2\geqslant 0,\\ 1-x^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\\ |x|\leqslant\sqrt{3},\\ x\neq\pm 1.\end{cases}$$

Решив полученную систему, находим, что областью определения функции является отрезок $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$, из которого надо исключить точки: 0; ± 1; $\pm\frac{\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{2}$.

б) Рациональным числом из области определения функции является, например, число $\frac{1}{2}$, иррациональным $\sqrt{3}$.

в) $f(-x)=-f(x)$, значит, функция нечетная.

г) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

2. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} |q|<1,\\ \dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{3}{4},\\ a_1q=-\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1,\\ q=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Искомая сумма квадратов всех членов прогрессии равна $\frac{9}{8}$.

3. Обозначим большее основание трапеции через x. Тогда площадь трапеции равна:

$$S=\frac{a+x}{4}\sqrt{3a^2-x^2+2ax},\ 0<x<3a.$$

$$S'(x)=\frac{2a^2+ax-x^2}{2\sqrt{3a^2-x^2+2ax}},\ \begin{cases} S'(x)=0,\\ 0<x<3a\end{cases} \Leftrightarrow x=2a.$$

Исследуя функцию на монотонность, делаем вывод, что на промежутке $0<x\leqslant 2a$ функция возрастает, а на промежутке $2a\leqslant x<3a$ убывает. Наибольшее значение функция принимает в точке $x=2a$.

4. $S=\int\limits_0^1(x^2+1-2x)\,dx=\int\limits_0^1(x-1)^2\,dx=\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

5. Перепишем уравнение в виде:

$$3^{\sin x}+\cos^2\frac{4x}{3}=4. \qquad (1)$$

Так как $3^{\sin x}\leqslant 3$ $\cos^2\frac{4x}{3}\leqslant 1$, то уравнение (1) равносильно системе:

$$\begin{cases}3^{\sin x}=3,\\ \cos^2\frac{4x}{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1,\\ \left|\cos\frac{4x}{3}\right|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x=\frac{3\pi k}{4},\ k\in\boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Период функции $\cos^2\frac{4x}{3}=\frac{1+\cos\frac{8x}{3}}{2}$ равен $\frac{3\pi}{4}$, период функции $3^{\sin x}$ равен 2π. Следовательно, общий период функций, входящих в левую часть уравнения (1), равен 6π. На отрезке $[0;\ 6\pi]$ находятся следующие числа вида $\frac{\pi}{2}+2\pi n$: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$. Осталось проверить, какое из уравнений: $\frac{3\pi k}{4}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi k}{4}=\frac{5\pi}{2}$, $\frac{3\pi k}{4}=\frac{9\pi}{2}$ удовлетворяется при целом значении k. Целый корень имеет только третье уравнение: $k=6$. Таким образом, корнями исходного уравнения являются числа $x=\frac{9\pi}{2}+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Другой способ решения.

Решим в целых числах уравнение $\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{3\pi k}{4}$. Имеем: $2+8n=3k$, или $n-3(3n-k)=2$. Обозначим $3n-k=m$, уравнение примет вид: $n=3m+2$, где $m\in\boldsymbol{Z}$. Подставив $n=3m+2$ в равенство $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, получим:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi(3m+2)=\frac{9\pi}{2}+6\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{2}+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Вариант 3 К-12

1. а) $0<|x|<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<|x|<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}<|x|\leqslant\sqrt{5}$;

б) $\frac{1}{3}$; $\sqrt{5}$; в) не является четной и не является нечетной;

г) $\frac{1}{2}-\sqrt{5}$. 2. $\frac{1}{16}$. 3. 2; 6; $\frac{3}{2}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Вариант 4 К-12

1. а) $0<|x|<\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}<|x|<\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}<|x|<\frac{1}{\sqrt{6}}$;

б) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{7}}$; в) функция не является четной и не является нечетной; г) $\frac{3}{8}$. **2.** 1. **3.** $\sqrt{3}$ дм. **4.** $6\frac{3}{4}$. **5.** $2\pi+4\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 5 К-12

1. а) $0<|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\frac{3\pi}{4}$; б) 0,5; $\frac{\pi}{4}$; в) не является четной и не является нечетной; г) $2+\sqrt{6}$. **2.** $\frac{1}{8}$. **3.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 6 К-12

1. а) $0<|x|<\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}<|x|<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<|x|<1$, $1<|x|<\frac{3\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}<|x|<\frac{3}{\sqrt{5}}$; б) 0,1; $0{,}5\sqrt{2}$; в) четная; г) $\frac{2(3+\pi)}{3\pi}$. **2.** 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **3.** 60°. **4.** $2\frac{2}{3}$. **5.** $-\frac{5\pi}{6}+5\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 1 С-15

1. $f'(x)=2(\cos 2x-\sin x)$,

$$\begin{cases} f'(x)=0, \\ \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi)=-2$. Таким образом, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x)=0$.

Так как функция непрерывна на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, то $E(f)=[-1{,}5\sqrt{3};\ 0]$.

2. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\sin 2x-(\sin 3x+\sin x)>0,$$

или $\sin 2x-2\sin 2x\cos x>0$, $\sin 2x(2\cos x-1)<0$.

Последнее неравенство равносильно совокупности систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases}\sin 2x>0, \\ \cos x<\frac{1}{2};\end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases}\sin 2x<0, \\ \cos x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

В случае а) находим:

$$2\pi n+\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

В случае б) находим: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Решение можно провести также и с помощью метода интервалов.

3. Имеем: $\sin(2\operatorname{arctg}x)=1$, $2\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ (1). Но $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$. Следовательно, уравнение (1) имеет решение только при $n=0$. Получаем $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}$, откуда $x=1$.

Вариант 2 С-15

1. Имеем: $y=\sin x\cos 2x$, или $y=\sin x(1-2\sin^2 x)$. Пусть $\sin x=t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, так как $0\leqslant x\leqslant\pi$. Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $\varphi(t)=t(1-2t^2)=t-2t^3$ на $[0;\ 1]$.

$$\varphi'(t)=1-6t^2,$$

$$\begin{cases}\varphi'(t)=0,\\ 0<t<1\end{cases}\Leftrightarrow\ t=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Так как $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}$, $\varphi(1)=-1$, то наибольшее значение функции равно $\frac{\sqrt{6}}{9}$, наименьшее значение равно -1.

2. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3. Имеем: $\operatorname{ctg}(0{,}5\arcsin x)=1$, $0{,}5\arcsin x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $\arcsin x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Последнее равенство возможно только при $n=0$. Получаем $\arcsin x=\frac{\pi}{2}$, откуда $x=1$.

Вариант 3 С-15

1. $\left[0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. 2. $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{17\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 4 С-15

1. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 2. $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+$

$+2\pi n$, $\pi+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{7\pi}{4}+2\pi n<$ $<x<2\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** ± 1.

Вариант 5 С-15

1. $\left[0;\ \frac{9}{8}\right]$. **2.** $2\pi n<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{11\pi}{12}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $\frac{19\pi}{12}+$ $+2\pi n<x<\frac{23\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1.

Вариант 6 С-15

1. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **2.** $\frac{\pi}{12}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $\pi+2\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+$ $+2\pi n$, $\frac{17\pi}{12}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 0.

Вариант 1 С-16

1. Сделав замену $2^{x-2}=t$, получим уравнение:

$$\frac{\sin 4t}{\sin t\cos t}=2\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Имеем:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2\sin 4t}{\sin 2t}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2t=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin 2t\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos 2t=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}2^{x-2}=\frac{\pi}{12}+\pi n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\\ 2^{x-2}=-\frac{\pi}{12}+\pi n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{x}=\frac{\pi}{3}+4\pi n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\\ 2^{x}=-\frac{\pi}{3}+4\pi n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_2\left(\frac{\pi}{3}+4\pi n\right)(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\\ x=\log_2\left(-\frac{\pi}{3}+4\pi n\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Ответ: $\log_2\frac{\pi}{3}$, $\log_2\left(\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

2. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2|x-2|+\log_2(x+1)\leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases}|x-2|\cdot(x+1)\leqslant 2,\\ x\neq 2,\\ x>-1.\end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases}x>2,\\ (x-2)(x+1)\leqslant 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2,\\ x^2-x-4\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow 2<x\leqslant\frac{1+\sqrt{17}}{2}$;

б) $\begin{cases} -1<x<2, \\ (2-x)(x+1)\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2, \\ x^2-x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x\leqslant 0, \\ 1\leqslant x<2. \end{cases}$

Ответ: $-1<x\leqslant 0$, $1\leqslant x<2$, $2<x\leqslant\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

3. $y'=3\log_2^2 x\cdot\frac{1}{x\ln 2}-\frac{3}{x\ln 2}=\frac{3}{x\ln 2}(\log_2^2 x-1)$.

$y'=0$ при $\log_2^2 x-1=0$, т. е. при $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=2$. Так как $y'>0$ при $0<x<\frac{1}{2}$ и $x>2$, $y'<0$ при $\frac{1}{2}<x<2$, то $x=\frac{1}{2}$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума.

Вариант 2 **С-16**

1. Решений нет. 2. $1\leqslant x<2$, $2<x<4$. 3. Функция возрастает на $[0;\ \infty]$, убывает на $(-\infty;\ 0]$.

Вариант 3 **С-16**

1. Решений нет. 2. $1\leqslant x<2$, $2<x<4$. 3. $(-\infty;\ 0]$, $[\log_2 3;\ +\infty)$ — промежутки возрастания, $[0;\ \log_2 3]$ — промежуток убывания.

Вариант 4 **С-16**

1. $\log_2\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\log_2\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\geqslant 0$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 2. $\frac{1}{2}\leqslant x<1$.

3. $x=\frac{1}{e}$ — точка минимума, $x=e$ — точка максимума.

Вариант 5 **С-16**

1. $\log_3(\pi n)$, $n\in\boldsymbol{N}$. 2. $2<x<4$, $4<x\leqslant 5$. 3. $x=-2$ — точка минимума, $x=3$ — точка максимума.

Вариант 6 **С-16**

1. $\log_4\left(\frac{8\pi}{3}+4\pi n\right)$, $\log_4\left(\frac{10\pi}{3}+4\pi n\right)$, $n\geqslant 0$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 2. $x\leqslant -1$.

3. $(0;\ 1)$, $(1;\ \sqrt[3]{e}]$ — промежутки убывания, $[\sqrt[3]{e};\ +\infty)$ — промежуток возрастания.

Вариант 1 **К-13**

1. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} \log_y\left(\frac{x}{2}\right)=\log_{\frac{x}{2}} y, & (1) \\ 2x=y. & (2) \end{cases}$$

Обозначив $\log_y\frac{x}{2}$ через z, перепишем уравнение (1) в виде $z=\frac{1}{z}$, откуда находим: $z_1=1$, $z_2=-1$. Пусть $z=1$. Имеем:

$$\begin{cases} \log_y\frac{x}{2}=1, \\ 2x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=y, \\ 2x=y, \\ x>0, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет.

Пусть $z=-1$. Имеем:

$$\begin{cases}\log_y \dfrac{x}{2}=-1,\\ 2x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{y},\\ 2x=y,\\ x>0,\\ y>0,\\ y\neq 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: (1, 2).

2. Воспользуемся формулой $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Имеем:

$$\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-\sin 2x).$$

После упрощений получим:

$$(\sin x-\cos x)^2-2(\sin x-\cos x)-3=0,$$

откуда $\sin x-\cos x=-1$. Ответ: 0; $\dfrac{3\pi}{2}$.

3. Так как $64^x=2^{6x}>0$, то, разделив все члены неравенства на 2^{6x}, получим неравенство, равносильное данному:

$$16\cdot 2^{2x^2-8x}-17\cdot 2^{x^2-4x}+1<0.$$

Откуда получаем:

$$\frac{1}{16}<2^{x^2-4x}<1, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases}2^{x^2-4x}<1,\\ 2^{x^2-4x}>2^{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x<0,\\ (x-2)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<4,\\ x\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2,\\ 2<x<4.\end{array}\right.$$

Ответ: $0<x<2$, $2<x<4$.

4. Уравнение касательной к графику функции $y=x^3-3x$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ имеет вид $y=2$. Решив уравнение $x^3-3x=2$, найдем абсциссы точек пересечения касательной с графиком функции $y=x^3-3x$: $x_1=-1$ (точка касания) и $x_2=2$ (рис. 110).

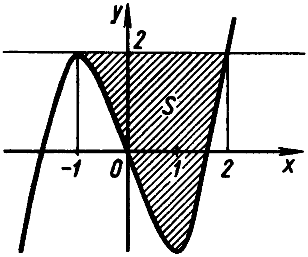


Рис. 110

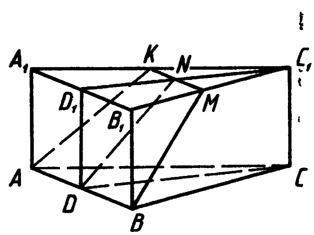


Рис. 111

Площадь фигуры равна: $S=\int\limits_{-1}^{2}(2-(x^3-3x))\,dx=6{,}75.$

5. Сечением пирамиды является трапеция. Пусть x — меньшее основание сечения. Тогда высота сечения равна $3-x$, а высота второй пирамиды x. Объем второй пирамиды равен: $V(x)=$ $=\frac{1}{6}(9-x^2)\,x$, $0<x<3$. Исследуя функцию $V(x)$, находим, что $\max\limits_{(0;\,3)} V(x)=V(\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

Вариант 2 К-13

1. $a=1$. 2. $1<x<2$, $-2<x<-1$.

3. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Тогда $x_1+x_2=\cos\alpha$, $x_1x_2=-0{,}5\cos 4\alpha$. Имеем:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\cos^2\alpha+\cos 4\alpha.$$

Согласно условию получаем уравнение:

$$\cos^2\alpha+\cos 4\alpha=0{,}25,$$
$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+2\cos^2 2\alpha-1=\frac{1}{4},$$
$$8\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha-3=0.$$

Решив квадратное уравнение, найдем:

а) $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\cos 2\alpha=-\frac{3}{4}$.

Дискриминант квадратного уравнения $x^2-x\cos\alpha-0{,}5\cos^4\alpha=0$ равен $D=\cos^2\alpha+2\cos 4\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+2\,(2\cos^2 2\alpha-1)$. Если $\cos 2\alpha=$ $=\frac{1}{2}$, то $D<0$, если $\cos 2\alpha=-\frac{3}{4}$, то $D>0$.

Таким образом, если $\cos 2\alpha=-\frac{3}{4}$, то исходное уравнение имеет действительные и различные корни, удовлетворяющие условию $x_1^2+x_2^2=0{,}25$.

Ответ: $\alpha=\pm 0{,}5\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

4. $V=\pi\int\limits_{-1}^{2}(x^3+1)^2\,dx=\frac{405}{14}\pi.$

5. Если M не совпадает ни с B_1, ни с C_1, то сечением является трапеция $ABMK$ (рис. 111). Пусть $D_1N=x$, тогда $AB=2\sqrt{3}$, $MK=$ $=\frac{6-2x}{\sqrt{3}}$, $DN=\sqrt{4+x^2}$.

Площадь трапеции равна:

$$S(x)=\frac{6-x}{\sqrt{3}}\sqrt{4+x^2},\quad 0<x<3.$$

Площадь прямоугольника AA_1B_1B равна $4\sqrt{3}$, площадь треугольника ABC_1 равна $\sqrt{39}$. Вычислив $S(0)=4\sqrt{3}$, $S(3)=\sqrt{39}$, делаем вывод, что площадь сечения равна:

$$S(x)=\frac{6-x}{\sqrt{3}}\sqrt{4+x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 3.$$

Для нахождения наибольшей и наименьшей площади сечения найдем производную:

$$S'(x)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{4+x^2}},\ S'(x)=0 \text{ при } x=1 \text{ и } x=2.$$

Сравниваем $S(0)=\frac{12}{\sqrt{3}}$, $S(1)=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $S(2)=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $S(3)=\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ и приходим к выводу, что $\min\limits_{[0;\,3]} S(x)=S(3)=\sqrt{39}$, $\max\limits_{[0;\,3]} S(x)=S(0)=$ $=4\sqrt{3}$. Ответ: $4\sqrt{3}$, $\sqrt{39}$.

Вариант 3 К-13

1. $a=3$, $b=1$; $x_1=i$, $x_2=-i$, $x_3=4+\sqrt{3}$, $x_4=4-\sqrt{3}$.

2. $2\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 3. $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$, $x=\pm\pi$. 4. 4,5. 5. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Вариант 4 К-13

1. $a=1$. 2. $x\geqslant 0$, $x=-4$. 3. $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $y=\frac{\pi}{2}-\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 4. $2\ln 3$. 5. $\frac{4}{27}V$.

Вариант 5 К-13

1. 2^{17}. 2. $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 3. $x<-\log_3 2$, $x>0$. 4. $16\frac{1}{3}$. 5. $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $V=\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

Вариант 6 К-13

1. $x=1$, $y=\frac{1}{2}$. 2. $x=\frac{5\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{2}$. 3. $x=1$, $x=\log_2 3-1$. 4. $y=$ $=x-\frac{3}{4}$. 5. $\frac{1+\sqrt{17}}{8}p$, $\frac{1+\sqrt{17}}{8}p$, $\frac{7-\sqrt{17}}{8}p$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ ЗА КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

1982 ГОД

Вариант 1

1. Даны два комплексных числа:

$$z_1=a-i,\ z_2=2^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Найдите все значения $a\in \boldsymbol{R}$, при которых $z_1^3=z_2^2$.

2. К графику функции $f(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$, где $x\in\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$, проведена касательная, параллельная прямой $y=4x+1$. Найдите координаты точки касания.
3. Решите неравенство $2\log_2 x-3\log_x 4\leqslant 4$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$ и $x+y=2$.
5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Известно, что прямая SD перпендикулярна плоскости ABC и что площадь треугольника SAC равна $2\sqrt{3}$. Какой должна быть длина стороны основания пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим?

Вариант 2

1. Даны два комплексных числа:

$$z_1=1+ai \text{ и } z_2=2^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right).$$

Найдите все значения $a\in \boldsymbol{R}$, при которых $z_1^3=z_2^2$.

2. К графику функции $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x$, где $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, проведена касательная, параллельная прямой $12x-3y=2$. Найдите координаты точки касания.
3. Решите неравенство $2\cdot\log_x 9-\log_3 x\geqslant 3$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$ и $x-y=2$.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания призмы). Известно, что площадь четырехугольника AD_1C_1B равна $4\sqrt{3}$. Какой должна быть сторона основания призмы, чтобы ее объем был наибольшим?

1983 ГОД

Вариант 1

1. Вычислите $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^6$.
2. Найдите все решения уравнения $3\cos 2x+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=1$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.
3. Решите неравенство $\log_2^2(4x)+\log_x 8\leqslant -2$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|x^2-3x|+ +x$ и $y=x+4$.
5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса 1. Найдите длину высоты пирамиды, при которой ее объем наименьший.

Вариант 2

1. Вычислите $\left(\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$.
2. Найдите все решения уравнения $5\cos 2x+4\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=-1$, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.
3. Решите неравенство $\log_x 9-\log_3^2(3x)\leqslant -2$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|x^2+4x|- -2x$ и $y=10-x$.
5. Найдите наибольший возможный объем правильной треугольной пирамиды, вписанной в шар радиуса R.

1984 ГОД

Вариант 1

1. Вычислите $(1+i\sqrt{3})^7+(1-i\sqrt{3})^7$.
2. Решите уравнение $\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}(1+\sin 2x)$, если $x\in[0;\ 2\pi]$.
3. Решите неравенство $4^x+3\cdot 2^{2-x}<13$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{x+6}{x}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=1$ и прямой $x=3$ ($\ln 3\approx 1{,}1$).
5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб с ребром, равным 1, так, что одно основание лежит на основании пирамиды, а вершины противоположного ему основания — на боковых ребрах пирамиды. В пирамиде с наименьшим объемом найдите величину угла наклона боковой грани к основанию пирамиды.

Вариант 2

1. Вычислите $(\sqrt{3}+i)^7+(\sqrt{3}-i)^7$.

2. Решите уравнение $\cos^4\frac{x}{2}+\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}(1-\sin 2x)$,

   если $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Решите неравенство $9^x+2\cdot 3^{1-x}>7$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{x-4}{x}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=1$ и прямой $x=5$ ($\ln 5\approx 1{,}6$).
5. Сечением правильной четырехугольной пирамиды, проходящим через высоту пирамиды и апофему, является правильный треугольник со стороной, равной 2. В пирамиду вписана правильная четырехугольная призма так, что нижнее основание призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах. В призме, имеющей наибольший объем, найдите отношение ее высоты к стороне основания.

1985 ГОД

Вариант 1

1. Число $x=\frac{1+i}{1-i}$ является корнем уравнения $2x^3-a^2x^2+2a^2x-a-2=0$, $a\in\mathbf{R}$. Найдите значение a и решите уравнение при найденном значении a.
2. Найдите все корни уравнения $\cos^4 x+\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0{,}25$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Решите неравенство $\log_2(3x+1)\log_{0,5}(6x+2)<-6$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=3\sqrt{4x+1}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=2$ и прямой $y=0$.
5. В шар радиуса R вписан цилиндр. Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания, при котором площадь полной поверхности цилиндра будет наибольшей. Найдите значение этой наибольшей площади полной поверхности.

Вариант 2

1. Число $x=\frac{1-i}{1+i}$ является корнем уравнения $2x^3+a^2x^2+2a^2x+2-a=0$, $a\in\mathbf{R}$. Найдите значение a и решите уравнение при найденном значении a.

2. Найдите все корни уравнения $\sin^4 x - \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 0{,}25$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)\cdot\log_3(3-6x) < -2$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=3\sqrt{5-2x}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=-2$ и прямой $y=0$.
5. Конус описан около шара радиуса R. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 2α. При каком значении α площадь осевого сечения конуса будет наименьшей? Найдите значение этой наименьшей площади.

1986 ГОД

Вариант 1

1. Найдите все значения $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, для которых выполняется равенство

$$4i - 2ab - abi = 3 - a^2 + b^2 i.$$

2. Решите уравнение $2\cos x - |\cos x| = \operatorname{tg} x + \sec x$.
3. Решите неравенство

$$\log_2(x^2-2x+1) - 4x < 8 + 2(x+1)\log_{0,5}(1-x).$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-2x}$, $y=2$.
5. Объем конуса равен V. Найдите наибольший объем цилиндра, вписанного в этот конус.

Вариант 2

1. Найдите все значения $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, для которых выполняется равенство

$$a^2 + (ab+1)i - 5 = ai - b^2 + bi.$$

2. Решите уравнение $|\sin x| + 2\sin x = \operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x$.
3. Решите неравенство

$$(x-3)\,2^{x^2-2x} + 16 > 8\left(x - 2^{x^2-2x-3}\right).$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{3x}$, $y=3$.
5. Объем шара равен V. Найдите наибольший объем цилиндра, вписанного в этот шар.

1987 ГОД

Вариант 1

1. Вычислите

$$\frac{16i\left(\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}{(\sqrt{3}+i)^4}.$$

2. Найдите все решения уравнения $\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\operatorname{tg} x$, принадлежащие промежутку $[\pi;\ 3\pi]$.
3. Решите неравенство $\log_2(x^2-3x)\leqslant 5+\log_{0,5}(x+4)$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{2}{(2x-1)^2}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=1$ и прямой $x=2$.
5. Укажите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума функции $y=8^x-2^{x+1}-x\ln 2$. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на $[-1;\ 1]$.

Вариант 2

1. Вычислите

$$\frac{16i\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{(i\sqrt{3}-1)^4}.$$

2. Найдите все решения уравнения $\sqrt{2\cos x}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg} x$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.
3. Решите неравенство $\log_{0,5}(2x^2+3x)\geqslant\log_2(2-x)-3$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{2}{(2x+1)^2}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=0$ и прямой $x=1$.
5. Укажите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума функции $y=4^x-8^x+x\ln 2$. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на $[-1;\ 1]$.

1988 ГОД

Вариант 1

1. Решите уравнение $z^6+(8-i)z^3+(1+i)^6=0$.
2. Найдите область определения и область значений функции

$$y=\frac{\sin 3x}{1-2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}.$$

3. Многочлен $P(x)$ делится без остатка на $x+1$, а при делении на x^2-3x дает в остатке $7x-1$. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^3-2x^2-3x.
4. Через точку $A(-3;\ 1)$ проведена прямая, которая является касательной к графику функции $y=\sqrt{8-x^2}$. Определите угол наклона этой прямой к оси абсцисс. Сделайте рисунок с изображением графика данной функции и данной касательной.
5. Скорость поезда, движущегося под уклон, задана уравнением $v(t)=15+0{,}2t$. Вычислите длину уклона, если поезд прошел его за 20 с. (Путь измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Решите уравнение $z^4+(2-4i)z^2-(1-i)^6=0$.
2. Найдите область определения и область значений функции

$$y=\frac{\cos 3x}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}.$$

3. Многочлен $Q(x)$ делится без остатка на $x-2$, а при делении на x^2+x дает в остатке $-4x+2$. Найдите остаток от деления многочлена $Q(x)$ на x^3-x^2-2x.
4. Через точку $A(9;\ -3)$ проведена прямая, которая является касательной к графику функции $y=\sqrt{18-x^2}$. Определите угол наклона этой прямой к оси абсцисс. Сделайте рисунок с изображением графика данной функции и данной касательной.
5. Скорость автомобиля при торможении выражается формулой $v(t)=18-1{,}2t$. Вычислите путь, пройденный автомобилем, если он остановился через 15 с после начала торможения. (Путь измеряется в метрах.)

1989 ГОД

Вариант 1

1. Найдите z^{12}, если

$$z=2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}+i\right).$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{4\cos x-6\sin x}=\sqrt{2-3\operatorname{tg} x},$$

принадлежащие $[-\pi;\ \pi]$.

3. Решите неравенство $\log_x\frac{2x-1}{x-1}>1$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sqrt[3]{3x+2},\ y=\sqrt{2x},\ y=0.$$

5. Найдите все значения $a \in R$, при которых области значений функций $f(x) = xe^{1+x}$ и $g(x) = x^4 - 4x + a^3 + a$ совпадают.
6. Два точечных заряда $8 \cdot 10^{-6}$ Кл и $27 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии 0,2 м друг от друга. В какой точке отрезка, соединяющего эти заряды, напряженность, создаваемая этими зарядами, электрического поля наименьшая, если заряды разноименные? Напряженность поля в точке вычисляется по формуле

$$E = \frac{kq_0}{r^2}, \text{ где } k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Вариант 2

1. Найдите z^{30}, если

$$z = 2 \sin \frac{\pi}{12} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right).$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{4 \sin x - 6 \cos x} = \sqrt{2 - 3 \operatorname{ctg} x},$$

принадлежащие $[\pi;\ 3\pi]$.

3. Решите неравенство $\quad \log_x \frac{1-x}{2-x} > 1.$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{3x - 2}, \quad y = \sqrt[3]{4x}, \quad y = 0.$$

5. При каких $a \in R$ области значений функций $f(x) = ex \ln x$ и $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + a^3 + 3a^2$ совпадают?
6. Два одноименных точечных заряда $81 \cdot 10^{-6}$ Кл и $16 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии 0,26 м друг от друга. В какой точке отрезка, соединяющего эти заряды, потенциал электрического поля наименьший? Потенциал электрического поля, создаваемого зарядом q, вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{kq}{r}, \text{ где } k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

1990 ГОД

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \dfrac{\sin x + \sin y - \cos x \cos y - 1}{1 - \cos y} = 0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $(x^2-2x-8)(\log_2^2 2x+5\log_{0,5} x+1)\leqslant 0$.
3. Изобразите на чертеже множества A и B комплексных чисел, удовлетворяющих соответственно уравнениям $z\bar{z}+\frac{1}{a^4}=0$ и $\bar{a}z+a\bar{z}=2\sqrt{2}$, где $a=0,5(1-i)$. Найдите все общие точки множеств A и B.
4. График функции $y=x^2+4x+4$ пересекается с графиком ее первообразной в точке с абсциссой 0. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций.
5. Исследуйте функцию

$$y=\frac{(x^2-x)\,e^{x-1}}{|x-1|}.$$

Постройте график функции, найдите множество ее значений.
6. Из трех резисторов, соединенных параллельно, составлена электрическая цепь. Известно, что сопротивление первого резистора в 9 раз больше сопротивления второго. При последовательном соединении этих резисторов сопротивление цепи равно R. Найдите сопротивления резисторов, при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-x=\pi, \\ \dfrac{\cos x-\cos y+\cos x\cos y}{1-\sin x}=0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $(27x^2+26x-1)(\log_3^2 9x-\log_{\sqrt{3}} x-7)\geqslant 0$.
3. Изобразите на чертеже множества A и B комплексных чисел, удовлетворяющих соответственно уравнениям $z\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}+7=0$ и $|z-a|=|z-a-6|$, где $a=-2-2i$. Найдите все общие точки множеств A и B.
4. График функции $y=x^2-2x+1$ пересекается с графиком ее первообразной в точке с абсциссой 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций.
5. Исследуйте функцию

$$y=\frac{x^2+x}{|x+1|\,e^{x+1}}.$$

Постройте график функции, найдите множество ее значений.
6. Три конденсатора, соединенных параллельно, образуют батарею емкостью C. Найдите емкости конденсаторов, при которых емкость батареи, полученной при последовательном соединении этих же конденсаторов, будет наибольшей, если известно, что $C_2:C_3=2,25$.

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

1991 ГОД

Вариант 1

1. Решите уравнение $27^x-3\cdot 18^x-12^x+3\cdot 2^{3x}=0$.
2. Решите уравнение $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\operatorname{ctg} x$. Укажите решения уравнения, для которых выполняется неравенство $\sin x\cos x>0$.
3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases}\sqrt{(2x-1)(x+3)}\geqslant x+1,\\ \log_{3x-2}28>2.\end{cases}$$
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.
5. M — множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что $|iz_1+\sqrt{2}|=\frac{1}{2}$. K — множество чисел z_2 комплексной плоскости вида $z_2=iz_1$, где $z_1\in M$. Найдите расстояние между фигурами M и K.
6. При каких значениях параметра a прямая $y=\sqrt{a}\,x$ касается графика функции $y=\ln x-ax^2$?

Вариант 2

1. Решите уравнение $8^x-2\cdot 20^x+3\cdot 50^x=6\cdot 125^x$.
2. Решите уравнение $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Укажите решения уравнения, для которых выполняется неравенство $\cos x\sin x<0$.
3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases}\sqrt{(2x-3)(x+2)}\geqslant x,\\ \log_{3x-1}27<2.\end{cases}$$
4. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{-x^2-6x-5}\,dx$.
5. M — множество чисел z_1 комплексной плоскости таких, что $|-z_1i-2\sqrt{2}i|=1$. K — множество чисел z_2 комплексной плоскости вида $z_2=-iz_1$, где $z_1\in M$. Найдите расстояние между фигурами M и K.
6. При каких значениях параметра a прямая $y=ax+\frac{1}{\sqrt{a}}$ касается графика функции $y=\sqrt{x}$?

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

1992 ГОД

Вариант 1

1. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\frac{|z+1|}{|z-2|} \geqslant 0{,}5$.
2. Решите неравенство
$$\frac{\log^2_{x+2,5}(1{,}5-x)}{(x+0{,}5)(x-1)} \geqslant 0.$$
3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 2x \cdot \cos 5x + \sin x = 0$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций
$$y = 0{,}5x^2 - 2x + 1 \text{ и } y = 6{,}5 - 1{,}5\,|x-5|.$$
5. Сколько корней имеет уравнение $4e^{-x}(x^2+x-5) = 1$?
6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{69-30x} = 9-3x$ и неравенство $\log_{1,5ax+3}(3x^2-6{,}5x+2+a) \leqslant x$ имеют только одно общее решение.

Вариант 2

1. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\frac{|z+2i|}{|z-i|} \geqslant 2$.
2. Решите неравенство
$$\frac{\log^2_{3-x}(x+0{,}5)}{x(1-x)} \leqslant 0.$$
3. Решите уравнение $\sin 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x = \cos 3x$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций
$$y = -0{,}5x^2 + x + 7{,}5 \text{ и } y = 1{,}5(|x+2|-1).$$
5. Сколько корней имеет уравнение $e^{x-1}(x^2-3x-3)+12=0$?
6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4^{\log_{0,5}(x+2)} = 5^{\log_{0,2}(2x^2+3x+2)}$ и неравенство $2^{ax+1} - 4^{x+a} + 7\cdot 2^x \leqslant 0$ имеют только одно общее решение.

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

1993 ГОД

Вариант 1

1. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из этих чисел.
2. Решите уравнение $\sqrt{\cos 2t - 3\sin 2t} = \cos t$.

3. Решите неравенство $2^x \cdot 5^{\frac{1}{x}} > 10$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 4x + 4$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.
5. Найдите все такие числа a, для каждого из которых существует только одно число b, такое, что $b^2(b+a) = 1$.
6. Какие значения может принимать сумма чисел x и y, если $|y| = (x-2)(4-x)$?

Вариант 2

1. Найдите сумму всех таких чисел z, что $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$. Укажите одно из этих чисел.
2. Решите уравнение $\sqrt{5 \sin 2u - \cos 2u} = \sin u$.
3. Решите неравенство $3^x \cdot 2^{\frac{1}{x}} \leqslant 6$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 6x + 9$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.
5. Найдите все такие числа b, для каждого из которых существует ровно три различных числа a, таких, что $a(b + a^2) = 1$.
6. Какие значения может принимать разность чисел y и x, если $|y| = -4x(x+2)$?

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

1994 ГОД

Вариант I

1. Найдите все комплексные z, удовлетворяющие условию
$$z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0.$$
2. Пусть $f(x) = 3^{x - x^2}$. Решите неравенство: $2f(x) + f(1-x) < \frac{1}{3}$.
3. Изобразите на координатной плоскости линию, задаваемую уравнением $|y| = x^2 - 4|x| + 4$, и найдите площадь фигуры, ограниченной этой линией.
4. Не пользуясь микрокалькулятором и таблицами, сравните числа $\log_4 3$ и $\log_3 2$.
5. Сколько различных корней имеет уравнение
$$\sqrt{-x^2 - 21\pi x}\,(\sin 3x \cos 6x - \sin x \cos 8x) = 0?$$
6. Найдите наименьшее значение длины отрезка прямой $y = a$ с концами на графиках функций $y = \frac{12}{7}x$ и $y = 2x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Вариант II

1. Найдите все комплексные z, удовлетворяющие условию

$$z^2-2(z+\bar{z})+4=0.$$

2. Пусть $f(x)=2^{x^2-3x}$. Решите неравенство:

$$f(x)+2f(3-x)\leqslant 0{,}75.$$

3. Изобразите на координатной плоскости линию, задаваемую уравнением $|y|=3+2|x|-x^2$, и найдите площадь фигуры, ограниченной этой линией.
4. Не пользуясь микрокалькулятором и таблицами, сравните числа $\log_3 5$ и $\log_5 7$.
5. Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sqrt{25\pi x-x^2}\,(\cos x\cdot\cos 7x+\sin x\cdot\sin 5x)=0?$$

6. Найдите наименьшее значение длины отрезка прямой $y=b$, концы которого принадлежат графикам $y=2x-\sqrt{1+x^2}$ и $y=2x$.

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

1995 ГОД

Вариант I

1. Найдите пару комплексных чисел z_1, z_2, для которых одновременно выполняются соотношения

$$2\bar{z}_1+z_2=11i \text{ и } 2z_1-3\bar{z}_2 i=17.$$

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_2(xy)-\frac{1}{2}\log_2(x^2)=1,\\ \log_{x_2}(y^2)+\log_2(y+6)=4.\end{cases}$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4+\sin x,\ y=\sin 2x+\cos x,\ x=0 \text{ и } x=\pi.$$

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^2-6x+8\sqrt{x}$ на монотонность.
5. Решите неравенство $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{1+x^2}+\sin\frac{2\pi x}{1+x^2}\geqslant 2.$
6. При каких p наименьшее значение функции $g(x)=-x^3+2px^2-2{,}25p$ на отрезке $[-3\sqrt{2};\ 3]$ достигается в двух различных точках?

Вариант II

1. Найдите пару комплексных чисел $(z;\ w)$, для которых одновременно выполняются соотношения

$$3z-2\bar{w}=1 \text{ и } \bar{z}-iw=-6i.$$

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_{0,5x+3}(x^2y^6)+1=\log_4(y^2), \\ \log_4\frac{x}{y}+0{,}25\log_2(y^2)=0{,}5. \end{cases}$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y=\cos 2x-6,\ y=\sin x+\sin 2x,\ x=0 \text{ и } x=-\pi/2.$$

4. Исследуйте функцию
$$g(x)=9x-12\ln x-2x\sqrt{x}$$
на монотонность.

5. Решите неравенство $1+\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2+4}\geqslant\cos\frac{4\pi x}{x^2+4}$.

6. При каких a наибольшее значение функции $f(x)=x^3+5ax^2+2a$ на отрезке $[-2\sqrt{3};\ 2]$ достигается в двух различных точках?

1996 ГОД

Вариант 1

1. Напишите уравнение касательной к графику функции
$$y=(2x+3)\sqrt{2x+3}+x^2,$$
не пересекающей прямой $y=x$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2-6y+5$ и $x=0$.

3. При каких p числа $\cos 6p$, $\sin 4p$, $\cos 2p$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию?

4. Решите неравенство $\log_{-2^x+2}\frac{7\cdot 0{,}5^x-2^{2x+5}}{1-2^{1-x}}\leqslant -1$. Не пользуясь микрокалькулятором, определите, удовлетворяет ли данному неравенству число $-0{,}75$.

5. Найдите точку графика функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, сумма расстояний от которой до прямых $y=0$ и $y=-\frac{3}{4}x$ наименьшая.

6. Отметьте на комплексной плоскости все точки z, если известно, что треугольник с вершинами в точках, соответствующих числам $z_1=2$, $z_2=z$ и $z_3=2i-z$, является равнобедренным.

Вариант 2

1. Напишите уравнение касательной к графику функции
$$y=(1-x)\sqrt{1-x}-x^2,$$
не пересекающей прямой $y=3x$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2+5y+5$ и $x=-1$.

3. При каких t числа $\cos 7t$, $\cos 2t$, $\cos 11t$ различны и в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию?
4. Решите неравенство $\log_{2^x-1}(9\cdot 2^{3-2x}-2^{x+1})\leqslant 2$. Не пользуясь микрокалькулятором, определите, удовлетворяет ли данному неравенству число 1,75.
5. Найдите точку графка функции $y=\ln x$, сумма расстояний от которой до оси ординат и до прямой $y=2{,}4x$ наименьшая.
6. Отметьте на комплексной плоскости все точки z, для которых точки, соответствующие числам $z_1=2i$, $z_2=z$ и $z_3=\frac{1}{2}z+1$, являются вершинами прямоугольного треугольника.

ОТВЕТЫ К ЭКЗАМЕНАЦИОННЫМ РАБОТАМ

1982 ГОД

Вариант 1

1. $a=-1$. 2. $\left(\frac{13\pi}{12};\ 1\right)$. 3. $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $1<x\leqslant 8$. 4. 4,5. 5. 2.

Вариант 2

1. 1. 2. $\left(\frac{11\pi}{12};\ 1\right)$. 3. $0<x\leqslant\frac{1}{81}$, $1<x\leqslant 3$. 4. 4,5. 5. 2.

1983 ГОД

Вариант 1

1. $8i$. 2. $\frac{\pi}{2}$, $\pi+\arcsin\frac{2}{3}$, $2\pi-\arcsin\frac{2}{3}$. 3. $\frac{1}{3}\leqslant x<1$. 4. $11\frac{5}{6}$. 5. 4.

Вариант 2

1. $\frac{i}{8}$. 2. $\pi+\arcsin\frac{4}{5}$, $2\pi-\arcsin\frac{4}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$. 3. $0<x\leqslant\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}\leqslant x<1$, $x\geqslant 3$. 4. $35\frac{5}{6}$.
5. $\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$.

1984 ГОД

Вариант 1

1. 128. 2. 0; $\frac{3\pi}{2}$, 2π. 3. $0<x<\log_2 3$. 4. $6\ln 3$. 5. $\operatorname{arctg} 4$.

Вариант 2

1. $-128\sqrt{3}$. 2. $-\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. 3. $x<0$, $x>\log_3 2$. 4. $16+4\ln 5$. 5. $0,25\sqrt{3}$.

1985 ГОД

Вариант 1

1. $a=-1$; 0,5; $\pm i$. 2. $\pm\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$. 3. $-\frac{1}{3}<x<-\frac{7}{24}$, $x>1$. 4. 6,75. 5. $\alpha=0,5\operatorname{arctg} 2$; $S=\pi R^2(1+\sqrt{5})$.

Вариант 2

1. $a=1$, $x_1=-0,5$, $x_{2,3}=\pm i$. 2. $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. 3. $\frac{4}{9}<x<\frac{1}{2}$, $x<-1$. 4. 13,5. 5. $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $S=3R^2\sqrt{3}$.

1986 ГОД

Вариант 1

1. $(3; 1), (-3; -1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. **2.** $2\pi n$, $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $x < -3$, $-2 < x < 1$. **4.** 4. **5.** $\frac{4V}{9}$.

Вариант 2

1. $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(1; -2)$, $(-2; 1)$. **2.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $-1 < x < 2$, $x > 3$. **4.** 12. **5.** $\frac{V}{\sqrt{3}}$.

1987 ГОД

Вариант 1

1. $-i$. **2.** π, 2π, $\frac{17\pi}{6}$, 3π. **3.** $-4 < x < 0$, $3 < x \leqslant 4$. **4.** $2\frac{2}{3}$. **5.** Промежуток убывания — $(-\infty; 0]$, промежуток возрастания — $[0; +\infty)$, $\min\limits_{[-1, 1]} y = -1$, $\max\limits_{[-1; 1]} y = 4 - \ln 2$.

Вариант 2

1. i. **2.** $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$. **3.** $-2 \leqslant x < -1{,}5$, $0 < x < 2$. **4.** $2\frac{2}{3}$. **5.** Промежуток возрастания — $(-\infty; 0]$, промежуток убывания — $[0; +\infty)$, $\max\limits_{[-1; 1]} y = 0$; $\min\limits_{[-1; 1]} y = \ln 2 - 4$.

1988 ГОД

Вариант 1

1. -2, $-i$, $1 \pm i\sqrt{3}$, $\pm 0{,}5\sqrt{3} + 0{,}5i$. **2.** $x \neq \pi n$, $x \neq -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$. **3.** $2x^2 + x - 1$. **4.** $45°$.

Вариант 2

1. $\pm i\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}(1 + i)$. **2.** $x \neq -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $[-1; 3)$. **3.** $x^2 - 3x + 2$. **4.** $135°$. **5.** 135 м.

1989 ГОД

Вариант 1

1. $-64i$. **2.** $-\frac{\pi}{3}$; $-\pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **3.** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **4.** $1\frac{1}{3}$. **5.** $a = 1$. **6.** 0,08 м (от первого заряда).

Вариант 2

1. i. **2.** $\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; $2\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$. **3.** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ 1\right)\cup\left(2;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **4.** $1\frac{2}{9}$. **5.** $a=0$; $a=-3$. **6.** 0,08 м (от второго заряда).

1990 ГОД

Вариант 1

1. $(2\pi n;\ \pi-2\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $(0;\ 2]\cup\{4\}$. **3.** $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. **4.** 2,25. **5.** $E(f)=\left(-1;\ \frac{1}{e^2}\right]\cup$ $\cup(1;\ +\infty)$. **6.** $R_1=\frac{9}{13}R$; $R_2=\frac{1}{13}R$; $R_3=\frac{3}{13}R$.

Вариант 2

1. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $\left\{\frac{1}{27}\right\}\cup[3;\ +\infty)$. **3.** $1+2i$. **4.** 2,25. **5.** $E(f)=\left(-1;\ \frac{1}{e^2}\right]\cup(1;\ +\infty)$. **6.** $C_1=\frac{6}{19}C$; $C_2=\frac{9}{19}C$; $C_3=\frac{4}{19}C$.

1991 ГОД

Вариант 1

1. 0; $\log_{1,5}3$. **2.** $\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $\left(1;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$. **5.** 1. **6.** $a=0{,}25e^{-1,5}$.

Вариант 2

1. $\log_{0,4}2$. **2.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **3.** $\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right)$. **4.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** 2. **6.** $a=\frac{1}{16}$.

1992 ГОД

Вариант 1

1. Вся плоскость, кроме круга с границей $(x+2)^2+y^2=4$ и точки $A(2;\ 0)$. **2.** $(-2{,}5;\ -1{,}5)\cup(-1{,}5;\ -0{,}5)\cup\{0{,}5\}\cup(1;\ 1{,}5)$. **3.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 25,5. **5.** 3 корня. **6.** $\left(-1;\ -\frac{8}{9}\right]\cup\left(-\frac{2}{3};\ 1\right]\cup(5;\ +\infty)$.

Вариант 2

1. Круг с центром в точке (0; 2) и радиусом $r=2$, исключая точку $A(0;\ 1)$. **2.** $(-0{,}5;\ 0)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **3.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{5}+\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{5}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 25,5. **5.** 2 корня. **6.** $[0{,}5;\ 2)$.

1993 ГОД

Вариант 1

1. 0; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$. **2.** $2\pi n$; $-\operatorname{arctg}6+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $(0;\ 1)\cup$ $\cup(\log_2 5;\ +\infty)$. **4.** $5\frac{1}{3}$. **5.** $a<\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **6.** $1{,}75\leqslant x+y\leqslant 4{,}25$.

Вариант 2

1. 0; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$. 2. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\operatorname{arctg} 0{,}1+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 3. $(-\infty;\ 0)\cup[\log_3 2;\ 1]$. 4. 18. 5. $b<-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. 6. $-3\frac{1}{16}\leqslant x-y\leqslant 5\frac{1}{16}$.

1994 ГОД

Вариант 1

1. -1; $1\pm 2i$. 2. $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$. 3. $10\frac{2}{3}$. 4. $\log_4 3>\log_3 2$. 5. 127. 6. $a=1{,}25$.

Вариант 2

1. 2; $\pm 2i$. 2. $[1;\ 2]$. 3. 36. 4. $\log_3 5>\log_5 7$. 5. 152. 6. $b=0{,}5$.

1995 ГОД

Вариант 1

1. $z_1=2{,}5-7{,}5i$; $z_2=-5-4i$. 2. $(-\sqrt{2};\ -2)$, $(2;\ 2)$. 3. $2+4\pi$. 4. Функция f возрастающая. 5. $[2-\sqrt{3};\ 1)\cup(1;\ 2+\sqrt{3}]$. 6. 1,5; $\frac{27(2\sqrt{2}+1)}{14}$.

Вариант 2

1. $z=3+2i$; $w=4-3i$. 2. $(2;\ 0{,}5)$, $\left(-2;\ -\frac{\sqrt[5]{4}}{2}\right)$. 3. $3\pi-2$. 4. Функция g убывающая. 5. $\{-4-2\sqrt{3}\}\cup\{-4+2\sqrt{3}\}\cup[0;\ 2]\cup(2;\ +\infty)$. 6. $-0{,}6$; $\frac{3\sqrt{3}+1}{5}$.

1996 ГОД

Вариант 1

1. $y=x+3$. 2. $10\frac{2}{3}$. 3. $\pm 0{,}25\arccos\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. 4. $\left(\frac{1}{3}(-5+\log_2 7);\ -\frac{2}{3}\right)\cup(0;\ 1)$. Не удовлетворяет. 5. $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. 6. Прямая $y=2x+1$ и две окружности $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$; $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$, за исключением точек $(-0{,}5;\ 0)$, $(0{,}5;\ 2)$.

Вариант 2

1. $y=3x+8$. 2. $\frac{1}{6}$. 3. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. 4. $(0;\ 1)\cup\left[1{,}5;\ \frac{2}{3}(1+\log_2 3)\right)$. Не удовлетворяет. 5. $[0{,}2;\ \ln 0{,}2)$. 6. Три окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=2$, $x^2+(y-2)^2=8$, за исключением точек $(-2;\ 4)$, $(2;\ 0)$, $(0;\ 2)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Галицкий Михаил Львович
Мошкович Матвей Моисеевич
Шварцбурд Семен Исаакович

УГЛУБЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

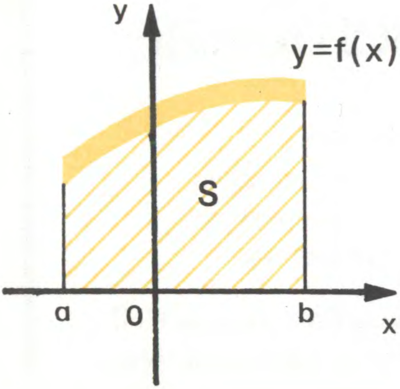
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Л. М. Котова, Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художник переплета *Б. А. Николаев*
Художник рисунков *Н. Н. Рожнов*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технические редакторы *С. Н. Терехова, Н. Н. Матвеева*
Корректоры *Н. В. Бурдина, Л. С. Вайтман*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 13.05.96. Подписано к печати 31.12.96. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,0+0,31 форз. Усл. кр.-отт. 22,81. Уч.-изд. л. 20,95+0,45 форз. Тираж 15 000 экз. Заказ № 134.

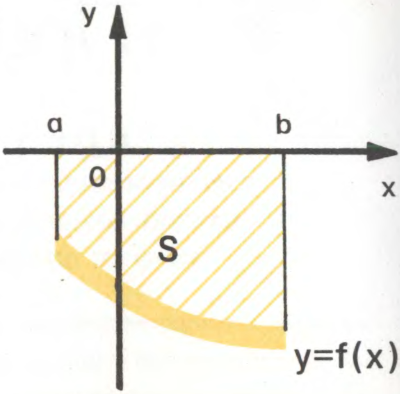
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

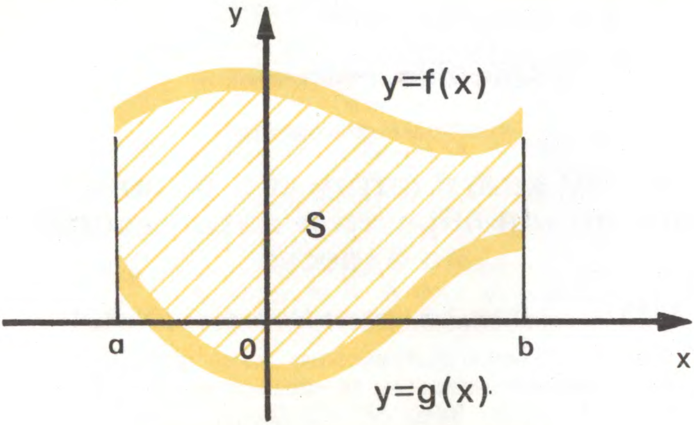
Площадь плоской фигуры



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$



$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),\quad F'(x)=f(x)$$

Таблица интегралов

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^{2}+a^{2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$$

Учебно-методический комплект углубленного изучения алгебры и математического анализа включает:

- *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.*
  Алгебра и математический анализ, 10

- *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.*
  Алгебра и математический анализ, 11

- *М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд.*
  Углубленное изучение алгебры и математического анализа.
  Методические рекомендации к учебникам

- *В. И. Рыжик.*
  Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу

ПРОСВЕЩЕНИЕ