UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

Engenharia de Software

Pesquisa Operacional

Aula 16: Análise de Sensibilidade

Professor: Dr. Henrique Valle de Lima
henrique.lima@unievangelica.edu.br

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

JITTDP

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

Jesus Is The Top Da Parada!

Análise de Sensibilidade

- Um Problema de Programação Linear (PPL) fornece a combinação de valores que maximizam ou minimizam o problema

- Como resposta de um PPL um conjunto de valores que geram a solução

- Podemos fazer uma análise pós otimização para verificar possíveis variações, para cima e para baixo, dos valores dos coeficientes da função objetivo, dos coeficientes e das constantes das restrições sem que a solução seja alterada

- Essa análise se chama: **Análise de Sensibilidade!**

Análise de Sensibilidade

- Vamos pensar em um caso
- Quando utilizamos um PPL para maximizar o lucro ou o custo de produção
- Suponhamos que o lucro de um produto seja R$ 5,00
- A análise considera sempre esse valor, mas na realidade, sempre será igual a R$ 5,00?
- Nosso PPL perde a solução se o lucro alterar para R$ 4,99 ou R$ 5,01?

Análise de Sensibilidade

Em uma Análise de Sensibilidade devemos responder basicamente 3 perguntas:

1) Qual o efeito de uma mudança em um coeficiente da função objetivo?

2) Qual o efeito de uma mudança em uma constante de uma restrição?

3) Qual o efeito de uma mudança em um coeficiente de uma restrição?

Alteração em coeficientes da Função Objetivo

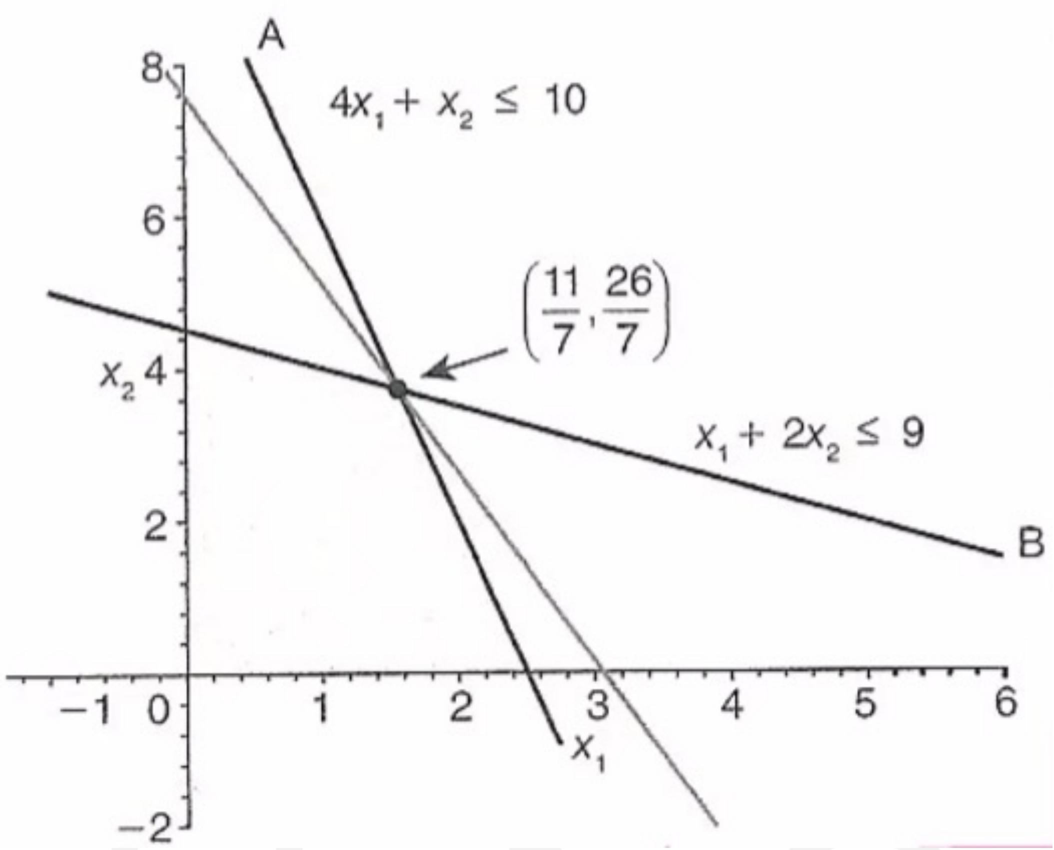
- Consideremos o problema abaixo a a solução gráfica apresentada

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.r.} \quad 4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$



Alteração em coeficientes da Função Objetivo

- A reta que define a função objetivo do problema é dada por:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{z}{2}$$

- Resolvendo o sistema de equações poderemos encontrar a solução ótima:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 10 - 4x_1 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \Rightarrow 10 - 4x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

$$x_1 = \frac{11}{7} \quad e \quad x_2 = \frac{26}{7}$$

Alteração em coeficientes da Função Objetivo

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

- A alteração em um dos coeficientes da função objetivo provoca uma alteração no coeficiente angular (inclinação) da reta que define a função objetivo

- Visualmente podemos notar que se a variação na inclinação for pequena, a solução ótima não sofrerá alteração

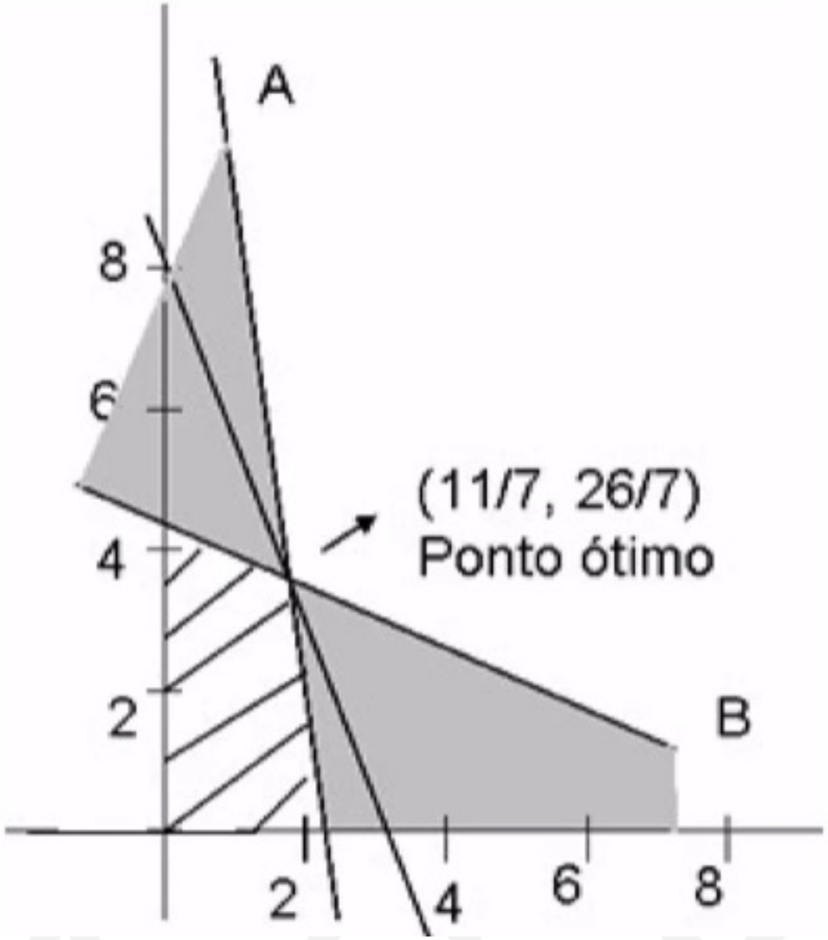
- Contudo, o calor máximo (Z) a ser produzido pela solução ótima será diferente, independente da solução ótima

Alteração em coeficientes da Função Objetivo

- As retas A, B e a função objetivo pertencem a uma família de retas que tem o ponto (11/7; 26/7) em comum

- A diferença entre as retas está no coeficiente angular

- Enquanto o coeficiente angular estiver entre os coeficientes das retas que determinam a solução ótima, ela não será alterada



Alteração em coeficientes da Função Objetivo

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

- Representando matematicamente:

Declividade da Linha A	$\leq$	Declividade da Função Objetivo	$\leq$	Declividade da Linha B
$4x_1 + x_2 = 10$				$x_1 + 2x_2 = 9$
$x_2 = -4x_1 + 10$				$x_2 = (-1/2)x_1 + 9/2$
-4	$\leq$	Declividade da Função Objetivo	$\leq$	-0,5

- De uma forma geral, podemos obter o valor do coeficiente angular de uma função objetivo por. $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ ou por $x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{Z}{c_2}$

- Isto é, o coeficiente angular é dado por: $-\frac{c_1}{c_2}$

Alteração em coeficientes da Função Objetivo

- Em nosso caso queremos: $-4 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0{,}5$ $x_2 = -4x_1 + 10$ $x_2 = (-1/2)x_1 + 9/2$

- A análise supõe que apenas um dos coeficientes da função objetivo poderá sofrer alterações de cada vez. Supondo primeiramente que apenas C1 sofrerá alteração, este poderá variar de

$$1 \leq c_1 \leq 8.$$

- Obteremos estes limites da seguinte forma

$$-4 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0{,}5 \qquad \text{Para } c_2 = 2 \text{ temos:}$$

$$-4 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c_1}{2} \geq -4 \Leftrightarrow c_1 \leq 8 \\ -\frac{c_1}{2} \leq -0{,}5 \Leftrightarrow c_1 \geq 1 \end{cases}$$

Alteração em coeficientes da Função Objetivo

- Agora, apenas C2 sofrerá alteração

$$-4 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0{,}5 \qquad \text{Para } c_1 = 5 \text{ temos:}$$

$$-4 \leq -\frac{5}{c_2} \leq -0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{c_2} \geq -4 \Leftrightarrow c_2 \geq \dfrac{5}{4} \text{ (para } c_2 \geq 0) \\ -\dfrac{5}{c_2} \leq -0{,}5 \Leftrightarrow c_2 \leq 10 \text{ (para } c_2 \geq 0) \end{cases}$$

- Logo:

$$\frac{5}{4} \leq c_2 \leq 10$$

Alteração do valor da constante da restrição

- Uma mudança em qualquer das constantes da restrição pode também alterar a solução ótima de um problema

- Esta mudança geralmente acarreta em uma alteração no conjunto de soluções viáveis, aumentando ou diminuindo o mesmo

- A alteração resultante no valor da função objetivo devido ao incremento de uma unidade na constante de uma restrição é denominada preço-sombra (shadow-price)

- A interpretação do preço-sombra é feita as vezes de custos ou receitas marginais, dependendo das variáveis envolvidas

NMR

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

NMR

Até a prátia é amada!
E você ai heim?
Sem ninguém!

Ana Maria Braga

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

Alteração do valor da constante da restrição

- Consideramos o problema abaixo, onde alteramos o problema inicial modificando o valor da constante de segunda restrição de 9 (original) para 15.

$$Max\ Z = \boxed{15}x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

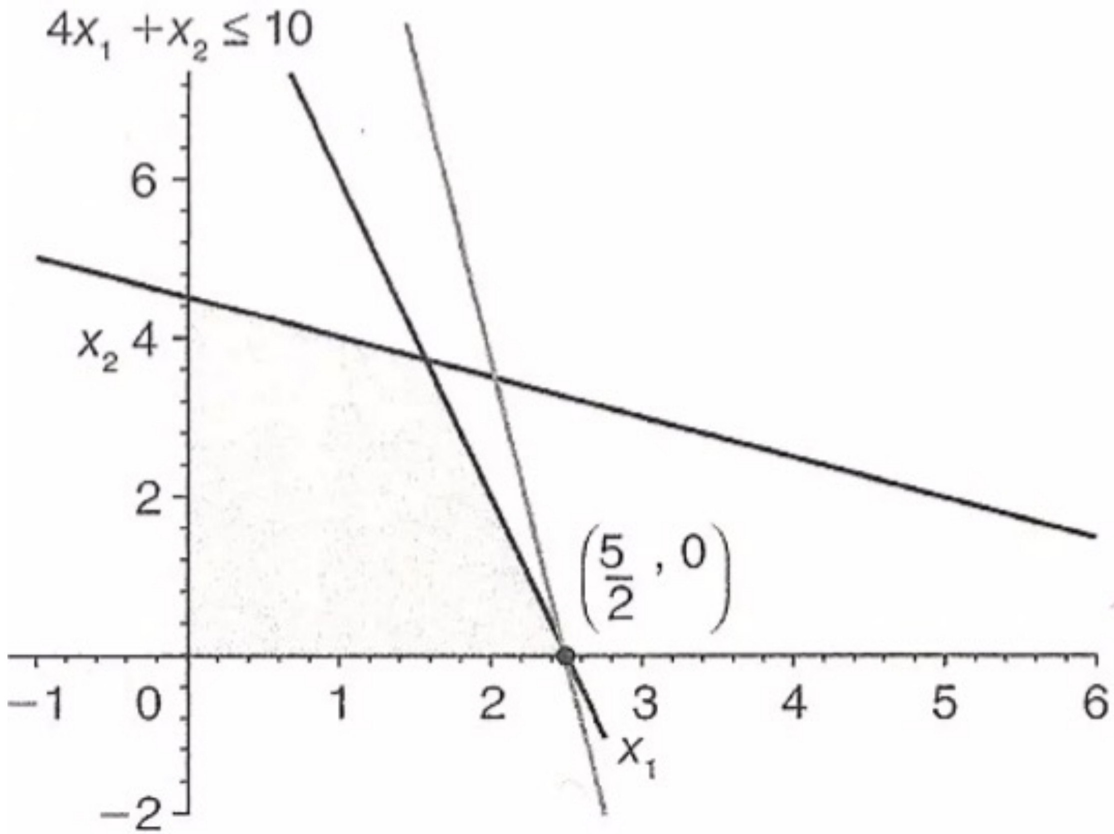
UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

Alteração do valor da constante da restrição

- O gráfico mostra o efeito da modificação da constante e a diferença no conjunto de soluções viáveis

- Note que a mudança não alterou a solução ótima, pois esta restrição não limita a solução

- As duas restrições que limitam a solução ótima são $4x_1 + x_2 \leq 10$ e $x_1 \geq 0$.



Alteração do valor da constante da restrição

- Agora alteraremos a constante da primeira restrição, de 10 (valor original) para 15

- Como esta restrição limita a solução ótima, então o valor será alterado

$$Max\ Z = 15x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

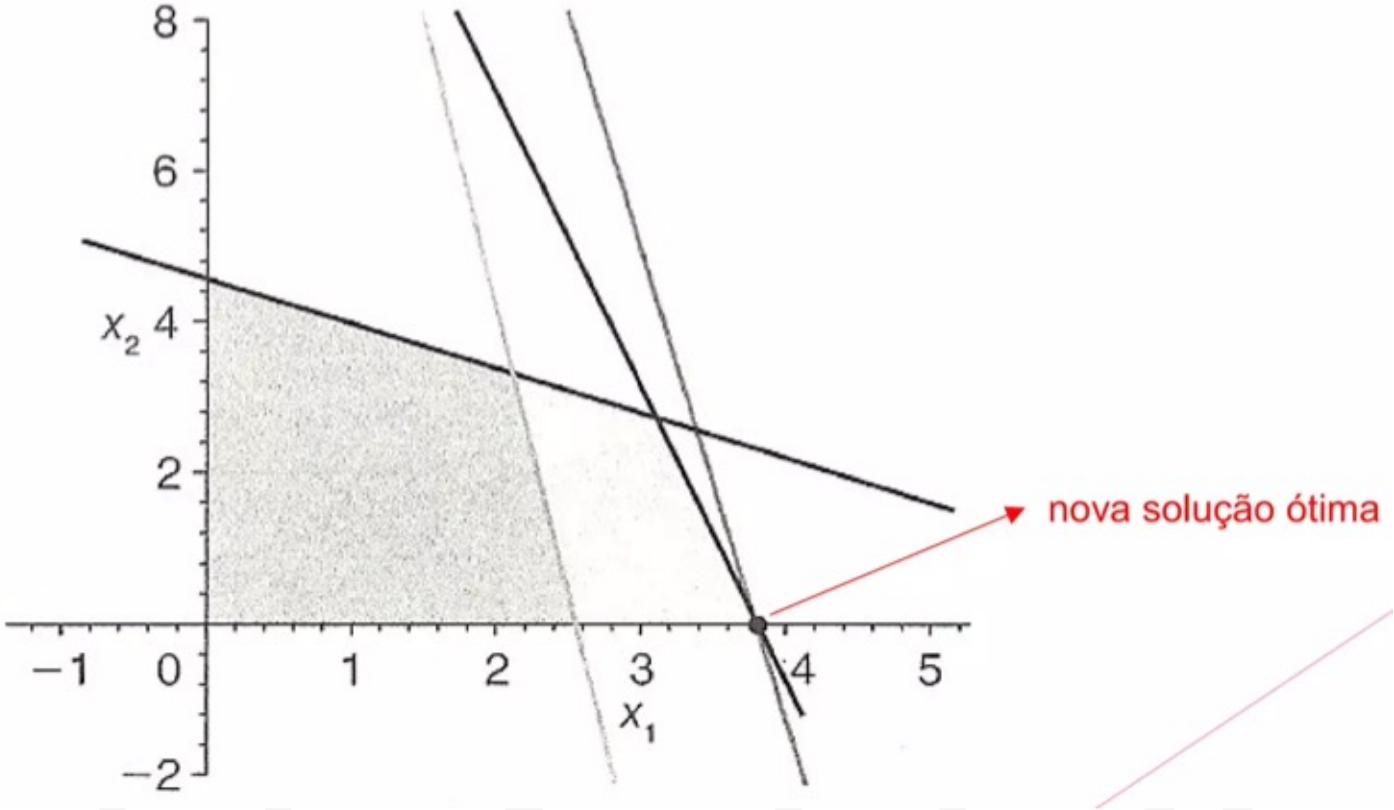
$$4x_1 + x_2 \leq \boxed{15}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Alteração do valor da constante da restrição

- No gráfico abaixo, vemos a alteração do conjunto de soluções viáveis e da solução ótima



Alteração do valor da constante da restrição

- A alteração de cinco unidades da constante da primeira restrição (10 para 15) provocou uma alteração no valor máximo da função objetivo de 37,5 para 56,75. Logo, o preço sombra deste recurso pode ser obtido como:

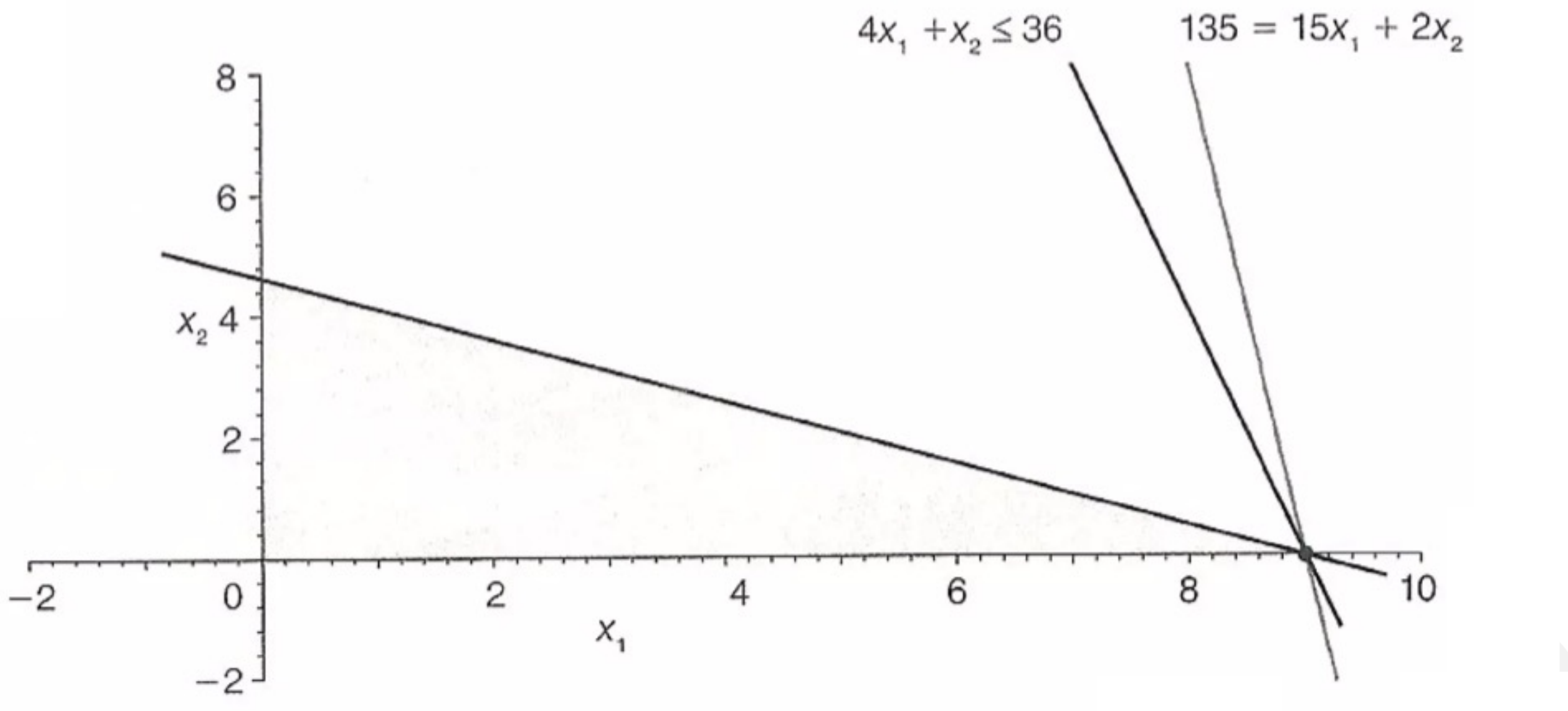
$$\text{Preço-sombra} = \frac{56,25 - 37,50}{5} = 3,75$$

- Uma alteração de 26 unidades da constante da primeira restrição (10 para 36) provocou uma alteração no valor máximo da função objetivo de 37,5 para 135. Logo, o preço sombra deste recurso pode ser obtido como:

$$\text{Preço-sombra} = \frac{135 - 37,50}{5} = 3,75$$

Alteração do valor da constante da restrição

- Assim, podemos perceber que o valor do preço-sombra é o mesmo. Isto acontece dentro de um intervalo de valores. Vejamos a solução gráfica desta segunda alteração

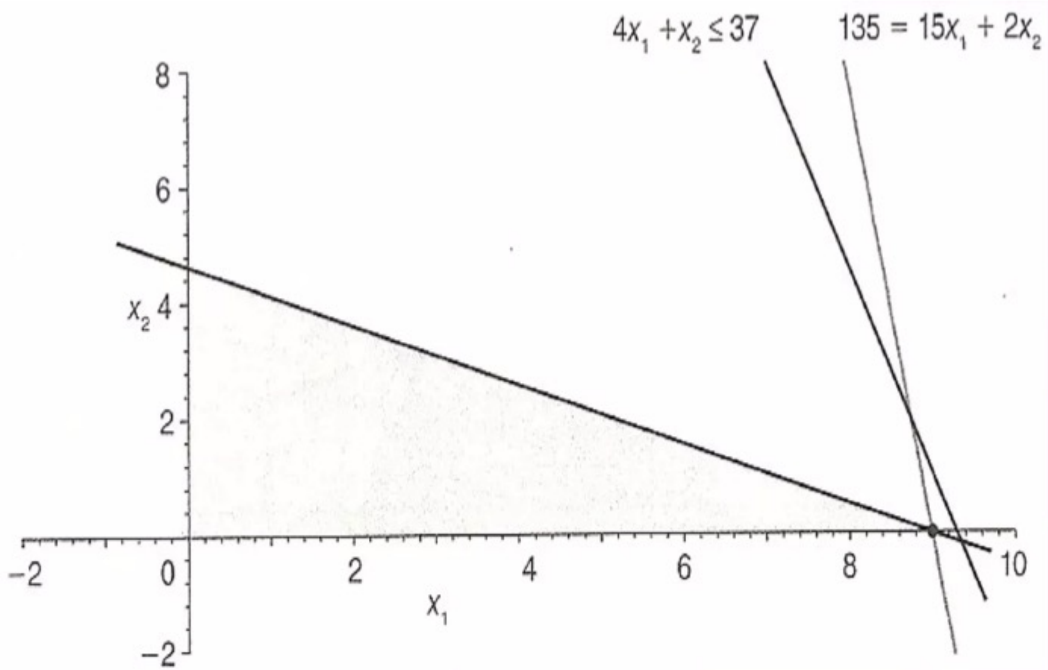


Alteração do valor da constante da restrição

- Agora faremos uma nova alteração, aumentando o valor da constante para 37 (ou qualquer número maior que 36)

- O valor da função objetivo continuará o mesmo

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 15x1 + 2x2 \\
&\text{s.r.} \quad 4x1 + x2 \leq \boxed{37} \\
&\qquad\quad x1 + 2x2 \leq 9 \\
&\qquad x1 \geq 0 \text{ e } x2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Alteração do valor da constante da restrição

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

- Logo:

$$\text{Preço-sombra} = \frac{135-135}{1} = 0{,}00$$

- A primeira restrição deixou de ser limitante da solução ótima

- As restrições limitantes agora são: $x_1 + 2x_2 \leq 9$ e $x_1 \geq 0.$

- Enquanto a restrição continuar como limitante da solução ótima, o preço sombra permanece o mesmo, tornando-se zero quando ela deixar de ser limitante da solução ótima

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

FDS

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

Fofoca Da Semana

FUTRIQUEI

🚨 AGORA: Sandy e Lucas Lima, que se separaram em setembro, resolveram reatar o casamento, que já dura mais de 25 anos.

Dado o PPL abaixo, faça a análise de sensibilidade

$$Max\ Z = 180\ x_1 + 320\ x_2$$

$$Sujeito\ a:$$

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

Dúvidas?