UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

CURSO DE ENGENHARIA

Disciplina: Limite e Derivada de uma Variável Real

Limite de uma função

Anápolis

CURSO DE ENGENHARIAS

Disciplina: Limite e Derivada de uma Variável Real

Limite de uma função

OBJETIVOS:

- Conceituar limites de uma função.
- Resolver limites por aproximações numéricas e gráficas.

CURSO DE ENGENHARIAS

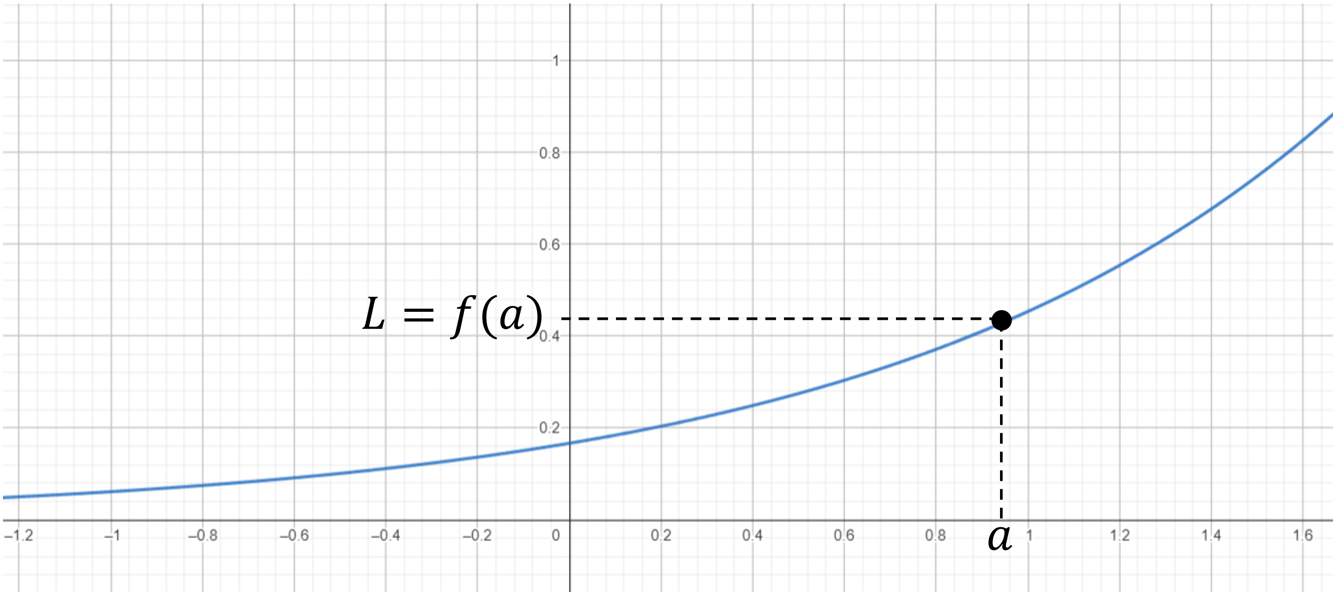
Disciplina: Limite e Derivada de uma Variável Real

Limite de uma função

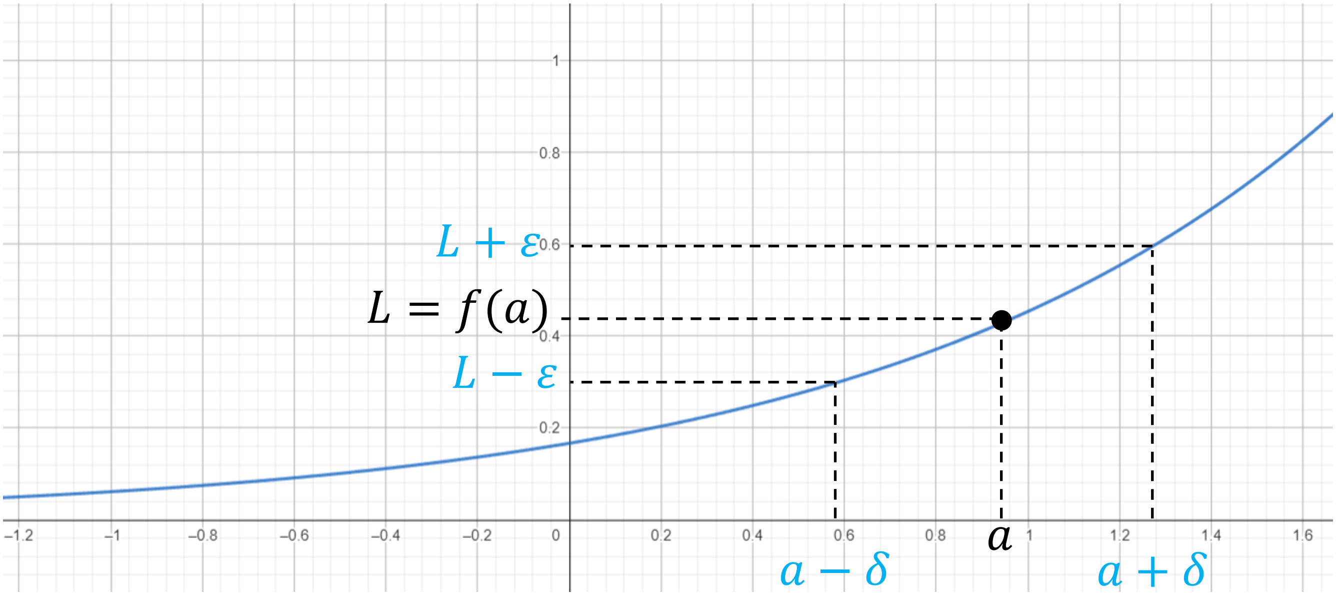
REFERÊNCIAS:

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006

Caso 1

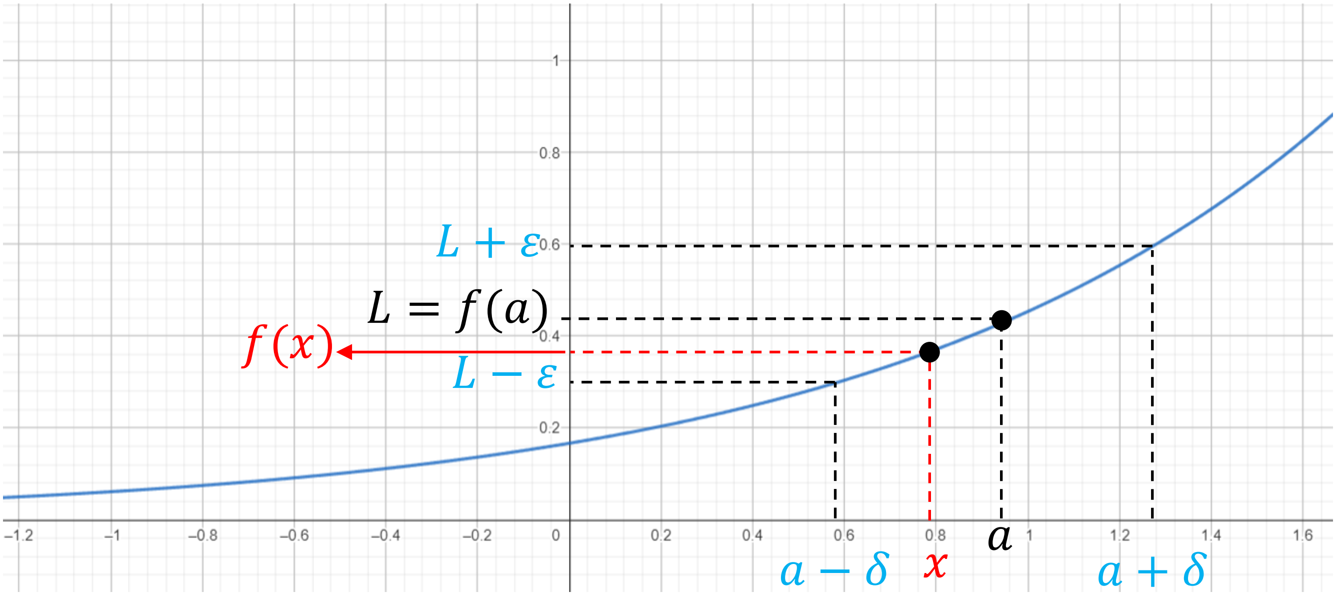


Caso 1



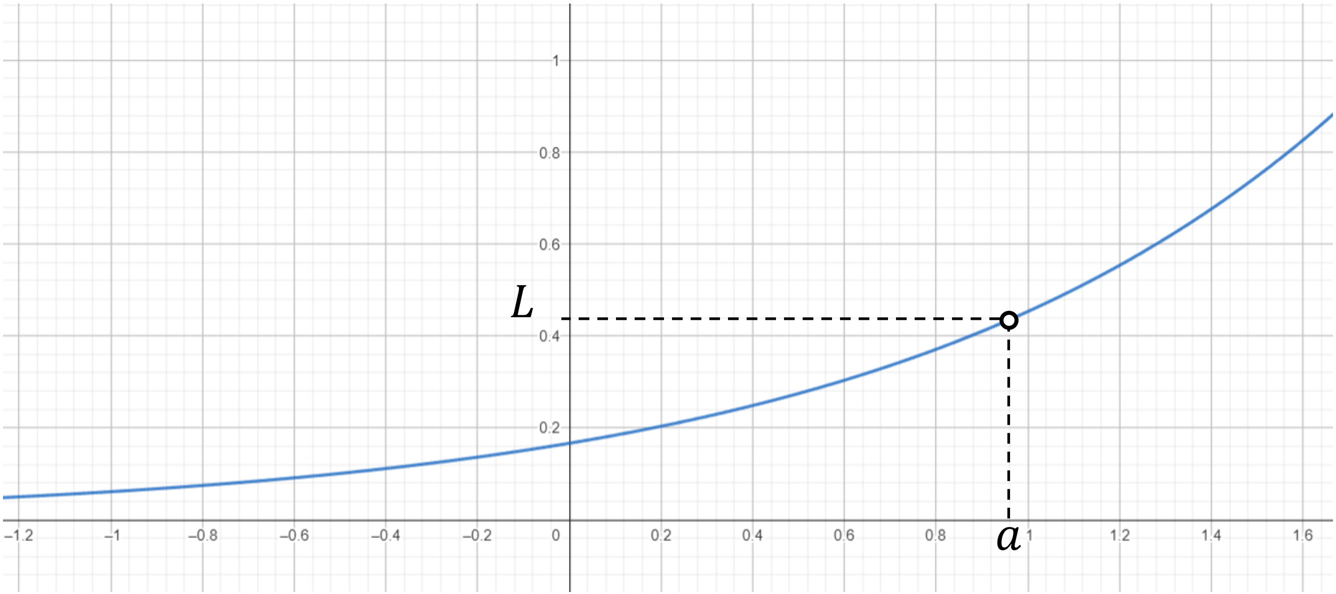
$L+\varepsilon$
$L=f(a)$
$L-\varepsilon$
$a-\delta$
a
$a+\delta$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Caso 1

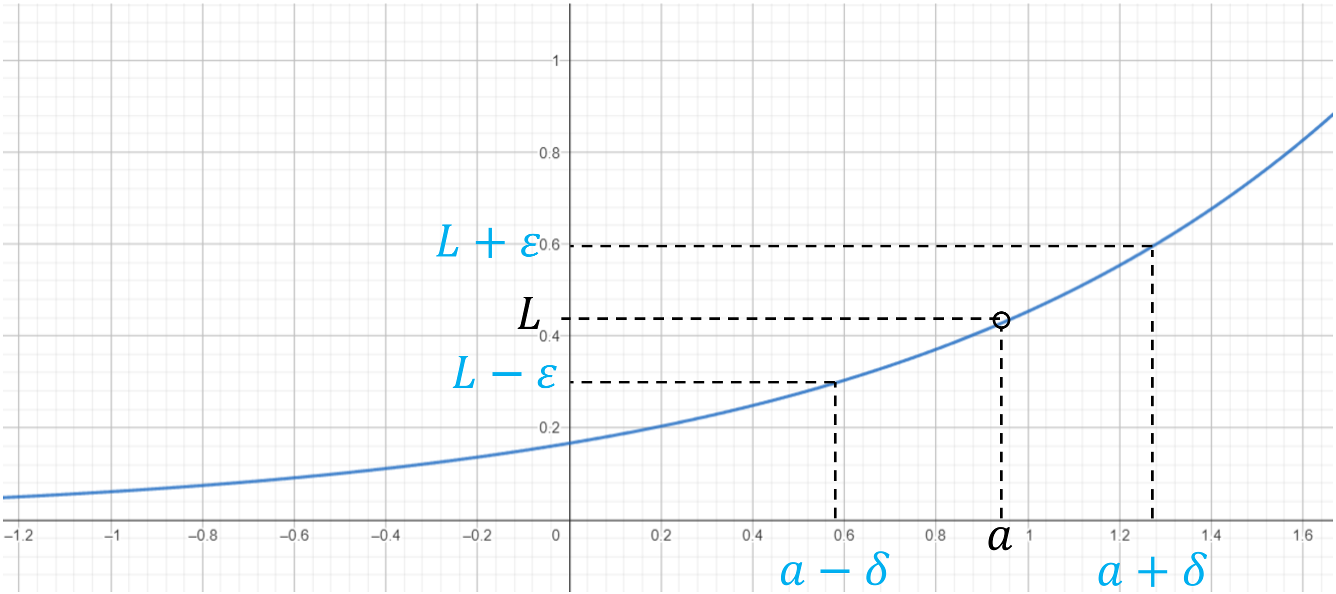


$L + \varepsilon$
$L = f(a)$
$f(x)$
$L - \varepsilon$
$a - \delta$
x
a
$a + \delta$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
–1.2
–1
–0.8
–0.6
–0.4
–0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Caso 2

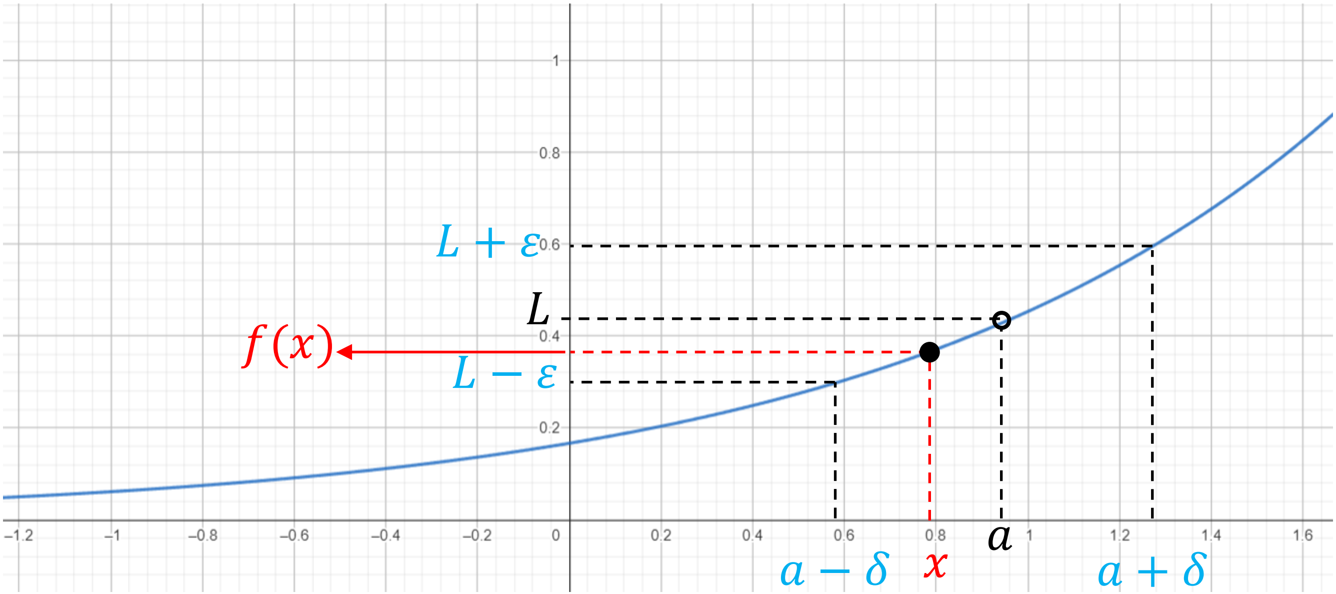


Caso 2

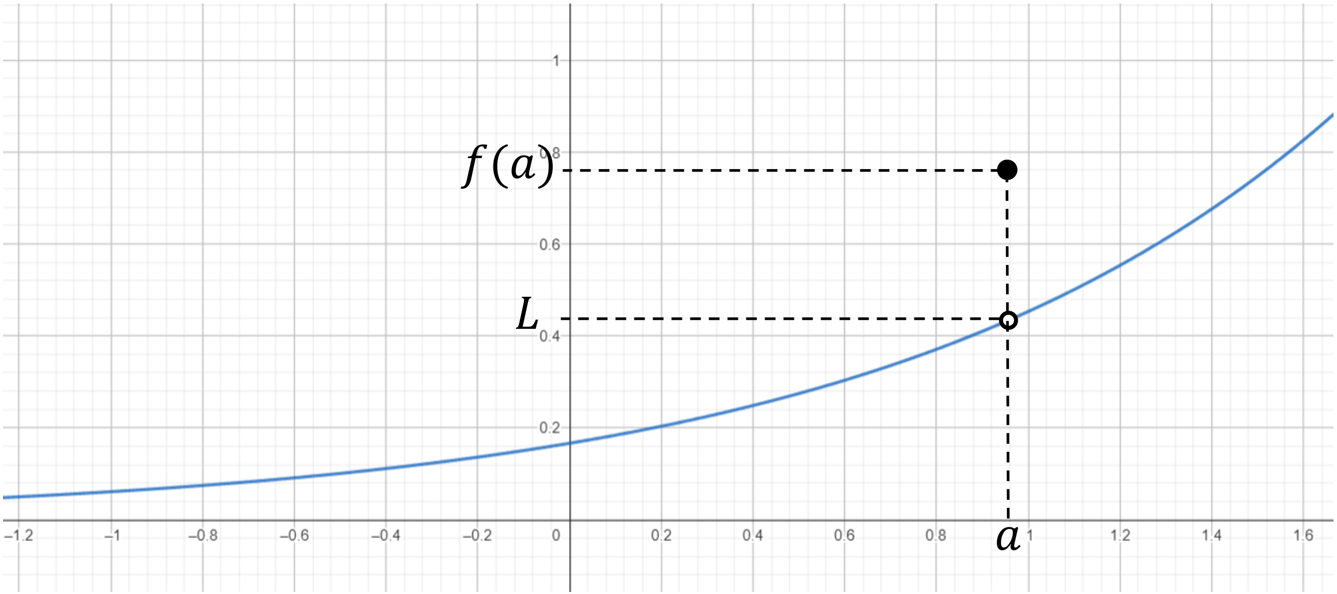


$L + \varepsilon$
L
$L - \varepsilon$
$a - \delta$
a
$a + \delta$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
–1.2
–1
–0.8
–0.6
–0.4
–0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

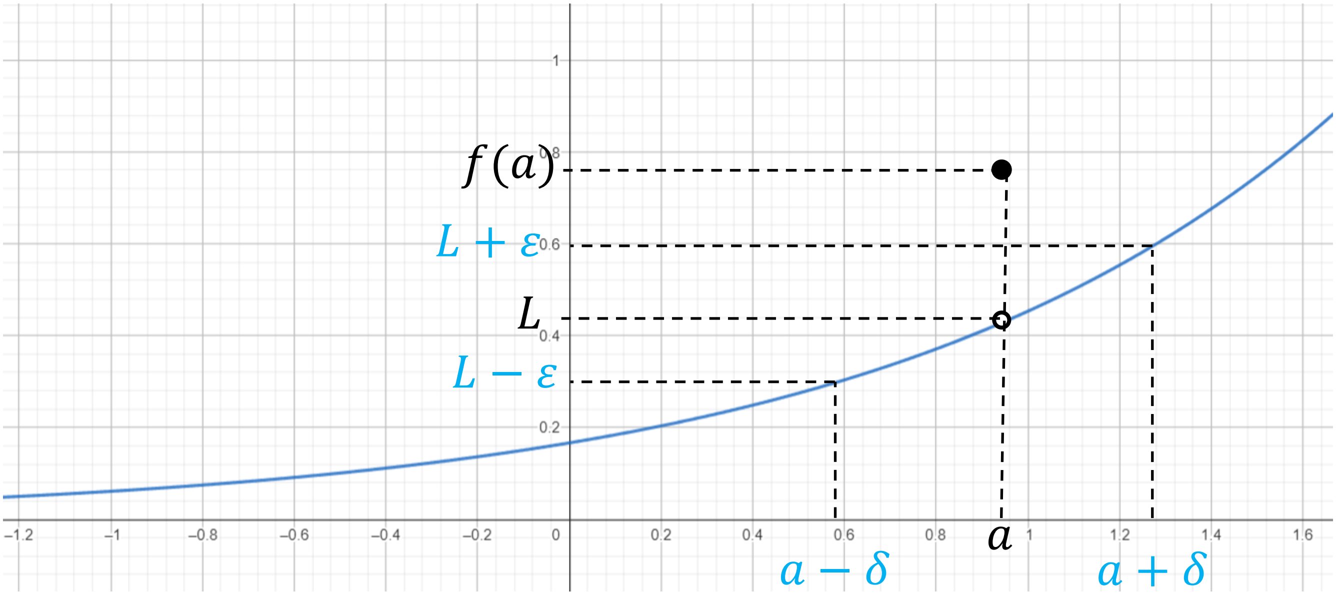
Caso 2


1
0.8
0.6
0.4
0.2
$L + \varepsilon$
L
$f(x)$
$L - \varepsilon$
–1.2
–1
–0.8
–0.6
–0.4
–0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
a
$a - \delta$
x
$a + \delta$

Caso 3

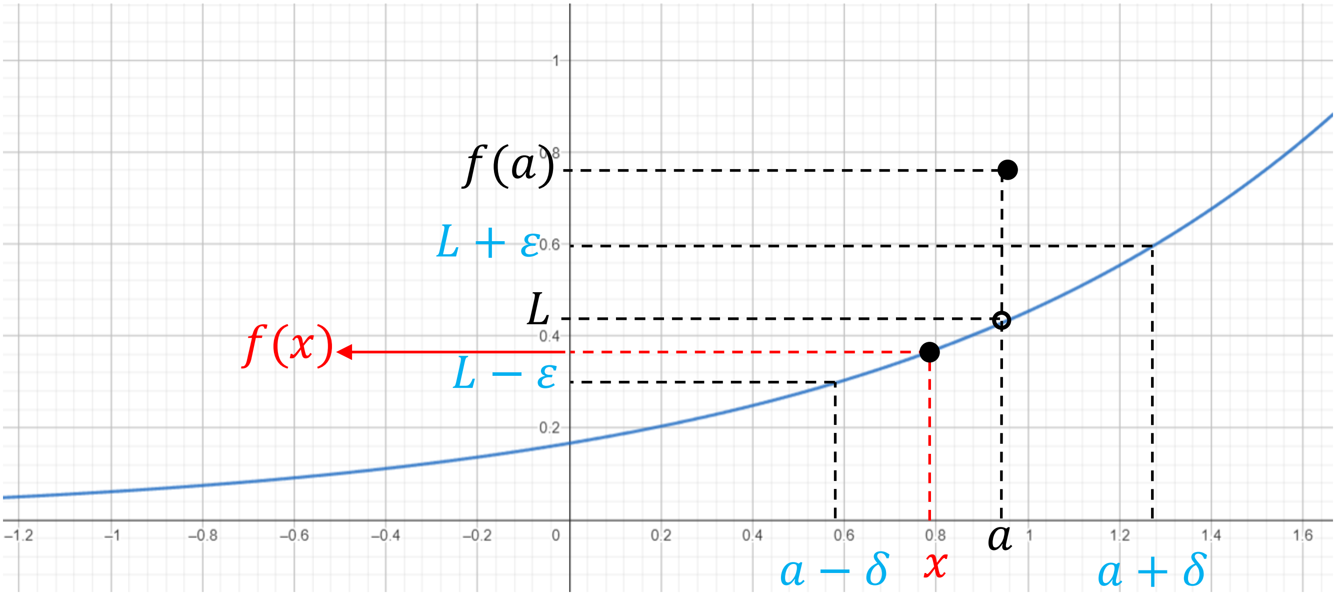


Caso 3



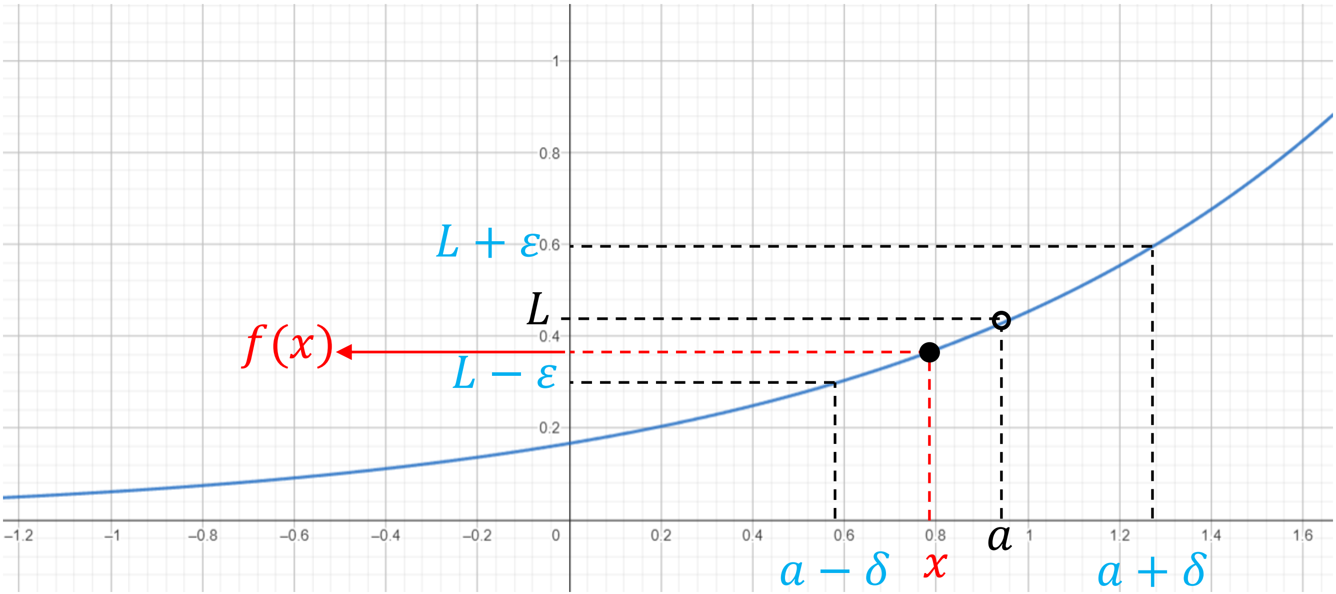
$f(a)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
$a-\delta$
a
$a+\delta$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Caso 3



$f(a)$
$L+\varepsilon$
L
$f(x)$
$L-\varepsilon$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
a
1
1.2
1.4
1.6
$a-\delta$
x
$a+\delta$

Definição



Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto contendo **a**, podendo não estar definida em **a**, temos:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Propriedades dos limites

Propriedade da multiplicação por constante

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

"O limite da função multiplicada por uma constante é igual a constante multiplicada pelo limite"

Exemplo:

$$\lim_{x \to 5} [2 \cdot \log_2 x] = 2 \cdot \lim_{x \to 5} \log_2 x$$

Propriedade do Produto

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

"O limite do produto é o produto dos limites"

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0} [e^{2x} \cdot \cos x^2] = \lim_{x \to 0} e^{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x^2$$

Propriedades dos limites

Propriedade do Quociente $\left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

"O limite do quociente é o quociente dos limites"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3 + \sqrt[4]{x}}{e^x}\right] = \frac{\lim_{x\to 1}(x^3 + \sqrt[4]{x})}{\lim_{x\to 1} e^x}$$

Propriedade da Potência

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \quad (n \in \mathbb{R})$$

"O limite da potência é a potência do limite"

Exemplo:

$$\lim_{x\to -1}[2x+1]^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(2x+1)\right]^{10}$$

Limites infinitos

Como motivação para o estudo de **limites infinitos**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Pergunta: Quando x tende a 2, o que acontece com $f(x)$?

Limites infinitos

Como motivação para o estudo de **limites infinitos**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Pergunta: Quando x tende a 2, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2.

Limites infinitos

Como motivação para o estudo de **limites infinitos**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Pergunta: Quando x tende a 2, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2.

x	$f(x)$
1,9	100
1,99	10.000
1,999	1.000.000
1,9999	100.000.000

x	$f(x)$
2,1	100
2,01	10.000
2,001	1.000.000
2,0001	100.000.000

Limites infinitos

Como motivação para o estudo de **limites infinitos**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Pergunta: Quando x tende a 2, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2.

x	$f(x)$
1,9	100
1,99	10.000
1,999	1.000.000
1,9999	100.000.000

x	$f(x)$
2,1	100
2,01	10.000
2,001	1.000.000
2,0001	100.000.000

Resposta: Ao aproximarmos x de 2, os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores, ou seja, tendem a infinito.

Limites infinitos

Matematicamente, se representa o comportamento da função

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela esquerda é igual a mais infinito.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela direita é igual a mais infinito.

De forma semelhante, se pode concluir que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

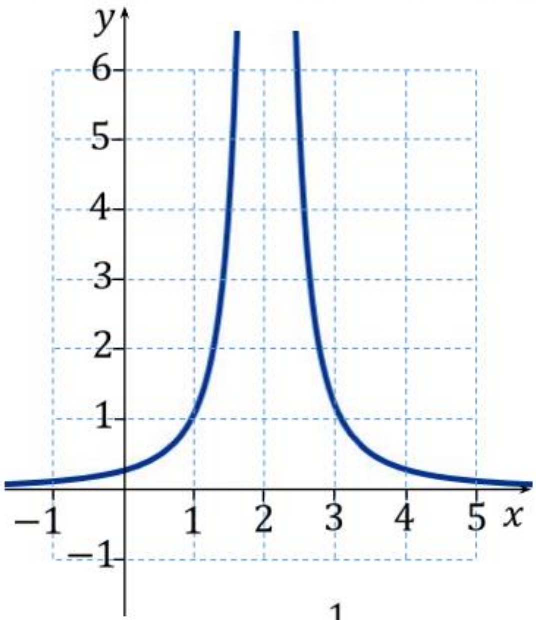
Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela esquerda é igual a menos infinito.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

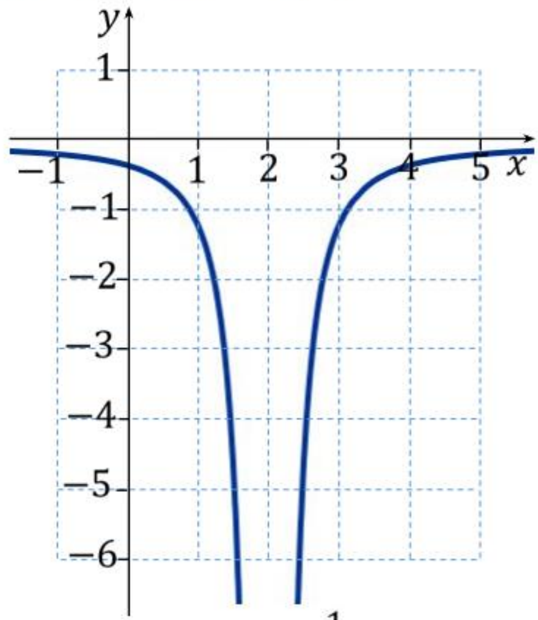
Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela direita é igual a menos infinito.

Limites infinitos

Os gráficos das funções do exemplo anterior são dados por:



$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$



$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Note que, em ambos os casos, as funções tendem a infinito quando x se aproxima de 2.

Limites infinitos

No geral, tem-se:

Expressão	Significado	Se lê
$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela esquerda.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a mais (ou menos) infinito.
$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela direita.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a mais (ou menos) infinito.
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a mais (ou menos) infinito.

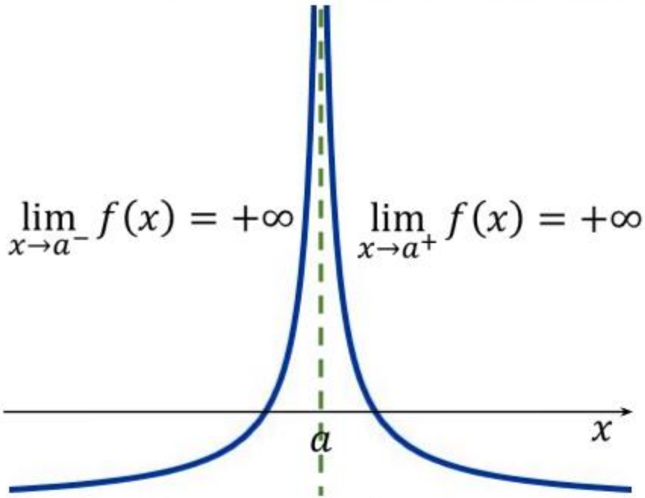
Assíntotas verticais

Se pelo menos um dos casos abaixo acontece

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

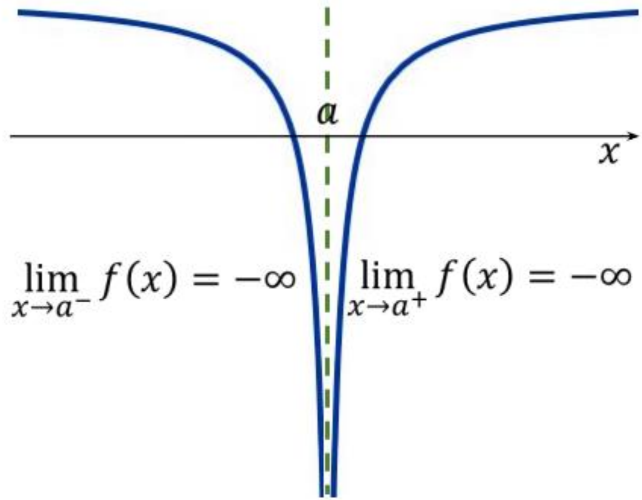
então a reta $x = a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico de f.

Graficamente, as assíntotas verticais são geralmente representadas por retas verticais tracejadas, como nas figuras abaixo.



Assíntota vertical em $x = a$.

Assíntota vertical em $x = a$.



Assíntotas verticais

Exemplo: Com base no gráfico abaixo, determine:

(a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to -3} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

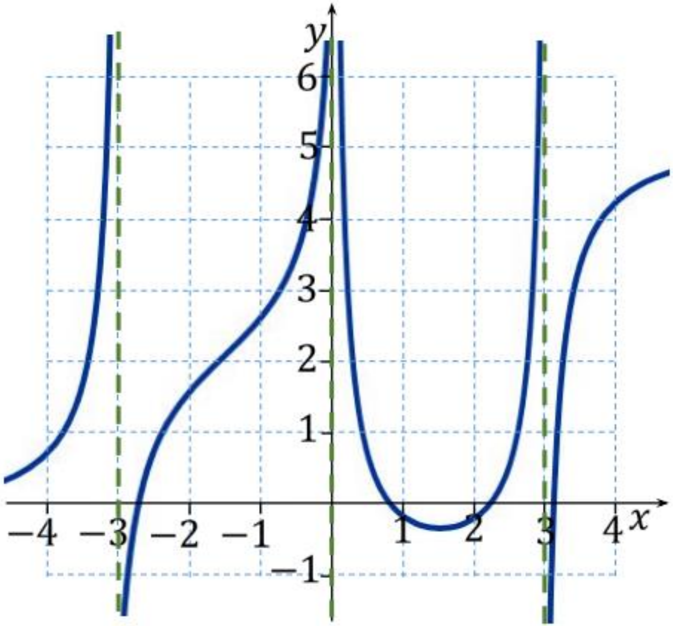
(e) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(f) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

(h) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(i) $\lim_{x\to 3} f(x)$



(j) As assíntotas verticais: $x = -3, x = 0$ e $x = 3$

Assíntotas verticais

Exemplo: Com base no gráfico abaixo, determine:

(a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ $+\infty$

(b) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ $-\infty$

(c) $\lim_{x \to -3} f(x)$ $\nexists$

(d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ $+\infty$

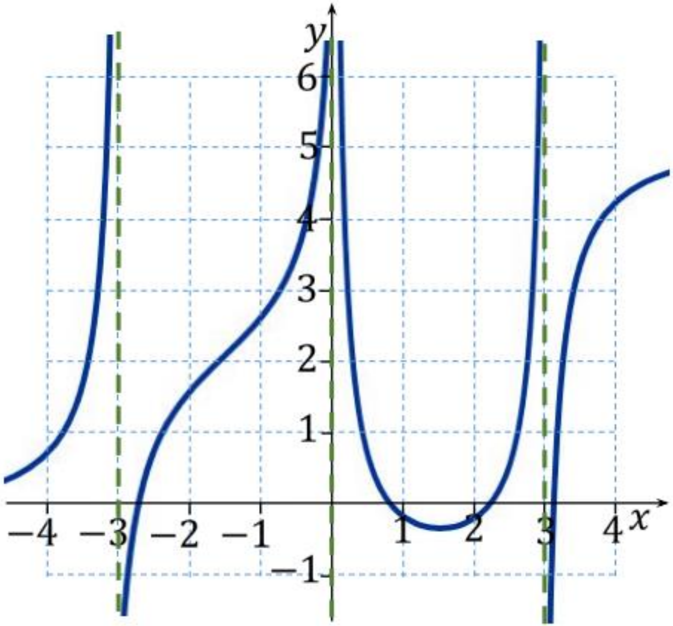
(e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ $+\infty$

(f) $\lim_{x \to 0} f(x)$ $+\infty$

(g) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ $+\infty$

(h) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ $-\infty$

(i) $\lim_{x \to 3} f(x)$ $\nexists$



(j) As assíntotas verticais: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$

Assíntotas verticais

Exemplo: Considere o gráfico da função

$$y = \frac{1}{x}$$

Determine:

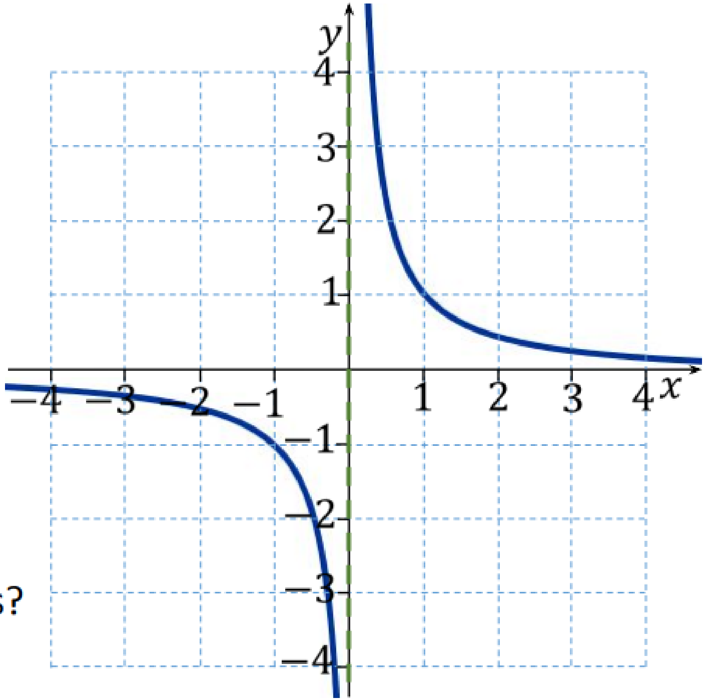
(a) $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)$

(d) Esta função possui assíntotas verticais?

Sim, uma assíntota vertical em $x = 0$.



Limites infinitos e funções quocientes

Observação: Lembre que, quando dividimos um número positivo por números positivos próximos de zero, o resultado da divisão será um número muito grande.

Exemplo: Dividindo o número 5 por

(a) 1 (b) $0{,}1$ (c) $0{,}01$ (d) $0{,}001$

temos

(a) $\frac{5}{1} = 5$ (b) $\frac{5}{0{,}1} = 50$ (c) $\frac{5}{0{,}01} = 500$ (d) $\frac{5}{0{,}001} = 5000$

Note que, quanto mais próximo de zero está o denominador, maior será o resultado da divisão!!

Um raciocínio análogo pode ser usado quando consideramos o limite de uma função quociente, quando o numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores positivos!!

$$\lim_{x \to a} \frac{\overset{\to\, C>0}{f(x)}}{\underset{\to\, 0^+}{g(x)}} = +\infty$$

O resultado do limite será igual a mais infinito!

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Os limites

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}$$

são infinitos, pois

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x} = +\infty$$

$x+1 \to 1$ O numerador tende a 1.

O limite tende a $+\infty$.

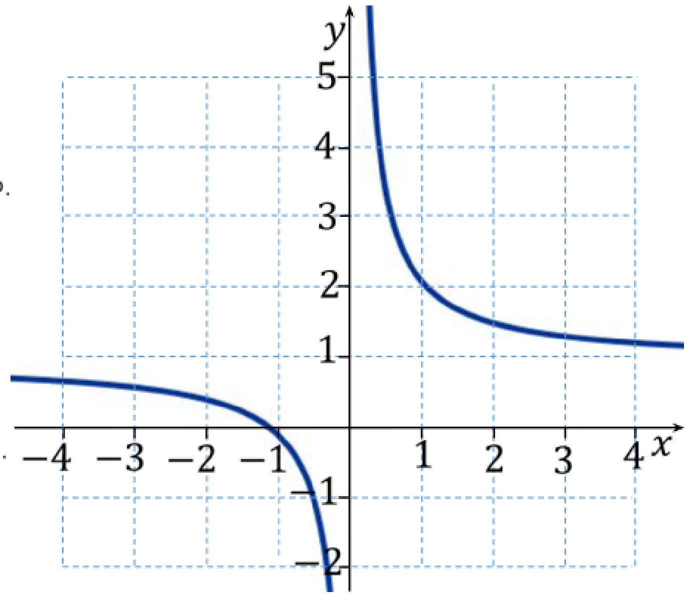
$x \to 0^+$ O denominador tende a zero por valores positivos.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x} = -\infty$$

$x+1 \to 1$ O numerador tende a 1.

O limite tende a $-\infty$.

$x \to 0^-$ O denominador tende a zero por valores negativos.



$$y = \frac{x+1}{x}$$

Limites infinitos e funções quocientes

O quadro a seguir resume o que acontece com as funções quocientes quando o numerador tende a uma constante e o denominador tende a zero:

Descrição	Representação	Resultado
O numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores positivos.	$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) \to C > 0}{g(x) \to 0^+}$	$+\infty$
O numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores negativos.	$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) \to C > 0}{g(x) \to 0^-}$	$-\infty$
O numerador tende a uma constante negativa e o denominador tende a zero por valores positivos.	$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) \to C < 0}{g(x) \to 0^+}$	$-\infty$
O numerador tende a uma constante negativa e o denominador tende a zero por valores negativos.	$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) \to C < 0}{g(x) \to 0^-}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

"$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2}{x-2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 2}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{-4}{1+x}$

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 2}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2}{x-2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{-4}{1+x}$

Solução: Note que em todos os casos o numerador tende a uma constante e o denominador tende a zero. Portanto, todos os limites são infinitos.

Para determinar se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$, precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{2x+1}^{3>0}}{\underbrace{x-1}_{0^+}} = +\infty$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\cos x - 2}^{-1<0}}{\underbrace{x}_{0^+}} = -\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x^2+2}^{6>0}}{\underbrace{x-2}_{0^-}} = -\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{-4}^{-4<0}}{\underbrace{1+x}_{0^-}} = +\infty$

Limites infinitos e funções quocientes

Descrição	Representação	Resultado
O numerador tende a mais infinito e o denominador tende a uma constante positiva.	$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \to +\infty}{g(x) \to C > 0}$	$+\infty$
O numerador tende a menos infinito e o denominador tende a uma constante positiva.	$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \to -\infty}{g(x) \to C > 0}$	$-\infty$
O numerador tende a mais infinito e o denominador tende a uma constante negativa.	$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \to +\infty}{g(x) \to C < 0}$	$-\infty$
O numerador tende a menos infinito e o denominador tende a uma constante negativa.	$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \to -\infty}{g(x) \to C < 0}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

"$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{2x}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2-5x+1}$ (c) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\cot x}{3-x}$ (d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\cos x - 2}$

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{2x}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2-5x+1}$ (c) $\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cot x}{3-x}$ (d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\cos x-2}$

Solução: Note que em todos os casos o numerador tende a infinito e o denominador tende a uma constante. Portanto, todos os limites são infinitos.

Para determinar se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$, precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador.

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{+\infty}{\cancel{\tan x}}}{\underset{\pi \geq 0}{\cancel{2x}}} = +\infty$

(c) $\lim_{x\to\pi^+} \frac{\overset{+\infty}{\cancel{\cot x}}}{\underset{3-\pi \leq 0}{\cancel{3-x}}} = -\infty$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{-\infty}{\cancel{\ln x}}}{\underset{1 \geq 0}{\cancel{x^2-5x+1}}} = -\infty$

(d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}}{\underset{-1 \leq 0}{\cancel{\cos x-2}}} = +\infty$

Limites no infinito

Como motivação para o estudo de **limites no infinito**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Pergunta: Quando x tende a $-\infty$ ou $+\infty$, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$.

x	*f(x)*
−10	-0,1
−100	-0,01
−1.000	-0,001
−10.000	-0,0001
−100.000	-0,00001

x	*f(x)*
10	0,1
100	0,01
1.000	0,001
10.000	0,0001
100.000	0,00001

Resposta: Ao fazermos $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$, aparentemente os valores de $f(x)$ se tornam cada vez mais próximos de 0.

Limites no infinito

O gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

está representado ao lado.

Note que:

Se $x \longrightarrow -\infty$ então $f(x) \longrightarrow 0.$

Se $x \longrightarrow +\infty$ então $f(x) \longrightarrow 0.$

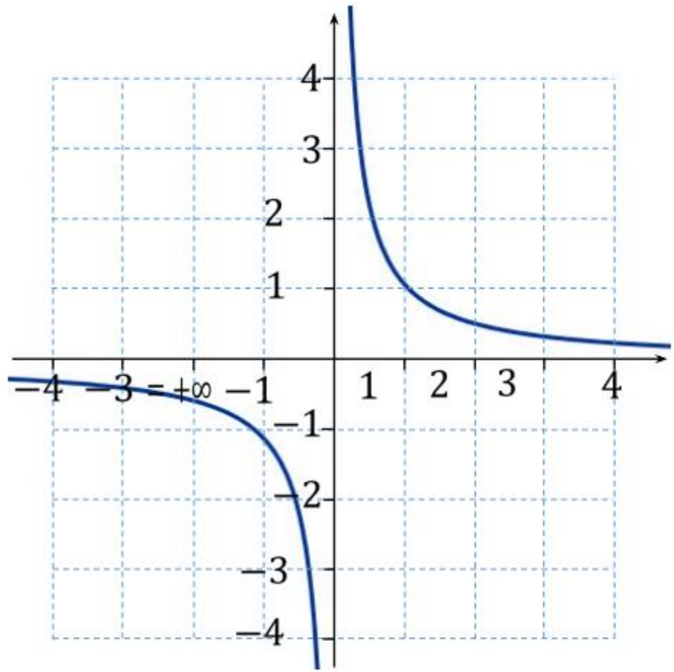
Em geral, se escreve:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a 0.



Esta função é chamada de **função recíproca**.

Limites no infinito

No geral, limites do tipo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Os valores de x diminuem sem cota, isto é, x tende a menos infinito.

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Os valores de x aumentam sem cota, isto é, x tende a mais infinito.

são chamados de **limites no infinito**.

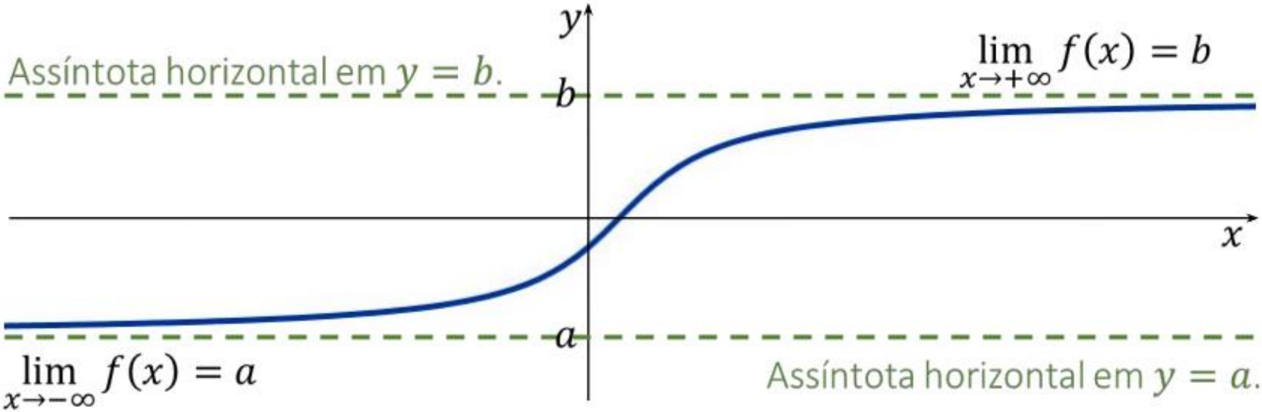
Assíntotas horizontais

Se os limites no infinito existem, e digamos,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

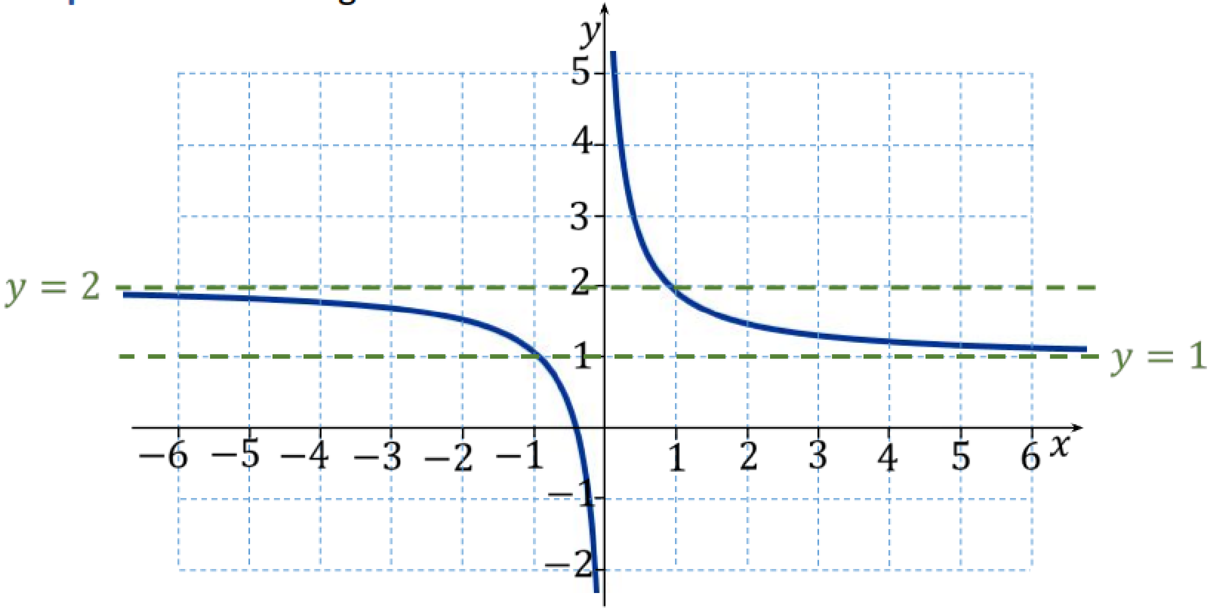
então as retas $y = a$ e $y = b$ são chamadas de assíntotas horizontais do gráfico de f.

Graficamente, as assíntotas horizontais são geralmente representadas por retas horizontais tracejadas, como nas figuras abaixo.



Assíntotas horizontais

Exemplo: Considere o gráfico abaixo.



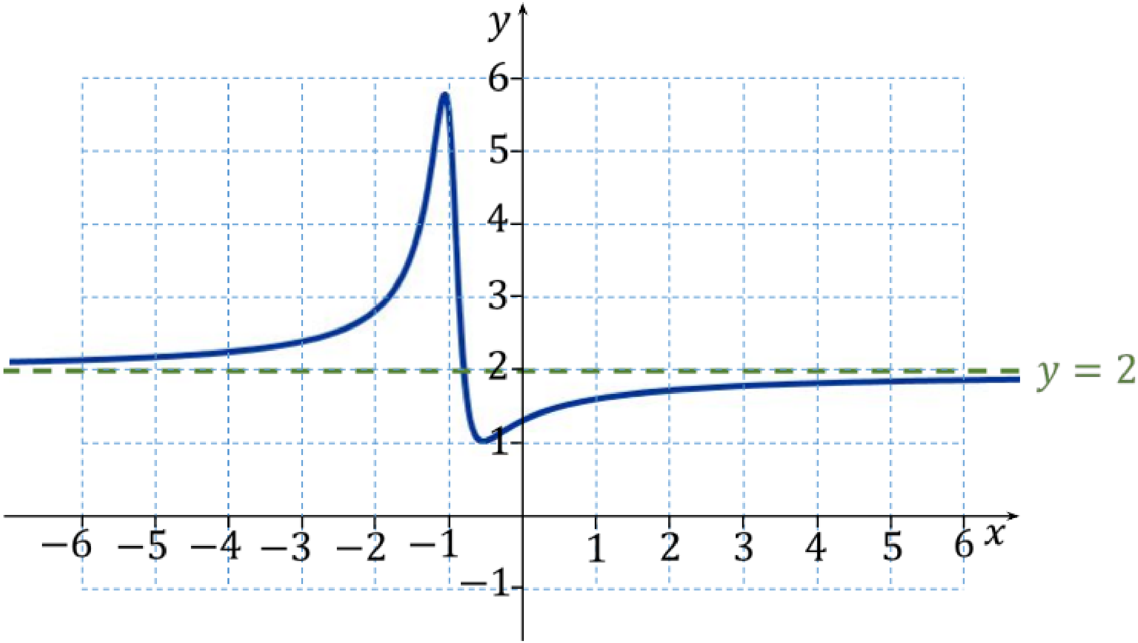
Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

então este gráfico possui duas assíntotas horizontais, dadas por $y = 1$ e $y = 2$.

Assíntotas horizontais

Exemplo: Considere o gráfico abaixo.



Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

então este gráfico possui uma única assíntota horizontal, dada por $y = 2$.

Limites no infinito e funções quocientes

Teorema: Se r for um número racional positivo, então:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

quando for possível calcular este limite para $x \longrightarrow -\infty$.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}$ (c) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^5} + 2\right)$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)$

Limites no infinito e funções quocientes

Teorema: Se r for um número racional positivo, então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^r}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

quando for possível calcular este limite para $x \longrightarrow -\infty$.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^5}+2\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2}\right)$

Solução:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x}}=5\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=5\cdot 0=0$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^5}}}+2\right)=2$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x}}}+\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}\right)=1$

Limites infinitos no infinito

Como motivação para o estudo de **limites infinitos no infinito**, considere a função

$$f(x) = x^2$$

Pergunta: Quando x tende a $-\infty$ ou $+\infty$, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$.

x	$f(x)$
−10	100
−100	10.000
−1.000	1.000.000
−10.000	100.000.000

x	$f(x)$
10	100
100	10.000
1.000	1.000.000
10.000	100.000.000

Resposta: Ao fazermos $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$, aparentemente os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores.

Escreve-se

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Limites infinitos no infinito

Matematicamente, se representa o comportamento deste tipo de função como:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a menos infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a mais infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a mais infinito.

Estes limites são chamados de **limites infinitos no infinito**.

Funções polinomiais e funções racionais

Para calcular limites no infinito de funções polinomiais ou funções racionais, basta considerar os **monômios de maior grau**, que são também chamados de **termos dominantes**, para calcular o limite.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1}$

Funções polinomiais e funções racionais

Para calcular limites no infinito de funções polinomiais ou funções racionais, basta considerar os **monômios de maior grau**, que são também chamados de **termos dominantes**, para calcular o limite.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1}$

Solução:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000 = \lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{25x^3}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{25}{3} = \dfrac{25}{3}$

Funções contínuas

Definição: Uma função f é contínua em um número $x = a$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$; 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Do contrário, se diz que a função f é descontínua em $x = a$.

Observação: As condições acima dizem que:

1) $f(a)$ existe.

Quer dizer que o número a pertence ao domínio da função f, ou seja, é possível calcular $f(a)$.

2) Existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Quer dizer que os limites laterais existem e são iguais entre si. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Quer dizer que valores encontrados em 1) e 2) são iguais entre si.

Funções contínuas

Exemplos: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

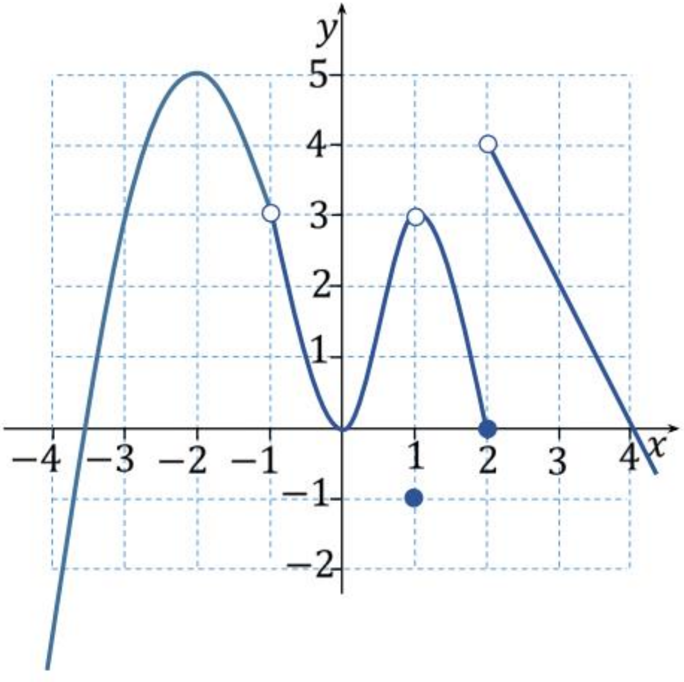
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(a) Como

$$f(-2) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 5$$

então f é contínua em $x = -2$.

(b) Como

$$f(-1) \nexists \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1} f(x) = 3$$

então f é descontínua em $x = -1$.

Fatoração- alguns exemplos

$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$ $\quad a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (quadrado da soma de dois termos)

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ (quadrado da diferença de dois termos)

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

Seno, cosseno e tangente

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Seno	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Questões 1

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x-5}{x^3-7}$

b) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

d) $\lim_{x \to 0} x^2 \left|sen \frac{1}{x}\right|$

e) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [4senx - 2cosx + cotgx]$

f) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2-5t+6}{t-2}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2}$

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-5}{x+8}$

j) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}$

Questões 2

a) $\lim_{x \to 0} (3 - 7x + 5x^2)$

b) $\lim_{x \to -1} [(x + 4)^3 \, (x + 2)^{-1}]$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{4x-1}{x+2}$

d) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+6x+9}{x+3}$

e) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$