UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS

CURSO DE ENGENHARIA

Disciplina: Limite e Derivada de uma Variável Real

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Anápolis – 2021.2

CURSO DE ENGENHARIAS

Disciplina: Limite e Derivada de uma Variável Real

Funções Exponenciais e Logarítmicas

OBJETIVOS:

- Esboçar os gráficos das funções logarítmicas naturais.
- Utilizar as propriedades dos logaritmos para simplificar, expandir e condensar expressões logarítmicas.

CURSO DE ENGENHARIAS

Disciplina: Limite e Derivada de uma Variável Real

Funções Exponenciais e Logarítmicas

REFERÊNCIAS:

RATTAN, K. S.; KLINGBEIL, N. W. Matemática Básica para Aplicações de Engenharia, Tradução de J. R. Souza. Rio de Janeiro: LTC. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521633716/cfi/6/40!/4/2/4@0:0.

Propriedades dos expoentes

$(a+b)^x \neq (a^x + b^x)$

Sejam a e b números positivos.

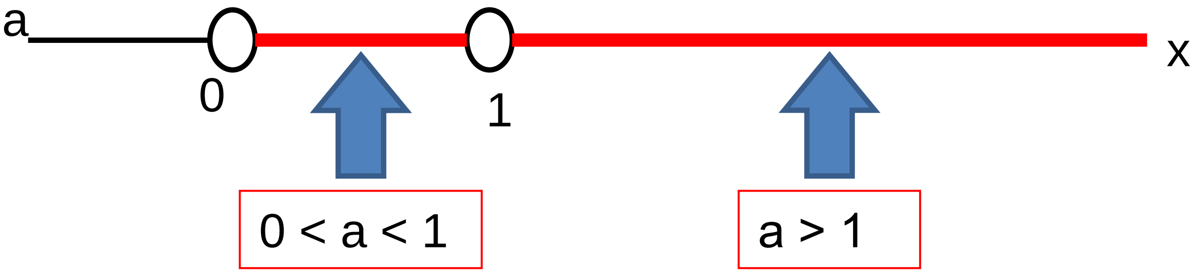
1. $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
7. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Função Exponencial - Definição

$$\underbrace{f : R}_{\text{Domínio}} \to \underbrace{R_+^*}_{\text{CD}}$$

$$f(x) = \underbrace{a}_{\text{Base}}{}^{x}$$

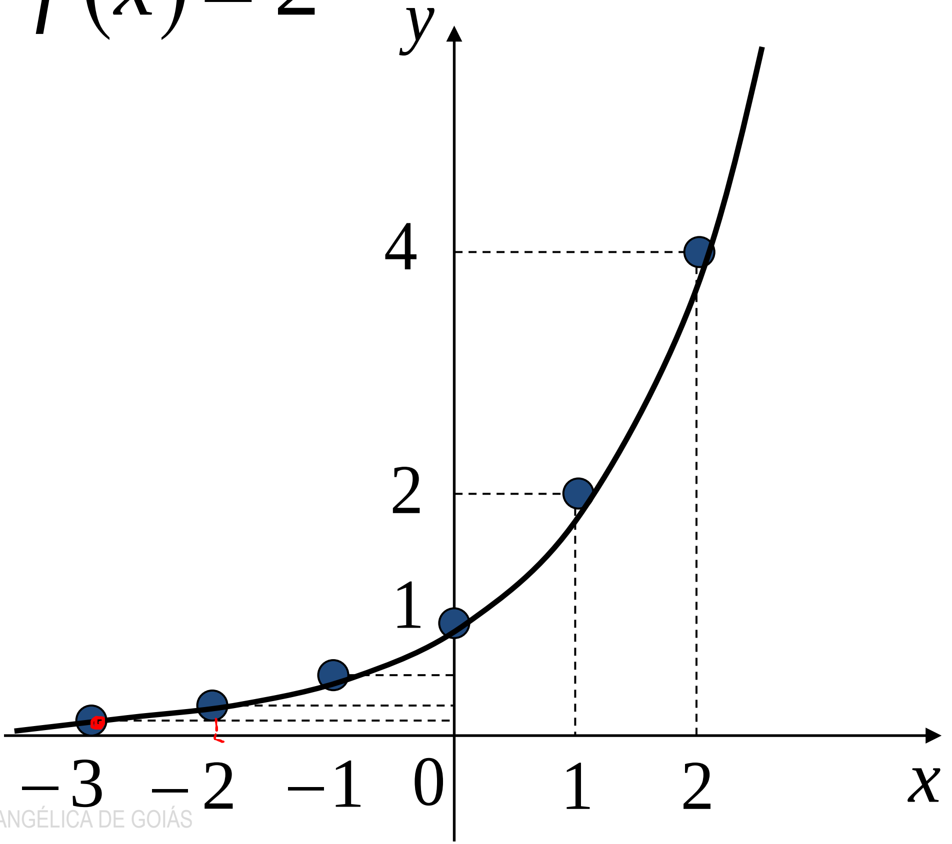
$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$



Representação Gráfica

$$f(x) = 2^x$$

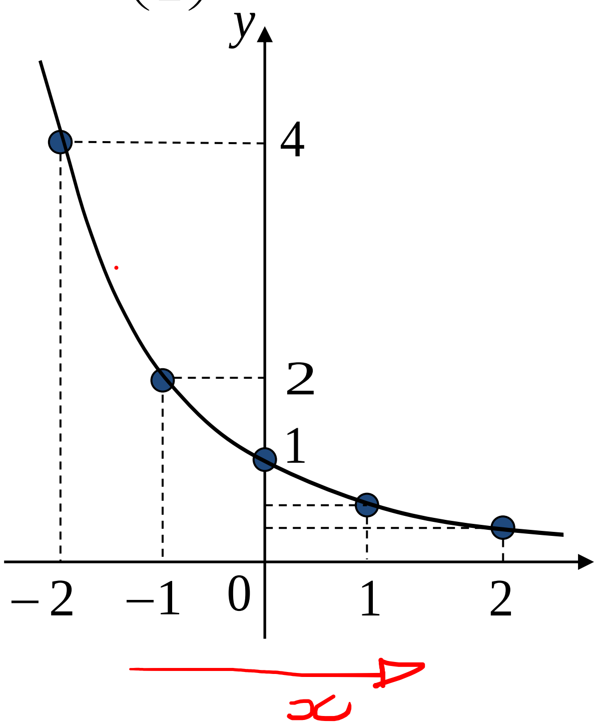
x	$y = 2^x$
2	$2^2 = 4$
1	$2^1 = \cancel{1}\,2$
0	$2^0 = 1$
-1	2^{-1} $1/2$ $\Rightarrow \frac{1}{2}$
-2	$2^{-2} = 1/4$ $\Rightarrow \frac{1}{2^2}$
-3	$2^{-3} = 1/8$

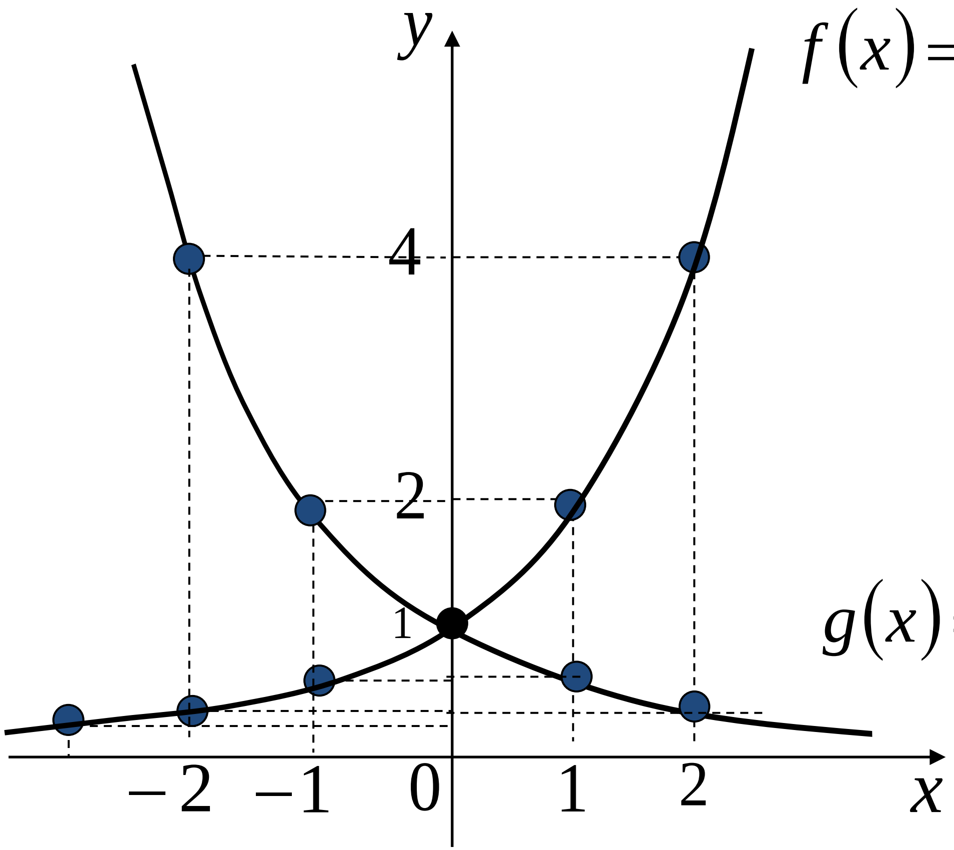


Representação Gráfica

x	$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ $\frac{1}{4}$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$ $\frac{1}{2}$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$ 1
-1	2
-2	4

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$





$$f(x) = 2^x$$

$a > 1$

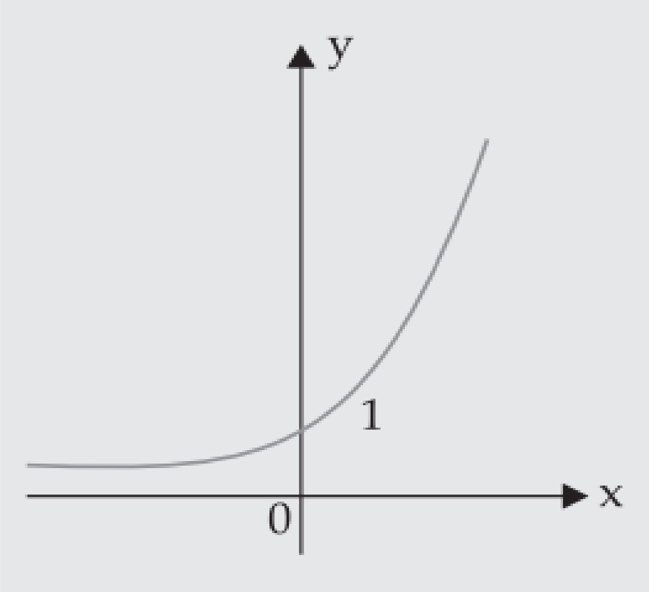
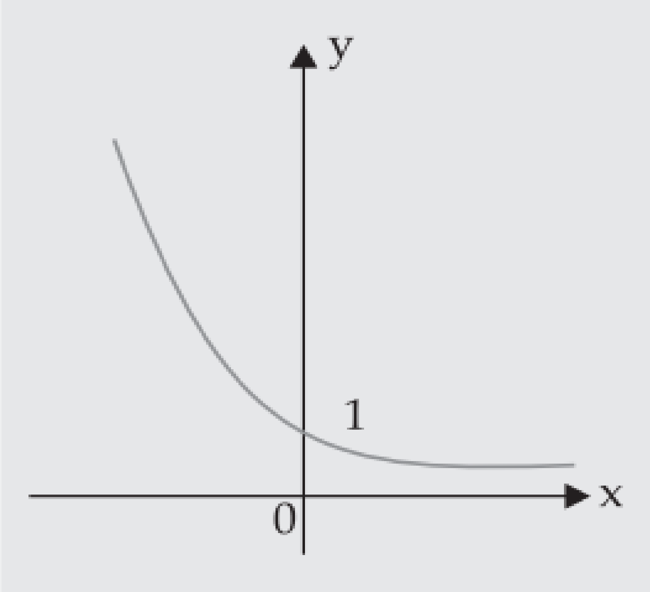
Crescente

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$0 < a < 1$

Decrescente

Gráfico da função exponencial

$f(x)= a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	
crescente	decrescente

Características da função exponencial

- A função é crescente para a base a maior que 1 ($a > 1$);
- A função é decrescente para a base a maior que 0 e menor que 1 ($0 < a < 1$)
- A curva da função $f(x) = a^x$ passa pelo ponto $(0 , 1)$;
- o gráfico **nunca** intercepta o eixo horizontal; a função não tem raízes;

Comparação entre algumas funções

Função 1°

x	2x
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

Função 2°

x	X^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Função Exponencial

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Comparando os gráficos

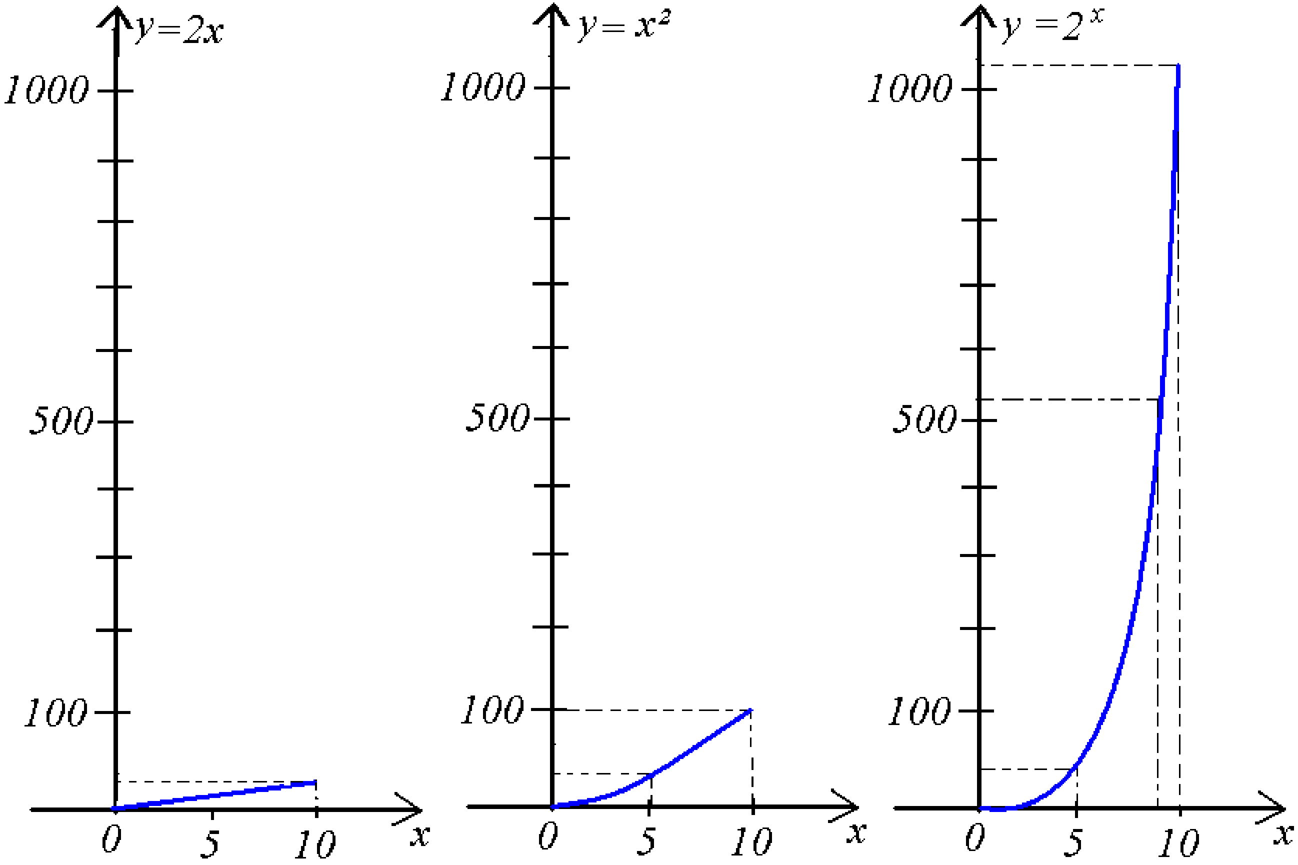
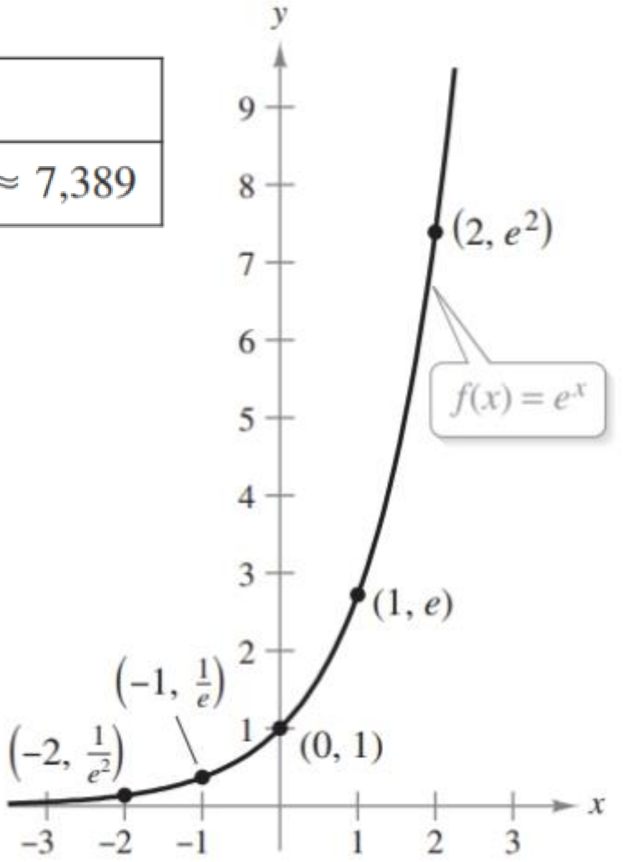


Gráfico de $y = e^x$

$e \approx 2{,}71828182846.$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$e^{-2} \approx 0{,}135$	$e^{-1} \approx 0{,}368$	$e^0 = 1$	$e^1 \approx 2{,}718$	$e^2 \approx 7{,}389$



Definição Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.

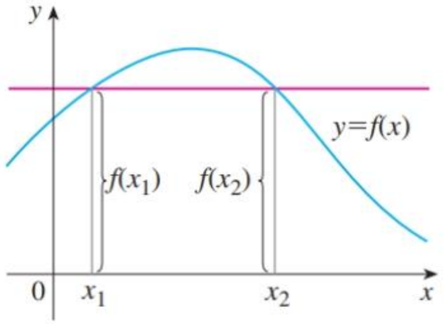


FIGURA 2
Esta função não é injetora, pois $f(x_1)=f(x_2)$.

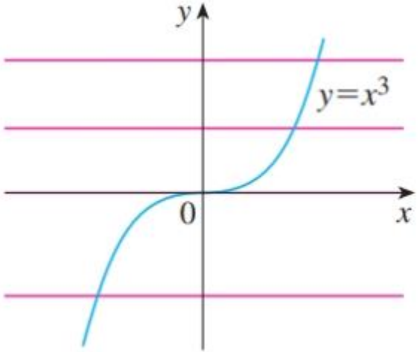


FIGURA 3
$f(x)=x^3$ é injetora.

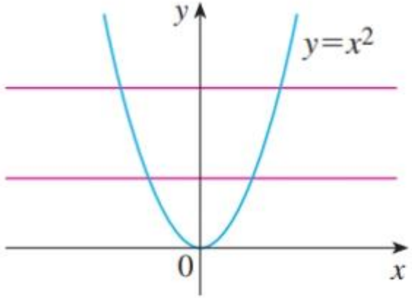
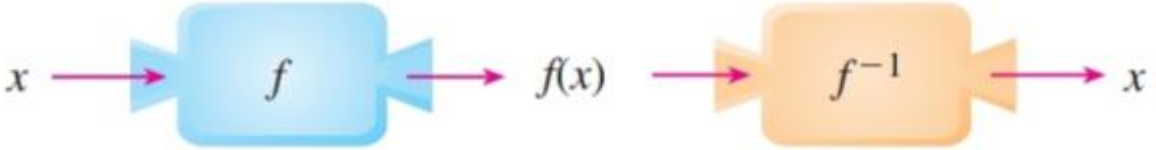
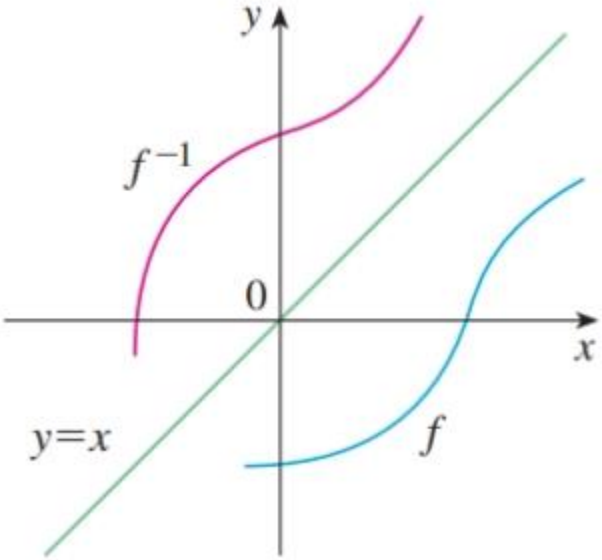


FIGURA 4
$g(x)=x^2$ não é injetora.



O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.



Logaritmo

Logaritmando

Logaritmo

$$\log_b x = y$$

Base do logaritmo

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

Logaritmo

Logaritmando

Logaritmo

$$\log_b x = y$$

Base do logaritmo

$$\log_2 8$$

$$\log_2 8 = y \Leftrightarrow 2^y = 8$$

$$y = 3$$

$$\boxed{\log_2 8 = 3}$$

Consequência da definição

$$P_1 \Rightarrow \log_b 1 = 0$$

$$P_2 \Rightarrow \log_b b = 1$$

$$P_3 \Rightarrow \log_b b^n = n$$

$$P_4 \Rightarrow \log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$$

$$P_5 \Rightarrow b^{\log_b a} = a$$

Propriedades Operatórias

$$P_1 \Rightarrow \log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

$$P_2 \Rightarrow \log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

$$P_3 \Rightarrow \log_b (a)^n = n \cdot \log_b a$$

Mudança de Base

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}}$$

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \neq \log_c a - \log_c b}$$

Definição

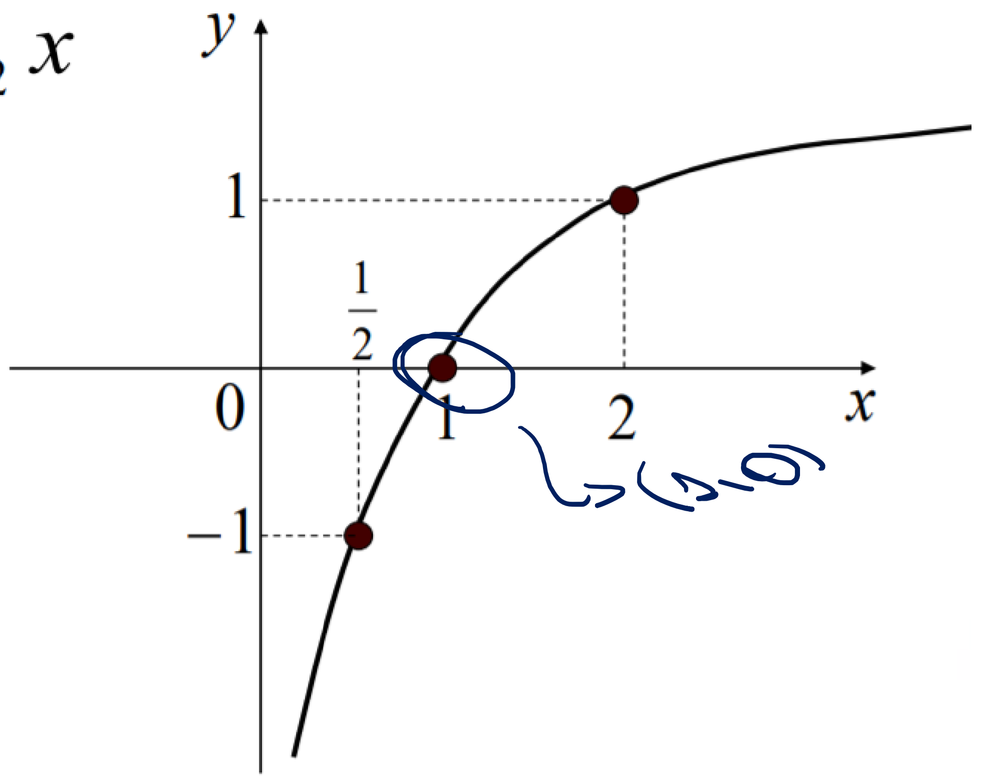
$$f : R_+^* \rightarrow R \qquad f(x) = \log_b x$$

Domínio $\longrightarrow R_+^*$ **Imagem** $\longrightarrow R$

$$\boxed{D(f) = R_+^*} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = R}$$

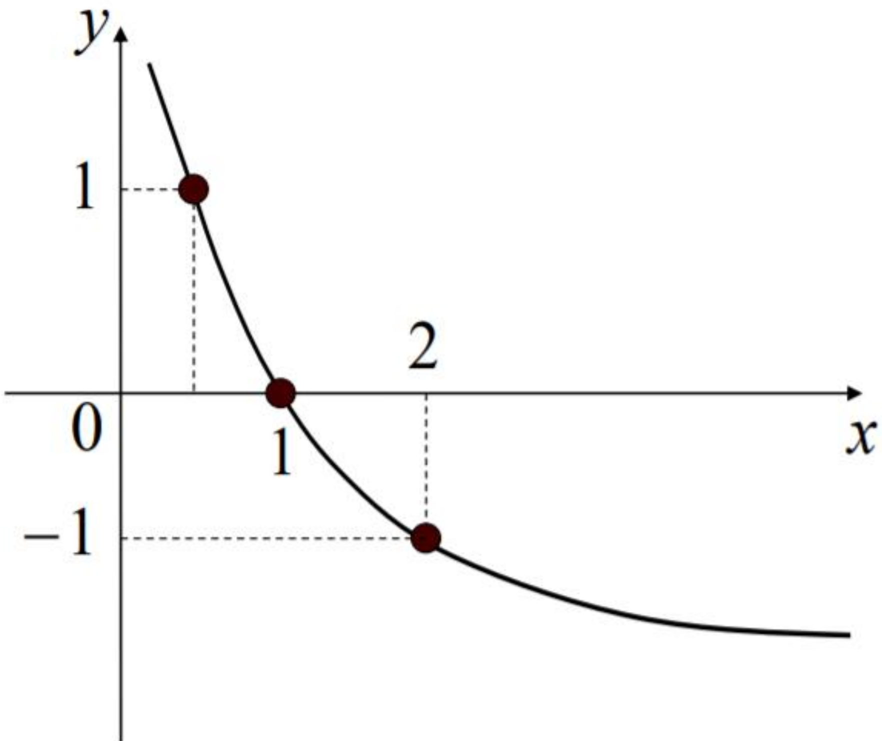
Representação Gráfica

$$f(x) = \log_2 x$$



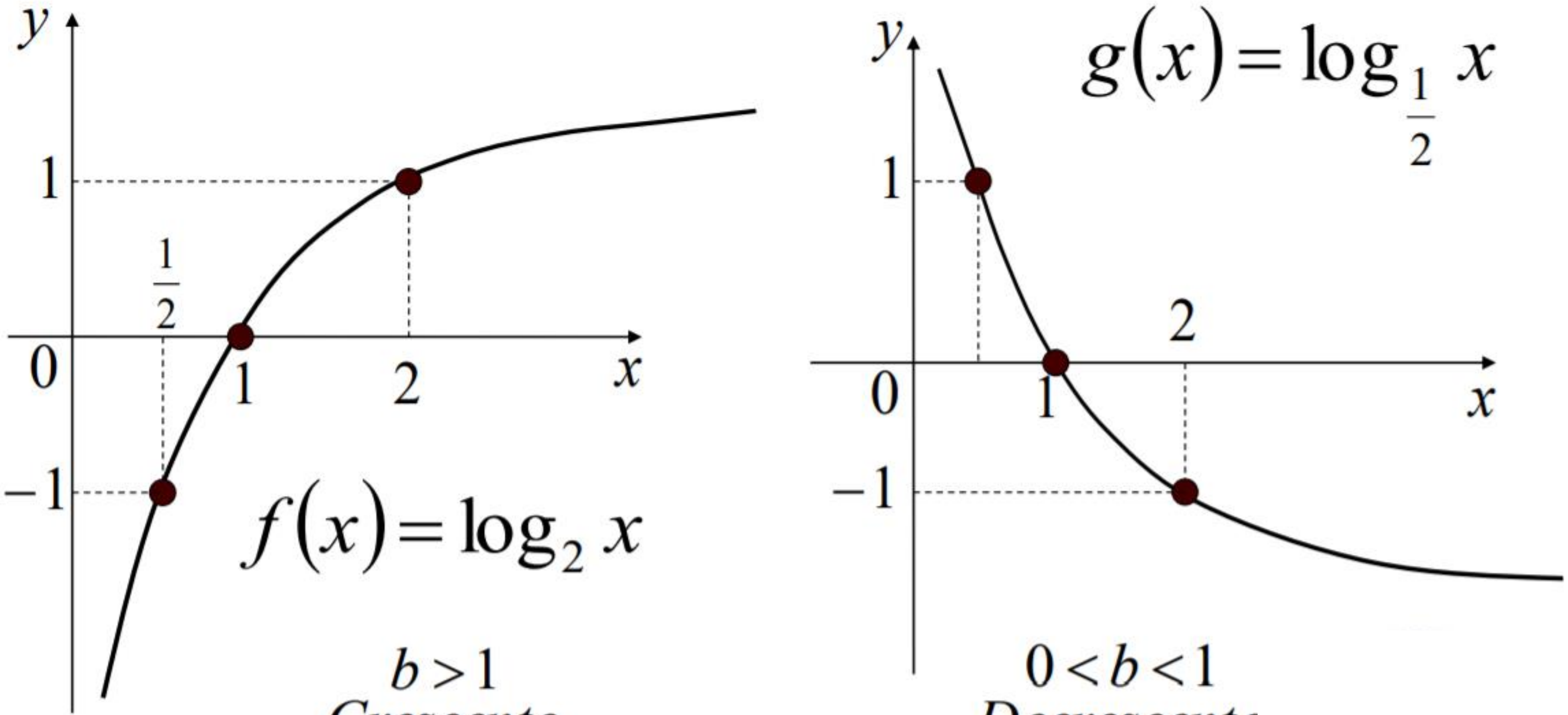
Representação Gráfica

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



Função Logarítmica

Representação Gráfica



$b > 1$

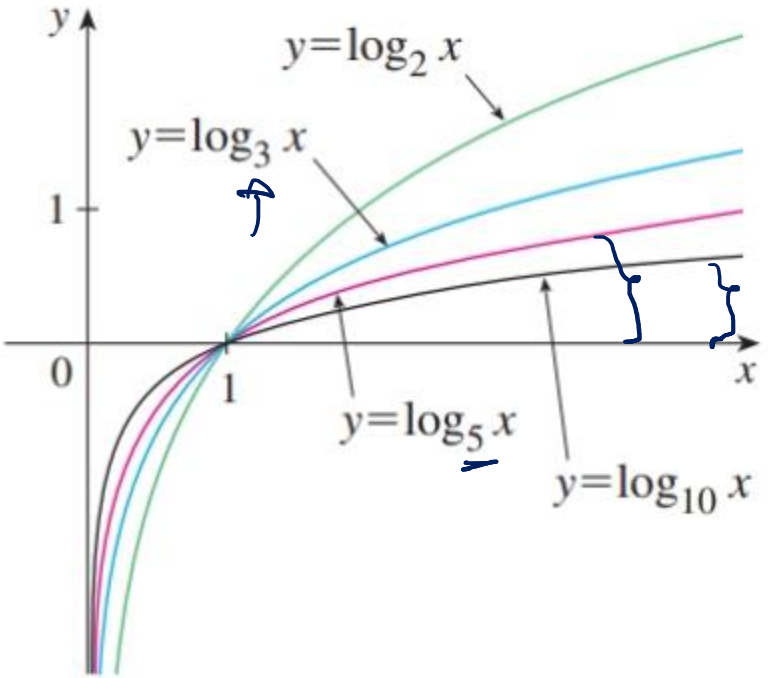
Crescente

$0 < b < 1$

Decrescente

Função Logarítmica

UniEVANGÉLICA
UNIVERSIDADE EVANGÉLICA DE GOIÁS



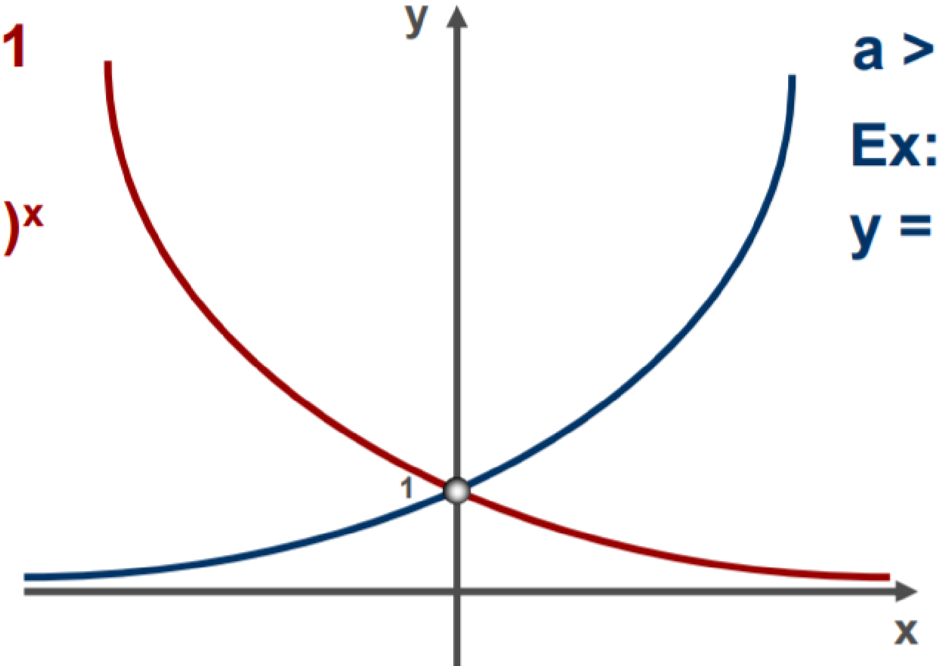
Função Exponencial

$y = a^x$

$0 < a \neq 1$

Ex:

$y = (1/2)^x$



$y = a^x$

$a > 1$

Ex:

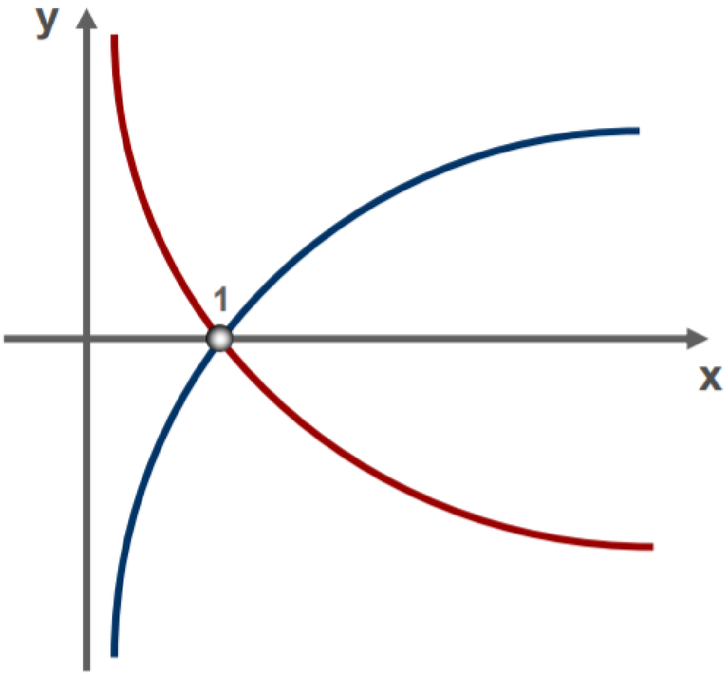
$y = 2^x$

Função Logarítmica

$y = \log_a x$

$0 < a \neq 1$

$y = \log_{1/2} x$



$y = \log_a x$

$a > 1$

$y = \log_2 x$

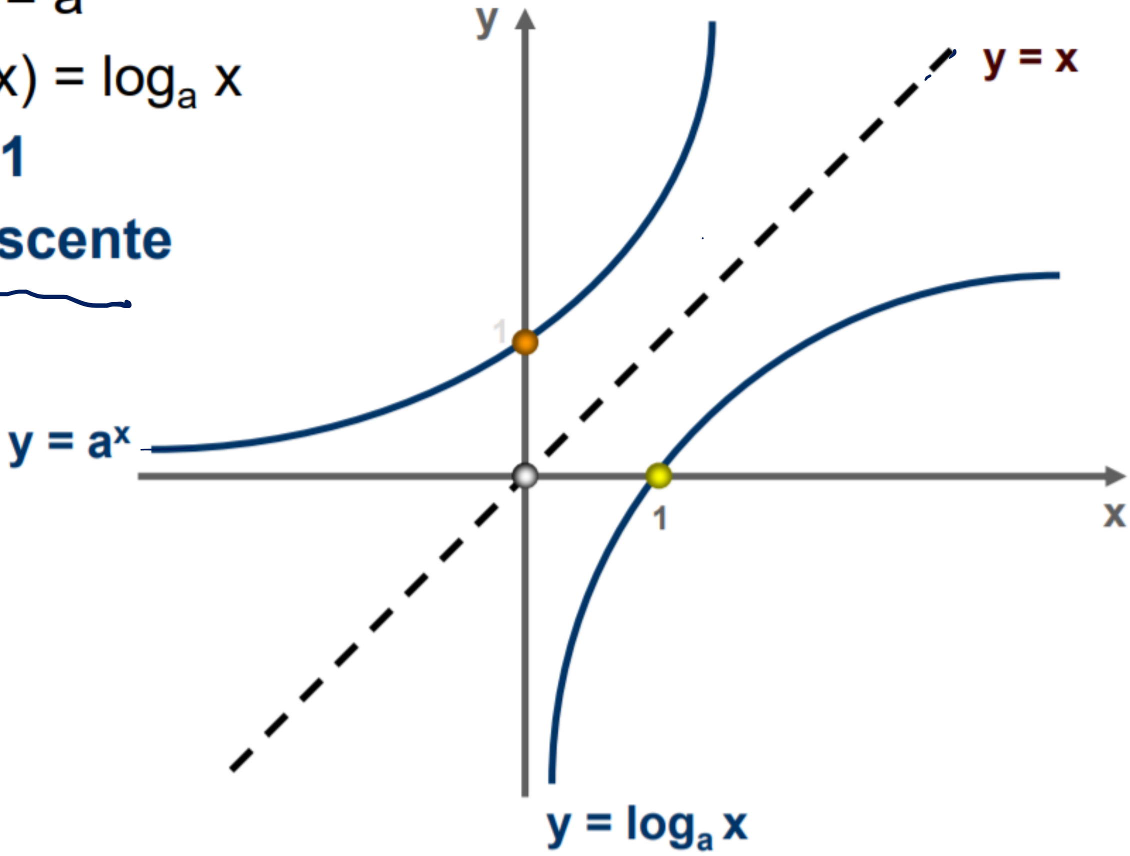
Função Inversa

$f(x) = a^x$

$f^{-1}(x) = \log_a x$

a > 1

Crescente



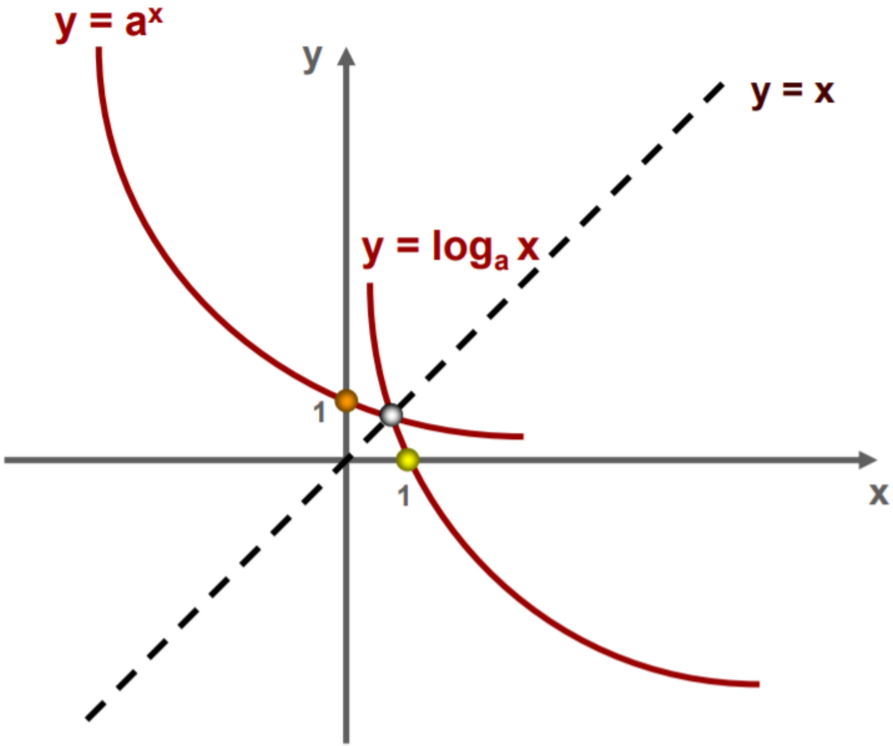
Função Inversa

$f(x) = a^x$

$f^{-1}(x) = \log_a x$

$0 < a \neq 1$

Decrescente



Logaritmos Naturais

$$\log_e x = \ln x$$

$$\ln x = y \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x$$

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$