Ukonvensjonell opptining av kotelett

Som kyb-student er det mye man skal gjøre på en dag. Hverdagen er stappfull av differensialligninger og koding og enda mer differensialligninger. Så når man endelig kommer hjem etter en lang dag er det lite som frister mer enn en saftig kotelett til middag. Det er bare ett problem, koteletten er fryst og må tines. Man skulle tro at det bare er å hive den inn i mikrobølgeovnen, så tiner den på ett blunk. Men det skal dessverre ikke være så lett. Dersom man skulle finne på å skru den på, så vil man oppdage at det lukter svovel og en rekke andre dufter som ikke hører hjemme i et apparat for tilberedning av mat.

Man trenger ikke all å være over gjennomsnittlig glup for å forstå at mikrobølgeovnen bør få stå i fred. Så de andre alternativene er å la den tine på benken, eller å gi den litt futt ved å legge den i en kjele med varmt vann. Jeg har ikke uendelig med tid, så jeg går for den raskeste metoden.

Som en aspirerende kybernetiker ønsker jeg jo selvfølgelig å lage en modell av systemet og forstår at jeg må bruke Newtons avkjølingslov. Før jeg tar ut koteletten fyller jeg kjelen med vann og tar noen målinger. Med disse målingene lager jeg en approksimasjon av varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften.

$$\text{Romtemp} = 23^\circ \qquad \dot{T}_{vann} = \alpha_1 \left(T_{rom} - T_{vann} \right)$$

$$\dot{T}_{vann_0} \approx \frac{51{,}0 - 51{,}3}{42} \approx -0{,}007142857$$

$$\dot{T}_{v_0} = \alpha_1 \left(T_{r_0} - T_{v_0} \right) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\dot{T}_{v_0}}{\left(T_{r_0} - T_{v_0} \right)} \Rightarrow \frac{0{,}007}{(23 - 51{,}3)} \approx 0{,}00025$$

Når det er gjort er det bare å legge koteletten i vannet og måle. Jeg bruker også samme approksimeringsmetode for å finne overføringskoeffisienten mellom koteletten og vannet.

Samtidig som vannet tiner koteletten setter jeg opp ligningssystemet og oppdager at dette systemet kan settes opp som et matriseprodukt. Eneste problemet er romtemperaturen som skaper en ekkel rest som ødelegger. Derfor gjør jeg et skikkelig tjuvtriks og forskyver hele temperaturskalaen slik at romtemperaturen blir det nye nullpunktet. Da kan jeg sette opp en fin matrise:

$$\dot{T}_k = \alpha_0 (T_v - T_k) \qquad T_R \to 0^\circ$$

$$\dot{T}_v = \alpha_0 (T_k - T_v) + \alpha_1 (0^\circ - T_v)$$

$$T = \begin{pmatrix} T_v \\ T_k \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0 + \alpha_1) & \alpha_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{T} = AT$$

Koteletten tiner i vei og vi forsøker å gjette en løsning på systemet vårt på gode gamle formen:

$$T = e^{\lambda t} c = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{T} = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0 + \alpha_1) & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = AT$$

$$\lambda c = Ac \iff (A - \lambda I) c = 0$$

Her vil λ være lik egenverdiene og c være lik egenvektorene til A. Her blir det mye regning på determinanter. Jeg orker ikke å begynne å blande inn de skumle koeffisientene jeg regnet ut i sted, så jeg skal tviholde på den generelle løsningen inntil videre.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} \alpha_0-\lambda & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0+\alpha_1) & \alpha_0-\lambda \end{pmatrix} = \left(\alpha_0^2 - 2\alpha_0\lambda + \lambda^2\right) - \left(\alpha_0^2 + \alpha_0\alpha_1\right)$$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 2\alpha_0\lambda + \alpha_0\alpha_1$$

$$\frac{2\alpha_0 \pm \sqrt{(-2\alpha_0)^2 - 4\cdot\alpha_0\alpha_1}}{2} = \frac{2\alpha_0}{2} \pm \frac{\sqrt{4\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{2}$$

$$\lambda_1 = \alpha_0 + \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}$$

$$\lambda_2 = \alpha_0 - \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}$$

Disse egenverdiene ser ikke relativt pene ut, så jeg tar sjansen på å finne egenvektorene generelt også.

$$A - \lambda_1 I = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_0 - \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0+\alpha_1) & \alpha_0 - \alpha_0 - \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0+\alpha_1) & -\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$A - \lambda_2 I = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_0 + \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0+\alpha_1) & \alpha_0 - \alpha_0 + \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} & -\alpha_0 \\ -(\alpha_0+\alpha_1) & \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)} \end{pmatrix} = 0$$

Med dette får vi to likninger som gir oss egenvektorene:

$$-\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}\,V_1 - \alpha_0 V_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{-\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} V_1$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} \end{pmatrix} \qquad C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} \end{pmatrix}$$

Nå kan vi sette egenvektorene og egenverdiene inn i løsningen så vi får:

$$T = a_1 \cdot e^{(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} \end{pmatrix} + a_2 \cdot e^{(\alpha_0 - \sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} \end{pmatrix}$$

Med initialverdiene justert for at romptemperaturen er nullpunktet så kan vi finne a1 og a2:

$$a_1 e^0 \cdot 1 + a_2 e^0 \cdot 1 = 27{,}4 \Rightarrow a_1 = 27{,}4 - a_2$$

$$a_1 \cdot e^0 \cdot \frac{-\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} + a_2 \cdot e^0 \cdot \frac{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} = -28$$

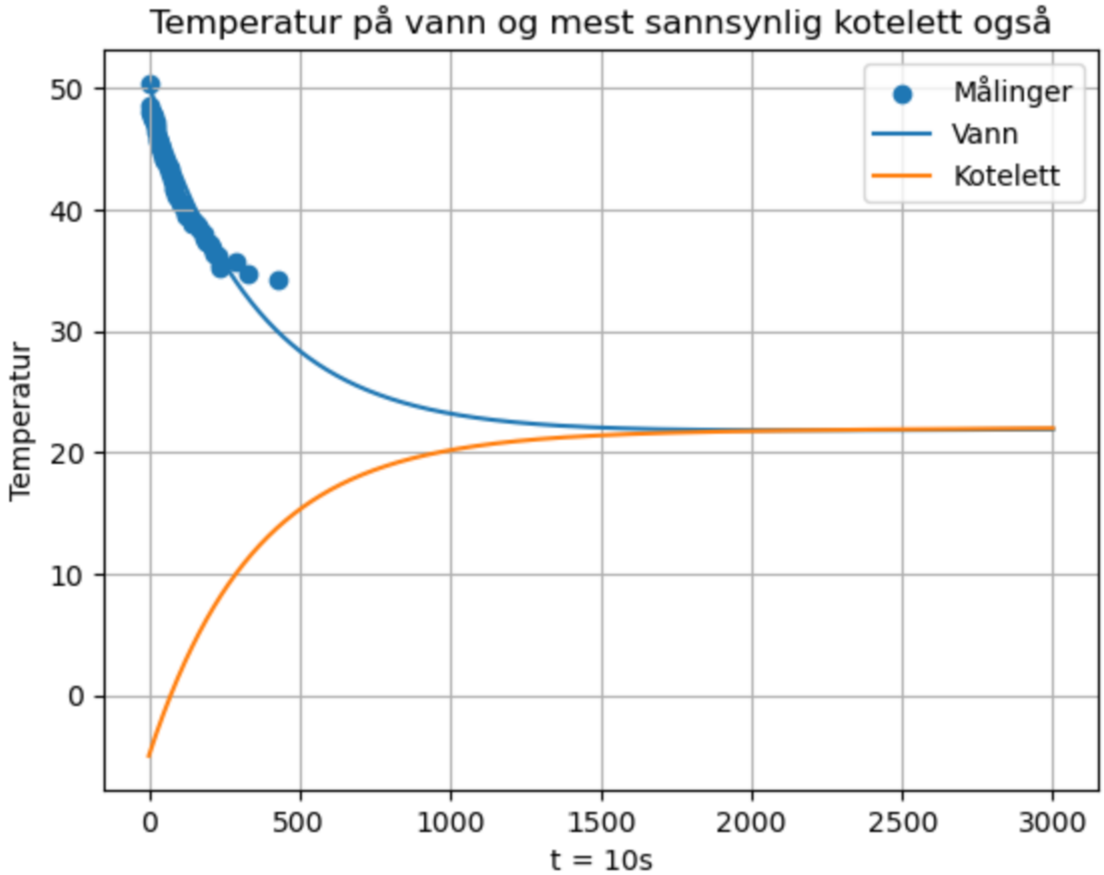
$$(a_2 - a_1) \cdot \frac{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}{\alpha_0} = -28$$

$$a_2 = \frac{-28\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}} + 27{,}4 - a_2 \qquad a_2 = \frac{-14\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}} + \frac{27{,}4}{2}$$

$$a_1 = \frac{27{,}4}{2} + \frac{14\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_1)}}$$

Da har vi en fullstendig løsning, eneste som gjenstår nå er å sette inn varmeoverføringskoeffisientene vi fant tidligere og plotte grafen vi får. Vi slenger også med målingene våre for å se om grafen kan stemme.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def kotelett(t, a1, a2):
    v1 = (13.7 + (14*a1)/(np.sqrt(a1*(a1-a2)))) * (np.e**(-(a1 + np.sqrt(a1*(a1-a2)))*t))
    v2 = (13.7 - (14*a1)/(np.sqrt(a1*(a1-a2)))) * (np.e**(-(a1 - np.sqrt(a1*(a1-a2)))*t))

    k1 = (13.7+(14*a1)/(np.sqrt(a1*(a1-a2)))) * (np.e**(-(a1 + np.sqrt(a1*(a1-a2)))*t))* -(np.sqrt(a1*(a1-a2))/a1)
    k2 = (13.7-(14*a1)/(np.sqrt(a1*(a1-a2)))) * (np.e**(-(a1 - np.sqrt(a1*(a1-a2)))*t)) * (np.sqrt(a1*(a1-a2))/a1)

    vann = v1 + v2
    kotelett = k1 + k2
    return vann, kotelett

tid = np.linspace(0, 3000, 1000)


vann, kotelett = kotelett(tid, 0.0015, 0.0002524)
ktider = np.array([0, 21, 26, 37, 41, 53, 61, 72, 81, 103, 118, 129, 140, 153, 178, 188, 195, 203, 216, 236, 254,2
kverdier = np.array([50.4, 48.5, 48.1, 48.0, 47.9, 47.9, 47.7, 47.6, 47.8, 47.3, 47.2, 47.0, 46.7, 46.5, 45.9, 45.

plt.scatter(ktider, kverdier, label="Målinger")
plt.plot(tid, vann+23, label="Vann")
plt.plot(tid, kotelett+23, label="Kotelett")
plt.legend()
plt.xlabel('t = 10s')
plt.ylabel('Temperatur')
plt.title('Temperatur på vann og mest sannsynlig kotelett også')
plt.grid()
plt.show()
```



Som vi ser passer målingene godt med grafen i begynnelsen, men går vekk fra grafen ved de siste målingene. Dette kan ha noe med at varmeoverføringskonstantene endrer på seg når koteletten tiner og går fra å være frossen til å være tint. Og siden koteletten ikke har en jevn temperatur over seg så stemmer nok ikke temperaturen på koteletten som grafen viser.

Det skal sies at en modell som dette ikke vil bli helt riktig fordi systemet ikke er ideelt. For å få en mer ideell varmeoverføring måtte jeg hatt utstyr som kunne blande vannet perfekt og massere koteletten for en jevnere temperatur. Og hadde jeg hatt pengene til slikt utstyr hadde jeg bare kjøpt en ny mikrobølgeovn i stedet.