TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 10: TOPOLOGISCHES SORTIEREN & GRAPHENSUCHE

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 13. Dezember 2021

letzte Änderung:
15.12.2021, 21:08

Topologisches Sortieren

Implementierung

TOPOLOGISCHES SORTIEREN

Gegeben sei ein gerichteter, azyklischer Graph $G = (V, E)$. Eine **topologische Sortierung** von G ist eine *bijektive* Abbildung $\mathrm{ord}\colon V \to \{1, \ldots, |V|\}$, sodass für alle $v, v' \in V$ mit $(v, v') \in E$ die Relation $\mathrm{ord}(v) < \mathrm{ord}(v')$ gilt.

Anschauung: $\mathrm{ord}(v) = n \quad \rightsquigarrow \quad$ Knoten v wird als n-tes Element gewählt (erhält Sortierungsnummer n)

TOPOLOGISCHES SORTIEREN

Gegeben sei ein gerichteter, azyklischer Graph $G = (V, E)$. Eine **topologische Sortierung** von G ist eine *bijektive* Abbildung $\mathrm{ord}\colon V \to \{1, \ldots, |V|\}$, sodass für alle $v, v' \in V$ mit $(v, v') \in E$ die Relation $\mathrm{ord}(v) < \mathrm{ord}(v')$ gilt.

Anschauung: $\mathrm{ord}(v) = n \quad \rightsquigarrow \quad$ Knoten v wird als n-tes Element gewählt (erhält Sortierungsnummer n)

Algorithmus:

`while` (Elemente übrig)

- wähle Element v ohne Vorgänger
- dekrementiere Anzahl der Vorgänger in den Nachfolgern von v
- füge v der Ausgabeliste hinzu
- lösche v aus G

KODIERUNGEN

Kanten:

```
struct Edge { int from, to; };
```

Bsp.: Kante $e = (3, 5)$

```
struct Edge e = {3,5}
e.from == 3
e.to   == 5
```

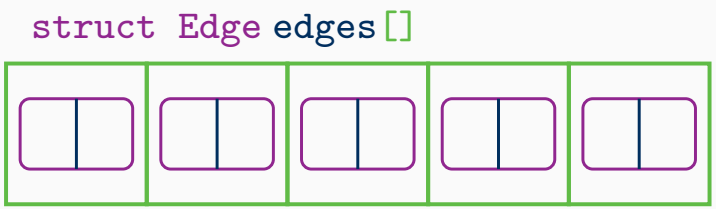
KODIERUNGEN

Kanten:

```
struct Edge { int from, to; };
```

Graph: Liste von Kanten

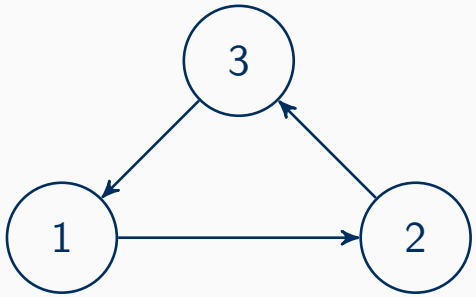
$\rightsquigarrow$ `struct Edge edges[];`



Bsp.: Kante $e = (3, 5)$

```
struct Edge e = {3,5}
e.from == 3
e.to   == 5
```

Bsp.: Graph mit Kantenmenge $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$



$\rightsquigarrow$ `struct Edge edges[] =`

`{{1,2}, {2,3}, {3,1}};`

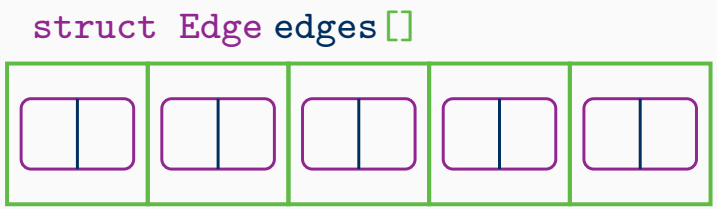
KODIERUNGEN

Kanten:

```
struct Edge { int from, to; };
```

Graph: Liste von Kanten

$\rightsquigarrow$ `struct Edge edges[];`



Bsp.: Kante $e = (3, 5)$

```
struct Edge e = {3,5}
e.from == 3
e.to   == 5
```

Bsp.: Graph mit Kantenmenge $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

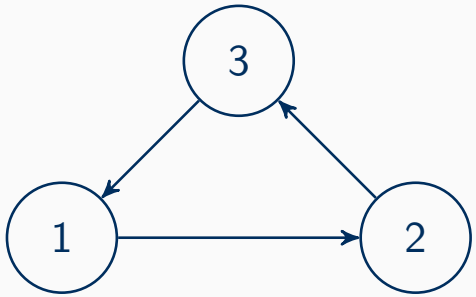


Abbildung ord: Array `int ord[]` mit $\text{ord}(v) = j \Leftrightarrow$ `ord[v] = j`

- initialisiert mit -1

$\rightsquigarrow$

```
struct Edge edges[] =
    {{1,2}, {2,3}, {3,1}};
```

EIN ALTERNATIVER ALGORITHMUS

`while` (Elemente übrig)

- wähle Element v ohne Vorgänger
- dekrementiere Anzahl der Vorgänger in den Nachfolgern von v
- füge v der Ausgabeliste hinzu
- lösche v aus G

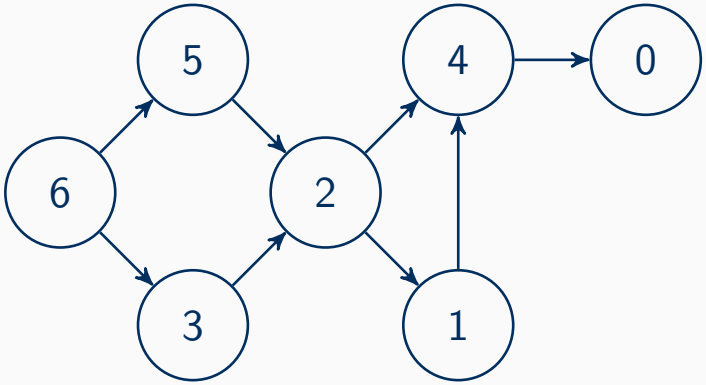
`for` jede Sortierungsnummer j

- `for` jeden Knoten v
  - ▷ teste ob v gewählt werden kann, d.h. noch nicht platziert ist und eingehende Kanten bereits platziert
- falls v gewählt werden darf, setze `ord[v] = j`

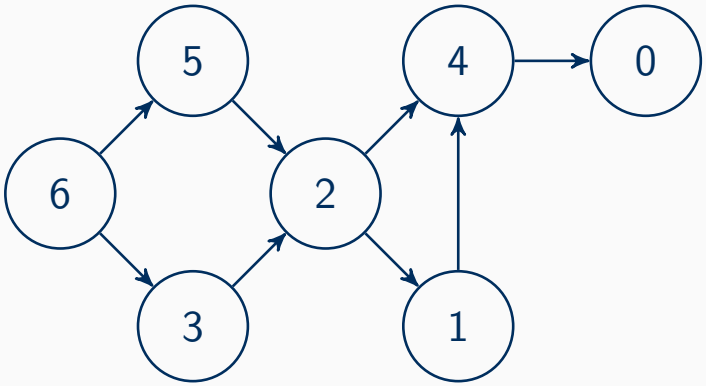
AUFGABE 1

```
1  void topsort(int n, int e, struct Edge edges[], int ord[]) {
2    int j = 1, node, edge, ok;
3    while (j <= n)  {
4      for (node = 0; node < n; ++node) {
5        if (ord[node] == -1) {
6          ok = 1;
7          for (edge = 0; edge < e; ++edge) {
8            if (edges[edge].to == node &&
9                ord[edges[edge].from] == -1)
10             ok = 0;
11         }
12         if (ok) {
13           ord[node] = j;
14           j++;
15           break;
16         }
17       }
18     }
19   }
20 }
```

EIN BEISPIEL

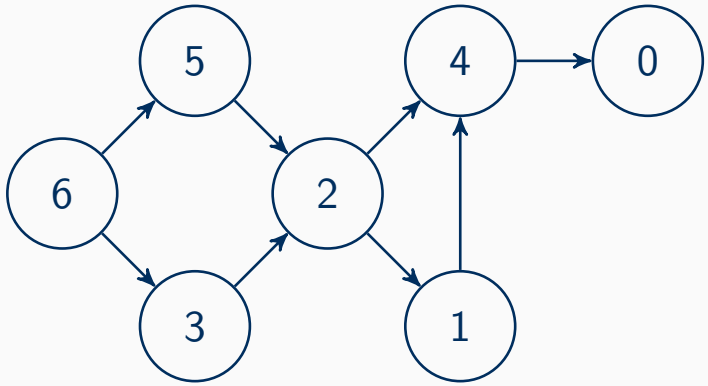


EIN BEISPIEL



Knoten 6 bekommt Nummer 1.
Knoten 3 bekommt Nummer 2.
Knoten 5 bekommt Nummer 3.
Knoten 2 bekommt Nummer 4.
Knoten 1 bekommt Nummer 5.
Knoten 4 bekommt Nummer 6.
Knoten 0 bekommt Nummer 7.

EIN BEISPIEL



Knoten 6 bekommt Nummer 1.
Knoten 3 bekommt Nummer 2.
Knoten 5 bekommt Nummer 3.
Knoten 2 bekommt Nummer 4.
Knoten 1 bekommt Nummer 5.
Knoten 4 bekommt Nummer 6.
Knoten 0 bekommt Nummer 7.

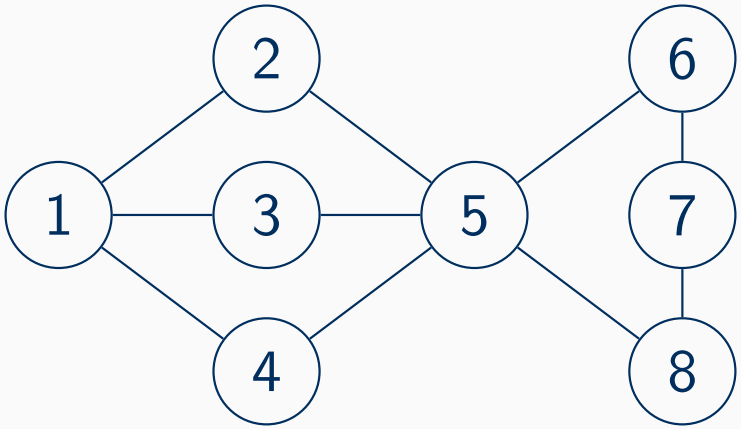
$v =$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{ord}(v) =$	7	5	4	2	6	3	1

```
ord = [7, 5, 4, 2, 6, 3, 1]
```

Breiten- und Tiefensuche

SUCHVERFAHREN

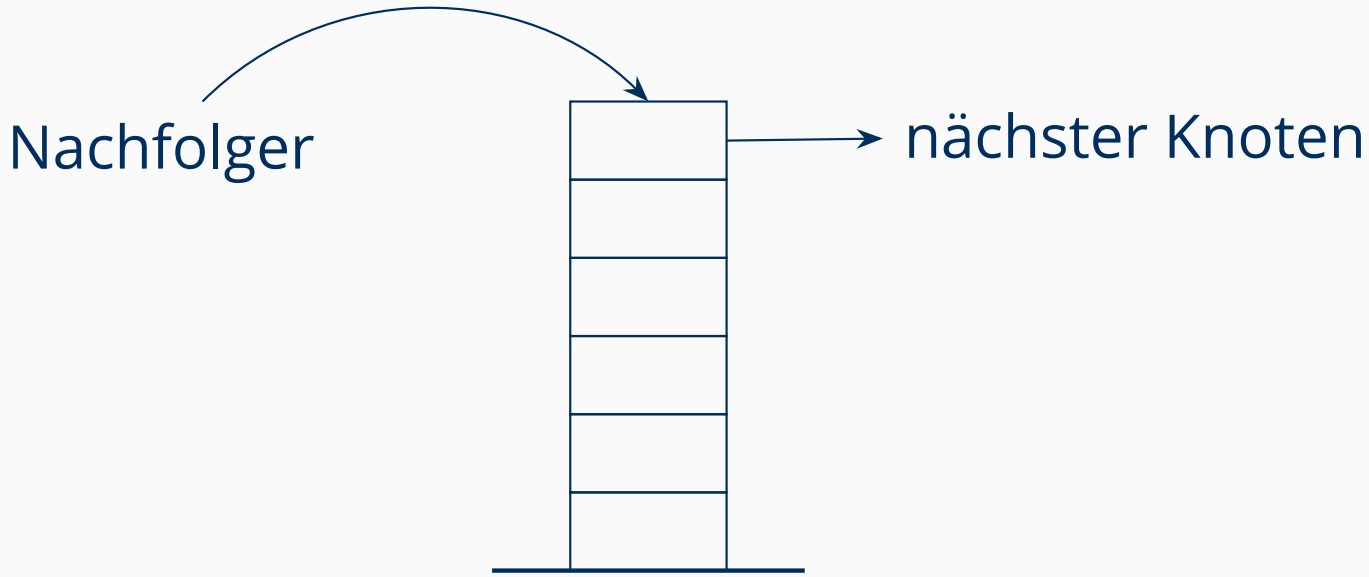
- Ziel: Finden eines Knotens mit bestimmter Beschriftung in einem Graphen
- hier: uninformierte Suche mit Tiefen- und Breitensuche



TIEFENSUCHE

- gehe in die Tiefe:
  „entdecke erst Kinder, dann Geschwister“
- Datenstruktur: Keller
- Nachfolger werden *oben* auf den Keller gelegt
- nächster Knoten wird *oben* vom Keller genommen

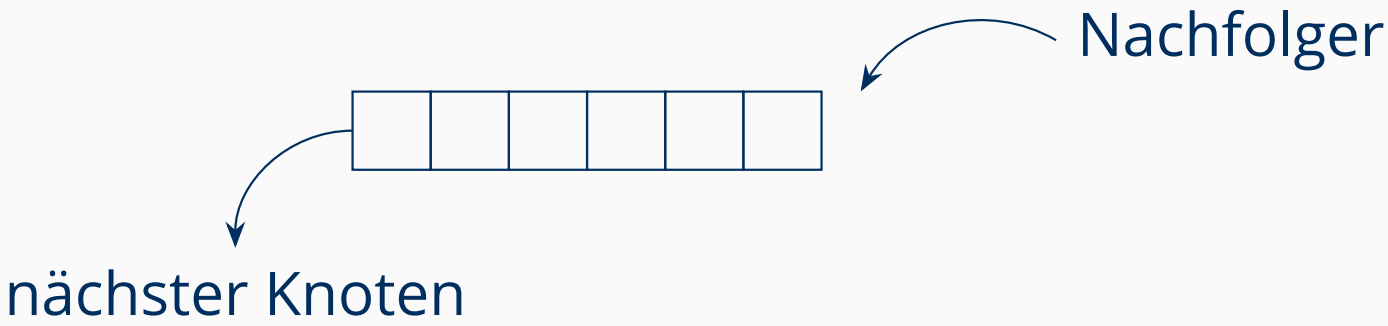
Keller:



BREITENSUCHE

- gehe in die Breite:
  „entdecke erst Geschwister, dann Kinder“
- Datenstruktur: Warteschlange
- Nachfolger stellen sich *hinten* an
- nächster Knoten wird von *vorn* genommen

Warteschlange:



VERALLGEMEINERTE GRAPHENSUCHE

Beobachtung: Suche läuft ähnlich ab

- Operation 1: Lesen des nächsten Knotens `READ`
- Operation 2: Löschen des gewählten Knotens `REMOVE`
- Operation 3: Hinzufügen eines Nachfolgerknotens `INSERT`
- Operation 4: Leerheit der Datenstruktur `EMPTY`

VERALLGEMEINERTE GRAPHENSUCHE

Beobachtung: Suche läuft ähnlich ab

- Operation 1: Lesen des nächsten Knotens `READ`
- Operation 2: Löschen des gewählten Knotens `REMOVE`
- Operation 3: Hinzufügen eines Nachfolgerknotens `INSERT`
- Operation 4: Leerheit der Datenstruktur `EMPTY`

	`STORAGE`	`READ`	`REMOVE`	`INSERT`	`EMPTY`
Tiefensuche	Keller	`top`	`pop`	`push`	`empty`
Breitensuche	Queue	`head`	`dequeue`	`enqueue`	`nil`

VERALLGEMEINERTE GRAPHENSUCHE

Beobachtung: Suche läuft ähnlich ab

- Operation 1: Lesen des nächsten Knotens `READ`
- Operation 2: Löschen des gewählten Knotens `REMOVE`
- Operation 3: Hinzufügen eines Nachfolgerknotens `INSERT`
- Operation 4: Leerheit der Datenstruktur `EMPTY`

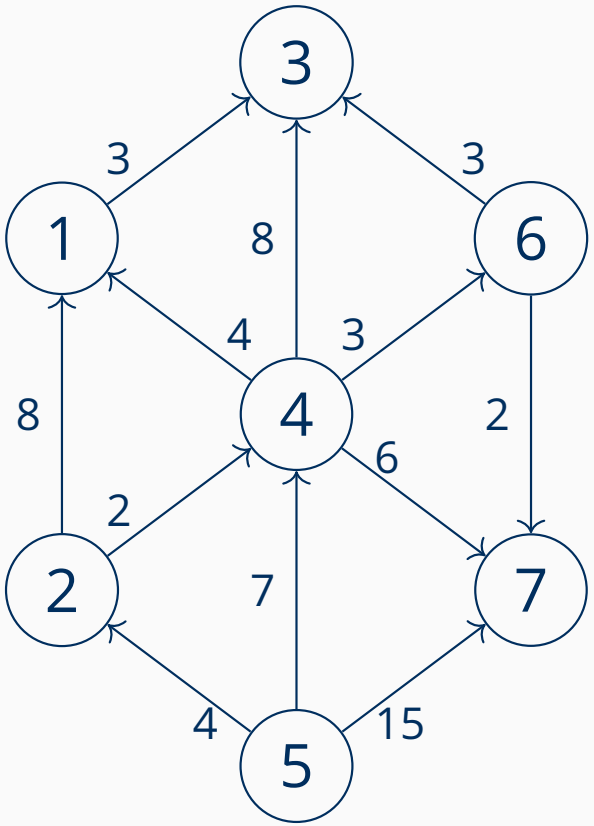
	`STORAGE`	`READ`	`REMOVE`	`INSERT`	`EMPTY`
Tiefensuche	Keller	`top`	`pop`	`push`	`empty`
Breitensuche	Queue	`head`	`dequeue`	`enqueue`	`nil`

weitere Möglichkeit für `STORAGE`: **Prioritätswarteschlange**

(vgl. Übung 11, Dijkstra-Algorithmus für kürzeste Wege in gewichteten Graphen)

- Wahl des nächsten Elementes anhand eines Prioritätswertes
- Vorstellung: *geordnete* Warteschlange

AUFGABE 2

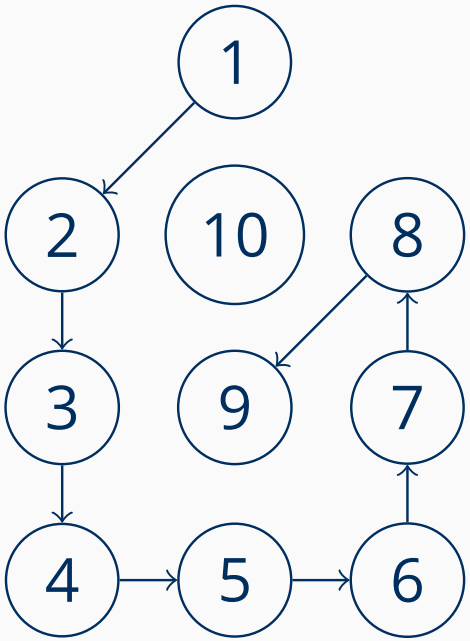


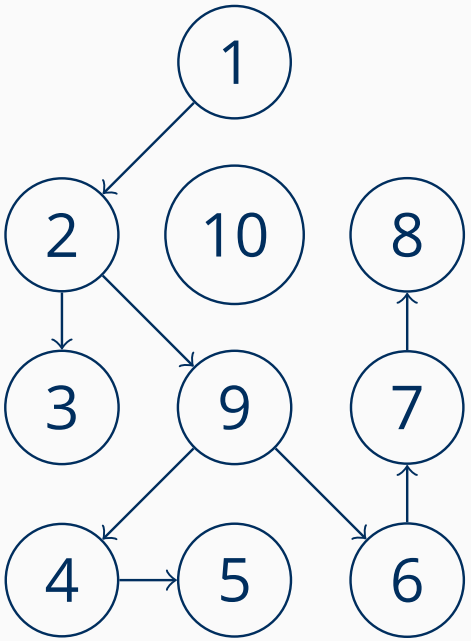
(a) **Tiefensuche**:
3 verschiedene
depth-first trees

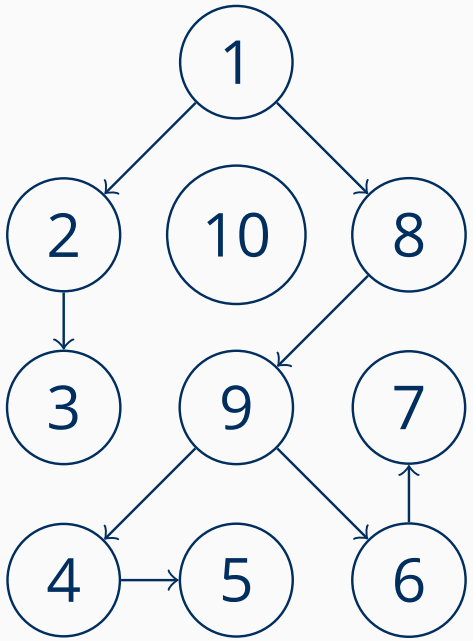
(b) **Breitensuche**:
3 verschiedene
breadth-first trees

Tiefensuche

Es gibt 5 verschiedene depth-first-trees, z.B.:



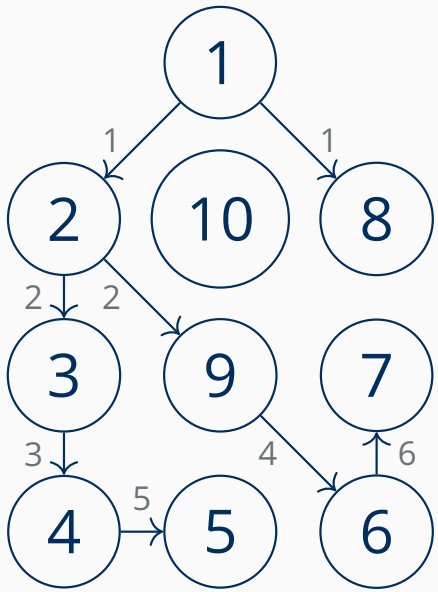




AUFGABE 2 — TEIL (B)

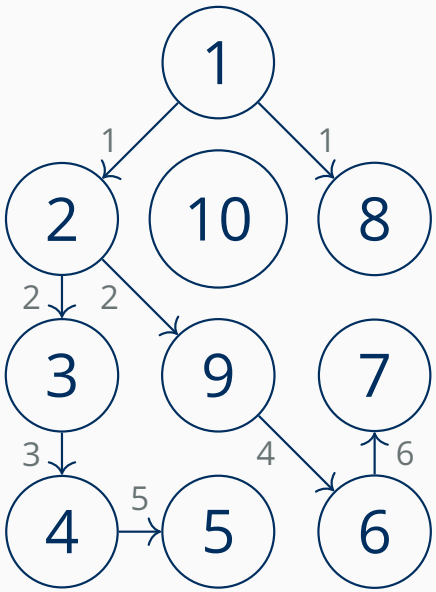
Breitensuche

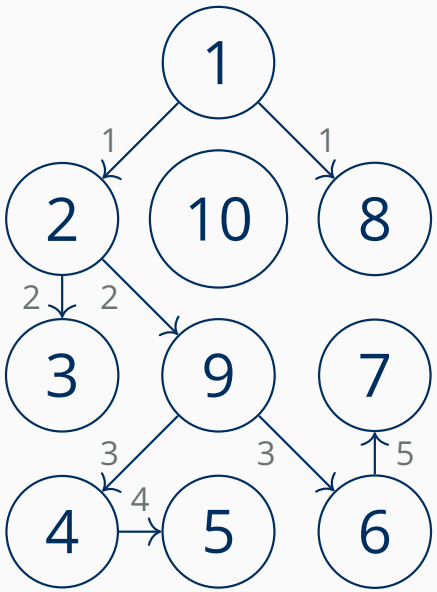
Es gibt 5 verschiedene breadth-first-trees, z.B.:



Breitensuche

Es gibt 5 verschiedene breadth-first-trees, z.B.:





Breitensuche

Es gibt 5 verschiedene breadth-first-trees, z.B.: