TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 3: EXTENDED BACKUS-NAUR-FORM

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 13.11.2020

Wiederholung

EBNF-DEFINITION

- EBNF-Definition besteht aus endlicher Menge von EBNF-Regeln.
- Jede EBNF-Regel besteht aus einer linken und einer rechten Seite, die rechte Seite ist ein EBNF-Term.

EBNF-DEFINITION

- EBNF-Definition besteht aus endlicher Menge von EBNF-Regeln.
- Jede EBNF-Regel besteht aus einer linken und einer rechten Seite, die rechte Seite ist ein EBNF-Term.

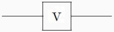
Definition: EBNF-Term

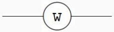
Seien V eine endliche Menge (syntaktische Variablen) und Σ eine endliche Menge (Terminalsymbole) mit $V \cap \Sigma = \emptyset$. Die Menge der EBNF-Terme über V und Σ (notiere: $T(\Sigma, V)$), ist die kleinste Menge $T \subseteq \left(V \cup \Sigma \cup \left\{\hat{\{}, \hat{\}}, \hat{[}, \hat{]}, \hat{(}, \hat{)}, \hat{|}\right\}\right)$ mit $V \subseteq T$, $\Sigma \subseteq T$ und

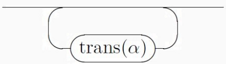
- Wenn $\alpha \in T$, so auch $\hat{(}\ \alpha\ \hat{)} \in T$, $\hat{\{}\ \alpha\ \hat{\}} \in T$, $\hat{[}\ \alpha\ \hat{]} \in T$.
- Wenn $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, so auch $\hat{(}\ \alpha_1\ \hat{|}\ \alpha_2\ \hat{)} \in T$, $\alpha_1\alpha_2 \in T$

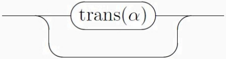
ÜBERSETZUNG SYNTAXDIAGRAMME $\leftrightarrow$ EBNF

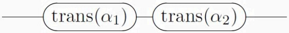
Die Funktion trans: $T(\Sigma, V) \to \mathrm{SynDia}(\Sigma, V)$ ist induktiv über den Aufbau von EBNF-Termen definiert:

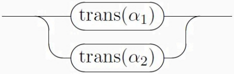
1. Sei $v \in V$; $\mathrm{trans}(v) =$ 

2. Sei $\mathtt{w} \in \Sigma$; $\mathrm{trans}(\mathtt{w}) =$ 

3. Sei $\alpha \in T(\Sigma, V)$;
   - $\mathrm{trans}(\hat{\{}\alpha\hat{\}}) =$ 

   - $\mathrm{trans}(\hat{[}\alpha\hat{]}) =$ 

   - $\mathrm{trans}(\hat{(}\alpha\hat{)}) = \mathrm{trans}(\alpha)$
4. Sei $\alpha_1, \alpha_2 \in T(\Sigma, V)$;
   - $\mathrm{trans}(\alpha_1\alpha_2) =$ 

   - $\mathrm{trans}(\hat{(}\alpha_1\hat{|}\alpha_2\hat{)}) =$ 

SEMANTIK VON EBNF-TERMEN

- Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ eine EBNF-Definition.
- $v \in V \rightsquigarrow W(\mathcal{E}, v) = \rho(v)$ (syntaktische Kategorie)
- Semantik $[\![\cdot]\!] : \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\alpha} \to ((\underbrace{V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)}_{\rho}) \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

Definiere $[\![\alpha]\!](\rho)$ wie folgt:

- Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \rho(v)$.
- Wenn $\alpha \in \Sigma$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \{\alpha\}$.
- Wenn $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cdot [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\alpha_1\hat{|}\alpha_2\hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{\{}\alpha_1\hat{\}}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = ([\![\alpha_1]\!](\rho))^*$.
- Wenn $\alpha = \hat{[}\alpha_1\hat{]}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\alpha_1\hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho)$.

Übungsblatt 3

AUFGABE 1 — TEIL (A)

Gegeben sei eine EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit
$V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ und

$$R = \Big\{ \quad S ::= AB, \quad A ::= \hat{(}\; aAc \;\hat{|}\; \hat{\{}\; b \;\hat{\}}\; \hat{)}, \quad B ::= d\hat{[}\; B \;\hat{]}c \quad \Big\}$$

Gesucht ist ein System von Syntaxdiagrammen

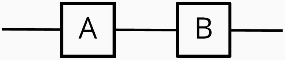
AUFGABE 1 — TEIL (A)

Gegeben sei eine EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit
$V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ und

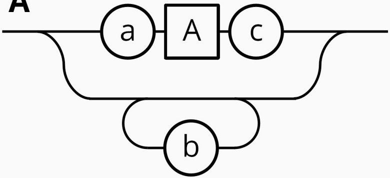
$$R = \left\{ \quad S ::= AB, \quad A ::= \hat{(}\; aAc \;\hat{|}\; \hat{\{}\; b \;\hat{\}}\; \hat{)}, \quad B ::= d\hat{[}\; B \;\hat{]}c \quad \right\}$$

Gesucht ist ein System von Syntaxdiagrammen

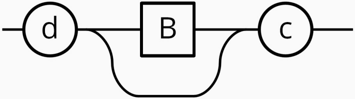
S



A



B



AUFGABE 1 — TEIL (B)

AUFGABE 1 — TEIL (B)

Wir wollen eine EBNF-Definition $\mathcal{E}' = (V, \Sigma, S, R)$ finden, sodass

$$W(\mathcal{E}') = \left\{ a^{n+\ell} c b^n (cd)^\ell \mid n, \ell \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

gilt. Wir zerlegen wie üblich die Sprache in unabhängige Teile:

$$L = \left\{ a^\ell \;\; a^n \; c \; b^n \;\; (cd)^\ell \mid n, \ell \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

Dann ergibt sich also nach dem Grundschema

$$V = \{S, A\}$$

$$R = \left\{ S ::= \hat{(}\; aScd \;\hat{|}\; A \;\hat{)},\;\; A ::= a \;\hat{(}\; A \;\hat{|}\; c \;\hat{)}\; b \right\}$$

SEMANTIK VON EBNF-TERMEN

- Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ eine EBNF-Definition.
- $v \in V \rightsquigarrow W(\mathcal{E}, v) = \rho(v)$ (syntaktische Kategorie)
- Semantik $[\![\cdot]\!] : \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\alpha} \to ((\underbrace{V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)}_{\rho}) \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

Definiere $[\![\alpha]\!](\rho)$ wie folgt:

- Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \rho(v)$.
- Wenn $\alpha \in \Sigma$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \{\alpha\}$.
- Wenn $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cdot [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\alpha_1\hat{|}\alpha_2\hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{\{}\alpha_1\hat{\}}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = ([\![\alpha_1]\!](\rho))^*$.
- Wenn $\alpha = \hat{[}\alpha_1\hat{]}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\alpha_1\hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho)$.

AUFGABE 2 — TEIL (A)

- $\rho\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$
- $f\colon (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)) \to (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

AUFGABE 2 — TEIL (A)

- $\rho\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$
- $f\colon (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)) \to (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

$$f(\rho) = \begin{pmatrix} f(\rho)(S) \\ f(\rho)(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\![ddAc]\!](\rho) \\ [\![\hat{[}\,S\,\hat{]}a]\!](\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ (\rho(S) \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{a\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ \rho(S) \cdot \{a\} \cup \{a\} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$f(\rho) = \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ \rho(S) \cdot \{a\} \cup \{a\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \mapsto^1 \begin{pmatrix} \emptyset \\ \{a\} \end{pmatrix} \mapsto^2 \begin{pmatrix} \{ddac\} \\ \{a\} \end{pmatrix} &\mapsto^3 \begin{pmatrix} \{ddac\} \\ \{ddaca, a\} \end{pmatrix} \\
&\mapsto^4 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{ddaca, a\} \end{pmatrix} \\
&\mapsto^5 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{(dd)^2(ac)^2 a, ddaca, a\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

AUFGABE 2 — TEIL (C)

Die ersten Schritte zeigten

$$\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \mapsto^1 \ldots \mapsto^5 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{(dd)^2(ac)^2a, ddaca, a\} \end{pmatrix}$$

Führen wir diese Iteration nur „bis ins Unendliche“ fort, so erhalten wir

$$W(\mathcal{E}, S) = \{(dd)^n(ac)^n : n \geq 1\}$$
$$W(\mathcal{E}, A) = \{(dd)^n(ac)^n a : n \geq 0\}$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

Wir brauchen die Semantik von $S ::= [\ a(\ Sb \mid Sbb\ )\ ]$.

AUFGABE 3 — TEIL (A)

Wir brauchen die Semantik von $S ::= \hat{[}\; a \hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)}\; \hat{]}$.

$$
\begin{aligned}
\left[\!\left[\hat{[}\; a \hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)}\; \hat{]} \right]\!\right](\rho) &= \{\varepsilon\} \cup \left[\!\left[a \hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)} \right]\!\right](\rho) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \left[\!\left[\hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)} \right]\!\right](\rho) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot ([\![Sb]\!](\rho) \cup [\![Sbb]\!](\rho)) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\rho(S) \cdot \{b\} \cup \rho(S) \cdot \{bb\}) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}
\end{aligned}
$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

Wir brauchen die Semantik von $S ::= \hat{[}\, a\hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)}\, \hat{]}$.

$$
\begin{aligned}
\left\llbracket \hat{[}\, a\hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)}\, \hat{]} \right\rrbracket(\rho) &= \{\varepsilon\} \cup \left\llbracket a\hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)} \right\rrbracket(\rho) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \left\llbracket \hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)} \right\rrbracket(\rho) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\llbracket Sb \rrbracket(\rho) \cup \llbracket Sbb \rrbracket(\rho)) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\rho(S) \cdot \{b\} \cup \rho(S) \cdot \{bb\}) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}
\end{aligned}
$$

Damit können wir die Iterationsfunktion aufstellen:

$$
\begin{aligned}
f(\rho) = \Big(f(\rho)(S)\Big) &= \Big(\left\llbracket \hat{[}\, a\hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)}\, \hat{]} \right\rrbracket(\rho)\Big) \\
&= \Big(\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}\Big)
\end{aligned}
$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

$$f(\rho) = \Big(\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}\Big)$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

$$f(\rho) = \Big(\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}\Big)$$

3 Iterationen:

$$\begin{aligned}\Big(\emptyset\Big) \mapsto^1 \Big(\{\varepsilon\}\Big) &\mapsto^2 \Big(\{\varepsilon, ab, abb\}\Big) \\ &\mapsto^3 \Big(\{\varepsilon, ab, abb, aabb, aabbb, aabbbb\}\Big)\end{aligned}$$

AUFGABE 3 — TEIL (B)

Sei $\rho\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ mit $\rho(S) = \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\}$.

Zu zeigen: $\left[\!\left[\hat{[}\; a\hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)}\; \hat{]} \right]\!\right](\rho) = \rho(S)$.

AUFGABE 3 — TEIL (B)

Sei $\rho\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ mit $\rho(S) = \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\}$.

Zu zeigen: $\left\llbracket \hat{[}\, a\hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)}\, \hat{]} \right\rrbracket(\rho) = \rho(S)$.

$$
\begin{aligned}
& \left\llbracket \hat{[}\, a\hat{(}\, Sb \,\hat{|}\, Sbb \,\hat{)}\, \hat{]} \right\rrbracket(\rho) \\
= \;& \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\} \\
= \;& \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cdot \{bb\} \\
= \;& \{\varepsilon\} \cup \{aa^n b^n b \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cup \{aa^n b^m bb \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \\
= \;& \{a^n b^m \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \\
= \;& \rho(S)
\end{aligned}
$$