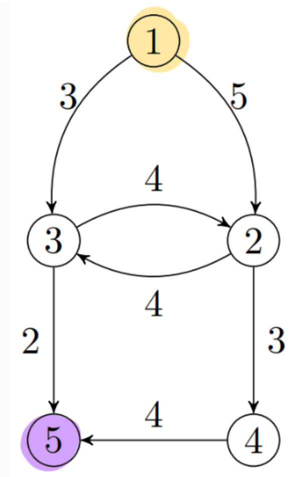
Aufgabe 1 (AGS 9.5.24, AGS 9.5.27 c)

Der nachfolgende gewichtete Graph G stellt ein Straßennetz mit Einbahnstraßen dar. Dabei besagt das Gewicht 5 der Kante $(1, 2)$ beispielsweise, dass die Strecke vom ersten zum zweiten Knoten für Fahrzeuge mit einer Breite von maximal 5m passierbar ist. Es soll für jedes Knotenpaar (a, b) die maximale Fahrzeugbreite berechnet werden, um von a nach b zu gelangen.



$(S, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1}) = (\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$

$\max(0, a) = a \quad (a \in \mathbb{N}_\infty)$
$\min(\infty, a) = a \quad (a \in \mathbb{N}_\infty)$

(b) Geben Sie die modifizierte Adjazenzmatrix an.

$$mA_G = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

(c) Aus der Update-Formel des Aho-Algorithmus kennen Sie den Ausdruck

$$D_G^{(k-1)}(u, v) \oplus \left(D_G^{(k-1)}(u, k) \odot \left(D_G^{(k-1)}(k, k)\right)^* \odot D_G^{(k-1)}(k, v)\right).$$

Vereinfachen Sie diesen Ausdruck für den Semiring aus Augabenteil (a), indem Sie a^* für ein beliebiges Element $a \in S$ ausrechnen.

Lt. Vorlesung $\quad a^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\oplus} a^n \; ; \; a^{n+1} = a \odot a^n$

Im Semiring $(\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$ gilt

- $a^0 = \mathbb{1} = \infty$
- $a^1 = a \odot a^0 = \min\{a, \infty\} = a$
- $a^2 = a \odot a^1 = \min\{a, a\} = a$

$\vdots$

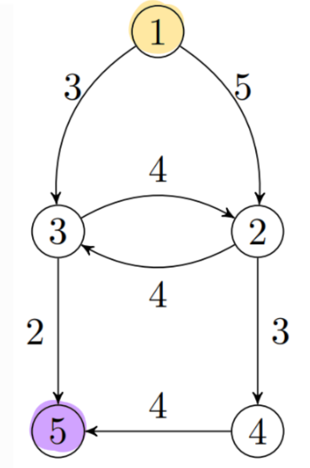
$\Rightarrow a^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\max} a^n = \overset{\text{sup}}{\max}\{a^0, a^1, \ldots\} = \overset{\text{sup}}{\max}\{a^n : n \in \mathbb{N}_0\}$
$= \max\{\infty, a, a, \ldots\} = \infty = \mathbb{1}$

$D^{(k+1)}(u, v) = \max\{D^{(k)}(u, v), \min\{D^{(k)}(u, k+1), \infty, D^{(k)}(k+1, v)\}\}$
$= \max\{D^{(k)}(u, v), \min\{D^{(k)}(u, k+1), D^{(k)}(k+1, v)\}\}$
$= D^{(k)}(u, v) \oplus \left(D^{(k)}(u, k+1) \odot D^{(k)}(k+1, v)\right)$

(d) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. Notieren Sie nur Matrixelemente, die sich gegenüber der jeweiligen Vorgängermatrix geändert haben.

$$D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3^{\,4} & 0^{\,3} & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0^{\,3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & \underset{=1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} = D_G^{(1)}$$

(1 ist Quelle)



$$D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 4 & 3 & 0^{2} \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0^{2} \\ 0 & 4 & \infty & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4_{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

(1, 3, 4)
(1, 4, 3)
(3, 4, 3)

$$D_G^{(3)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 4 & 3 & 2^{3} \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 2^{3} \\ 0 & 4 & \infty & 3 & 2^{3} \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4_{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}^{\begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}}$$

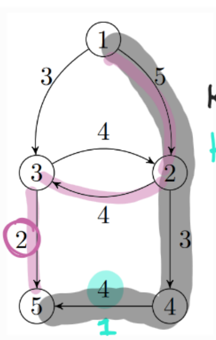
(1, 5, 2)
(2, 5, 2)

$$D_G^{(4)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & \infty & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} = D_G^{(5)} = D_G$$

(1, 5, 3)
(2, 5, 3)
(3, 5, 3)

(5 ist Senke)

(e) Wegen Reparaturarbeiten auf der Strecke von Knoten 4 zu 5 sinkt die maximal zulässige Fahrzeugbreite auf 1m. Wie ändert sich $D_G(1,5)$? Geben Sie den zugehörigen Pfad an.



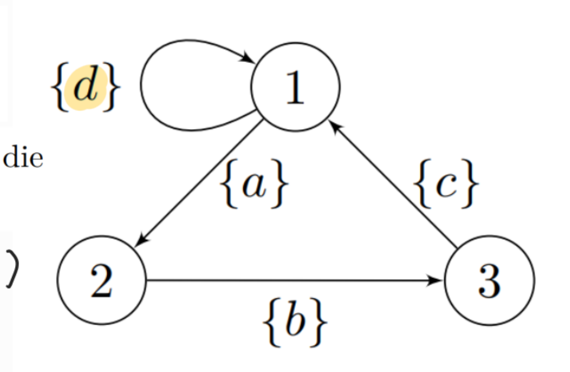
Kap = 3
Kap = 1

$D_G'(1,5) = 2$

Pfad: (1, 2, 3, 5)

Aufgabe 2 (AGS 9.5.29)

Der folgende Graph G stellt ein Prozessdiagramm dar.



(a) Geben Sie den entsprechenden Semiring an. Sie dürfen die Abkürzung $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ verwenden.

$$(S, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1}) = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \circ, \emptyset, \{\varepsilon\})$$

$\emptyset \cup L = L$

$\{\varepsilon\} \circ L = L$

$$\begin{aligned} D_G^{(k+1)}(u,v) &= D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1,v) \right) \\ &= D_G^{(k)}(u,v) \cup \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \circ (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \circ D_G^{(k)}(k+1,v) \right) \\ &= \underline{\text{alt}} \cup \left(\text{Zeile} \circ (\text{Diagonale})^* \circ \text{Spalte} \right) \end{aligned}$$

(b) Geben Sie die modifizierte Adjazenzmatrix an.

$$mA_G = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, d\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \emptyset & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\emptyset}_{\text{alt}} \cup \underbrace{\{c\}}_{\text{Zeile}} \underbrace{\{d\}^*}_{\text{Diag}^*} \underbrace{\{a\}}_{\text{Spalte}}$$

(c) Berechnen Sie mit dem Aho-Algorithmus die Matrix $D_G^{(1)}$.

$\{\varepsilon,d\} \cup \{\varepsilon,d\}\{\varepsilon,d\}^*\{\varepsilon,d\} = \{\varepsilon,d\}^* = \{d\}^*$

$\{a\} \cup \{\varepsilon,d\}\{d\}^*\{a\} = \{d\}^*\{a\}$

$\emptyset \cup \{\varepsilon,d\}\{d\}^*\emptyset = \emptyset$

$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d\}^*\{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\}\{d\}^* & \{c\}\{d\}^*\{a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

$\{c\} \cup \{c\}\{d\}^*\{\varepsilon,d\} = \{c\}\{d\}^*$

(d) Geben Sie nun die Werte $D_G^{(2)}(3,3)$ sowie $D_G^{(3)}(3,3)$ an.

$$\begin{aligned} D_G^{(2)}(3,3) &= D_G^{(1)}(3,3) \cup D_G^{(1)}(3,2) \circ D_G^{(1)}(2,2)^* \circ D_G^{(1)}(2,3) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \left(\{c\}\{d\}^*\{a\} \circ \underbrace{\{\varepsilon\}^*}_{\{\varepsilon\}} \circ \{b\} \right) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{c\}\{d\}^*\{ab\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_G^{(3)}(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup D^{(2)}(3,3) \circ D_G^{(2)}(3,3)^* \circ D_G^{(2)}(3,3) \\ &= (D_G^{(2)}(3,3))^* \\ &= (\{\varepsilon\} \cup \{c\}\{d\}^*\{ab\})^* \\ &= (\{c\}\{d\}^*\{ab\})^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L \cup \underbrace{L \circ L^* \circ L} \\ &= L \cup L^* \\ &= L^* \end{aligned}$$

nur wenn $\varepsilon \in L$