TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 11: KÜRZESTE WEGE

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 20. Dezember 2021

letzte Änderung:
30.12.2021, 14:51

Dijkstra-Algorithmus

SUCHVERFAHREN

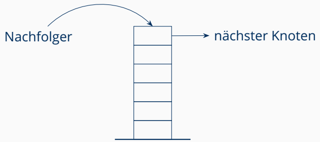
Tiefensuche:

- gehe in die Tiefe:
  „entdecke erst Kinder, dann Geschwister“
- Nachfolger werden *oben* auf den Keller gelegt
- nächster Knoten wird *oben* vom Keller genommen

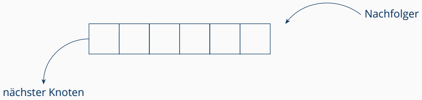
Breitensuche:

- gehe in die Breite:
  „entdecke erst Geschwister, dann Kinder“
- Nachfolger stellen sich *hinten* an
- nächster Knoten wird von *vorn* genommen

Keller:



Warteschlange:



VERALLGEMEINERTE GRAPHENSUCHE

Beobachtung: Suche läuft ähnlich ab

- Operation 1: Lesen des nächsten Knotens `READ`
- Operation 2: Löschen des gewählten Knotens `REMOVE`
  (und seiner Duplikate)
- Operation 3: Hinzufügen der Nachfolgerknoten `INSERT`
- Operation 4: Leerheit der Datenstruktur prüfen `EMPTY`

VERALLGEMEINERTE GRAPHENSUCHE

Beobachtung: Suche läuft ähnlich ab

- Operation 1: Lesen des nächsten Knotens `READ`
- Operation 2: Löschen des gewählten Knotens `REMOVE`
  (und seiner Duplikate)
- Operation 3: Hinzufügen der Nachfolgerknoten `INSERT`
- Operation 4: Leerheit der Datenstruktur prüfen `EMPTY`

	`STORAGE`	`READ`	`REMOVE`	`INSERT`	`EMPTY`
Tiefensuche	Keller	`top`	`pop`	`push`	`empty`
Breitensuche	Queue	`head`	`dequeue`	`enqueue`	`nil`

GRAPHENSUCHE MIT PRIORITÄTSWARTESCHLANGE

weitere Möglichkeit für `STORAGE`: **Prioritätswarteschlange**

- `READ` – Auswahl des nächsten Knotens mit minimaler Priorität
- `REMOVE` – as usual
- `INSERT` – Nachfolger stellt sich entsprechend seiner Priorität in die Warteschlange
  (oder Prioritätswert erhält ein Update, wenn er bereits in der Warteschlange steht)

Vorstellung: *„geordnete“* Warteschlange

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

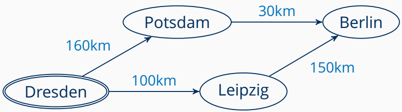
Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

Priotrität = Priorität des Vorgängers + Kantengewicht

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



Wir notieren Knoten in der Form (Knoten, Priorität, Vorgänger).

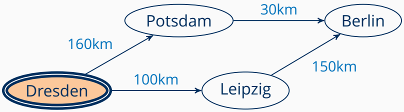
gewählter Knoten	Warteschlange

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



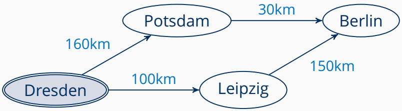
Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

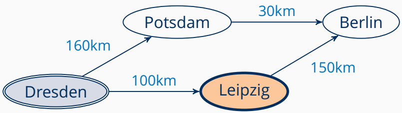
gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

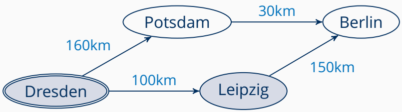
gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)
(Leipzig, 100 km, Dresden)	

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

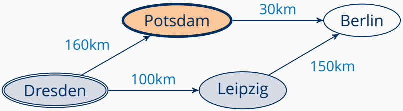
gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)
(Leipzig, 100 km, Dresden)	(Potsdam, 160 km, Dresden), (Berlin, 100 + 150 km, Leipzig)

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



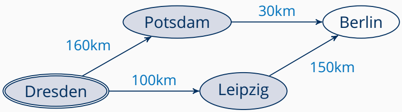
Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)
(Leipzig, 100 km, Dresden)	(Potsdam, 160 km, Dresden), (Berlin, 100 + 150 km, Leipzig)
(Potsdam, 160 km, Dresden)	

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

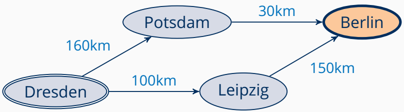
gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)
(Leipzig, 100 km, Dresden)	(Potsdam, 160 km, Dresden), (Berlin, 100 + 150 km, Leipzig)
(Potsdam, 160 km, Dresden)	(Berlin, 160 + 30 km, Potsdam)

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

Beispiel:



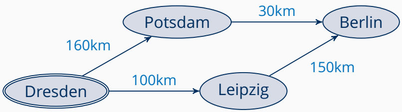
Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)
(Leipzig, 100 km, Dresden)	(Potsdam, 160 km, Dresden), (Berlin, 100 + 150 km, Leipzig)
(Potsdam, 160 km, Dresden)	(Berlin, 160 + 30 km, Potsdam)
(Berlin, 190 km, Potsdam)	

Graphensuche mit Prioritätswarteschlange:

$$\text{Priotrität} = \text{Priorität des Vorgängers} + \text{Kantengewicht}$$

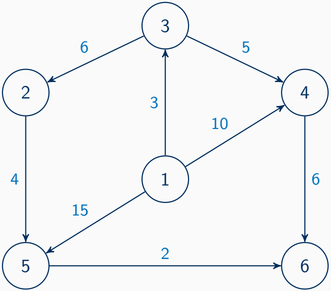
Beispiel:



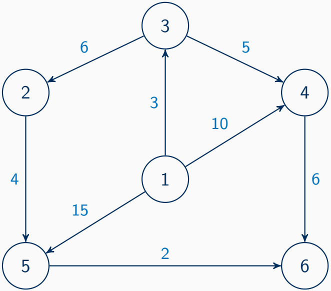
Wir notieren Knoten in der Form $(\text{Knoten}, \text{Priorität}, \text{Vorgänger})$.

gewählter Knoten	Warteschlange
(Dresden, 0 km, –)	(Leipzig, 0 + 100 km, Dresden), (Potsdam, 0 + 160 km, Dresden)
(Leipzig, 100 km, Dresden)	(Potsdam, 160 km, Dresden), (Berlin, 100 + 150 km, Leipzig)
(Potsdam, 160 km, Dresden)	(Berlin, 160 + 30 km, Potsdam)
(Berlin, 190 km, Potsdam)	—

AUFGABE 1

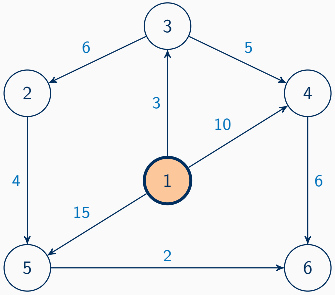


AUFGABE 1



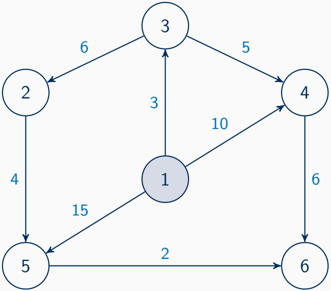
gewählter Knoten	Randknotenmenge

AUFGABE 1



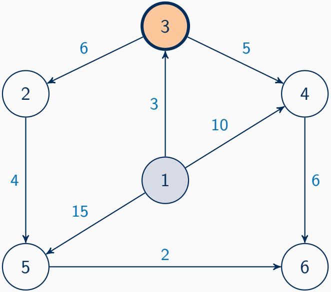
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	

AUFGABE 1



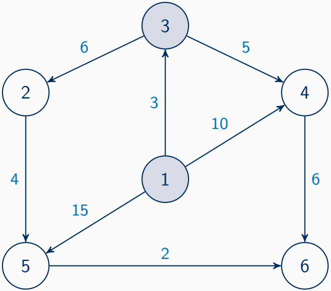
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$

AUFGABE 1



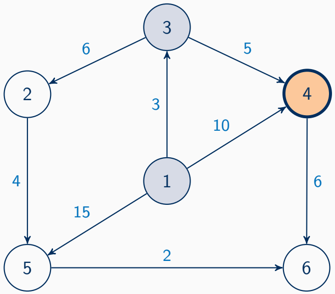
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	

AUFGABE 1



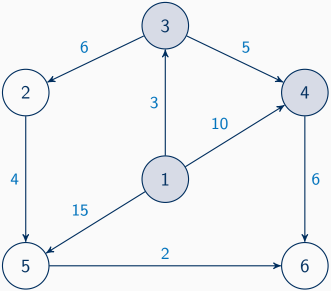
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$

AUFGABE 1



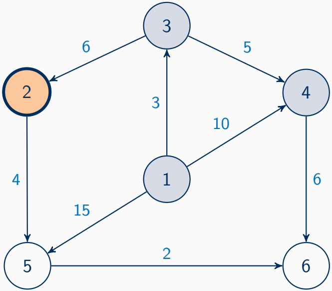
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	

AUFGABE 1



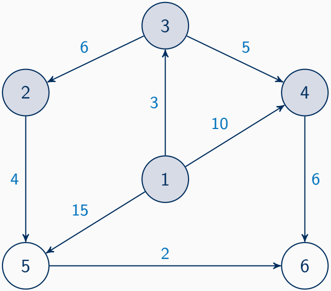
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$

AUFGABE 1



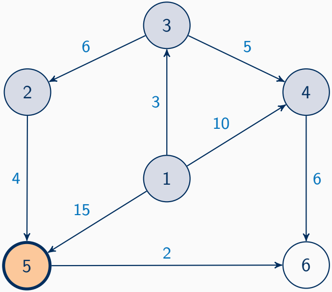
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	

AUFGABE 1



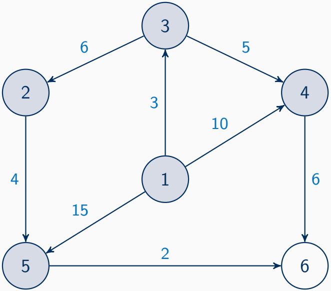
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	$(5, 13, 2)$, $(6, 14, 4)$

AUFGABE 1



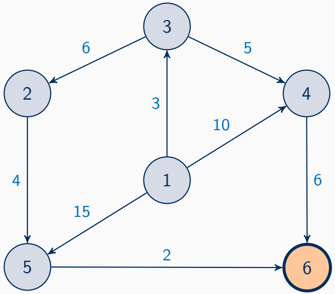
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	$(5, 13, 2)$, $(6, 14, 4)$
$(5, 13, 2)$	

AUFGABE 1



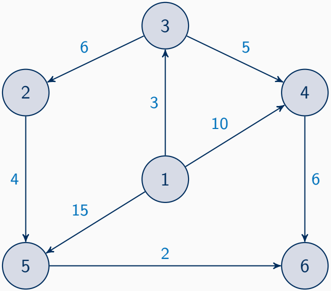
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	$(5, 13, 2)$, $(6, 14, 4)$
$(5, 13, 2)$	$(6, 14, 4)$

AUFGABE 1



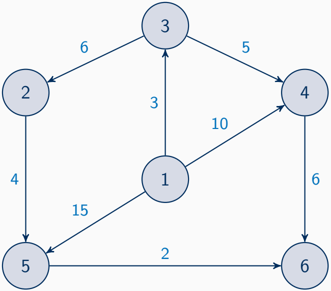
gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	$(5, 13, 2)$, $(6, 14, 4)$
$(5, 13, 2)$	$(6, 14, 4)$
$(6, 14, 4)$	

AUFGABE 1



gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	$(5, 13, 2)$, $(6, 14, 4)$
$(5, 13, 2)$	$(6, 14, 4)$
$(6, 14, 4)$	—

AUFGABE 1



gewählter Knoten	Randknotenmenge
$(1, 0, --)$	$(3, 3, 1)$, $(4, 10, 1)$, $(5, 15, 1)$
$(3, 3, 1)$	$(2, 9, 3)$, $(4, 8, 3)$, $(5, 15, 1)$
$(4, 8, 3)$	$(2, 9, 3)$, $(5, 15, 1)$, $(6, 14, 4)$
$(2, 9, 3)$	$(5, 13, 2)$, $(6, 14, 4)$
$(5, 13, 2)$	$(6, 14, 4)$
$(6, 14, 4)$	—

Pfadtabelle:

Zielknoten	Pfadlänge	kürzester Pfad
1	0	1
2	9	1, 3, 2
3	3	1, 3
4	8	1, 3, 4
5	13	1, 3, 2, 5
6	13	1, 3, 4, 6

Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \ldots, n\}$

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \ldots, n\}$
- $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- $D_G(u, v) = \begin{cases} \min\{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \ldots, n\}$
- $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- $D_G(u, v) = \begin{cases} \min\{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v, deren innere Knoten in $\{1, \ldots, k\}$ liegen
- $D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min\left\{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\right\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \ldots, n\}$
- $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- $D_G(u, v) = \begin{cases} \min\{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v, deren innere Knoten in $\{1, \ldots, k\}$ liegen
- $D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min\left\{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\right\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- Es gilt $P_{u,v}^{(n)} = P_{u,v}$ und somit $D_G^{(n)} = D_G$.

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

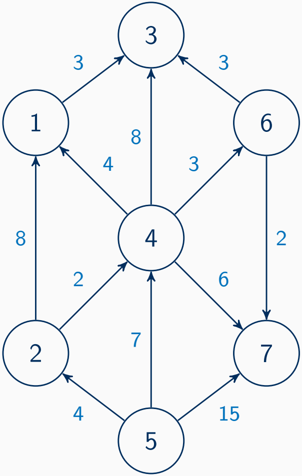
- modifizierte Adjazenzmatrix

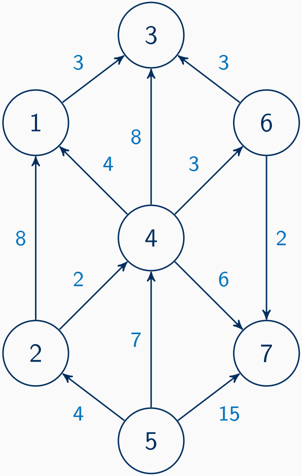
$$mA_G = \min\left\{A_G, \mathbf{0}_n\right\} = \begin{cases} c(u,v) & \text{wenn } u \neq v, (u,v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Initialisierung**: $D_G^{(0)} = mA_G$
- **Rekursion**:

$$\boxed{D_G^{(k+1)}(u,v) = \min\left\{D_G^{(k)}(u,v), D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}}$$

AUFGABE 2





$$mA_G = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 8 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 11 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 12 & 4 & 15 & 6 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. es ändern sich folgende Einträge:

$$\underbrace{(4,3,7),(2,3,11)}_{\text{aus } D_G^{(1)}},\underbrace{(5,3,15),(5,1,12),(5,4,6)}_{\text{aus } D_G^{(2)}}$$

Für $k \in \{4, 6\}$, d.h. durch Zulassen der Knoten 4 und 6 als innere Knoten eines Weges, erreichen wir eine Verbesserung. Dagegen sind die Knoten 3 und 7 *Senken*, d.h. es bringt nichts, diese zu besuchen, weil wir nicht wieder weg kommen. Ebenso bringt uns der Knoten 5 als *Quelle* keine Verbesserung, weil wir diesen gar nicht erreichen können. Somit gilt also

$$D_G^{(2)} = D_G^{(3)} \qquad D_G^{(4)} = D_G^{(5)} \qquad D_G^{(6)} = D_G^{(7)}$$

und wir müssen lediglich $D_G^{(4)}$ sowie $D_G^{(6)}$ explizit berechnen.

AUFGABE 2 — TEIL (D)

$$D_G^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 9 & 2 & \infty & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 11 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 13 & 6 & 0 & 9 & 12 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(5)}$$

$$D_G^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 8 & 2 & \infty & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 & 5 \\ 10 & 4 & 12 & 6 & 0 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(7)} = D_G$$