TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 3: EXTENDED BACKUS-NAUR-FORM

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 13.11.2020

EBNF und ihre Semantik

EBNF-DEFINITION

$$\mathcal{E} = (\underbrace{V}_{\text{Nichtterminalsymbole}},\ \underbrace{\Sigma}_{\text{Terminalsymbole}},\ \underbrace{S}_{\text{Startsymbol}},\ \underbrace{R}_{\text{Regelmenge}})$$

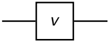
Jede **EBNF-Regel** besteht aus einer linken und einer rechten Seite, die rechte Seite ist ein **EBNF-Term**.

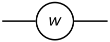
$$\textit{Nichtterminalsymbol} ::= \textit{EBNF-Term}$$

Definition (EBNF-Terme): Seien V (syntaktische Variablen) und Σ (Terminalsymbole) endliche Mengen mit $V \cap \Sigma = \emptyset$. Die Menge der EBNF-Terme über V und Σ (notiere: $T(\Sigma, V)$), ist die *kleinste* Menge $T \subseteq \left(V \cup \Sigma \cup \left\{\hat{\{}, \hat{\}}, \hat{[}, \hat{]}, \hat{(}, \hat{)}, \hat{|}\right\}\right)$ mit $V \subseteq T$, $\Sigma \subseteq T$ und

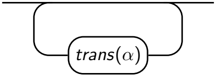
- Wenn $\alpha \in T$, so auch $\hat{(}\ \alpha\ \hat{)} \in T$, $\hat{\{}\ \alpha\ \hat{\}} \in T$, $\hat{[}\ \alpha\ \hat{]} \in T$.
- Wenn $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, so auch $\hat{(}\ \alpha_1\ \hat{|}\ \alpha_2\ \hat{)} \in T$, $\alpha_1\alpha_2 \in T$.

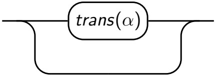
ÜBERSETZUNG EBNF $\leftrightarrow$ SYNTAXDIAGRAMME

Sei $v \in V$ und $w \in \Sigma$. $\mathit{trans}(v) =$ 

; $\mathit{trans}(w) =$ 

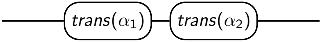
Sei $\alpha \in T(\Sigma, V)$ ein EBNF-Term.

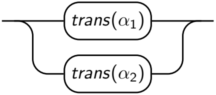
- $\mathit{trans}(\ \hat{\{}\ \alpha\ \hat{\}}\ ) =$ 

- $\mathit{trans}(\ \hat{[}\ \alpha\ \hat{]}\ ) =$ 

- $\mathit{trans}(\ \hat{(}\ \alpha\ \hat{)}\ ) = \mathit{trans}(\alpha)$

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in T(\Sigma, V)$ zwei EBNF-Terme.

- $\mathit{trans}(\ \alpha_1\alpha_2\ ) =$ 

- $\mathit{trans}(\ \hat{(}\ \alpha_1\ \hat{|}\ \alpha_2\ \hat{)}\ ) =$ 

SEMANTIK VON EBNF-TERMEN

Ziel: Ordne einer EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ ihre Sprache zu

- $W(\mathcal{E}, v)$ bezeichnet von $v \in V$ beschriebene Objektsprache
- $\rho\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ ordnet jeder syntaktischen Variable $v \in V$ eine Sprache zu
- Vorstellung: $\rho(v)$ ist bestes Wissen über die von v beschriebene Sprache

Problem: Wie bekomme ich aus einem EBNF-Term eine Sprache?

Semantik $[\![\cdot]\!]: \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\text{EBNF-Term } \alpha} \to ((\underbrace{V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)}_{\rho}) \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

SEMANTIK VON EBNF-TERMEN

$$[\![\cdot]\!] : \quad \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\text{EBNF-Term } \alpha} \;\to ((\underbrace{V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)}_{\rho})) \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$$

Sei $\alpha \in T(\Sigma, V)$ ein EBNF-Term. Die Semantik $[\![\alpha]\!](\rho)$ von α ist definiert als:

- Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \rho(v)$.
- Wenn $\alpha = w \in \Sigma$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \{w\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{\{}\ \alpha_1\ \hat{\}}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = ([\![\alpha_1]\!](\rho))^*$.
- Wenn $\alpha = \hat{[}\ \alpha_1\ \hat{]}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\ \alpha_1\ \hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cdot [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\ \alpha_1 \hat{|}\ \alpha_2\ \hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup [\![\alpha_2]\!](\rho)$.

FIXPUNKTITERATION – EINE ANALOGIE

Ausblick: Fixpunktiteration zur Nullstellenbestimmung

Gegeben sei eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von der wir eine Nullstelle suchen, d.h. ein $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mit $g(\overline{x}) = 0$.

Methode: Newtonverfahren — definiere $\Phi(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.

- Starte mit „beliebigem“ Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Berechne stets $x_{i+1} = \Phi(x_i)$.

Beobachtung: x_i nähert sich der Nullstelle $\overline{x}$ an

Ein *Fixpunkt* von Φ ist ein Punkt x mit $\Phi(x) = x$.

Die Nullstelle $\overline{x}$ ist ein Fixpunkt von Φ, da

$$\Phi(\overline{x}) = \overline{x} - \frac{g(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \overline{x}.$$

FIXPUNKTITERATION FÜR EBNF

Ziel: berechne Sprache $W(\mathcal{E}, v)$ für alle $v \in V$ einer EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$.

Iterierende Funktion:

$$f: \underbrace{(V \to \mathcal{P}(\Sigma^*))}_{\rho} \to (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$$

- Starte mit bisherigen Kenntnis $\rho(v) = \emptyset$ für alle $v \in V$.
  (Nichtswissen)
- Berechne stets neues Wissen $\rho_{\text{neu}} = f(\rho_{\text{alt}})$.
  (Generiere neues Wissen)

Ende: erreiche einen Fixpunkt ρ mit $f(\rho) = \rho$

Dann gilt $\rho(v) = W(\mathcal{E}, v)$ für alle $v \in V$.

FIXPUNKTITERATION FÜR EBNF

Da V endlich ist, ist $f(\rho)\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ nur auf endlich vielen Argumenten definiert, deren Bilder wir nun als Spaltenvektor schreiben:

$$\begin{pmatrix} f(\rho)(v_1) \\ f(\rho)(v_2) \\ \vdots \\ f(\rho)(v_n) \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ \vdots \\ \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \end{matrix}$$

Ein Iterationsprozess lässt sich dann wie folgt notieren:

$$\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto}^{1} \begin{pmatrix} f(\rho)(v_1) \\ f(\rho)(v_2) \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto}^{2} \begin{pmatrix} f(f(\rho))(v_1) \\ f(f(\rho))(v_2) \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto}^{3} \dots$$

$$\overset{f}{\mapsto}^{n} \begin{pmatrix} f^n(\rho)(v_1) \\ f^n(\rho)(v_2) \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto}^{n+1} \dots$$

Übungsblatt 3

AUFGABE 1 — TEIL (A)

Gesucht ist eine EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, sodass

$$W(\mathcal{E}, S) = \left\{ a^k b^\ell c^{2k} c^m : k \geq 1, \ell \geq m \geq 0 \right\}$$

Methode: Zerlegung der Sprache und Anwendung der Grundkonstruktionen als Syntaxdiagramm, Übersetzung als EBNF

$$V = \{S, A\} \quad \text{und} \quad R = \left\{ \begin{aligned} S &::= \hat{(}\ aScc\ \hat{|}\ aAcc\ \hat{)}, \\ A &::= \hat{(}\ bAc\ \hat{|}\ \hat{\{}\ b\ \hat{\}}\ \hat{)} \end{aligned} \right\}$$

AUFGABE 1 — TEIL (B)

Sei $\Sigma' = \{a, b\}$ und $\mathcal{E}' = (\Sigma', V', X, R')$ eine EBNF-Definition mit $V' = \{X, Y\}$ sowie

$$R = \left\{ \; X ::= \hat{(} \; aXa \; \hat{|} \; Y \; \hat{)}, \quad Y ::= \hat{[} \; bY \; \hat{]} \; \right\}.$$

AUFGABE 1 — TEIL (C)

Sei $\Sigma' = \{a, b\}$ und $\mathcal{E}' = (\Sigma', V', X, R')$ eine EBNF-Definition mit $V' = \{X, Y\}$ sowie

$$R = \left\{ \; X ::= \hat{(} \; aXa \; \hat{|} \; Y \; \hat{)}, \quad Y ::= \hat{[} \; bY \; \hat{]} \; \right\}.$$

Die syntaktische Kategorie von X ist gegeben durch

$$W(\mathcal{E}', X) = \left\{a^n b^j a^n : n \geq 0, j \geq 0\right\}$$

AUFGABE 2

Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $R = \left\{ S ::= \hat{(}\; aSa \;\hat{|}\; \hat{[}\; b \;\hat{]}\; \hat{)} \right\}$. Außerdem sei $\rho\colon\ V \to \mathcal{P}\left(\Sigma^*\right)$ mit

$$\rho(S) = \{a^n w a^n : n \geq 0, w \in \{\varepsilon, b\}\}\,.$$

zu zeigen: $\left[\!\left[\hat{(}\; aSa \;\hat{|}\; \hat{[}\; b \;\hat{]}\; \hat{)} \right]\!\right] = \rho(S)$

Ende

AUFGABE 1 — TEIL (B)

Wir wollen eine EBNF-Definition $\mathcal{E}' = (V, \Sigma, S, R)$ finden, sodass

$$W(\mathcal{E}') = \left\{ a^{n+\ell} c b^n (cd)^\ell \mid n, \ell \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

gilt. Wir zerlegen wie üblich die Sprache in unabhängige Teile:

$$L = \left\{ a^\ell \;\; a^n \; c \; b^n \;\; (cd)^\ell \mid n, \ell \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

Dann ergibt sich also nach dem Grundschema

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\} \\ R &= \left\{ S ::= \hat{(}\; aScd \;\hat{|}\; A \;\hat{)},\;\; A ::= a \;\hat{(}\; A \;\hat{|}\; c \;\hat{)}\; b \right\} \end{aligned}$$

SEMANTIK VON EBNF-TERMEN

- Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ eine EBNF-Definition.
- $v \in V \rightsquigarrow W(\mathcal{E}, v) = \rho(v)$ (syntaktische Kategorie)
- Semantik $[\![\cdot]\!] : \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\alpha} \to (\underbrace{(V \to \mathcal{P}(\Sigma^*))}_{\rho} \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

Definiere $[\![\alpha]\!](\rho)$ wie folgt:

- Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \rho(v)$.
- Wenn $\alpha \in \Sigma$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = \{\alpha\}$.
- Wenn $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cdot [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\alpha_1\hat{|}\alpha_2\hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup [\![\alpha_2]\!](\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{\{}\alpha_1\hat{\}}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = ([\![\alpha_1]\!](\rho))^*$.
- Wenn $\alpha = \hat{[}\alpha_1\hat{]}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{(}\alpha_1\hat{)}$, dann gilt $[\![\alpha]\!](\rho) = [\![\alpha_1]\!](\rho)$.

AUFGABE 2 — TEIL (A)

- $\rho\colon V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$
- $f\colon (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)) \to (V \to \mathcal{P}(\Sigma^*))$

$$f(\rho) = \begin{pmatrix} f(\rho)(S) \\ f(\rho)(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\![ddAc]\!](\rho) \\ \left[\!\!\left[\hat{[}\; S\; \hat{]} a \right]\!\!\right](\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ (\rho(S) \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{a\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ \rho(S) \cdot \{a\} \cup \{a\} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$f(\rho) = \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ \rho(S) \cdot \{a\} \cup \{a\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \mapsto^1 \begin{pmatrix} \emptyset \\ \{a\} \end{pmatrix} \mapsto^2 \begin{pmatrix} \{ddac\} \\ \{a\} \end{pmatrix} &\mapsto^3 \begin{pmatrix} \{ddac\} \\ \{ddaca, a\} \end{pmatrix} \\
&\mapsto^4 \begin{pmatrix} \left\{(dd)^2(ac)^2, ddac\right\} \\ \{ddaca, a\} \end{pmatrix} \\
&\mapsto^5 \begin{pmatrix} \left\{(dd)^2(ac)^2, ddac\right\} \\ \left\{(dd)^2(ac)^2 a, ddaca, a\right\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die ersten Schritte zeigten

$$\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \mapsto^1 \ldots \mapsto^5 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{(dd)^2(ac)^2 a, ddaca, a\} \end{pmatrix}$$

Führen wir diese Iteration nur „bis ins Unendliche“ fort, so erhalten wir

$$W(\mathcal{E}, S) = \{(dd)^n(ac)^n : n \geq 1\}$$
$$W(\mathcal{E}, A) = \{(dd)^n(ac)^n a : n \geq 0\}$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

Wir brauchen die Semantik von $S ::= \hat{[}\ a\hat{(}\ Sb\ \hat{|}\ Sbb\ \hat{)}\ \hat{]}$.

$$
\begin{aligned}
\left[\!\left[\hat{[}\ a\hat{(}\ Sb\ \hat{|}\ Sbb\ \hat{)}\ \hat{]}\right]\!\right](\rho) &= \{\varepsilon\} \cup \left[\!\left[a\hat{(}\ Sb\ \hat{|}\ Sbb\ \hat{)}\right]\!\right](\rho) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \left[\!\left[\hat{(}\ Sb\ \hat{|}\ Sbb\ \hat{)}\right]\!\right](\rho) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\llbracket Sb \rrbracket (\rho) \cup \llbracket Sbb \rrbracket (\rho)) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\rho(S) \cdot \{b\} \cup \rho(S) \cdot \{bb\}) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}
\end{aligned}
$$

Damit können wir die Iterationsfunktion aufstellen:

$$
\begin{aligned}
f(\rho) = \Big(f(\rho)(S)\Big) &= \Big(\left[\!\left[\hat{[}\ a\hat{(}\ Sb\ \hat{|}\ Sbb\ \hat{)}\ \hat{]}\right]\!\right](\rho)\Big) \\
&= \Big(\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}\Big)
\end{aligned}
$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

$$f(\rho) = \Big(\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}\Big)$$

3 Iterationen:

$$\begin{aligned}\Big(\emptyset\Big) \mapsto^1 \Big(\{\varepsilon\}\Big) &\mapsto^2 \Big(\{\varepsilon, ab, abb\}\Big) \\ &\mapsto^3 \Big(\{\varepsilon, ab, abb, aabb, aabbb, aabbbb\}\Big)\end{aligned}$$

AUFGABE 3 — TEIL (B)

Sei $\rho\colon\ V \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ mit $\rho(S) = \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\}$.

Zu zeigen: $\llbracket \hat{[}\; a\hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)}\; \hat{]} \rrbracket\,(\rho) = \rho(S)$.

$$
\begin{aligned}
& \llbracket \hat{[}\; a\hat{(}\; Sb \;\hat{|}\; Sbb \;\hat{)}\; \hat{]} \rrbracket\,(\rho) \\
= \;& \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\} \\
= \;& \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cdot \{bb\} \\
= \;& \{\varepsilon\} \cup \{aa^n b^n b \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cup \{aa^n b^m bb \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \\
= \;& \{a^n b^m \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \\
= \;& \rho(S)
\end{aligned}
$$