

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 3: EXTENDED BACKUS-NAUR-FORM

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 13.11.2020

Wiederholung

EBNF-DEFINITION

- ▶ EBNF-Definition besteht aus endlicher Menge von EBNF-Regeln.
- ▶ Jede EBNF-Regel besteht aus einer linken und einer rechten Seite, die rechte Seite ist ein EBNF-Term.

Definition: EBNF-Term

Seien V eine endliche Menge (syntaktische Variablen) und Σ eine endliche Menge (Terminalsymbole) mit $V \cap \Sigma = \emptyset$. Die Menge der EBNF-Terme über V und Σ (notiere: $T(\Sigma, V)$), ist die kleinste Menge $T \subseteq \left(V \cup \Sigma \cup \left\{ \{ \}, \{ \}, [\}, [\}, (\}, (\} \right\} \right)$ mit $V \subseteq T, \Sigma \subseteq T$ und

- ▶ Wenn $\alpha \in T$, so auch $\hat{\alpha} \in T, \{ \alpha \} \in T, [\alpha] \in T$.
- ▶ Wenn $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, so auch $\hat{\alpha_1} \hat{\alpha_2} \in T, \alpha_1 \alpha_2 \in T$

ÜBERSETZUNG SYNTAXDIAGRAMME \leftrightarrow EBNF

Die Funktion $\text{trans}: T(\Sigma, V) \rightarrow \text{SynDia}(\Sigma, V)$ ist induktiv über den Aufbau von EBNF-Termen definiert:

1. Sei $v \in V$; $\text{trans}(v) = \text{---} \boxed{v} \text{---}$

2. Sei $w \in \Sigma$; $\text{trans}(w) = \text{---} \bigcirc w \text{---}$

3. Sei $\alpha \in T(\Sigma, V)$;

- $\text{trans}(\{\hat{\alpha}\}) = \text{---} \overbrace{\hspace{1cm}} \text{trans}(\alpha) \text{---}$

- $\text{trans}([\hat{\alpha}]) = \text{---} \underbrace{\hspace{1cm}} \text{trans}(\alpha) \text{---}$

- $\text{trans}((\hat{\alpha})) = \text{trans}(\alpha)$

4. Sei $\alpha_1, \alpha_2 \in T(\Sigma, V)$;

- $\text{trans}(\alpha_1 \alpha_2) = \text{---} \text{trans}(\alpha_1) \text{---} \text{trans}(\alpha_2) \text{---}$

- $\text{trans}((\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2)) = \text{---} \underbrace{\hspace{1cm}} \text{trans}(\alpha_1) \text{---} \underbrace{\hspace{1cm}} \text{trans}(\alpha_2) \text{---}$

- ▶ Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ eine EBNF-Definition.
- ▶ $v \in V \rightsquigarrow W(\mathcal{E}, v) = \rho(v)$ (syntaktische Kategorie)
- ▶ Semantik $\llbracket \cdot \rrbracket : \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\alpha} \rightarrow ((\underbrace{V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)}_{\rho}) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))$

Definiere $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho)$ wie folgt:

- Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \rho(v)$.
- Wenn $\alpha \in \Sigma$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \{\alpha\}$.
- Wenn $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho) \cdot \llbracket \alpha_2 \rrbracket(\rho)$.
- Wenn $\alpha = (\hat{\alpha}_1 \hat{\mid} \alpha_2 \hat{)}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho) \cup \llbracket \alpha_2 \rrbracket(\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{\alpha}_1 \hat{}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = (\llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho))^*$.
- Wenn $\alpha = \hat{\alpha}_1 \hat{}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{(\alpha_1)}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho)$.

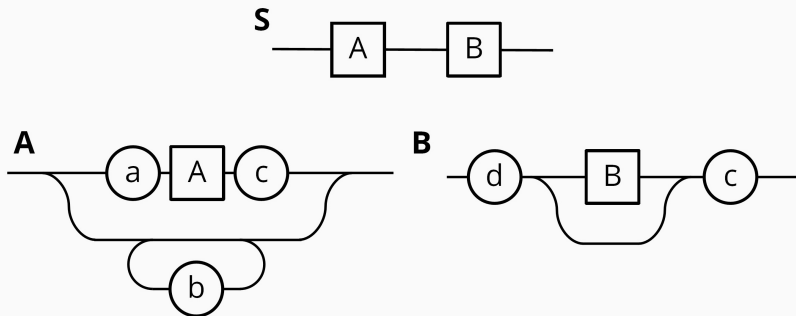
Übungsblatt 3

AUFGABE 1 — TEIL (A)

Gegeben sei eine EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ und

$$R = \left\{ S ::= AB, \quad A ::= \hat{a} A c \hat{\{ b \}}, \quad B ::= d \hat{B} c \right\}$$

Gesucht ist ein System von Syntaxdiagrammen



AUFGABE 1 — TEIL (B)

Wir wollen eine EBNF-Definition $\mathcal{E}' = (V, \Sigma, S, R)$ finden, sodass

$$W(\mathcal{E}') = \{a^{n+\ell}cb^n(cd)^\ell \mid n, \ell \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

gilt. Wir zerlegen wie üblich die Sprache in unabhängige Teile:

$$L = \{a^\ell a^n c b^n (cd)^\ell \mid n, \ell \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

Dann ergibt sich also nach dem Grundschemata

$$V = \{S, A\}$$

$$R = \{S ::= \hat{a} S c d \hat{A} \hat{A}, \quad A ::= a \hat{A} \hat{c} \hat{b}\}$$

- ▶ Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ eine EBNF-Definition.
- ▶ $v \in V \rightsquigarrow W(\mathcal{E}, v) = \rho(v)$ (syntaktische Kategorie)
- ▶ Semantik $\llbracket \cdot \rrbracket : \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{((V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))}_{\rho}$

Definiere $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho)$ wie folgt:

- Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \rho(v)$.
- Wenn $\alpha \in \Sigma$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \{\alpha\}$.
- Wenn $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho) \cdot \llbracket \alpha_2 \rrbracket(\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{(\alpha_1 | \alpha_2)}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho) \cup \llbracket \alpha_2 \rrbracket(\rho)$.
- Wenn $\alpha = \hat{\{\alpha_1\}}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = (\llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho))^*$.
- Wenn $\alpha = \hat{[\alpha_1]}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- Wenn $\alpha = \hat{(\alpha_1)}$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket(\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket(\rho)$.

AUFGABE 2 — TEIL (A)

- ▶ $\rho: V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$
- ▶ $f: (V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)) \rightarrow (V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))$

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \begin{pmatrix} f(\rho)(S) \\ f(\rho)(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \llbracket ddAc \rrbracket(\rho) \\ \llbracket \hat{S} \hat{a} \rrbracket(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ (\rho(S) \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{a\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ \rho(S) \cdot \{a\} \cup \{a\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

AUFGABE 2 — TEIL (B)

$$f(\rho) = \begin{pmatrix} \{dd\} \cdot \rho(A) \cdot \{c\} \\ \rho(S) \cdot \{a\} \cup \{a\} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \mapsto^1 \begin{pmatrix} \emptyset \\ \{a\} \end{pmatrix} \mapsto^2 \begin{pmatrix} \{ddac\} \\ \{a\} \end{pmatrix} \mapsto^3 \begin{pmatrix} \{ddac\} \\ \{ddaca, a\} \end{pmatrix} \\ \mapsto^4 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{ddaca, a\} \end{pmatrix} \\ \mapsto^5 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{(dd)^2(ac)^2a, ddaca, a\} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2 — TEIL (C)

Die ersten Schritte zeigten

$$\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \mapsto^1 \dots \mapsto^5 \begin{pmatrix} \{(dd)^2(ac)^2, ddac\} \\ \{(dd)^2(ac)^2a, ddaca, a\} \end{pmatrix}$$

Führen wir diese Iteration nur „bis ins Unendliche“ fort, so erhalten wir

$$W(\mathcal{E}, S) = \{(dd)^n(ac)^n : n \geq 1\}$$

$$W(\mathcal{E}, A) = \{(dd)^n(ac)^na : n \geq 0\}$$

AUFGABE 3 — TEIL (A)

Wir brauchen die Semantik von $S ::= [\hat{a}(\hat{Sb} \hat{\mid} \hat{Sbb}) \hat{~}]$.

$$\begin{aligned} \llbracket [\hat{a}(\hat{Sb} \hat{\mid} \hat{Sbb}) \hat{~}] \rrbracket (\rho) &= \{\varepsilon\} \cup \llbracket \hat{a}(\hat{Sb} \hat{\mid} \hat{Sbb}) \hat{~} \rrbracket (\rho) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \llbracket \hat{Sb} \hat{\mid} \hat{Sbb} \hat{~} \rrbracket (\rho) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\llbracket Sb \rrbracket (\rho) \cup \llbracket Sbb \rrbracket (\rho)) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot (\rho(S) \cdot \{b\} \cup \rho(S) \cdot \{bb\}) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\} \end{aligned}$$

Damit können wir die Iterationsfunktion aufstellen:

$$\begin{aligned} f(\rho) = (f(\rho)(S)) &= (\llbracket [\hat{a}(\hat{Sb} \hat{\mid} \hat{Sbb}) \hat{~}] \rrbracket (\rho)) \\ &= (\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\}) \end{aligned}$$

$$f(\rho) = \left(\{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\} \right)$$

3 Iterationen:

$$\begin{aligned} (\emptyset) &\mapsto^1 (\{\varepsilon\}) \mapsto^2 (\{\varepsilon, ab, abb\}) \\ &\mapsto^3 (\{\varepsilon, ab, abb, aabb, aabbb, aabbbb\}) \end{aligned}$$

AUFGABE 3 — TEIL (B)

Sei $\rho: V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ mit $\rho(S) = \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\}$.

Zu zeigen: $\llbracket \hat{a} \hat{(Sb \hat{S}bb)} \hat{)} \hat{)} \rrbracket (\rho) = \rho(S)$.

$$\begin{aligned} & \llbracket \hat{a} \hat{(Sb \hat{S}bb)} \hat{)} \hat{)} \rrbracket (\rho) \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \rho(S) \cdot \{bb\} \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cdot \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cdot \{b\} \cup \{a\} \cdot \{a^n b^n \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cdot \{bb\} \\ &= \{\varepsilon\} \cup \{aa^n b^n b \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \cup \{aa^n b^m bb \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \\ &= \{a^n b^m \mid 2n \geq m \geq n \geq 0\} \\ &= \rho(S) \end{aligned}$$