TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 11: GRAPHENSUCHE & FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

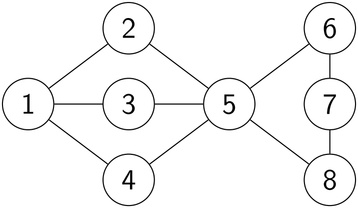
TU Dresden, 22.01.2021

letzte Änderung: 15.12.2021, 21:16

Breiten- und Tiefensuche

SUCHVERFAHREN

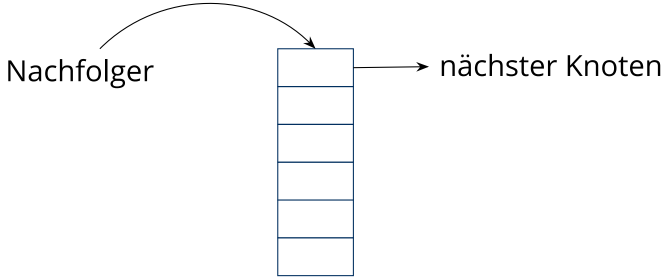
- Ziel: Finden eines Knotens mit bestimmter Beschriftung in einem Graphen
- hier: uninformierte Suche mit Tiefen- und Breitensuche



TIEFENSUCHE

- gehe in die Tiefe: „entdecke erst Kinder, dann Geschwister“
- Datenstruktur: Keller
- Nachfolger werden *oben* auf den Keller gelegt
- nächster Knoten wird *oben* vom Keller genommen

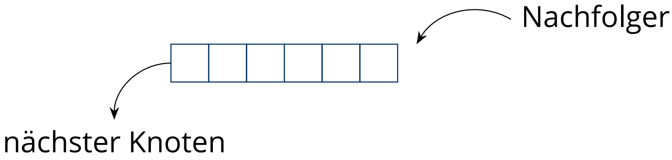
Keller:



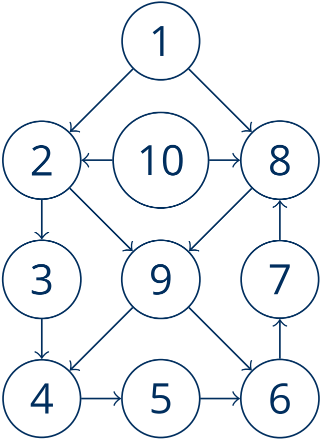
BREITENSUCHE

- gehe in die Breite: „entdecke erst Geschwister, dann Kinder“
- Datenstruktur: Warteschlange
- Nachfolger werden *hinten* stellen sich *hinten* an
- nächster Knoten wird von *vorn* genommen

Warteschlange:



AUFGABE 1

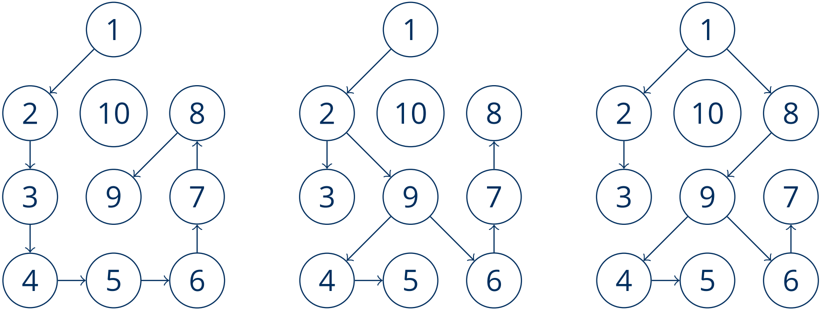


(a) **Tiefensuche**:
3 verschiedene
depth-first trees

(b) **Breitensuche**:
3 verschiedene
breadth-first trees

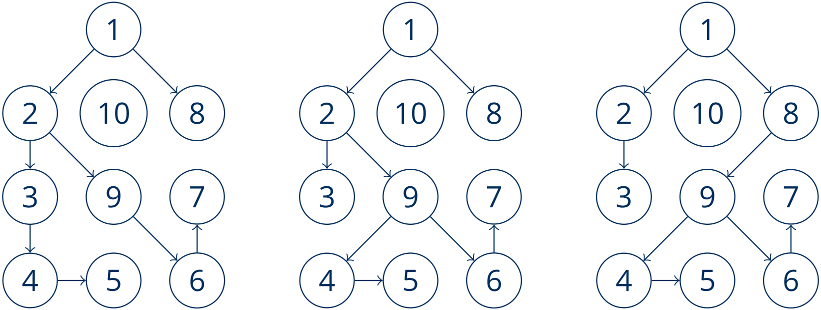
Tiefensuche

Es gibt 5 verschiedene depth-first-trees, z.B.:



Breitensuche

Es gibt 5 verschiedene breadth-first-trees, z.B.:



Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Weglängen c und ohne Schlingen
- **Ziel**: kürzeste Wege von beliebigem Startknoten zu beliebigem Zielknoten
- oBdA: $V = \{1, \ldots, n\}$
- $P_{u,v}$ = Menge aller Wege von u nach v
- $D_G(u, v) = \begin{cases} \min\{c_p : p \in P_{u,v}\} & \text{wenn } P_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v, deren innere Knoten in $\{1, \ldots, k\}$ liegen
- $D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min\left\{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\right\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- Es gilt $P_{u,v}^{(n)} = P_{u,v}$ und somit $D_G^{(n)} = D_G$.

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

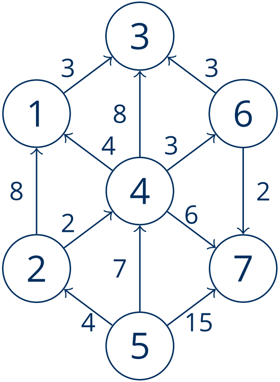
- modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \min\{A_G, \mathbf{0}_n\} = \begin{cases} c(u,v) & \text{wenn } u \neq v, (u,v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Initialisierung**: $D_G^{(0)} = mA_G$
- **Rekursion**:

$$\boxed{D_G^{(k+1)}(u,v) = \min\left\{D_G^{(k)}(u,v), D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}}$$

AUFGABE 2



$$mA_G = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 8 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ \infty & 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 11 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 7 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 12 & 4 & 15 & 6 & 0 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. es ändern sich folgende Einträge:

$$\underbrace{(4,3,7),(2,3,11)}_{\text{aus } D_G^{(1)}}, \underbrace{(5,3,15),(5,1,12),(5,4,6)}_{\text{aus } D_G^{(2)}}$$

Für $k \in \{4, 6\}$, d.h. durch Zulassen der Knoten 4 und 6 als innere Knoten eines Weges, erreichen wir eine Verbesserung. Dagegen sind die Knoten 3 und 7 *Senken*, d.h. es bringt nichts, diese zu besuchen, weil wir nicht wieder weg kommen. Ebenso bringt uns der Knoten 5 als *Quelle* keine Verbesserung, weil wir diesen gar nicht erreichen können. Somit gilt also

$$D_G^{(2)} = D_G^{(3)} \qquad D_G^{(4)} = D_G^{(5)} \qquad D_G^{(6)} = D_G^{(7)}$$

und wir müssen lediglich $D_G^{(4)}$ sowie $D_G^{(6)}$ explizit berechnen.

$$D_G^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 9 & 2 & \infty & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 11 & 0 & \infty & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 13 & 6 & 0 & 9 & 12 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(5)}$$

$$D_G^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 8 & 2 & \infty & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 6 & 0 & \infty & 3 & 5 \\ 10 & 4 & 12 & 6 & 0 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D_G^{(7)} = D_G$$