

# ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

## FIXPUNKTITERATION

---

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

Gegeben sei eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Definition

Ein **Fixpunkt** von  $f$  ist ein Punkt  $x^* \in \mathbb{R}$  mit

$$f(x^*) = x^* \quad (1)$$

**Motivation:** Lösen von Gleichungen/Gleichungssystemen

# MOTIVATION

Wir wollen Gleichungen der Form

$$\tilde{f}(x) = 0 \quad (2)$$

lösen. Jede solche Gleichung lässt sich leicht in Fixpunktform

$$f(x) = x \quad (3)$$

bringen. Betrachte zum Beispiel die Gleichung

$$\tilde{f}(x) := -\frac{1}{2}x^2 + x \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

mit *einer* zugehöriger Fixpunktform

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = x \quad (5)$$

# EIN EINFACHES ITERATIONSVERFAHREN

Wollen wir nun Fixpunkte  $x^*$  von  $f$  bestimmen, so ergibt sich folgenden Möglichkeit:

- ▶ wähle *geeigneten* Startpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  (in der Nähe der vermuteten Lösung)
- ▶ berechne

$$x_{i+1} := f(x_i)$$

## Beobachtung

Unter bestimmten Voraussetzungen nähert sich die Folge der  $x_i$ 's dem Fixpunkt  $x^*$  an!

# EIN BEISPIEL

Betrachten wir wieder die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$  und wählen als Startwert  $x_0 = 0.3$ . Dann ergeben sich folgende Werte:

$$x_0 = 0.3$$

$$x_1 = 0.555$$

$$x_2 = 0.9559875$$

$$x_3 = 1.45501895$$

$$x_4 = 1.85149783$$

$$x_5 = 1.98897355$$

$$x_6 = 1.99993921$$

$$x_7 = 2.$$

$$x_8 = 2.$$

$$x_9 = 2.$$

$$x_{10} = 2.$$

