

# ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

## ÜBUNG 12: AHO-HOPCRAFT-ULLMANN-ALGORITHMUS

---

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 29.01.2021

# Algebraisches Pfadproblem

---

# FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

- ▶ **Ziel:** kürzeste Wege in Graphem  $G = (V, E, c)$
- ▶  $P_{u,v}^{(k)}$  = Menge aller Wege von  $u$  nach  $v$ , deren innere Knoten in  $\{1, \dots, k\}$  liegen
- ▶  $D_G^{(k)}(u, v) = \begin{cases} \min \{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

- ▶ **Initialisierung:**

$$D_G^{(0)} = mA_G = \min \{A_G, \mathbf{0}_n\} = \begin{cases} c(u, v) & \text{wenn } u \neq v, (u, v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ **Rekursion:**

$$\begin{aligned} D_G^{(k+1)}(u, v) &= \min \left\{ D_G^{(k)}(u, v), D_G^{(k)}(u, k+1) + D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{ccc} \text{alt} & , & \text{Zeile} + \text{Spalte} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

# ABSTRAKTION: ALGEBRAISCHES PFADPROBLEM

- ▶ **bisher:** kürzeste Wege
  - ▷ Summation + entlang der Pfade
  - ▷ Minimum min über alle Pfade
- ▶ **jetzt:** Verallgemeinerung
  - ▷ Pfadoperation  $\odot$  entlang der Pfade
  - ▷ Akkumulationsoperation  $\oplus$
- ▶ **Ergebnis:** allgemeine algebraische Struktur — Semiring  
( $S, \oplus, \odot, 0, 1$ )

	Werte $S$	$\oplus$	$\odot$	<b>0</b>	<b>1</b>
kürzeste Wegeproblem	$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$	min	+	$\infty$	0
Kapazitätsproblem	$\mathbb{N}_{\infty}$	max	min	0	$\infty$
Erreichbarkeitsproblem	$\{\text{true}, \text{false}\}$	$\vee$	$\wedge$	false	true
Zuverlässigkeitsproblem	$[0, 1]$	max	$\cdot$	0	1
Prozessproblem	$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	$\cup$	$\circ$	$\emptyset$	$\{\varepsilon\}$

- ▶ modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \begin{cases} A_G(u, v) & \text{wenn } u \neq v \\ A_G(u, v) \oplus \mathbf{1} & \text{wenn } u = v \end{cases}$$

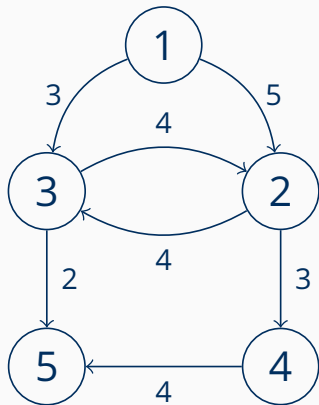
- ▶ **Initialisierung:**  $D_G^{(0)} = mA_G$
- ▶ **Rekursion:**

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u, v) \\ &= D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left( D_G^{(k)}(u, k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \end{aligned}$$

- ▶ vgl. dazu Floyd-Warshall:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u, v) \\ &= \min \left\{ D_G^{(k)}(u, v), D_G^{(k)}(u, k+1) + 0 + D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \end{aligned}$$

# AUFGABE 1



**Teil (a) :**

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$$

**Teil (b) :**

$$mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

# AUFGABE 1

**Teil (c)** : Laut Vorlesung gilt  $s^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\oplus} s^n$  mit  $s^0 = \mathbf{1}$  und  $s^{n+1} = s \odot s^n$ .  
Im Semiring  $(\mathbb{N}_{\infty}, \max, \min, 0, \infty)$  gilt:

- ▶  $s^0 = \mathbf{1} = \infty$
- ▶  $s^1 = s \odot s^0 = \min \{s, \infty\} = s$
- ▶  $s^2 = s \odot s^1 = \min \{s, s\} = s$
- ▶ ...

Schließlich ist

$$s^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\max} s^n = \sup \{s^n : n \in \mathbb{N}\} = \sup \{\infty, s, s, \dots\} = \infty = \mathbf{1}.$$

Somit gilt dann in der Updateformel

$$\begin{aligned} D_G^{(k+1)}(u, v) &= \max \left\{ D_G^{(k)}(u, v), \min \left\{ D_G^{(k)}(u, k+1), \infty, D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \right\} \\ &= \max \left\{ D_G^{(k)}(u, v), \min \left\{ D_G^{(k)}(u, k+1), D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \right\} \\ &= D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left( D_G^{(k)}(u, k+1) \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \end{aligned}$$

## Teil (d) :

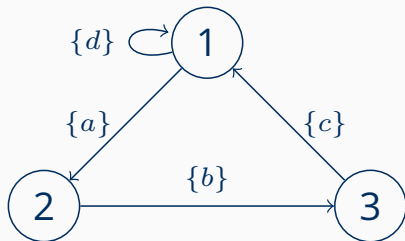
- ▶  $D_G^{(1)}$ : keine Änderung (Quelle)
- ▶  $D_G^{(2)}$ : (1, 3, 4), (3, 4, 3), (1, 4, 3)
- ▶  $D_G^{(3)}$ : (1, 5, 2), (2, 5, 2)
- ▶  $D_G^{(4)}$ : (1, 5, 3), (2, 5, 3), (3, 5, 3)
- ▶  $D_G^{(5)}$ : keine Änderung (Senke)

## Teil (e) :

$D_{G'}(1, 5) = 2$  über den Pfad (1, 2, 3, 5)



## AUFGABE 2



**Teil (a) :**

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) =$$

$$(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \circ, \emptyset, \{\varepsilon\})$$

Update-Formel:

$$\begin{aligned}
 & D_G^{(k+1)}(u, v) \\
 &= D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left( D_G^{(k)}(u, k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \\
 &= D_G^{(k)}(u, v) \cup \left( D_G^{(k)}(u, k+1) \circ (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \circ D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \\
 &= \text{alt} \quad \cup \left( \text{Zeile} \quad \circ \quad (\text{Diagonale})^* \quad \circ \quad \text{Spalte} \right)
 \end{aligned}$$

## AUFGABE 2

**Teil (b) :**  $mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, d\} & \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \emptyset & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$

**Teil (c) :**  $D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d\}^* \{a\} & \emptyset \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} \{d\}^* & \{c\} \{d\}^* \{a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$

### Teil (d) :

$$\begin{aligned}D_G^{(2)}(3,3) &= D_G^{(1)}(3,3) \cup \left( D_G^{(1)}(3,2) \circ (D_G^{(1)}(2,2))^* \circ D_G^{(1)}(2,3) \right) \\&= \{\varepsilon\} \cup \left( \{c\} \{d\}^* \{a\} \circ \{\varepsilon\}^* \circ \{b\} \right) \\&= \{\varepsilon\} \cup \left( \{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_G^{(3)}(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left( D_G^{(2)}(3,3) \circ (D_G^{(2)}(3,3))^* \circ D_G^{(2)}(3,3) \right) \\&= D_G^{(2)}(3,3) \cup \left( D_G^{(2)}(3,3) \right)^* \\&= \left( D_G^{(2)}(3,3) \right)^* \\&= \left( \{\varepsilon\} \cup \{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)^* \\&= \left( \{c\} \{d\}^* \{ab\} \right)^*\end{aligned}$$