

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 15: WIEDERHOLUNG & KONSULTATION

Eric Kunze

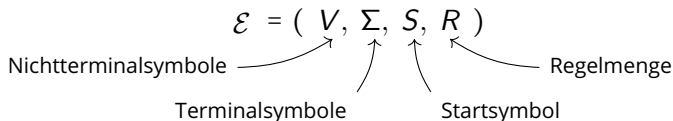
`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 31.01.2022

letzte Änderung:
30.01.2022, 15:32

Fixpunktsemantik

EBNF-DEFINITION



Jede **EBNF-Regel** besteht aus einer linken und einer rechten Seite, die rechte Seite ist ein **EBNF-Term**.

Nichtterminalsymbol ::= EBNF-Term

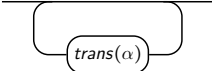
Definition (EBNF-Terme): Seien V (syntaktische Variablen) und Σ (Terminalsymbole) endliche Mengen mit $V \cap \Sigma = \emptyset$. Die Menge der EBNF-Terme über V und Σ (notiere: $T(\Sigma, V)$), ist die *kleinste* Menge $T \subseteq \left(V \cup \Sigma \cup \left\{ \hat{\{ \}}, \hat{\} \}, \hat{[\]}, \hat{] \}, \hat{(\)}, \hat{) \}, \hat{| \} \right\} \right)$ mit $V \subseteq T, \Sigma \subseteq T$ und

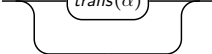
- ▶ Wenn $\alpha \in T$, so auch $\hat{(\alpha)} \in T, \hat{\{\alpha\}} \in T, \hat{[\alpha]} \in T$.
- ▶ Wenn $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, so auch $\hat{(\alpha_1 \mid \alpha_2)} \in T, \alpha_1 \alpha_2 \in T$.

ÜBERSETZUNG EBNF \leftrightarrow SYNTAXDIAGRAMME

Sei $v \in V$ und $w \in \Sigma$. $trans(v) = \text{---} \boxed{v} \text{---}$; $trans(w) = \text{---} \bigcirc w \text{---}$

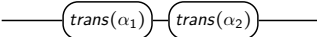
Sei $\alpha \in T(\Sigma, V)$ ein EBNF-Term.

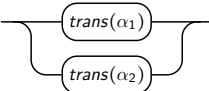
► $trans(\hat{\{ \alpha \}}) =$ The diagram shows a horizontal line entering from the left, which then splits into two parallel paths. The upper path contains a rounded rectangle labeled $trans(\alpha)$. The lower path is a direct connection. The two paths then merge back into a single horizontal line exiting to the right.

► $trans(\hat{[\alpha]}) =$ The diagram shows a horizontal line entering from the left, which then splits into two parallel paths. The upper path contains a rounded rectangle labeled $trans(\alpha)$. The lower path is a direct connection. The two paths then merge back into a single horizontal line exiting to the right.

► $trans(\hat{(\alpha)}) = trans(\alpha)$

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in T(\Sigma, V)$ zwei EBNF-Terme.

► $trans(\alpha_1 \alpha_2) =$ The diagram shows a horizontal line entering from the left, passing through a rounded rectangle labeled $trans(\alpha_1)$, then through another rounded rectangle labeled $trans(\alpha_2)$, and finally exiting to the right.

► $trans(\hat{(\alpha_1 \mid \alpha_2)}) =$ The diagram shows a horizontal line entering from the left, which then splits into two parallel paths. The upper path contains a rounded rectangle labeled $trans(\alpha_1)$. The lower path contains a rounded rectangle labeled $trans(\alpha_2)$. The two paths then merge back into a single horizontal line exiting to the right.

Ziel: Ordne einer EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ ihre Sprache zu

- ▶ $W(\mathcal{E}, v)$ bezeichnet von $v \in V$ beschriebene Objektsprache
- ▶ $\rho: V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ ordnet jeder syntaktischen Variable $v \in V$ eine Sprache zu
- ▶ Vorstellung: $\rho(v)$ ist bestes Wissen über die von v beschriebene Sprache

Problem: Wie bekomme ich aus einem EBNF-Term eine Sprache?

Semantik $\llbracket \cdot \rrbracket: \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\text{EBNF-Term } \alpha} \rightarrow \underbrace{((V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))}_{\rho}$

SEMANTIK VON EBNF-TERMEN

$$\llbracket \cdot \rrbracket : \underbrace{T(\Sigma, V)}_{\text{EBNF-Term } \alpha} \rightarrow \underbrace{((V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))}_{\rho}$$

Sei $\alpha \in T(\Sigma, V)$ ein EBNF-Term. Die Semantik $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho)$ von α ist definiert als:

- ▶ Wenn $\alpha = v \in V$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = \rho(v)$.
- ▶ Wenn $\alpha = w \in \Sigma$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = \{w\}$.
- ▶ Wenn $\alpha = \hat{\alpha}_1$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = (\llbracket \alpha_1 \rrbracket (\rho))^*$.
- ▶ Wenn $\alpha = [\alpha_1]$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket (\rho) \cup \{\varepsilon\}$.
- ▶ Wenn $\alpha = (\alpha_1)$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket (\rho)$.
- ▶ Wenn $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket (\rho) \cdot \llbracket \alpha_2 \rrbracket (\rho)$.
- ▶ Wenn $\alpha = (\alpha_1 \mid \alpha_2)$, dann gilt $\llbracket \alpha \rrbracket (\rho) = \llbracket \alpha_1 \rrbracket (\rho) \cup \llbracket \alpha_2 \rrbracket (\rho)$.

FIXPUNKTITERATION – EINE ANALOGIE

Ausblick: Fixpunktiteration zur Nullstellenbestimmung

Gegeben sei eine Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, von der wir eine Nullstelle suchen, d.h. ein $\bar{x} \in \mathbb{R}$ mit $g(\bar{x}) = 0$.

Methode: Newtonverfahren — definiere $\Phi(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.

- ▶ Starte mit „beliebigem“ Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ▶ Berechne stets $x_{i+1} = \Phi(x_i)$.

Beobachtung:

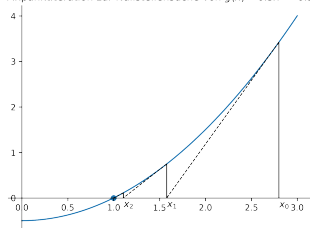
x_i nähert sich der Nullstelle \bar{x} an

Ein *Fixpunkt* von Φ ist ein Punkt x mit $\Phi(x) = x$.

Die Nullstelle \bar{x} ist ein Fixpunkt von Φ , da

$$\Phi(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{g(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \bar{x}.$$

Fixpunktiteration zur Nullstellensuche von $g(x) = 0.5x^2 - 0.5$



FIXPUNKTITERATION FÜR EBNF

Ziel: berechne Sprache $W(\mathcal{E}, v)$ für alle $v \in V$ einer EBNF-Definition $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$.

Iterierende Funktion:

$$f: \underbrace{(V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))}_{\rho} \rightarrow (V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*))$$

- ▶ Starte mit bisherigen Kenntnis $\rho(v) = \emptyset$ für alle $v \in V$.
(Nichtswissen)
- ▶ Berechne stets neues Wissen $\rho_{\text{neu}} = f(\rho_{\text{alt}})$.
(Generiere neues Wissen)

Ende: erreiche einen Fixpunkt ρ mit $f(\rho) = \rho$

Dann gilt $\rho(v) = W(\mathcal{E}, v)$ für alle $v \in V$.

FIXPUNKTITERATION FÜR EBNF

Da V endlich ist, ist $f(\rho): V \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ nur auf endlich vielen Argumenten definiert, deren Bilder wir nun als Spaltenvektor schreiben:

$$\begin{pmatrix} f(\rho)(v_1) \\ f(\rho)(v_2) \\ \vdots \\ f(\rho)(v_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$$

Ein Iterationsprozess lässt sich dann wie folgt notieren:

$$\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} f(\rho)(v_1) \\ f(\rho)(v_2) \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} f(f(\rho))(v_1) \\ f(f(\rho))(v_2) \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3} \dots$$
$$\xrightarrow{f_n} \begin{pmatrix} f^n(\rho)(v_1) \\ f^n(\rho)(v_2) \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

Pulsierender Speicher

Gültigkeitsbereiche von Objekten:

- ▶ Eine Funktion ist ab ihrer Deklaration bis zum Programmende sichtbar. Vorwärtsdeklarationen beachten!
- ▶ Ihre formalen Parameter jedoch nur innerhalb der Funktionsdefinition!
- ▶ Gibt es gleichlautende formale Parameter in verschiedenen Funktionen, müssen diese in der Tabelle natürlich unterschieden werden (z.B. durch „x in f“).
- ▶ Vorsicht bei Namenskonflikten: lokale Variablen überschreiben die Sichtbarkeit globaler Variablen.

Speicherprotokoll:

- ▶ Für jeden Funktionsaufruf werden erst die Parameter, dann die lokalen Variablen in Reihenfolge ihres Auftretens in der Umgebung notiert. Globale Variablen stehen ganz vorn.
- ▶ Variablennamen werden nur notiert, wenn die Variablen sichtbar sind. Globale Variablennamen werden immer notiert.
- ▶ Der Wert von nicht sichtbaren Variablen muss nur notiert werden wenn er sich ändert.
- ▶ Uninitialisierte Variablen werden mit Inhalt „?“ notiert.

Prozessproblem

FLOYD-WARSHALL → AHO-HOPCRAFT-ULLMANN

modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \begin{cases} A_G(u, v) & \text{wenn } u \neq v \\ A_G(u, v) \oplus \mathbf{1} & \text{wenn } u = v \end{cases}$$

Initialisierung: $D_G^{(0)} = mA_G$

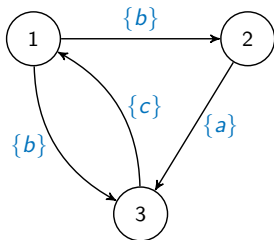
Rekursion:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u, v) \\ = & D_G^{(k)}(u, v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u, k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1, k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1, v) \right) \end{aligned}$$

vgl. dazu Floyd-Warshall:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u, v) \\ = & \min \left\{ D_G^{(k)}(u, v), D_G^{(k)}(u, k+1) + 0 + D_G^{(k)}(k+1, v) \right\} \end{aligned}$$

AUFGABE AGS 9.5.19



Teil (a) : Geben Sie für G die modifizierte Adjazenzmatrix mA_G an.

$$mA_G = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \emptyset & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

Teil (b): Berechnen Sie für den Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(1)}$ und $D_G^{(2)}$. Sie müssen nur die Matrixelemente aufschreiben, die sich gegenüber mA_G geändert haben.

$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \{cb\} & \{cb, \varepsilon\} \end{pmatrix} \quad D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b, ba\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \{cb\} & \{cb, cba, \varepsilon\} \end{pmatrix}$$

Ergebnis aus Teil (b):

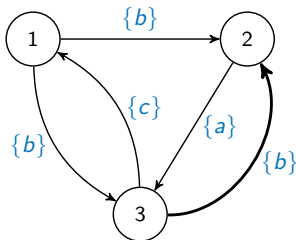
$$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \{cb\} & \{cb, \varepsilon\} \end{pmatrix} \quad D_G^{(2)} = \begin{pmatrix} \{\varepsilon\} & \{b\} & \{b, ba\} \\ \emptyset & \{\varepsilon\} & \{a\} \\ \{c\} & \{cb\} & \{cb, cba, \varepsilon\} \end{pmatrix}$$

Teil (c): Geben Sie die letzte Zeile der Ergebnismatrix D_G des Aho-Algorithmus an.

$$\begin{aligned} D_G(3, 1) &= D_G^{(3)}(3, 1) \\ &= D_G^{(2)}(3, 1) \cup \left\{ D_G^{(2)}(3, 3) \cdot (D_G^{(2)}(3, 3))^* \cdot D_G^{(2)}(3, 1) \right\} \\ &= \{c\} \cup \left\{ \{cb, cba, \varepsilon\} \cdot \{cb, cba, \varepsilon\}^* \cdot \{c\} \right\} \\ &= \{cb, cba\}^* \cdot \{c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_G(3, 2) &= D_G^{(2)}(3, 2) \cup \left\{ D_G^{(2)}(3, 3) \cdot (D_G^{(2)}(3, 3))^* \cdot D_G^{(2)}(3, 2) \right\} \\ &= \{cb\} \cup \left\{ \{cb, cba, \varepsilon\} \cdot \{cb, cba, \varepsilon\}^* \cdot \{cb\} \right\} \\ &= \{cb, cba\}^* \cdot \{cb\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_G(3, 3) &= D_G^{(2)}(3, 3) \cup \left\{ D_G^{(2)}(3, 3) \cdot (D_G^{(2)}(3, 3))^* \cdot D_G^{(2)}(3, 3) \right\} \\ &= \{cb, cba, \varepsilon\} \cup \left\{ \{cb, cba, \varepsilon\} \cdot \{cb, cba, \varepsilon\}^* \cdot \{cb, cba, \varepsilon\} \right\} \\ &= \{cb, cba\}^* \end{aligned}$$



Ergebnis aus Teil (c):

$$D_G(3,1) = \{cb, cba\}^* \cdot \{c\}$$

$$D_G(3,2) = \{cb, cba\}^* \cdot \{cb\}$$

$$D_G(3,3) = \{cb, cba\}^*$$

Teil (d): Wie verändert sich der Eintrag $D_G(3,3)$, wenn zu dem Graphen G eine Kante von Knoten 3 zum Knoten 2 mit dem Gewicht $\{b\}$ zugefügt wird?

$$D_G(3,3) = \{cb, cba, ba\}^* \rightsquigarrow (3,3, \{cb, cba, ba\}^*)$$