TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ALGORITHMEN UND DATENSTRUKTUREN

ÜBUNG 12: AHO-HOPCRAFT-ULLMANN-ALGORITHMUS

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 10. Januar 2022

letzte Änderung:
30.12.2021, 14:52

Algebraisches Pfadproblem

FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS

Ziel: kürzeste Wege in einem Graphen $G = (V, E, c)$

- $P_{u,v}^{(k)}$ = Menge aller Wege von u nach v mit inneren Knoten in $\{1, \ldots, k\}$
- $D_G^{(k)}(u,v) = \begin{cases} \min\left\{c_p : p \in P_{u,v}^{(k)}\right\} & \text{wenn } P_{u,v}^{(k)} \neq \varnothing \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

Initialisierung:

$$D_G^{(0)} = mA_G = \min\{A_G, \mathbf{0}_n\} = \begin{cases} c(u,v) & \text{wenn } u \neq v, (u,v) \in E \\ 0 & \text{wenn } u = v \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursion:

$$\begin{aligned} D_G^{(k+1)}(u,v) &= \min\left\{ D_G^{(k)}(u,v)\ ,\ D_G^{(k)}(u,k+1) + D_G^{(k)}(k+1,v) \right\} \\ &= \min\left\{ \quad \text{alt} \quad ,\quad \text{Zeile} \quad + \quad \text{Spalte} \quad \right\} \end{aligned}$$

Ende: $D_G = D_G^{(n)}$ mit $n = |V|$

ABSTRAKTION: ALGEBRAISCHES PFADPROBLEM

- **bisher:** kürzeste Wege
  - Summation $+$ entlang der Pfade
  - Minimum $\min$ über alle Pfade
- **jetzt:** Verallgemeinerung
  - Pfadoperation $\odot$ entlang der Pfade
  - Akkumulationsoperation $\oplus$
- **Ergebnis:** allgemeine algebraische Struktur Semiring $(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

	Werte S	$\oplus$	$\odot$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
kürzeste Wegeproblem	$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\infty}$	$\min$	$+$	∞	0
Kapazitätsproblem	$\mathbb{N}_{\infty}$	$\max$	$\min$	0	∞
Erreichbarkeitsproblem	$\{\text{true}, \text{false}\}$	$\vee$	$\wedge$	false	true
Zuverlässigkeitsproblem	$[0, 1]$	$\max$	$\cdot$	0	1
Prozessproblem	$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	$\cup$	$\circ$	$\varnothing$	$\{\varepsilon\}$

FLOYD-WARSHALL → AHO-HOPCRAFT-ULLMANN

modifizierte Adjazenzmatrix

$$mA_G = \begin{cases} A_G(u,v) & \text{wenn } u \neq v \\ A_G(u,v) \oplus \mathbf{1} & \text{wenn } u = v \end{cases}$$

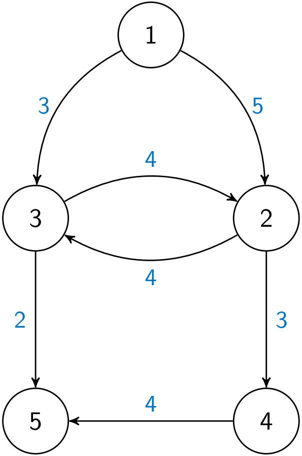
Initialisierung: $D_G^{(0)} = mA_G$

Rekursion:

$$\boxed{\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u,v) \\ = \; & D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot \left(D_G^{(k)}(k+1,k+1)\right)^* \odot D_G^{(k)}(k+1,v) \right) \end{aligned}}$$

vgl. dazu Floyd-Warshall:

$$\begin{aligned} & D_G^{(k+1)}(u,v) \\ = \; & \min \left\{ D_G^{(k)}(u,v), D_G^{(k)}(u,k+1) + 0 + D_G^{(k)}(k+1,v) \right\} \end{aligned}$$



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$$

Teil (b) :

$$mA_G = D_G^{(0)} = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

AUFGABE 1

Teil (c) :

Zunächst einige Hinweise zur Notation und zum Verständnis...

Verallgemeinerte Operationen:

allgemeine Akkumulationsoperation:	gewöhnliche Addition:
$s_0 \oplus s_1 \oplus \cdots \oplus s_n = \sum_{i \in \{0,\ldots,n\}}^{\oplus} s_i$	$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = \sum_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} s_i$

Potenz: induktiv definiert über

$$s^0 := \mathbf{1} \qquad \text{und} \qquad s^{n+1} := s \odot s^n$$

Stern:

$$s^* = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\oplus} s^n$$

AUFGABE 1

Teil (c) : Laut Vorlesung gilt $s^* = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\oplus} s^n$ mit $s^0 = \mathbf{1}$ und $s^{n+1} = s \odot s^n$.
Im Semiring $(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbb{N}_\infty, \max, \min, 0, \infty)$ gilt:

- $s^0 = \mathbf{1} = \infty$
- $s^1 = s \odot s^0 = \min\{s, \infty\} = s$
- $s^2 = s \odot s^1 = \min\{s, s\} = s$
- ...

Schließlich ist
$s^* = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\max} s^n = \sup\{s^n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\infty, s, s, \ldots\} = \infty = \mathbf{1}.$

Somit gilt dann in der Updateformel

$$\begin{aligned}
D_G^{(k+1)}(u,v) &= \max\left\{D_G^{(k)}(u,v), \min\left\{D_G^{(k)}(u,k+1), \infty, D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}\right\} \\
&= \max\left\{D_G^{(k)}(u,v), \min\left\{D_G^{(k)}(u,k+1), \quad D_G^{(k)}(k+1,v)\right\}\right\} \\
&= D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot D_G^{(k)}(k+1,v)\right)
\end{aligned}$$

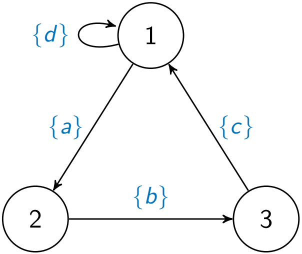
Teil (d) :

- $D_G^{(1)}$: keine Änderung (Quelle)
- $D_G^{(2)}$: $(1, 3, 4)$, $(3, 4, 3)$, $(1, 4, 3)$
- $D_G^{(3)}$: $(1, 5, 2)$, $(2, 5, 2)$
- $D_G^{(4)}$: $(1, 5, 3)$, $(2, 5, 3)$, $(3, 5, 3)$
- $D_G^{(5)}$: keine Änderung (Senke)

Teil (e) :

$D_{G'}(1, 5) = 2$ über den Pfad $(1, 2, 3, 5)$

AUFGABE 2



Teil (a) :

$$(S, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \circ, \varnothing, \{\varepsilon\})$$

Update-Formel:

$$
\begin{aligned}
& D_G^{(k+1)}(u,v) \\
&= D_G^{(k)}(u,v) \oplus \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \odot (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \odot D_G^{(k)}(k+1,v) \right) \\
&= D_G^{(k)}(u,v) \cup \left(D_G^{(k)}(u,k+1) \circ (D_G^{(k)}(k+1,k+1))^* \circ D_G^{(k)}(k+1,v) \right) \\
&= \text{alt} \cup \left(\text{Zeile} \circ (\text{Diagonale})^* \circ \text{Spalte} \right)
\end{aligned}
$$

AUFGABE 2

Teil (b): $$D_G^{(0)} = mA_G = \begin{pmatrix} \{\varepsilon, d\} & \{a\} & \varnothing \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} & \varnothing & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

Teil (c): $$D_G^{(1)} = \begin{pmatrix} \{d\}^* & \{d\}^* \{a\} & \varnothing \\ \varnothing & \{\varepsilon\} & \{b\} \\ \{c\} \{d\}^* & \{c\} \{d\}^* \{a\} & \{\varepsilon\} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 2

Teil (d) :

$$
\begin{aligned}
D_G^{(2)}(3,3) &= D_G^{(1)}(3,3) \cup \Big(D_G^{(1)}(3,2) \circ (D_G^{(1)}(2,2))^* \circ D_G^{(1)}(2,3) \Big) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \Big(\{c\}\{d\}^*\{a\} \circ \{\varepsilon\}^* \circ \{b\} \Big) \\
&= \{\varepsilon\} \cup \Big(\{c\}\{d\}^*\{ab\} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_G^{(3)}(3,3) &= D_G^{(2)}(3,3) \cup \Big(D_G^{(2)}(3,3) \circ (D_G^{(2)}(3,3))^* \circ D_G^{(2)}(3,3) \Big) \\
&= D_G^{(2)}(3,3) \cup \Big(D_G^{(2)}(3,3) \Big)^* \\
&= \Big(D_G^{2}(3,3) \Big)^* \\
&= \Big(\{\varepsilon\} \cup \{c\}\{d\}^*\{ab\} \Big)^* \\
&= \Big(\{c\}\{d\}^*\{ab\} \Big)^*
\end{aligned}
$$