TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 14

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 4. Februar 2022

letzte Änderung:
29.01.2022, 21:11

ÜBUNGSBLATT 14

Aufgabe 1
Wiederholung

Aufgabe 2
Logisches Schließen

Aufgabe 3
Ziffernfolgen in π finden

Aufgabe 4
Mengen-Constraint-Systeme

Aufgabe 1
Wiederholung

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

Aufgabe 2

Logisches Schließen

AUFGABE 2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

$$\Big(\big(((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3)\big) \vee \big(\neg p_2 \wedge \neg p_4\big)\Big) \tag{1}$$

$$\Big(\neg\big(\neg p_1 \wedge \neg(p_2 \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2))\big) \wedge \neg p_2\Big) \tag{2}$$

$$\left[\begin{array}{rl} \Big(\quad (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4) & \wedge \\ (\neg p_5 \vee \neg p_6) & \wedge \\ (\neg p_7 \vee \neg p_2 \vee p_6) & \wedge \\ (\neg p_6 \vee \neg p_2) & \wedge \\ (\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_2) & \wedge \\ (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) & \wedge \\ (\neg p_1 \vee p_7) & \wedge \\ (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee p_4) & \wedge \\ p_3 & \wedge \\ p_1 & \quad \Big) \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\Big((p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1\Big) \tag{4}$$

Aufgabe 3

Ziffernfolgen in π finden

AUFGABE 3

Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- Gegeben ist eine Zahlenfolge $s = s_1 s_2 \ldots s_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}^n$ ($n \geq 1$).
- Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von π die Sequenz s vor?

Hinweis:
Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass es beliebig genaue Näherungsverfahren für π gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahrens für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus Pi-Näherungsverfahren(k)*, das als Eingabe eine natürliche Zahl $k \geq 1$ hat und als Ausgabe die k ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von π zurückgibt.*

Aufgabe 4

Mengen-Constraint-Systeme

AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \to 2^E$, so dass

$$\begin{aligned}
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \notin X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \notin L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X \cup Y) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X) \cup L(Y),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (X \subseteq Y \cup Z) \in C \text{ gilt}: &\quad L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad \text{und} \qquad E = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \subseteq M_1 \cup M_3, M4 \subseteq M_3 \cup M_2, \\ a \in M_1, a \notin M_3, b \in M_4, b \in M_1, b \notin M_3, \\ c \in M_4, c \notin M_1, c \notin M_3, d \in M_4, d \notin M_1, d \notin M_2 \end{array} \right\}$$

AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \to 2^E$, so dass

$$\begin{aligned}
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \notin X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \notin L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X \cup Y) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X) \cup L(Y),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (X \subseteq Y \cup Z) \in C \text{ gilt}: &\quad L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.
Hinweis: Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.