

# FORMALE SYSTEME

## ÜBUNG 12

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 21. Januar 2022

letzte Änderung:  
21.01.2022, 14:12

Logische Äquivalenzen

Aufgabe 1

*weitere Äquivalenzen*

Aufgabe 2

*mehr Äquivalenzen*

Aufgabe 3

*Normalformen*

Aufgabe 4

*Resolution*

# Logische Äquivalenzen

---

# LOGISCHE ÄQUIVALENZ

Formeln sind äquivalent, wenn sie die gleiche Semantik haben:

Zwei Formeln  $F$  und  $G$  sind **semantisch äquivalent**, in Symbolen  $F \equiv G$ , wenn sie genau die selben Modelle haben, d.h. wenn für alle Wertzuweisungen  $w$  gilt:  $w(F) = w(G)$

# JUNKTOREN ÄQUIVALENT AUSDRÜCKEN

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \equiv \neg(F \wedge \neg G)$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$$

$$F \wedge G \equiv \neg(\neg F \vee \neg G) \quad (\text{De Morgansches Gesetz})$$

$$F \vee G \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G) \quad (\text{De Morgansches Gesetz})$$

Satz: Sei  $F$  eine beliebige aussagenlogische Formel.

- ▶ Es gibt eine zu  $F$  äquivalente Formel, die nur die Junktoren  $\wedge$  und  $\neg$  enthält.
- ▶ Es gibt eine zu  $F$  äquivalente Formel, die nur die Junktoren  $\vee$  und  $\neg$  enthält.

# NÜTZLICHE ÄQUIVALENZEN

$$F \wedge G \equiv G \wedge F$$

$$F \vee G \equiv G \vee F$$

Kommutativität

$$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$$

$$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$$

Assoziativität

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Distributivität

$$F \wedge F \equiv F$$

$$F \vee F \equiv F$$

Idempotenz

$$F \wedge (F \vee G) \equiv F$$

$$F \vee (F \wedge G) \equiv F$$

Absorption

# NÜTZLICHE ÄQUIVALENZEN

$$\neg\neg F \equiv F$$

doppelte Negation

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

De Morgansche Gesetze

$$F \wedge \top \equiv F$$

$$F \vee \top \equiv \top$$

Gesetze mit  $\top$

$$F \wedge \perp \equiv \perp$$

$$F \vee \perp \equiv F$$

Gesetze mit  $\perp$

$$\neg\top \equiv \perp$$

$$\neg\perp \equiv \top$$

Alle diese Äquivalenzen können leicht mit Wahrheitswertetabellen überprüft werden.

# **Aufgabe 1**

## ***weitere Äquivalenzen***

---



# AUFGABE 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen:

a) Distributivitätsregel:

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$$

b) Absorptionsregel:

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$$

**(a)** Beweis mittels Wahrheitstabelle:

$\varphi$	$\psi$	$\pi$	$\psi \wedge \pi$	$\varphi \vee (\psi \wedge \pi)$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \vee \pi$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Damit ist also  $w(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) = w((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$  für alle Wertzuweisungen  $w$ . Per Definition gilt also  $(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$ .

**(b)** Beweis mittels Wahrheitswertetabelle:

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Damit ist also  $w(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) = w(\varphi)$  für alle Wertzuweisungen  $w$ .  
Per Definition gilt also  $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$ .

## **Aufgabe 2**

### ***mehr Äquivalenzen***

---

## AUFGABE 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (((a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg a \rightarrow (b \wedge c))) \wedge ((\neg b \vee c) \rightarrow d)) \\ & \equiv \\ & ((\neg(a \leftrightarrow b) \wedge (a \vee c)) \wedge \neg((b \vee d) \rightarrow (c \wedge \neg d))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a \\ & \equiv \\ & (((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow \neg(\neg c \wedge a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & (((b \wedge \ell) \rightarrow m) \wedge ((a \wedge b) \rightarrow \ell) \wedge a \wedge b) \\ & \equiv \\ & ((\neg b \wedge \ell \wedge \neg a \wedge b) \vee (\neg \ell \wedge \ell \wedge \neg a \wedge b) \vee (m \wedge \ell \wedge a \wedge b)) \end{aligned}$$

## **Aufgabe 3**

### ***Normalformen***

---

# NEGATIONSNORMALFORM

Eine Formel  $F$  ist in **Negationsnormalform** (NNF) wenn

- (a) sie nur die Junktoren  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$  enthält und
- (b) der Junktor  $\neg$  nur direkt vor Atomen vorkommt (d.h. nur in Teilformeln der Form  $\neg p$  mit  $p \in \mathbf{P}$ ).

Formeln, die negierte oder nichtnegierte Atome sind, nennt man **Literale**. In NNF darf Negation also nur in Literalen auftauchen.

Beispiele:

- ▶  $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$  ist in NNF
- ▶  $(b \wedge b) \vee \neg(b \wedge b)$  ist nicht in NNF
- ▶  $q \vee \neg\neg p$  ist nicht in NNF
- ▶  $p \leftrightarrow p$  ist nicht in NNF

# KONJUNKTIVE UND DISJUNKTIVE NORMALFORM

Eine Formel  $F$  ist in **konjunktiver Normalform (KNF)** wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,m_1}) \wedge (L_{2,1} \vee \dots \vee L_{2,m_2}) \wedge \dots \wedge (L_{n,1} \vee \dots \vee L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln  $L_{i,j}$  Literale sind. Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**.

Eine Formel  $F$  ist in **disjunktiver Normalform (DNF)** wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,m_1}) \vee (L_{2,1} \wedge \dots \wedge L_{2,m_2}) \vee \dots \vee (L_{n,1} \wedge \dots \wedge L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln  $L_{i,j}$  Literale sind. Eine Konjunktion von Literalen heißt **Monom**.



# KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet  $\rightsquigarrow$  oft direkter

## Konjunktive Normalform

Distributivgesetz:  $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)\end{aligned}$$

(Man könnte die wahren Klauseln  $(p \vee \neg p)$  und  $(\neg q \vee q)$  streichen.)

## Disjunktive Normalform

Distributivgesetz:  $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$  (analog)

## AUFGABE 3

Transformieren Sie die Formel

$$\varphi = \left( (\neg(a \leftrightarrow b) \vee \neg(c \wedge a)) \vee \neg(c \rightarrow b) \right)$$

in

- a) Negationsnormalform
- b) konjunktive Normalform
- c) disjunktive Normalform

**Vorbereitung:** Eliminiere  $\leftrightarrow$  und  $\rightarrow$

$$\varphi \equiv \left( (\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))) \vee \neg(c \wedge a) \right) \vee \neg(\neg c \vee b) =: \varphi_1$$

**(a) Negationsnormalform:**

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left( (\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))) \vee \neg(c \wedge a) \right) \vee \neg(\neg c \vee b) \\ &\equiv \left( (\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))) \vee \neg(c \wedge a) \right) \vee (c \wedge \neg b) \\ &\equiv \left( (\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))) \vee (\neg c \vee \neg a) \right) \vee (c \wedge \neg b) \\ &\equiv \left( ((\neg(a \wedge b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \right) \\ &\equiv \left( ((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a) \right) \vee (c \wedge \neg b) =: \varphi_2 \end{aligned}$$

**(b) konjunktive Normalform:**

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \left( (((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \right) \\
&\equiv \left( (((\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \wedge ((a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg a))) \vee (c \wedge \neg b) \right) \\
&\equiv \left( ((\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg a) \wedge \underbrace{(a \vee b \vee \neg c \vee \neg a)}_{\equiv \top}) \vee (c \wedge \neg b) \right) \\
&\equiv \left( (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \vee (c \wedge \neg b) \right) \\
&\equiv \left( \underbrace{((\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \vee c)}_{\equiv \top} \wedge ((\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \vee \neg b) \right) \\
&\equiv (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) =: \varphi_3
\end{aligned}$$

**(c) disjunktive Normalform:**  $\varphi_3$  ist bereits auch in disjunktiver Normalform. Mit den Distributivgesetzen erhält man

$$\varphi_4 = \left( (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg c) \vee (\neg a) \vee (\neg b \wedge c) \right)$$

in disjunktiver Normalform.

## **Aufgabe 4**

### ***Resolution***

---

# KLAUSELFORM & RESOLUTION

- ▶ Eine Klausel  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  wird dargestellt als Menge  $\{L_1, \dots, L_n\}$
- ▶ Eine Konjunktion von Klauseln  $K_1 \wedge \dots \wedge K_\ell$  wird dargestellt als Menge  $\{K_1, \dots, K_\ell\}$

Eine Menge von Mengen von Literalen unter dieser Interpretation heißt **Klauselform**.

Gegeben seien zwei Klauseln  $K_1$  und  $K_2$  für die es ein Atom  $p \in \mathbf{P}$  gibt mit  $p \in K_1$  und  $\neg p \in K_2$ .

Die **Resolvente von  $K_1$  und  $K_2$  bezüglich  $p$**  ist die Klausel

$$(K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$$

Eine Klausel  $R$  ist eine **Resolvente einer Klauselmengen  $\mathcal{K}$**  wenn  $R$  Resolvente zweier Klauseln  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$  ist.

# BEDEUTUNG VON RESOLUTIONSSCHRITTEN

Wir betrachten Klauseln  $\{L_1, \dots, L_n, p\}$  und  $\{\neg p, M_1, \dots, M_\ell\}$ :

- ▶  $\{L_1, \dots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \dots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \dots \wedge \neg L_n) \rightarrow p$
- ▶  $\{\neg p, M_1, \dots, M_\ell\} \equiv (\neg p \vee M_1 \vee \dots \vee M_\ell) \equiv p \rightarrow (M_1 \vee \dots \vee M_\ell)$

Daraus folgt unmittelbar  $(\neg L_1 \wedge \dots \wedge \neg L_n) \rightarrow (M_1 \vee \dots \vee M_\ell)$

$\rightsquigarrow$  dies entspricht der Klausel  $\{L_1, \dots, L_n, M_1, \dots, M_\ell\}$

**Satz:** Wenn  $R$  Resolvente der Klauseln  $K_1$  und  $K_2$  ist, dann gilt  $\{K_1, K_2\} \models R$ .

- ▶ Die leere Klausel ist eine Disjunktion von 0 Literalen, also gerade  $\perp$  (neutrales Element von  $\vee$ )
- ▶  $\perp$  in einer Konjunktion macht die gesamte Formel falsch (unerfüllbar).
- ▶ Lässt sich  $\perp$  ableiten, so ist die Formel unerfüllbar.

# DAS RESOLUTIONSKALKÜL

## Resolution

Gegeben: Formel  $\mathcal{F}$  in Klauselform

Gesucht: Ist  $\mathcal{F}$  erfüllbar oder unerfüllbar?

- (1) Finde ein Klauselpaar  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$  mit Resolvente  $R \notin \mathcal{F}$
- (2) Setze  $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{R\}$
- (3) Wiederhole Schritt (1) und (2) bis keine neuen Resolventen gefunden werden können
- (4) Falls  $\perp \in \mathcal{F}$ , dann gib „unerfüllbar“ aus;  
andernfalls gib „erfüllbar“ aus

*Beobachtung:* Unerfüllbarkeit steht fest, sobald  $\perp$  abgeleitet wurde  
 $\rightsquigarrow$  dann kann man das Verfahren frühzeitig abbrechen

Erfüllbarkeit kann dagegen erst erkannt werden, wenn alle Resolventen erschöpfend gebildet worden sind



## AUFGABE 4

Prüfen Sie die folgende Formel mittels Resolutionsverfahren auf Erfüllbarkeit:

a)  $b \wedge (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$

b)  $\neg \left( c \rightarrow ((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)) \right)$

**(a)** Die Formel ist bereits in konjunktiver Normalform. Die zugehörige Klauselform lautet

$$\{\{b\}, \{a, b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c\}, \neg a, c\}.$$

Durchnummerieren liefert:

- (1)  $\{b\}$
- (2)  $\{a, b\}$
- (3)  $\{\neg b, c\}$
- (4)  $\{\neg b, \neg c\}$
- (5)  $\{\neg a, c\}$

Als Resolutionsschritte kann man beispielsweise folgende wählen:

- |                  |           |
|------------------|-----------|
| (6) $\{c\}$      | (1) + (3) |
| (7) $\{\neg b\}$ | (4) + (6) |
| (8) $\perp$      | (1) + (7) |

Da die leere Klausel ableitbar ist, ist die Formel nicht erfüllbar.

**(b)** Transformation in konjunktive Normalform liefert

$$(c \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b))$$

Klauselform:  $\{\{c\}, \{a, \neg b, \neg c\}, \{\neg a, b\}\}$

(1)  $\{c\}$

(2)  $\{a, \neg b, \neg c\}$

(3)  $\{\neg a, b\}$

Als Resolutionsschritte kann man beispielsweise folgende wählen:

(6)  $\{a, \neg b\}$  (1) + (2)

(7)  $\{b, \neg b, \neg c\}$  (2) + (3)

(8)  $\{a, \neg a, \neg c\}$  (2) + (3)

(9)  $\{b, \neg b\}$  (1) + (5)

(10)  $\{a, \neg a\}$  (1) + (6)

(11)  $\{\neg a, b, \neg c\}$  (3) + (5)

Man kann diesen Prozess nun noch weiter durchführen, allerdings wird man die nie die leere Klausel ableiten können. Die Formel ist daher erfüllbar.