FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 12

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 21. Januar 2022

letzte Änderung:
21.01.2022, 09:21

ÜBUNGSBLATT 12

Aufgabe 1
weitere Äquivalenzen

Aufgabe 2
mehr Äquivalenzen

Aufgabe 3
Normalformen

Aufgabe 4
Resolution

LOGISCHE ÄQUIVALENZ

Formeln sind äquivalent, wenn sie die gleiche Semantik haben:

Zwei Formeln F und G sind semantisch äquivalent, in Symbolen $F \equiv G$, wenn sie genau die selben Modelle haben, d.h. wenn

$$\text{für alle Wertzuweisungen } w \text{ gilt: } w(F) = w(G)$$

JUNKTOREN ÄQUIVALENT AUSDRÜCKEN

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \equiv \neg(F \wedge \neg G)$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$$

$$F \wedge G \equiv \neg(\neg F \vee \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

$$F \vee G \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

JUNKTOREN ÄQUIVALENT AUSDRÜCKEN

$$F \to G \equiv \neg F \lor G \equiv \neg(F \land \neg G)$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \land (G \to F) \equiv (F \land G) \lor (\neg F \land \neg G)$$

$$F \land G \equiv \neg(\neg F \lor \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

$$F \lor G \equiv \neg(\neg F \land \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

Satz: Sei F eine beliebige aussagenlogische Formel.

- Es gibt eine zu F äquivalente Formel, die nur die Junktoren $\land$ und $\neg$ enthält.
- Es gibt eine zu F äquivalente Formel, die nur die Junktoren $\lor$ und $\neg$ enthält.

NÜTZLICHE ÄQUIVALENZEN

$F \wedge G \equiv G \wedge F$ $F \vee G \equiv G \vee F$	Kommutativität
$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$ $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$	Assoziativität
$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivität
$F \wedge F \equiv F$ $F \vee F \equiv F$	Idempotenz
$F \wedge (F \vee G) \equiv F$ $F \vee (F \wedge G) \equiv F$	Absorption

NÜTZLICHE ÄQUIVALENZEN

$\neg\neg F \equiv F$	doppelte Negation
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$	De Morgansche Gesetze
$F \wedge \top \equiv F$ $F \vee \top \equiv \top$	Gesetze mit $\top$
$F \wedge \bot \equiv \bot$ $F \vee \bot \equiv F$	Gesetze mit $\bot$
$\neg\top \equiv \bot$ $\neg\bot \equiv \top$	

Alle diese Äquivalenzen können leicht mit Wahrheitswertetabellen überprüft werden.

Aufgabe 1
weitere Äquivalenzen

AUFGABE 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen:

a) Distributivitätsregel:

$$(\varphi \lor (\psi \land \pi)) \equiv ((\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \pi))$$

b) Absorptionsregel:

$$(\varphi \land (\varphi \lor \psi)) \equiv \varphi$$

Aufgabe 2

mehr Äquivalenzen

AUFGABE 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

(a) $(((a \to b) \land (\neg a \to (b \land c))) \land ((\neg b \lor c) \to d))$
$\equiv$
$((\neg(a \leftrightarrow b) \land (a \lor c)) \land \neg((b \lor d) \to (c \land \neg d)))$

(b) $(((b \land \ell) \to m) \land ((a \land b) \to \ell) \land a \land b)$
$\equiv$
$((\neg b \land \ell \land \neg a \land b) \lor (\neg \ell \land \ell \land \neg a \land b) \lor (m \land \ell \land a \land b))$

Aufgabe 3
Normalformen

NEGATIONSNORMALFORM

Eine Formel F ist in Negationsnormalform (NNF) wenn

(a) sie nur die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält und

(b) der Junktor $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt (d.h. nur in Teilformeln der Form $\neg p$ mit $p \in \mathbf{P}$).

Formeln, die negierte oder nichtnegierte Atome sind, nennt man Literale. In NNF darf Negation also nur in Literalen auftauchen.

NEGATIONSNORMALFORM

Eine Formel F ist in Negationsnormalform (NNF) wenn

(a) sie nur die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält und

(b) der Junktor $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt (d.h. nur in Teilformeln der Form $\neg p$ mit $p \in \mathbf{P}$).

Formeln, die negierte oder nichtnegierte Atome sind, nennt man Literale. In NNF darf Negation also nur in Literalen auftauchen.

Beispiele:

- $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ ist in NNF
- $(b \wedge b) \vee \neg(b \wedge b)$ ist nicht in NNF
- $q \vee \neg\neg p$ ist nicht in NNF
- $p \leftrightarrow p$ ist nicht in NNF

KONJUNKTIVE UND DISJUNKTIVE NORMALFORM

Eine Formel F ist in konjunktiver Normalform (KNF) wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \wedge (L_{2,1} \vee \ldots \vee L_{2,m_2}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln $L_{i,j}$ Literale sind. Eine Disjunktion von Literalen heißt Klausel.

Eine Formel F ist in disjunktiver Normalform (DNF) wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,m_1}) \vee (L_{2,1} \wedge \ldots \wedge L_{2,m_2}) \vee \ldots \vee (L_{n,1} \wedge \ldots \wedge L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln $L_{i,j}$ Literale sind. Eine Konjunktion von Literalen heißt Monom.

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:
$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$

Beispiel:

$(p \land \neg q) \lor (\neg p \land q) \equiv ((p \land \neg q) \lor \neg p) \land ((p \land \neg q) \lor q))$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q))\end{aligned}$$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)\end{aligned}$$

KNF und DNF bilden

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)\end{aligned}$$

(Man könnte die wahren Klauseln $(p \vee \neg p)$ und $(\neg q \vee q)$ streichen.)

Disjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ (analog)

AUFGABE 3

Transformieren Sie die Formel

$$\varphi = \Big((\neg(a \leftrightarrow b) \lor \neg(c \land a)) \lor \neg(c \to b) \Big)$$

in

a) Negationsnormalform

b) konkjunktive Normalform

c) disjunktive Normalform

Aufgabe 4

Resolution

AUFGABE 4

Prüfen Sie die folgende Formel mittels Resolutionsverfahren auf Erfüllbarkeit:

a) $b \wedge (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$

b) $\neg\Big(c \to \big((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)\big)\Big)$