

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 10

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 7. Januar 2022

letzte Änderung:
02.01.2022, 20:23

Aufgabe 1:

Design von Turingmaschinen

Aufgabe 2

Typ 1 und LBAs

Aufgabe 3

Quadratische Laufzeit entscheidbar?

Aufgabe 4

Exponentielle Laufzeit entscheidbar?

Aufgabe 1:

Design von Turingmaschinen

AUFGABE 1

Geben Sie Turingmaschinen an, die folgende Funktionen berechnen. Dabei wird eine Eingabe $n \in \mathbb{N}$ als \emptyset^n mit $\emptyset \in \Sigma$ dargestellt. Es kann vorausgesetzt werden, dass die Eingabe wohlgeformt auf dem Band vorliegt. Am Ende der Berechnung hält die Turingmaschine in einem Finalzustand und das Band enthält nur das Berechnungsergebnis.

- (a) Die Turingmaschine \mathcal{M}_0 berechnet die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto 0$, d. h. das Eingabewort auf dem Band wird gelöscht.
- (b) Die Turingmaschine $\mathcal{M}_{\text{succ}}$ berechnet die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$.
- (c) Die Turingmaschine $\mathcal{M}_{\times 3}$ berechnet die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto 3 \cdot n$.

Aufgabe 2

Typ 1 und LBAs

AUFGABE 2

Wir betrachten die Sprache

$$L = \left\{ a^n b^m c^k : n, m, k \geq 1, n = 2m \text{ oder } m = k \right\}.$$

Zeigen Sie, dass L von Typ 1 ist, indem Sie einen LBA skizzieren, der L entscheidet.

Aufgabe 3

Quadratische Laufzeit entscheidbar?

AUFGABE 3

Im Folgenden bezeichne \mathcal{M}_w eine deterministische Turingmaschine mit einem Band und dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, deren Codewort $\text{enc}(\mathcal{M}_w)$ gleich w ist, falls es ein solches gibt (vgl. Vorlesung 19, Folie 15). Andernfalls ist $\mathcal{M}_w = \mathcal{M}_\perp$, eine fest gewählte deterministische Turingmaschine mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die für alle Eingabewörter endlos läuft.

Ist die nachfolgende Sprache entscheidbar?

$$L = \left\{ w \in \{0, 1, \#\}^* \left| \begin{array}{l} \text{es gibt ein Wort } z \in \{0, 1, \#\}^* \text{ mit} \\ |z| \leq |w|^2, \text{ so dass } \mathcal{M}_w \text{ das Eingabewort} \\ z \text{ in höchstens } |z| \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right. \right\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Exponentielle Laufzeit entscheidbar?

AUFGABE 4

Sei \mathcal{M}_w wie in Aufgabe 3 und

$t_{\mathcal{M}_w}(x) :=$ Anzahl der Schritte, die \mathcal{M}_w bei Eingabe x durchführt.

Ist die Sprache $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid t_{\mathcal{M}_w}(w) > 2^{|w|}\}$ entscheidbar?
Begründen Sie Ihre Antwort.

AUFGABE 5

QUADRATZAHLEN ERKENNEN

- (a) Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen n^2 ergibt; also dass

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

- (b) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache

$$L = \{0^n : n \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$

an.

- (c) Geben Sie eine deterministische Zwei-Band-Turingmaschine an, die L akzeptiert.