ÜBUNG 13

Aufgabe 1

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

a) $$a \wedge \Big((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))\Big)$$

a) Umwandlung in KNF: $a \wedge ((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))))$

$$\equiv (a \wedge c \wedge b \wedge ((\underline{\neg c \vee \neg b}) \vee (\underline{a} \wedge \underline{c} \wedge \underline{b})))$$

$$\equiv (a \wedge c \wedge b \wedge (\neg c \vee \neg b \vee a) \wedge \underbrace{(\neg c \vee \neg b \vee c)}_{\top} \wedge \underbrace{(\neg c \vee \neg b \vee b)}_{\top})$$

$$\equiv (a \wedge c \wedge b \wedge (\neg c \vee \neg b \vee a))$$

Klauselform: $\{\{a\}, \{c\}, \{b\}, \{a, \neg b, \neg c\}\}$

(1)	$\{a\}$	
(2)	$\{b\}$	
(3)	$\{c\}$	
(4)	$\{a, \neg b, \neg c\}$	
(5)	$\{a, \neg c\}$	(2) + (4) über b
(6)	$\{a, \neg b\}$	(3) + (4) über c
(7)	$\{a\}$	(3) + (5) über c oder (2) + (6) über b

Weitere Resolventen sind nicht möglich, d.h. die Formel ist erfüllbar.

b) $(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$

Die Formel ist schon in KNF $\rightsquigarrow$ Klauselform:

$$\{\{\neg a, \neg b\}, \{a, b\}, \{\neg a, c\}, \{a, \neg c\}, \{b, \neg d\}, \{\neg b, d\}, \{\neg c, d\}, \{c, \neg d\}\}$$

(1)	$\{\neg a, \neg b\}$	
(2)	$\{a, b\}$	
(3)	$\{\neg a, c\}$	
(4)	$\{a, \neg c\}$	
(5)	$\{b, \neg d\}$	
(6)	$\{\neg b, d\}$	
(7)	$\{\neg c, d\}$	
(8)	$\{c, \neg d\}$	
(9)	$\{\neg b, \neg c\}$	(1) + (4) über a
(10)	$\{\neg b, \neg d\}$	(8) + (9) über c
(11)	$\{\neg d\}$	(5) + (10) über b
(12)	$\{b, c\}$	(2) + (3) über a
(13)	$\{b, d\}$	(7) + (12) über c
(14)	$\{d\}$	(6) + (13) über b
(15)	$\perp$	(11) + (14) über d

Da $\perp$ abgeleitet werden kann, ist die Formel unerfüllbar.

Aufgabe 2

Eine k-*Färbung* für einen endlichen Graphen G ist eine Zuordnung der Knoten von G zu Werten („Farben") in $\{1, \ldots, k\}$, so dass Knoten, die in G durch eine Kante verbunden sind, nicht denselben Wert zugeordnet bekommen.

Geben Sie für einen endlichen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und einen Wert k eine aussagenlogische Formel $\varphi_{G,k}$ an, so dass $\varphi_{G,k}$ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine k-Färbung von G gibt.

$p_{v,c}$ ... Knoten v hat Farbe c ; $C = \{1, \ldots, k\}$ ... Farben

- jeder Knoten hat mindestens eine Farbe: $F_{\geq 1} := \bigwedge_{v \in V} \bigvee_{c \in C} p_{v,c}$
- jeder Knoten bekommt höchstens eine Farbe: $F_{\leq 1} := \bigwedge_{v \in V} \bigwedge_{\substack{c_1, c_2 \in C \\ c_1 \neq c_2}} \neg (p_{v,c_1} \wedge p_{v,c_2})$
- benachbarte Knoten bekommen nicht dieselbe Farbe: $F_b := \bigwedge_{\substack{v_1, v_2 \in V \\ (v_1, v_2) \in E}} \bigwedge_{c \in C} \neg (p_{v_1,c} \wedge p_{v_2,c})$

$\Rightarrow \varphi_{G,k} := F_{\geq 1} \wedge F_{\leq 1} \wedge F_b$

Aufgabe 3

a) Es sei φ eine Formel, die ausschließlich den Junktor $\rightarrow$ verwendet. Zeigen Sie: Wenn $w(p_i) = 1$ für alle $p_i \in \mathrm{Var}(\varphi)$ ist, dann ist auch $w(\varphi) = 1$.

b) Es sei φ eine allgemeine aussagenlogische Formel. Beweisen oder widerlegen Sie: φ ist äquivalent zu einer Formel, die ausschließlich den Junktor $\rightarrow$ verwendet.

a) Induktion über den Aufbau von Formeln:

(IA) $\varphi = p \in \mathcal{P}$: $w(p) = 1 \Rightarrow w(\varphi) = 1$.

(IV) Seien φ_1, φ_2 Formeln, die nur den Junktor $\rightarrow$ verwenden und gelte $w(p_1) = 1$ für alle $p_1 \in \mathrm{Var}(\varphi_1)$ sowie $w(p_2)$ für alle $p_2 \in \mathrm{Var}(\varphi_2)$, dann gilt $w(\varphi_1) = 1 = w(\varphi_2)$.

(IS) Sei $\varphi := (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$. Es gilt $\mathrm{Var}(\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi_1) \cup \mathrm{Var}(\varphi_2)$. Ist $w(p) = 1$ für alle $p \in \mathrm{Var}(\varphi)$, so auch $w(p) = 1$ für alle $p \in \mathrm{Var}(\varphi_1)$ und $w(p) = 1$ für alle $p \in \mathrm{Var}(\varphi_2)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $w(\varphi_1) = 1$ und $w(\varphi_2) = 1$. Damit ist schließlich $w(\varphi) = w(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) = 1$.

b) Falsch — Gegenbeispiel: Sei $p \in \mathcal{P}$ mit $w(p) = 1$. Dann gibt es keine Möglichkeit eine zu $\neg p$ äquivalente Formel mit nur dem Junktor $\rightarrow$ zu finden.

Angenommen es gäbe eine Formel F, die nur den Junktor $\rightarrow$ verwendet und zu $\neg p$ äquivalent wäre. Dann muss $w(F) = w(\neg p) = 0$ gelten. Nach (a) gilt für F aber stets $w(F) = 1$ – ein Widerspruch, d.h. eine solche Formel F kann nicht existieren.

Aufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet und $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ Sprachen mit $L, L_1, L_2 \in \mathsf{P}$.

Zeigen Sie:

(a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \circ L_2$ und $\overline{L}$ sind in polynomieller Zeit entscheidbar.

(b) $L^R = \{w^R : w \in L\}$ ist in polynomieller Zeit entscheidbar, wobei für $w = a_1 \ldots a_{n-1} a_n \in \Sigma^*$:

$$w^R = a_n a_{n-1} \ldots a_1$$

(und $\varepsilon^R = \varepsilon$, $a^R = a$ für $a \in \Sigma$).

(a) Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ polynomiell zeitbeschränkte TM's, die L, L_1, L_2 entscheiden.

$\boxed{\overline{L}:}$ Simuliere $\mathcal{M}$ auf Eingabe w. (prüfe $w \in L$)
- $\mathcal{M}$ akzeptiert ⇝ verwerfe
- $\mathcal{M}$ verwirft ⇝ akzeptiere

} negiere das Ergebnis

↳ polynomiell, da $\mathcal{M}$ polynomiell

$\boxed{L_1 \cup L_2 :}$ Eingabe: w

Simuliere $\mathcal{M}_1$ auf w (prüfe $w \in L_1$)
  falls $\mathcal{M}_1$ akzeptiert: akzeptiere
  falls $\mathcal{M}_1$ verwirft:

} polynomiell

    Simuliere $\mathcal{M}_2$ auf w (prüfe $w \in L_2$)
      falls $\mathcal{M}_2$ akzeptiert: akzeptiere
      falls $\mathcal{M}_2$ verwirft: verwerfe

} polynomiell

Aufwand: polynomiell + polynomiell = polynomiell

$\boxed{L_1 \circ L_2 :}$ Eingabe: $w = a_1 \cdots a_n$

Für alle $1 \leq k \leq n$:
  Simuliere $\mathcal{M}_1$ auf $a_1 \cdots a_k$ (prüfe $a_1 \cdots a_k \in L_1$)
    falls $\mathcal{M}_1$ verwirft: wähle nächstes k
    falls $\mathcal{M}_1$ akzeptiert:

} polynomiell

      Simuliere $\mathcal{M}_2$ auf $a_{k+1} \cdots a_n$ (prüfe $a_{k+1} \cdots a_n \in L_2$)
        falls $\mathcal{M}_2$ akzeptiert: akzeptiere
        falls $\mathcal{M}_2$ verwirft: wähle nächstes k

} polynomiell

} maximal n mal

Aufwand: $n \cdot$ (polynomiell + polynomiell) = polynomiell

(b) Eingabe: $w \in \Sigma^*$

Transformiere w zu w^R polynomiell

Simuliere $\mathcal{M}$ auf w^R
  falls $\mathcal{M}$ akzeptiert: akzeptiere
  falls $\mathcal{M}$ verwirft: verwerfe

} polynomiell

* Transformation:
(Idee – richtig ??)
polynomiell

- markiere Symbol mit ^ und kopiere ans Bandende, markiere mit ~
- markiere Symbol links davon mit ‾ ; kopiere an mit ^ markierte Stelle und markiere mit ~
  falls links mit ^ markiert ⇝ ersetze durch ε
- markiere Symbol rechts mit ^ und kopiere an Stelle mit ‾
  falls rechts mit ‾ markiert ⇝ ersetze durch ε
- entferne Markierungen & fertig

$abcbc \rightsquigarrow \hat{a}bcbc\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{c}bcb\bar{c}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{c}\hat{b}cb\tilde{b}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{c}\tilde{b}c\bar{b}\tilde{b}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{c}\tilde{b}\hat{c}\tilde{c}\tilde{b}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{c}\tilde{b}\varepsilon\tilde{c}\tilde{b}\tilde{a}$

$abcb \rightsquigarrow \hat{a}bcb\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{b}bc\bar{b}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{b}\hat{b}c\tilde{b}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{b}\tilde{c}\bar{c}\tilde{b}\tilde{a} \rightsquigarrow \tilde{b}\tilde{c}\varepsilon\tilde{b}\tilde{a}$

Aufgabe 5

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist *co-endlich* gdw. $\overline{L}$ (also $\Sigma^* \setminus L$) endlich ist.

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Jede co-endliche Sprache ist in $\mathsf{DTIME}(n)$.

b) Jede co-endliche Sprache ist in $\mathsf{DTIME}(1)$.

a) Die Aussage gilt. Jede endliche Sprache ist regulär.
Reguläre Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen.
$\Rightarrow$ Je co-endliche Sprache ist regulär.

Da das Wortproblem für reguläre Sprachen in linearer Zeit entscheidbar ist, ist jede co-endliche Sprache in DTIME(n).

b) Auch die Aussage gilt: Sei $L \subseteq \Sigma^*$ co-endlich, dann ist $\overline{L}$ endlich.

- Ist $\overline{L} = \emptyset$, so ist $L = \Sigma^*$ und offensichtlich in konstanter Zeit entscheidbar (akzeptiere alle Eingaben)
- Ist $\overline{L} \neq \emptyset$, so existiert (da $\overline{L}$ endlich ist) ein längstes Wort w_{max} mit $|w_{max}| = m$. Somit muss jede TM $\mathfrak{A}$ höchstens m Zeichen der Eingabe lesen (unabhängig von der Eingabe) und kann dann sofort $w \in \overline{L}$ und damit $w \in L$ entscheiden.

Achtung:
- m ist feste Konstante
- Die endlich vielen Wörter aus $\overline{L}$ können fest in $\mathfrak{A}$ einkodiert werden.

Damit gilt nun: Die Anzahl der Schritte von $\mathfrak{A}$ bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ sind durch $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = c_m$ charakterisiert, wobei $c_m \in \mathbb{R}$ eine positive Konstante ist, die nur von m abhängt.

Für dieses f gilt nun $f \in \mathcal{O}(1)$, da $f(n) \leq \underset{=c}{c_m} \cdot 1$ für alle $n \geq \underset{=n_0}{0}$ gilt.
Damit folgt $L \in \mathsf{DTIME}(1)$.