

# FORMALE SYSTEME

## ÜBUNG 5

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 19. November 2021

# Aufgabe 1:

## *NFA* $\rightarrow$ *RegExp*

---

# NFA $\rightarrow$ REGEXP: ERSETZUNGSMETHODE

**Gegeben:** NFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$

**Gesucht:** regulärer Ausdruck  $\alpha$  mit  $\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}(\mathcal{M})$

**Idee:**

Für jeden Zustand  $q \in Q$ , berechne einen regulären Ausdruck  $\alpha_q$  für die Sprache  $\mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$  mit  $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F \rangle$

Für Startzustände  $Q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \dots \mid \alpha_{q_n})$$

(1) **Vereinfache den Automaten** (entferne offensichtlich unnötige Zustände)

(2) **Bestimme das Gleichungssystem**

*Intuition:* Beschreibe  $\alpha_q$  in Abhängigkeit von Folgezuständen

▷ Für jeden Zustand  $q \in Q \setminus F$ :  $\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,a)} a \alpha_p$

▷ Für jeden Zustand  $q \in F$ :  $\alpha_q \equiv \varepsilon \mid \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,a)} a \alpha_p$

(3) **Löse das Gleichungssystem** durch Einsetzen und

Regel von Arden: Aus  $\alpha \equiv \beta \alpha \mid \gamma$  mit  $\varepsilon \notin \mathbf{L}(\beta)$  folgt  $\alpha \equiv \beta^* \gamma$ .

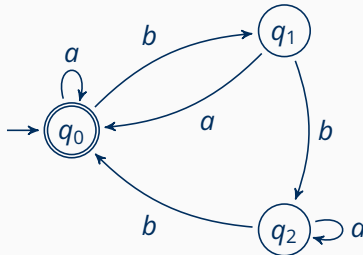
(4) **Gib den Ausdruck für die Sprache des NFA an**

Für  $Q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \dots \mid \alpha_{q_n})$$

# AUFGABE 1

Gegeben ist der DFA  $\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle$  mit  $\delta$ :



Geben Sie einen regulären Ausdruck  $\alpha$  an, der die von  $\mathcal{M}$  akzeptierte Sprache repräsentiert, d.h. es gilt  $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$ .

Hinweis: Zur Lösung können Sie die Ersetzungsmethode verwenden: geben Sie hierzu für jeden Zustand  $q_i$  des Automaten eine Gleichung  $\alpha_i = \dots$  an. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem mithilfe des *Arden-Lemmas*.

Wir beschreiben die Sprache eines jeden Zustands in Abhängigkeit der Folgezustände:

$$\alpha_0 \equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_1 \mid \varepsilon$$

$$\alpha_1 \equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_2$$

$$\alpha_2 \equiv b\alpha_0 \mid a\alpha_2$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem:

$$\text{Löse } \alpha_2: \quad \alpha_2 \equiv a^*b\alpha_0$$

$$\begin{aligned} \text{in } \alpha_1: \quad \alpha_1 &\equiv a\alpha_0 \mid ba^*b\alpha_0 \\ &\equiv (a \mid ba^*b)\alpha_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in } \alpha_0: \quad \alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b(a|ba^*b)\alpha_0 \mid \varepsilon \\ &\equiv (a \mid b(a|ba^*b))\alpha_0 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Löse } \alpha_0: \quad \alpha_0 \equiv (a \mid b(a|ba^*b))^*$$

Der gesuchte reguläre Ausdruck ist die Veroderung „ $\mid$ “ aller zu Startzuständen gehörenden  $\alpha_i$ , d.h. hier ist  $\alpha := \alpha_0$ . Per Konstruktion gilt dann  $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$ .

## **Aufgabe 2:**

### ***Minimierung von Automaten***

---

# ÄQUIVALENZ VON ZUSTÄNDEN & QUOTIENTENAUTOMAT

DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \rightsquigarrow$  DFA  $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$

<b>Äquivalenz von Zuständen:</b>	$p \sim_{\mathcal{M}} q \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$
<b>Äquivalenzklasse:</b>	$[q]_{\sim} = \{p \in Q \mid q \sim p\}$
<b>Quotient</b> von $P \subseteq Q$ :	$P/{\sim} = \{[p]_{\sim} \mid p \in P\}$

**Quotientenautomat:** Verschmelzen von äquivalenten Zuständen

Für einen DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit totaler Übergangsfunktion ist der Quotientenautomat  $\mathcal{M}/{\sim} = \langle Q/{\sim}, \Sigma, \delta_{\sim}, [q_0]_{\sim}, F/{\sim} \rangle$  gegeben durch

- ▶  $Q/{\sim} = \{[q]_{\sim} \mid q \in Q\}$
- ▶  $\delta_{\sim}([q]_{\sim}, a) = [\delta(q, a)]_{\sim}$
- ▶  $F/{\sim} = \{[q]_{\sim} \mid q \in F\}$



## Bestimmung von $\sim$ :

- Initialisiere  $\sim := \emptyset$
- **Regel 1:** Für jedes Paar von Zuständen  $\langle q, p \rangle \in Q \times Q$ :  
falls  $q \in F$  und  $p \notin F$ , dann „speichere  $q \not\sim p$ “
- **Regel 2:** Für jedes Paar  $\langle q, p \rangle \in Q \times Q \setminus \sim$  und jedes  $a \in \Sigma$ :  
falls  $\delta(q, a) \not\sim \delta(p, a)$  dann „speichere  $q \not\sim p$ “
- Wiederhole Regel 2 bis keine Änderungen mehr auftreten
- Das Ergebnis ist  $(Q \times Q) \setminus \sim$

**Beispiel:** Für einen DFA mit Zuständen  $Q = \{A, B, C, D, E\}$  genügt eine Tabelle mit zehn Feldern (statt  $5^2 = 25$ ).

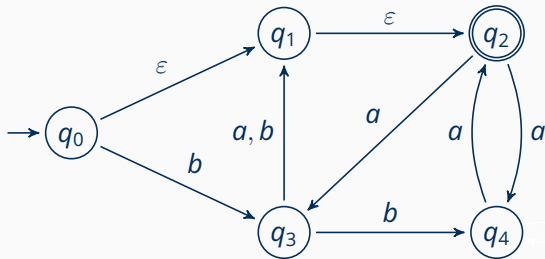
(dazu reihen wir Zustände vertikal in umgekehrter Reihenfolge)

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				

## AUFGABE 2

Gegeben ist der  $\varepsilon$ -NFA

$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$  mit  $\Delta$ :



- Konstruieren Sie einen zu  $\mathcal{M}$  äquivalenten DFA  $\mathcal{M}'$ .
- Geben Sie den zu  $\mathcal{M}'$  reduzierten DFA  $\mathcal{M}'_r$  an.

## **Aufgabe 3:**

### ***Nerode-Rechtskongruenz***

---

**Nerode-Rechtskongruenz**  $\simeq_{\mathbf{L}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ :

$u \simeq_{\mathbf{L}} v$  falls  $uw \in \mathbf{L} \Leftrightarrow vw \in \mathbf{L} \quad \forall w \in \Sigma^*$

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $\mathbf{L}$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_{\mathbf{L}}$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Myhill-Nerode-Minimalautomat**  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit:

- ▶  $Q = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \Sigma^*\}$
- ▶  $q_0 = [\epsilon]_{\simeq}$
- ▶  $F = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \mathbf{L}\}$
- ▶  $\delta([w]_{\simeq}, \mathbf{a}) = [w\mathbf{a}]_{\simeq}$

Gegeben ist der reguläre Ausdruck  $\alpha = (bb)^*a$ .

1. Geben Sie für  $\alpha$  die *Nerode*-Rechtskongruenz  $\simeq_{L(\alpha)}$  an.
2. Geben Sie einen minimalen DFA  $\mathcal{M}$  an mit  $L(\mathcal{M}) = L(\alpha)$ .

Für  $\alpha = (bb)^*a$  gilt offensichtlich  $L := L(\alpha) = \{b^{2n}a : n \geq 0\}$ .

$$\begin{aligned} \text{► } \varepsilon \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \varepsilon w \in L &\Leftrightarrow vw \in L \\ &\Rightarrow [\varepsilon]_{\simeq} = \{b^{2n} : n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } a \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{aw \in L}_{w=\varepsilon} &\Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{v \in L} \\ &\Rightarrow [a]_{\simeq} = L = \{b^{2n}a : n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } b \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{bw \in L}_{w=b^{2n+1}a} &\Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{v=b^{2n+1}} \\ &\Rightarrow [v]_{\simeq} = L = \{b^{2n+1} : n \geq 0\} \end{aligned}$$

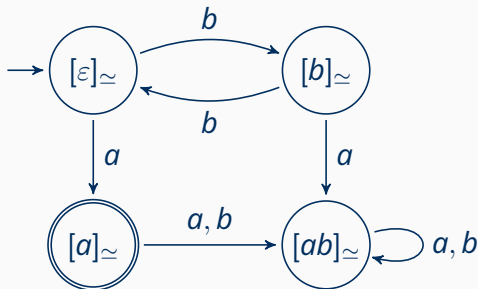
$$\begin{aligned} \text{► } ab \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{aw \in L}_{\text{nie erfüllt}} &\Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{\substack{v \in L \cdot \{a,b\}^+ \\ v \in \{b\} \cdot L\{a,b\}^*}} \\ &\Rightarrow [ab]_{\simeq} = L \cdot \{a,b\}^+ \cup \{b\} \cdot L\{a,b\}^* \end{aligned}$$

Man kann nun leicht prüfen, dass diese Klassen tatsächlich disjunkt sind und ihre Vereinigung ganz  $\Sigma^*$  ergibt. Damit haben wir alle Klassen gefunden.

Äquivalenzklassen:  $[\varepsilon]_{\simeq}, [a]_{\simeq}, [b]_{\simeq}, [ab]_{\simeq}$

Myhill-Nerode-Minimalautomat  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit

- ▶  $Q := \{[\varepsilon]_{\simeq}, [a]_{\simeq}, [b]_{\simeq}, [ab]_{\simeq}\}$
- ▶  $q_0 := [\varepsilon]_{\simeq}$
- ▶  $F := \{[a]_{\simeq}\}$
- ▶  $\delta$ :



## **Aufgabe 4**

### ***Beweis von Nichtregularität***

---



**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache **L** ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_L$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

# BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $L$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_L$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Satz:** Wenn  $L_1$  und  $L_2$  regulär sind, dann auch  $L_1 \cap L_2$ ,  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1^*$  und  $\bar{L}_1$ .

# BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $\mathbf{L}$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_{\mathbf{L}}$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Satz:** Wenn  $\mathbf{L}_1$  und  $\mathbf{L}_2$  regulär sind, dann auch  $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{L}_1^*$  und  $\overline{\mathbf{L}}_1$ .

**Satz (Pumping-Lemma):** Für jede reguläre Sprache  $\mathbf{L}$  gibt es eine Zahl  $n \geq 0$ , so dass gilt:  
für jedes Wort  $x \in \mathbf{L}$  mit  $|x| \geq n$   
gibt es eine Zerlegung  $x = uvw$  mit  $|v| \geq 1$  und  $|uv| \leq n$ , so dass:  
für jede Zahl  $k \geq 0$  gilt:  $uv^k w \in \mathbf{L}$

## AUFGABE 4

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$

b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$

c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$

d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$

e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$

f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$

irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)

b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$

c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$

d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$

e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$

f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$   
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)
- b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$   
irregulär (z.B. Schnitt mit  $\{a\}^* \{b\}^*$ )
- c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$
- d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$
- e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$
- f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$   
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)
- b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$   
irregulär (z.B. Schnitt mit  $\{a\}^* \{b\}^*$ )
- c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede } 0 \text{ folgt eine } 1\}$
- e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$
- f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$   
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)
- b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$   
irregulär (z.B. Schnitt mit  $\{a\}^* \{b\}^*$ )
- c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$
- f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$



Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$   
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)
- b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$   
irregulär (z.B. Schnitt mit  $\{a\}^* \{b\}^*$ )
- c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$   
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)
- f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$   
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)
- b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$   
irregulär (z.B. Schnitt mit  $\{a\}^* \{b\}^*$ )
- c)  $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- d)  $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$   
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$   
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)
- f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$   
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)