TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 5

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 19. November 2021

Aufgabe 1:
NFA $\rightarrow$ *RegExp*

NFA $\to$ REGEXP: ERSETZUNGSMETHODE

Gegeben: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$

Gesucht: regulärer Ausdruck α mit $\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}(\mathcal{M})$

Idee:

Für jeden Zustand $q \in Q$, berechne einen regulären Ausdruck α_q für die Sprache $\mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$ mit $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F \rangle$

Für Startzustände $Q_0 = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \cdots \mid \alpha_{q_n})$$

(1) **Vereinfache den Automaten** (entferne offensichtlich unnötige Zustände)

(2) **Bestimme das Gleichungssystem**

Intuition: Beschreibe α_q in Abhängigkeit von Folgezuständen

- ▷ Für jeden Zustand $q \in Q \setminus F$: $\alpha_q \equiv \sum_{\mathtt{a} \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q, \mathtt{a})} \mathtt{a}\alpha_p$
- ▷ Für jeden Zustand $q \in F$: $\alpha_q \equiv \varepsilon \mid \sum_{\mathtt{a} \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q, \mathtt{a})} \mathtt{a}\alpha_p$

(3) **Löse das Gleichungssystem** durch Einsetzen und

Regel von Arden: Aus $\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma$ mit $\varepsilon \notin \mathbf{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*\gamma$.

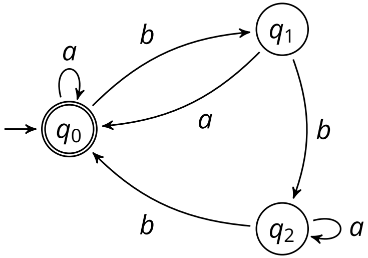
(4) **Gib den Ausdruck für die Sprache des NFA an**

Für $Q_0 = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \cdots \mid \alpha_{q_n})$$

AUFGABE 1

Gegeben ist der DFA $\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle$ mit δ:



Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache repräsentiert, d.h. es gilt $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

Hinweis: Zur Lösung können Sie die Ersetzungsmethode verwenden: geben Sie hierzu für jeden Zustand q_i des Automaten eine Gleichung $\alpha_i = \ldots$ an. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem mithilfe des *Arden-Lemmas*.

Lösung

Wir beschreiben die Sprache eines jeden Zustands in Abhängigkeit der Folgezustände:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_1 \mid \varepsilon\\ \alpha_1 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_2\\ \alpha_2 &\equiv b\alpha_0 \mid a\alpha_2\end{aligned}$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\text{Löse } \alpha_2\text{:} \quad && \alpha_2 &\equiv a^* b\alpha_0\\
\text{in } \alpha_1\text{:} \quad && \alpha_1 &\equiv a\alpha_0 \mid ba^*b\alpha_0\\
&& &\equiv (a \mid ba^*b)\alpha_0\\
\text{in } \alpha_0\text{:} \quad && \alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b(a|ba^*b)\alpha_0 \mid \varepsilon\\
&& &\equiv \Big(a \mid b(a|ba^*b)\Big)\alpha_0 \mid \varepsilon\\
\text{Löse } \alpha_0\text{:} \quad && \alpha_0 &\equiv \Big(a \mid b(a|ba^*b)\Big)^*
\end{aligned}$$

Der gesuchte reguläre Ausdruck ist die Veroderung „|“ aller zu Startzuständen gehörenden α_i, d.h. hier ist $\alpha := \alpha_0$. Per Konstruktion gilt dann $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

Aufgabe 2:
Minimierung von Automaten

ÄQUIVALENZ VON ZUSTÄNDEN & QUOTIENTENAUTOMAT

DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \rightsquigarrow$ DFA $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$

Äquivalenz von Zuständen:	$p \sim_{\mathcal{M}} q \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$
Äquivalenzklasse:	$[q]_\sim = \{p \in Q \mid q \sim p\}$
Quotient von $P \subseteq Q$:	$P/_\sim = \{[p]_\sim \mid p \in P\}$

Quotientenautomat: Verschmelzen von äquivalenten Zuständen

Für einen DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit totaler Übergangsfunktion ist der Quotientenautomat $\mathcal{M}/_\sim = \langle Q/_\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_{\sim_\mathcal{M}}, F/_\sim \rangle$ gegeben durch

- $Q/_\sim = \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$
- $\delta_\sim([q]_\sim, \mathtt{a}) = [\delta(q, \mathtt{a})]_\sim$
- $F/_\sim = \{[q]_\sim \mid q \in F\}$

Bestimmung von $\sim$:

- Initialisiere $\not\sim := \emptyset$
- **Regel 1**: Für jedes Paar von Zuständen $\langle q, p \rangle \in Q \times Q$:
  falls $q \in F$ und $p \notin F$, dann „speichere $q \not\sim p$"
- **Regel 2**: Für jedes Paar $\langle q, p \rangle \in Q \times Q \setminus \not\sim$ und jedes $\mathtt{a} \in \Sigma$:
  falls $\delta(q, \mathtt{a}) \not\sim \delta(p, \mathtt{a})$ dann „speichere $q \not\sim p$"
- Wiederhole Regel 2 bis keine Änderungen mehr auftreten
- Das Ergebnis ist $(Q \times Q) \setminus \not\sim$

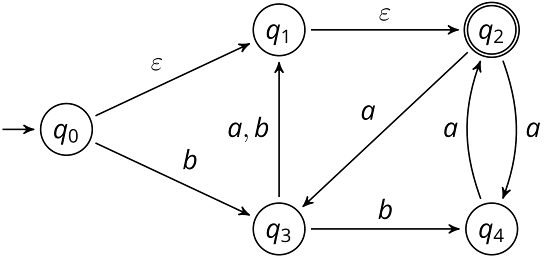
Beispiel: Für einen DFA mit Zuständen $Q = \{A, B, C, D, E\}$ genügt eine Tabelle mit zehn Feldern (statt $5^2 = 25$).

(dazu reihen wir Zustände vertikal in umgekehrter Reihenfolge)

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				

AUFGABE 2

Gegeben ist der ε-NFA
$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit Δ:



a) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$.

b) Geben Sie den zu $\mathcal{M}'$ reduzierten DFA $\mathcal{M}'_r$ an.

Aufgabe 3:
Nerode-Rechtskongruenz

NERODE-RECHTSKONGRUENZ

Nerode-Rechtskongruenz $\simeq_{\mathbf{L}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$:

$u \simeq_{\mathbf{L}} v$ falls $uw \in \mathbf{L} \Leftrightarrow vw \in \mathbf{L} \quad \forall w \in \Sigma^*$

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache **L** ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Myhill-Nerode-Minimalautomat $\mathcal{M}_{\mathbf{L}} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit:

- $Q = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \Sigma^*\}$
- $q_0 = [\varepsilon]_{\simeq}$
- $F = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \mathbf{L}\}$
- $\delta([w]_{\simeq}, \mathtt{a}) = [w\mathtt{a}]_{\simeq}$

AUFGABE 3

Gegeben ist der reguläre Ausdruck $\alpha = (bb)^*a$.

1. Geben Sie für α die *Nerode*-Rechtskongruenz $\simeq_{L(\alpha)}$ an.
2. Geben Sie einen minimalen DFA $\mathcal{M}$ an mit $L(\mathcal{M}) = L(\alpha)$.

Für $\alpha = (bb)^*a$ gilt offensichtlich $L := L(\alpha) = \{b^{2n}a : n \geq 0\}$.

- $\varepsilon \simeq v$ gdw. $\varepsilon w \in L \Leftrightarrow vw \in L$

$$\Rightarrow \quad [\varepsilon]_{\simeq} = \{b^{2n} : n \geq 0\}$$

- $a \simeq v$ gdw. $\underbrace{aw \in L}_{w=\varepsilon} \Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{v \in L}$

$$\Rightarrow \quad [a]_{\simeq} = L = \{b^{2n}a : n \geq 0\}$$

- $b \simeq v$ gdw. $\underbrace{bw \in L}_{w=b^{2n+1}a} \Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{v=b^{2n+1}}$

$$\Rightarrow \quad [v]_{\simeq} = L = \{b^{2n+1} : n \geq 0\}$$

- $ab \simeq v$ gdw. $\underbrace{aw \in L}_{\text{nie erfüllt}} \Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{\substack{v \in L \cdot \{a,b\}^+ \\ v \in \{b\} \cdot L\{a,b\}^*}}$

$$\Rightarrow \quad [ab]_{\simeq} = L \cdot \{a,b\}^+ \cup \{b\} \cdot L\{a,b\}^*$$

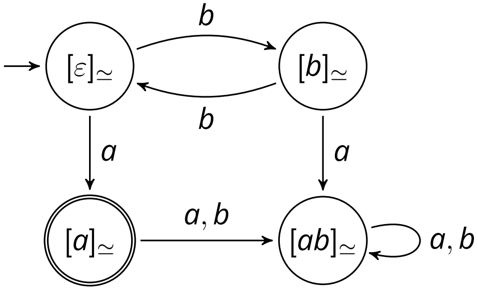
Man kann nun leicht prüfen, dass diese Klassen tatsächlich disjunkt sind und ihre Vereinigung ganz Σ^* ergibt. Damit haben wir alle Klassen gefunden.

Lösung

Äquivalenzklassen: $[\varepsilon]_\simeq, [a]_\simeq, [b]_\simeq, [ab]_\simeq$

Myhill-Nerode-Minimalautomat $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit

- $Q := \{[\varepsilon]_\simeq, [a]_\simeq, [b]_\simeq, [ab]_\simeq\}$
- $q_0 := [\varepsilon]_\simeq$
- $F := \{[a]_\simeq\}$
- δ:



Aufgabe 4

Beweis von Nichtregularität

BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache $\mathbf{L}$ ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ regulär sind, dann auch $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^*$ und $\overline{\mathbf{L}}_1$.

Satz (Pumping-Lemma): Für jede reguläre Sprache $\mathbf{L}$
gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
  für jedes Wort $x \in \mathbf{L}$ mit $|x| \geq n$
  gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
    für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in \mathbf{L}$

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $L_a = \left\{ww^R : w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*\right\}$
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)

b) $L_b = \{\texttt{a}^n \texttt{c}^m \texttt{b}^n : n, m \geq 0\}$
irregulär (z.B. Schnitt mit $\{a\}^* \{b\}^*$)

c) $L_c = \{w \in \{\texttt{0}, 1\}^* : |w|_\texttt{0}$ gerade, $|w|_\texttt{1}$ durch 3 teilbar$\}$
regulär (konstruiere endlichen Automaten)

d) $L_d = \{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* :$ auf jede $\texttt{0}$ folgt eine $\texttt{1}\}$
regulär (konstruiere endlichen Automaten)

e) $L_e = \left\{\texttt{0}^{n^2} : n \geq 0\right\}$
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)

f) $L_f = \{\texttt{0}^m \texttt{1}^n \texttt{0}^{n+m} : n, m \geq 1\}$
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)