

# FORMALE SYSTEME

## ÜBUNG 5

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 18. November 2021

## Aufgabe 1:

*NFA*  $\rightarrow$  *RegExp*

---

# NFA $\rightarrow$ REGEXP: ERSETZUNGSMETHODE

**Gegeben:** NFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$

**Gesucht:** regulärer Ausdruck  $\alpha$  mit  $\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}(\mathcal{M})$

**Idee:**

Für jeden Zustand  $q \in Q$ , berechne einen regulären Ausdruck  $\alpha_q$  für die Sprache  $\mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$  mit  $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F \rangle$

Für Startzustände  $Q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \dots \mid \alpha_{q_n})$$

(1) **Vereinfache den Automaten** (entferne offensichtlich unnötige Zustände)

(2) **Bestimme das Gleichungssystem**

*Intuition:* Beschreibe  $\alpha_q$  in Abhängigkeit von Folgezuständen

▷ Für jeden Zustand  $q \in Q \setminus F$ :  $\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,a)} a \alpha_p$

▷ Für jeden Zustand  $q \in F$ :  $\alpha_q \equiv \varepsilon \mid \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,a)} a \alpha_p$

(3) **Löse das Gleichungssystem** durch Einsetzen und

Regel von Arden: Aus  $\alpha \equiv \beta \alpha \mid \gamma$  mit  $\varepsilon \notin \mathbf{L}(\beta)$  folgt  $\alpha \equiv \beta^* \gamma$ .

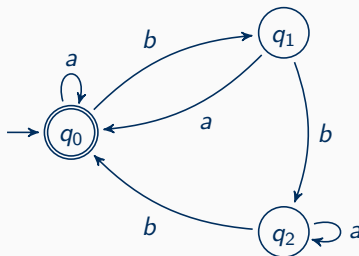
(4) **Gib den Ausdruck für die Sprache des NFA an**

Für  $Q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \dots \mid \alpha_{q_n})$$

# AUFGABE 1

Gegeben ist der DFA  $\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle$  mit  $\delta$ :



Geben Sie einen regulären Ausdruck  $\alpha$  an, der die von  $\mathcal{M}$  akzeptierte Sprache repräsentiert, d.h. es gilt  $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$ .

Hinweis: Zur Lösung können Sie die Ersetzungsmethode verwenden: geben Sie hierzu für jeden Zustand  $q_i$  des Automaten eine Gleichung  $\alpha_i = \dots$  an. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem mithilfe des *Arden-Lemmas*.

## **Aufgabe 2:**

### ***Minimierung von Automaten***

---

# ÄQUIVALENZ VON ZUSTÄNDEN & QUOTIENTENAUTOMAT

DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \rightsquigarrow$  DFA  $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$

<b>Äquivalenz von Zuständen:</b>	$p \sim_{\mathcal{M}} q \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$
<b>Äquivalenzklasse:</b>	$[q]_{\sim} = \{p \in Q \mid q \sim p\}$
<b>Quotient</b> von $P \subseteq Q$ :	$P/{\sim} = \{[p]_{\sim} \mid p \in P\}$

**Quotientenautomat:** Verschmelzen von äquivalenten Zuständen

Für einen DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit totaler Übergangsfunktion ist der Quotientenautomat  $\mathcal{M}/{\sim} = \langle Q/{\sim}, \Sigma, \delta_{\sim}, [q_0]_{\sim}, F/{\sim} \rangle$  gegeben durch

- ▶  $Q/{\sim} = \{[q]_{\sim} \mid q \in Q\}$
- ▶  $\delta_{\sim}([q]_{\sim}, a) = [\delta(q, a)]_{\sim}$
- ▶  $F/{\sim} = \{[q]_{\sim} \mid q \in F\}$

## Bestimmung von $\sim$ :

- Initialisiere  $\sim := \emptyset$
- **Regel 1:** Für jedes Paar von Zuständen  $\langle q, p \rangle \in Q \times Q$ :  
falls  $q \in F$  und  $p \notin F$ , dann „speichere  $q \not\sim p$ “
- **Regel 2:** Für jedes Paar  $\langle q, p \rangle \in Q \times Q \setminus \sim$  und jedes  $a \in \Sigma$ :  
falls  $\delta(q, a) \not\sim \delta(p, a)$  dann „speichere  $q \not\sim p$ “
- Wiederhole Regel 2 bis keine Änderungen mehr auftreten
- Das Ergebnis ist  $(Q \times Q) \setminus \sim$

**Beispiel:** Für einen DFA mit Zuständen  $Q = \{A, B, C, D, E\}$  genügt eine Tabelle mit zehn Feldern (statt  $5^2 = 25$ ).

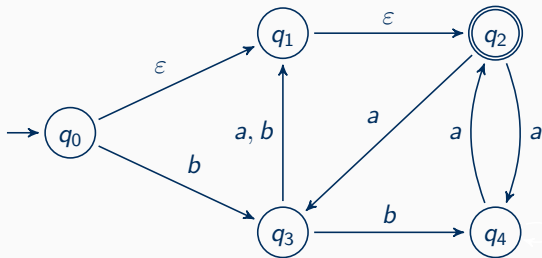
(dazu reihen wir Zustände vertikal in umgekehrter Reihenfolge)

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				



## AUFGABE 2

Gegeben ist der  $\varepsilon$ -NFA  $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$  mit  $\Delta$ :



- Konstruieren Sie einen zu  $\mathcal{M}$  äquivalenten DFA  $\mathcal{M}'$ .
- Geben Sie den zu  $\mathcal{M}'$  reduzierten DFA  $\mathcal{M}'_r$  an.

## **Aufgabe 3:**

### ***Nerode-Rechtskongruenz***

---

# NERODE-RECHTSKONGRUENZ

**Nerode-Rechtskongruenz**  $\simeq_{\mathbf{L}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ :

$u \simeq_{\mathbf{L}} v$  falls  $uw \in \mathbf{L} \Leftrightarrow vw \in \mathbf{L} \quad \forall w \in \Sigma^*$

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $\mathbf{L}$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_{\mathbf{L}}$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Myhill-Nerode-Minimalautomat**  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit:

- ▶  $Q = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \Sigma^*\}$
- ▶  $q_0 = [\varepsilon]_{\simeq}$
- ▶  $F = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \mathbf{L}\}$
- ▶  $\delta([w]_{\simeq}, a) = [wa]_{\simeq}$

## AUFGABE 3

Gegeben ist der reguläre Ausdruck  $\alpha = (bb)^*a$ .

1. Geben Sie für  $\alpha$  die *Nerode*-Rechtskongruenz  $\simeq_{L(\alpha)}$  an.
2. Geben Sie einen minimalen DFA  $\mathcal{M}$  an mit  $L(\mathcal{M}) = L(\alpha)$ .

## **Aufgabe 4**

### ***Beweis von Nichtregularität***

---

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $L$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_L$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

# BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $L$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_L$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Satz:** Wenn  $L_1$  und  $L_2$  regulär sind, dann auch  $L_1 \cap L_2$ ,  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1^*$  und  $\bar{L}_1$ .

# BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $\mathbf{L}$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_{\mathbf{L}}$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Satz:** Wenn  $\mathbf{L}_1$  und  $\mathbf{L}_2$  regulär sind, dann auch  $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{L}_1^*$  und  $\bar{\mathbf{L}}_1$ .

**Satz (Pumping-Lemma):** Für jede reguläre Sprache  $\mathbf{L}$  gibt es eine Zahl  $n \geq 0$ , so dass gilt:  
für jedes Wort  $x \in \mathbf{L}$  mit  $|x| \geq n$   
gibt es eine Zerlegung  $x = uvw$  mit  $|v| \geq 1$  und  $|uv| \leq n$ , so dass:  
für jede Zahl  $k \geq 0$  gilt:  $uv^k w \in \mathbf{L}$



## AUFGABE 4

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)  $L_a = \{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}$

b)  $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$

c)  $L_c = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$

d)  $L_d = \{w \in \{0,1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$

e)  $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$

f)  $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$