

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 8

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 10. Dezember 2021

letzte Änderung:
10.12.2021, 09:10

Aufgabe 1:

Kellerautomaten

Aufgabe 2

Permutationssprache kontextfrei?

Aufgabe 3

Deterministische Kellerautomaten

Aufgabe 4

Wiederholung

Aufgabe 1:

Kellerautomaten

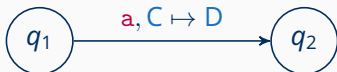
Ein **Kellerautomat** (PDA) \mathcal{M} ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$:

- ▶ Q : endliche Menge von Zuständen
- ▶ Σ : Eingabealphabet
- ▶ Γ : *Kelleralphabet*
- ▶ δ : totale Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow 2^{Q \times \Gamma_\epsilon}$
- ▶ Q_0 : Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$
- ▶ F : Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

Ein **Kellerautomat** (PDA) \mathcal{M} ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$:

- ▶ Q : endliche Menge von Zuständen
- ▶ Σ : Eingabealphabet
- ▶ Γ : *Kelleralphabet*
- ▶ δ : totale Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_{\epsilon} \times \Gamma_{\epsilon} \rightarrow 2^{Q \times \Gamma_{\epsilon}}$
- ▶ Q_0 : Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$
- ▶ F : Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

$\langle q_2, D \rangle \in \delta(q_1, a, C)$ bedeutet: „Wenn der PDA in Zustand q_1 das Symbol a einliest und C oben vom Keller nimmt (pop), dann *kann* er in Zustand q_2 wechseln und dabei D auf den Keller legen (push).“



AUFGABE 1

Geben Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M}_i für die Sprachen L_i ($i = 1, \dots, 4$) sowie eine akzeptierende Folge von Konfigurationsübergängen für die gegebenen Wörter w .

(a) $L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$
 $w = aaabbcc$

(b) $L_1 = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n = 3m\}$
 $w = aaab$

(c) $L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
 $w = aabbba$

(d) $L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$
 $w = ababbaba$

Aufgabe 2

Permutationssprache kontextfrei?

AUFGABE 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch

$$\pi(L) = \left\{ a_1 \dots a_n \in \Sigma^* : \begin{array}{l} \text{ex. Permutation } (i_1 \dots i_n) \text{ von } (1 \dots n), \\ \text{sodass } a_{i_1} \dots a_{i_n} \in L \end{array} \right\}$$

kontextfrei.

ABSCHLUSS FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Satz: Wenn L , L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen sind, dann beschreiben auch die folgenden Ausdrücke kontextfreie Sprachen:
 $L_1 \cup L_2$, $L_1 \circ L_2$, L^*

Aber:

Satz: Es gibt kontextfreie Sprachen L , L_1 und L_2 , so dass die folgenden Ausdrücke keine kontextfreien Sprachen sind:
 $L_1 \cap L_2$, \bar{L}

Aber (nicht in VL):

Lemma: Es sei L kontextfrei und R regulär. Dann ist $L \cap R$ kontextfrei.

Beweisidee: Konstruiere einen Produktautomaten wie für reguläre Sprachen. Dieser wird wieder ein PDA sein.

Die Aussagen ist falsch. Wir betrachten die Sprache $L = \{(abc)^n : n \geq 0\}$, welche bekanntermaßen regulär und insbesondere also kontextfrei ist. Ihre Permutationssprache ist

$$\pi(L) = \{w \in \Sigma^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}.$$

Wir wollen nun also zeigen, dass $\pi(L)$ nicht kontextfrei ist.

(i) Wir nutzen Abschlusseigenschaften. Es gilt

$$\pi(L) \cap \underbrace{\{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 0\}}_{\text{regulär}} = \underbrace{\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}}_{\text{nicht kontextfrei}}.$$

Angenommen $\pi(L)$ wäre kontextfrei. Dann ist

$\{a^n b^n c^n : n \geq 0\} = \text{kontextfrei} \cap \text{regulär}$ auch kontextfrei — Widerspruch.

(ii) Alternativ kann man das Pumping-Lemma bedienen. Dazu sei $n \geq 0$ die Zahl aus dem Pumping-Lemma und wir betrachten das Wort $z = a^n b^n c^n \in \pi(L)$. Damit läuft der Beweis wie das Musterbeispiel der Vorlesung für die Sprache $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ (d.h. Fallunterscheidung nach möglichen Positionen der Pump-Region und in jedem Fall verändern sich die Anzahlen von a , b und c unterschiedlich).

Aufgabe 3

Deterministische Kellerautomaten

DETERMINISTISCHE KELLERAUTOMATEN

Ein **deterministischer Kellerautomat** (DPDA) \mathcal{M} ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- ▶ Q : endliche Menge von Zuständen
- ▶ Σ : Eingabealphabet
- ▶ Γ : Kelleralphabet
- ▶ δ : *partielle* Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow Q \times \Gamma_\epsilon$, so dass für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ jeweils nur eines der folgenden definiert ist:

$$\delta(q, a, A) \quad \delta(q, a, \epsilon) \quad \delta(q, \epsilon, A) \quad \delta(q, \epsilon, \epsilon)$$

- ▶ q_0 : ein Startzustand $q_0 \in Q$
- ▶ F : Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

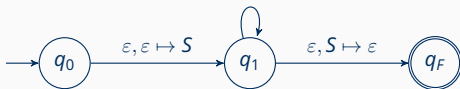
AUFGABE 3

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, wobei $|w|_a$ der Anzahl der Vorkommen von a in w entspricht.

- (a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M} mit $L(\mathcal{M}) = L$, der mittels Finalzustand akzeptiert.
- (b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?
- (c) Wann ist eine Sprache deterministisch kontextfrei? Ist L deterministisch kontextfrei?

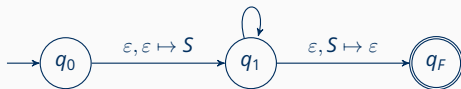
(a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
 $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ :

$a, \varepsilon \mapsto A,$	$c, A \mapsto \varepsilon,$
$b, \varepsilon \mapsto A,$	$a, C \mapsto \varepsilon,$
$c, \varepsilon \mapsto C,$	$b, C \mapsto \varepsilon$



(a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
 $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ :

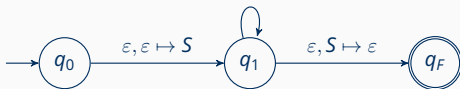
$a, \varepsilon \mapsto A,$	$c, A \mapsto \varepsilon,$
$b, \varepsilon \mapsto A,$	$a, C \mapsto \varepsilon,$
$c, \varepsilon \mapsto C,$	$b, C \mapsto \varepsilon$



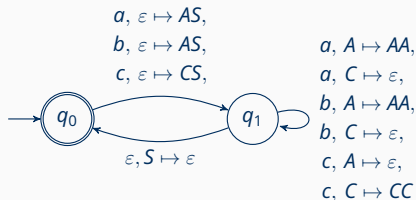
(b) Akzeptanz mittels leerem Keller

- (a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
 $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ :

$$\begin{array}{ll} a, \varepsilon \mapsto A, & c, A \mapsto \varepsilon, \\ b, \varepsilon \mapsto A, & a, C \mapsto \varepsilon, \\ c, \varepsilon \mapsto C, & b, C \mapsto \varepsilon \end{array}$$



- (b) Akzeptanz mittels leerem Keller
- (c) Eine Sprache L heißt deterministisch kontextfrei, falls ein deterministischer Kellerautomat existiert, der L akzeptiert.



Aufgabe 4

Wiederholung

AUFGABE 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
- (b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$, $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
- (b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

Es gilt deterministisch \subsetneq eindeutig \subsetneq Typ 2.

- (b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

Es gilt deterministisch \subsetneq eindeutig \subsetneq Typ 2.

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

Es gilt deterministisch \subsetneq eindeutig \subsetneq Typ 2.

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

- (c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$, $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

Es gilt deterministisch \subsetneq eindeutig \subsetneq Typ 2.

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

- (c) ✗ Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$, $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

Es gilt deterministisch \subsetneq eindeutig \subsetneq Typ 2.

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

- (c) ✗ Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$, $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.