

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 5

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 19. November 2021

Aufgabe 1:

NFA* \rightarrow *RegExp

NFA \rightarrow REGEXP: ERSETZUNGSMETHODE

Gegeben: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$

Gesucht: regulärer Ausdruck α mit $\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}(\mathcal{M})$

Idee:

Für jeden Zustand $q \in Q$, berechne einen regulären Ausdruck α_q für die Sprache $\mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$ mit $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F \rangle$

Für Startzustände $Q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \dots \mid \alpha_{q_n})$$

(1) **Vereinfache den Automaten** (entferne offensichtlich unnötige Zustände)

(2) **Bestimme das Gleichungssystem**

Intuition: Beschreibe α_q in Abhängigkeit von Folgezuständen

▷ Für jeden Zustand $q \in Q \setminus F$: $\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,a)} a \alpha_p$

▷ Für jeden Zustand $q \in F$: $\alpha_q \equiv \varepsilon \mid \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,a)} a \alpha_p$

(3) **Löse das Gleichungssystem** durch Einsetzen und

Regel von Arden: Aus $\alpha \equiv \beta \alpha \mid \gamma$ mit $\varepsilon \notin L(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^* \gamma$.

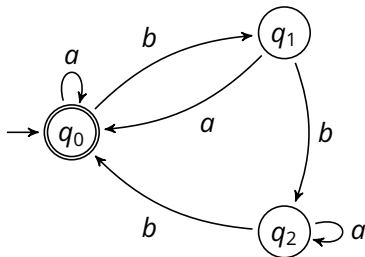
(4) **Gib den Ausdruck für die Sprache des NFA an**

Für $Q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ gilt dann

$$L(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} L(\alpha_q) = L(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \dots \mid \alpha_{q_n})$$

AUFGABE 1

Gegeben ist der DFA $\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle$ mit δ :



Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der die von \mathcal{M} akzeptierte Sprache repräsentiert, d.h. es gilt $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

Hinweis: Zur Lösung können Sie die Ersetzungsmethode verwenden: geben Sie hierzu für jeden Zustand q_i des Automaten eine Gleichung $\alpha_i = \dots$ an. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem mithilfe des *Arden-Lemmas*.

Wir beschreiben die Sprache eines jeden Zustands in Abhängigkeit der Folgezustände:

$$\alpha_0 \equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_1 \mid \varepsilon$$

$$\alpha_1 \equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_2$$

$$\alpha_2 \equiv b\alpha_0 \mid a\alpha_2$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem:

$$\text{Löse } \alpha_2: \quad \alpha_2 \equiv a^*b\alpha_0$$

$$\begin{aligned} \text{in } \alpha_1: \quad \alpha_1 &\equiv a\alpha_0 \mid ba^*b\alpha_0 \\ &\equiv (a \mid ba^*b)\alpha_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in } \alpha_0: \quad \alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b(a|ba^*b)\alpha_0 \mid \varepsilon \\ &\equiv (a \mid b(a|ba^*b))\alpha_0 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Löse } \alpha_0: \quad \alpha_0 \equiv (a \mid b(a|ba^*b))^*$$

Der gesuchte reguläre Ausdruck ist die Veroderung „ \mid “ aller zu Startzuständen gehörenden α_i , d.h. hier ist $\alpha := \alpha_0$. Per Konstruktion gilt dann $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

Aufgabe 2:

Minimierung von Automaten

ÄQUIVALENZ VON ZUSTÄNDEN & QUOTIENTENAUTOMAT

DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \rightsquigarrow$ DFA $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$

Äquivalenz von Zuständen:	$p \sim_{\mathcal{M}} q \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$
Äquivalenzklasse:	$[q]_{\sim} = \{p \in Q \mid q \sim p\}$
Quotient von $P \subseteq Q$:	$P/{\sim} = \{[p]_{\sim} \mid p \in P\}$

Quotientenautomat: Verschmelzen von äquivalenten Zuständen

Für einen DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit totaler Übergangsfunktion ist der Quotientenautomat $\mathcal{M}/{\sim} = \langle Q/{\sim}, \Sigma, \delta_{\sim}, [q_0]_{\sim}, F/{\sim} \rangle$ gegeben durch

- ▶ $Q/{\sim} = \{[q]_{\sim} \mid q \in Q\}$
- ▶ $\delta_{\sim}([q]_{\sim}, a) = [\delta(q, a)]_{\sim}$
- ▶ $F/{\sim} = \{[q]_{\sim} \mid q \in F\}$

Bestimmung von \sim :

- Initialisiere $\sim := \emptyset$
- **Regel 1:** Für jedes Paar von Zuständen $\langle q, p \rangle \in Q \times Q$:
falls $q \in F$ und $p \notin F$, dann „speichere $q \not\sim p$ “
- **Regel 2:** Für jedes Paar $\langle q, p \rangle \in Q \times Q \setminus \sim$ und jedes $a \in \Sigma$:
falls $\delta(q, a) \not\sim \delta(p, a)$ dann „speichere $q \not\sim p$ “
- Wiederhole Regel 2 bis keine Änderungen mehr auftreten
- Das Ergebnis ist $(Q \times Q) \setminus \sim$

Beispiel: Für einen DFA mit Zuständen $Q = \{A, B, C, D, E\}$ genügt eine Tabelle mit zehn Feldern (statt $5^2 = 25$).

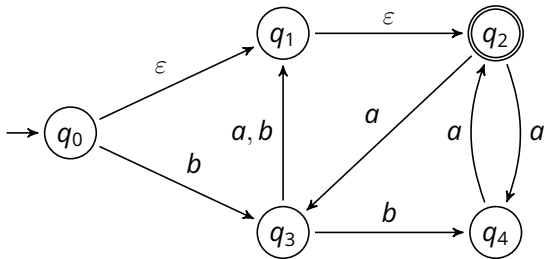
(dazu reihen wir Zustände vertikal in umgekehrter Reihenfolge)

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				

AUFGABE 2

Gegeben ist der ε -NFA

$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit Δ :



- Konstruieren Sie einen zu \mathcal{M} äquivalenten DFA \mathcal{M}' .
- Geben Sie den zu \mathcal{M}' reduzierten DFA \mathcal{M}'_r an.

Aufgabe 3:

Nerode-Rechtskongruenz

NERODE-RECHTSKONGRUENZ

Nerode-Rechtskongruenz $\simeq_{\mathbf{L}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$:

$u \simeq_{\mathbf{L}} v$ falls $uw \in \mathbf{L} \Leftrightarrow vw \in \mathbf{L} \quad \forall w \in \Sigma^*$

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache \mathbf{L} ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Myhill-Nerode-Minimalautomat $\mathcal{M}_{\mathbf{L}} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit:

- ▶ $Q = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \Sigma^*\}$
- ▶ $q_0 = [\epsilon]_{\simeq}$
- ▶ $F = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \mathbf{L}\}$
- ▶ $\delta([w]_{\simeq}, a) = [wa]_{\simeq}$

AUFGABE 3

Gegeben ist der reguläre Ausdruck $\alpha = (bb)^*a$.

1. Geben Sie für α die *Nerode*-Rechtskongruenz $\simeq_{L(\alpha)}$ an.
2. Geben Sie einen minimalen DFA \mathcal{M} an mit $L(\mathcal{M}) = L(\alpha)$.

Für $\alpha = (bb)^*a$ gilt offensichtlich $L := L(\alpha) = \{b^{2n}a : n \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{► } \varepsilon \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \varepsilon w \in L &\Leftrightarrow vw \in L \\ &\Rightarrow [\varepsilon]_{\simeq} = \{b^{2n} : n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } a \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{aw \in L}_{w=\varepsilon} &\Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{v \in L} \\ &\Rightarrow [a]_{\simeq} = L = \{b^{2n}a : n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } b \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{bw \in L}_{w=b^{2n+1}a} &\Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{v=b^{2n+1}} \\ &\Rightarrow [v]_{\simeq} = L = \{b^{2n+1} : n \geq 0\} \end{aligned}$$

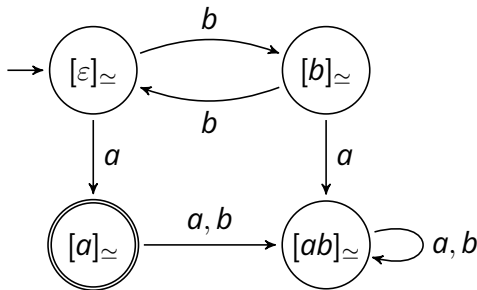
$$\begin{aligned} \text{► } ab \simeq v \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{aw \in L}_{\text{nie erfüllt}} &\Leftrightarrow \underbrace{vw \in L}_{\substack{v \in L \cdot \{a,b\}^+ \\ v \in \{b\} \cdot L \cdot \{a,b\}^*}} \\ &\Rightarrow [ab]_{\simeq} = L \cdot \{a,b\}^+ \cup \{b\} \cdot L \cdot \{a,b\}^* \end{aligned}$$

Man kann nun leicht prüfen, dass diese Klassen tatsächlich disjunkt sind und ihre Vereinigung ganz Σ^* ergibt. Damit haben wir alle Klassen gefunden.

Äquivalenzklassen: $[\varepsilon]_{\simeq}, [a]_{\simeq}, [b]_{\simeq}, [ab]_{\simeq}$

Myhill-Nerode-Minimalautomat $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit

- ▶ $Q := \{[\varepsilon]_{\simeq}, [a]_{\simeq}, [b]_{\simeq}, [ab]_{\simeq}\}$
- ▶ $q_0 := [\varepsilon]_{\simeq}$
- ▶ $F := \{[a]_{\simeq}\}$
- ▶ δ :



Aufgabe 4

Beweis von Nichtregularität

BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn \simeq_L endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Satz: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann auch $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, L_1^* und \bar{L}_1 .

Satz (Pumping-Lemma): Für jede reguläre Sprache L gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in L$

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $L_a = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$
irregulär (z.B. mit Myhill-Nerode oder Pumping-Lemma)
- b) $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$
irregulär (z.B. Schnitt mit $\{a\}^* \{b\}^*$)
- c) $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade, } |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- d) $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{auf jede 0 folgt eine 1}\}$
regulär (konstruiere endlichen Automaten)
- e) $L_e = \{0^{n^2} : n \geq 0\}$
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)
- f) $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$
irregulär (z.B. via Pumping-Lemma)