TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 11

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 14. Januar 2022

letzte Änderung:
14.01.2022, 09:20

ÜBUNGSBLATT 11

Aussagenlogik

Aufgabe 1:
Logisches Rätsel

Aufgabe 2
Logische Konsequenzen

Aufgabe 3
Beschränktheit von Variablen und Teilformeln

Aussagenlogik

AUSSAGENLOGIK: SYNTAX

Wir betrachten eine abzählbar unendliche Menge **P** von atomaren Aussagen (auch: aussagenlogische Variablen oder Atome)

Die Menge der aussagenlogischen Formeln ist induktiv[a] definiert:

- Jedes Atom $p \in \mathbf{P}$ ist eine aussagenlogische Formel
- Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, so auch:
  - Negation: $\neg F$ „nicht F"
  - Konjunktion: $(F \wedge G)$ „F und G"
  - Disjunktion: $(F \vee G)$ „F oder G"
  - Implikation: $(F \to G)$ „F impliziert G"
  - Äquivalenz: $(F \leftrightarrow G)$ „F ist äquivalent zu G"

[a] Das bedeutet: Die Definition ist selbstbezüglich und soll die kleinste Menge an Formeln beschreiben, die alle Bedingungen erfüllen.

TEILFORMELN

Wir können Formeln als Wörter über (endlichen Teilmengen aus) dem unendlichen Alphabet $\mathbf{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ sehen:

$$\mathsf{F} \rightarrow \mathbf{P} \mid \neg\mathsf{F} \mid (\mathsf{F}\wedge\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\vee\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\rightarrow\mathsf{F}) \mid (\mathsf{F}\leftrightarrow\mathsf{F})$$

Eine Teilformel ist ein Teilwort (Infix) einer Formel, welches selbst eine Formel ist.

Alternativ kann man Teilformeln auch rekursiv definieren:

Die Menge $\mathsf{Sub}(F)$ der Teilformeln einer Formel F ist definiert als:

$$\mathsf{Sub}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{falls } F \in \mathbf{P} \\ \{\neg G\} \cup \mathsf{Sub}(G) & \text{falls } F = \neg G \\ \{(G_1 \wedge G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \wedge G_2) \\ \{(G_1 \vee G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \vee G_2) \\ \{(G_1 \rightarrow G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \rightarrow G_2) \\ \{(G_1 \leftrightarrow G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \leftrightarrow G_2) \end{cases}$$

AUSSAGENLOGIK: SEMANTIK

Eine Wertzuweisung ist eine Funktion $w : \mathbf{P} \to \{1, 0\}$

Eine Wertzuweisung w erfüllt eine Formel F, in Symbolen $w \models F$, wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Form von F	$w \models F$ wenn:	$w \not\models F$ wenn:
$F \in \mathbf{P}$:	$w(F) = 1$	$w(F) = 0$
$F = \neg G$	$w \not\models G$	$w \models G$
$F = (G_1 \wedge G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ oder $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \vee G_2)$	$w \models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \to G_2)$	$w \not\models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \leftrightarrow G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \models G_2$

Dabei bedeutet „A oder B“ immer „A oder B *oder beides*“.

AUSSAGENLOGIK: SEMANTIK

Wir können Wertzuweisungen von Atomen auf Formeln erweitern:

$$w(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \models F \\ 0 & \text{falls } w \not\models F \end{cases}$$

Wahrheitswertetabellen illustrieren die Semantik der Junktoren:

$w(F)$	$w(\neg F)$
0	1
1	0

$w(F)$	$w(G)$	$w(F \wedge G)$	$w(F \vee G)$	$w(F \rightarrow G)$	$w(F \leftrightarrow G)$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Aufgabe 1:
Logisches Rätsel

AUFGABE 1

Die Menschen sagen stets die Wahrheit, die Vampire lügen stets.

Außerdem ist ein Teil der Bevölkerung Transsilvaniens verrückt: Alles, was wahr ist, glauben sie, sei falsch, und umgekehrt. Nicht verrückte Transsilvanier hingegen halten genau das für wahr, was wahr ist.

Insbesondere sagt ein verrückter Vampir (wie auch ein nicht-verrückter Mensch) stets das Richtige: Eine Aussage, die wahr ist, glaubt er, sei falsch, da er aber stets lügt, gibt er dennoch eine richtige Antwort.

Craig verhört die zwei Beschuldigten Lucy und Minna, von denen bekannt ist, dass eine ein Vampir ist und die andere nicht. Das Verhör geht wie folgt vonstatten:

Craig (zu Lucy): Erzählen Sie mir von Ihnen.
Lucy: Wir sind beide verrückt.
Craig (zu Minna): Ist das richtig?
Minna: Natürlich nicht!

Formalisieren Sie dieses Szenario mithilfe aussagenlogischer Formeln und finden Sie heraus, wer der Vampir ist!

Lösung

Wir führen folgende aussagenlogische Variablen ein:

V_L	...	Lucy ist ein Vampir	T_L	...	Lucy sagt immer die Wahrheit
V_M	...	Minna ist ein Vampir	T_M	...	Minna sagt immer die Wahrheit
C_L	...	Lucy ist verrückt	B_L	...	Lucys Behauptung ist wahr
C_M	...	Lucy ist verrückt	B_M	...	Minnas Behauptung ist wahr

Entweder Lucy oder Minna ist ein Vampir: $$V_L \leftrightarrow \neg V_M \tag{1}$$

Wir sind beide verrückt: $$B_L \leftrightarrow C_L \wedge C_M \tag{2}$$

Natürlich nicht: $$B_M \leftrightarrow \neg B_L \tag{3}$$

Lucy bzw. Minna sagt die Wahrheit:

$$T_L \leftrightarrow \big((V_L \wedge C_L) \vee (\neg V_L \wedge \neg C_L)\big) \tag{4}$$

$$T_M \leftrightarrow \big((V_M \wedge C_M) \vee (\neg V_M \wedge \neg C_M)\big) \tag{5}$$

Interessant sind nun folgende Aussagen:

- Lucy sagt genau dann die Wahrheit, wenn beide verrückt sind:
  $$F_1 := T_L \leftrightarrow B_L \tag{6}$$
- Minna sagt genau dann die Wahrheit, wenn eine von beiden nicht verrückt ist: $$F_2 := T_M \leftrightarrow B_M \tag{7}$$

Lösung

Wir wollen untersuchen, ob es eine Möglichkeit gibt, in der F_1 und F_2 beide wahr werden sich daraus schlussfolgern lässt, ob V_L oder V_M wahr sein muss – damit ist die Vampirfrage entschieden:

V_L	V_M	C_L	C_M	T_L	T_M	B_L	B_M	F_1	F_2
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
	$\uparrow$			$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	(1)			(4)	(5)	(2)	(3)	(6)	(7)

Damit ist Lucy der Vampir.

Aufgabe 2
Logische Konsequenzen

Sei F eine Formel, $\mathcal{F}$ eine *Menge von Formeln* und w eine Wertzuweisung.

- w ist Modell von F, wenn $w \models F$ gilt.
- w ist Modell von $\mathcal{F}$, wenn $w \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}$.
  Wir schreiben dann auch hier $w \models \mathcal{F}$.

Die logischen Schlussfolgerungen aus einer Formel(menge) ergeben sich aus ihren Modellen:

Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Formeln. Eine Formel G ist eine logische Konsequenz aus $\mathcal{F}$ wenn jedes Modell von $\mathcal{F}$ auch ein Modell von G ist.
In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{F} \models G$.

AUFGABE 2

Zeigen Sie, welche der folgenden Aussagen gültig sind und welche nicht:

(a) $\{(\neg a \lor b), (\neg b \lor c), (b \land c)\} \models ((a \leftrightarrow b) \lor c)$

(b) $\{(a \to b), (c \lor a), (a \to \neg b), \neg c\} \models a$

(c) $\{(a \land \neg b) \lor (\neg a \land b), (\neg c \land b), \neg(\neg a \lor b)\} \models \neg(a \lor b)$

(a) $\{(\neg a \lor b), (\neg b \lor c), (b \land c)\} \models ((a \leftrightarrow b) \lor c)$

a	b	c	$\neg a \lor b$	$\neg b \lor c$	$b \land c$	$a \leftrightarrow b$	$(a \leftrightarrow b) \lor c$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Jedes Modell von $\{(\neg a \lor b), (\neg b \lor c), (b \land c)\}$ ist auch Modell von $((a \leftrightarrow b) \lor c)$. Damit gilt die Aussage.

Lösung

(b) $\{(a \to b), (c \lor a), (a \to \neg b), \neg c\} \models a$

a	b	c	$a \to b$	$c \lor a$	$a \to \neg b$	$\neg c$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0

Die Menge $\{(a \to b), (c \lor a), (a \to \neg b), \neg c\}$ hat keine Modelle, d.h. es folgt Beliebiges. Insbesondere ist also jedes (nicht existente) Modell von $\{(a \to b), (c \lor a), (a \to \neg b), \neg c\}$ auch Modell der Formel a. Damit gilt die Aussage.

Lösung

(c) $\Big\{(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), (\neg c \wedge b), \neg(\neg a \vee b)\Big\} \models \neg(a \vee b)$

a	b	c	$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$	$\neg c \wedge b$	$\neg(\neg a \vee b)$	$\neg(a \vee b)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Die Menge $\Big\{(a\wedge\neg b)\vee(\neg a\wedge b), (\neg c\wedge b), \neg(\neg a\vee b)\Big\}$ hat keine Modelle, d.h. es folgt Beliebiges. Insbesondere ist also jedes (nicht existente) Modell von $\Big\{(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), (\neg c \wedge b), \neg(\neg a \vee b)\Big\}$ auch Modell der Formel $\neg(a \vee b)$. Damit gilt die Aussage.

Aufgabe 3

Beschränktheit von Variablen und Teilformeln

TEILFORMELN

Wir können Formeln als Wörter über (endlichen Teilmengen aus) dem unendlichen Alphabet $\mathbf{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ sehen:

$$\mathrm{F} \rightarrow \mathbf{P} \mid \neg\mathrm{F} \mid (\mathrm{F}\wedge\mathrm{F}) \mid (\mathrm{F}\vee\mathrm{F}) \mid (\mathrm{F}\rightarrow\mathrm{F}) \mid (\mathrm{F}\leftrightarrow\mathrm{F})$$

Eine Teilformel ist ein Teilwort (Infix) einer Formel, welches selbst eine Formel ist.

Alternativ kann man Teilformeln auch rekursiv definieren:

Die Menge $\mathsf{Sub}(F)$ der Teilformeln einer Formel F ist definiert als:

$$\mathsf{Sub}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{falls } F \in \mathbf{P} \\ \{\neg G\} \cup \mathsf{Sub}(G) & \text{falls } F = \neg G \\ \{(G_1 \wedge G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \wedge G_2) \\ \{(G_1 \vee G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \vee G_2) \\ \{(G_1 \rightarrow G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \rightarrow G_2) \\ \{(G_1 \leftrightarrow G_2)\} \cup \mathsf{Sub}(G_1) \cup \mathsf{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \leftrightarrow G_2) \end{cases}$$

AUFGABE 3

Für eine Formel F ist die Größe $|F|$ definiert durch:

$$
\begin{aligned}
|p| &:= 1 \\
|\neg G| &:= |G| + 1 \\
|(G_1 \vee G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\
|(G_1 \wedge G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\
|(G_1 \rightarrow G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\
|(G_1 \leftrightarrow G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1,
\end{aligned}
$$

wobei G_1 und G_2 Formeln sind und $p \in \mathbf{P}$ ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Anzahl der Variablen in F ist beschränkt durch $|F|$.

(b) Die Anzahl der Unterformeln in F ist beschränkt durch $|F|$.

Lösung

Wir definieren zunächst die Variablen $\mathsf{Var}(F)$ einer Formel F. Sei $p \in \mathbf{P}$ eine Variable, F und G seien Formel und $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ein binärer Junktor.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var}(p) &:= \{p\} && \text{(Atome)}\\
\mathsf{Var}(\neg F) &:= \mathsf{Var}(F) && \text{(Negation)}\\
\mathsf{Var}(F \circ G) &:= \mathsf{Var}(F) \cup \mathsf{Var}(G) && \text{(binäre Junktoren)}
\end{aligned}
$$

Aus der Vorlesung ist die Menge der Teilformeln schon bekannt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Sub}(p) &:= \{p\} && \text{(Atome)}\\
\mathsf{Sub}(\neg F) &:= \{\neg F\} \cup \mathsf{Sub}(F) && \text{(Negation)}\\
\mathsf{Sub}(F \circ G) &:= \{F \circ G\} \cup \mathsf{Sub}(F) \cup \mathsf{Sub}(G) && \text{(binäre Junktoren)}
\end{aligned}
$$

Lösung

(a) zu zeigen: $|\mathrm{Var}(F)| \leq |F|$

Strukturelle Induktion über den Aufbau aussagenlogischer Formeln:

IA: Sei $F = p \in \mathbf{P}$ eine Variable. Dann gilt

$$|\mathrm{Var}(F)| = |\mathrm{Var}(p)| = |\{p\}| = 1 \leq 1 = |p| = |F|\,.$$

IV: Für Formeln F_1 und F_2 gelte $|\mathrm{Var}(F_1)| \leq |F_1|$ und $|\mathrm{Var}(F_2)| \leq |F_2|$.

IS: Falls $F = \neg F_1$, dann gilt

$$|\mathrm{Var}(F)| = |\mathrm{Var}(\neg F_1)| = |\mathrm{Var}(F_1)| \overset{IV}{\leq} |F_1| \leq |F_1| + 1 = |\neg F_1| = |F|\,.$$

Falls $F = F_1 \circ F_2$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\mathrm{Var}(F)| = |\mathrm{Var}(F_1 \circ F_2)| &= |\mathrm{Var}(F_1) \cup \mathrm{Var}(F_2)| \\ &\leq |\mathrm{Var}(F_1)| + |\mathrm{Var}(F_2)| \\ &\overset{IV}{\leq} |F_1| + |F_2| \\ &\leq |F_1| + |F_2| + 1 \\ &= |F_1 \circ F_2| \\ &= |F|\,. \end{aligned}$$

Lösung

(b) zu zeigen: $|\mathrm{Sub}(F)| \leq |F|$

Strukturelle Induktion über den Aufbau aussagenlogischer Formeln:

IA: Sei $F = p \in \mathbf{P}$ eine Variable. Dann gilt

$$|\mathrm{Sub}(F)| = |\mathrm{Sub}(p)| = |\{p\}| = 1 \leq 1 = |p| = |F|\,.$$

IV: Für Formeln F_1 und F_2 gelte $|\mathrm{Sub}(F_1)| \leq |F_1|$ und $|\mathrm{Sub}(F_2)| \leq |F_2|$.

IS: Falls $F = \neg F_1$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\mathrm{Sub}(F)| = |\mathrm{Sub}(\neg F_1)| &= |\{\neg F_1\} \cup \mathrm{Sub}(F_1)| \\ &\leq |\{F_1\}| + |\mathrm{Sub}(F_1)| \\ &\overset{IV}{\leq} 1 + |F_1| = |\neg F_1| = |F|\,. \end{aligned}$$

Falls $F = F_1 \circ F_2$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\mathrm{Sub}(F)| = |\mathrm{Sub}(F_1 \circ F_2)| &= |\{F_1 \circ F_2\} \cup \mathrm{Sub}(F_1) \cup \mathrm{Sub}(F_2)| \\ &\leq 1 + |\mathrm{Sub}(F_1)| + |\mathrm{Sub}(F_2)| \\ &\overset{IV}{\leq} 1 + |F_1| + |F_2| \\ &= |F_1 \circ F_2| \\ &= |F|\,. \end{aligned}$$