

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 7

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 3. Dezember 2021

letzte Änderung:
03.12.2021, 20:16

Wie stehst du zu Online-Übungen?

- ▶ Ich bin für Online-Übungen.
nur online
- ▶ Ich kann mit Online-Übungen leben.
beides okay, bevorzugt online
- ▶ Ich kann mit Präsenzübungen leben.
beides okay, bevorzugt Präsenz
- ▶ Ich bin für Präsenzübungen.
nur Präsenz

<https://tudvote.tu-dresden.de/88314>

Aufgabe 1:

Kontextfrei? Pumping-Lemma?

PUMPEN FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Grundidee beim regulären Pumping-Lemma:

endliche viele Zustände \rightsquigarrow Schleifen für lange Wörter notwendig \rightsquigarrow
Schleifen mehrfach benutzbar

PUMPEN FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Grundidee beim regulären Pumping-Lemma:

endliche viele Zustände \rightsquigarrow Schleifen für lange Wörter notwendig \rightsquigarrow
Schleifen mehrfach benutzbar

Grundidee beim kontextfreien Pumping-Lemma:

- ▶ Grammatiken haben nur endlich viele Variablen.
- ▶ Beim Generieren langer Wörter muss eine Variable zu etwas expandiert werden, das diese Variable nochmal enthält:

$$S \Rightarrow \dots \Rightarrow u \underline{A} y \Rightarrow u \underline{z} y \Rightarrow \dots \Rightarrow u v \underline{A} x y \Rightarrow \dots \Rightarrow u \underline{vwx} y$$

- ▶ Diese Schleife kann beliebig oft durchlaufen werden.

Satz (Pumping Lemma): Für jede kontextfreie Sprache L

gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:

für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$

gibt es eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$, so dass:

für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^kwx^ky \in L$

AUFGABE 1

Welche der folgenden Sprachen L_i ist kontextfrei? Zur Begründung Ihrer Antwort sollten Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen verwenden oder eine entsprechende kontextfreie Grammatik angeben.

a) $L_1 = \{a^n b^n c^n d^n \in \{a, b, c, d\}^* \mid n \geq 1\}$

b) $L_2 = \{a^m b^n c^p d^q \in \{a, b, c, d\}^* \mid m, n, p, q \geq 1 \text{ und } m+n = p+q\}$

- a) L_1 ist nicht kontextfrei. Angenommen L_1 wäre kontextfrei, dann gilt das Pumping-Lemma mit einer Zahl $n \geq 0$. Wir betrachten das Wort $w = a^n b^n c^n d^n \in L_1$ und eine Zerlegung dessen in $w = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$.
- ▷ Fall 1: $vwx \in \{a, b\}^+$, d.h. vwx ist ein Teilwort von $a^n b^n$.
Dann enthält uv^2wx^2y mehr a oder b als c oder d . Somit ist $uv^2wx^2y \notin L_1$ im Widerspruch zum Pumping-Lemma.
 - ▷ Fall 2: $vwx \in \{b, c\}^+$, d.h. vwx ist ein Teilwort von $b^n c^n$.
Analog zu Fall 1.
 - ▷ Fall 3: $vwx \in \{c, d\}^+$, d.h. vwx ist ein Teilwort von $c^n d^n$.
Analog zu Fall 1.
- b) L_2 ist kontextfrei. Betrachte dazu die Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ mit $V = \{S, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ und

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow aS_1d \\ S_1 & \rightarrow aS_1d \mid aS_2c \mid bS_3d \mid bS_4c \\ S_2 & \rightarrow aS_2c \mid bS_4c \\ S_3 & \rightarrow bS_3c \mid bS_4c \\ S_4 & \rightarrow bS_4c \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

Aufgabe 2:

Abschlusseigenschaften

ABSCHLUSS FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Satz: Wenn L , L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen sind, dann beschreiben auch die folgenden Ausdrücke kontextfreie Sprachen:

- (1) $L_1 \cup L_2$ (Abschluss unter Vereinigung)
- (2) $L_1 \circ L_2$ (Abschluss unter Konkatination)
- (3) L^* (Abschluss unter Kleene-Stern)

Aber:

Satz: Es gibt kontextfreie Sprachen L , L_1 und L_2 , so dass die folgenden Ausdrücke keine kontextfreien Sprachen sind:

- (1) $L_1 \cap L_2$ (Nichtabschluss unter Schnitt)
- (2) \bar{L} (Nichtabschluss unter Komplement)

AUFGABE 2

Beweisen Sie mithilfe der Abschlußeigenschaften für kontextfreie Sprachen, dass die nachfolgende Sprache

$$L_0 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

kontextfrei ist und geben dann eine kontextfreie Grammatik G_0 für L_0 an mit $L_0 = L(G_0)$. Geben Sie Ableitungen für die Wörter abc und $abbcc$ an.

$$\begin{aligned}
L_0 &= \{a^i b^j c^k : i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \\
&= \{a^i b^j c^k : i = j \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^k : j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \\
&= \{a^i b^j c^k : i, k \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^j : i, j \geq 1\} \\
&= \underbrace{\{a^i b^i : i \geq 1\}}_{\text{kontextfrei}} \underbrace{\{c\}^*}_{\text{regulär}} \cup \underbrace{\{a\}^*}_{\text{regulär}} \underbrace{\{b^j c^j : j \geq 1\}}_{\text{kontextfrei}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_0 &= \{a^i b^j c^k : i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \\
&= \{a^i b^j c^k : i = j \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^k : j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \\
&= \{a^i b^j c^k : i, k \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^j : i, j \geq 1\} \\
&= \underbrace{\{a^i b^j : i \geq 1\}}_{\text{kontextfrei}} \underbrace{\{c\}^*}_{\text{regulär}} \cup \underbrace{\{a\}^*}_{\text{regulär}} \underbrace{\{b^j c^j : j \geq 1\}}_{\text{kontextfrei}}
\end{aligned}$$

Grammatik $G_0 = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ mit $V = \{S, S_a, S_c, S_{ab}, S_{bc}\}$ und

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow S_{ab} S_c \mid S_a S_{bc} \\ S_a & \rightarrow a S_a \mid a \\ S_c & \rightarrow c S_c \mid c \end{array} \quad \begin{array}{ll} S_{ab} & \rightarrow a S_{ab} b \mid ab \\ S_{bc} & \rightarrow b S_{bc} c \mid bc \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
L_0 &= \{a^i b^j c^k : i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \\
&= \{a^i b^j c^k : i = j \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^k : j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\} \\
&= \{a^i b^j c^k : i, k \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^j : i, j \geq 1\} \\
&= \underbrace{\{a^i b^j : i \geq 1\}}_{\text{kontextfrei}} \underbrace{\{c\}^*}_{\text{regulär}} \cup \underbrace{\{a\}^*}_{\text{regulär}} \underbrace{\{b^j c^j : j \geq 1\}}_{\text{kontextfrei}}
\end{aligned}$$

Grammatik $G_0 = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ mit $V = \{S, S_a, S_c, S_{ab}, S_{bc}\}$ und

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow S_{ab} S_c \mid S_a S_{bc} \\ S_a & \rightarrow a S_a \mid a \\ S_c & \rightarrow c S_c \mid c \end{array} \quad \begin{array}{ll} S_{ab} & \rightarrow a S_{ab} b \mid ab \\ S_{bc} & \rightarrow b S_{bc} c \mid bc \end{array} \right\}$$

Ableitungen:

► $w = abc$:

(i) $S \rightarrow S_{ab} S_c \rightarrow ab S_c \rightarrow ab c$

(ii) $S \rightarrow S_a S_{bc} \rightarrow a S_{bc} \rightarrow a bc$

Aufgabe 3 & 4:

CNF-Design und CYK-Algorithmus

CHOMSKY-NORMALFORM

Eine kontextfreie Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$ ist in **Chomsky-Normalform (CNF)**, wenn alle ihre Produktionsregeln eine der beiden folgenden Formen haben:

$$A \rightarrow BC \quad (\text{mit } B, C \in V) \quad \text{oder} \quad A \rightarrow c \quad (\text{mit } c \in \Sigma)$$

Umwandlung in CNF:

- (1) Eliminierung von ε -Regeln
- (2) Eliminierung von Kettenregeln
- (3) Extrahieren von Terminalsymbolen in Regeln $V_c \rightarrow c$
- (4) Reduzieren von Regeln der Form $A \rightarrow B_1 \cdots B_n$ auf $n = 2$

gegeben: kontextfreie Grammatik G in CNF

Frage: $w = a_1 \cdots a_n \in \mathbf{L}(G)$?

- ▶ Falls $|w| = 1$, dann ist $w \in \Sigma$ und es gilt:
 $w \in \mathbf{L}(G)$ genau dann wenn es eine Regel $S \rightarrow w$ in G gibt
- ▶ Falls $|w| > 1$, dann ist:
 $w \in \mathbf{L}(G)$ genau dann wenn es eine Regel $S \rightarrow AB$ und eine Zahl i gibt, so dass gilt

$$A \Rightarrow^* a_1 \cdots a_i \quad \text{und} \quad B \Rightarrow^* a_{i+1} \cdots a_n$$

Idee: Fall 2 reduziert das Problem $S \stackrel{?}{\Rightarrow}^* w$ auf zwei einfachere Probleme $A \stackrel{?}{\Rightarrow}^* a_1 \cdots a_i$ und $B \stackrel{?}{\Rightarrow}^* a_{i+1} \cdots a_n$, die man allerdings für alle Regeln $S \rightarrow AB$ und Indizes i lösen muss

CYK: PRAKTISCHE UMSETZUNG

Vorgehen: $V[i, j]$ = Menge aller A mit $A \Rightarrow^* w_{i,j}$

- ▶ Diagonale = Fall 1: existiert Terminalsymbolregel 🦆 → a
- ▶ Fixiere Element 🦆: sei 🦆 in der gleichen Zeile ganz links und 🦆 direkt unten drunter
 - ▷ wenn eine Regel 🦆 → 🦆 🦆, dann füge 🦆 zu 🦆 hinzu
 - ▷ schiebe 🦆 nach rechts und 🦆 nach unten und wiederhole

Ist am Ende das Startsymbol $S \in V[1, |w|]$, dann $w \in L$.

Beispiel: Wir betrachten das Wort $w = a + b \cdot c$ der Länge $|w| = 5$.

a	$V[1, 1]$	$V[1, 2]$	$V[1, 3]$	$V[1, 4]$	$V[1, 5]$
+		🦆	$V[2, 3]$	🦆 \cup 🦆	$V[2, 5]$
b			$V[3, 3]$	🦆	$V[3, 5]$
.				$V[4, 4]$	$V[4, 5]$
c					$V[5, 5]$
	a	+	b	.	c

AUFGABE 3 & 4

Aufgabe 3: Geben Sie für die nachfolgenden Sprachen L_i jeweils eine (kontextfreie) Grammatik G_i in CNF mit $L_i = L(G_i)$ an:

- (a) Es sei L_1 genau die Menge der Palindrome über $\Sigma = \{a, b\}$.
(Palindrome sind Wörter, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind, z.B. aba , $abba$, a , ε , bb)
- (b) Es sei L_2 die Sprache aller $w \in \{a, b\}^*$ mit gleicher Anzahl an a 's und b 's.
- (c) Es sei $L_3 = \{(ab)^n(ba)^n \mid n \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$

Aufgabe 4: Gegeben seien L_1, L_2, L_3 wie in Aufgabe 3. Wenden Sie den CYK-Algorithmus für folgende Instanzen an um zu prüfen ob das jeweilige Wort zur entsprechenden Sprache gehört:

- (a) L_1 mit $w = abba$ sowie $w = aba$
- (b) L_2 mit $w = aababb$
- (c) L_3 mit $w = ababbaba$

Die Grammatiken sind hier informell nur über die Regelmenge angegeben. Ebenso führen wir für ε -freie Grammatiken kein neues Startsymbol ein, um das Wort ε ableiten zu können, sondern fügen den Fall zum normalen Startsymbol hinzu mit dem Wissen es bei der Chomsky-Normalform zu ignorieren.

(a) $L_1 = \text{Palindrome über } \Sigma = \{a, b\}$

Grammatik: $S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$

„ ε -freie“ Grammatik: $S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb \mid aa \mid bb$

Chomsky-Normalform:

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S & \rightarrow a \mid b \mid V_a C_a \mid V_b C_b \mid V_a V_a \mid V_b V_b \\ V_a & \rightarrow a \quad C_a \rightarrow S V_a \\ V_b & \rightarrow b \quad C_b \rightarrow S V_b \end{array} \right\}$$

CYK-Algorithmus:

a	S, V_a	C_b	S
b		S, V_b	C_a
a			S, V_a
	a	b	a

a	S, V_a	C_b	\emptyset	S
b		S, V_b	S, C_b	C_a
b			S, V_b	C_a
a				S, V_a
	a	b	b	a

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$

Grammatik: $S \rightarrow \varepsilon \mid aB \mid bA, \quad A \rightarrow a \mid aS \mid bAA \quad B \rightarrow b \mid bS \mid aBB$

Chomsky-Normalform:

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & V_a B \mid V_b A \\ A & \rightarrow & a \mid V_a S \mid V_b C_b \\ B & \rightarrow & b \mid V_b S \mid V_a C_B \end{array} \quad \begin{array}{lll} V_a & \rightarrow & a \\ V_b & \rightarrow & b \end{array} \quad \begin{array}{lll} C_A & \rightarrow & AA \\ C_B & \rightarrow & BB \end{array}$$

CYK-Algorithmus: $w = aababb \in L_2$

a	A, V_a	C_A	A	C_A	A	S
a		A, V_a	S	A	S	B
b			B, V_b	S	B	C_B
a				A, V_a	S	B
b					B, V_b	C_B
b						B, V_b
	a	a	b	a	b	b

(c) $L_3 = \{(ab)^n (ba)^n : n \geq 0\}$

(ε -freie) **Grammatik:** $S \rightarrow \varepsilon \mid ab S ba \mid abba$

Chomsky-Normalform:

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow C_{ab}C \mid C_{ab}C_{ba} & \\ V_a \rightarrow a & C_{ab} \rightarrow V_aV_b \\ V_b \rightarrow b & C_{ba} \rightarrow V_bV_a \\ C \rightarrow SC_{ba} & \end{array} \right\}$$

CYK-Algorithmus: $w = ababbaba \in L_3$

a	V_a	C_{ab}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S
b		V_b	C_{ba}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
a			V_a	C_{ab}	\emptyset	S	\emptyset	C
b				V_b	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
b					V_b	C_{ba}	\emptyset	\emptyset
a						V_a	C_{ab}	\emptyset
b							V_b	C_{ba}
a								V_a
	a	b	a	b	b	a	b	b