TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 5

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 18. November 2021

Aufgabe 1:
NFA $\rightarrow$ RegExp

NFA $\rightarrow$ REGEXP: ERSETZUNGSMETHODE

Gegeben: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$

Gesucht: regulärer Ausdruck α mit $\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}(\mathcal{M})$

Idee:

Für jeden Zustand $q \in Q$, berechne einen regulären Ausdruck α_q für die Sprache $\mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$ mit $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F \rangle$

Für Startzustände $Q_0 = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \cdots \mid \alpha_{q_n})$$

(1) **Vereinfache den Automaten** (entferne offensichtlich unnötige Zustände)

(2) **Bestimme das Gleichungssystem**

Intuition: Beschreibe α_q in Abhängigkeit von Folgezuständen

- ▷ Für jeden Zustand $q \in Q \setminus F$: $\alpha_q \equiv \sum_{\mathtt{a} \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,\mathtt{a})} \mathtt{a}\alpha_p$
- ▷ Für jeden Zustand $q \in F$: $\alpha_q \equiv \varepsilon \mid \sum_{\mathtt{a} \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q,\mathtt{a})} \mathtt{a}\alpha_p$

(3) **Löse das Gleichungssystem** durch Einsetzen und

Regel von Arden: Aus $\alpha \equiv \beta\alpha \mid \gamma$ mit $\varepsilon \notin \mathbf{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*\gamma$.

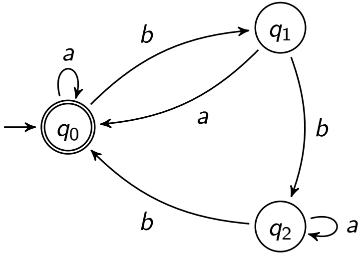
(4) **Gib den Ausdruck für die Sprache des NFA an**

Für $Q_0 = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ gilt dann

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q \in Q_0} \mathbf{L}(\alpha_q) = \mathbf{L}(\alpha_{q_1} \mid \alpha_{q_2} \mid \cdots \mid \alpha_{q_n})$$

AUFGABE 1

Gegeben ist der DFA $\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle$ mit δ:



Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache repräsentiert, d.h. es gilt $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

Hinweis: Zur Lösung können Sie die Ersetzungsmethode verwenden: geben Sie hierzu für jeden Zustand q_i des Automaten eine Gleichung $\alpha_i = \ldots$ an. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem mithilfe des *Arden-Lemmas*.

Aufgabe 2:
Minimierung von Automaten

ÄQUIVALENZ VON ZUSTÄNDEN & QUOTIENTENAUTOMAT

DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \rightsquigarrow$ DFA $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$

Äquivalenz von Zuständen: $p \sim_{\mathcal{M}} q \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$
Äquivalenzklasse: $[q]_\sim = \{p \in Q \mid q \sim p\}$
Quotient von $P \subseteq Q$: $P/_\sim = \{[p]_\sim \mid p \in P\}$

Quotientenautomat: Verschmelzen von äquivalenten Zuständen

Für einen DFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit totaler Übergangsfunktion ist der Quotientenautomat $\mathcal{M}/_\sim = \langle Q/_\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_{\sim_\mathcal{M}}, F/_\sim \rangle$ gegeben durch

- $Q/_\sim = \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$
- $\delta_\sim([q]_\sim, \mathtt{a}) = [\delta(q, \mathtt{a})]_\sim$
- $F/_\sim = \{[q]_\sim \mid q \in F\}$

Bestimmung von $\sim$:

- Initialisiere $\not\sim\ := \emptyset$
- **Regel 1**: Für jedes Paar von Zuständen $\langle q, p \rangle \in Q \times Q$: falls $q \in F$ und $p \notin F$, dann „speichere $q \not\sim p$“
- **Regel 2**: Für jedes Paar $\langle q, p \rangle \in Q \times Q \setminus \not\sim$ und jedes $\mathtt{a} \in \Sigma$: falls $\delta(q, \mathtt{a}) \not\sim \delta(p, \mathtt{a})$ dann „speichere $q \not\sim p$“
- Wiederhole Regel 2 bis keine Änderungen mehr auftreten
- Das Ergebnis ist $(Q \times Q) \setminus \not\sim$

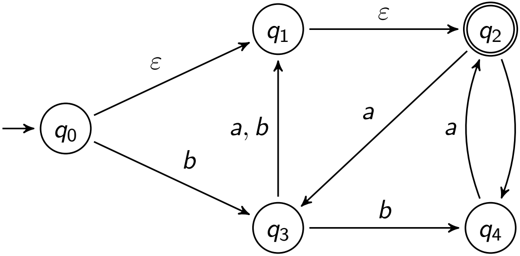
Beispiel: Für einen DFA mit Zuständen $Q = \{A, B, C, D, E\}$ genügt eine Tabelle mit zehn Feldern (statt $5^2 = 25$).

(dazu reihen wir Zustände vertikal in umgekehrter Reihenfolge)

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				

AUFGABE 2

Gegeben ist der ε-NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit Δ:



a) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$.

b) Geben Sie den zu $\mathcal{M}'$ reduzierten DFA $\mathcal{M}'_r$ an.

Aufgabe 3:
Nerode-Rechtskongruenz

NERODE-RECHTSKONGRUENZ

Nerode-Rechtskongruenz $\simeq_{\mathbf{L}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$:

$u \simeq_{\mathbf{L}} v \qquad$ falls $\qquad uw \in \mathbf{L} \;\Leftrightarrow\; vw \in \mathbf{L} \qquad \forall w \in \Sigma^*$

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache $\mathbf{L}$ ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Myhill-Nerode-Minimalautomat $\mathcal{M}_{\mathbf{L}} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit:

- $Q = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \Sigma^*\}$
- $q_0 = [\varepsilon]_{\simeq}$
- $F = \{[w]_{\simeq} \mid w \in \mathbf{L}\}$
- $\delta([w]_{\simeq}, \mathtt{a}) = [w\mathtt{a}]_{\simeq}$

AUFGABE 3

Gegeben ist der reguläre Ausdruck $\alpha = (bb)^* a$.

1. Geben Sie für α die *Nerode*-Rechtskongruenz $\simeq_{L(\alpha)}$ an.
2. Geben Sie einen minimalen DFA $\mathcal{M}$ an mit $L(\mathcal{M}) = L(\alpha)$.

Aufgabe 4
Beweis von Nichtregularität

BEWEIS VON NICHTREGULARITÄT

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache $\mathbf{L}$ ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ regulär sind, dann auch $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^*$ und $\overline{\mathbf{L}}_1$.

Satz (Pumping-Lemma): Für jede reguläre Sprache $\mathbf{L}$
gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
  für jedes Wort $x \in \mathbf{L}$ mit $|x| \geq n$
  gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
    für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in \mathbf{L}$

AUFGABE 4

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $L_a = \left\{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\right\}$
b) $L_b = \{a^n c^m b^n : n, m \geq 0\}$
c) $L_c = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_0 \text{ gerade}, |w|_1 \text{ durch 3 teilbar}\}$
d) $L_d = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{ auf jede } 0 \text{ folgt eine } 1\}$
e) $L_e = \left\{0^{n^2} : n \geq 0\right\}$
f) $L_f = \{0^m 1^n 0^{n+m} : n, m \geq 1\}$