ÜBUNG 14

Aufgabe 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

Gegenbeispiel: "aus Falschem folgt Beliebiges"

$\varphi = (p \vee \neg p)$ ... Tautologie $\rightsquigarrow$ alle Modelle

$\Gamma = (p \wedge \neg p)$ ... Widerspruch $\rightsquigarrow$ keine Modelle

$\Gamma \models \varphi$

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

Horn-Formel ... KNF von Horn-Klauseln $\rightsquigarrow K_1 \wedge \dots \wedge K_n$

Horn-Klausel ... höchstens ein nicht-negiertes Literal $\rightsquigarrow p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_m$

"Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen" $\rightsquigarrow$ DNF ↷ Aussage falsch

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

über a: $\{b, c, \neg b\}$

über b: $\{a, c, \neg a\}$

} Aussage stimmt

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

ja. siehe VL22 Folie 17

Aufgabe 2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

$$\left(\left(\left(\left(\left(p_1 \wedge p_2\right) \vee p_3\right) \wedge p_4\right) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3)\right) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_4)\right) \tag{1}$$

erfüllbar, z.B. via Transformation in DNF und Entscheidung ob Monome gegensätzliche Literale enthalten

↷ erfüllende Wertzuweisung $w(p_1)$ = beliebig, $w(p_2) = 0$, $w(p_3)$ = bel., $w(p_4) = 0$

- keine Horn-Formel, daher nicht in P

$$(\neg(\neg p_1 \wedge \neg(p_2 \wedge (\neg p_1 \to p_2))) \wedge \neg p_2) \tag{2}$$

- analog zu (1), erfüllende Wertzuweisung: $w(p_1) = 1$, $w(p_2) = 0$
- keine Horn-Formel

$$
\left.
\begin{aligned}
((\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4) \wedge \\
(\neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
(\neg p_7 \vee \neg p_2 \vee p_6) \wedge \\
(\neg p_6 \vee \neg p_2) \wedge \\
(\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge \\
(\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge \\
(\neg p_1 \vee p_7) \wedge \\
(\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee p_4) \wedge \\
p_3 \wedge p_1)
\end{aligned}
\right\} \tag{3}
$$

- KNF mit max. einem nicht-negierten Literal pro Klausel $\Rightarrow$ Horn-Formel
  $\Rightarrow$ Lösung in P

Menge der Hornklauseln:

$$
\Gamma = \{ \begin{array}{rcl}
p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 & \rightarrow & p_4 \\
p_5 \wedge p_6 & \rightarrow & \perp \\
p_7 \wedge p_2 & \rightarrow & p_6 \\
p_6 \wedge p_2 & \rightarrow & \perp \\
p_3 \wedge p_6 & \rightarrow & p_2 \\
p_3 \wedge p_4 & \rightarrow & p_5 \\
p_1 & \rightarrow & p_7 \\
p_1 \wedge p_7 & \rightarrow & p_4 \\
\top & \rightarrow & p_3 \\
\top & \rightarrow & p_1 \}
\end{array}
$$

Hyperresolution:

$V_0 = \{p_3, p_1\}$
$V_1 = V_0 \cup \{p_7\}$
$V_2 = V_1 \cup \{p_4\}$
$V_3 = V_2 \cup \{p_5\}$
$V_4 = V_3 \cup \emptyset = \{p_1, p_3, p_4, p_5, p_7\}$

$\hookrightarrow$ Es gibt keine Regel mit $q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow \perp$ und $q_1, \dots, q_n \in V_4$

$\Rightarrow$ Formel erfüllbar

$$
((p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1) \tag{4}
$$

$\hookrightarrow$ Horn-Formel

Horn-Regeln:

$$
\Gamma = \{ \begin{array}{rcl}
p_2 & \rightarrow & p_1 \\
p_3 & \rightarrow & p_2 \\
p_1 & \rightarrow & p_3 \\
p_2 \wedge p_3 & \rightarrow & \perp \\
\top & \rightarrow & p_1 \}
\end{array}
$$

Hyperresolution:

$V_0 = \{p_1\}$
$V_1 = V_0 \cup \{p_3\}$
$V_2 = V_1 \cup \{p_2\}$
$V_3 = V_2 \cup \emptyset = Var(\Gamma)$

$\hookrightarrow$ Da $(p_2 \wedge p_3 \rightarrow \perp) \in \Gamma$ und $p_2, p_3 \in V_3$ ist die Formel unerfüllbar.

Aufgabe 3

Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- Gegeben ist eine Zahlenfolge $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$, $n \geq 1$.
- Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von π die Sequenz s vor?

Hinweis: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, daß es beliebig genaue Näherungsverfahren für π gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahrens für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus

Pi-Näherungsverfahren(k),

das als Eingabe eine natürliche Zahl $k \geq 1$ hat und als Ausgabe die k ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von π zurückgibt.

EINGABE: $s = s_1 \dots s_n \in \{0, \dots, 9\}^n$ $(n \geq 1)$

für alle $k = n, n+1, \dots$:

$a_1 \dots a_k$ = PiNV(k)

falls $a_{k-n+1}\ a_{k-n+2} \dots a_k = s_1 \dots s_n$: akzeptiere

Aufgabe 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein *Mengen-Constraintsystem* C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine *Lösung* L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \to 2^E$, so dass

$$\begin{aligned}
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X) \in C \text{ gilt: } & a \in L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \notin X) \in C \text{ gilt: } & a \notin L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X \cup Y) \in C \text{ gilt: } & a \in L(X) \cup L(Y),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (X \subseteq Y \cup Z) \in C \text{ gilt: } & L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$\begin{aligned}
V &= \{M_1, M_2, M_3, M_4\}\\
E &= \{a, b, c, d\}\\
C &= \{M_2 \subseteq M_1 \cup M_3, M_4 \subseteq M_3 \cup M_2,\\
&\qquad a \in M_1, a \notin M_3, b \in M_4, b \in M_1, b \notin M_3,\\
&\qquad c \in M_4, c \notin M_1, c \notin M_3, d \in M_4, d \notin M_1, d \notin M_2\}
\end{aligned}$$

a)
- $M_4 \subseteq M_3 \cup M_2$ erfordert $c \in L(M_2)$, da $c \in L(M_4)$ und $c \notin L(M_3)$
- $M_2 \subseteq M_1 \cup M_3$ erfordert $c \in L(M_1)$ oder $c \in L(M_3)$, da $c \in L(M_2)$

$c \in L(M_1)$ steht im Widerspruch zum Constraint $c \notin M_1$
$c \in L(M_3)$ steht im Widerspruch zum Constraint $c \notin M_3$

$\Longrightarrow$ Das System hat keine Lösung.

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.

Hinweis: Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.

Idee: Reduziere das Problem auf Horn-SAT $\in P$

$$\wp := \{ p_{a \notin X} : (a \notin X) \in C \}$$

$$\Gamma := \{ (\top \to p_{a \notin X}) : (a \notin X) \in C \}$$
$$\cup \{ (p_{a \notin X} \to \bot) : (a \in X) \in C \}$$
$$\cup \{ ((p_{a \notin X} \wedge p_{a \notin Y}) \to \bot) : (a \in X \cup Y) \in C \}$$
$$\cup \bigcup_{a \in E} \{ ((p_{a \notin Y} \wedge p_{a \notin Z}) \to p_{a \notin X}) : (X \subseteq Y \cup Z) \in C \}$$

$\Rightarrow$ C ist genau dann erfüllbar, wenn Γ erfüllbar ist.

Die Erfüllbarkeit der Horn-Klauselmenge kann in polynomieller Zeit getestet werden.