TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 8

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 10. Dezember 2021

letzte Änderung:
09.12.2021, 21:43

ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe 1:
Kellerautomaten

Aufgabe 2
Permutationssprache kontextfrei?

Aufgabe 3
Deterministische Kellerautomaten

Aufgabe 4
Wiederholung

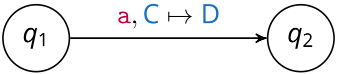
Aufgabe 1:
Kellerautomaten

KELLERAUTOMATEN

Ein **Kellerautomat** (PDA) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: *Kelleralphabet*
- δ: totale Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to 2^{Q \times \Gamma_\varepsilon}$
- Q_0: Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

$\langle q_2, \mathtt{D} \rangle \in \delta(q_1, \mathtt{a}, \mathtt{C})$ bedeutet: „Wenn der PDA in Zustand q_1 das Symbol $\mathtt{a}$ einliest und $\mathtt{C}$ oben vom Keller nimmt (pop), dann *kann* er in Zustand q_2 wechseln und dabei $\mathtt{D}$ auf den Keller legen (push)."



AUFGABE 1

Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_i$ für die Sprachen L_i ($i = 1, \ldots, 4$) sowie eine akzeptierende Folge von Konfigurationsübergängen für die gegebenen Wörter w.

(a) $L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$
$w = aaabbcc$

(b) $L_1 = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\,, n = 3m\}$
$w = aaab$

(c) $L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^{\cdot} \mid |w|_a = |w|_b\}$
$w = aabbba$

(d) $L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$
$w = ababbaba$

Aufgabe 2

Permutationssprache kontextfrei?

AUFGABE 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

Ist $L \subseteq \Sigma^{\cdot}$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch

$$\pi(L) = \left\{ a_1 \dots a_n \in \Sigma^{\cdot} : \begin{array}{l} \text{ex. Permutation } (i_1 \dots i_n) \text{ von } (1 \dots n), \\ \text{sodass } a_{i_1} \dots a_{i_n} \in L \end{array} \right\}$$

kontextfrei.

ABSCHLUSS FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Satz: Wenn $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_1}$ und $\mathbf{L_2}$ kontextfreie Sprachen sind, dann beschreiben auch die folgenden Ausdrücke kontextfreie Sprachen:
$\mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1} \circ \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L}^*$

Aber:

Satz: Es gibt kontextfreie Sprachen $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_1}$ und $\mathbf{L_2}$, so dass die folgenden Ausdrücke keine kontextfreien Sprachen sind:
$\mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$, $\overline{\mathbf{L}}$

Aber (nicht in VL):

Lemma: Es sei $\mathbf{L}$ kontextfrei und $\mathbf{R}$ regulär. Dann ist $\mathbf{L} \cap \mathbf{R}$ kontextfrei.

Beweisidee: Konstruiere einen Produktautomaten wie für reguläre Sprachen. Dieser wird wieder ein PDA sein.

Lösung

Die Aussagen ist falsch. Wir betrachten die Sprache $L = \{(abc)^n : n \geq 0\}$, welche bekanntermaßen regulär und insbesondere also kontextfrei ist. Ihre Permutationssprache ist

$$\pi(L) = \left\{w \in \Sigma^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\right\}.$$

Wir wollen nun also zeigen, dass $\pi(L)$ nicht kontextfrei ist.

(i) Wir nutzen Abschlusseigenschaften. Es gilt

$$\pi(L) \cap \underbrace{\left\{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 0\right\}}_{\text{regulär}} = \underbrace{\left\{a^n b^n c^n : n \geq 0\right\}}_{\text{nicht kontextfrei}}.$$

Angenommen $\pi(L)$ wäre kontextfrei. Dann ist $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\} =$ kontextfrei $\cap$ regulär auch kontextfrei — Widerspruch.

(ii) Alternativ kann man das Pumping-Lemma bedienen. Dazu sei $n \geq 0$ die Zahl aus dem Pumping-Lemma und wir betrachten das Wort $z = a^n b^n c^n \in \pi(L)$. Damit läuft der Beweis wie das Musterbeispiel der Vorlesung für die Sprache $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ (d.h. Fallunterscheidung nach möglichen Positionen der Pump-Region und in jedem Fall verändern sich die Anzahlen von a, b und c unterschiedlich).

Aufgabe 3

Deterministische Kellerautomaten

DETERMINISTISCHE KELLERAUTOMATEN

Ein **deterministischer Kellerautomat** (DPDA) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: Kelleralphabet
- δ: *partielle* Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to Q \times \Gamma_\varepsilon$, so dass für alle $q \in Q$, $\mathtt{a} \in \Sigma$ und $\mathsf{A} \in \Gamma$ jeweils nur eines der folgenden definiert ist:

$$\delta(q, \mathtt{a}, \mathsf{A}) \qquad \delta(q, \mathtt{a}, \varepsilon) \qquad \delta(q, \varepsilon, \mathsf{A}) \qquad \delta(q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- q_0: ein Startzustand $q_0 \in Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

AUFGABE 3

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, wobei $|w|_a$ der Anzahl der Vorkommen von a in w entspricht.

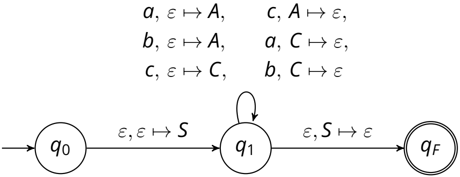
(a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L$, der mittels Finalzustand akzeptiert.

(b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

(c) Wann ist eine Sprache deterministisch kontextfrei? Ist L deterministisch kontextfrei?

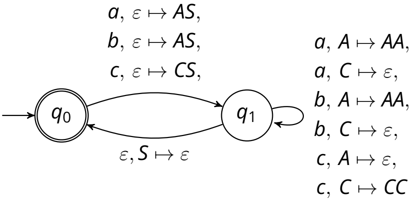
Lösung

(a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ:



(b) Akzeptanz mittels leerem Keller

(c) Eine Sprache L heißt deterministisch kontextfrei, falls ein deterministischer Kellerautomat existiert, der L akzeptiert.



Aufgabe 4

Wiederholung

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
Es gilt deterministisch $\subsetneq$ *eindeutig* $\subsetneq$ *Typ 2.*

(b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

(c) ✗ Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.