ÜBUNG 12

Übung bis zum 14. Blatt
Prüfung 15.02.2022
7^{30} - 10^{50}
ich im TRE/MATH/H
Hilfsmittel: A4 beidseitig, hand-/maschinengeschrieben

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen:

a) Distributivitätsregel:

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$$

b) Absorptionsregel:

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$$

a) Wahrheitswertetabelle

φ	ψ	π	$\psi \wedge \pi$	$\varphi \vee (\psi \wedge \pi)$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \vee \pi$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

⇒ gleiche Wahrheitswerte ⇒ Aussage gilt

b) Wahrheitswertetabelle

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

⇒ gleiche Wahrheitswerte

⇒ Aussage gilt

Aufgabe 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

a) $\Big(\big((a \to \neg b) \wedge (\neg a \to (b \wedge c))\big) \wedge ((\neg b \vee c) \to d)\Big) \equiv \Big((\neg(a \leftrightarrow b) \wedge (a \vee c)) \wedge \neg((b \vee d) \to (c \wedge \neg d))\Big)$

$$(((a \to \neg b) \wedge (\neg a \to (b \wedge c))) \wedge ((\neg b \vee c) \to d))$$

$$\equiv (((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee (b \wedge c))) \wedge (\neg(\neg b \vee c) \vee d))$$

erste $F \to G \equiv \neg F \vee G$

$$\equiv (((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c)) \wedge ((b \wedge \neg c) \vee d))$$

Distributivität

$$\equiv ((\underbrace{(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)} \wedge (a \vee c)) \wedge \underbrace{((b \vee d) \wedge (\neg c \vee d))})$$

$F \equiv \neg\neg F$

$$\equiv \neg(\neg(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \qquad \equiv \neg(\neg(b \vee d) \vee \neg(\neg c \vee d))$$

Distributivität

$$\equiv \neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \qquad \equiv \neg(\neg(b \vee d) \vee (c \wedge \neg d))$$

$\neg F \vee G \equiv F \to G$

$$\equiv \neg(a \leftrightarrow b) \qquad \equiv \neg((b \vee d) \to (c \wedge \neg d))$$

$F \leftrightarrow G \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$

$$\equiv ((\neg(a \leftrightarrow b) \wedge (a \wedge c)) \wedge \neg((b \vee d) \to (c \wedge \neg d)))$$

b) $\big(((a \to b) \to a) \to a\big) \equiv \big(((a \to b) \wedge (b \to c)) \to \neg(\neg c \wedge a)\big)$

Links: $(((a \to b) \to a) \to a) \equiv (\neg((a \to b) \to a) \vee a)$

$$\equiv (\neg(\neg(a \to b) \vee a) \vee a)$$

$$\equiv (\neg(\neg(\neg a \vee b) \vee a) \vee a)$$

$$\equiv (\neg(a \wedge \neg b) \wedge a) \vee a)$$

$(\varphi \vee \psi) \wedge \varphi$

$$\equiv (((\neg a \vee b) \wedge \neg a) \vee a)$$

$$\equiv (\neg a \vee a)$$

$$\equiv \top$$

rechts: $(((a \to b) \wedge (b \to c)) \to \neg(\neg c \wedge a))$

$$\equiv (((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c))$$

$$\equiv \top$$

Begründung: Angenommen es wäre $w(a \to c) = 0$. Dann muss $w(a) = 1$ und $w(c) = 0$ gelten. Damit $w((a \to b) \wedge (b \to c)) = 1$ gilt, müssen beide Operanden wahr sein. Da $w(c) = 0$ bereits erfüllt sein muss, muss $w(b) = 0$ gelten, damit $w(b \to c) = 1$. Dann muss für $w(a \to b) = 1$ auch schon $w(a) = 0$ gelten – ein Widerspruch. Somit ist stets $w(a \to c) = 1$ und die Implikation stets erfüllt, d.h. allgemeingültig.

c) $\Big(((b \wedge l) \to m) \wedge ((a \wedge b) \to l) \wedge a \wedge b\Big) \equiv ((\neg b \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (\neg l \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (m \wedge l \wedge a \wedge b))$

rechts: $((\neg b \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (\neg l \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (m \wedge l \wedge a \wedge b))$

$\equiv (\quad \bot \quad \vee \quad \bot \quad \vee (m \wedge l \wedge a \wedge b))$

$\equiv (m \wedge l \wedge a \wedge b)$

links: $(((b \wedge l) \to m) \wedge ((a \wedge b) \to l) \wedge a \wedge b)$

$\equiv ((\neg(b \wedge l) \vee m) \wedge (\neg(a \wedge b) \vee l) \wedge (a \wedge b))$

$\equiv ((\neg(b \wedge l) \vee m) \wedge \underline{l} \wedge a \underline{\wedge b})$

$\equiv ((\neg(b \wedge l) \vee m) \wedge (l \wedge b) \wedge a)$

$\equiv (m \wedge l \wedge b \wedge a)$

$\equiv (m \wedge l \wedge a \wedge b)$

Distributivität und
$\neg F \wedge F = \bot$

Aufgabe 3

Transformieren Sie die Formel

$$\varphi = \Big(\big(\neg(a \leftrightarrow b) \vee \neg(c \wedge a)\big) \vee \neg(c \to b)\Big)$$

a) in Negationsnormalform;

b) in konjunktive Normalform;

c) in disjunktive Normalform.

Vorbereitung: Eliminiere $\leftrightarrow$ und $\to$

$$\varphi \equiv \big((\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee \neg(c \wedge a)) \vee \neg(\neg c \vee b) \big) =: \varphi_1$$

a) Negationsnormalform:

$$\varphi_1 = \big((\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee \neg(c \wedge a)) \vee \underline{\neg(\neg c \vee b)} \big)$$

$$\equiv \big((\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee \underline{\neg(c \wedge a)}) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((\underline{\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))} \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((\underline{\neg(a \wedge b)} \wedge \underline{\neg(\neg a \wedge \neg b)}) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big(((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big) =: \varphi_2$$

b) konjunktive Normalform ($\vee$ innen , $\wedge$ außen) $\rightsquigarrow$ nutze Distributivgesetz

$$\varphi_2 = \big(((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((((\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \wedge ((a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg a))) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((((\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b)) \wedge (((a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b)) \big)$$

$$\equiv \big((((\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee c) \wedge (((\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee \neg b) \big)$$

$$\wedge \big((((a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee c) \wedge (((a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg a \vee \neg b)$$

$$\wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg a \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg a \vee \neg b) \big)$$

$$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

c) disjunktive Normalform ($\wedge$ innen , $\vee$ außen) $\rightsquigarrow$ nutze Distributivgesetz

$$\varphi_2 = \big(((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((((\neg a \wedge (a \vee b)) \vee (\neg b \wedge (a \vee b))) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big(((((\neg a \wedge a) \vee (\neg a \wedge b)) \vee ((\neg b \wedge a) \vee (\neg b \wedge b))) \vee (\neg c \vee \neg a)) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((\neg a \wedge a) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge a) \vee (\neg b \wedge b) \vee (\neg c) \vee (\neg a) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

$$\equiv \big((\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge a) \vee (\neg c) \vee (\neg a) \vee (c \wedge \neg b) \big)$$

Aufgabe 4

Prüfen Sie folgende Formeln mittels Resolutionsverfahren auf Erfüllbarkeit:

a) $b \wedge (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$

b) $\neg\Big(c \to \big((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)\big)\Big)$

a) Die Formel ist bereits in KNF $\rightsquigarrow$ Klauselform: $\{ \{b\}, \{a,b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c\}, \{\neg a, c\} \}$

(1)	$\{b\}$	
(2)	$\{a,b\}$	
(3)	$\{\neg b, c\}$	
(4)	$\{\neg b, \neg c\}$	
(5)	$\{\neg a, c\}$	
(6)	$\{c\}$	(1) + (3)
(7)	$\{\neg b\}$	(4) + (6)
(8)	$\perp$	(1) + (7)

$\Rightarrow$ Die Formel ist nicht erfüllbar.

b) Transformation in KNF:

$$\neg(c \to ((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))) \equiv \neg(\neg c \vee ((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)))$$

$$\equiv (c \wedge \neg((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b)))$$

$$\equiv (c \wedge (\neg(\neg a \wedge b \wedge c) \wedge \neg(a \wedge \neg b)))$$

$$\equiv (c \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b))$$

Klauselmenge: $\{ \{c\}, \{a, \neg b, \neg c\}, \{\neg a, b\} \}$

(1)	$\{c\}$	
(2)	$\{a, \neg b, \neg c\}$	
(3)	$\{\neg a, b\}$	
(4)	$\{a, \neg b\}$	(1) + (2)
(5)	$\{b, \neg b, \neg c\}$	(2) + (3)
(6)	$\{a, \neg a, \neg c\}$	(2) + (3)
(7)	$\{b, \neg b\}$	(1) + (5)
(8)	$\{a, \neg a\}$	(1) + (6)
(9)	$\{\neg a, b, \neg c\}$	(3) + (5)

$\Rightarrow$ $\perp$ kann nicht abgeleitet werden

$\Rightarrow$ Formel ist erfüllbar