TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 14

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 4. Februar 2022

letzte Änderung:
30.01.2022, 18:00

ÜBUNGSBLATT 14

Aufgabe 1
Wiederholung

Aufgabe 2
Logisches Schließen

Aufgabe 3
Ziffernfolgen in π finden

Aufgabe 4
Mengen-Constraint-Systeme

Aufgabe 1
Wiederholung

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

***Falsch** — Gegenbeispiel: Aus Falschem folgt Beliebiges.*

$\psi = (p \lor \neg p)$ *ist tautologisch.* $\Gamma = (p \land \neg p)$ *ist unerfüllbar.*

Dennoch gilt $\Gamma \models \psi$.

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

Falsch *— Gegenbeispiel: Aus Falschem folgt Beliebiges.*

$\psi = (p \vee \neg p)$ *ist tautologisch.* $\Gamma = (p \wedge \neg p)$ *ist unerfüllbar.*

Dennoch gilt $\Gamma \models \psi$*.*

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

Falsch *— Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen* $\rightsquigarrow$ *disjunktive Normalform*

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

Falsch *— Gegenbeispiel: Aus Falschem folgt Beliebiges.*

$\psi = (p \vee \neg p)$ *ist tautologisch.* $\Gamma = (p \wedge \neg p)$ *ist unerfüllbar.*

Dennoch gilt $\Gamma \models \psi$*.*

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

Falsch *— Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen* $\rightsquigarrow$ *disjunktive Normalform*

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

Richtig *— es können nur die Klauseln* $\{b, c, \neg b\}$ *und* $\{a, c, \neg a\}$ *entstehen.*

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

Falsch *— Gegenbeispiel: Aus Falschem folgt Beliebiges.*

$\psi = (p \vee \neg p)$ *ist tautologisch.* $\Gamma = (p \wedge \neg p)$ *ist unerfüllbar.*

Dennoch gilt $\Gamma \models \psi$*.*

b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

Falsch *— Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen* $\rightsquigarrow$ *disjunktive Normalform*

c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

Richtig *— es können nur die Klauseln* $\{b, c, \neg b\}$ *und* $\{a, c, \neg a\}$ *entstehen.*

d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

Richtig *— per Definition (siehe VL 22, Folie 17)*

Aufgabe 2

Logisches Schließen

AUFGABE 2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

$$\Big(\big(((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3)\big) \vee \big(\neg p_2 \wedge \neg p_4\big)\Big) \tag{1}$$

$$\Big(\neg\big(\neg p_1 \wedge \neg(p_2 \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2))\big) \wedge \neg p_2\Big) \tag{2}$$

$$\left[\begin{array}{rl}
\Big(\quad (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4) & \wedge \\
(\neg p_5 \vee \neg p_6) & \wedge \\
(\neg p_7 \vee \neg p_2 \vee p_6) & \wedge \\
(\neg p_6 \vee \neg p_2) & \wedge \\
(\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_2) & \wedge \\
(\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) & \wedge \\
(\neg p_1 \vee p_7) & \wedge \\
(\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee p_4) & \wedge \\
p_3 & \wedge \\
p_1 & \quad \Big)
\end{array}\right. \tag{3}$$

$$\Big((p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1\Big) \tag{4}$$

Lösung

(a) erfüllbar, z.B. via Transformation in DNF und Entscheidung, ob Monome gegensätzliche Literale enthalten
erfüllende Wertzuweisung: $w(p_2) = 0$ und $w(p_4) = 0$ reicht

(b) erfüllbar mit $w(p_1) = 1$ und $w(p_2) = 0$

Sowohl (a) als auch (b) sind keine Horn-Formel und daher ist ihre Erfüllbarkeit nicht in **P** entscheidbar.

(c) Horn-Regelmenge:

$$
\begin{aligned}
p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 &\to p_4 \\
p_5 \wedge p_6 &\to \perp \\
p_7 \wedge p_2 &\to p_6 \\
p_6 \wedge p_2 &\to \perp \\
p_6 \wedge p_3 &\to p_2 \\
p_3 \wedge p_4 &\to p_5 \\
p_1 &\to p_7 \\
p_1 \wedge p_7 &\to p_4 \\
\top &\to p_3 \\
\top &\to p_1
\end{aligned}
$$

Hyperresolution:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \{p_3, p_1\} \\
V_1 &= V_0 \cup \{p_7\} \\
V_2 &= V_1 \cup \{p_4\} \\
V_3 &= V_2 \cup \{p_5\} = V_4 = V
\end{aligned}
$$

Es gibt keine Regel $q_0 \wedge \cdots \wedge q_m \to \perp$ mit $q_0, \ldots, q_m \in V$. Daher ist die Formel erfüllbar.

Lösung

(d) Horn-Regelmenge:

$$p_2 \to p_1$$
$$p_3 \to p_2$$
$$p_1 \to p_3$$
$$p_2 \wedge p_3 \to \bot$$
$$\top \to p_1$$

Hyperresolution:

$$V_0 = \{p_1\}$$
$$V_1 = V_0 \cup \{p_3\}$$
$$V_2 = V_1 \cup \{p_2\} = V_3 = V$$

Da $(p_2 \wedge p_3 \to \bot)$ eine Horn-Regel mit $p_2, p_3 \in V$ ist, ist die Formel unerfüllbar.

Da (c) und (d) jeweils Horn-Formeln sind, kann deren Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit entschieden werden.

Aufgabe 3
Ziffernfolgen in π finden

AUFGABE 3

Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- Gegeben ist eine Zahlenfolge $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$ ($n \geq 1$).
- Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von π die Sequenz s vor?

Hinweis:
Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass es beliebig genaue Näherungsverfahren für π gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahrens für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus Pi-Näherungsverfahren(k)*, das als Eingabe eine natürliche Zahl $k \geq 1$ hat und als Ausgabe die k ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von π zurückgibt.*

Eingabe: $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$ mit $n \geq 1$

FOR $k = n, n+1, \dots$:

Berechne $a_1 \dots a_k =$ Pi-Näherungsverfahren(k)

Falls $a_{k-n+1} \dots a_k = s_1 \dots s_n$: akzeptiere

Sonst: wähle nächstes k

Aufgabe 4

Mengen-Constraint-Systeme

AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \to 2^E$, so dass

$$\begin{aligned}
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X), \\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \notin X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \notin L(X), \\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X \cup Y) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X) \cup L(Y), \\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (X \subseteq Y \cup Z) \in C \text{ gilt}: &\quad L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad \text{und} \qquad E = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \subseteq M_1 \cup M_3, M4 \subseteq M_3 \cup M_2, \\ a \in M_1, a \notin M_3, b \in M_4, b \in M_1, b \notin M_3, \\ c \in M_4, c \notin M_1, c \notin M_3, d \in M_4, d \notin M_1, d \notin M_2 \end{array} \right\}$$

Teil (a)

- Aus $M_4 \subseteq M_3 \cup M_2$ wissen wir, dass $c \in L(M_2)$, da $c \in L(M_4)$ und $c \notin L(M_3)$ gelten muss.
- Daraus folgernd muss wegen $M_2 \subseteq M_1 \cup M_3$ auch $c \in L(M_1)$ oder $c \in L(M_3)$ gelten (da $c \in L(M_4)$ gilt).

Die Forderung $c \in L(M_1)$ kann aber wegen des Constraints $c \notin M_1$ nicht erfüllt werden. Analog kann $c \in L(M_3)$ durch $c \notin M_3$ nicht erfüllt werden. Damit ist $M_2 \subseteq M_1 \cup M_3$ nicht haltbar und das System kann keine Lösung besitzen.

AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \to 2^E$, so dass

$$\begin{aligned}
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \notin X) \in C \text{ gilt}: &\quad a \notin L(X),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (a \in X \cup Y) \in C \text{ gilt}: &\quad a \in L(X) \cup L(Y),\\
\text{für alle Ausdrücke der Form } (X \subseteq Y \cup Z) \in C \text{ gilt}: &\quad L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.
Hinweis: Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.

Lösung

Teil (b): Wir wollen das Problem auf **Horn-SAT** $\in$ **P** reduzieren, d.h. eine Horn-Formel (bzw. eine Horn-Regelmenge) finden, deren Erfüllbarkeit die Lösbarkeit eines Mengen-Constraint-Systems zeigt.

Gegeben sei also eine Mengen-Constraint-System C über Elementen E und Variablen V.

Wir verwenden die aussagenlogischen Variablen

$$\mathcal{P} = \{p_{a,X} : (a \notin X) \in C\}$$

sowie die Regelmenge

$$\begin{aligned}\Gamma = &\{(\top \to p_{a,X}) : (a \notin X) \in C\}\\ &\cup \{(p_{a,X} \to \bot) : (a \in X) \in C\}\\ &\cup \{(p_{a,X} \wedge p_{a,Y} \to \bot) : (a \in X \cup Y) \in C\}\\ &\cup \bigcup_{a \in E} \{((p_{a,Y} \wedge p_{a,Z}) \to p_{a,X}) : (X \subseteq Y \cup Z) \in C\}\,.\end{aligned}$$

Dann ist das Mengen-Constraint-System C genau dann erfüllbar, wenn Γ erfüllbar ist. Die Erfüllbarkeit der Horn-Regelmenge kann gemäß Vorlesung in polynomieller Zeit entschieden werden.