

# FORMALE SYSTEME

## ÜBUNG 8

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 10. Dezember 2021

letzte Änderung:  
10.12.2021, 09:10

Aufgabe 1:

*Kellerautomaten*

Aufgabe 2

*Permutationssprache kontextfrei?*

Aufgabe 3

*Deterministische Kellerautomaten*

Aufgabe 4

*Wiederholung*

# Aufgabe 1:

## *Kellerautomaten*

---

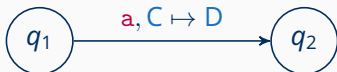
Ein **Kellerautomat** (PDA)  $\mathcal{M}$  ist ein Tupel  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$ :

- ▶  $Q$ : endliche Menge von Zuständen
- ▶  $\Sigma$ : Eingabealphabet
- ▶  $\Gamma$ : *Kelleralphabet*
- ▶  $\delta$ : totale Übergangsfunktion  $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow 2^{Q \times \Gamma_\epsilon}$
- ▶  $Q_0$ : Menge möglicher Startzustände  $Q_0 \subseteq Q$
- ▶  $F$ : Menge von Endzuständen  $F \subseteq Q$

Ein **Kellerautomat** (PDA)  $\mathcal{M}$  ist ein Tupel  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$ :

- ▶  $Q$ : endliche Menge von Zuständen
- ▶  $\Sigma$ : Eingabealphabet
- ▶  $\Gamma$ : *Kelleralphabet*
- ▶  $\delta$ : totale Übergangsfunktion  $Q \times \Sigma_{\epsilon} \times \Gamma_{\epsilon} \rightarrow 2^{Q \times \Gamma_{\epsilon}}$
- ▶  $Q_0$ : Menge möglicher Startzustände  $Q_0 \subseteq Q$
- ▶  $F$ : Menge von Endzuständen  $F \subseteq Q$

$\langle q_2, D \rangle \in \delta(q_1, a, C)$  bedeutet: „Wenn der PDA in Zustand  $q_1$  das Symbol  $a$  einliest und  $C$  oben vom Keller nimmt (pop), dann *kann* er in Zustand  $q_2$  wechseln und dabei  $D$  auf den Keller legen (push).“



# AUFGABE 1

Geben Sie einen Kellerautomaten  $\mathcal{M}_i$  für die Sprachen  $L_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sowie eine akzeptierende Folge von Konfigurationsübergängen für die gegebenen Wörter  $w$ .

(a)  $L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$   
 $w = aaabbcc$

(b)  $L_1 = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n = 3m\}$   
 $w = aaab$

(c)  $L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$   
 $w = aabbba$

(d)  $L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$   
 $w = ababbaba$

## Aufgabe 2

*Permutationssprache kontextfrei?*

---

## AUFGABE 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

Ist  $L \subseteq \Sigma^*$  eine kontextfreie Sprache, so ist auch

$$\pi(L) = \left\{ a_1 \dots a_n \in \Sigma^* : \begin{array}{l} \text{ex. Permutation } (i_1 \dots i_n) \text{ von } (1 \dots n), \\ \text{sodass } a_{i_1} \dots a_{i_n} \in L \end{array} \right\}$$

kontextfrei.



# ABSCHLUSS FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

**Satz:** Wenn  $L$ ,  $L_1$  und  $L_2$  kontextfreie Sprachen sind, dann beschreiben auch die folgenden Ausdrücke kontextfreie Sprachen:  
 $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 \circ L_2$ ,  $L^*$

Aber:

**Satz:** Es gibt kontextfreie Sprachen  $L$ ,  $L_1$  und  $L_2$ , so dass die folgenden Ausdrücke keine kontextfreien Sprachen sind:  
 $L_1 \cap L_2$ ,  $\bar{L}$

Aber (nicht in VL):

**Lemma:** Es sei  $L$  kontextfrei und  $R$  regulär. Dann ist  $L \cap R$  kontextfrei.

*Beweisidee:* Konstruiere einen Produktautomaten wie für reguläre Sprachen. Dieser wird wieder ein PDA sein.

Die Aussagen ist falsch. Wir betrachten die Sprache  $L = \{(abc)^n : n \geq 0\}$ , welche bekanntermaßen regulär und insbesondere also kontextfrei ist. Ihre Permutationssprache ist

$$\pi(L) = \{w \in \Sigma^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}.$$

Wir wollen nun also zeigen, dass  $\pi(L)$  nicht kontextfrei ist.

(i) Wir nutzen Abschlusseigenschaften. Es gilt

$$\pi(L) \cap \underbrace{\{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 0\}}_{\text{regulär}} = \underbrace{\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}}_{\text{nicht kontextfrei}}.$$

Angenommen  $\pi(L)$  wäre kontextfrei. Dann ist

$\{a^n b^n c^n : n \geq 0\} = \text{kontextfrei} \cap \text{regulär}$  auch kontextfrei — Widerspruch.

(ii) Alternativ kann man das Pumping-Lemma bedienen. Dazu sei  $n \geq 0$  die Zahl aus dem Pumping-Lemma und wir betrachten das Wort  $z = a^n b^n c^n \in \pi(L)$ . Damit läuft der Beweis wie das Musterbeispiel der Vorlesung für die Sprache  $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$  (d.h. Fallunterscheidung nach möglichen Positionen der Pump-Region und in jedem Fall verändern sich die Anzahlen von  $a$ ,  $b$  und  $c$  unterschiedlich).

## Aufgabe 3

### *Deterministische Kellerautomaten*

---

# DETERMINISTISCHE KELLERAUTOMATEN

Ein **deterministischer Kellerautomat** (DPDA)  $\mathcal{M}$  ist ein Tupel  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$  mit den folgenden Bestandteilen:

- ▶  $Q$ : endliche Menge von Zuständen
- ▶  $\Sigma$ : Eingabealphabet
- ▶  $\Gamma$ : Kelleralphabet
- ▶  $\delta$ : *partielle* Übergangsfunktion  $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow Q \times \Gamma_\epsilon$ , so dass für alle  $q \in Q$ ,  $a \in \Sigma$  und  $A \in \Gamma$  jeweils nur eines der folgenden definiert ist:

$$\delta(q, a, A) \quad \delta(q, a, \epsilon) \quad \delta(q, \epsilon, A) \quad \delta(q, \epsilon, \epsilon)$$

- ▶  $q_0$ : ein Startzustand  $q_0 \in Q$
- ▶  $F$ : Menge von Endzuständen  $F \subseteq Q$

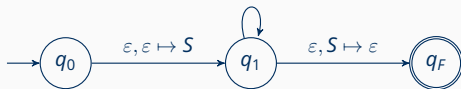
## AUFGABE 3

Gegeben sei die Sprache  $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , wobei  $|w|_a$  der Anzahl der Vorkommen von  $a$  in  $w$  entspricht.

- (a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten  $\mathcal{M}$  mit  $L(\mathcal{M}) = L$ , der mittels Finalzustand akzeptiert.
- (b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?
- (c) Wann ist eine Sprache deterministisch kontextfrei? Ist  $L$  deterministisch kontextfrei?

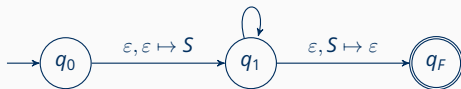
(a)  $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$  mit  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  
 $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{S, A, C\}$  und  $\delta$ :

$a, \varepsilon \mapsto A,$	$c, A \mapsto \varepsilon,$
$b, \varepsilon \mapsto A,$	$a, C \mapsto \varepsilon,$
$c, \varepsilon \mapsto C,$	$b, C \mapsto \varepsilon$



(a)  $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$  mit  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  
 $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{S, A, C\}$  und  $\delta$ :

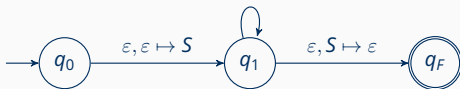
$$\begin{array}{ll} a, \varepsilon \mapsto A, & c, A \mapsto \varepsilon, \\ b, \varepsilon \mapsto A, & a, C \mapsto \varepsilon, \\ c, \varepsilon \mapsto C, & b, C \mapsto \varepsilon \end{array}$$



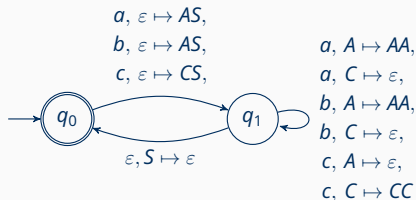
(b) Akzeptanz mittels leerem Keller

- (a)  $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$  mit  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  
 $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{S, A, C\}$  und  $\delta$ :

$$\begin{array}{ll} a, \varepsilon \mapsto A, & c, A \mapsto \varepsilon, \\ b, \varepsilon \mapsto A, & a, C \mapsto \varepsilon, \\ c, \varepsilon \mapsto C, & b, C \mapsto \varepsilon \end{array}$$



- (b) Akzeptanz mittels leerem Keller
- (c) Eine Sprache  $L$  heißt deterministisch kontextfrei, falls ein deterministischer Kellerautomat existiert, der  $L$  akzeptiert.





## **Aufgabe 4**

### ***Wiederholung***

---

## AUFGABE 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
- (b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon$ ,  $xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
- (b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

*Es gilt deterministisch  $\subsetneq$  eindeutig  $\subsetneq$  Typ 2.*

- (b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

*Es gilt deterministisch  $\subsetneq$  eindeutig  $\subsetneq$  Typ 2.*

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.
- (c) Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

*Es gilt deterministisch  $\subsetneq$  eindeutig  $\subsetneq$  Typ 2.*

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.  
*Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.*

- (c) Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon$ ,  $xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

*Es gilt deterministisch  $\subsetneq$  eindeutig  $\subsetneq$  Typ 2.*

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.  
*Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.*

- (c) ✗ Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon$ ,  $xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

- (a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

*Es gilt deterministisch  $\subsetneq$  eindeutig  $\subsetneq$  Typ 2.*

- (b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache  $L$  kontextfrei ist.  
*Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.*

- (c) ✗ Für eine beliebige Sprache  $L$  gilt:  $L$  ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  gibt, so dass sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  zerlegen lässt in  $w = xyz$  mit  $y \neq \varepsilon$ ,  $xy^kz \in L$  für alle  $k \geq 0$ .

*Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.*