TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 8

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 10. Dezember 2021

letzte Änderung:
09.12.2021, 21:43

ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe 1:
Kellerautomaten

Aufgabe 2
Permutationssprache kontextfrei?

Aufgabe 3
Deterministische Kellerautomaten

Aufgabe 4
Wiederholung

Aufgabe 1:
Kellerautomaten

KELLERAUTOMATEN

Ein **Kellerautomat** (PDA) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$:

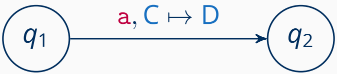
- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: *Kelleralphabet*
- δ: totale Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to 2^{Q \times \Gamma_\varepsilon}$
- Q_0: Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

KELLERAUTOMATEN

Ein **Kellerautomat** (PDA) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F \rangle$:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: *Kelleralphabet*
- δ: totale Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to 2^{Q \times \Gamma_\varepsilon}$
- Q_0: Menge möglicher Startzustände $Q_0 \subseteq Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

$\langle q_2, \mathrm{D} \rangle \in \delta(q_1, \mathtt{a}, \mathrm{C})$ bedeutet: „Wenn der PDA in Zustand q_1 das Symbol $\mathtt{a}$ einliest und C oben vom Keller nimmt ($\mathtt{pop}$), dann *kann* er in Zustand q_2 wechseln und dabei D auf den Keller legen ($\mathtt{push}$).“



AUFGABE 1

Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_i$ für die Sprachen L_i ($i = 1, \ldots, 4$) sowie eine akzeptierende Folge von Konfigurationsübergängen für die gegebenen Wörter w.

(a) $L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$
$w = aaabbcc$

(b) $L_1 = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\,, n = 3m\}$
$w = aaab$

(c) $L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^\cdot \mid |w|_a = |w|_b\}$
$w = aabbba$

(d) $L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$
$w = ababbaba$

Aufgabe 2
Permutationssprache kontextfrei?

AUFGABE 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

Ist $L \subseteq \Sigma^{\cdot}$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch

$$\pi(L) = \left\{ a_1 \ldots a_n \in \Sigma^{\cdot} : \begin{array}{l} \text{ex. Permutation } (i_1 \ldots i_n) \text{ von } (1 \ldots n), \\ \text{sodass } a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in L \end{array} \right\}$$

kontextfrei.

ABSCHLUSS FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN

Satz: Wenn $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_1}$ und $\mathbf{L_2}$ kontextfreie Sprachen sind, dann beschreiben auch die folgenden Ausdrücke kontextfreie Sprachen:
$\mathbf{L_1} \cup \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1} \circ \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L}^*$

Aber:

Satz: Es gibt kontextfreie Sprachen $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_1}$ und $\mathbf{L_2}$, so dass die folgenden Ausdrücke keine kontextfreien Sprachen sind:
$\mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$, $\overline{\mathbf{L}}$

Aber (nicht in VL):

Lemma: Es sei $\mathbf{L}$ kontextfrei und $\mathbf{R}$ regulär. Dann ist $\mathbf{L} \cap \mathbf{R}$ kontextfrei.

Beweisidee: Konstruiere einen Produktautomaten wie für reguläre Sprachen. Dieser wird wieder ein PDA sein.

Lösung

Die Aussagen ist falsch. Wir betrachten die Sprache $L = \{(abc)^n : n \geq 0\}$, welche bekanntermaßen regulär und insbesondere also kontextfrei ist. Ihre Permutationssprache ist

$$\pi(L) = \left\{w \in \Sigma^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\right\}.$$

Wir wollen nun also zeigen, dass $\pi(L)$ nicht kontextfrei ist.

(i) Wir nutzen Abschlusseigenschaften. Es gilt

$$\pi(L) \cap \underbrace{\left\{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 0\right\}}_{\text{regulär}} = \underbrace{\left\{a^n b^n c^n : n \geq 0\right\}}_{\text{nicht kontextfrei}}.$$

Angenommen $\pi(L)$ wäre kontextfrei. Dann ist $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\} =$ kontextfrei $\cap$ regulär auch kontextfrei — Widerspruch.

(ii) Alternativ kann man das Pumping-Lemma bedienen. Dazu sei $n \geq 0$ die Zahl aus dem Pumping-Lemma und wir betrachten das Wort $z = a^n b^n c^n \in \pi(L)$. Damit läuft der Beweis wie das Musterbeispiel der Vorlesung für die Sprache $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ (d.h. Fallunterscheidung nach möglichen Positionen der Pump-Region und in jedem Fall verändern sich die Anzahlen von a, b und c unterschiedlich).

Aufgabe 3
Deterministische Kellerautomaten

DETERMINISTISCHE KELLERAUTOMATEN

Ein **deterministischer Kellerautomat** (DPDA) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: Kelleralphabet
- δ: *partielle* Übergangsfunktion $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to Q \times \Gamma_\varepsilon$, so dass für alle $q \in Q$, $\mathtt{a} \in \Sigma$ und $\mathsf{A} \in \Gamma$ jeweils nur eines der folgenden definiert ist:

$$\delta(q, \mathtt{a}, \mathsf{A}) \qquad \delta(q, \mathtt{a}, \varepsilon) \qquad \delta(q, \varepsilon, \mathsf{A}) \qquad \delta(q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- q_0: ein Startzustand $q_0 \in Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

AUFGABE 3

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \Sigma^{\cdot} \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, wobei $|w|_a$ der Anzahl der Vorkommen von a in w entspricht.

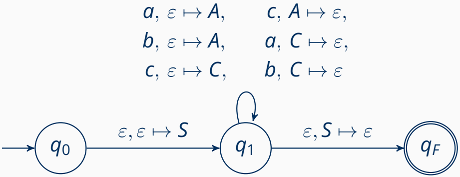
(a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L$, der mittels Finalzustand akzeptiert.

(b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

(c) Wann ist eine Sprache deterministisch kontextfrei? Ist L deterministisch kontextfrei?

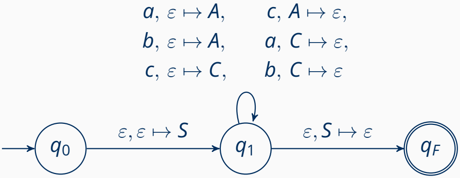
Lösung

(a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ:



Lösung

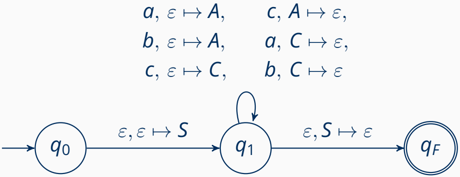
(a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ:



(b) Akzeptanz mittels leerem Keller

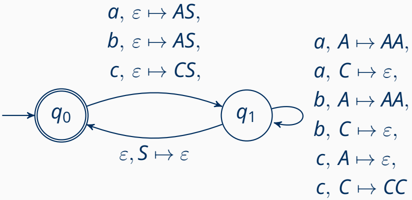
Lösung

(a) $\mathcal{M} := \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{q_0\}, \{q_F\} \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, A, C\}$ und δ:



(b) Akzeptanz mittels leerem Keller

(c) Eine Sprache L heißt deterministisch kontextfrei, falls ein deterministischer Kellerautomat existiert, der L akzeptiert.



Aufgabe 4

Wiederholung

AUFGABE 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

(b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

(c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

(b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

(c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
Es gilt deterministisch $\subsetneq$ *eindeutig* $\subsetneq$ *Typ 2.*

(b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

(c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
Es gilt deterministisch $\subsetneq$ *eindeutig* $\subsetneq$ *Typ 2.*

(b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

(c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
Es gilt deterministisch $\subsetneq$ *eindeutig* $\subsetneq$ *Typ 2.*

(b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

(c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
Es gilt deterministisch $\subsetneq$ *eindeutig* $\subsetneq$ *Typ 2.*

(b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

(c) ✗ Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

AUFGABE 4

Lösung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

(a) ✓ Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.
Es gilt deterministisch $\subsetneq$ *eindeutig* $\subsetneq$ *Typ 2.*

(b) ✗ Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.

(c) ✗ Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.
Pumping ist notwendig, aber nicht hinreichend.