TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 12

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 21. Januar 2022

letzte Änderung:
21.01.2022, 14:12

ÜBUNGSBLATT 12

Logische Äquivalenzen

Aufgabe 1
weitere Äquivalenzen

Aufgabe 2
mehr Äquivalenzen

Aufgabe 3
Normalformen

Aufgabe 4
Resolution

Logische Äquivalenzen

LOGISCHE ÄQUIVALENZ

Formeln sind äquivalent, wenn sie die gleiche Semantik haben:

Zwei Formeln F und G sind semantisch äquivalent, in Symbolen $F \equiv G$, wenn sie genau die selben Modelle haben, d.h. wenn

$$\text{für alle Wertzuweisungen } w \text{ gilt: } w(F) = w(G)$$

JUNKTOREN ÄQUIVALENT AUSDRÜCKEN

$$F \to G \equiv \neg F \lor G \equiv \neg(F \land \neg G)$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \land (G \to F) \equiv (F \land G) \lor (\neg F \land \neg G)$$

$$F \land G \equiv \neg(\neg F \lor \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

$$F \lor G \equiv \neg(\neg F \land \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

JUNKTOREN ÄQUIVALENT AUSDRÜCKEN

$$F \to G \equiv \neg F \vee G \equiv \neg(F \wedge \neg G)$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \wedge (G \to F) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$$

$$F \wedge G \equiv \neg(\neg F \vee \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

$$F \vee G \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G) \quad \text{(De Morgansches Gesetz)}$$

Satz: Sei F eine beliebige aussagenlogische Formel.

- Es gibt eine zu F äquivalente Formel, die nur die Junktoren $\wedge$ und $\neg$ enthält.
- Es gibt eine zu F äquivalente Formel, die nur die Junktoren $\vee$ und $\neg$ enthält.

NÜTZLICHE ÄQUIVALENZEN

$$F \wedge G \equiv G \wedge F$$
$$F \vee G \equiv G \vee F$$

Kommutativität

$$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$$
$$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$$

Assoziativität

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$
$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Distributivität

$$F \wedge F \equiv F$$
$$F \vee F \equiv F$$

Idempotenz

$$F \wedge (F \vee G) \equiv F$$
$$F \vee (F \wedge G) \equiv F$$

Absorption

NÜTZLICHE ÄQUIVALENZEN

$$\neg\neg F \equiv F$$

doppelte Negation

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

De Morgansche Gesetze

$$F \wedge \top \equiv F$$

$$F \vee \top \equiv \top$$

Gesetze mit $\top$

$$F \wedge \bot \equiv \bot$$

$$F \vee \bot \equiv F$$

Gesetze mit $\bot$

$$\neg\top \equiv \bot$$

$$\neg\bot \equiv \top$$

Alle diese Äquivalenzen können leicht mit Wahrheitswertetabellen überprüft werden.

Aufgabe 1
weitere Äquivalenzen

AUFGABE 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen:

a) Distributivitätsregel:

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$$

b) Absorptionsregel:

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$$

Lösung

(a) Beweis mittels Wahrheitswertetabelle:

φ	ψ	π	$\psi \wedge \pi$	$\varphi \vee (\psi \wedge \pi)$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \vee \pi$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Damit ist also $w(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) = w((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$ für alle Wertzuweisungen w. Per Definition gilt also $(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$.

(b) Beweis mittels Wahrheitswertetabelle:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Damit ist also $w(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))) = w(\varphi)$ für alle Wertzuweisungen w.
Per Definition gilt also $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$.

Aufgabe 2

mehr Äquivalenzen

AUFGABE 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

(a) $(((a \to \neg b) \land (\neg a \to (b \land c))) \land ((\neg b \lor c) \to d))$
$\equiv$
$((\neg(a \leftrightarrow b) \land (a \lor c)) \land \neg((b \lor d) \to (c \land \neg d)))$

(b) $\Big((a \to b) \to a\Big) \to a\Big)$
$\equiv$
$\Big(((a \to b) \land (b \to c)\Big) \to \neg(\neg c \land a)\Big)$

(c) $(((b \land \ell) \to m) \land ((a \land b) \to \ell) \land a \land b)$
$\equiv$
$((\neg b \land \ell \land \neg a \land b) \lor (\neg \ell \land \ell \land \neg a \land b) \lor (m \land \ell \land a \land b))$

Aufgabe 3

Normalformen

NEGATIONSNORMALFORM

Eine Formel F ist in Negationsnormalform (NNF) wenn

(a) sie nur die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält und

(b) der Junktor $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt (d.h. nur in Teilformeln der Form $\neg p$ mit $p \in \mathbf{P}$).

Formeln, die negierte oder nichtnegierte Atome sind, nennt man Literale. In NNF darf Negation also nur in Literalen auftauchen.

NEGATIONSNORMALFORM

Eine Formel F ist in Negationsnormalform (NNF) wenn

(a) sie nur die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält und

(b) der Junktor $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt (d.h. nur in Teilformeln der Form $\neg p$ mit $p \in \mathbf{P}$).

Formeln, die negierte oder nichtnegierte Atome sind, nennt man Literale. In NNF darf Negation also nur in Literalen auftauchen.

Beispiele:

- $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ ist in NNF
- $(b \wedge b) \vee \neg(b \wedge b)$ ist nicht in NNF
- $q \vee \neg\neg p$ ist nicht in NNF
- $p \leftrightarrow p$ ist nicht in NNF

KONJUNKTIVE UND DISJUNKTIVE NORMALFORM

Eine Formel F ist in konjunktiver Normalform (KNF) wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \wedge (L_{2,1} \vee \ldots \vee L_{2,m_2}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln $L_{i,j}$ Literale sind. Eine Disjunktion von Literalen heißt Klausel.

Eine Formel F ist in disjunktiver Normalform (DNF) wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,m_1}) \vee (L_{2,1} \wedge \ldots \wedge L_{2,m_2}) \vee \ldots \vee (L_{n,1} \wedge \ldots \wedge L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln $L_{i,j}$ Literale sind. Eine Konjunktion von Literalen heißt Monom.

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:
$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q))$$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q))\end{aligned}$$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(p \land \neg q) \lor (\neg p \land q) &\equiv ((p \land \neg q) \lor \neg p) \land ((p \land \neg q) \lor q)) \\
&\equiv (p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p) \land ((p \land \neg q) \lor q)) \\
&\equiv (p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p) \land (p \lor q) \land (\neg q \lor q)
\end{aligned}
$$

KNF UND DNF BILDEN

Man kann KNF und DNF bilden, indem man die NNF erzeugt und anschließend Distributivgesetze anwendet $\rightsquigarrow$ oft direkter

Konjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)\end{aligned}$$

(Man könnte die wahren Klauseln $(p \vee \neg p)$ und $(\neg q \vee q)$ streichen.)

Disjunktive Normalform

Distributivgesetz: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ (analog)

AUFGABE 3

Transformieren Sie die Formel

$$\varphi = \Big((\neg(a \leftrightarrow b) \vee \neg(c \wedge a)) \vee \neg(c \rightarrow b) \Big)$$

in

a) Negationsnormalform

b) konkjunktive Normalform

c) disjunktive Normalform

Lösung

Vorbereitung: Eliminiere $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$

$$\varphi \equiv \Big((\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee \neg(c \wedge a)\big) \vee \neg(\neg c \vee b) =: \varphi_1$$

(a) Negationsnormalform:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \Big(\big(\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee \neg(c \wedge a)\big) \vee \neg(\neg c \vee b) \Big) \\
&\equiv \Big(\big(\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee \neg(c \wedge a)\big) \vee (c \wedge \neg b) \Big) \\
&\equiv \Big(\big(\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (\neg c \vee \neg a)\big) \vee (c \wedge \neg b) \Big) \\
&\equiv \Big(\big((\neg(a \wedge b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \vee (\neg c \vee \neg a)\big) \vee (c \wedge \neg b) \Big) \\
&\equiv \Big(\big(((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a)\big) \vee (c \wedge \neg b) \Big) =: \varphi_2
\end{aligned}$$

Lösung

(b) konjunktive Normalform:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= \Big(\big(((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg c \vee \neg a)\big) \vee (c \wedge \neg b)\Big)\\
&\equiv \Big(\big(((\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg a)) \wedge ((a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg a))\big) \vee (c \wedge \neg b)\Big)\\
&\equiv \Big(\big((\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg a) \wedge \underbrace{(a \vee b \vee \neg c \vee \neg a)}_{\equiv \top}\big) \vee (c \wedge \neg b)\Big)\\
&\equiv \Big((\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \vee (c \wedge \neg b)\Big)\\
&\equiv \Big(\underbrace{((\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \vee c)}_{\equiv \top} \wedge ((\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \vee \neg b)\Big)\\
&\equiv \Big(\neg a \vee \neg b \vee \neg c\Big) =: \varphi_3
\end{aligned}
$$

(c) disjunktive Normalform: φ_3 ist bereits auch in disjunktiver Normalform. Mit den Distributivgesetzen erhält man

$$\varphi_4 = \Big((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg c) \vee (\neg a) \vee (\neg b \wedge c)\Big)$$

in disjunktiver Normalform.

Aufgabe 4
Resolution

KLAUSELFORM & RESOLUTION

- Eine Klausel $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ wir dargestellt als Menge $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- Eine Konjunktion von Klauseln $K_1 \wedge \ldots \wedge K_\ell$ wird dargestellt als Menge $\{K_1, \ldots, K_\ell\}$

Eine Menge von Mengen von Literalen unter dieser Interpretation heißt Klauselform.

- Eine Klausel $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ wir dargestellt als Menge $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- Eine Konjunktion von Klauseln $K_1 \wedge \ldots \wedge K_\ell$ wird dargestellt als Menge $\{K_1, \ldots, K_\ell\}$

Eine Menge von Mengen von Literalen unter dieser Interpretation heißt Klauselform.

Gegeben seien zwei Klauseln K_1 und K_2 für die es ein Atom $p \in \mathbf{P}$ gibt mit $p \in K_1$ und $\neg p \in K_2$.
Die Resolvente von K_1 und K_2 bezüglich p ist die Klausel

$$(K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$$

Eine Klausel R ist eine Resolvente einer Klauselmenge $\mathcal{K}$ wenn R Resolvente zweier Klauseln $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ist.

BEDEUTUNG VON RESOLUTIONSSCHRITTEN

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

BEDEUTUNG VON RESOLUTIONSSCHRITTEN

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to p$

BEDEUTUNG VON RESOLUTIONSSCHRITTEN

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to p$
- $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\} \equiv (\neg p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_\ell) \equiv p \to (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$

BEDEUTUNG VON RESOLUTIONSSCHRITTEN

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \lor \ldots \lor L_n \lor p) \equiv (\neg L_1 \land \ldots \land \neg L_n) \rightarrow p$
- $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\} \equiv (\neg p \lor M_1 \lor \ldots \lor M_\ell) \equiv p \rightarrow (M_1 \lor \ldots \lor M_\ell)$

Daraus folgt unmittelbar $(\neg L_1 \land \ldots \land \neg L_n) \rightarrow (M_1 \lor \ldots \lor M_\ell)$
$\rightsquigarrow$ dies entspricht der Klausel $\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_\ell\}$

BEDEUTUNG VON RESOLUTIONSSCHRITTEN

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \rightarrow p$
- $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\} \equiv (\neg p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_\ell) \equiv p \rightarrow (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$

Daraus folgt unmittelbar $(\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \rightarrow (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$
$\rightsquigarrow$ dies entspricht der Klausel $\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_\ell\}$

Satz: Wenn R Resolvente der Klauseln K_1 und K_2 ist, dann gilt $\{K_1, K_2\} \models R$.

- Die leere Klausel ist eine Disjunktionen von 0 Literalen, also gerade $\bot$ (neutrales Element von $\vee$)
- $\bot$ in einer Konjunktion macht die gesamte Formel falsch (unerfüllbar).
- Lässt sich $\bot$ ableiten, so ist die Formel unerfüllbar.

Resolution

Gegeben: Formel $\mathcal{F}$ in Klauselform
Gesucht: Ist $\mathcal{F}$ erfüllbar oder unerfüllbar?

(1) Finde ein Klauselpaar $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ mit Resolvente $R \notin \mathcal{F}$

(2) Setze $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{R\}$

(3) Wiederhole Schritt (1) und (2) bis keine neuen Resolventen gefunden werden können

(4) Falls $\perp \in \mathcal{F}$, dann gib „unerfüllbar" aus;
andernfalls gib „erfüllbar" aus

DAS RESOLUTIONSKALKÜL

Resolution

Gegeben: Formel $\mathcal{F}$ in Klauselform

Gesucht: Ist $\mathcal{F}$ erfüllbar oder unerfüllbar?

(1) Finde ein Klauselpaar $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ mit Resolvente $R \notin \mathcal{F}$

(2) Setze $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{R\}$

(3) Wiederhole Schritt (1) und (2) bis keine neuen Resolventen gefunden werden können

(4) Falls $\perp \in \mathcal{F}$, dann gib „unerfüllbar" aus; andernfalls gib „erfüllbar" aus

Beobachtung: Unerfüllbarkeit steht fest, sobald $\perp$ abgeleitet wurde
$\rightsquigarrow$ dann kann man das Verfahren frühzeitig abbrechen

Erfüllbarkeit kann dagegen erst erkannt werden, wenn alle Resolventen erschöpfend gebildet worden sind

AUFGABE 4

Prüfen Sie die folgende Formel mittels Resolutionsverfahren auf Erfüllbarkeit:

a) $b \land (a \lor b) \land (\neg b \lor c) \land (\neg b \lor \neg c) \land (\neg a \lor c)$

b) $\neg\Big(c \to \big((\neg a \land b \land c) \lor (a \land \neg b)\big)\Big)$

Lösung

(a) Die Formel ist bereits in konjunktiver Normalform. Die zugehörige Klauselform lautet

$$\{\{b\}\,,\{a,b\}\,,\{\neg b,c\}\,,\{\neg b,\neg c\}\,,\neg a,c\}\,.$$

Durchnummerieren liefert:

(1) $\{b\}$

(2) $\{a, b\}$

(3) $\{\neg b, c\}$

(4) $\{\neg b, \neg c\}$

(5) $\{\neg a, c\}$

Als Resolutionsschritte kann man beispielsweise folgende wählen:

(6)	$\{c\}$	(1) + (3)
(7)	$\{\neg b\}$	(4) + (6)
(8)	$\perp$	(1) + (7)

Da die leere Klausel ableitbar ist, ist die Formel nicht erfüllbar.

Lösung

(b) Transformation in konjunktive Normalform liefert

$$\big(c \land (a \lor \neg b \lor \neg c) \land (\neg a \lor b)\big)$$

Klauselform: $\{\{c\}, \{a, \neg b, \neg c\}, \{\neg a, b\}\}$

(1) $\{c\}$

(2) $\{a, \neg b, \neg c\}$

(3) $\{\neg a, b\}$

Als Resolutionsschritte kann man beispielsweise folgende wählen:

(6)	$\{a, \neg b\}$	(1) + (2)
(7)	$\{b, \neg b, \neg c\}$	(2) + (3)
(8)	$\{a, \neg a, \neg c\}$	(2) + (3)
(9)	$\{b, \neg b\}$	(1) + (5)
(10)	$\{a, \neg a\}$	(1) + (6)
(11)	$\{\neg a, b, \neg c\}$	(3) + (5)

Man kann diesen Prozess nun noch weiter durchführen, allerdings wird man die nie die leere Klausel ableiten können. Die Formel ist daher erfüllbar.