

FORMALE SYSTEME

ÜBUNG 14

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 4. Februar 2022

letzte Änderung:
30.01.2022, 18:00

Aufgabe 1

Wiederholung

Aufgabe 2

Logisches Schließen

Aufgabe 3

Ziffernfolgen in π finden

Aufgabe 4

Mengen-Constraint-Systeme

Aufgabe 1

Wiederholung

AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

- a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.

Falsch — Gegenbeispiel: Aus Falschem folgt Beliebiges.

$\psi = (p \vee \neg p)$ ist tautologisch.

$\Gamma = (p \wedge \neg p)$ ist unerfüllbar.

Dennoch gilt $\Gamma \models \psi$.

- b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.

Falsch — Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen \rightsquigarrow disjunktive Normalform

- c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

Richtig — es können nur die Klauseln $\{b, c, \neg b\}$ und $\{a, c, \neg a\}$ entstehen.

- d) Aus $\models \varphi$ folgt, dass φ allgemeingültig ist.

Richtig — per Definition (siehe VL 22, Folie 17)

Aufgabe 2

Logisches Schließen

AUFGABE 2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

$$\left(\left(((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \right) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_4) \right) \quad (1)$$

$$\left(\neg \left(\neg p_1 \wedge \neg (p_2 \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2)) \right) \right) \wedge \neg p_2 \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{l} (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4) \wedge \\ (\neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\ (\neg p_7 \vee \neg p_2 \vee p_6) \wedge \\ (\neg p_6 \vee \neg p_2) \wedge \\ (\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge \\ (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge \\ (\neg p_1 \vee p_7) \wedge \\ (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee p_4) \wedge \\ p_3 \wedge \\ p_1 \end{array} \right) \quad (3)$$

$$\left((p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1 \right) \quad (4)$$

- (a) erfüllbar, z.B. via Transformation in DNF und Entscheidung, ob Monome gegensätzliche Literale enthalten
 erfüllende Wertzuweisung: $w(p_2) = 0$ und $w(p_4) = 0$ reicht
- (b) erfüllbar mit $w(p_1) = 1$ und $w(p_2) = 0$

Sowohl (a) als auch (b) sind keine Horn-Formel und daher ist ihre Erfüllbarkeit nicht in **P** entscheidbar.

(c) Horn-Regelmenge:

Hyperresolution:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow p_4$$

$$p_5 \wedge p_6 \rightarrow \perp$$

$$p_7 \wedge p_2 \rightarrow p_6$$

$$p_6 \wedge p_2 \rightarrow \perp$$

$$p_6 \wedge p_3 \rightarrow p_2$$

$$p_3 \wedge p_4 \rightarrow p_5$$

$$p_1 \rightarrow p_7$$

$$p_1 \wedge p_7 \rightarrow p_4$$

$$\top \rightarrow p_3$$

$$\top \rightarrow p_1$$

$$V_0 = \{p_3, p_1\}$$

$$V_1 = V_0 \cup \{p_7\}$$

$$V_2 = V_1 \cup \{p_4\}$$

$$V_3 = V_2 \cup \{p_5\} = V_4 = V$$

Es gibt keine Regel $q_0 \wedge \dots \wedge q_m \rightarrow \perp$ mit $q_0, \dots, q_m \in V$. Daher ist die Formel erfüllbar.

(d) Horn-Regelmenge:

$$p_2 \rightarrow p_1$$

$$p_3 \rightarrow p_2$$

$$p_1 \rightarrow p_3$$

$$p_2 \wedge p_3 \rightarrow \perp$$

$$\top \rightarrow p_1$$

Hyperresolution:

$$V_0 = \{p_1\}$$

$$V_1 = V_0 \cup \{p_3\}$$

$$V_2 = V_1 \cup \{p_2\} = V_3 = V$$

Da $(p_2 \wedge p_3 \rightarrow \perp)$ eine Horn-Regel mit $p_2, p_3 \in V$ ist, ist die Formel unerfüllbar.

Da (c) und (d) jeweils Horn-Formeln sind, kann deren Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit entschieden werden.

Aufgabe 3

Ziffernfolgen in π finden

AUFGABE 3

Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- ▶ Gegeben ist eine Zahlenfolge $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$ ($n \geq 1$).
- ▶ Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von π die Sequenz s vor?

Hinweis:

Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass es beliebig genaue Näherungsverfahren für π gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahrens für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus $\text{Pi-Näherungsverfahren}(k)$, das als Eingabe eine natürliche Zahl $k \geq 1$ hat und als Ausgabe die k ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von π zurückgibt.

Eingabe: $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$ mit $n \geq 1$

FOR $k = n, n + 1, \dots$:

 Berechne $a_1 \dots a_k = \text{Pi-Näherungsverfahren}(k)$

 Falls $a_{k-n+1} \dots a_k = s_1 \dots s_n$: akzeptiere

 Sonst: wähle nächstes k

Aufgabe 4

Mengen-Constraint-Systeme

AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \rightarrow 2^E$, so dass

für alle Ausdrücke der Form $(a \in X) \in C$ gilt : $a \in L(X)$,

für alle Ausdrücke der Form $(a \notin X) \in C$ gilt : $a \notin L(X)$,

für alle Ausdrücke der Form $(a \in X \cup Y) \in C$ gilt : $a \in L(X) \cup L(Y)$,

für alle Ausdrücke der Form $(X \subseteq Y \cup Z) \in C$ gilt : $L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z)$.

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \quad \text{und} \quad E = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \subseteq M_1 \cup M_3, M_4 \subseteq M_3 \cup M_2, \\ a \in M_1, a \notin M_3, b \in M_4, b \in M_1, b \notin M_3, \\ c \in M_4, c \notin M_1, c \notin M_3, d \in M_4, d \notin M_1, d \notin M_2 \end{array} \right\}$$

Teil (a)

- ▶ Aus $M_4 \subseteq M_3 \cup M_2$ wissen wir, dass $c \in L(M_2)$, da $c \in L(M_4)$ und $c \notin L(M_3)$ gelten muss.
- ▶ Daraus folgernd muss wegen $M_2 \subseteq M_1 \cup M_3$ auch $c \in L(M_1)$ oder $c \in L(M_3)$ gelten (da $c \in L(M_4)$ gilt).

Die Forderung $c \in L(M_1)$ kann aber wegen des Constraints $c \notin M_1$ nicht erfüllt werden. Analog kann $c \in L(M_3)$ durch $c \notin M_3$ nicht erfüllt werden. Damit ist $M_2 \subseteq M_1 \cup M_3$ nicht haltbar und das System kann keine Lösung besitzen.

AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für $a \in E$ und $X, Y, Z \in V$. Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung $L : V \rightarrow 2^E$, so dass

für alle Ausdrücke der Form $(a \in X) \in C$ gilt : $a \in L(X)$,

für alle Ausdrücke der Form $(a \notin X) \in C$ gilt : $a \notin L(X)$,

für alle Ausdrücke der Form $(a \in X \cup Y) \in C$ gilt : $a \in L(X) \cup L(Y)$,

für alle Ausdrücke der Form $(X \subseteq Y \cup Z) \in C$ gilt : $L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z)$.

- b)** Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.

Hinweis: Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.

Teil (b): Wir wollen das Problem auf **Horn-SAT** $\in \mathbf{P}$ reduzieren, d.h. eine Horn-Formel (bzw. eine Horn-Regelmenge) finden, deren Erfüllbarkeit die Lösbarkeit eines Mengen-Constraint-Systems zeigt.

Gegeben sei also ein Mengen-Constraint-System C über Elementen E und Variablen V .

Wir verwenden die aussagenlogischen Variablen

$$\mathcal{P} = \{p_{a,X} : (a \notin X) \in C\}$$

sowie die Regelmenge

$$\begin{aligned} \Gamma = & \{(\top \rightarrow p_{a,X}) : (a \notin X) \in C\} \\ & \cup \{(p_{a,X} \rightarrow \perp) : (a \in X) \in C\} \\ & \cup \{(p_{a,X} \wedge p_{a,Y} \rightarrow \perp) : (a \in X \cup Y) \in C\} \\ & \cup \bigcup_{a \in E} \{((p_{a,Y} \wedge p_{a,Z}) \rightarrow p_{a,X}) : (X \subseteq Y \cup Z) \in C\}. \end{aligned}$$

Dann ist das Mengen-Constraint-System C genau dann erfüllbar, wenn Γ erfüllbar ist. Die Erfüllbarkeit der Horn-Regelmenge kann gemäß Vorlesung in polynomieller Zeit entschieden werden.