

# FORMALE SYSTEME

## ÜBUNG 14

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 4. Februar 2022

letzte Änderung:  
29.01.2022, 21:11

Aufgabe 1

*Wiederholung*

Aufgabe 2

*Logisches Schließen*

Aufgabe 3

*Ziffernfolgen in  $\pi$  finden*

Aufgabe 4

*Mengen-Constraint-Systeme*

# Aufgabe 1

## *Wiederholung*

---

## AUFGABE 1

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

- a) Wenn  $\Gamma \models \psi$  und  $\psi$  eine Tautologie ist, dann ist  $\Gamma$  auch allgemeingültig.
- b) Eine Formel  $\varphi$  ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.
- c) Für  $K_1 = \{a, b, c\}$  und  $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$  ist  $\{c\}$  keine Resolvente.
- d) Aus  $\models \varphi$  folgt, dass  $\varphi$  allgemeingültig ist.

## **Aufgabe 2**

### ***Logisches Schließen***

---

## AUFGABE 2

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

$$\left( \left( ((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \right) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_4) \right) \quad (1)$$

$$\left( \neg \left( \neg p_1 \wedge \neg (p_2 \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2)) \right) \right) \wedge \neg p_2 \quad (2)$$

$$\left( \begin{array}{l} (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4) \wedge \\ (\neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\ (\neg p_7 \vee \neg p_2 \vee p_6) \wedge \\ (\neg p_6 \vee \neg p_2) \wedge \\ (\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge \\ (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge \\ (\neg p_1 \vee p_7) \wedge \\ (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee p_4) \wedge \\ p_3 \wedge \\ p_1 \end{array} \right) \quad (3)$$

$$\left( (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1 \right) \quad (4)$$

## Aufgabe 3

***Ziffernfolgen in  $\pi$  finden***

---

## AUFGABE 3

Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- ▶ Gegeben ist eine Zahlenfolge  $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$  ( $n \geq 1$ ).
- ▶ Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von  $\pi$  die Sequenz  $s$  vor?

Hinweis:

*Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass es beliebig genaue Näherungsverfahren für  $\pi$  gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahrens für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus  $\text{Pi-Näherungsverfahren}(k)$ , das als Eingabe eine natürliche Zahl  $k \geq 1$  hat und als Ausgabe die  $k$  ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von  $\pi$  zurückgibt.*



## **Aufgabe 4**

### ***Mengen-Constraint-Systeme***

---

## AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge  $E$  von Elementen und eine Menge  $V$  von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem  $C$  über  $E$  und  $V$  ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für  $a \in E$  und  $X, Y, Z \in V$ . Eine Lösung  $L$  eines Mengen-Constraintsystems  $C$  über  $E$  und  $V$  ist eine Abbildung  $L : V \rightarrow 2^E$ , so dass

für alle Ausdrücke der Form  $(a \in X) \in C$  gilt :  $a \in L(X)$ ,

für alle Ausdrücke der Form  $(a \notin X) \in C$  gilt :  $a \notin L(X)$ ,

für alle Ausdrücke der Form  $(a \in X \cup Y) \in C$  gilt :  $a \in L(X) \cup L(Y)$ ,

für alle Ausdrücke der Form  $(X \subseteq Y \cup Z) \in C$  gilt :  $L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z)$ .

**a)** Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \quad \text{und} \quad E = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \subseteq M_1 \cup M_3, M_4 \subseteq M_3 \cup M_2, \\ a \in M_1, a \notin M_3, b \in M_4, b \in M_1, b \notin M_3, \\ c \in M_4, c \notin M_1, c \notin M_3, d \in M_4, d \notin M_1, d \notin M_2 \end{array} \right\}$$

## AUFGABE 4

Gegeben sei eine endliche Menge  $E$  von Elementen und eine Menge  $V$  von Variablen. Ein Mengen-Constraintsystem  $C$  über  $E$  und  $V$  ist eine endliche Menge von Constraints der Form:

$$a \in X, a \notin X, a \in X \cup Y, \text{ oder } X \subseteq Y \cup Z$$

für  $a \in E$  und  $X, Y, Z \in V$ . Eine Lösung  $L$  eines Mengen-Constraintsystems  $C$  über  $E$  und  $V$  ist eine Abbildung  $L : V \rightarrow 2^E$ , so dass

für alle Ausdrücke der Form  $(a \in X) \in C$  gilt :  $a \in L(X)$ ,

für alle Ausdrücke der Form  $(a \notin X) \in C$  gilt :  $a \notin L(X)$ ,

für alle Ausdrücke der Form  $(a \in X \cup Y) \in C$  gilt :  $a \in L(X) \cup L(Y)$ ,

für alle Ausdrücke der Form  $(X \subseteq Y \cup Z) \in C$  gilt :  $L(X) \subseteq L(Y) \cup L(Z)$ .

- b)** Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.

*Hinweis: Übersetzen Sie  $C$  in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.*