TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

LINEARE ALGEBRA

ÜBUNG 11: SKALARPRODUKTE

Eric Kunze
eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 19.01.2021

SKALARPRODUKT

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Eine Abbildung $\bullet : V \times V \to K$ heißt *Skalarprodukt*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\bullet$ ist *bilinear*,
- $\bullet$ ist *symmetrisch*,
- $\bullet$ ist *positiv definit*.

Manchmal schreibt man für Vektoren $u, v \in V$ statt $u \bullet v$ auch $\langle u, v \rangle$ oder (u, v).

Einen Vektorraum V gemeinsam mit einem Skalarprodukt $\bullet$ nennt man *euklidischen Vektorraum* und schreibt $(V, \bullet)$ für diese Paarung.

BILINEARITÄT VON $\bullet$

Die Abbildung $\bullet$ ist „linear in jedem Argument“:

1. Linearität im ersten Argument:
   - additiv: $(u_1 + u_2) \bullet v = (u_1 \bullet v) + (u_2 \bullet v)$
   - homogen: $(ku) \bullet v = k(u \bullet v)$

   oder in einem Schritt

   - $(k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet v = k_1(u_1 \bullet v) + k_2(u_2 \bullet v)$

2. Linearität im zweiten Argument:
   - additiv: $u \bullet (v_1 + v_2) = (u \bullet v_1) + (u \bullet v_2)$
   - homogen: $u \bullet (\ell v) = \ell\,(u \bullet v)$

   oder in einem Schritt

   - $u \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) = \ell_1(u \bullet v_1) + \ell_2(u \bullet v_2)$

BILINEARITÄT VON $\bullet$

Alternativ kann man auch alles in einem Rutsch erledigen und zeigen, dass

$$\begin{aligned}
& (k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \\
= \; & k_1 \Big(u_1 \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \Big) + k_2 \Big(u_2 \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \Big) \\
= \; & k_1 \ell_1 (u_1 \bullet v_1) + k_1 \ell_2 (u_1 \bullet v_2) + k_2 \ell_1 (u_2 \bullet v_1) + k_2 \ell_2 (u_2 \bullet v_2)
\end{aligned}$$

gilt.

BILINEARITÄT ↔ LINEARITÄT

Wir können Bilinearität auch mit der bekanten Linearität in Verbindung bringen. Definieren wir dazu die Abbildung

$$s_v : V \to K \quad \text{mit} \quad s_v(u) := u \bullet v \ .$$

Dann ist Linearität im ersten Argument äquivalent zur Linearität von s_v, denn

$$s_v(k_1 u_1 + k_2 u_2) = (k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet v \ .$$

BILINEARITÄT ↔ LINEARITÄT

Wir können Bilinearität auch mit der bekanten Linearität in Verbindung bringen. Definieren wir dazu die Abbildung

$$s_v : V \to K \quad \text{mit} \quad s_v(u) := u \bullet v \ .$$

Dann ist Linearität im ersten Argument äquivalent zur Linearität von s_v, denn

$$s_v(k_1 u_1 + k_2 u_2) = (k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet v \ .$$

Definieren wir analog dazu

$$s_u : V \to K \quad \text{mit} \quad s_u(v) := u \bullet v \ ,$$

dann ist wieder Linearität im zweiten Argument äquivalent zur Linearität von s_u, denn

$$s_u(\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) = u \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \ .$$

Linearität von Abbildungen zwischen Vektorräumen haben wir in Übung 5 bereits studiert. Man beachte hier, dass jeder Körper auch einen Vektorraum bildet.

BEISPIEL: STANDARDSKALARPRODUKT

Aus der Schule bekannt ist das *Standardskalarprodukt* von $u, v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots u_n v_n \quad . \tag{$\star$}$$

Mit Matrixmultiplikation können wir auch $\boxed{u \bullet v = u^\top v}$ schreiben.

- *Bilinearität* folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation.
- *Symmetrie:* klar mit ($\star$).
- *Positive Definitheit:* $u \bullet u = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_2^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$ und $u \bullet u = 0$ kann nur auftreten, wenn jeder Summand schon Null ist, d.h. $u_1 = 0 \wedge u_2 = 0 \wedge \cdots \wedge u_n = 0$, was gerade $u = 0$ entspricht.

BEISPIEL: SKALARPRODUKT MIT MATRIX

Anstelle von $u^\top v$ können wir etwas allgemeiner $u \bullet v$ definieren als

$$u \bullet v = u^\top M v$$

mit einer Matrix M. Welche Bedingungen muss M erfüllen, damit $\bullet$ ein Skalarprodukt wird?

- *Bilinearität* folgt weiter aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (vgl. auch Ü106).
- *Symmetrie:* Dafür muss M symmetrisch sein, d.h. $M^\top = M$.

$$u \bullet v = \underbrace{u^\top M v}_{\in \mathbb{R}} = \left(u^\top M v\right)^\top = v^\top M^\top \left(u^\top\right)^\top = v^\top \underbrace{M^\top}_{=M,\text{ wenn } M \text{ symm.}} u = v \bullet u$$

- *Positive Definitheit:* Hier muss man die positive Definitheit direkt zeigen, d.h. $u^\top M u \geq 0$ und $u^\top M u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$ oder gleichwertig dazu $u^\top M u > 0$ für alle $u \neq 0$.

BEISPIEL: INTEGRALE?!

Wir haben aber auch abstraktere Vektorräume kennengelernt, z.B. den Vektorraum der Abbildungen $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Wie können wir dort ein Skalarprodukt definieren?

Man kann zeigen, dass für $f, g \in V$ der Ausdruck

$$f \bullet g := \int_0^1 f(x)\, g(x) \; dx$$

ein Skalarprodukt $\bullet$ auf V definiert.

LÄNGENMESSUNG

Ein Skalarprodukt $\bullet$ induziert durch

$$\|v\| := \sqrt{v \bullet v}$$

eine *Norm* auf V.

Damit können wir *Längen* von Vektoren messen.

WINKELMESSUNG

Sei $(V, \bullet)$ ein euklidischer Vektorraum. Der *Winkel* $\varphi \in [0, 2\pi)$ zwischen zwei Vektoren $u, v \in V$ ist bestimmt durch

$$\cos(\varphi) = \frac{u \bullet v}{\|u\| \, \|v\|} \quad .$$

Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen *orthogonal* (in Zeichen $u \perp v$), wenn

$$u \bullet v = 0$$

gilt. Dann ist nämlich $\cos(\varphi) = \frac{u \bullet v}{\|u\| \|v\|} = 0$ und damit $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.