TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

LINEARE ALGEBRA

ÜBUNG 11: SKALARPRODUKTE

Eric Kunze

eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 19.01.2021

SKALARPRODUKT

Sei V ein Vektorraum über einem Köper K.

Eine Abbildung $\bullet : V \times V \to K$ heißt *Skalarprodukt*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\bullet$ ist *bilinear*,
- $\bullet$ ist *symmetrisch*,
- $\bullet$ ist *positiv definit*.

Manchmal schreibt man für Vektoren $u, v \in V$ statt $u \bullet v$ auch $\langle u, v \rangle$ oder (u, v).

BILINEARITÄT VON $\bullet$

Die Abbildung $\bullet$ ist „linear in jedem Argument“:

1. Linearität im ersten Argument:
    - additiv: $(u_1 + u_2) \bullet v = (u_1 \bullet v) + (u_2 \bullet v)$
    - homogen: $(ku) \bullet v = k(u \bullet v)$

    oder in einem Schritt

    - $(k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet v = k_1(u_1 \bullet v) + k_2(u_2 \bullet v)$

2. Linearität im zweiten Argument:
    - additiv: $u \bullet (v_1 + v_2) = (u \bullet v_1) + (u \bullet v_2)$
    - homogen: $u \bullet (kv) = k(u \bullet v)$

    oder in einem Schritt

    - $u \bullet (\ell_1 u_1 + \ell_2 u_2) \bullet v = \ell_1(u \bullet v_1) + \ell_2(u \bullet v_2)$

Alternativ kann man auch alles in einem Rutsch erledigen und zeigen, dass

$$\begin{aligned} & (k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \\ = \; & k_1 \Big(u_1 \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \Big) + k_2 \Big(u_2 \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \Big) \\ = \; & k_1 \ell_1 (u_1 \bullet v_1) + k_1 \ell_2 (u_1 \bullet v_2) + k_2 \ell_1 (u_2 \bullet v_1) + k_2 \ell_2 (u_2 \bullet v_2) \end{aligned}$$

gilt.

BILINEARITÄT $\leftrightarrow$ LINEARITÄT

Wir können Bilinearität auch mit der bekanten Linearität in Verbindung bringen. Definieren wir dazu die Abbildung

$$s_v : V \to K \quad \text{mit} \quad s_v(u) := u \bullet v \ .$$

Dann ist Linearität im ersten Argument äquivalent zur Linearität von s_v, denn

$$s_v(k_1 u_1 + k_2 u_2) = (k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet v \ .$$

BILINEARITÄT $\leftrightarrow$ LINEARITÄT

Wir können Bilinearität auch mit der bekanten Linearität in Verbindung bringen. Definieren wir dazu die Abbildung

$$s_v : V \to K \quad \text{mit} \quad s_v(u) := u \bullet v \ .$$

Dann ist Linearität im ersten Argument äquivalent zur Linearität von s_v, denn

$$s_v(k_1 u_1 + k_2 u_2) = (k_1 u_1 + k_2 u_2) \bullet v \ .$$

Definieren wir analog dazu

$$s_u : V \to K \quad \text{mit} \quad s_u(v) := u \bullet v \ ,$$

dann ist wieder Linearität im zweiten Argument äquivalent zur Linearität von s_u, denn

$$s_u(\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) = u \bullet (\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2) \ .$$

Linearität von Abbildungen zwischen Vektorräumen haben wir in Übung 5 bereits studiert. Man beachte hier, dass jeder Körper auch einen Vektorraum bildet.