

PROGRAMMIERUNG

Übung 4: Haskell – Typpolymorphie & Unifikation

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 3. Mai 2019

Unifikation

Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])  
f (...) = ...
```

```
g :: (Int, [u]) -> Int  
g (...) = ...
```

```
h = g . f
```

Unifikation

Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])  
f (...) = ...
```

```
g :: (Int, [u]) -> Int  
g (...) = ...
```

```
h = g . f
```

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme *trans*((t, [Char])) und *trans*((Int, [u])) unifizierbar sind

Unifikation

Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])  
f (...) = ...
```

```
g :: (Int, [u]) -> Int  
g (...) = ...
```

```
h = g . f
```

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme $trans((t, [Char]))$ und $trans((Int, [u]))$ unifizierbar sind

$\rightarrow t = Int$ und $u = Char$

Unifikationsalgorithmus

- **Ziel.** Am Ende sollen nur paarweise verschiedene Variablen in der oberen Zeile stehen und keine Regel mehr anwendbar sein.
- **beliebter Fehler.** Verwechslung von Elimination von Variablen (x_i, x_i) und Dekomposition von nullären Symbolen (α, α) .

Unifikationsalgorithmus – Regeln

- **Dekomposition.** Sei $\delta \in \Sigma$ ein k -stelliger Konstruktor, $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ Terme über Konstruktoren und Variablen.

$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, \dots, s_k) \\ \delta(t_1, \dots, t_k) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$

- **Elimination.** Sei x eine Variable !

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \emptyset$$

- **Vertauschung.** Sei t keine Variable.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- **Substitution.** Sei x eine Variable, t keine Variable und x kommt nicht in t vor (occur check). Dann ersetze in jedem anderen Term die Variable x durch t .

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\begin{array}{cc} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{cc} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \sigma(\gamma(x_3), x_3) \\ \sigma(x_2, x_3) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}}^2 & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_3 \\ x_3 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\} \quad x_2 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_3) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\begin{array}{c} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \sigma(\gamma(x_3), x_3) \\ \sigma(x_2, x_3) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}}^2 & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_3 \\ x_3 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\} \quad x_2 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_3) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \quad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \quad x_3 \mapsto x_3$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\begin{array}{l} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \sigma(\gamma(x_3), x_3) \\ \sigma(x_2, x_3) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}}^2 & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_3 \\ x_3 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\} \quad x_2 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_3) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \quad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \quad x_3 \mapsto x_3$$

weitere Unifikatoren:

$$\begin{array}{lll}
 x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_2 \mapsto \gamma(\alpha) & x_3 \mapsto \alpha \\
 x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) & x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_3 \mapsto \gamma(\alpha)
 \end{array}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\begin{array}{l} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \sigma(\gamma(x_3), x_3) \\ \sigma(x_2, x_3) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & {}^2 \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_3 \\ x_3 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\} \quad x_2 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_3) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \quad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \quad x_3 \mapsto x_3$$

weitere Unifikatoren:

$$\begin{array}{lll}
 x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_2 \mapsto \gamma(\alpha) & x_3 \mapsto \alpha \\
 x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) & x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_3 \mapsto \gamma(\alpha)
 \end{array}$$

Fehlschlag beim occur-check:

$$\text{Alphabet: } \Sigma = \{\gamma^{(1)}\}$$

$$t_1 = x_1$$

$$t_2 = \gamma(x_1)$$