

PROGRAMMIERUNG

Übung 5: Unifikation & Induktion auf Listen

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 10. Mai 2019

Unifikationsalgorithmus – Regeln

- **Dekomposition.** Sei $\delta \in \Sigma$ ein k -stelliger Konstruktor, $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ Terme über Konstruktoren und Variablen.

$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, \dots, s_k) \\ \delta(t_1, \dots, t_k) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$

- **Elimination.** Sei x eine Variable !

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \emptyset$$

- **Vertauschung.** Sei t keine Variable.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- **Substitution.** Sei x eine Variable, t keine Variable und x kommt nicht in t vor (occur check). Dann ersetze in jedem anderen Term die Variable x durch t .

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \right), \right. \\
 & \quad \left. \delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, \alpha) \right), \left(\sigma(x_2, x_3) \right) \right\} \\
 & \quad \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, x_2) \right), \left(\sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \Big\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 \left\{ \left(x_1 \right), \left(\alpha \right), \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \quad \left(x_1 \right), \left(x_2 \right), \left(x_2 \right), \left(\gamma(x_2) \right) \Big\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}}^2 \left\{ \left(\alpha \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \quad \left(x_2 \right), \left(\gamma(x_2) \right) \Big\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \quad \left(\alpha \right), \left(\gamma(x_2) \right) \Big\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \quad \left(\alpha \right), \left(\gamma(\alpha) \right) \Big\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 1

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\begin{array}{l} \delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \\ \delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \end{array} \right) \right\} \\ \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(x_1, x_2) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \sigma(x_2, x_3) \\ \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \end{array} \right) \right\} \\ \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_1 \\ x_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \alpha \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_2 \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_3 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right) \right\} \\ \xRightarrow{\text{El.}}^2 & \left\{ \left(\begin{array}{l} \alpha \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_3 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right) \right\} \\ \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_2 \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_3 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right) \right\} \\ \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left(\begin{array}{l} x_2 \\ \alpha \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} x_3 \\ \gamma(\alpha) \end{array} \right) \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \right), \right. \\
 & \quad \left. \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, \alpha) \right), \left(\sigma(x_2, x_3) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 \left\{ \left(x_1 \right), \left(\alpha \right), \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}}^2 \left\{ \left(\alpha \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(\gamma(x_2) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \right), \right. \\
 & \quad \left. \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, \alpha) \right), \left(\sigma(x_2, x_3) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, x_2) \right), \left(\sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{3} \left\{ \left(x_1 \right), \left(\alpha \right), \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(\gamma(\alpha) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- t_1 und t_2 sind

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)), \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha, \left(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 \left\{ \left(x_1, \left(\alpha, x_2 \right) \right), \left(x_2, \left(x_3, \gamma(x_2) \right) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}}^2 \left\{ \left(\alpha, \left(x_3, \gamma(x_2) \right) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2, \left(\alpha, \gamma(x_2) \right) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2, \left(\alpha, \gamma(\alpha) \right) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- t_1 und t_2 sind **nicht** unifizierbar
- t_1 und t_3 sind

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \right), \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, \alpha) \right), \left(\sigma(x_2, x_3) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 \left\{ \left(x_1 \right), \left(\alpha \right), \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}}^2 \left\{ \left(\alpha \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(\gamma(\alpha) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- t_1 und t_2 sind **nicht** unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)), \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha, \left(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 \left\{ \left(x_1, \left(\alpha, x_2 \right) \right), \left(x_2, \left(x_3, \gamma(x_2) \right) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}}^2 \left\{ \left(\alpha, x_3 \right), \left(x_2, \gamma(x_2) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2, x_3 \right), \left(\alpha, \gamma(x_2) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2, x_3 \right), \left(\alpha, \gamma(\alpha) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- t_1 und t_2 sind **nicht** unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit
 $a \mapsto a \quad b \mapsto a \quad c \mapsto [a]$
- t_2 und t_3 sind

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \right), \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, \gamma(x_2))) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \left(\alpha \right), \left(\sigma(x_1, \alpha) \right), \left(\sigma(x_2, x_3) \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 \left\{ \left(x_1 \right), \left(\alpha \right), \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{El.}}^2 \left\{ \left(\alpha \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Vert.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(x_3 \right) \right\} \\
 & \xRightarrow{\text{Subst.}} \left\{ \left(x_2 \right), \left(\gamma(\alpha) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- t_1 und t_2 sind **nicht** unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit
 $a \mapsto a \quad b \mapsto a \quad c \mapsto [a]$
- t_2 und t_3 sind unifizierbar mit

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\delta(\alpha, \sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, x_3)), \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\alpha, \left(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(x_2, \gamma(x_2)) \right) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}}^3 & \left\{ \left(x_1, \left(\alpha, x_2 \right) \right), \left(x_2, \left(x_3, \gamma(x_2) \right) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}}^2 & \left\{ \left(\alpha, x_3 \right), \left(x_2, \gamma(x_2) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(x_2, \left(\alpha, x_3 \right) \right), \left(x_2, \gamma(x_2) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left(x_2, \left(\alpha, x_3 \right) \right), \left(x_2, \gamma(\alpha) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto x_1 \quad x_2 \mapsto \alpha \quad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Teilaufgabe (b)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- t_1 und t_2 sind **nicht** unifizierbar
- t_1 und t_3 sind unifizierbar mit
 $a \mapsto a \quad b \mapsto a \quad c \mapsto [a]$
- t_2 und t_3 sind unifizierbar mit
 $b \mapsto \text{Int} \quad c \mapsto [\text{Double}]$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\sigma \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix}, \sigma \left(\begin{matrix} \gamma(\alpha) \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix}, x_3 \right) \right) \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Dek.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix} \right), \left(\sigma \left(\begin{matrix} \gamma(\alpha) \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix}, x_3 \right) \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Dek.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix} \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Dek.}}{\Rightarrow}^2 & \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix} \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Vert.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix} \right) \right\} \quad x_1 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_2) \text{ vor} \\
 \stackrel{\text{Sub.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, \gamma(x_2)) \end{matrix} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\sigma \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix}, \sigma \left(\begin{matrix} \gamma(\alpha) \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix}, x_3 \right) \right) \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Dek.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix} \right), \left(\sigma \left(\begin{matrix} \gamma(\alpha) \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix}, x_3 \right) \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Dek.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix} \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Dek.}}{\Rightarrow}^2 & \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix} \right) \right\} \\
 \stackrel{\text{Vert.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{matrix} \right) \right\} \quad x_1 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_2) \text{ vor} \\
 \stackrel{\text{Sub.}}{\Rightarrow} & \left\{ \left(\begin{matrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_3 \\ \sigma(\alpha, \gamma(x_2)) \end{matrix} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(x_2) \quad x_2 \mapsto x_2 \quad x_3 \mapsto \sigma(\alpha, \gamma(x_2))$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\sigma \left(\begin{array}{c} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{array}, \sigma \left(\begin{array}{c} \gamma(\alpha) \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{array}, x_3 \right) \right) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{array}, \left(\sigma \left(\begin{array}{c} \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) \end{array}, x_3 \right) \right) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} \gamma(x_2) \\ x_1 \end{array}, \left(\begin{array}{c} \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) \end{array}, \begin{array}{c} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{array} \right) \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}}^2 & \left\{ \left(\begin{array}{c} \gamma(x_2) \\ \mathbf{x_1} \end{array}, \begin{array}{c} x_3 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} \mathbf{x_1} \\ \gamma(x_2) \end{array}, \begin{array}{c} x_3 \\ \sigma(\alpha, \mathbf{x_1}) \end{array} \right) \right\} \quad x_1 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_2) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Sub.}} & \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array}, \begin{array}{c} x_3 \\ \sigma(\alpha, \gamma(x_2)) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(x_2) \quad x_2 \mapsto x_2 \quad x_3 \mapsto \sigma(\alpha, \gamma(x_2))$$

weitere Unifikatoren:

$$\begin{array}{lll}
 x_1 \mapsto \gamma(\alpha) & x_2 \mapsto \alpha & x_3 \mapsto \sigma(\alpha, \gamma(\alpha)) \\
 x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_2 \mapsto \gamma(\alpha) & x_3 \mapsto \sigma(\alpha, \gamma(\gamma(\alpha)))
 \end{array}$$

Strukturelle Induktion

- **Allgemeine Hinweise.** Es müssen **alle** Variablen quantifiziert werden!
- **Was wollen wir?** Wir wollen **zeigen**, dass eine Eigenschaft (ein Prädikat) P für jede Liste $xs :: [a]$ gilt, d.h. dass $P(xs)$ gilt.

Strukturelle Induktion

- **Allgemeine Hinweise.** Es müssen **alle** Variablen quantifiziert werden!
- **Was wollen wir?** Wir wollen **zeigen**, dass eine Eigenschaft (ein Prädikat) P für jede Liste $xs :: [a]$ gilt, d.h. dass $P(xs)$ gilt.
- **Induktionsanfang.** Wir zeigen $P(xs)$ für $xs == []$.
Achtung: hat P weitere freie Parameter, dann müssen auch diese quantifiziert werden!

Strukturelle Induktion

- **Allgemeine Hinweise.** Es müssen **alle** Variablen quantifiziert werden!
- **Was wollen wir?** Wir wollen **zeigen**, dass eine Eigenschaft (ein Prädikat) P für jede Liste $xs :: [a]$ gilt, d.h. dass $P(xs)$ gilt.
- **Induktionsanfang.** Wir zeigen $P(xs)$ für $xs == []$.
Achtung: hat P weitere freie Parameter, dann müssen auch diese quantifiziert werden!
- **Induktionsvoraussetzung.** Wir nehmen an, dass $P(xs')$ für eine Liste $xs' :: [a]$ gilt.
Achtung: freie Parameter!

Strukturelle Induktion

- **Allgemeine Hinweise.** Es müssen **alle** Variablen quantifiziert werden!
- **Was wollen wir?** Wir wollen **zeigen**, dass eine Eigenschaft (ein Prädikat) P für jede Liste $xs :: [a]$ gilt, d.h. dass $P(xs)$ gilt.
- **Induktionsanfang.** Wir zeigen $P(xs)$ für $xs == []$.
Achtung: hat P weitere freie Parameter, dann müssen auch diese quantifiziert werden!
- **Induktionsvoraussetzung.** Wir nehmen an, dass $P(xs')$ für eine Liste $xs' :: [a]$ gilt.
Achtung: freie Parameter!
- **Induktionsschritt.** Nutze die Induktionsvoraussetzung um zu zeigen, dass $P(x : xs')$ für alle $x :: a$ gilt.

Aufgabe 3

- zu zeigen.

$\text{sum} (\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs \quad \text{für alle } xs :: \text{Int}$

Aufgabe 3

- zu zeigen.

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \quad \text{für alle xs} :: \text{Int}$$

- **Induktionsanfang.** Sei $\text{xs} :: [\text{Int}]$ mit $\text{xs} == []$.

$$\text{linke Seite: } \text{sum (foo [])} \stackrel{(2)}{=} \text{sum []} \stackrel{(6)}{=} 0$$

$$\text{rechte Seite: } 2 * \text{sum []} - \text{length []} \stackrel{(10)}{=} 2 * \text{sum []} - 0 \stackrel{(6)}{=} 2 * 0 - 0 = 0$$

Aufgabe 3

- zu zeigen.

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \quad \text{für alle xs} :: \text{Int}$$

- **Induktionsanfang.** Sei $\text{xs} :: [\text{Int}]$ mit $\text{xs} == []$.

$$\text{linke Seite: } \text{sum (foo [])} \stackrel{(2)}{=} \text{sum []} \stackrel{(6)}{=} 0$$

$$\text{rechte Seite: } 2 * \text{sum []} - \text{length []} \stackrel{(10)}{=} 2 * \text{sum []} - 0 \stackrel{(6)}{=} 2 * 0 - 0 = 0$$

- **Induktionsvoraussetzung.** Sei $\text{xs} :: [\text{Int}]$, sodass gilt

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs}$$

Aufgabe 3

- **Induktionsschritt.** Für alle $x :: \text{Int}$ zeigen wir, dass gilt

$$\text{sum (foo (x:xs))} = 2 * \text{sum (x:xs)} - \text{length (x:xs)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{sum (foo (x:xs))} &\stackrel{(3)}{=} \text{sum (x : x : (-1) : foo xs)} \\ &\stackrel{3-(7)}{=} x + x + (-1) + \text{sum (foo xs)} \\ &\stackrel{(IV)}{=} x + x + (-1) + 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \\ &\stackrel{(\text{Komm.})}{=} 2 * x + 2 * \text{sum xs} - 1 - \text{length xs} \\ &\stackrel{(\text{Dist.})}{=} 2 * (x + \text{sum xs}) - (1 + \text{length xs}) \\ &\stackrel{(7)}{=} 2 * \text{sum (x:xs)} - (1 + \text{length xs}) \\ &\stackrel{(11)}{=} 2 * \text{sum (x:xs)} - \text{length (x:xs)} \end{aligned}$$

□