TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

PROGRAMMIERUNG

Übung 7: λ-Kalkül

Eric Kunze
eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 24. Mai 2019

Der λ-Kalkül

- **Atome.** x, y
- **Abstraktion.** $\lambda x.t$ ($f(x) = t$, anonyme Funktion)
- **Applikation.** $t_1 \ t_2$
- **Bsp.** $\langle \texttt{quadriere} \rangle = \lambda x. * xx \quad \hookrightarrow \quad \langle \texttt{quadriere} \rangle \, \langle 2 \rangle = 2 \cdot 2 = 4$

Verabredungen:

- Applikation ist linksassoziativ: $((t_1 \ t_2) \ t_3) = t_1 \ t_2 \ t_3$ für alle $t_1, t_2, t_3 \in \lambda(\Sigma)$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t)))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$ für alle $t \in \lambda(\Sigma)$
- Applikation vor Abstraktion: $(\lambda x.xy) = (\lambda x.(xy)) \neq ((\lambda x.x)y)$

Aufgabe 1

(a) A mit $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$: $A = (\lambda xyz\ .\ y)$

(b) B mit $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$: $B = (\lambda xy\ .\ yx)$

(c) C mit $C\ C \Rightarrow^* C\ C$: $C = (\lambda x\ .\ xx)$, denn: $(\lambda x.\underbrace{\ xx\ }_{GV=\emptyset})\underbrace{(\lambda x.xx)}_{FV=\emptyset} \Rightarrow^\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

(d) D mit $D \Rightarrow^* D$: $D = (C\ C)$

(e) E mit $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$: $E = (\lambda xy\ .\ xyx)$, denn:

$$(\lambda x \underbrace{y\ .\ xyx)}_{GV=\{y\}}\underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{FV=\emptyset}t \Rightarrow^\beta (\lambda y\ .\ (\lambda xy\ .\ xyx)\ y\ (\lambda xy\ .\ xyx))\ t \Rightarrow^\beta \underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{=E}\ t\ \underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{=E}$$

Church-Numerals

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser.
Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen $\rightarrow$ Church-Numerals

$$
\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy \,.\, y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy \,.\, xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy \,.\, x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy \,.\, \underbrace{x(x \ldots (x}_{n}\, y) \ldots))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

$$\langle pow\rangle\langle 2\rangle = \big(\lambda nfz\,.\,n\,(\lambda gx.g(gx))\,fz\big)\big(\lambda xy\,.\,x(xy))\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,(\lambda xy\,.\,x(xy))\big)\big(\lambda gx.g(gx)\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda y\,.\,(\lambda gx.g(gx)\big)\big((\lambda gx.g(gx))\,y\big)\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda y\,.\,\big(\lambda x.\big((\lambda gx.g(gx))\,y\big)\big(((\lambda gx.g(gx))\,y)\,x\big)\big)\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda yx\,.\big((\lambda gx.g(gx))\,y\big)\big(((\lambda gx.g(gx))\,y)\,x\big)\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda yx\,.\big(\lambda x.y(yx)\big)\big((\lambda x.y(yx))\,x\big)\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda yx\,.\big(\lambda x.y(yx)\big)\big(y(yx)\big)\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda yx\,.y\,(y\,(y\,(yx))\big)\,f\,z\big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,\big(\lambda x\,.f\,(f\,(f\,(fx))\big)\,z\big) \qquad \Rightarrow^{\beta} \big(\lambda fz\,.\,f\,(f\,(f\,(fz)\,)\,)\,)\big) = \langle 4\rangle$$

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n,m) = m^n$$

$$\langle pow'\rangle = \big(\lambda nmfz.nmfz\big)$$

Fixpunktkombinator und Rekursion

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator.** $\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu)) \Big) \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy.x) \qquad \langle false \rangle = (\lambda xy.y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) \qquad \langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n+1 \rangle \qquad \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n-1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3 – Teil (b)

$$\langle F\rangle = \Big(\lambda fxyz\,.\,\langle ite\rangle \big(\langle iszero\rangle\,(\langle sub\rangle xy)\big)\,\big(\langle add\rangle yz\big)\,\big(\langle succ\rangle\,(f\,(\langle pred\rangle x)\,(\langle succ\rangle y)\,(\langle mult\rangle\langle 2\rangle z))\big)\Big)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle &= \big(\lambda z.\,(\lambda u.z(uu))\,(\lambda u.z(uu))\big)\,\langle F\rangle \\
&\Rightarrow^{\beta} \big(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\big)\,\big(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\big) \qquad =: \langle Y_F\rangle \\
&\Rightarrow^{\beta} \langle F\rangle\langle Y_F\rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Teil (b)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle})\ (\dots) \\
&\qquad\qquad ((\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle(\underbrace{\langle pred\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 5\rangle})(\underbrace{\langle succ\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})(\underbrace{\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})))) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle true\rangle})\ (\underbrace{\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 12\rangle})\ (\dots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 – Teil (c)

$$
\begin{aligned}
\langle G\rangle = \Bigg(\lambda gxy\,.\,\Big(&\langle ite\rangle\;(\langle iszero\rangle\;x)\\
&\qquad(\langle mult\rangle\;\langle 2\rangle\;(\langle succ\rangle y)\;)\\
&\qquad\Big(\langle ite\rangle\;(\langle iszero\rangle\;y)\\
&\qquad\qquad(\langle mult\rangle\;\langle 2\rangle\;(\langle succ\rangle x))\\
&\qquad\qquad(\langle add\rangle\;\langle 4\rangle\;\;g\;(\langle pred\rangle x\;\langle pred\rangle y)\;)\\
&\qquad\Big)\\
&\Big)\\
\Bigg)
\end{aligned}
$$