TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

PROGRAMMIERUNG

Übung 7: λ-Kalkül

Eric Kunze
eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

TU Dresden, 24. Mai 2019

Der λ-Kalkül

- **Atome.** x, y
- **Abstraktion.** $\lambda x.t$ $(f(x) = t$, anonyme Funktion)
- **Applikation.** $t_1 \;\; t_2$
- **Bsp.** $\mathtt{quadriere} = \lambda x. * xx \quad \hookrightarrow \quad \langle\mathtt{quadriere}\rangle \, \langle 2 \rangle = 2 \cdot 2 = 4$

Verabredungen:

- Applikation ist linksassoziativ: $((t_1 \; t_2) \; t_3) = t_1 \; t_2 \; t_3$ für alle $t_1, t_2, t_3 \in \lambda(\Sigma)$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$ für alle $t \in \lambda(\Sigma)$
- Applikation vor Abstraktion: $(\lambda x.xy) = (\lambda x.(xy)) \neq ((\lambda x.x)y)$

Aufgabe 1

(a) A mit $A\ t\ s\ u \Rightarrow^* s$: $A = (\lambda xyz\ .\ y)$

(b) B mit $B\ t\ s \Rightarrow^* s\ t$: $B = (\lambda xy\ .\ yx)$

(c) C mit $C\ C \Rightarrow^* C\ C$: $C = (\lambda x\ .\ xx)$, denn: $(\lambda x.\underbrace{\ xx\ }_{GV=\emptyset})\underbrace{(\lambda x.xx)}_{FV=\emptyset} \Rightarrow^\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

(d) D mit $D \Rightarrow^* D$: $D = (C\ C)$

(e) E mit $E\ E\ t \Rightarrow^* E\ t\ E$: $E = (\lambda xy\ .\ xyx)$, denn:

$$(\lambda x \underbrace{y\ .\ xyx)}_{GV=\{y\}}\underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{FV=\emptyset}t \Rightarrow^\beta (\lambda y\ .\ (\lambda xy\ .\ xyx)\ y\ (\lambda xy\ .\ xyx))\ t \Rightarrow^\beta \underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{=E}\ t\ \underbrace{(\lambda xy\ .\ xyx)}_{=E}$$

Church-Numerals

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser.
Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen → Church-Numerals

$$\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy \,.\, x) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy \,.\, xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy \,.\, x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy \,.\, \underbrace{x(x \ldots (x}_{n}\, y) \ldots))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\langle pow\rangle\langle 2\rangle = \Big(\lambda nfz\ .\ n\ (\lambda gx.g(gx))\ fz\Big)\Big(\lambda xy\ .\ x(xy))\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \big(\lambda xy\ .\ x(xy))\big)\ \big(\lambda gx.g(gx)\big)\ f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda y\ .\ \big(\lambda gx.g(gx)\big)\Big((\lambda gx.g(gx))\ y\Big)\Big) f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda y\ .\ \Big(\lambda x.\big((\lambda gx.g(gx))\ y\big)\Big(((\lambda gx.g(gx))\ y)\ x\Big)\Big)\Big) f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda yx\ .\big((\lambda gx.g(gx))\ y\big)\Big(((\lambda gx.g(gx))\ y)\ x\Big)\Big) f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda yx\ .\big(\lambda x.y(yx)\big)\Big((\lambda x.y(yx))\ x\Big)\Big) f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda yx\ .\big(\lambda x.y(yx)\big)\big(y(yx)\big)\Big) f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda yx\ .y\ \big(y\ (y\ (yx))\big)\Big) f\ z\Big)$$

$$\Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ \Big(\lambda x\ .f\ \big(f\ (f\ (fx))\big)\Big) z\Big) \quad \Rightarrow^{\beta} \Big(\lambda fz\ .\ f\ (f\ (f\ (fz)\ )\ )\ )\Big) = \langle 4\rangle$$

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow'\rangle = \big(\lambda nmfz.nmfz\big)$$

Fixpunktkombinator und Rekursion

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator.** $\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big) \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy.x) \qquad \langle false \rangle = (\lambda xy.y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) \qquad \langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n+1 \rangle \qquad \langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n-1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3 – Teil (b)

$$\langle F\rangle = \Big(\lambda fxyz\,.\,\langle ite\rangle\,\big(\langle iszero\rangle\,(\langle sub\rangle xy)\big)\,\big(\langle add\rangle yz\big)\,\big(\langle succ\rangle\,(f\,(\langle pred\rangle x)\,(\langle succ\rangle y)\,(\langle mult\rangle\langle 2\rangle z))\big)\Big)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle &= \big(\lambda z.\,(\lambda u.z(uu))\,(\lambda u.z(uu))\big)\,\langle F\rangle \\
&\Rightarrow^{\beta}\ \big(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\big)\,\big(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\big) \qquad =: \langle Y_F\rangle \\
&\Rightarrow^{\beta}\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Teil (b)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle})\ (\ldots) \\
&\qquad\qquad (\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle(\underbrace{\langle pred\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 5\rangle})(\underbrace{\langle succ\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})(\underbrace{\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})))\\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle true\rangle})\ (\underbrace{\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 12\rangle})\ (\ldots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$