

# PROGRAMMIERUNG

## Übung 8: $\lambda$ -Kalkül & Einführung in Prolog

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 31. Mai 2019

## Aufgabe 6.3 – Teil (b)

$$\begin{aligned}
 \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle &\Rightarrow^* \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle \underbrace{(\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle))}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle}} (\dots) \\
 &\quad (\langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \underbrace{(\langle \text{pred} \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle}) \underbrace{(\langle \text{succ} \rangle \langle 5 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle}) \underbrace{(\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle})) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle ( \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle ) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle ( \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle ) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle ( \langle \text{ite} \rangle \underbrace{(\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle))}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle}} \underbrace{(\langle \text{add} \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle}} (\dots) ) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle 12 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle 13 \rangle
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6.3 – Teil (c)

```
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

## Aufgabe 6.3 – Teil (c)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy. \left( \langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle x) \right. \right. \\
\left. \left. \left( \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle (\langle \text{succ} \rangle y) \right) \right. \right. \\
\left. \left. \left( \langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle y) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left( \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle (\langle \text{succ} \rangle x) \right) \right. \right. \\
\left. \left. \left( \langle \text{add} \rangle \langle 4 \rangle g (\langle \text{pred} \rangle x (\langle \text{pred} \rangle y)) \right) \right) \right) \\
\left. \right) \\
\left. \right) \\
\left. \right)$$

# Aufgabe 1 – Teil (a)

```
g :: Int -> Int -> Int
g m 0 = m
g m 1 = m + 1
g m n = g m (n - 2) + g m (n - 1)
```

# Aufgabe 1 – Teil (a)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gmn . \left( \langle \text{ite} \rangle \left( \langle \text{iszero} \rangle n \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( m \right) \right. \right. \\ \left. \left( \langle \text{ite} \rangle \left( \langle \text{iszero} \rangle \left( \langle \text{pred} \rangle \langle n \rangle \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left( \langle \text{succ} \rangle m \right) \right. \\ \left. \left( \langle \text{add} \rangle \left( g \ m \ \left( \langle \text{sub} \rangle n \ 2 \right) \right) \left( g \ m \ \left( \langle \text{pred} \rangle n \right) \right) \right) \right. \\ \left. \right. \\ \left. \right) \\ \left. \right) \\ \left. \right)$$

# Aufgabe 1 – Teil (b)

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \langle 1 \rangle \left( \langle mult \rangle x (f x (\langle pred \rangle y)) \right) \right)$$

# Aufgabe 1 – Teil (b)

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \langle 1 \rangle \left( \langle mult \rangle x (f x (\langle pred \rangle y)) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.



# Aufgabe 1 – Teil (b)

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxy. \langle ite \rangle (\langle iszero \rangle y) \langle 1 \rangle (\langle mult \rangle x (f x (\langle pred \rangle y))) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle &= (\lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu))) \langle F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta (\lambda u. \langle F \rangle (uu)) (\lambda u. \langle F \rangle (uu)) \quad =: \langle Y_F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$

# Aufgabe 1 – Teil (b)

$$\begin{aligned}
 \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle &\Rightarrow^* \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \langle 1 \rangle \left( \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \left( \langle Y_F \rangle \langle 2 \rangle \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle} \right) \right) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \left( \langle Y_F \rangle \langle 2 \rangle \langle 0 \rangle \right) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \left( \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 2 \rangle \langle 0 \rangle \right) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \left( \langle \text{ite} \rangle \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \langle 1 \rangle \left( \dots \right) \right) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle 2 \rangle
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 2 – Teil (a)

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := \begin{cases} x \cdot x & \text{für } y = 0 \\ g(2 \cdot x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

## Aufgabe 2 – Teil (a)

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := \begin{cases} x \cdot x & \text{für } y = 0 \\ g(2 \cdot x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy. \left( \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle mult \rangle x x \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \right) \right)$$

## Aufgabe 2 – Teil (b)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda \, gxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \left( \langle mult \rangle x x \right) \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

## Aufgabe 2 – Teil (b)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda \, gxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \left( \langle mult \rangle x x \right) \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

## Aufgabe 2 – Teil (b)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda \, gxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \left( \langle mult \rangle x x \right) \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle G \rangle &= \left( \lambda z . (\lambda u . z(uu)) (\lambda u . z(uu)) \right) \langle G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left( \lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \left( \lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \quad =: \langle Y_G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \end{aligned}$$

## Aufgabe 2 – Teil (b)

$$\begin{aligned}
 & \langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle} \right) \left( \dots \right) \Rightarrow^* \langle 64 \rangle
 \end{aligned}$$



# Einführung in Prolog

- Französisch: programmation en logique (deutsch: Programmieren in Logik)
- **Online-Editor & Interpreter.** `swish.swi-prolog.org`
- Prolog-Programme bestehen aus **Fakten** und **Regeln**.
- Statements werden mit `.` abgeschlossen.
- Variablen beginnen mit Großbuchstaben.
- **UND**-Operator.  `,`
- **ODER**-Operator.  `;`

# Prolog: Fakten, Regeln und Anfragen

## Fakten.

- Prädikat mit Argumenten
- z.B. Albert ist männlich  
     $\hookrightarrow$  `male(albert).`

# Prolog: Fakten, Regeln und Anfragen

## Fakten.

- Prädikat mit Argumenten
- z.B. Albert ist männlich  
 $\hookrightarrow \text{male}(\text{albert}).$

## Regeln.

- Abhängigkeit eines Fakts von einem oder mehreren anderen Fakten
- z.B. Vater ist männliches Elternteil  
 $\hookrightarrow \text{father}(X,Y) :- \text{parent}(X,Y), \text{male}(X).$
- $:-$  kann als umgedrehte Implikation gelesen werden

# Prolog: Fakten, Regeln und Anfragen

## Fakten.

- Prädikat mit Argumenten
- z.B. Albert ist männlich  
 $\hookrightarrow \text{male}(\text{albert}).$

## Anfragen.

- Ist Albert männlich?  
 $\hookrightarrow \text{?- male}(\text{albert}).$
- Nutzung von Variablen liefert I/O
- Anzeigen mehrerer Lösung mit `swipl` durch ;

## Regeln.

- Abhängigkeit eines Fakts von einem oder mehreren anderen Fakten
- z.B. Vater ist männliches Elternteil  
 $\hookrightarrow \text{father}(\text{X}, \text{Y}) \text{ :- } \text{parent}(\text{X}, \text{Y}), \text{male}(\text{X}).$
- `:-` kann als umgedrehte Implikation gelesen werden

# Aufgabe 3

```
1  edge(1,1).  
2  edge(1,4).  
3  edge(1,2).  
4  edge(3,2).  
5  edge(4,3).
```

# Aufgabe 3

```
1  edge(1,1).
2  edge(1,4).
3  edge(1,2).
4  edge(3,2).
5  edge(4,3).

6  path(U,U).
7  path(U,W) :- edge(U,V), path(V, W).
```

# Aufgabe 3

```

1  edge(1,1).
2  edge(1,4).
3  edge(1,2).
4  edge(3,2).
5  edge(4,3).

6  path(U,U).
7  path(U,W) :- edge(U,V), path(V, W).

?- path(4,X)
{X=4} ?- . % 6

?- path(4,X)
?- edge(4,W), path(W,X). % 7
{W=3} ?- path(3,X). % 5
{X=3} ?- . % 6

?- path(4,X)
?- edge(4,W), path(W,X). % 7
{W=3} ?- path(3,X). % 5
?- edge(3,U), path(U,X). % 7
{U=2} ?- path(2,X). % 4
{X=2} ?- . % 6

```