

PROGRAMMIERUNG

Übung 7: λ -Kalkül

Eric Kunze

`eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

TU Dresden, 24. Mai 2019

Der λ -Kalkül

- **Atome.** x, y
- **Abstraktion.** $\lambda x. t$ ($f(x) = t$, anonyme Funktion)
- **Applikation.** $t_1 \ t_2$
- **Bsp.** $\text{quadriere} = \lambda x. * \ xx \quad \hookrightarrow \quad \langle \text{quadriere} \rangle \langle 2 \rangle = 2 \cdot 2 = 4$

Verabredungen:

- Applikation ist linksassoziativ: $((t_1 \ t_2) \ t_3) = t_1 \ t_2 \ t_3$ für alle $t_1, t_2, t_3 \in \lambda(\Sigma)$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1. (\lambda x_2. (\lambda x_3. t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3. t)$ für alle $t \in \lambda(\Sigma)$
- Applikation vor Abstraktion: $(\lambda x. xy) = (\lambda x. (xy)) \neq ((\lambda x. x)y)$

Aufgabe 1

(a) A mit $A \ t \ s \ u \Rightarrow^* s$: $A = (\lambda x y z . y)$

(b) B mit $B \ t \ s \Rightarrow^* s \ t$: $B = (\lambda x y . y x)$

(c) C mit $C \ C \Rightarrow^* C \ C$: $C = (\lambda x . x x)$, denn: $(\lambda x . \underbrace{x x}_{GV=\emptyset}) (\underbrace{\lambda x . x x}_{FV=\emptyset}) \Rightarrow^\beta (\lambda x . x x)(\lambda x . x x)$

(d) D mit $D \Rightarrow^* D$: $D = (C \ C)$

(e) E mit $E \ E \ t \Rightarrow^* E \ t \ E$: $E = (\lambda x y . x y x)$, denn:

$$(\underbrace{\lambda x y . x y x}_{GV=\{y\}}) (\underbrace{\lambda x y . x y x}_{FV=\emptyset}) t \Rightarrow^\beta (\lambda y . (\lambda x y . x y x) y (\lambda x y . x y x)) t \Rightarrow^\beta \underbrace{(\lambda x y . x y x)}_{=E} t \underbrace{(\lambda x y . x y x)}_{=E}$$

Church-Numerals

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser.

Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen → Church-Numerals

$$\langle 0 \rangle = (\lambda xy . y)$$

$$\langle 1 \rangle = (\lambda xy . xy)$$

$$\langle 2 \rangle = (\lambda xy . x(xy))$$

$$\vdots$$

$$\langle n \rangle = (\lambda xy . \underbrace{x(x \dots (xy) \dots)}_n)$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 \langle pow \rangle 2 &= (\lambda n f z . n (\lambda g x . g(gx)) f z) (\lambda x y . x(xy)) \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x y . x(xy)) (\lambda g x . g(gx)) f z) \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda g x . g(gx)) ((\lambda g x . g(gx)) y))) f z \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda g x . (\lambda g x . g(gx)) y) ((\lambda g x . g(gx)) y) x))) f z \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda g x . g(gx)) y) ((\lambda g x . g(gx)) y) x)) f z \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) ((\lambda x . y(yx)) x))) f z \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) (y(yx)))) f z \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . y (y (y (yx)))) f z) \\
 &\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x . f (f (f (fx)))) z) \quad \Rightarrow^\beta (\lambda f z . f (f (f (fz)))) = \langle 4 \rangle
 \end{aligned}$$

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = (\lambda n m f z . n m f z)$$

Fixpunktkombinator und Rekursion

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossener Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator.** $\langle Y \rangle = (\lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu))) \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ -Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\begin{aligned}\langle true \rangle &= (\lambda xy. x) & \langle false \rangle &= (\lambda xy. y) \\ \langle succ \rangle &= (\lambda z. (\lambda xy. x(zxy))) & \langle pred \rangle \langle 0 \rangle &\Rightarrow^* \langle 0 \rangle \\ \langle succ \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n + 1 \rangle & \langle pred \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n - 1 \rangle\end{aligned}$$

$$\langle ite \rangle s s_1 s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3 – Teil (b)

$$\langle F \rangle = \left(\lambda fxyz. \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle (\langle sub \rangle xy) \right) \left(\langle add \rangle yz \right) \left(\langle succ \rangle (f (\langle pred \rangle x) (\langle succ \rangle y) (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z)) \right) \right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle &= \left(\lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu)) \right) \langle F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left(\lambda u. \langle F \rangle (uu) \right) \left(\lambda u. \langle F \rangle (uu) \right) \quad =: \langle Y_F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Teil (b)

$$\begin{aligned}
 \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle &\Rightarrow^* \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle \underbrace{(\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle))}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle}} (\dots) \\
 &\quad (\langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \underbrace{(\langle \text{pred} \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle}) \underbrace{(\langle \text{succ} \rangle \langle 5 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle}) \underbrace{(\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle})) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle \text{ite} \rangle \underbrace{(\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle))}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle}} \underbrace{(\langle \text{add} \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle}} (\dots)) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle 12 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle 13 \rangle
 \end{aligned}$$