

Aufgabe 2a

Freitag, 22. Mai 2020

Aufgabe 2 (AGS 12.4.21)

- (a) Eine Funktion $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x \cdot x && \text{für } y = 0 \\ g(x, y) &= g(2 \cdot x, y - 1) && \text{für } y \geq 1 \end{aligned}$$

Geben Sie zur Funktion g den zugehörigen λ -Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g(x, y) \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &\equiv (\lambda g x y . (\langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle y) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (\langle \text{mult} \rangle x x) \\ &\quad (g (\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle x) (\langle \text{pred} \rangle y)) \\ &\quad) \\ &\quad) \end{aligned}$$

Aufgabe 2b

Freitag, 22. Mai 2020

(b) Berechnen Sie für den in Aufgabe 2(a) definierten λ -Term $\underline{\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle}$.

$$\langle G \rangle = \left(\lambda gxy. \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle y \right) \left(\langle mult \rangle xx \right) \left(g \left(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left(\langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

Nebenrechnung: $\boxed{\langle Y \rangle \langle G \rangle} = (\lambda z. [\lambda u. z(uu)])(\lambda u. z(uu)) \quad \boxed{\langle G \rangle}$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\beta} (\lambda u. \langle G \rangle (uu))(\lambda u. \langle G \rangle (uu)) =: \boxed{\langle Y_G \rangle} = (t_g \ t_g) \\ &\xrightarrow{\beta} \langle G \rangle ((\lambda u. \langle G \rangle (uu))(\lambda u. \langle G \rangle (uu))) \\ &\quad = \boxed{\langle G \rangle \langle Y_G \rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle &\xrightarrow{*} \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle ite \rangle (\underbrace{\langle iszero \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle}) (\dots) (\langle Y_G \rangle (\underbrace{\langle mult \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle}) (\underbrace{\langle pred \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle})) \\ &\xrightarrow{*} \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle ite \rangle (\underbrace{\langle iszero \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle}) (\dots) (\langle Y_G \rangle (\underbrace{\langle mult \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle}) (\underbrace{\langle pred \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle})) \\ &\xrightarrow{*} \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle ite \rangle (\underbrace{\langle iszero \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle}) (\dots) (\langle Y_G \rangle (\underbrace{\langle mult \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8 \rangle}) (\underbrace{\langle pred \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle})) \\ &\xrightarrow{*} \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\ &\xrightarrow{*} \langle ite \rangle (\underbrace{\langle iszero \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle}) (\underbrace{\langle mult \rangle \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle}) (\dots) \\ &\xrightarrow{*} \langle 64 \rangle \end{aligned}$$