

Strukturelle Induktion

- **Allgemeine Hinweise.** Es müssen **alle** Variablen quantifiziert werden!
- **Was wollen wir?** Wir wollen **zeigen**, dass eine Eigenschaft (ein Prädikat) P für jede Liste $xs :: [a]$ gilt, d.h. dass $P(xs)$ gilt.
- **Induktionsanfang.** Wir zeigen $P(xs)$ für $xs == []$.
Achtung: hat P weitere freie Parameter, dann müssen auch diese quantifiziert werden!
- **Induktionsvoraussetzung.** Wir nehmen an, dass $P(xs')$ für eine Liste $xs' :: [a]$ gilt.
Achtung: freie Parameter!
- **Induktionsschritt.** Nutze die Induktionsvoraussetzung um zu zeigen, dass $P(x : xs')$ für alle $x :: a$ gilt.

Aufgabe 3

- zu zeigen.

$\text{sum} (\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs \quad \text{für alle } xs :: \text{Int}$

Aufgabe 3

- zu zeigen.

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \quad \text{für alle xs} :: \text{Int}$$

- **Induktionsanfang.** Sei $\text{xs} :: [\text{Int}]$ mit $\text{xs} == []$.

$$\text{linke Seite: } \text{sum (foo [])} \stackrel{(2)}{=} \text{sum []} \stackrel{(6)}{=} 0$$

$$\text{rechte Seite: } 2 * \text{sum []} - \text{length []} \stackrel{(10)}{=} 2 * \text{sum []} - 0 \stackrel{(6)}{=} 2 * 0 - 0 = 0$$

Aufgabe 3

- zu zeigen.

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \quad \text{für alle xs} :: \text{Int}$$

- **Induktionsanfang.** Sei $\text{xs} :: [\text{Int}]$ mit $\text{xs} == []$.

$$\text{linke Seite: } \text{sum (foo [])} \stackrel{(2)}{=} \text{sum []} \stackrel{(6)}{=} 0$$

$$\text{rechte Seite: } 2 * \text{sum []} - \text{length []} \stackrel{(10)}{=} 2 * \text{sum []} - 0 \stackrel{(6)}{=} 2 * 0 - 0 = 0$$

- **Induktionsvoraussetzung.** Sei $\text{xs} :: [\text{Int}]$, sodass gilt

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs}$$

Aufgabe 3

- **Induktionsschritt.** Für alle $x :: \text{Int}$ zeigen wir, dass gilt

$$\text{sum (foo (x:xs))} = 2 * \text{sum (x:xs)} - \text{length (x:xs)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{sum (foo (x:xs))} &\stackrel{(3)}{=} \text{sum (x : x : (-1) : foo xs)} \\ &\stackrel{3-(7)}{=} x + x + (-1) + \text{sum (foo xs)} \\ &\stackrel{(IV)}{=} x + x + (-1) + 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \\ &\stackrel{(\text{Komm.})}{=} 2 * x + 2 * \text{sum xs} - 1 - \text{length xs} \\ &\stackrel{(\text{Dist.})}{=} 2 * (x + \text{sum xs}) - (1 + \text{length xs}) \\ &\stackrel{(7)}{=} 2 * \text{sum (x:xs)} - (1 + \text{length xs}) \\ &\stackrel{(11)}{=} 2 * \text{sum (x:xs)} - \text{length (x:xs)} \end{aligned}$$

□