# PROGRAMMIERUNG

## ÜBUNG 5: UNIFIKATION & INDUKTION AUF LISTEN

Eric Kunze
eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 09. Mai 2022

letzte Änderung:
08.05.2022, 14:46

# INHALT

# Unifikation & Unifikationsalgorithmus

## *Aufgabe 1*

# ERINNERUNG: TYPPOLYMORPHIE

- **bisher**: Funktionen mit konkreten Datentypen
  z.B. `length :: [Int] -> Int`
- **Problem**: Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren
  z.B. `length :: [Bool] -> Int` oder `length :: String -> Int`
- **Lösung**: Typvariablen und polymorphe Funktionen
  z.B. `length :: [a] -> Int`

# ERINNERUNG: TYPPOLYMORPHIE

- **bisher**: Funktionen mit konkreten Datentypen
  z.B. `length :: [Int] -> Int`
- **Problem**: Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren
  z.B. `length :: [Bool] -> Int` oder `length :: String -> Int`
- **Lösung**: Typvariablen und polymorphe Funktionen
  z.B. `length :: [a] -> Int`

Bei konkreter Instanziierung wird Typvariable an entsprechenden Typbezeichner gebunden (z.B. `a = Int` oder `a = Bool`).

- Der Aufruf `length [1,5,2,7]` liefert für die Typvariable `a = Int`.
- Der Aufruf `length [True, False, True, True, False]` liefert die Belegung `a = Bool`.
- Der Aufruf `length "hello"` impliziert `a = Char`.

# UNIFIKATION

**Motivation:** Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])
f (...) = ...

g :: (Int, [u]) -> Int
g (...) = ...

h = g . f
```

# UNIFIKATION

**Motivation:** Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])
f (...) = ...

g :: (Int, [u]) -> Int
g (...) = ...

h = g . f
```

Wie müssen die Typvariablen `t` und `u` belegt werden, damit die Funktion `h` wohldefiniert ist, d.h. damit die Ergebnisse aus `f` wirklich in `g` eingesetzt werden dürfen?

# TYPAUSDRUCK $\rightarrow$ TYPTERM

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

**Typausdrücke**

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

**Typterme**

- Übersetzung *trans*: Typausdruck $\rightarrow$ Typterm

# TYPAUSDRUCK $\rightarrow$ TYPTERM

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

**Typausdrücke**

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

**Typterme**

- Übersetzung *trans*: Typausdruck $\rightarrow$ Typterm
- z.B.

$$trans(\texttt{(t , [Char])}) = ()^2(t, [](Char))$$

$$trans(\texttt{(Int , [u])}) = ()^2(Int, [](u))$$

# TYPAUSDRUCK $\rightarrow$ TYPTERM

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

**Typausdrücke**

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

**Typterme**

- Übersetzung *trans*: Typausdruck $\rightarrow$ Typterm
- z.B.

$$trans(\texttt{(t,[Char])}) = ()^2(t, [](Char))$$
$$trans(\texttt{(Int, [u])}) = ()^2(Int, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme $trans(\texttt{(t,[Char])})$ und $trans(\texttt{(Int, [u])})$ unifizierbar sind.

# TYPAUSDRUCK $\rightarrow$ TYPTERM

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

**Typausdrücke**

- `Int`, `Bool`, `Float`, `Char`, `String`
- Typvariablen
- Listen, Tupel, Funktionen

**Typterme**

- Übersetzung *trans*: Typausdruck $\rightarrow$ Typterm
- z.B.

$$trans(\texttt{(t , [Char])}) = ()^2(t, [](Char))$$

$$trans(\texttt{(Int , [u])}) = ()^2(Int, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme $trans(\texttt{(t , [Char])})$ und $trans(\texttt{(Int , [u])})$ unifizierbar sind.

$\rightarrow$ `t = Int` und `u = Char`

# UNIFIKATIONSALGORITHMUS

- **gegeben:** zwei Typ*terme* $t_1$, $t_2$
- **Ziel:** entscheide, ob $t_1$ und $t_2$ unifizierbar sind

Wir notieren die beiden Typterme als Spalte:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} ()^2(t, [](Char)) \\ ()^2(Int, [](u)) \end{pmatrix}$$

Unifikationsalgorithmus erstellt eine Folge von Mengen $M_i$, wobei die $M_{i+1}$ aus $M_i$ hervorgeht, indem eine der vier Regeln angewendet wird.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{bzw.} \qquad M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} ()^2(t, [](Char)) \\ ()^2(Int, [](u)) \end{pmatrix} \right\}$$

# UNIFIKATIONSALGORITHMUS – REGELN

- **Dekomposition.** Sei $\delta \in \Sigma$ ein $k$-stelliger Konstruktor, $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ Terme über Konstruktoren und Variablen.

$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, \ldots, s_k) \\ \delta(t_1, \ldots, t_k) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$

- **Elimination.** Sei $x$ eine Variable !

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \emptyset$$

- **Vertauschung.** Sei $t$ keine Variable.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- **Substitution.** Sei $x$ eine Variable, $t$ keine Variable.
  *Occur Check:* $x$ kommt nicht in $t$ vor
  Dann ersetze in jedem anderen Term die Variable $x$ durch $t$.

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s(x) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s(t) \end{pmatrix}$$

# UNIFIKATIONSALGORITHMUS

**Ende:** keine Regel mehr anwendbar – Entscheidung:

- $t_1$, $t_2$ **unifizierbar**: $M$ ist von der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} u_k \\ t_k \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{matrix} \text{„Variablen“} \\ \text{„Terme ohne Variablen“} \end{matrix}$$

  wobei $u_1, u_2, \ldots, u_k$ paarweise verschiedene Variablen sind und nicht in $t_1, t_2, \ldots, t_k$ vorkommen.
  **allgemeinster Unifikator** $\varphi$:

$$\varphi(u_i) = t_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$
$$\varphi(x) = x \quad \text{für alle nicht vorkommenden Variablen}$$

- $t_1$, $t_2$ sind **nicht unfizierbar**: $M$ hat nicht diese Form und keine Regel ist anwendbar

Weitere Unifikatoren $\psi$ erhält man durch Anwendung einer Substitution $\sigma$, sodass $\psi = \sigma \circ \varphi$.

# OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

**Occur Check:** Gegeben sei ein Termpaar $\binom{x}{t}$, wobei $x$ eine Variable und $t$ ein Typterm sei.

- Kommt $x$ in $t$ vor, dann schlägt der Check fehl.
- Kommt $x$ nicht in $t$ vor, dann ist der Check okay.

# OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

**Occur Check:** Gegeben sei ein Termpaar $\binom{x}{t}$, wobei $x$ eine Variable und $t$ ein Typterm sei.

- Kommt $x$ in $t$ vor, dann schlägt der Check fehl.
- Kommt $x$ nicht in $t$ vor, dann ist der Check okay.

**Beispiel:**

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Fehlschlag, da $x_1$ in $\gamma(x_1)$ vorkommt
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ okay, da $x_1$ nicht in $\gamma(x_2)$ vorkommt

# OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

**Occur Check:** Gegeben sei ein Termpaar $\binom{x}{t}$, wobei $x$ eine Variable und $t$ ein Typterm sei.

- Kommt $x$ in $t$ vor, dann schlägt der Check fehl.
- Kommt $x$ nicht in $t$ vor, dann ist der Check okay.

**Beispiel:**

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Fehlschlag, da $x_1$ in $\gamma(x_1)$ vorkommt
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ okay, da $x_1$ nicht in $\gamma(x_2)$ vorkommt

Was passiert, wenn wir substituieren obwohl der Occur Check fehlschlägt?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(\gamma(x_1)) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(\gamma(\gamma(x_1))) \end{pmatrix}$$

# AUFGABE 1

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(\sigma( & x_1 & ,\alpha), & \sigma( & \gamma(x_3) & ,x_3)) \\ \sigma(\sigma( & \gamma(x_2) & ,\alpha), & \sigma( & x_2 & ,x_3)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma( & x_1 & ,\alpha) \\ \sigma( & \gamma(x_2) & ,\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma( & \gamma(x_3) & ,x_3)) \\ \sigma( & x_2 & ,x_3)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow}{}^{2} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{El.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Vert.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

$x_2$ kommt nicht in $\gamma(x_3)$ vor

$$\overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

# AUFGABE 1

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

# AUFGABE 1

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

(b) **weitere Unifikatoren:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\alpha) \qquad x_3 \mapsto \alpha$$

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

# AUFGABE 1

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \qquad x_3 \mapsto x_3$$

(b) **weitere Unifikatoren:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\alpha) \qquad x_3 \mapsto \alpha$$
$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) \qquad x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \qquad x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$

(c) **Fehlschlag beim occur-check:**

Alphabet: $\Sigma = \left\{\gamma^{(1)}\right\}$

$$t_1 = x_1$$
$$t_2 = \gamma(x_1)$$

# AUFGABE 1 — TEIL (D)

$t_1 =$ `(a , [a])`

$t_2 =$ `(Int , [Double])`

$t_3 =$ `(b , c)`

# AUFGABE 1 — TEIL (D)

$$t_1 = \texttt{(a , [a])}$$

$$t_2 = \texttt{(Int , [Double])}$$

$$t_3 = \texttt{(b , c)}$$

- $t_1$ und $t_2$ sind
- $t_1$ und $t_3$ sind
- $t_2$ und $t_3$ sind

# AUFGABE 1 — TEIL (D)

$$t_1 = \texttt{(a , [a])}$$

$$t_2 = \texttt{(Int , [Double])}$$

$$t_3 = \texttt{(b , c)}$$

- $t_1$ und $t_2$ sind *nicht* unifizierbar
- $t_1$ und $t_3$ sind
- $t_2$ und $t_3$ sind

# AUFGABE 1 — TEIL (D)

$$t_1 = \texttt{(a , [a])}$$
$$t_2 = \texttt{(Int , [Double])}$$
$$t_3 = \texttt{(b , c)}$$

- $t_1$ und $t_2$ sind *nicht* unifizierbar
- $t_1$ und $t_3$ sind unifizierbar mit $\texttt{a} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{b} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{c} \mapsto \texttt{[a]}$
- $t_2$ und $t_3$ sind

# AUFGABE 1 — TEIL (D)

$$t_1 = \texttt{(a , [a])}$$
$$t_2 = \texttt{(Int , [Double])}$$
$$t_3 = \texttt{(b , c)}$$

- $t_1$ und $t_2$ sind *nicht* unifizierbar
- $t_1$ und $t_3$ sind unifizierbar mit $\texttt{a} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{b} \mapsto \texttt{a}$, $\texttt{c} \mapsto \texttt{[a]}$
- $t_2$ und $t_3$ sind unifizierbar mit $\texttt{b} \mapsto \texttt{Int}$, $\texttt{c} \mapsto \texttt{[Double]}$

# Induktionsbeweise

## *Aufgaben 2*

# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION AUF $\mathbb{N}$

**Definition:** natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots\}$

Basisfall: $0 \in \mathbb{N}$

Rekursionsfall: $x + 1 \in \mathbb{N}$ für $x \in \mathbb{N}$

**Beweis von Eigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat $P$

| zu zeigen: | für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $P(x)$ |
|---|---|

**vollständige Induktion:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P(x)$ für $x = 0$
- Induktionsvoraussetzung:
  Sei $x \in \mathbb{N}$, sodass $P(x)$ gilt. $P(x)$ gilt noch nicht für *alle* $x \in \mathbb{N}$
- Induktionsschritt:
  zeige $P(x + 1)$ unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen `xs`

Basisfall: $\texttt{xs} = \texttt{[]}$

Rekursionsfall: $\texttt{xs} = \texttt{(y:ys)}$ für $\texttt{ys :: [a]}$

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen `xs`

Basisfall: `xs` $=$ `[]`

Rekursionsfall: `xs` $=$ `(y:ys)` für `ys :: [a]`

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft $=$ Prädikat $P$

| zu zeigen: | für alle `xs :: [a]` gilt $P$(`xs`) |
|---|---|

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen `xs`

Basisfall: `xs` $=$ `[]`

Rekursionsfall: `xs` $=$ `(y:ys)` für `ys :: [a]`

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft $=$ Prädikat $P$

| zu zeigen: | für alle `xs :: [a]` gilt $P$(`xs`) |
|---|---|

**Induktion auf Listen:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P$(`xs`) für `xs == []`

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen `xs`

Basisfall: `xs` $=$ `[]`

Rekursionsfall: `xs` $=$ `(y:ys)` für `ys :: [a]`

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft $=$ Prädikat $P$

| zu zeigen: | für alle `xs :: [a]` gilt $P$(`xs`) |
|---|---|

**Induktion auf Listen:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P$(`xs`) für `xs == []`
- Induktionsvoraussetzung:
  Sei `xs :: [a]` eine Liste für die $P$(`xs`) gilt.

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen `xs`

Basisfall: `xs = []`

Rekursionsfall: `xs = (y:ys)` für `ys :: [a]`

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat $P$

| zu zeigen: für alle `xs :: [a]` gilt $P$(`xs`) |
|---|

**Induktion auf Listen:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P$(`xs`) für `xs == []`
- Induktionsvoraussetzung:
  Sei `xs :: [a]` eine Liste für die $P$(`xs`) gilt.
- Induktionsschritt:
  zeige $P$(`x:xs`) für alle `x :: a` unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen `xs`

Basisfall: `xs = []`

Rekursionsfall: `xs = (y:ys)` für `ys :: [a]`

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat $P$

| zu zeigen: | für alle `xs :: [a]` gilt $P$(`xs`) |
|---|---|

**Induktion auf Listen:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P$(`xs`) für `xs == []`
- Induktionsvoraussetzung:
  Sei `xs :: [a]` eine Liste für die $P$(`xs`) gilt.
- Induktionsschritt:
  zeige $P$(`x:xs`) für alle `x :: a` unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

*Allgemeiner Hinweis:* Es müssen immer alle Variablen quantifiziert werden!

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l,r :: BinTree a`

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l,r :: BinTree a`

| zu zeigen: | für alle `t :: BinTree a` gilt $P(\texttt{t})$ |
|---|---|

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l,r :: BinTree a`

| zu zeigen: | für alle `t :: BinTree a` gilt $P(\texttt{t})$ |
|---|---|

**strukturelle Induktion:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P(\texttt{t})$ für `t == Nil` oder `t == Leaf x` für alle `x :: a`

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l,r :: BinTree a`

| zu zeigen: | für alle `t :: BinTree a` gilt $P(\texttt{t})$ |
|---|---|

**strukturelle Induktion:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P(\texttt{t})$ für `t == Nil` oder `t == Leaf x` für alle `x :: a`
- Induktionsvoraussetzung:
  Seien `l, r :: BinTree a` zwei Bäume, sodass $P(\texttt{l})$ und $P(\texttt{r})$ gilt.

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l,r :: BinTree a`

| zu zeigen: | für alle `t :: BinTree a` gilt $P(\texttt{t})$ |
|---|---|

**strukturelle Induktion:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P(\texttt{t})$ für `t == Nil` oder `t == Leaf x` für alle `x :: a`
- Induktionsvoraussetzung:
  Seien `l, r :: BinTree a` zwei Bäume, sodass $P(\texttt{l})$ und $P(\texttt{r})$ gilt.
- Induktionsschritt:
  zeige $P(\texttt{Branch x l r})$ für alle `x :: a` unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l,r :: BinTree a`

| zu zeigen: | für alle `t :: BinTree a` gilt $P(\texttt{t})$ |
|---|---|

**strukturelle Induktion:**

- Induktionsanfang:
  zeige $P(\texttt{t})$ für `t == Nil` oder `t == Leaf x` für alle `x :: a`
- Induktionsvoraussetzung:
  Seien `l, r :: BinTree a` zwei Bäume, sodass $P(\texttt{l})$ und $P(\texttt{r})$ gilt.
- Induktionsschritt:
  zeige $P(\texttt{Branch x l r})$ für alle `x :: a` unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

*Allgemeiner Hinweis:* Es müssen immer alle Variablen quantifiziert werden!

# FEHLERQUELLEN

- kein Induktionsprinzip
- IV wird im Induktionsschritt nicht verwendet
- fehlende Quantifizierung (nur Gleichungen bringen kaum Punkte)
- *Missachtung freier Variablen*

# FEHLERQUELLEN

- kein Induktionsprinzip
- IV wird im Induktionsschritt nicht verwendet
- fehlende Quantifizierung (nur Gleichungen bringen kaum Punkte)
- *Missachtung freier Variablen*
- zu beweisende Eigenschaft *P* wird für `xs` angenommen, um sie dann im Induktionsschritt nochmal für `xs` zu beweisen — eine Tautologie
- Annahme, dass *P* bereits für alle Listen gilt, um es dann für `x:xs` nochmal zu zeigen

# AUFGABE 2

Zu zeigen ist die Gleichung

$$\texttt{sum (foo xs) = 2 * sum xs - length xs} \quad \text{für alle } \texttt{xs :: Int}$$

mittels Induktion über Listen.

**Induktionsanfang:** Sei `xs == []`.

linke Seite:

$$\texttt{sum (foo [])} \overset{(2)}{=} \texttt{sum []} \overset{(6)}{=} \texttt{0}$$

rechte Seite:

$$\texttt{2 * sum [] - length []} \overset{(10)}{=} \texttt{2 * sum [] - 0} \overset{(6)}{=} \texttt{2 * 0 - 0 = 0}$$

**Induktionsvoraussetzung:** Sei `xs :: [Int]`, sodass

$$\texttt{sum (foo xs) = 2 * sum xs - length xs}$$

gilt.

# AUFGABE 2 (FORTSETZUNG)

**Induktionsschritt:** Sei `x :: Int`. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\texttt{sum (foo (x:xs))} &\overset{(3)}{=} \texttt{sum (x : x : (-1) : foo xs)} \\
&\overset{3\cdot(7)}{=} \texttt{x + x + (-1) + sum (foo xs)} \\
&\overset{(IV)}{=} \texttt{x + x + (-1) + 2 * sum xs - length xs} \\
&\overset{(Komm.)}{=} \texttt{2 * x + 2 * sum xs - 1 - length xs)} \\
&\overset{(Dist.)}{=} \texttt{2 * (x + sum xs) - (1 + length xs)} \\
&\overset{(7)}{=} \texttt{2 * sum (x:xs) - (1 + length xs)} \\
&\overset{(11)}{=} \texttt{2 * sum (x:xs) - length (x:xs)}
\end{aligned}
$$

# ENDE

**Fragen?**