TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 7: λ-KALKÜL (TEIL 2)

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 23. Mai 2022

letzte Änderung:
23.05.2022, 10:26

Der λ–Kalkül

Programmieren mit λ’s

DER λ-KALKÜL

Atome	x, y	
Abstraktion	$(\lambda x.t)$	$(f(x) = t$, anonyme Funktion)
Applikation	$(t_1 \;\; t_2)$	

Verabredungen:

- Applikation ist *linksassoziativ*: $((t_1\ t_2)\ t_3) = t_1\ t_2\ t_3$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$
- Applikation vor Abstraktion

Rechenregeln:

- β-Reduktion:

$$\mathrm{GV}(t) \cap \mathrm{FV}(s) = \emptyset \quad \rightsquigarrow (\lambda x.t)\ s \ \Rightarrow_\beta \ t[x/s]$$

- α-Konversion:

$$z \notin \mathrm{GV}(t) \cup \mathrm{FV}(t) \quad \rightsquigarrow \quad (\lambda x.t) \ \Rightarrow_\alpha \ \lambda z.t[x/z]$$

CHURCH-NUMERALS

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$
\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy\ .\ y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy\ .\ xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy\ .\ x(xy)) \\
&\ \vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy\ .\ \underbrace{x(x \ldots (x}_{n}\, y) \ldots))
\end{aligned}
$$

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$
\begin{aligned}
\langle true \rangle &= (\lambda xy.x) & \langle false \rangle &= (\lambda xy.y) \\
\langle succ \rangle &= (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) & \langle pred \rangle \langle 0 \rangle &\Rightarrow^* \langle 0 \rangle \\
\langle succ \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n+1 \rangle & \langle pred \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n-1 \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

Gesucht ist die Normalform von $(\lambda fx.ffx)\ (\lambda y.x)\ z$.

AUFGABE 1 – TEIL (A)

Gesucht ist die Normalform von $(\lambda fx.ffx)\ (\lambda y.x)\ z$.

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f\ \underbrace{x.f\ f\ x}_{\text{GV}=\{x\}})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\text{FV}=\{x\}})\ z \\
\Rightarrow_\alpha\quad & (\lambda f\ \underbrace{x_1.f\ f\ x_1}_{\text{GV}=\{x_1\}})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\text{FV}=\{x\}})\ z \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda x_1.(\lambda y.\underbrace{x}_{\text{GV}=\emptyset})\ (\underbrace{\lambda y.x}_{\text{FV}=\{x\}})\ x_1)\ z \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda x_1.\underbrace{xx_1}_{\text{GV}=\emptyset})\ \underbrace{z}_{\text{FV}=\{z\}} \\
\Rightarrow_\beta\quad & xz
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda fxyz\,.\, \langle ite \rangle \; \Big(\langle iszero \rangle \; (\langle sub \rangle xy) \Big) \\ \Big(\langle add \rangle yz \Big) \\ \Big(\langle succ \rangle \; (f \; (\langle pred \rangle x) \; (\langle succ \rangle y) \; (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z)) \Big) \Bigg)$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Big(\lambda fxyz \,.\, \langle ite \rangle \,\Big(\langle iszero \rangle \,(\langle sub \rangle xy)\Big)$$
$$\Big(\langle add \rangle yz\Big)$$
$$\Big(\langle succ \rangle \,(f\,(\langle pred \rangle x)\,(\langle succ \rangle y)\,(\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z))\Big)\Big)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y \rangle \langle F \rangle = \;& \Big(\lambda z.\, (\lambda u.z(uu))\, (\lambda u.z(uu))\Big)\, \langle F \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \;& \Big(\lambda u.\langle F \rangle (uu)\Big)\, \Big(\lambda u.\langle F \rangle (uu)\Big) \qquad =: \langle Y_F \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} \;& \langle F \rangle \langle Y_F \rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle})\ (\ldots) \\
&\qquad\qquad (\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle(\underbrace{\langle pred\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5\rangle})(\underbrace{\langle succ\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle})(\underbrace{\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6\rangle}))) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle})\ (\underbrace{\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 12\rangle})\ (\ldots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

Gegeben sei folgende Haskell-Funktion:

```
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Geben Sie einen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle \mathrm{g}\ x\ y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$
\begin{aligned}
\langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy\,.\, \Big(&\langle ite \rangle\ (\langle iszero \rangle\ x) \\
&\quad (\langle mult \rangle\ \langle 2 \rangle\ (\langle succ \rangle y)\ ) \\
&\quad \Big(\langle ite \rangle\ (\langle iszero \rangle\ y) \\
&\qquad\quad (\langle mult \rangle\ \langle 2 \rangle\ (\langle succ \rangle x)) \\
&\qquad\quad (\langle add \rangle\ \langle 4 \rangle\ \ g\ (\langle pred \rangle x\ \langle pred \rangle y)\ ) \\
&\quad \Big) \\
&\Big) \\
\Bigg)
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda fxy\ .\ \langle ite \rangle \Big(\langle iszero \rangle\ x\Big)$$

$$y$$

$$\Big(\langle add \rangle\ x\ \big(f\ (\langle pred \rangle x)\ (\langle add \rangle x\ y)\big)\Big)\Bigg)$$

Geben Sei eine Haskell-Funktion `f` an, sodass `f` $= \langle Y \rangle \langle F \rangle$.

AUFGABE 2 – TEIL (A)

Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F \rangle = \Big(\lambda fxy \,.\, \langle ite \rangle \; (\langle iszero \rangle \; x) \\ y \\ (\langle add \rangle \; x \; (f \; (\langle pred \rangle x) \; (\langle add \rangle x \; y)))\Big)$$

Geben Sei eine Haskell-Funktion `f` an, sodass $\texttt{f} = \langle Y \rangle \langle F \rangle$.

```
f :: Int -> Int -> Int
f 0 y = y
f x y = x + f (x - 1) (x + y)
```

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle F\rangle = \Big(\lambda fxy\,.\,\langle ite\rangle\,\big(\langle iszero\rangle\; x\big)$$
$$y$$
$$\big(\langle add\rangle\; x\; (f\; (\langle pred\rangle x)\; (\langle add\rangle x\; y))\big)\Big)$$

Gesucht: Normalform von $\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 1\rangle\langle 4\rangle$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Big(\lambda fxy\ .\ \langle ite \rangle\ \big(\langle iszero \rangle\ x\big)$$

$$y$$

$$\big(\langle add \rangle\ x\ (f\ (\langle pred \rangle x)\ (\langle add \rangle x\ y))\big)\Big)$$

Gesucht: Normalform von $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y \rangle \langle F \rangle = &\ \big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\big)\ \langle F \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} &\ \big(\lambda u.\langle F \rangle(uu)\big)\ \big(\lambda u.\langle F \rangle(uu)\big) \qquad =: \langle Y_F \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} &\ \langle F \rangle \langle Y_F \rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 1\rangle\langle 4\rangle \\
\Rightarrow^* \ & \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 1\rangle\langle 4\rangle \\
\Rightarrow^* \ & \langle ite\rangle \ \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle \ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big) \ \Big(\ldots\Big) \ \Big(\langle add\rangle \ \langle 1\rangle \ (\langle Y_F\rangle \ (\underbrace{\langle pred\rangle \ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}) \ (\underbrace{\langle add\rangle \ \langle 1\rangle \ \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5\rangle}))\Big) \\
\Rightarrow^* \ & \langle add\rangle \ \langle 1\rangle \ \Big(\langle F\rangle \ \langle Y_F\rangle \ \langle 0\rangle \ \langle 5\rangle\Big) \\
\Rightarrow^* \ & \langle ite\rangle \ \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle \ \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\Big) \ \langle 5\rangle \ \Big(\ldots\Big) \\
\Rightarrow^* \ & \langle add\rangle \ \langle 1\rangle \ \langle 5\rangle \\
\Rightarrow^* \ & \langle 6\rangle
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7 (Sommer 2021)

Aufgabe 12.4.21 aus der Aufgabensammlung

AUFGABE 12.4.21 – TEIL (A)

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := \begin{cases} x \cdot x & \text{für } y = 0 \\ g(2 \cdot x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G \rangle = \Big(\lambda gxy \,.\, \Big(\langle ite \rangle \, \big(\langle iszero \rangle \; y\big) \, \big(\langle mult \rangle \; x \; x\big) \, \Big(g \; \big(\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; x\big) \; \big(\langle pred \rangle \; y\big)\Big)\Big)\Big)$$

AUFGABE 12.4.21 – TEIL (B)

$$\langle G \rangle = \left(\lambda\, gxy\, .\, \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle\ y \right) \left(\langle mult \rangle\ x\ x \right) \left(g\ \left(\langle mult \rangle\ \langle 2 \rangle\ x \right)\ \left(\langle pred \rangle\ y \right) \right) \right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}
\langle Y \rangle \langle G \rangle = &\ \left(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu)) \right) \langle G \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} &\ \left(\lambda u.\langle G \rangle (uu) \right) \left(\lambda u.\langle G \rangle (uu) \right) \qquad =: \langle Y_G \rangle \\
\Rightarrow^{\beta} &\ \langle G \rangle \langle Y_G \rangle
\end{aligned}$$

AUFGABE 12.4.21 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle\langle G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big)\ \Big(\dots\Big)\ \Big(\langle Y_G\rangle\ \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\big)\ \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2\rangle}\big) \quad \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big)\ \Big(\dots\Big)\ \Big(\langle Y_G\rangle\ \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4\rangle}\big)\ \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1\rangle}\big)\Big) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 4\rangle\ \langle 1\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle false\rangle}\Big)\ \Big(\dots\Big)\ \Big(\langle Y_G\rangle\ \big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8\rangle}\big)\ \big(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}\big)\Big) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 0\rangle \\
\Rightarrow^* & \langle ite\rangle \Big(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^* \langle true\rangle}\Big)\ \Big(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 8\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64\rangle}\Big)\ \Big(\dots\Big) \qquad \Rightarrow^* \langle 64\rangle
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7 (Sommer 2020)

Aufgabe 12.4.36 aus der Aufgabensammlung

AUFGABE 12.4.36

$$
\begin{aligned}
\langle pow\rangle\langle 2\rangle = {} & \Big(\lambda nfz\,.\,n\,(\lambda gx.g(gx))\;fz\Big)\;\Big(\lambda xy\,.\,x(xy))\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda xy\,.\,x(xy))\Big)\;\Big(\lambda gx.g(gx)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda y\,.\,\Big(\lambda gx.g(gx)\Big)\;\Big((\lambda gx.g(gx))\;y\Big)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda y\,.\,\Big(\lambda x.\Big((\lambda gx.g(gx))\;y\Big)\;\Big(((\lambda gx.g(gx))\;y)\;x\Big)\;\Big)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\Big((\lambda gx.g(gx))\;y\Big)\;\Big(((\lambda gx.g(gx))\;y)\;x\Big)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\Big(\lambda x.y(yx)\Big)\;\Big((\lambda x.y(yx))\;x\Big)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.\Big(\lambda x.y(yx)\Big)\;\Big(y(yx)\Big)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda yx\,.y\;\Big(y\;(y\;(yx))\Big)\Big)\;f\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,\Big(\lambda x\,.f\;\Big(f\;(f\;(f\,x))\Big)\Big)\;z\Big) \\
\Rightarrow^{\beta}\; & \Big(\lambda fz\,.\,f\;(f\;(f\;(fz)\;)\;)\Big) = \langle 4\rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 12.4.36

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = \left(\lambda n \boldsymbol{m} f z . n \boldsymbol{m} f z \right)$$