TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 7: λ-KALKÜL (TEIL 2)

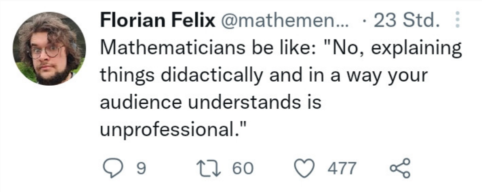
Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 25. Mai 2022

letzte Änderung:
29.05.2022, 17:22

LEHRVERANSTALTUNGSEVALUATION



https://tud.link/uqo3

Originallink: `https://befragung.zqa.tu-dresden.de/uz/de/sl/7086HheP0Rky`

Der λ–Kalkül

Programmieren mit λ's

DER λ-KALKÜL

Atome	x, y	
Abstraktion	$(\lambda x.t)$	$(f(x) = t$, anonyme Funktion)
Applikation	$(t_1 \;\; t_2)$	

Verabredungen:

- Applikation ist *linksassoziativ*: $((t_1\, t_2)\, t_3) = t_1\, t_2\, t_3$
- mehrfache Abstraktion: $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\lambda x_3.t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3.t)$
- Applikation vor Abstraktion

Rechenregeln:

- β-Reduktion:

$$\mathrm{GV}(t) \cap \mathrm{FV}(s) = \emptyset \quad \rightsquigarrow (\lambda x.t)\; s \;\; \Rightarrow_\beta \;\; t[x/s]$$

- α-Konversion:

$$z \notin \mathrm{GV}(t) \cup \mathrm{FV}(t) \quad \rightsquigarrow \quad (\lambda x.t) \;\; \Rightarrow_\alpha \;\; \lambda z.t[x/z]$$

CHURCH-NUMERALS

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h. $\Sigma = \emptyset$), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

Darstellung der natürlichen Zahlen: *Church-Numerals*

$$
\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= (\lambda xy \;.\; y) \\
\langle 1 \rangle &= (\lambda xy \;.\; xy) \\
\langle 2 \rangle &= (\lambda xy \;.\; x(xy)) \\
&\vdots \\
\langle n \rangle &= (\lambda xy \;.\; \underbrace{x(x \ldots (x}_{n}\, y) \ldots))
\end{aligned}
$$

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.

PROGRAMMIEREN IM λ-KALKÜL

- Ein $t \in \Sigma(\lambda)$ heißt **geschlossener Term**, falls $FV(t) = \emptyset$. Ein geschlossender Term heißt auch **Kombinator**.
- **Fixpunktkombinator:** $\boxed{\langle Y \rangle = \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\Big)} \in \lambda(\emptyset)$
- Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- weitere definierte λ-Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\begin{aligned} \langle true \rangle &= (\lambda xy.x) & \langle false \rangle &= (\lambda xy.y) \\ \langle succ \rangle &= (\lambda z.(\lambda xy.x(zxy))) & \langle pred \rangle \langle 0 \rangle &\Rightarrow^* \langle 0 \rangle \\ \langle succ \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n+1 \rangle & \langle pred \rangle \langle n \rangle &\Rightarrow^* \langle n-1 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle ite \rangle\ s\ s_1\ s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

Gesucht ist die Normalform von $(\lambda fx.ffx)\ (\lambda y.x)\ z$.

AUFGABE 1 – TEIL (A)

Gesucht ist die Normalform von $(\lambda fx.ffx)\ (\lambda y.x)\ z$.

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f\ \underbrace{x.f\ f\ x}_{\text{GV}=\{x\}})\ (\ \underbrace{\lambda y.x}_{\text{FV}=\{x\}}\ )\ z \\
\Rightarrow_\alpha\quad & (\lambda f\ \underbrace{x_1.f\ f\ x_1}_{\text{GV}=\{x_1\}})\ (\ \underbrace{\lambda y.x}_{\text{FV}=\{x\}}\ )\ z \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda x_1.(\lambda y.\ \underbrace{x}_{\text{GV}=\emptyset}\ )\ (\ \underbrace{\lambda y.x}_{\text{FV}=\{x\}}\ )\ x_1)\ z \\
\Rightarrow_\beta\quad & (\lambda x_1.\ \underbrace{xx_1}_{\text{GV}=\emptyset}\ )\ \ \underbrace{z}_{\text{FV}=\{z\}} \\
\Rightarrow_\beta\quad & xz
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda fxyz \,.\, \langle ite \rangle \, \Big(\langle iszero \rangle \, (\langle sub \rangle xy) \Big)$$
$$\Big(\langle add \rangle yz \Big)$$
$$\Big(\langle succ \rangle \, (f \, (\langle pred \rangle x) \, (\langle succ \rangle y) \, (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z)) \Big) \Bigg)$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}\langle F \rangle = \Big(\lambda fxyz\,.\,\langle ite\rangle\ &\big(\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle xy)\big)\\ &\big(\langle add\rangle yz\big)\\ &\big(\langle succ\rangle\ (f\ (\langle pred\rangle x)\ (\langle succ\rangle y)\ (\langle mult\rangle\langle 2\rangle z))\big)\Big)\end{aligned}$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned}\langle Y\rangle\langle F\rangle = {} & \big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu))\big)\ \langle F\rangle\\ \Rightarrow^{\beta}\ & \big(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\big)\ \big(\lambda u.\langle F\rangle(uu)\big) \qquad =: \langle Y_F\rangle\\ \Rightarrow^{\beta}\ & \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\end{aligned}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
\langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle &\Rightarrow^* \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle\langle 3\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle\ (\langle sub\rangle\langle 6\rangle\langle 5\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle})\ (\ldots) \\
&\qquad\quad (\langle succ\rangle(\langle Y_F\rangle(\underbrace{\langle pred\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 5\rangle})(\underbrace{\langle succ\rangle\langle 5\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle})(\underbrace{\langle mult\rangle\langle 2\rangle\langle 3\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 6\rangle}))) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ (\ \langle ite\rangle\ (\underbrace{\langle iszero\rangle(\langle sub\rangle\langle 5\rangle\langle 6\rangle)}_{\Rightarrow^*\langle true\rangle})\ (\underbrace{\langle add\rangle\langle 6\rangle\langle 6\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 12\rangle})\ (\ldots)\ ) \\
&\Rightarrow^* \langle succ\rangle\ \langle 12\rangle \\
&\Rightarrow^* \langle 13\rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 1 – TEIL (C)

Gegeben sei folgende Haskell-Funktion:

```haskell
g :: Int -> Int -> Int
g 0 y = 2 * (y + 1)
g x 0 = 2 * (x + 1)
g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Geben Sie einen λ-Term $\langle G \rangle$ an, so dass $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle \mathrm{g}\ x\ y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$
\begin{aligned}
\langle G \rangle = \Bigg(\lambda gxy \,.\, \Big(& \langle ite \rangle \, (\langle iszero \rangle \; x) \\
& \quad (\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle y) \,) \\
& \quad \Big(\langle ite \rangle \, (\langle iszero \rangle \; y) \\
& \qquad \big(\langle mult \rangle \; \langle 2 \rangle \; (\langle succ \rangle x) \big) \\
& \qquad \big(\langle add \rangle \; \langle 4 \rangle \;\; g \; (\langle pred \rangle x \; \langle pred \rangle y) \,\big) \\
& \quad \Big) \\
\Big) & \\
\Bigg) &
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 2

AUFGABE 2 – TEIL (A)

Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F \rangle = \left(\lambda fxy \,.\, \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle \; x \right) \right.$$
$$y$$
$$\left. \left(\langle add \rangle \; x \left(f \; (\langle pred \rangle x) \; (\langle add \rangle x \; y) \right) \right) \right)$$

Geben Sei eine Haskell-Funktion `f` an, sodass `f` $= \langle Y \rangle \langle F \rangle$.

AUFGABE 2 – TEIL (A)

Gegeben sei der λ-Term

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda fxy\;.\;\langle ite \rangle\;\big(\langle iszero \rangle\;x\big)\\ y\\ \big(\langle add \rangle\;x\;(f\;(\langle pred \rangle x)\;(\langle add \rangle x\;y))\big)\Bigg)$$

Geben Sei eine Haskell-Funktion `f` an, sodass `f` $= \langle Y \rangle \langle F \rangle$.

```haskell
f :: Int -> Int -> Int
f 0 y = y
f x y = x + f (x - 1) (x + y)
```

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda fxy \,.\, \langle ite \rangle \Big(\langle iszero \rangle\ x\Big)$$

$$y$$

$$\Big(\langle add \rangle\ x\ \big(f\ (\langle pred \rangle x)\ (\langle add \rangle x\ y)\big)\Big)\Bigg)$$

Gesucht: Normalform von $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda fxy \,.\, \langle ite \rangle \, \Big(\langle iszero \rangle \; x \Big)$$

$$y$$

$$\Big(\langle add \rangle \; x \; (f \; (\langle pred \rangle x) \; (\langle add \rangle x \; y)) \Big) \Bigg)$$

Gesucht: Normalform von $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle = & \; \Big(\lambda z. \; (\lambda u.z(uu)) \; (\lambda u.z(uu)) \Big) \; \langle F \rangle \\ \Rightarrow^{\beta} & \; \Big(\lambda u.\langle F \rangle (uu) \Big) \Big(\lambda u.\langle F \rangle (uu) \Big) \qquad =: \langle Y_F \rangle \\ \Rightarrow^{\beta} & \; \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$

AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle\langle F\rangle\langle 1\rangle\langle 4\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle F\rangle\langle Y_F\rangle\langle 1\rangle\langle 4\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle \mathit{ite}\rangle \left(\underbrace{\langle \mathit{iszero}\rangle \; \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle \mathit{false}\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle \mathit{add}\rangle \; \langle 1\rangle \; (\langle Y_F\rangle \; (\underbrace{\langle \mathit{pred}\rangle \; \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle}) \; (\underbrace{\langle \mathit{add}\rangle \; \langle 1\rangle \; \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5\rangle}))\right) \\
\Rightarrow^* \; & \langle \mathit{add}\rangle \; \langle 1\rangle \; \left(\langle F\rangle \; \langle Y_F\rangle \; \langle 0\rangle \; \langle 5\rangle\right) \\
\Rightarrow^* \; & \langle \mathit{add}\rangle \; \langle 1\rangle \; \left(\langle \mathit{ite}\rangle \; \left(\underbrace{\langle \mathit{iszero}\rangle \; \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^* \langle \mathit{true}\rangle}\right) \; \langle 5\rangle \; \left(\ldots\right)\right) \\
\Rightarrow^* \; & \langle \mathit{add}\rangle \; \langle 1\rangle \; \langle 5\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle 6\rangle
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7 (Sommer 2021)

Aufgabe 12.4.21 aus der Aufgabensammlung

AUFGABE 12.4.21 – TEIL (A)

$$g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x,y) := \begin{cases} x\cdot x & \text{für } y = 0 \\ g(2\cdot x, y-1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G\rangle = \Bigg(\lambda gxy\;.\;\Bigg(\langle ite\rangle \Big(\langle iszero\rangle\; y\Big) \Big(\langle mult\rangle\; x\; x\Big) \Big(g\; \big(\langle mult\rangle\; \langle 2\rangle\; x\big)\; \big(\langle pred\rangle\; y\big)\Big) \Bigg) \Bigg)$$

AUFGABE 12.4.21 – TEIL (B)

$$\langle G \rangle = \left(\lambda\, gxy\, .\, \langle ite \rangle \left(\langle iszero \rangle\ y \right) \left(\langle mult \rangle\ x\, x \right) \left(g\ \left(\langle mult \rangle\ \langle 2 \rangle\ x \right)\ \left(\langle pred \rangle\ y \right) \right) \right)$$

Nebenrechnung: Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle G \rangle = &\ \Big(\lambda z.\ (\lambda u.z(uu))\ (\lambda u.z(uu)) \Big)\ \langle G \rangle \\ \Rightarrow^{\beta} &\ \Big(\lambda u.\langle G \rangle (uu) \Big) \Big(\lambda u.\langle G \rangle (uu) \Big) \qquad =: \langle Y_G \rangle \\ \Rightarrow^{\beta} &\ \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \end{aligned}$$

AUFGABE 12.4.21 – TEIL (B)

$$
\begin{aligned}
&\langle Y\rangle\langle G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* &\langle G\rangle\langle Y_G\rangle\langle 1\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* &\langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle Y_G\rangle \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 2\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 3\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 2\rangle}\right) \quad \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle \\
\Rightarrow^* &\langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle Y_G\rangle \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 4\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 2\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 1\rangle}\right)\right) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 4\rangle\ \langle 1\rangle \\
\Rightarrow^* &\langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^*\langle false\rangle}\right) \left(\ldots\right) \left(\langle Y_G\rangle \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 2\rangle\ \langle 4\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 8\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle pred\rangle\ \langle 1\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 0\rangle}\right)\right) \Rightarrow^* \langle G\rangle\ \langle Y_G\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 0\rangle \\
\Rightarrow^* &\langle ite\rangle \left(\underbrace{\langle iszero\rangle\ \langle 0\rangle}_{\Rightarrow^*\langle true\rangle}\right) \left(\underbrace{\langle mult\rangle\ \langle 8\rangle\ \langle 8\rangle}_{\Rightarrow^*\langle 64\rangle}\right) \left(\ldots\right) \qquad\qquad \Rightarrow^* \langle 64\rangle
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 7 (Sommer 2020)

Aufgabe 12.4.36 aus der Aufgabensammlung

AUFGABE 12.4.36

$$
\begin{aligned}
\langle pow \rangle \langle 2 \rangle = {} & \Big(\lambda nfz \,.\, n\, (\lambda gx.g(gx))\; fz\Big)\; \Big(\lambda xy \,.\, x(xy)\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \big(\lambda xy \,.\, x(xy)\big)\; \big(\lambda gx.g(gx)\big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda y \,.\, \big(\lambda gx.g(gx)\big)\; \big((\lambda gx.g(gx))\; y\big)\Big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda y \,.\, \Big(\lambda x.\big((\lambda gx.g(gx))\; y\big)\; \big(((\lambda gx.g(gx))\; y)\; x\big)\Big)\Big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda yx \,.\big((\lambda gx.g(gx))\; y\big)\; \big(((\lambda gx.g(gx))\; y)\; x\big)\Big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda yx \,.\big(\lambda x.y(yx)\big)\; \big((\lambda x.y(yx))\; x\big)\Big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda yx \,.\big(\lambda x.y(yx)\big)\; \big(y(yx)\big)\Big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda yx \,.y\; \big(y\; (y\; (yx))\big)\Big)\; f\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, \Big(\lambda x \,.f\; \big(f\; (f\; (f x))\big)\Big)\; z\Big)\\
\Rightarrow^{\beta} {} & \Big(\lambda fz \,.\, f\; (f\; (f\; (fz)\,)\,)\Big) = \langle 4 \rangle
\end{aligned}
$$

AUFGABE 12.4.36

Teil (b)

$$f(n) = s^n$$

Teil (c)

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = \left(\lambda n \boldsymbol{m} f z . n \boldsymbol{m} f z \right)$$