

# PROGRAMMIERUNG

## ÜBUNG 5: UNIFIKATION & INDUKTION AUF LISTEN

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 11. Mai 2022

letzte Änderung:  
11.05.2022, 09:32

1. Funktionale Programmierung
  - 1.1 Einführung in Haskell
  - 1.2 Listen & Algebraische Datentypen
  - 1.3 Funktionen höherer Ordnung
  - 1.4 Typpolymorphie & **Unifikation**
  - 1.5 **Beweis von Programmeigenschaften**
  - 1.6  $\lambda$  – Kalkül
2. Logikprogrammierung
3. Implementierung einer imperativen Programmiersprache
4. Verifikation von Programmeigenschaften
5.  $H_0$  – ein einfacher Kern von Haskell

# Unifikation & Unifikationsalgorithmus

## *Aufgabe 1*

---

# ERINNERUNG: TYPPOLYMORPHIE

- ▶ **bisher:** Funktionen mit konkreten Datentypen  
z.B. `length :: [Int] -> Int`
- ▶ **Problem:** Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren  
z.B. `length :: [Bool] -> Int` oder `length :: String -> Int`
- ▶ **Lösung:** Typvariablen und polymorphe Funktionen  
z.B. `length :: [a] -> Int`

# ERINNERUNG: TYPPOLYMORPHIE

- ▶ **bisher:** Funktionen mit konkreten Datentypen  
z.B. `length :: [Int] -> Int`
- ▶ **Problem:** Funktion würde auch auf anderen Datentypen funktionieren  
z.B. `length :: [Bool] -> Int` oder `length :: String -> Int`
- ▶ **Lösung:** Typvariablen und polymorphe Funktionen  
z.B. `length :: [a] -> Int`

Bei konkreter Instanziierung wird Typvariable an entsprechenden Typbezeichner gebunden (z.B. `a = Int` oder `a = Bool`).

- ▶ Der Aufruf `length [1,5,2,7]` liefert für die Typvariable `a = Int`.
- ▶ Der Aufruf `length [True, False, True, True, False]` liefert die Belegung `a = Bool`.
- ▶ Der Aufruf `length "hello"` impliziert `a = Char`.

## Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])  
f (...) = ...
```

```
g :: (Int, [u]) -> Int  
g (...) = ...
```

```
h = g . f
```

## Motivation: Typüberprüfung

```
f :: (t, Char) -> (t, [Char])  
f (...) = ...  
  
g :: (Int, [u]) -> Int  
g (...) = ...  
  
h = g . f
```

Wie müssen die Typvariablen  $t$  und  $u$  belegt werden, damit die Funktion  $h$  wohldefiniert ist, d.h. damit die Ergebnisse aus  $f$  wirklich in  $g$  eingesetzt werden dürfen?

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

## Typausdrücke

- ▶ Int, Bool, Float, Char, String
- ▶ Typvariablen
- ▶ Listen, Tupel, Funktionen

## Typterme

- ▶ Übersetzung *trans*: Typausdruck  $\rightarrow$  Typterm



**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

## Typausdrücke

- ▶ `Int, Bool, Float, Char, String`
- ▶ Typvariablen
- ▶ Listen, Tupel, Funktionen

## Typterme

- ▶ Übersetzung *trans*: Typausdruck  $\rightarrow$  Typterm
- ▶ z.B.

$$\text{trans}(\text{t}, [\text{Char}]) = ()^2(t, [](\text{Char}))$$

$$\text{trans}(\text{Int}, [\text{u}]) = ()^2(\text{Int}, [](\text{u}))$$

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

## Typausdrücke

- ▶ `Int, Bool, Float, Char, String`
- ▶ Typvariablen
- ▶ Listen, Tupel, Funktionen

## Typterme

- ▶ Übersetzung *trans*: Typausdruck  $\rightarrow$  Typterm
- ▶ z.B.

$$\text{trans}(\text{t}, [\text{Char}]) = ()^2(t, [](\text{Char}))$$

$$\text{trans}(\text{Int}, [\text{u}]) = ()^2(\text{Int}, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme  $\text{trans}(\text{t}, [\text{Char}])$  und  $\text{trans}(\text{Int}, [\text{u}])$  unifizierbar sind.

**Ziel:** theoretischere Form von Typausdrücken

## Typausdrücke

- ▶ `Int, Bool, Float, Char, String`
- ▶ Typvariablen
- ▶ Listen, Tupel, Funktionen

## Typterme

- ▶ Übersetzung *trans*: Typausdruck  $\rightarrow$  Typterm
- ▶ z.B.

$$\text{trans}((t, [\text{Char}])) = ()^2(t, [](\text{Char}))$$

$$\text{trans}((\text{Int}, [u])) = ()^2(\text{Int}, [](u))$$

Beide Typausdrücke können in Übereinstimmung gebracht werden, wenn die Typterme  $\text{trans}((t, [\text{Char}]))$  und  $\text{trans}((\text{Int}, [u]))$  unifizierbar sind.

$\rightarrow t = \text{Int}$  und  $u = \text{Char}$

# UNIFIKATIONSALGORITHMUS

- **gegeben:** zwei Typterme  $t_1, t_2$
- **Ziel:** entscheide, ob  $t_1$  und  $t_2$  unifizierbar sind

Wir notieren die beiden Typterme als Spalte:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} ()^2(t, [](\text{Char})) \\ ()^2(\text{Int}, [](u)) \end{pmatrix}$$

Unifikationsalgorithmus erstellt eine Folge von Mengen  $M_i$ , wobei die  $M_{i+1}$  aus  $M_i$  hervorgeht, indem eine der vier Regeln angewendet wird.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{bzw.} \quad M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} ()^2(t, [](\text{Char})) \\ ()^2(\text{Int}, [](u)) \end{pmatrix} \right\}$$

# UNIFIKATIONSALGORITHMUS – REGELN

- **Dekomposition.** Sei  $\delta \in \Sigma$  ein  $k$ -stelliger Konstruktor,  
 $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$  Terme über Konstruktoren und Variablen.

$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, \dots, s_k) \\ \delta(t_1, \dots, t_k) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$

- **Elimination.** Sei  $x$  eine Variable !

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \emptyset$$

- **Vertauschung.** Sei  $t$  keine Variable.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- **Substitution.** Sei  $x$  eine Variable,  $t$  keine Variable.

*Occur Check:*  $x$  kommt nicht in  $t$  vor

Dann ersetze in jedem anderen Term die Variable  $x$  durch  $t$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s(x) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s(t) \end{pmatrix}$$

# UNIFIKATIONSALGORITHMUS

**Ende:** keine Regel mehr anwendbar – Entscheidung:

- $t_1, t_2$  **unifizierbar:**  $M$  ist von der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_k \\ t_k \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{„Variablen“} \\ \text{„Terme ohne Variablen“} \end{array}$$

wobei  $u_1, u_2, \dots, u_k$  paarweise verschiedene Variablen sind und nicht in  $t_1, t_2, \dots, t_k$  vorkommen.

**allgemeinster Unifikator**  $\varphi$ :

$$\varphi(u_i) = t_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$\varphi(x) = x \quad \text{für alle nicht vorkommenden Variablen}$$

- $t_1, t_2$  sind **nicht unifizierbar:**  $M$  hat nicht diese Form und keine Regel ist anwendbar

Weitere Unifikatoren  $\psi$  erhält man durch Anwendung einer Substitution  $\sigma$ , sodass  $\psi = \sigma \circ \varphi$ .

# OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

**Occur Check:** Gegeben sei ein Termpaar  $(\frac{x}{t})$ , wobei  $x$  eine Variable und  $t$  ein Typtermin sei.

- ▶ Kommt  $x$  in  $t$  vor, dann schlägt der Check fehl.
- ▶ Kommt  $x$  nicht in  $t$  vor, dann ist der Check okay.

# OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

**Occur Check:** Gegeben sei ein Termpaar  $(\overset{x}{t})$ , wobei  $x$  eine Variable und  $t$  ein Typtermin sei.

- ▶ Kommt  $x$  in  $t$  vor, dann schlägt der Check fehl.
- ▶ Kommt  $x$  nicht in  $t$  vor, dann ist der Check okay.

**Beispiel:**

- ▶  $\left( \overset{x_1}{\gamma(x_1)} \right) \rightsquigarrow$  Fehlschlag, da  $x_1$  in  $\gamma(x_1)$  vorkommt
- ▶  $\left( \overset{x_1}{\gamma(x_2)} \right) \rightsquigarrow$  okay, da  $x_1$  nicht in  $\gamma(x_2)$  vorkommt



# OCCUR CHECK

Um endlose Rekursionen zu unterbinden, benötigen die Regeln zum Vertauschen und zur Substitution gewisse Einschränkungen.

**Occur Check:** Gegeben sei ein Termpaar  $(\overset{x}{t})$ , wobei  $x$  eine Variable und  $t$  ein Typterm sei.

- ▶ Kommt  $x$  in  $t$  vor, dann schlägt der Check fehl.
- ▶ Kommt  $x$  nicht in  $t$  vor, dann ist der Check okay.

**Beispiel:**

- ▶  $\left( \overset{x_1}{\gamma(x_1)} \right) \rightsquigarrow$  Fehlschlag, da  $x_1$  in  $\gamma(x_1)$  vorkommt
- ▶  $\left( \overset{x_1}{\gamma(x_2)} \right) \rightsquigarrow$  okay, da  $x_1$  nicht in  $\gamma(x_2)$  vorkommt

Was passiert, wenn wir substituieren obwohl der Occur Check fehlschlägt?

$$\left( \overset{x_1}{\gamma(x_1)} \right), \left( \overset{x_2}{\gamma(\overset{x_1}{x_1})} \right) \Rightarrow \left( \overset{x_1}{\gamma(x_1)} \right), \left( \overset{x_2}{\gamma(\gamma(\overset{x_1}{x_1}))} \right) \Rightarrow \left( \overset{x_1}{\gamma(x_1)} \right), \left( \overset{x_2}{\gamma(\gamma(\gamma(\overset{x_1}{x_1})))} \right)$$

# AUFGABE 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left( \begin{array}{cc} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left( \begin{array}{cc} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \sigma(\gamma(x_3), x_3) \\ \sigma(x_2, x_3) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}_2} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x_3 \\ x_3 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\} \quad x_2 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_3) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

# AUFGABE 1

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left( \begin{array}{cc} \sigma(\sigma(x_1, \alpha), \sigma(\gamma(x_3), x_3)) \\ \sigma(\sigma(\gamma(x_2), \alpha), \sigma(x_2, x_3)) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left( \begin{array}{cc} \sigma(x_1, \alpha) \\ \sigma(\gamma(x_2), \alpha) \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \sigma(\gamma(x_3), x_3) \\ \sigma(x_2, x_3) \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}_2} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x_3 \\ x_3 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{El.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Dek.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{array} \right) \right\} \\
 \xRightarrow{\text{Vert.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\} \quad x_2 \text{ kommt nicht in } \gamma(x_3) \text{ vor} \\
 \xRightarrow{\text{Subst.}} & \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{array} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

# AUFGABE 1

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \quad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \quad x_3 \mapsto x_3$$

# AUFGABE 1

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \quad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \quad x_3 \mapsto x_3$$

(b) **weitere Unifikatoren:**

$$\begin{array}{lll} x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_2 \mapsto \gamma(\alpha) & x_3 \mapsto \alpha \\ x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) & x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_3 \mapsto \gamma(\alpha) \end{array}$$

# AUFGABE 1

(a) **allgemeinster Unifikator:**

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3)) \quad x_2 \mapsto \gamma(x_3) \quad x_3 \mapsto x_3$$

(b) **weitere Unifikatoren:**

$$\begin{array}{lll} x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_2 \mapsto \gamma(\alpha) & x_3 \mapsto \alpha \\ x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\gamma(\alpha))) & x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) & x_3 \mapsto \gamma(\alpha) \end{array}$$

(c) **Fehlschlag beim occur-check:**

$$\text{Alphabet: } \Sigma = \left\{ \gamma^{(1)} \right\}$$

$$t_1 = x_1$$

$$t_2 = \gamma(x_1)$$

## AUFGABE 1 — TEIL (D)

$t_1 = (a, [a])$

$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$

$t_3 = (b, c)$

## AUFGABE 1 — TEIL (D)

$t_1 = (a, [a])$

$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$

$t_3 = (b, c)$

- ▶  $t_1$  und  $t_2$  sind
- ▶  $t_1$  und  $t_3$  sind
- ▶  $t_2$  und  $t_3$  sind



## AUFGABE 1 — TEIL (D)

$t_1 = (a, [a])$

$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$

$t_3 = (b, c)$

- ▶  $t_1$  und  $t_2$  sind *nicht* unifizierbar
- ▶  $t_1$  und  $t_3$  sind
- ▶  $t_2$  und  $t_3$  sind

## AUFGABE 1 — TEIL (D)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- ▶  $t_1$  und  $t_2$  sind *nicht* unifizierbar
- ▶  $t_1$  und  $t_3$  sind unifizierbar mit  $a \mapsto a, b \mapsto a, c \mapsto [a]$
- ▶  $t_2$  und  $t_3$  sind

## AUFGABE 1 — TEIL (D)

$$t_1 = (a, [a])$$

$$t_2 = (\text{Int}, [\text{Double}])$$

$$t_3 = (b, c)$$

- ▶  $t_1$  und  $t_2$  sind *nicht* unifizierbar
- ▶  $t_1$  und  $t_3$  sind unifizierbar mit  $a \mapsto a, b \mapsto a, c \mapsto [a]$
- ▶  $t_2$  und  $t_3$  sind unifizierbar mit  $b \mapsto \text{Int}, c \mapsto [\text{Double}]$

# Induktionsbeweise

## *Aufgabe 2*

---

# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION AUF $\mathbb{N}$

**Definition:** natürliche Zahlen  $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$

Basisfall:  $0 \in \mathbb{N}$

Rekursionsfall:  $x + 1 \in \mathbb{N}$  für  $x \in \mathbb{N}$

**Beweis von Eigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat  $P$

zu zeigen: für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $P(x)$
--

**vollständige Induktion:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(x)$  für  $x = 0$
- ▶ **Induktionsvoraussetzung:**  
Sei  $x \in \mathbb{N}$ , sodass  $P(x)$  gilt.  $P(x)$  gilt noch nicht für *alle*  $x \in \mathbb{N}$
- ▶ **Induktionsschritt:**  
zeige  $P(x + 1)$  unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen  $xs$

Basisfall:  $xs = []$

Rekursionsfall:  $xs = (y:ys)$  für  $ys :: [a]$

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen  $xs$

Basisfall:  $xs = []$

Rekursionsfall:  $xs = (y:ys)$  für  $ys :: [a]$

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat  $P$

zu zeigen: für alle $xs :: [a]$ gilt $P(xs)$
--

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen  $xs$

Basisfall:  $xs = []$

Rekursionsfall:  $xs = (y:ys)$  für  $ys :: [a]$

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat  $P$

zu zeigen: für alle $xs :: [a]$ gilt $P(xs)$
--

**Induktion auf Listen:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(xs)$  für  $xs == []$



# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen  $xs$

Basisfall:  $xs = []$

Rekursionsfall:  $xs = (y:ys)$  für  $ys :: [a]$

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat  $P$

zu zeigen: für alle $xs :: [a]$ gilt $P(xs)$
--

**Induktion auf Listen:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(xs)$  für  $xs == []$
- ▶ **Induktionsvoraussetzung:**  
Sei  $xs :: [a]$  eine Liste für die  $P(xs)$  gilt.

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen  $xs$

Basisfall:  $xs = []$

Rekursionsfall:  $xs = (y:ys)$  für  $ys :: [a]$

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat  $P$

zu zeigen: für alle $xs :: [a]$ gilt $P(xs)$
--

**Induktion auf Listen:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(xs)$  für  $xs == []$
- ▶ **Induktionsvoraussetzung:**  
Sei  $xs :: [a]$  eine Liste für die  $P(xs)$  gilt.
- ▶ **Induktionsschritt:**  
zeige  $P(x:xs)$  für alle  $x :: a$  unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

# INDUKTION AUF LISTEN

**Erinnerung:** Rekursion über Listen  $xs$

Basisfall:  $xs = []$

Rekursionsfall:  $xs = (y:ys)$  für  $ys :: [a]$

**Beweis von Programmeigenschaften:** Eigenschaft = Prädikat  $P$

zu zeigen: für alle  $xs :: [a]$  gilt  $P(xs)$

**Induktion auf Listen:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(xs)$  für  $xs == []$
- ▶ **Induktionsvoraussetzung:**  
Sei  $xs :: [a]$  eine Liste für die  $P(xs)$  gilt.
- ▶ **Induktionsschritt:**  
zeige  $P(x:xs)$  für alle  $x :: a$  unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

*Allgemeiner Hinweis:* Es müssen immer **alle** Variablen quantifiziert werden!

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l, r :: BinTree a`

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: Nil oder Leaf  $x$  für  $x :: a$

Rekursionsfall: Branch  $x \ l \ r$  für  $x :: a$  und  $l, r :: \text{BinTree } a$

zu zeigen:      für alle $t :: \text{BinTree } a$ gilt $P(t)$
---

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l, r :: BinTree a`

zu zeigen:      für alle <code>t :: BinTree a</code> gilt $P(t)$
--

**strukturelle Induktion:**

► **Induktionsanfang:**

zeige  $P(t)$  für `t == Nil` oder `t == Leaf x` für alle `x :: a`

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall: `Nil` oder `Leaf x` für `x :: a`

Rekursionsfall: `Branch x l r` für `x :: a` und `l, r :: BinTree a`

zu zeigen:      für alle <code>t :: BinTree a</code> gilt $P(t)$
--

**strukturelle Induktion:**

► **Induktionsanfang:**

zeige  $P(t)$  für `t == Nil` oder `t == Leaf x` für alle `x :: a`

► **Induktionsvoraussetzung:**

Seien `l, r :: BinTree a` zwei Bäume, sodass  $P(l)$  und  $P(r)$  gilt.

# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall:  $\text{Nil}$  oder  $\text{Leaf } x$  für  $x :: a$

Rekursionsfall:  $\text{Branch } x \ l \ r$  für  $x :: a$  und  $l, r :: \text{BinTree } a$

zu zeigen:      für alle $t :: \text{BinTree } a$ gilt $P(t)$
---

**strukturelle Induktion:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(t)$  für  $t == \text{Nil}$  oder  $t == \text{Leaf } x$  für alle  $x :: a$
- ▶ **Induktionsvoraussetzung:**  
Seien  $l, r :: \text{BinTree } a$  zwei Bäume, sodass  $P(l)$  und  $P(r)$  gilt.
- ▶ **Induktionsschritt:**  
zeige  $P(\text{Branch } x \ l \ r)$  für alle  $x :: a$  unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung



# STRUKTURELLE INDUKTION

**Erinnerung:** Rekursion über Bäume

Basisfall:  $\text{Nil}$  oder  $\text{Leaf } x$  für  $x :: a$

Rekursionsfall:  $\text{Branch } x \ l \ r$  für  $x :: a$  und  $l, r :: \text{BinTree } a$

zu zeigen:      für alle $t :: \text{BinTree } a$ gilt $P(t)$
---

**strukturelle Induktion:**

- ▶ **Induktionsanfang:**  
zeige  $P(t)$  für  $t == \text{Nil}$  oder  $t == \text{Leaf } x$  für alle  $x :: a$
- ▶ **Induktionsvoraussetzung:**  
Seien  $l, r :: \text{BinTree } a$  zwei Bäume, sodass  $P(l)$  und  $P(r)$  gilt.
- ▶ **Induktionsschritt:**  
zeige  $P(\text{Branch } x \ l \ r)$  für alle  $x :: a$  unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung

<i>Allgemeiner Hinweis:</i> Es müssen immer <b>alle</b> Variablen quantifiziert werden!
---

- ▶ kein Induktionsprinzip
- ▶ IV wird im Induktionsschritt nicht verwendet
- ▶ fehlende Quantifizierung (nur Gleichungen bringen kaum Punkte)
- ▶ *Missachtung freier Variablen*

- ▶ kein Induktionsprinzip
- ▶ IV wird im Induktionsschritt nicht verwendet
- ▶ fehlende Quantifizierung (nur Gleichungen bringen kaum Punkte)
- ▶ *Missachtung freier Variablen*
- ▶ zu beweisende Eigenschaft  $P$  wird für  $xs$  angenommen, um sie dann im Induktionsschritt nochmal für  $xs$  zu beweisen — eine Tautologie
- ▶ Annahme, dass  $P$  bereits für alle Listen gilt, um es dann für  $x:xs$  nochmal zu zeigen

## AUFGABE 2

Zu zeigen ist die Gleichung

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \quad \text{für alle } xs :: \text{Int}$$

mittels Induktion über Listen.

**Induktionsanfang:** Sei  $xs == []$ .

linke Seite:

$$\text{sum (foo [])} \stackrel{(2)}{=} \text{sum []} \stackrel{(6)}{=} 0$$

rechte Seite:

$$2 * \text{sum []} - \text{length []} \stackrel{(10)}{=} 2 * \text{sum []} - 0 \stackrel{(6)}{=} 2 * 0 - 0 = 0$$

**Induktionsvoraussetzung:** Sei  $xs :: [\text{Int}]$ , sodass

$$\text{sum (foo xs)} = 2 * \text{sum xs} - \text{length xs}$$

gilt.

## AUFGABE 2 (FORTSETZUNG)

**Induktionsschritt:** Sei  $x :: \text{Int}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \text{sum (foo (x:xs))} &\stackrel{(3)}{=} \text{sum (x : x : (-1) : foo xs)} \\ &\stackrel{3.(7)}{=} x + x + (-1) + \text{sum (foo xs)} \\ &\stackrel{(IV)}{=} x + x + (-1) + 2 * \text{sum xs} - \text{length xs} \\ &\stackrel{(\text{Komm.})}{=} 2 * x + 2 * \text{sum xs} - 1 - \text{length xs} \\ &\stackrel{(\text{Dist.})}{=} 2 * (x + \text{sum xs}) - (1 + \text{length xs}) \\ &\stackrel{(7)}{=} 2 * \text{sum (x:xs)} - (1 + \text{length xs}) \\ &\stackrel{(11)}{=} 2 * \text{sum (x:xs)} - \text{length (x:xs)} \end{aligned}$$

**Fragen?**