

# PROGRAMMIERUNG

## ÜBUNG 7: $\lambda$ -KALKÜL (TEIL 2)

---

Eric Kunze

`eric.kunze@tu-dresden.de`

TU Dresden, 23. Mai 2022

letzte Änderung:  
23.05.2022, 10:26

# Der $\lambda$ -Kalkül

*Programmieren mit  $\lambda$ 's*

---

# DER $\lambda$ -KALKÜL

<b>Atome</b>	$x, y$	
<b>Abstraktion</b>	$(\lambda x. t)$	$(f(x) = t, \text{ anonyme Funktion})$
<b>Applikation</b>	$(t_1 \ t_2)$	

## Verabredungen:

- ▶ Applikation ist *linksassoziativ*:  $((t_1 \ t_2) \ t_3) = t_1 \ t_2 \ t_3$
- ▶ mehrfache Abstraktion:  $(\lambda x_1. (\lambda x_2. (\lambda x_3. t))) = (\lambda x_1 x_2 x_3. t)$
- ▶ Applikation vor Abstraktion

## Rechenregeln:

- ▶  $\beta$ -Reduktion:

$$GV(t) \cap FV(s) = \emptyset \quad \rightsquigarrow (\lambda x. t) \ s \Rightarrow_{\beta} t[x/s]$$

- ▶  $\alpha$ -Konversion:

$$z \notin GV(t) \cup FV(t) \quad \rightsquigarrow (\lambda x. t) \Rightarrow_{\alpha} \lambda z. t[x/z]$$

Dadurch, dass wir im Folgenden keine Symbole mehr zulassen (d.h.  $\Sigma = \emptyset$ ), benötigen wir eine alternative Charakterisierung dieser. Zuerst beschäftigen uns die natürlichen Zahlen.

## **Darstellung der natürlichen Zahlen:** *Church-Numerals*

$$\langle 0 \rangle = (\lambda xy . y)$$

$$\langle 1 \rangle = (\lambda xy . xy)$$

$$\langle 2 \rangle = (\lambda xy . x(xy))$$

$$\vdots$$

$$\langle n \rangle = (\lambda xy . \underbrace{x(x \dots (x y) \dots)}_n))$$

# PROGRAMMIEREN IM $\lambda$ -KALKÜL

- ▶ Ein  $t \in \Sigma(\lambda)$  heißt **geschlossener Term**, falls  $FV(t) = \emptyset$ . Ein geschlossener Term heißt auch **Kombinator**.
- ▶ **Fixpunktkombinator**:  $\langle Y \rangle = \left( \lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu)) \right) \in \lambda(\emptyset)$
- ▶ Der Fixpunktkombinator ermöglicht Rekursion.
- ▶ weitere definierte  $\lambda$ -Terme (siehe Skript S. 198f.):

$$\langle true \rangle = (\lambda xy. x)$$

$$\langle false \rangle = (\lambda xy. y)$$

$$\langle succ \rangle = (\lambda z. (\lambda xy. x(zxy)))$$

$$\langle pred \rangle \langle 0 \rangle \Rightarrow^* \langle 0 \rangle$$

$$\langle succ \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n + 1 \rangle$$

$$\langle pred \rangle \langle n \rangle \Rightarrow^* \langle n - 1 \rangle$$

$$\langle ite \rangle s s_1 s_2 \Rightarrow^* \begin{cases} s_1 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle true \rangle \\ s_2 & \text{wenn } s \Rightarrow^* \langle false \rangle \end{cases}$$

# Übungsblatt 7

## *Aufgabe 1*

---

## AUFGABE 1 – TEIL (A)

Gesucht ist die Normalform von  $(\lambda f x. f f x) (\lambda y. x) z$ .

$$\begin{aligned} & (\lambda f \underbrace{x. f f x}_{\text{GV}=\{x\}}) (\underbrace{\lambda y. x}_{\text{FV}=\{x\}}) z \\ \Rightarrow_{\alpha} & (\lambda f \underbrace{x_1. f f x_1}_{\text{GV}=\{x_1\}}) (\underbrace{\lambda y. x}_{\text{FV}=\{x\}}) z \\ \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. (\lambda y. \underbrace{x}_{\text{GV}=\emptyset}) (\underbrace{\lambda y. x}_{\text{FV}=\{x\}}) x_1) z \\ \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. \underbrace{xx_1}_{\text{GV}=\emptyset}) \underbrace{z}_{\text{FV}=\{z\}} \\ \Rightarrow_{\beta} & xz \end{aligned}$$

## AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxyz . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle (\langle sub \rangle xy) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle add \rangle yz \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle succ \rangle (f (\langle pred \rangle x) (\langle succ \rangle y) (\langle mult \rangle \langle 2 \rangle z)) \right) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle &= \left( \lambda z . (\lambda u . z(uu)) (\lambda u . z(uu)) \right) \langle F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left( \lambda u . \langle F \rangle(uu) \right) \left( \lambda u . \langle F \rangle(uu) \right) \quad =: \langle Y_F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$



# AUFGABE 1 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}
 \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle &\Rightarrow^* \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle \underbrace{(\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle))}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} (\dots) \\
 &\quad (\langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \underbrace{(\langle \text{pred} \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle}) \underbrace{(\langle \text{succ} \rangle \langle 5 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle}) \underbrace{(\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle})) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle (\langle \text{ite} \rangle \underbrace{(\langle \text{iszero} \rangle (\langle \text{sub} \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle))}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \underbrace{(\langle \text{add} \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle}) (\dots)) \\
 &\Rightarrow^* \langle \text{succ} \rangle \langle 12 \rangle \\
 &\Rightarrow^* \langle 13 \rangle
 \end{aligned}$$

## AUFGABE 1 – TEIL (C)

Gegeben sei folgende Haskell-Funktion:

```
1 g :: Int -> Int -> Int
2 g 0 y = 2 * (y + 1)
3 g x 0 = 2 * (x + 1)
4 g x y = 4 + g (x - 1) (y - 1)
```

Geben Sie einen  $\lambda$ -Term  $\langle G \rangle$  an, so dass  $\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \Rightarrow^* \langle g \ x \ y \rangle$   
für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  gilt.

## AUFGABE 1 – TEIL (C)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy . \left( \langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle x) \right. \right. \\
\left. \left. \left( \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle (\langle \text{succ} \rangle y) \right) \right. \right. \\
\left. \left. \left( \langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle y) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. \left( \langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle (\langle \text{succ} \rangle x) \right) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. \left( \langle \text{add} \rangle \langle 4 \rangle g (\langle \text{pred} \rangle x (\langle \text{pred} \rangle y)) \right) \right. \right. \right. \\
\left. \left. \right. \right) \\
\left. \right) \\
\left. \right)$$

# Übungsblatt 7

## *Aufgabe 2*

---

## AUFGABE 2 – TEIL (A)

Gegeben sei der  $\lambda$ -Term

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle x \right) \right. \\ \left. y \right. \\ \left. \left( \langle add \rangle x \left( f \left( \langle pred \rangle x \right) \left( \langle add \rangle x y \right) \right) \right) \right)$$

Geben Sie eine Haskell-Funktion  $f$  an, sodass  $f = \langle Y \rangle \langle F \rangle$ .

```
1 f :: Int -> Int -> Int
2 f 0 y = y
3 f x y = x + f (x - 1) (x + y)
```

## AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\langle F \rangle = \left( \lambda fxy . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle x \right) \right. \\ \left. y \right. \\ \left. \left( \langle add \rangle x \left( f \left( \langle pred \rangle x \right) \left( \langle add \rangle x y \right) \right) \right) \right)$$

**Gesucht:** Normalform von  $\langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle F \rangle &= \left( \lambda z. (\lambda u. z(uu)) (\lambda u. z(uu)) \right) \langle F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left( \lambda u. \langle F \rangle(uu) \right) \left( \lambda u. \langle F \rangle(uu) \right) =: \langle Y_F \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \end{aligned}$$

## AUFGABE 2 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}
 & \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle \text{add} \rangle \langle 1 \rangle \left( \langle Y_F \rangle \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{add} \rangle \langle 1 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle} \right) \right) \right) \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{add} \rangle \langle 1 \rangle \left( \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 0 \rangle \langle 5 \rangle \right) \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \right) \langle 5 \rangle \left( \dots \right) \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{add} \rangle \langle 1 \rangle \langle 5 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle 6 \rangle
 \end{aligned}$$

# Übungsblatt 7 (Sommer 2021)

*Aufgabe 12.4.21 aus der Aufgabensammlung*

---



## AUFGABE 12.4.21 – TEIL (A)

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := \begin{cases} x \cdot x & \text{für } y = 0 \\ g(2 \cdot x, y - 1) & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\langle G \rangle = \left( \lambda gxy. \left( \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \langle mult \rangle x x \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right) \right)$$

## AUFGABE 12.4.21 – TEIL (B)

$$\langle G \rangle = \left( \lambda_{gxy} . \langle ite \rangle \left( \langle iszero \rangle y \right) \left( \langle mult \rangle x x \right) \left( g \left( \langle mult \rangle \langle 2 \rangle x \right) \left( \langle pred \rangle y \right) \right) \right)$$

**Nebenrechnung:** Zeige die Wirkung des Fixpunktkombinators.

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \langle G \rangle &= \left( \lambda z . \left( \lambda u . z(uu) \right) \left( \lambda u . z(uu) \right) \right) \langle G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \left( \lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \left( \lambda u . \langle G \rangle (uu) \right) \quad =: \langle Y_G \rangle \\ &\Rightarrow^\beta \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \end{aligned}$$

## AUFGABE 12.4.21 – TEIL (B)

$$\begin{aligned}
 & \langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 2 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 2 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 4 \rangle \langle 1 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \right) \left( \dots \right) \left( \langle Y_G \rangle \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 8 \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 1 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle} \right) \right) \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 8 \rangle \langle 0 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle \left( \underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \right) \left( \underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 8 \rangle \langle 8 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 64 \rangle} \right) \left( \dots \right) \Rightarrow^* \langle 64 \rangle
 \end{aligned}$$

# Übungsblatt 7 (Sommer 2020)

*Aufgabe 12.4.36 aus der Aufgabensammlung*

---

## AUFGABE 12.4.36

$$\begin{aligned}\langle \text{pow} \rangle \langle 2 \rangle &= (\lambda n f z . n (\lambda g x . g(gx)) fz) (\lambda x y . x(xy)) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x y . x(xy)) (\lambda g x . g(gx)) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda g x . g(gx)) ((\lambda g x . g(gx)) y)) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y . (\lambda x . ((\lambda g x . g(gx)) y) (((\lambda g x . g(gx)) y) x))) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . ((\lambda g x . g(gx)) y) (((\lambda g x . g(gx)) y) x)) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) ((\lambda x . y(yx)) x)) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . (\lambda x . y(yx)) (y(yx))) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda y x . y (y (y(yx)))) f z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . (\lambda x . f (f (f (fx)))) z) \\&\Rightarrow^\beta (\lambda f z . f (f (f (fz)))) = \langle 4 \rangle\end{aligned}$$

**Teil (b)**

$$f(n) = s^n$$

**Teil (c)**

$$g(n, m) = m^n$$

$$\langle pow' \rangle = \left( \lambda n \textcolor{brown}{m} fz. n \textcolor{brown}{m} fz \right)$$