Gegeben seien folgende Terme über dem Rangalphabet $\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \underline{\alpha^{(0)}}\}$:

$$t_1 = \sigma(\sigma(x_1,\alpha),\sigma(\gamma(x_3),x_3)) \qquad \text{und} \qquad t_2 = \sigma(\sigma(\gamma(x_2),\alpha),\sigma(x_2,x_3))\ .$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cancel{\sigma}(\underline{\sigma(x_1,\alpha)}, \underline{\sigma(\gamma(x_3),x_3)}) \\ \cancel{\sigma}(\underline{\sigma(\gamma(x_2),\alpha)}, \underline{\sigma(x_2,x_3)}) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{\sigma}(x_1,\alpha) \\ \cancel{\sigma}(\gamma(x_2),\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{\sigma}(\gamma(x_3),x_3) \\ \cancel{\sigma}(x_2,x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow}{}^{2} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{\alpha} \\ \cancel{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{x_3} \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{El.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

El.

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Vert.

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

x_2 kommt nicht in $\gamma(x_3)$ vor

Subst.

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(\gamma(x_3)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

allg. Unifikator:

$\varphi(x_1) = \gamma(\gamma(x_3))$

$\varphi(x_2) = \_\_$

$\varphi(x_3) = \_\_$

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(x_3))$$
$$x_2 \mapsto \gamma(x_3)$$
$$x_3 \mapsto x_3$$

(b) Geben Sie zwei weitere Unifikatoren an.

(c) Geben Sie zwei Terme t_1 und t_2 über dem Alphabet Σ an, so dass im Laufe der Anwendung des Unifikationsalgorithmus auf t_1 und t_2 der Occur-Check fehlschlägt.

b)
$$\left.\begin{array}{l} x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha)) \\ x_2 \mapsto \gamma(\alpha) \\ x_3 \mapsto \alpha \end{array}\right\} = \tilde{\rho} \circ \varphi$$

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\sigma(\alpha,\alpha)))$$
$$x_2 \mapsto \gamma(\sigma(\alpha,\alpha))$$
$$x_3 \mapsto \sigma(\alpha,\alpha)$$

$\rho(x_3) = \alpha$

$x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$

(b) Geben Sie zwei weitere Unifikatoren an.

(c) Geben Sie zwei Terme t_1 und t_2 über dem Alphabet Σ an, so dass im Laufe der Anwendung des Unifikationsalgorithmus auf t_1 und t_2 der Occur-Check fehlschlägt.

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ occur check schlägt fehl

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma(\alpha, x_1) \end{pmatrix} \right\}$$

"Subst."

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma(\alpha, \gamma(x_1)) \end{pmatrix} \right\}$$

"Subst."

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma(\alpha, \gamma(\gamma(x_1))) \end{pmatrix} \right\}$$

$\hookrightarrow$ unendliche Rekursion !!

Z: $\text{sum}(\text{foo } xs) = 2 * \text{sum } xs - \text{length } xs$

für alle $xs :: [\text{Int}]$

(IA) Sei $xs = []$.

· links: $\text{sum}(\text{foo } []) \overset{(2)}{=} \text{sum } [] \overset{(6)}{=} 0$

· rechts: $2 * \text{sum } [] - \text{length } []$

$\overset{(6)}{=} 2 * 0 - \text{length } []$

$\overset{(10)}{=} 2 * 0 - 0$

$= 0$

```
1  foo :: [Int] -> [Int]
2  foo []        = []
3  foo (x:xs) = x : x : (-1) : foo xs
4
5  sum :: [Int] -> Int
6  sum []        = 0
7  sum (x:xs) = x + sum xs
8
9  length :: [Int] -> Int
10 length []        = 0
11 length (x:xs) = 1 + length xs
```

(IV) Sei $xs :: [Int]$, sodass

$$\mathrm{sum}(\mathrm{foo}\ xs) = 2 * \mathrm{sum}\ xs - \mathrm{length}\ xs$$

gilt.

(IS) Sei $x :: Int$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sum}(\mathrm{foo}\ (x:xs)) &\overset{(3)}{=} \mathrm{sum}(x : x : (-1) : \mathrm{foo}\ xs) \\
&\overset{3\cdot(7)}{=} x + x + (-1) + \mathrm{sum}(\mathrm{foo}\ xs) \\
&\overset{(IV)}{=} x + x + (-1) + 2 * \mathrm{sum}\ xs - \mathrm{length}\ xs \\
&\overset{(Komm.)}{=} 2 * x + 2 * \mathrm{sum}\ xs + (-1) - \mathrm{length}\ xs \\
&\overset{(Distr.)}{=} 2 * (x + \mathrm{sum}\ xs) - (1 + \mathrm{length}\ xs) \\
&\overset{(7)}{=} 2 * \mathrm{sum}\ (x:xs) - (1 + \mathrm{length}\ xs) \\
&\overset{(11)}{=} 2 * \mathrm{sum}(x:xs) - \mathrm{length}(x:xs)
\end{aligned}$$

```haskell
1  foo :: [Int] -> [Int]
2  foo []       = []
3  foo (x:xs)   = x : x : (-1) : foo xs
4
5  sum :: [Int] -> Int
6  sum []       = 0
7  sum (x:xs)   = x + sum xs
8
9  length :: [Int] -> Int
10 length []      = 0
11 length (x:xs)  = 1 + length xs
```