TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

PROGRAMMIERUNG

ÜBUNG 12: HOARE-KALKÜL

Eric Kunze

eric.kunze@tu-dresden.de

TU Dresden, 04. Juli 2022

letzte Änderung:
29.06.2022, 15:42

INHALT

Hoare-Kalkül

HOARE-KALKÜL

- Beweis / Verifikation von Programmeigenschaften
- Verifikationsformeln der Form $\{P\}$ **A** $\{Q\}$
  - P und Q sind Zusicherungen (prädikatenlogische Ausdrücke)
  - P heißt **Vorbedingung**, Q heißt **Nachbedingung**
  - Beschreibung der Veränderung von Zusicherungen
  - **Bedeutung**: Wenn die Variablenwerte vor Ausführung von **A** die Zusicherung P erfüllen und **A** terminiert, dann erfüllen die Variablen nach Ausführung von **A** die Zusicherung Q
- Aufstellen eines Beweisbaumes mit zur Verfügung stehenden Regeln

HOARE-KALKÜL — REGELN

- Zuweisungsaxiom
- Sequenzregel
- CompRegel
- Iterationsregel
- (erste und zweite) Alternativregel
- Konsequenzregeln
  - stärkere Vorbedingung
  - schwächere Nachbedingung

SCHLEIFENINVARIANTE

Für die Iterationsregel benötigen wir die Schleifeninvariante SI. In den meisten unserer Fälle ist diese von der Form $SI = A \wedge B$, wobei

- A den Zusammenhang zwischen Zählvariable und Akkumulationsvariablen beschreibt. Führe dazu einige Iterationen der Schleife durch und leite daraus einen Zusammenhang her.
- B die abgeschwächte Schleifenbedingung ist. Dabei nehmen wir die letztmögliche Variablenbelegung, für die die Schleifenbedingung π noch wahr ist und führen den Schleifenrumpf noch einmal darauf aus ($\rightarrow \pi'$).
  $\rightsquigarrow B = \pi \cup \pi'$

Aufgabe 1

AUFGABE 1 – TEIL (A)

Verfikationsformel:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}(k \geq 0) \wedge (u \geq k) \\ \wedge\, (j = k) \wedge (s = 0)\end{array}\right\}}_{\text{Vorbedingung}} \texttt{while (j < u) \{ j=j+1; s=j+s;; \}} \underbrace{\left\{s = \frac{\mathtt{u}^2 + \mathtt{u} - \mathtt{k}^2 - \mathtt{k}}{2}\right\}}_{\text{Nachbedingung}}$$

Schleifeninvariante: $SI = A \wedge B$

#	j	s
0	k	0
1	$k+1$	$(k+1)$
2	$k+2$	$(k+2)+(k+1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$k+N$	$(k+N)+\cdots+(k+1)$

Als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathtt{j} &= k + N \\ \mathtt{s} &= \sum_{i=k+1}^{k+N} i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = (s = \sum_{i=k+1}^{j} i)$$

AUFGABE 1 – TEIL (A)

$\boxed{SI = A \wedge B}$ und wir wissen schon $A = (s = \sum_{i=k+1}^{j} i)$

abgeschwächte Schleifenbedingung:

- Schleifenbedingung: $\pi = (\texttt{j < u})$
- Schleifenbedingung letztmalig wahr für `j = u - 1`
- Wert nach nochmaligem Schleifendurchlauf:
  $\pi' = (\texttt{j = u})$
- $B = \pi \cup \pi' = (\texttt{j} \leq \texttt{u})$ *(symbolische Schreibweise)*

$$\boxed{\Longrightarrow SI = A \wedge B = (s = \sum_{i=k+1}^{j} i) \wedge (\texttt{j} \leq \texttt{u})}$$

AUFGABE 1 – TEIL (B)

Verfikationsformel:

$$\left\{ \begin{array}{c} (k \geq 0) \wedge (u \geq k) \\ \wedge\, (j = k) \wedge (s = 0) \end{array} \right\} \texttt{while (j < u) \{ j=j+1; s=j+s;; \}} \left\{ s = \frac{\mathtt{u}^2 + \mathtt{u} - \mathtt{k}^2 - \mathtt{k}}{2} \right\}$$

Sei $SI = A \wedge B = \left(s = \sum_{i=k+1}^{j} i \right) \wedge (j \leq u)$ und $\pi = (j < u)$.

$$A = D = SI \wedge \pi = SI \wedge (j < u)$$

$$B = \texttt{j = j + 1; s = j + s}$$

$$C = F = H = SI$$

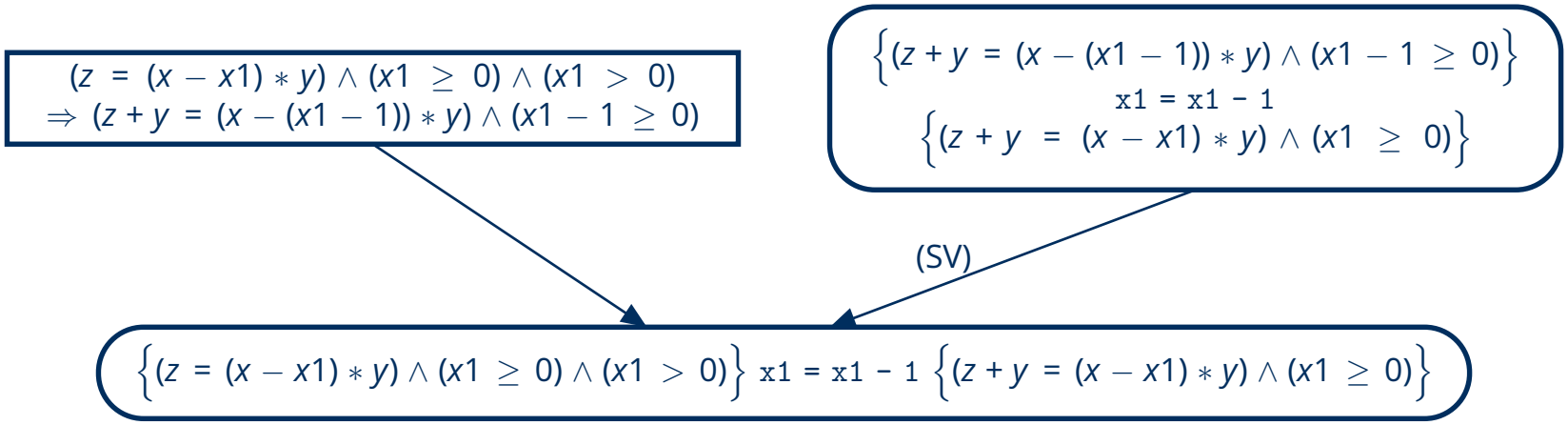
$$E = \{\texttt{j = j + 1; s = j + s}\}$$

$$G = (k \geq 0) \wedge (u \geq k) \wedge (j = k) \wedge (s = 0)$$

$$I = J = SI \wedge \neg\pi = SI \wedge \neg(j < u)$$

$$K = \text{schwächere Nachbedingung (SN)}$$

AUFGABE 2



wobei (beachte: $x1$ ist Ganzzahl)

$$
\begin{aligned}
& (z = (x - x1) \cdot y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z + y = (x - x1) \cdot y + y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z + y = (x - x1 + 1) \cdot y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z + y = (x - (x1 - 1)) \cdot y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 > 0) \\
\Rightarrow\ & (z + y = (x - (x1 - 1)) \cdot y) \wedge (x1 \geq 0) \wedge (x1 - 1 \geq 0)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

AUFGABE 3 – TEIL (A)

$A = \text{true} \ \wedge \ (y < 0)$

$B = \text{true} \ \wedge \ \neg\,(y < 0)$

$C = A$

$D = A$

$E = (-(3 \cdot y) + 1 \geq 0)$

$F = E$

$G = E$

$H = (-x + 1 \geq 0)$

$I = H$

$J = (y \geq 0)$

$K =$ stärkere Vorbedingung

$L =$ Sequenzregel

AUFGABE 3 – TEIL (B)

zu zeigen: $\text{true} \wedge (y < 0) \Rightarrow (-3 \cdot y + 1 \geq 0)$

$$
\begin{aligned}
\text{true} \wedge (y < 0) &\Rightarrow y < 0 \\
&\Rightarrow -3 \cdot y > 0 \\
&\Rightarrow -3 \cdot y + 1 > 1 \\
&\Rightarrow -3 \cdot y + 1 \geq 0
\end{aligned}
$$