

# Das Simplex-Verfahren

Wir nehmen an, dass ein Simplex-Tableau der folgenden Gestalt vorliegt.

$$\begin{array}{c|c|c} & x_N^\top & 1 \\ \hline x_B = & P & p \\ \hline z = & q^\top & q_0 \end{array}$$

Mit  $x_N$  werden dabei die Nichtbasisvariablen, mit  $x_B$  die Basisvariablen bezeichnet. Das Tableau heißt **primal zulässig**, falls alle Einträge des Vektors  $p$  nichtnegativ sind.

## Entscheidbares oder nicht entscheidbares Tableau?

Ein primal zulässiges Simplex-Tableau heißt **(primal) entscheidbar**, falls einer der folgenden Fälle eintritt:

- Die Zielfunktionskoeffizienten, also die Einträge des Vektors  $q^\top$ , sind alle  $\geq 0$ . In diesem Fall ist eine optimale Lösung gefunden. Sie lautet  $x_B = p$  und  $x_N = 0$ .
- Es gibt eine Spalte, in welcher der Eintrag von  $q$  negativ ist, die darüber liegenden Einträge der Matrix  $P$  jedoch alle  $\geq 0$  sind. In diesem Fall ist das Problem nicht lösbar, da die Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich nach unten unbeschränkt ist.

Liegt keiner der obigen Fälle vor, dann heißt das Tableau **nicht entscheidbar** und es ist ein Austausch durchzuführen.

## Wie wird das Pivotelement ausgewählt?

Man geht nach folgenden Schritten vor:

- Wähle eine Spalte mit negativem Zielfunktionskoeffizienten. Das ist dann die Pivotspalte.
- Bilde für die negativen Einträge der Pivotspalte (und nur für diese!) folgende Quotienten:

$$-\frac{\text{Eintrag auf der rechten Seite}}{\text{Eintrag in der Pivotspalte}}.$$

(Beachte, dass die Quotienten selbst durch das negative Vorzeichen dann wieder positiv sind.)

- Wähle eine Zeile aus, in der der Quotient am kleinsten ist. Das ist die Pivotzeile.

Der Eintrag, in dem sich Pivotspalte und Pivotzeile kreuzen, ist das Pivotelement.

## Wie erzeugt man das neue Tableau?

Zunächst wird an das alte Tableau eine Kellerzeile angefügt. Diese hat in der Spalte, in der das Pivotelement steht, einen 1 stehen. Alle anderen Einträge berechnen sich wie folgt:

$$\text{Kellerzeile} = -\frac{\text{Pivotzeile}}{\text{Pivotelement}}.$$

Danach geht man wie folgt vor:

- An der Stelle, wo das Pivotelement stand, steht jetzt

$$\text{neuer Eintrag} = \frac{1}{\text{altes Pivotelement}}.$$

- Die Spalte, die Pivotspalte war, berechnet sich gemäß

$$\text{neue Einträge} = \frac{\text{alte Pivotspalte}}{\text{altes Pivotelement}}.$$

- Die Zeile, die Pivotzeile war, ist gleich der alten Kellerzeile.
- Alle anderen Einträge berechnen sich nach der folgenden Formel:

$$\text{neuer Eintrag} = \text{alter Eintrag} + \text{Eintrag der alten Pivotspalte} \cdot \text{Eintrag der alten Kellerzeile}.$$