Treść zagadnienia:

$$-k(x)\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$$
$$u(2) = 3$$
$$\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} + u(0) = 20$$
$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in (1,2] \end{cases}$$

Szukana jest funkcja

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

Przekształcamy nasze równanie do postaci

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

$$-(\alpha u')' = -ku''$$
$$\alpha' u' + \alpha u'' = ku''$$
$$k' = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = k$$

$$-(ku')' = 0$$

Znajdujemy $B(u,v)$ i $L(v)$, gdzie v to funkcja testowa

$$-(ku')'v = 0$$
$$-\int_0^2 (ku')'v \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned} -\int_0^2 (ku')'v \,\mathrm{d}x &= -[ku'v]_0^2 + \int_0^2 ku'v' \,\mathrm{d}x \\ &= -k(2)u'(2)v(2) + k(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 ku'v' \,\mathrm{d}x \\ &= \;* \end{aligned}$$

W $x = 2$ mamy warunek Dirichleta, więc dla funkcji testowej v zakładamy w nim

$$v(2) = 0 \;\Rightarrow\; -k(2)u'(2)v(2) = 0$$

W $x = 0$ mamy warunek Cauchy'ego, więc obliczamy dla niego

$$
\begin{aligned}
1 \cdot u'(0) + u(0) &= 20 \\
k(0) \cdot u'(0) + u(0) &= 20 \\
k(0)u'(0)v(0) + u(0)v(0) &= 20v(0) \\
k(0)u'(0)v(0) &= 20v(0) - u(0)v(0)
\end{aligned}
$$

Podstawiamy wyrażenia otrzymane z warunków granicznych do równania obliczonego wcześniej

$$* \;=\; 0 + 20v(0) - u(0)v(0) + \int_0^2 ku'v' \,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
20v(0) - u(0)v(0) + \int_0^2 ku'v' \,\mathrm{d}x &= 0 \\
-u(0)v(0) + \int_0^2 ku'v' \,\mathrm{d}x &= -20v(0)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
B(u,v) &= -u(0)v(0) + \int_0^2 ku'v' \,\mathrm{d}x \\
L(v) &= -20v(0)
\end{aligned}
}
$$

$$B(u,v) = L(v)$$

Robimy shift zgodnie z początkowym warunkiem Dirichleta

$$\tilde{u}(2) = 3 \;\Rightarrow\; \tilde{u}(x) = 3$$

$$w = u - \tilde{u}$$

$$B(w,v) = B(u,v) - B(\tilde{u},v)$$

$$B(w,v) = L(v) - B(\tilde{u},v)$$

Definiujemy ciąg funkcji bazowych

$$e_k(x) = \max\left\{0,\; 1 - \left|\frac{x}{h} - k\right|\right\} \quad x \in [0,2],\; k \in \{0,1,...,n\}$$

Ciąg funkcji testowych będzie równy ciągowi funkcji bazowych

$$v_i = e_i$$

Definiujemy również funkcję w jako sumę iloczynów funkcji bazowych i ich wag

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot e_i(x)$$

gdzie $w_n = 0$ z warunku Dirichleta, a reszta w_i jest szukana.

Podstawiamy równanie na $w(x)$ zdefiniowane wyżej do naszego równania

$$B(w, v) = B\left(\sum_{i=0}^{n} w_i e_i, v\right) = \sum_{i=0}^{n} w_i B(e_i, v)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} w_i B(e_i, v) = L(v) - B(\tilde{u}, v)}$$

Dla czytelności zapisu następnych obliczeń definiuję funkcję

$$g(e_i, e_j) = \int_0^2 k \cdot e_i' \cdot e_j' \, \mathrm{d}x$$

Dla optymalizacji obliczeń dokonanych przez komputer rozpiszę tutaj wyrazy głównego równania na przypadki.

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} g(e_i, e_j) - 1, & (i, j) = (0, 0) \\ g(e_i, e_j), & |i - j| \leq 1 \land (i, j) \neq (0, 0) \\ 0, & |i - j| > 1 \end{cases}$$

Jako że $\tilde{u}' = 0$ całka w $B(\tilde{u}, v)$ się zeruje, więc stąd mamy

$$L(e_i) - B(\tilde{u}, e_i) = \begin{cases} -17, & i = 0 \\ 0, & i \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}$$

Podstawiając każdą naszą funkcję testową, otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} w_0 \cdot (g(e_0, e_0) - 1) + w_1 \cdot g(e_1, e_0) & & &= -17 \\ w_0 \cdot g(e_0, e_1) + w_1 \cdot g(e_1, e_1) & &+ w_2 \cdot g(e_2, e_1) &= 0 \\ w_1 \cdot g(e_1, e_2) + w_2 \cdot g(e_2, e_2) & &+ w_3 \cdot g(e_3, e_2) &= 0 \\ & & &\vdots \\ w_{n-3} \cdot g(e_{n-3}, e_{n-2}) + w_{n-2} \cdot g(e_{n-2}, e_{n-2}) & &+ w_{n-1} \cdot g(e_{n-1}, e_{n-2}) &= 0 \\ w_{n-2} \cdot g(e_{n-2}, e_{n-1}) & &+ w_{n-1} \cdot g(e_{n-1}, e_{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$

który (czytelniej) zapisujemy jako macierz trójdiagonalną

$$\begin{bmatrix} g(e_0, e_0) - 1 & g(e_1, e_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ g(e_0, e_1) & g(e_1, e_1) & g(e_2, e_1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g(e_{n-3}, e_{n-2}) & g(e_{n-2}, e_{n-2}) & g(e_{n-1}, e_{n-2}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(e_{n-2}, e_{n-1}) & g(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z tego jesteśmy w końcu w stanie obliczyć nasze wagi w_i i uzyskać funkcję $u = w + \tilde{u}$.