2014—2015 学年
第一学期《高等数学Ⅰ、Ⅱ》（上）期末考试试卷(B)

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

得 分	

1.已知函数 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$ 确定，则 $y'(0)=$ __0__ 。

2.$\int_{0}^{2} f\ x\,dx=$ __$\frac{7}{3}$__ ，其中 $f(x)=\begin{cases} x^{2} & 0\le x\le 1 \\ 2 & 1<x<2 \end{cases}$

3 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^{2}) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}=$ __$\frac{1+t^{2}}{4t}$__ 。

4.求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{3x}{x^{2}+1}\right)=$ __3__。

5.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{x}\sin^{2}t\,dt}{\sin x^{3}}=$ __$\frac{1}{3}$__ 。

6.设 $f'(x_{0})$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_{0}+2\Delta x+(\Delta x)^{2}\right)-f(x_{0})}{\Delta x}=$ __$2f'(x_{0})$__

7. 设 函 数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(1-\cos x)}{x^{2}} & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \ln(b+x^{2}) & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连 续 ， 则

$a=$ __2__ ,$b=$ __e__ 。

8. 微 分 方 程 $y''-6y'+8y=e^{x}+e^{2x}$ 的 一 个 特 解 y^{*} 具 有 的 形 式 为

$y^{*}=$ $\underline{\quad ae^{x}+bxe^{2x} \quad}$ 。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得 分	

9.若 $f(x)$ 是奇函数且 $f'(0)$ 存在，则 $x=0$ 是函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 的　　（ B ）

（A）无穷间断点　　（B）可去间断点

（C）连续点　　（D）振荡间断点

10.在区间 $[0,8]$ 内，对函数 $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ 罗尔定理　　（ C ）

（A）不成立　　（B）成立，并且 $f'(2)=0$

（C）成立，并且 $f'(4)=0$　　（D）成立，并且 $f'(8)=0$

11.设 $f(x)=\int_0^x \sin t^2 dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的　（ B ）

（A）等价无穷小　　（B）同价但非等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小

12.由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x \quad (0\le x\le \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为　　（ C ）

（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{4}{3}\pi$　　（D）$\dfrac{2}{3}\pi$

13.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>0$，若 $\Phi\ x=\int_a^x f\ t\,dt$，则下列说法正确的是　　（ C ）

（A）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少　　（B）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加

（C）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 为凹函数　　（D）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸函数

14. 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处 (A)

（A）取得极大值　　（B）取得极小值

（C）某个邻域内单调增加　　（D）某个领域内单调减少

三．解答题（每小题 5 分，共 30 分）

得 分	

15. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解：因 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 …………(2)

因：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 …………(2)

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导 …………(1)

16. 求函数 $y=x\ln x$ 的极值。

解：定义域 $(0,+\infty)$

$y'=\ln x+1$　　令 $y'=0$ 得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{e}$ …………(2)

又因 $y''=\dfrac{1}{x}>0$　　$y''\left(\dfrac{1}{e}\right)>0$ …………(2)

所以 $x=\frac{1}{e}$ 是极小值点，极小值为：$y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ …………(1)

17. 计算不定积分 $\int\frac{x^3}{4+x^2}dx$。

解: $\int\frac{x^3}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{4+x^2}dx^2$ …………(2)

$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{4}{4+x^2}\right)dx^2$ …………(2)

$=\frac{1}{2}x^2-2\ln\left(4+x^2\right)+C$ …………(1)

18. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$。

解：$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int_0^{+\infty}\frac{d\ x+2}{x+2^{\ 2}+4}$ …………(2)

$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\Big|_0^{+\infty}$ …………(2)

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$ …………(1)

19. 求微分方程：$(6x+y)dx+xdy=0$ 的通解。

解：原方程可化为：$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=-6$ …………(1)

由一阶线性微分方程的通解公式得

$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(-6)e^{\int\frac{1}{x}dx}+C\right]$ …………(3)

$=\frac{1}{x}\left(C-3x^2\right)$

即：$3x^2+xy=C$ …………(1)

20. 设曲线 $y=x^2$ 与 $y=cx^3\quad(c>0)$ 所围成的面积为 $\frac{2}{3}$，求常数 c 的值。

解：两曲线的交点 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=cx^3 \end{cases}$，解得 $(0,0),\left(\frac{1}{c},\frac{1}{c^2}\right)$ …………(1)

$S=\int_0^{\frac{1}{c}} x^2-cx^3\ dx$ …………(3)

$=\left[\frac{1}{3}x^3-c\cdot\frac{x^4}{4}\right]\begin{matrix}\frac{1}{c}\\0\end{matrix}=\frac{1}{3c^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{c^3}=\frac{1}{12c^3}$

令：$\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3}$，$c^3=\frac{1}{8}$，所以 $c=\frac{1}{2}$ …………(1)

四．解答题（每小题 6 分，共 18 分）

得 分	

21.设 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，求 $f(x)$。

解：原方程两边求导得：$f'(x)=2f(x)$，即 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2$ ....(2)

积分得：$f(x)=ce^{2x}$ ....(2)

由 $f(0)=\ln 2$，得 $c=\ln 2$，从而 $f(x)=e^{2x}\ln 2$ ....(2)

22.计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}dx$。

解：设 $\sqrt{2x-1}=t$，则 $x=\frac{1+t^2}{2}$，$dx=tdt$ ....(2)

因此，原式 $=\int_0^1 te^t dt$ ....(2)

$=\int_0^1 tde^t=te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt$ ....(1)

$=e-e^t\Big|_0^1=1$ ....(1)

23.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{1-\sqrt{1+x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{-\frac{1}{2}x}$ ....(2)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right]}{-\frac{1}{2}x}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{-\frac{1}{2}x}.$$

$$=-2e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-2e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)}-1}{2x}$$ ....(3)

$$=-2e\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=e$$ ....(1)

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

24. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导 $(a>0)$，$f(0)=0$，$f''(x)>0$，证明：$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 单调递增。

证：$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ ....(2)

设 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，来证：$g(x)>0$ $\quad x\in[0,a]$

因 $g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$

以及 $f''(x)>0$， $\quad x\in[0,a]$

所以：$g'(x)=xf''(x)>0$ $\quad x\in[0,a]$

即：$g(x)$ 单调递增 ....(2)

由己知：$f(0)=0$

知：$g(0)=0-f(0)=0$ ...

所以：$g(x)>g(0)=0$ $\quad x\in[0,a]$ ....(1)

故 $F'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}>0$ $\quad x\in(0,a)$

即：$F(x)$在$(0,a)$单调递增 ....(1)

....(1)

25.设$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots\frac{a_n}{n+1}=0$，证明 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(0,1)$内至少有一个零点。

证：设$g(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ ....(2)

有$g'(x)=f(x)$

且$g(0)=0,g(1)=0$， ....(1)

对 $g(x)$ 在$[0,1]$上使用罗尔定理知：

至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得

$g'(\xi)=0$

而：$g'(\xi)=f(\xi)=0 \qquad \xi\in(0,1)$

所以$\xi\in(0,1)$是$f(x)$在$(0,1)$内的零点 ....(2)