2013—2014 学年

第一学期《高等数学I、II》考试试卷（A 卷）

大题	一	二	三	总分
得分				

一、 填空题（每小题 3 分，共 48 分）

得 分	

1. $f(x)=\ln(1-x^2)$，已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2h)}{h}=\dfrac{3}{2}$，$x_0=$ ____ $-\dfrac{1}{3}$ ____.

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ____ -1 ____.

3. 函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ 的既递减又上凸的区间是 ____ $(-1,1)$ ____.

4. $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=e^t\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ____ $\dfrac{e^t(t-1)}{4t^3}$ ____.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=1$，那么 $f'(0)=$ ____ 2 ____

6. $\int_{-2}^{2}\dfrac{x+|x|}{2+x^2}dx=$ ____ $\ln 3$ ____.

7. $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ 的通解为 ____ $-e^{-y}=e^x+c$

8. 设 $f(x+1)=x^3$，则 $f'(x-1)=$ ____ $3(x-2)^2$ ____.

9. 方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 $y'(0)=$ ____ 0 ____。

10. 若函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f'(x_1)=f'(x_2)=0,\ f''(x_1)<0<f''(x_2)$,则 $f(x_1),f(x_2)$.的大小关系为 ____ $f(x_1)>f(x_2)$. ____

11. 变上限函数 $\int_1^{x^2}\sin t dt$ 的导数等于 ____ $2x\sin x^2$ ____

12. 设 x，e^x，e^{-x} 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的三个特解，则该方程的通解为 $y=C_1(e^x-x)+C_2(e^{-x}-x)+x$。

13. 广义积分 $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ = $\underline{\quad 1 \quad}$。

14. 微分方程 $\boldsymbol{y''-2y'+5y=0}$ 的通解为 $\underline{y=e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)}$

15. $\int f(x)dx=\sin^2 x+c,\quad \int xf'(x)dx=$ $\underline{x\sin 2x-\sin^2 x+C}$.

16. 函数 $f(x)=e^{-x}$ 的四阶麦克劳林公式是 $\underline{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}$

二、计算题（满分 24 分，每小题 6 分）

得 分	

17.求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(a^t-b^t)dt}{\int_0^{2x}\ln(1+t)dt}(a>0,b>0)\quad(a\neq b)$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{2\ln(1+2x)}$ 3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{\frac{4}{1+2x}}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{a}{b}$$

3 分

18、求曲线 $y=(x+2)e^{-\frac{1}{x}}$ 的渐近线。

解：$\because\ \lim\limits_{x\to\infty}y=+\infty$，$\therefore$无水平渐近线 2 分

$\lim\limits_{x\to 0^-}y=+\infty$，有铅垂渐近线 $x=0$ 2 分

$$\because\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}[2+x(1-e^{\frac{1}{x}})]=1$$

$\therefore$ 斜渐近线：$y=x+1$ 2 分

19. 计算 $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{x^2}dx$

解：原式= $e^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}+c$ $=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}+\frac{1}{2}$ 6 分

20. 求 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

解：$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ 2 分

$=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx-\int\frac{d\cos x}{1+\cos x}$

$=\tan\frac{x}{2}-\ln|1+\cos x|+C$

4 分

三、解答题（ **满分 28 分，每小题 7 分**）

得 分	

21. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})$

解：由于 $\frac{1}{1+x}$ 在[0，1]可积，由定积分的定义知（1 分）

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})$ =

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$ （6 分）

22. 设曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的过原点的切线与 x 轴和曲线所围成的平面图形记为 S，试求将平面图形 S 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解：设切点为的坐标为 $\left(a,\sqrt{a-1}\right)$，则过原点的切线的斜率为 $k=\frac{\sqrt{a-1}}{a}$，

又因，$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$，则：$\frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}}{a}$，$a=2$，

$\therefore$ 切点坐标为：$(2,1)$，切线方程为：$y=\frac{1}{2}x$ ； 3 分

平面图形S绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为：

$$V_y=\pi\int_0^1\left[\left(y^2+1\right)^2-\left(2y\right)^2\right]dy=\pi\int_0^1\left(y^4-2y^2+1\right)dy=\frac{8}{15}\pi \qquad 4\text{ 分}$$

23.设$f(x)$为连续函数，且适合关系式$f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，试求函数$f(x)$。

解：$\because f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$　　　令$y=f(x)$

则$y'=c^x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$

$y''=e^x-f(x)$　　即$y''+y=e^x$　　　　4 分

$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda=\pm i\ \therefore y_1=c_1\cos x+c_2\sin x$　　　　1 分

设$y^*=ae^*$　　得　　$ae^x+ae^x=e^x\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$　　　　1 分

又$f(0)=1\quad f'(0)=1\Rightarrow c_1=c_2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$　　　　1 分

24、设函数$f(x)$在$[a,b]$上可导，$a<f(x)<b$且$f'(x)\neq1(a<x<b)$　　试证：在(a,b)内存唯一的ξ使$f(\xi)=\xi$。

证明：先证存在性. 令$F(x)=f(x)-x$，

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，

又$F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$（又因$a<f(x)<b$）

由零值定理可知存在一个$\xi\in(a,b)$使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。　　4 分

再证唯一性. 用反证法.设有$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得$f(\xi_1)=\xi_1$，$f(\xi_2)=\xi_2$

又由题设可知$f(x)$在ξ_1,ξ_2之间满足拉格朗日中值定理，

于是存在ξ在ξ_1,ξ_2之间，使得$f'(\xi)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=1$

与假设 $f'(x) \neq 1(a < x < b)$ 矛盾，即唯一性成立。 3 分