线性代数习题册

第一章　习题　1-1　（部分简解）

欢迎加入 **理工16级数学交流-3群：　651058921**

（已加季老师16级群的同学不用再加，请相互转告转发！）

习题1-1

2. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 1 + x_4 \end{cases}$

4. 设线性方程组：$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$ 问 λ 取何值时，这个方程组有解，并解之.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$ $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4 - x_3 - 6x_4}{5} \\ x_2 = \dfrac{3 + 3x_2 - 7x_4}{5} \end{cases}$$

习　题　1-2

1. 设矩阵：$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 AB，$AB-BA$。

$AB=\begin{pmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{pmatrix}$　　$AB-BA=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{pmatrix}$

2．计算：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$；　　　　（2）$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$；

因：$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi-\sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi+\cos^2\varphi \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos2\varphi & -\sin2\varphi \\ \sin2\varphi & \cos2\varphi \end{pmatrix}$

…………

所以：$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n}_{3} = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

3. 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $n\geq 2$, 求A^n-2A^{n-1}.

解：$\because A^n-2A^{n-1}=A^{n-1}(A-2E)=A^{n-2}A(A-2E$

而 $A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

又：$A(A-2E)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore A^n-2A^{n-1}=0$

4. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，就说矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

设 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

则: $AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{bmatrix}$

因 $AB=BA$，所以: $c=0$ 及 $b+d=a+b \Rightarrow a=d$，所以:

$B=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}$

5. 设 $A^k=0$，证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

5. 设$A^k=0$，证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

因 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$

$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-A^3-\cdots-A^{k-1}-A^k$

$=E-A^k=E$ $\therefore$ $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

习题1-3

3．已知线性变换$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3 \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$，求从变量$x_1, x_2, x_3$到变量$y_1, y_2, y_3$的线性变换。

解：因 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

4. 求矩阵 X. 设

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xRightarrow{r_1+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

讲 (2) $X\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

$X=\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3 & 4/3\\ 2/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/3 & 5/6 & 4/3\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/6 & 2/3\\ 1/3 & 1/6 & -1/3\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

第一章补充题

1. D

2. $A^{11}=A^{12}A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

3. 用反证法.若 A 可逆,用 A^{-1}左乘 $A^2=A$,得 $A=E$.与已知矛盾.

4. 将已知等式变形为$-(E-A)^2=E$,知$(E-A)^{-1}=A-E$

5. 略

6. 由 $B=E+AB$,得$(E-A)B=E$,即$(E-A)^{-1}=B$.再由$C=A+CA$得

   $C=A(E-A)^{-1}=AB$,故$B-C=B-AB=E$

7. (1) 由已知等式可得 $(A-2E)(E-B)=-2E$,故 $A-2E$ 可逆且

   $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-E)$

   (2) 两个互逆的矩阵一定是可交换的矩阵,故 $(A-2E)\cdot\frac{1}{2}(B-E)=\frac{1}{2}(B-E)\cdot(A-2E)$,化简得 $AB=BA$