线性代数习题册

第二章 习题 （部分简解）

欢迎加入 理工16级数学交流-3群： 651058921

（已加季老师16级群的同学不用再加，请相互转告转发！）

习题2-1

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 的全部余子式，并计算行列式的值. -7

$M_{11}=-4 \quad M_{12}=-1 \quad M_{13}=-4$

$M_{21}=-1 \quad M_{22}=-2 \quad M_{23}=-1$

$M_{31}=-11 \quad M_{32}=-1 \quad M_{33}=-4$

2. 解线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

讨论：

当：$\lambda = -2$ 时无解　当：$\lambda = 1$ 时解为 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

当：$\lambda \neq -2$，$\lambda \neq 1$ 时，$x_1 = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}$　$x_2 = \dfrac{1}{\lambda+2}$　$x_3 = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{c_1+c_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2)(1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} \overset{r_3+(-1)r_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{r_{12}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

$$= (\lambda+1)^2\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$$

讨论见上：

习题2-2

(4) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & x+a_3 \end{vmatrix}$ $\times\frac{1}{x}$

$$\xrightarrow[\frac{1}{x}\text{加到第二行}]{\text{第一行乘}} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & x & 0 & \frac{a_0}{x}+a_1 \\ 0 & -1 & x & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & x+a_3 \end{vmatrix} \times\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{加到第三行}]{\text{第二行乘}\frac{1}{x}} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & x & 0 & \frac{a_0}{x}+a_1 \\ 0 & 0 & x & \frac{a_0}{x^2}+\frac{a_1}{x}+a_2 \\ 0 & 0 & -1 & x+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & x & 0 & \frac{a_0}{x}+a_1 \\ 0 & 0 & x & \frac{a_0}{x^2}+\frac{a_1}{x}+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_0}{x^3}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x}+x+a_3 \end{vmatrix} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$$

$\times(-1)$

(7) $$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 & 1+a_1b_4 \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 & 1+a_2b_4 \\ 1+a_3b_1 & 1+a_3b_2 & 1+a_3b_3 & 1+a_3b_4 \\ 1+a_4b_1 & 1+a_4b_2 & 1+a_4b_3 & 1+a_4b_4 \end{vmatrix}$$ $\times(-1)$ (8)

$$\xrightarrow{\text{第一行乘}(-1)\text{加到第二行、第三行}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 & 1+a_1b_4 \\ b_1(a_2-a_1) & b_2(a_2-a_1) & b_3(a_2-a_1) & b_4(a_2-a_1) \\ b_1(a_3-a_1) & b_2(a_3-a_1) & b_3(a_3-a_1) & b_4(a_3-a_1) \\ 1+a_4b_1 & 1+a_4b_2 & 1+a_4b_3 & 1+a_4b_4 \end{vmatrix} =$$

$= 0$ （因第二行、第三行成比例）

)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

(按第一列展开)

$$= (-1)^{n+1} n (n-1)!$$

$$= (-1)^{n+1} n!$$

(9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -n+1 \end{vmatrix}$;

从第二列起，把每一列加到第一列得：

$$= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -n+1 \end{vmatrix}$$

再按第一列展开

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n-1} (n-1)!$$

原式 $\xlongequal[C_{n-2}+1\cdot C_{n-1}]{C_{n-1}+1\cdot C_n}$

(10) $\left.\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \unicode{x22F0} & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \unicode{x22F0} & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}\right.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行} \end{array}$

$$= \begin{vmatrix} a-b & & & & & & & b \\ & a-b & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \unicode{x22F0} & & \\ & & & a-b & b & & & \\ & & & b-a & a & & & \\ & & \unicode{x22F0} & & & \ddots & & \\ & b-a & & & & & a & \\ b-a & & & & & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & & & & & & & b \\ & a-b & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \unicode{x22F0} & & \\ & & & a-b & b & & & \\ & & & 0 & a+b & & & \\ & & \unicode{x22F0} & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & a+b & \\ 0 & & & & & & & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a^2-b^2)^n$$

4. 证明下列等式：$\overset{c_1+(-x)c_2}{=\!=}$

（1）$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

解：左式 $\overset{c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} (1-x)(a_1-b_1) & a_1x+b_1 & c_1 \\ (1-x)(a_2-b_2) & a_2x+b_2 & c_2 \\ (1-x)(a_3-b_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\overset{c_1+c_2}{=} (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ 右

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i};$$

第一列展开 递推法

$D_2 = x^2 + a_1 x + a_2$

$D_3 = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

$D_{n-1} = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$

$= xD_{n-1} + a_n$

习　题　2-3

1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 和逆矩阵 A^{-1}.

$|A|=-1$　$A^*=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{cases} 2x - y + z = 1, & \cdots\cdots(1) \\ 3x + 2y - z = 3, & \cdots\cdots(2) \\ 7x + z = 6; & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

因 (1)×2 + (2) 得:

$7x + z = 5$

与方程 (3) 构成矛盾方程，无解.

3. 设 n 阶矩阵 A 满足 $AA'=E$，$|A|<0$，E 为 n 阶单位矩阵，求行列式 $|A+E|$.

证：$(A+B)'=A'+B' \Rightarrow (A'+E)'=A+E$.

解：$|A+E|=|A+AA'|=|A(E+A')|=|A|\,|E+A'|$

$=|A|\,|(E+A')'|=|A|\,|A+E|$

$\therefore \left.\begin{array}{l}|A+E|(1-|A|)=0\\ |A|<0\end{array}\right\} \Rightarrow |A+E|=0$

3. 设n阶矩阵A满足$AA'=E$，$|A|<0$，E为n阶单位矩阵，求行列式$|A+E|$.

解二

$\because AA'=E \quad \therefore |AA'|=|A||A'|=|A|^2=1$

$\therefore |A|=-1$

$\because |A+E|=|A+AA'|=|A||E+A'|=|A||E+A|=-|A+E|$

$\therefore 2|A+E|=0 \quad \therefore |A+E|=0$

4.设A是3阶矩阵,A^*是A的伴随阵,$|A|=\dfrac{1}{2}$，求

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$$

解：$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2A^*\right|$$（是和、差的行列式）

$$=\left|\frac{1}{3}\frac{1}{|A|}A^*-2A^*\right|=\left|\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}-2\right)A^*\right|=\left|-\frac{4}{3}A^*\right|$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)^3|A^*|=\left(-\frac{4}{3}\right)^3\cdot|A|^{3-1}=\left(-\frac{4}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}=-\frac{16}{27}$$

$$|A^*|=|A|^{n-1}$$

5. A 为 n 阶矩阵，$|A|=2$，求行列式 $\left|\left(-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|$.

$$=\left|-2A^{-1}\right|=(-2)^n|A|^{-1}$$

$$=(-2)^n\cdot 2^{-1}=(-1)^n\cdot 2^{n-1}$$

6. 问λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} x+y+\lambda z=0, \\ x+\lambda y+z=0, \\ \lambda x+y+z=0; \end{cases}$只有零解？

解：$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{加到第1列}]{\text{第2,3列}} \begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & \lambda \\ 2+\lambda & \lambda & 1 \\ 2+\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (2+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(2+\lambda)(\lambda-1)^2$

当$|A| \neq 0$，即：$\lambda \neq 1$，$\lambda \neq -2$ 时，方程只有零解.

第二章补充题

1. $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$

2. $(1+\dfrac{a_1}{\lambda_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{\lambda_n})\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

3. $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ c & b & d & 1 \\ d & b & c & 1 \\ a & b & d & 1 \end{vmatrix}=0$

4. **提示:用数学归纳法.**

5. （1）$|A|\neq 0$时，$AA^*=|A|E$两边取行列式，得$|A|\cdot|A^*|=|A|^n$，

两边除以$|A|$，得$|A^*|=|A|^{n-1}$.

（2）$|A|=0$时，

若 A=0，则由$A^*=0$，故$|A^*|=0$.

若$A\neq 0$，则$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，其中必存在$A_i\neq 0$。

因$A^*A=|A|E=0$，

故$A^*(A_1,A_2,\cdots,A_n)=0$，其中$A^*A_i=0$，

即$A^*X=0$有非零解，

故$|A^*|=0$。

6 $b, c, d, -(b+c+d)$

7. $AA^* = AA' = |A|E, \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|A| = 1$

$|A| = 3a_{11}^2 = 1 \Rightarrow |A| = 1$ 且 $a_{11} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$