线性代数习题册

第三章　习题　(部分解答)

习 题 3-1

1. 判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若能，写出一种表示：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$；

解：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{一系列初等}} \cdots \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \beta' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

因 $\beta' = \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3'$ 所以：$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\3\\0\\5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\7\\-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}8\\3\\-1\\-25\end{bmatrix}$.

$$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\beta) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 107 \\ 0 & 0 & 0 & 325 \end{pmatrix}$$

$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=3 \neq r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta)=4$

所以β不能由。。。。

2. 判断下列向量组是否组性相关：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\5\\7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$；

$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 无关

(2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}$; 至加元素二组生

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相关

$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$

(3) $\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}6\\2\\4\end{bmatrix}$.

$(\alpha_1\ \alpha_2) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$ 无关

3. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}t\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\t\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，试求出 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关或线性无关.

解：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}tk_1+2k_2+k_3=0\\2k_1+tk_2-k_3=0\\k_1\qquad\quad+k_3=0\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}t&2&1\\2&t&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&2&1\\3&t&-1\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=t^2-t-6=(t-3)(t+2)$$

所以：$t=3$，$t=-2$ 时，$D=0$，

方程有非零解. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

当 $t\neq3$，$t\neq-2$ 时，$D\neq0$，方程组只有零解. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

4. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明：向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$也线性无关：证：由$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

得：$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

因：α_1，α_2，α_3线性无关，则必有：

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0$$

所以该方程组只有零解：$k_1=k_2=k_3=0$

由定义：$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$线性无关

5. 若向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_3$ 线性无关，证明：向量组 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3-a_1$ 线性相关.

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3-\alpha_1)=0$$

$$\Rightarrow (k_1-k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1-k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \quad D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-1=0 \Rightarrow \text{有非零解} \Rightarrow \text{相关}.$$

习 题 3-2

1. 求下列向量组的一个极大线性无关组和秩：并将其余向量用极大无关组线性表示

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\4\\-2\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\1\end{bmatrix}.$$

解：$(\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=2$ 而 $r(\alpha_1\alpha_2)=2$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2$ 为极大无关组.

方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-2x_3+x_4\\x_2=x_3-2x_4\end{cases}$

取两组解 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=-1\\x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=2\\x_3=0\\x_4=-1\end{cases}$ $\therefore \alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$

$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$

$[1 \quad 1 \quad -3 \quad -1]$

2. 求矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 \end{bmatrix}$的秩.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A)=2$$

3, 向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)'$, $\alpha_2=(2,0,t,0)'$, $\alpha_3=(0,-4,5,-2)'$ 的秩为 2,求 t 值.

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t=3$$

4. 证明：如果向量组（1）可被向量组（2）线性表示，那么向量组（1）的秩≤向量组（2）的秩.

设(1)的极大线性无关组为：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_t$ (1')，则(1)的秩 $= t$

(2) " " " " " " " "：$\beta_2, \beta_2 \cdots \beta_s$ (2')，则(2)的秩 $= s$

来证：$t \leq s$

因(1')可由(1)线性表示，由已知(1)可由(2)线性表示，而(2)可由(2')线性表示，所以：

(1')可由(2')线性表示，

(1')线性无关

$\Rightarrow t \leq s$

5.证明：如果基本单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$可被$n$维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，那么，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

证：因任意一个n维向量α_i都可被$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$线性表出，

故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$可以被$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$线性表出，

由已知：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$也可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$线性表出，

所以：$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$等价.

所以：$r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = n$ 所以$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$线性无关

6. 设 $m\times n$ 矩阵 A，m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，矩阵 $B=PAQ$．

证明：$r(A)=r(B)$．

因 P, Q 可逆，则 P、Q 可分解为：$P=P_sP_{s-1}\cdots P_1$，$Q=Q_1Q_2\cdots Q_t$

其中 P_i, Q_j $(i=1,2,\cdots s,\ j=1,2,\cdots t)$ 为初等矩阵．

因 $PAQ=P_sP_{s-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=B$

即：A 可经一系列初等行变换和列变换到 B，

而初等变换不改变矩阵的秩知：

$r(A)=r(B)$

习 题 3-3

1. 在向量空间 P^4 中，求由下列向量组生成的子空间的维数

（1）$\alpha_1 = (1,1,1,1)$，$\alpha_2 = (1,1,1,0)$

$$(\alpha_1' \alpha_2') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2维$$

(2) $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)$， $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$， $\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$

$$(\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ 秩}$$

第三章补充题

1\. 设向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而β_2不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 则对任意常数k，必有：

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关

解：　先用特殊值法来排除

取：$k=0$，（B），（C）被排除.

设向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而β_2不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．则对任意常数k，必有：

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关

再取：$k=1$, 若（D）成立,即：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$线性相关

因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关，所以：

$$\beta_1+\beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$ 即：

二、向量组的线性相关性

设向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而β_2不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 则对任意常数k，必有： (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关

$$\beta_1+\beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$ 即：

$$\Rightarrow \quad \beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3-\beta_1$$

$$=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3-(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

$$=(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+(k_3-l_3)\alpha_3$$

这与β_2不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出矛盾， 故D不成立。

结论： (A)正确。

下面来证明 (A)是正确的

即： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关

设向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而β_2不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．则对任意常数k，必有：

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关

反证：若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关.

又由已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

则：$k\beta_1+\beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

$$\Rightarrow \beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3-k\beta_1$$

$$=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3-k(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)$$

2. $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=(1,3,-10,0)'$, $\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_2=(6,-3,12,3)'$

3. $x\neq y, x\neq -2y$ 时秩为 3； $x=-2y\neq 0$时秩为 2； $x=y\neq 0$时秩为 1；

$x=y=0$时秩为 0

4. 计算知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2，故 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3|=15-a=0$，$a=15$

再由 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示得 $b=5$

5. 略