院（系）________ 班 级________ 姓 名________ 学 号________

密 封 线

成都理工大学 2014－2015 学年第一学期

《线性代数》考试试题 (A 卷)

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（3 分×8=24 分）

得分	

1、逆序数 τ（25341）＝_____6__________。

2、设 α ＝（1,2,3)′， β ＝（1,1,1)′，则 $\alpha\beta'$ =______ $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ _______。

3、设齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+kx_2+x_3=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\kx_2+3x_3=0\end{cases}$ 有唯一解，则 k 应满足条件_ $k\neq\frac{3}{5}$ _。

4、设 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&1\\4&2&3&1\\2&5&3&1\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$_0______________。

5、设 4 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$， $\lambda_3=3$， $\lambda_4=4$，设 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$，

$i=1,2,3,4$，矩阵 $P=[\xi_4,\xi_1,\xi_3,\xi_2]$，则 $P^{-1}AP$=__ $\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ ___。

6、已知向量组 $\alpha_1=(3,1,a)$， $\alpha_2=(4,a,0)$， $\alpha_3=(1,0,a)$，则当 $a=$___0 或 2_____时， α_1、α_2、α_3 线性相关。

7.行列式 $\begin{vmatrix}x&y&0&0\\0&x&y&0\\0&0&x&y\\y&0&0&x\end{vmatrix}$ =____ x^4-y^4 _________________________。

8.已知 A* =$\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}$，则 A =_____$\begin{pmatrix}4 & -3\\0 & 1\end{pmatrix}$__________。

二、选择题（3 分×6= 18 分）

得分	

1、设方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=1\\x_1-5x_2-x_3=b\\2x_1+2x_2+x_3=2\end{cases}$ 有无穷多组解，则有（B）。

（A) b=2　　（B）b=1　　（C）b=-1　　（D）b=-2

2、若 n 阶矩阵A经若干次初等变换化为B，则总有（D）。

(A) $|A|=|B|$

(B) 存在可逆矩阵 Q，使 B=AQ

(C) 方程组$AX=0$与方程组$BX=0$同解

(D) 秩$r(A)=$秩$r(B)$

3、向量组α_1、α_2，$\cdots\alpha_m$，$(m\geq 3)$线性无关的充要条件是（D）。

(A) 存在不全为零的数k_1，$k_2\cdots k_m$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m\neq 0$

(B) 向量组中任意两个向量都线性无关

(C) 向量组中存在一个向量,它不能用其余的向量线性表示

(D) 向量组中任意一个向量都不能用其余的向量线性表示

4、设n阶矩阵 A、B 为相似矩阵，则下列描述正确的是（C）。

（A）存在n阶可逆矩阵 P，Q，使$A=PBQ$

（B）存在n阶可逆矩阵 P，使$A=P'BP$

（C）存在n阶可逆矩阵 P，使$A=P^{-1}BP$

（D）存在n阶正交矩阵 P，使$A=P^{-1}BP$

5、下列矩阵中，不一定是方阵的是（　B　）。

(A)对称矩阵；　　(B)方程组的系数矩阵；

(C)可逆矩阵；　　(D)上（下）三角形矩阵。

6、齐次线性方程组 AX=0 有非零解是它的基础解系存在的（A）。

(A)充要条件；　(B)必要条件；　(C)充分条件；　(D)无关条件.

三、计算题（6 分×6= 36 分）

得分	

1.已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&3\\1&2&4\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&1\\-2&3&1\end{pmatrix}$，求 $(A'B)^{-1}$.

解：$(A'B)^{-1}=B^{-1}(A')^{-1}=B^{-1}(A^{-1})'$ (3 分)

$$=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&1\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&3\\1&2&4\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&1\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$$ (1 分)

$$=\begin{pmatrix}4&1&4\\4&5&7\\5&6&8\end{pmatrix}$$ (2 分)

2.设 A 是 3 阶矩阵，行列式 $|A|=\frac{1}{2}$,求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|$。

解：$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|$ (2 分)

$$=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|\frac{-2}{3}A^{-1}\right|$$ （1 分）

$$=(-\frac{2}{3})^{3}\left|A^{-1}\right|$$ (2 分)

$$=-\frac{8}{27}\frac{1}{|A|}=-\frac{16}{27}.$$ (1 分)

3. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩及一个极大线性无关组。

解：由$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 100 & 10 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 82 & 19 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3 分)

可得秩=2，而α_1, α_2是一个极大无关组。 （3 分）

4.计算 n 阶行列式的值$|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}$。

解：$|A| \underline{\underline{c_1 + c_2 + \cdots c_n}} \begin{vmatrix} n+x & 1 & \dots & 1 \\ n+x & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+x & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$ (3 分)

$\underline{\underline{r_2 - r_1, \dots, r_n - r_1}} \begin{vmatrix} n+x & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1}$ (3 分)

5.设三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，求$|A^{-1}|$的值。

解：A 的特征值为 1，2，3，则$|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$，（3 分）

于是$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{6}$ （3 分）

6. 用基础解系表示方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$ 的全部解。

解：$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

方程组化为$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$，有特解$\eta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ （3 分）

对应齐次方程组为$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$，有基础解系$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$（2 分）

方程组的全部解为$\eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ （1 分）

四、证明题 （5 分×2= 10 分）

得分	

1.设λ为可逆方阵 A 的特征值，求证$\lambda^{-1}|A|$为A^*的特征值。

证明：设$A\xi = \lambda\xi$, 则$A^{-1}\xi = \frac{1}{\lambda}\xi$ （1 分）

$|A|A^{-1}\xi = |A|\frac{1}{\lambda}\xi$ （1 分）

即$A^*\xi = |A|\frac{1}{\lambda}\xi = \lambda^{-1}|A|\xi$ （2 分）

于是$\lambda^{-1}|A|$为A^*的特征值 （1 分）

2. 证明若对称矩阵 A 为非奇异矩阵，则 A^{-1} 也对称。

证明：若$A = A'$且A^{-1}存在， （2 分）

则$\left(A^{-1}\right)' = \left(A'\right)^{-1} = A^{-1}$ （3 分）

五、解答题（12 分）

得分	

已知二次型 f $= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$，写出它的矩阵，并用正交变换法化 f 为标准型。

解：$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，（2 分）

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$，特征值 $\lambda=1$，$\lambda=3$（二重）

（3 分）

对 $\lambda=1$，解方程组 $(\lambda E-A)X=0$，得 $\eta_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$（1 分）

对 $\lambda=3$，解方程组 $(\lambda E-A)X=0$，得 $\eta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\eta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$（2 分）

将 η_1，η_2，η_3 正交化标准化得 $T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$（3 分）

令 $X=TY$ 可化二次型为标准型，$f=y_1{}^2+3y_2{}^2+3y_3{}^2$（1 分）