院系________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线

成都理工大学 2016—2017 学年

第一学期《高等数学Ⅰ、Ⅱ》（上）考试试卷（A 卷）

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每题 3 分，共 24 分）

1、曲线 $y=(x+2)e^{-\frac{1}{x-1}}$ 的铅直渐近线为 $\underline{x=1,}$ 。

2、广义积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx=$ ______$\underline{\frac{1}{2}}$________。

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$ $\underline{\quad e\quad}$.

4、设 $y-xe^y=1$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $\underline{\quad e\quad}$.

5、积分 $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{x^2}dx=\underline{e^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}+C}$

6、函数 $f(x)=xe^x$ 的拐点是 $\underline{(-2,-2e^{-2})}$ 。

7．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=\underline{\frac{1}{2}}$

8．若 $\int xf(x)dx=x^2e^{2x}+c$ ，则 $df(x)\big|_{x=0}=$ ___$\underline{\ 6\ }$___ dx .

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

9．微分方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式是（ A ）

A． $(Ax+B)e^{2x}$　　B． Axe^{2x}

C． $x(Ax+B)e^{2x}$　　D． Ax^2e^{2x}

10、微分方程 $y' \cdot x\ln x = y$ 的通解是（ B ）

（A） $y = \ln x + C$　　　（B） $y = C\ln x$

（C） $y = Cx$　　　（D） $y = \ln x$

11. 若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极小值, 则必有（B　）.

(A) $f'(x_0) = 0$;　　　(B) $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在;

(C) $f''(x_0) > 0$;　　　(D) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$.

12、已知当 $x \to 0$ 时，$(e^{2x} - a - bx)\sin x$ 与 x^2 是等价无穷小量，则（ B ）。

(A) $a = 1, b = 2$　　　(B) $a = 1, b = 1$

(C). $a = 2, b = 1$　　　(D). $a = 1, b = -1$

13、设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且 $f'(4) = 1$，则

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1 - 2\sinh)}{h} = \text{（ C ）}$$

(A)　0　　　(B)　－1

(C).　3　　　(D). 不存在

14．设方程 $f(x) = 0$ 有两根 a，b.且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则方程 $f'(x) = 0$，在 (a,b) 内(　B　).

(A) 只有一实根.　　　(B) 至少有一实根.

(C) 没有实根.　　　(D) 无法判断是否有根.

三、计算题（每题 5 分，共 30 分）

15．计算 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

解：原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ .$$

16． $\boldsymbol{y=(1+x)^{\sin x}}$ 求 y' .

解： $y=e^{\sin x\ln(1+x)}$

$$y'=e^{\sin x\ln(1+x)}\cdot(\cos x\ln(1+x)+\frac{\sin x}{1+x})$$

$$=(1+x)^{\sin x}(\cos x\ln(1+x)+\frac{\sin x}{1+x})\ .$$

17． 设 $\boldsymbol{x=f'(t)}$ ， $\boldsymbol{y=tf'(t)-f(t)}$.且 $\boldsymbol{f''(t)\neq 0}$ ， 求 $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

解： $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{[tf'(t)-f(t)]'}{f''(t)}=t}$

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}}$$

18 计算不定积分 $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

解：原式=

$$\int\ \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$$

19. 计算定积分 $\int_{2}^{4}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

解: 令 $t=\sqrt{x-1}$, 则 $x=t^{2}+1$，$dx=2tdt$

$$\text{原积分}=2\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^{2}+1}dt$$

$$=2[\arctan t]_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

20. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且满足 $f(x)=x\cos x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$，求 $f(x)$.

解: 设 $C=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$，则

$f(x)=x\cos x+C$

$C=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(t\cos t+C)\mathrm{dt}=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}C$，

$C=-1$

$f(x)=x\cos x-1$

四、解答题（每题 6 分，共 18 分）

21．讨论函数 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}}$，

(1) 在 $x=0$ 处连续；(2) 在 $x=0$ 处可导.

解：(1) $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=f(0)$. 所以在 $x=0$ 处连续

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

不存在，所以在 $x=0$ 处不可导.

.

22.求由曲线 $\boldsymbol{y=x}^{2}$ 和 $\boldsymbol{y=x}^{3}$ 所围平面图形的平积，及绕 $\boldsymbol{x}$ 轴一周所得旋转体的体积。

解：联立$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 \end{cases}$，得交点$(0,0)$，$(1,1)$

所求面积 $A = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \dfrac{1}{12}$

体积$V = \pi\int_0^1 (x^4 - x^6)dx$

$$= \frac{2\pi}{35}$$

23、求满足方程$\int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x tf(x-t)dt$ 的可微函数 $f(x)$。

解：令$u = x - t$

由已知 $\int_0^x f(t)dt = x + x\int_0^x f(u)du + \int_0^x uf(u)du$

两边对 x 求导： $f(x) = 1 + \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x)$

两边再对 x 求导： $f'(x) - f(x) = 0$

$\therefore f(x) = Ce^x$，又 $f(0) = 1, \Rightarrow C = 1$，

$$f(x) = e^x$$

五、证明题（每题 5 分，共 10 分）

24. 证明: 当$x > 1$时, $x\ln x > x - 1$.

证明: 令 $f(x) = x\ln x - x + 1$, 则…

当$x > 1$时, $\ln x > 0$, 从而 $f'(x) = \ln x > 0$,

因此 $f(x)$ 在区间$[1, +\infty)$ 单调增加,

当$x > 1$时, $f(x) > f(1) = 0$,

即得 $x\ln x > x - 1$.

25. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, $\int_0^1 xf(x)dx = 0$, 证明：

$\exists c \in (0,1)$, 使$\int_0^c f(x)dx = cf(c)$.

证明: 令 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt$, …

由 $F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(t)dt-2\int_0^1 tf(t)dt=0$ 及 $f(x)$ 的连续性知，

$F(x)$ 在[0,1]上满足罗尔定理的条件，

故 $\exists c\in(0,1)$, 使 $F'(c)=0$，

即 $\int_0^c f(x)dx = cf(c)$.