院（系）________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线

成都理工大学 2012—2013 学年
第一学期《线性代数》考试试卷（A）

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

得 分	

1．设 A 为 5 阶矩阵， B 为 4 阶矩阵 $|A|=1,\ |B|=-2$，则 $\left||B|A\right|=\underline{(-2)^5}$。

2．设 A 为 n 阶矩阵且 $|A|=2$，则 $\left|(2A)^*\right|=\underline{2^{n^2-1}}$。

3．设向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，则秩 $r(\alpha_1,\alpha_3)=\underline{2}$。

4． $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 的充分必要条件是 $\underline{AB=BA}$。

5．设 $\alpha=(1,2,3,)$，且 $A=\alpha'\alpha$，则矩阵 A 的秩为 $\underline{\quad 1\quad}$。

6. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A+2E=0$（E 是单位矩阵），则 $A^{-1}=\underline{-\dfrac{A+2E}{2}}$。

7．在齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 中，若秩 $r(A)=k$ 且 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是它的基础解系，则 $r=\underline{n-k}$。

8．3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，则 $B=2A^3-3A^2$ 的特征值为 $\underline{-1,-5,4}$。

9．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+k^2x_3^2+2x_1x_2$ 是正定二次型，则 k 满足条件 $\underline{k>1}$。

10．设 n 阶方阵 A 与 B 相似并且 $r(A)=3$，则 $r(B)=\underline{\quad 3\quad}$。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

11．设 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式展开式中带有正号的项。则 i,j 之值为（　C　）。

（A）$i=1,j=3$　　　　（B）$i=2,j=3$

（C）$i=1,j=2$　　　　（D）$i=2,j=1$

12．设 4 阶矩阵 $A=\left[\alpha,r_1,r_2,r_3\right]$，$B=\left[\beta,r_1,r_2,r_3\right]$，其中 α,β,r_1,r_2,r_3 均为 4 维列向量，且 $|A|=4,\ |B|=1$。则行列式 $\left|A+B\right|=$（　D　）。

（A）5　　（B）4　　（C）50　　（D）40

13．设 A 为 n 阶矩阵，则 $|A|=0$ 的充分必要条件是（　B　）。

（A）两行（列）的元素成比例

（B）必有一行是其余行向量的线性组合

（C）A 中有一行元素全为零

（D）任意一行是其余行向量的线性组合

14．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是（　A　）。

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

（B）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

（C）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

15．设 A 为 n 阶矩阵，ξ_1,ξ_2 是 A 的特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，则（ A ）。

（A）$\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，ξ_1,ξ_2 一定不成比例

（B）$\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，ξ_1,ξ_2 一定成比例

（C）$\lambda_1=\lambda_2$ 时，ξ_1,ξ_2 一定不成比例

（D）$\lambda_1=\lambda_2$ 时，ξ_1,ξ_2 一定成比例

三、计算题及证明题（含 4 个小题，共 24 分）

得 分	

16.（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&0&1\\4&5&-2\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

求 PAQ。

解：$PAQ=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&-5\\4&5&-2\end{pmatrix}Q$ ------------------------（3 分）

$=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&-1&-5\\5&4&-2\end{pmatrix}$--------------------------------（3 分）

17.（6 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}$

解：把 D_n 按第 1 列展开，得---（1 分）

$$D_n=a\begin{vmatrix}a&b&&&\\&a&b&&\\&&a&\ddots&\\&&&\ddots&b\\&&&&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b&&&&\\a&b&&&\\&a&b&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&a&b\end{vmatrix}$$ ------------------（3 分）

$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$---　（2 分）

18.（6 分）求向量组 $\alpha_1=(1,0,2,1)$, $\alpha_2=(2,0,4,2)$，$\alpha_3=(1,1,3,-1)$，

$\alpha_4=(2,2,6,-2)$ 的一个极大线性无关组并将 α_4 用极大无关组线性表示。

解：$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4')=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&1&2\\2&4&3&6\\1&2&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&1&2\\0&0&1&2\\0&0&-2&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ----------------------（2 分）

取极大无关组为α_1，α_3 ------------------（1 分）

$(\alpha_1',\alpha_3',\alpha_4')\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ -- -----------------------（2 分）

$\alpha_4=0\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$ ------------------------------------（1 分）

19．（6 分）设 A，B 为 n 阶正交矩阵，且$|A|\cdot|B|=-1$，证明：$|A+B|=0$。

证：由已知 $AA'=E\,,BB'=E$ --------------------（1 分）

$\therefore |A(A+B)'|=|AA'+AB'|=|E+AB'|=|BB'+AB'|$

$=|(A+B)B'|=|B||A+B|$ --------------------（2 分）

又$|A(A+B)'|=|A||A+B|=|B||A+B|$ -------------------（1 分）

$\therefore (|A|-|B|)|A+B|=0\,,|A|\neq|B|,\Rightarrow |A+B|=0$ -------------------（2 分）

四、解答题（含 2 个小题，共 12 分）

得 分	

20．（6 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$

解：因 $|A|=2$ ----------------------（1 分）

而 $A^*=|A|A^{-1}$ ----------------------（2 分）

$\therefore\ (A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$ ----------------------（2 分）

$\therefore\ (A^*)^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ ----------------------（1 分）

21.（6 分）设 n 阶矩阵 A 满足条件 $A^2-3A+2E=0$，求 A 的特征值。

解：设 λ和ξ是矩阵A的特征值和特征向量，则 $A\xi=\lambda\xi$ -----------（1 分）

$\therefore\ A^2\xi-3A\xi+2E\xi=0$ ----------------------（1 分）

$\therefore\ \Rightarrow\lambda^2\xi-3\lambda\xi+2\lambda\xi=0\Rightarrow(\lambda^2-3\lambda+2)\xi=0$ ----------------------（2 分）

因 $\xi\neq0$， $\therefore\ (\lambda^2-3\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$ ----------------------（2 分）

五、解答题（共 19 分）

得 分	

22.（10 分）已知线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$，判定 λ 取何值时方程组无解、有唯一解、和无数解。若有无数解时用基础解系表示其通解。

解：增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$

$\overline{A}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&(1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$ ----------（3 分）

1：$\lambda=-2$时，$r(A)=2\neq r(\overline{A})$， 无解。 ----------（1 分）

2：$\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，有唯一解。 ----------（1 分）

3：$\lambda = 1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=1$，有无数解。 ----------（1 分）

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ -----------------（1 分）

特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组的基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ----------（2 分）

通解：$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ 其中 k_1, k_2 为任意常数----------（1 分）

23.（9 分）用正交变换将二次型 $f = -3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 化为标准型，写出正交矩阵和标准型。

解：$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ --（1 分）

A 的特征多项式 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 8)$

A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -8$ -------------------------------------（2 分）

1） $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad (\lambda_1 E - A)X = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3$

$\xi_1 = (-2,\ 1,\ 0)' \qquad \xi_2 = (2,\ 0,\ 1)'$（或取 $\xi_2 = (2,\ 4,\ 5)'$）

标准正交化：$\eta_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)' \qquad \eta_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\ \frac{4}{3\sqrt{5}},\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)'$

---（2 分）

2）$\lambda_3 = -8 \qquad (\lambda_3 E - A)X = 0 \Rightarrow$

$\xi_3 = (1,\ 2,\ -2)'$

标准化： $\eta_3 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)'$ --（2 分）

故令 $T = (\eta_1,\ \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

则 $T'AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ ---（1 分）

即正交变换 $X = TY$ 将二次型化为标准型 $f = y_1^2 + y_2^2 - 8y_3^2$ ------（1 分）