

《高等数学 I、II》(上) 期末复习题 (3)

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题 (每题 3 分, 共 24 分)

得 分	
-----	--

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \sin x, & x = 0 \\ b + x^2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 则 $b =$ _____。
2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi}) =$ _____。
3. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+2}{n+1})^{3n} =$ _____。
4. 反常积分 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx =$ _____。
5. 设函数 $f(u)$ 二阶可导, 且 $y = f(\ln x)$, 则 $y'' =$ _____。
6. 函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$ 的渐近线有 _____。
7. 函数 $f(x) = xe^x$ 的拐点是 _____。
8. 阿基米德螺线 $r = a\theta$ ($a > 0$) 对应于 θ 从 0 变到 2π 所围图形的面积 $S =$ _____。

二、单项选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

得 分	
-----	--

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) - \sin x$ 是 x 的 ()。

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但不等价
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

10. 下列等式中正确的是 ()。

- (A) $\int f'(x)dx = f(x)$ (B) $\int df(x) = f(x)$
 (C) $d\int f(x)dx = f(x)$ (D) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

11. 由连续曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b (a < b)$ 及 x 轴所围图形的面积 S 是 ()。

- (A) $\int_a^b f(x)dx$ (B) $\left| \int_b^a f(x)dx \right|$
 (C) $\int_b^a |f(x)|dx$ (D) $\frac{b-a}{2}[f(b) + f(a)]$

12. 微分方程 $y'' + y = \cos x$ 所具有的特解形式为 y^* ()。

- (A) $A \cos x + B \sin x$ (B) $x(A \cos x + B \sin x)$
 (C) $x^2(A \cos x + B \sin x)$ (D) $Ax \cos 2x$

13. 微分方程 $xy' = y(\ln y - \ln x)$ 属于 ()。

- (A) 可分离变量方程 (B) 一阶线性方程
 (C) 齐次方程 (D) 以上选项均不正确

14. 已知函数 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - y = -2$ 的一个特解, 并且当 $x = x_0$ 时, $y' = 0, y = 1$, 则 x_0 点是函数 $f(x)$ 的 ()。

- (A) 极大值点 (B) 极小值点
 (C) 拐点的横坐标 (D) 以上选项均不正确

三、计算题 (每题 5 分, 共 30 分)

得 分	
-----	--

15. 计算极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

16. 对于曲线 $\begin{cases} x = 3e^{-t} \\ y = 2e^t \end{cases}$, 求 $y''(x)$

17. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解。

18. 设函数 $f(x)$ 可微, 且满足 $\int_0^x [2f(t) - 1] dt = f(x) - 1$, 求 $f(x)$ 。

19、求 $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$

20. 计算: $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$

四、解答题（每题 6 分，共 18 分）

得 分	
-----	--

21. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定, 求 $y'(0)$, $y''(0)$ 。

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^3 e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求: $f'(x)$ 。

23. 求由 $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ 所围成图形, 分别绕 x , y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

五、证明题（每题 5 分，共 10 分）

得 分	
-----	--

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导函数，且 $f(b) = f(a) = 0$ ， $\int_a^b f^2(x) dx = 1$ ，

证明： $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$ 。

25. 设奇函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 可导，且 $f(1) = 1$ ，证明：

存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 1$ 。