高等数学（1,2）期末复习题(4) 及解答

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、　填空题（每小题 3 分，共 30 分）

得 分	

1. 若 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\ge 0 \\ x+b, & x<0 \end{cases}$ 在 x=0 处连续，则 b=___2__________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ =___e___.

3. 求曲线 y=2sin$x$+x^2 上点(0,0)处的切线方程_____y=2x_____________.

4. 设 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int f(2x+3)dx=$_____$\dfrac{1}{2}F(2x+3)+C$_______.

5. 曲线 $y=x\ln x$ 在区间_______(0,+∞)_______上是凹的.

6. 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$.

7. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x^4$，则 $f(7)=$___$\dfrac{8}{3}$___.

8. $\int_{-1}^{1}(\sin x+\sqrt{1+\cos^2 x})^2 dx=$___4___.

9. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx=$____2____.

10. 微分方程 $y'=2xy$ 的通解为 $y=$___Ce^{x^2}___.

二、单选题（每小题 3 分，共 12 分）

得 分	

11. 函数 $y=\dfrac{\ln|x|}{x^2+x-2}$ 的无穷间断点是(　D).

(A) $x=0$;　(B) $x=-2$;　(C) $x=1$ 和 $x=-2$;　(D) $x=0$ 和 $x=-2$.

12. 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极小值, 则必有（B　）.

(A) $f'(x_0)=0$;　(B) $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在;

(C) $f''(x_0)>0$;　(D) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$.

13. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的（ B ）.

(A) 必要条件; (B) 充分条件;

(C) 充分必要条件; (D) 无关条件.

14. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int xf'(x)dx=$（ A ）.

(A) $x\cos x-\sin x+C$； (B) $x\sin x+\cos x+C$；

(C) $x\cos x+\sin x+C$； (D) $x\sin x-\cos x+C$.

三、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

得 分	

15. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ ……………………………………………

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}$ …………………………………………………………

$=\dfrac{1}{3}$ ……………………………………………………………...

另解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}$ ………………………………………………

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3\sin x}$ ………………………………………………………

$=\dfrac{1}{3}$ ……………………………………………………………...

16. 设 $y=\sin^2(1-\dfrac{1}{x})$，求 dy.

解：$\dfrac{dy}{dx}=2\sin(1-\dfrac{1}{x})\cdot[\sin(1-\dfrac{1}{x})]'$ ……………………………….

$=2\sin(1-\dfrac{1}{x})\cdot\cos(1-\dfrac{1}{x})\cdot(1-\dfrac{1}{x})'$

$=\dfrac{1}{x^2}\sin(2-\dfrac{2}{x})$ ………………

$dy=\dfrac{1}{x^2}\sin(2-\dfrac{2}{x})dx$ ……………………………………

17. 设 $y=y(x)$ 由 $2y-xy^2+e^x=5$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：方程两边对 x 求导，得

$2y'-(y^2+2xyy')+e^x=0$ ……………………………….

解得： $y' = \dfrac{y^2 - e^x}{2(1-xy)}$ ………………………………

18. 计算不定积分 $\int \dfrac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$.

解: 原式 $= -\int \dfrac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x} d\cos x$ ……………………………………..

$$= -\int (\cos x - \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}) d\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}$$ ……………………………

$$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + C$$ ………………………

19. 计算定积分 $\int_2^4 \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$.

解: 令 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$, $dx = 2tdt$

原积分 $= 2\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{t^2+1} dt$ …………………………

$= 2[\arctan t]_1^{\sqrt{3}}$ …………………………

$= \dfrac{\pi}{6}$ …………………………..

20. 求曲线 $y = x^2$ 及 $y = 2x$ 所围成的平面图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解: 由 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ 得交点（0,0），（2,4），……………………………

所求面积 $A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \dfrac{4}{3}$ …………………………

所求体积 $V = \int_0^2 \pi(4x^2 - x^4) dx = \dfrac{64}{15}\pi$. ……………………………

四、解答题（每小题 6 分，共 18 分）

得 分	

21. 求由方程$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^t \end{cases}$表示的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(e^t)'}{(t^2+1)'} = \dfrac{e^t}{2t}$, ……………………………

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(\frac{e^t}{2t})'}{(t^2+1)'} = \dfrac{(t-1)e^t}{4t^3}$。……………………………

22. 设 $f(x)$ 在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上连续，且满足$f(x) = x\cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$，求 $f(x)$.

解: 设$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$，则

$f(x) = x\cos x + C$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t\cos t + C)$ ……………………………

$= \dfrac{\pi}{2} - 1 + \dfrac{\pi}{2}C$，……………………………

$C = -1$

$f(x) = x\cos x - 1$ ……………………………

23. 设 $f(x)$ 为连续函数，且适合关系 $f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$.

解: $f(x) = e^x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$，则

$f'(x) = e^x - \int_0^x f(t)dt$,

$f''(x) = e^x - f(x)$,

即 $f''(x) + f(x) = e^x$ 且 $f(0) = f'(0) = 1$，……………………………

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

设 $y^* = ae^x$, 得 $ae^x + ae^x = e^x \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}e^x$ …………………………… 由

$f(0) = f'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$ ……………………………

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

24. 证明: 当$x > 1$时, $x\ln x > x - 1$.

证明: 令 $f(x)=x\ln x-x+1$, 则……………………………

当 $x>1$ 时, $\ln x>0$, 从而 $f'(x)>0$,

因此 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 单调增加, ………………………

…当 $x>1$ 时, $f(x)>f(1)=0$,

即得 $x\ln x>x-1$……………………………

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x)dx=0$, $\int_0^1 xf(x)dx=0$, 证明:

$\exists c\in(0,1)$, 使 $\int_0^c f(x)dx=cf(c)$.

证明: 令 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$, ……………………………

由 $F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(t)dt-2\int_0^1 tf(t)dt=0$ 及 $f(x)$ 的连续性知,

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件,

故 $\exists c\in(0,1)$, 使 $F'(c)=0$, ……………………………

即 $\int_0^c f(x)dx=cf(c)$. ……………………………