高等数学（1,2）期末复习题(5) 及解答

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

得 分	

1．$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1}\cos x=$____0____；

2、若 $y=f(\sin^2 x)$，则 $dy=$________ $dy=\sin 2x f'(\sin^2 x)\,dx$。

3．极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$ =____1____。

4．设 $y-xe^y=1$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ =___e___。

5．曲线 $y=(x+1)e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ 的铅直渐近线为：$x=1$，。

6．广义积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=$ ____$\frac{1}{2}$____。

7．方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解是 $\frac{1}{x}(-\cos x+C)$.

8．阿基米德螺旋线 $r=a\theta\ (a>0)$ 对应 θ 从 0 到 2π 所围图形的面积是____$\frac{4}{3}\pi^3a^2$____。

9．抛物线 $y^2=4x$、直线 $x=1$ 及 x 轴所围图形，绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积是____2π____；

10．不定积分 $\int\arccos x\,dx=$ ___$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+$___

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

得 分	

11、若 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x<1 \\ 3 & x=1 \\ 2a-bx & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则（　A　）。

（A）$a=2,b=1$　　　　（B）$a=1,b=2$

（C）$a=3,b=0$　　　　（D）$a=0,b=3$

12.　函数 $f(x)$ 在区间（a,b）内可导，则在（a,b）内 $f'(x)>0$

是函数 $f(x)$ 在区间（a,b）内单调增加的（　B　）

（A）. 必要非充分条件　　　　（B）. 充分非必要条件
（C）. 充要条件　　　　（D）. 无关条件

13.　若 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}$ ＝（　B　）

(A)0；　　(B)1；　　(C)2；　　(D)不存在

14、　设函数 $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 为函数的（　C　）

（A）无穷间断点；　　（B）可去间断点；

（C）跳跃间断点；　　（D）第二类间断点。

三、计算题（每题 5 分，共 30 分）

得 分	

15. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解：原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$ --------2 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0$$ --------3 分

16．设 $x=f'(t),\ y=tf'(t)-f(t)$, 且 $f''(t)\neq 0$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(tf'(t)-f(t)\right)'}{f''(t)}=t$ ---------3 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}$ --------2 分

17．求函数 $y=xe^{-x}$ 的拐点及凹凸区间。

解 $y'=-e^{-x}(x-1)$ $y''=e^{-x}(x-2)$

令 $y''=0$ 及 $x=2$ 且 $x=2$ 左右两侧 2 分

y' 由负变为正，故 $(-\infty,2)$ 为上凸区间

（$2,+\infty$）为下凸区间 2 分

拐点为 $(2,2e^{-2})$ 1 分

18．求函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 的单调区间与极值。

解：令 $f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)=0$

得驻点　$x=-1, x=3$ -------------- 2 分

函数的单调递增区间为$(-\infty,-1),(3,+\infty)$

函数的单调递增区间为（-1，3） ------------1 分

函数的极大值为 $f(-1)=3$；函数的极小值为 $f(3)=-61$------------2 分

19、 求$\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}}dx$

解：令$\boldsymbol{t}=\sqrt{\boldsymbol{x}-1}$ （1 分）

原式$=2\int_0^1 \boldsymbol{te^t dt}$ （2 分）

$=2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t}-1)\Big/_0^1$

$=2$ （2 分）

20、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^2\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^2\sin x}\overset{\sin x\sim x}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^3}$ ……………1分

$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{3x^2}$……………………2分

$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{-x^2}}{6x}=\dfrac{1}{3}$…………………2分

四、解答题（每题 6 分，共 18 分）

得 分	

21．设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt=e^{-2x}-1$，求：$\int_0^1 f(x)dx$。

解：令 $u=x-t$

左边=$\int_0^x f(u)du$ （3 分）

所以：$\int_0^x f(u)du=e^{-2x}-1$

取 $x=1$ $\therefore \int_0^1 f(u)du=e^{-2}-1$ （2 分）

$\int_0^1 f(x)dx=e^{-2}-1$ （1 分）

22、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，求：$f'(x)$

解：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ……………2分

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}$

$\underset{=}{\dfrac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}\underset{=}{\dfrac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2}=0$ ……………3分

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 1 分

23、求微分方程 $\boldsymbol{y''-3y'+2y=2e^x}$ 的通解。

解：特征方程：$\boldsymbol{\lambda^2-3\lambda+2=0}$，$\boldsymbol{\lambda_1=1,\lambda_2=2}$ 。

$y''-3y'+2y=0$ 的通解：$C_1e^x+C_2e^{2x}$　　（3 分）

特解待定形式：$y^*=xe^xa$，代入原方程得 $a=-2$。　　（2 分）

非齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$　　（1 分）

五、证明题（每题 5 分，共 10 分）

得 分	

24．证明 $(1+x)\ln(1+x)>\arctan x \quad (x>0)$。

证：设 $\varphi(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，　　(1 分)

则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=1+\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}>0 \qquad (x>0)$$ (2 分)

故 $x>0$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加，从而 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$

即 $$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$ (2 分)

25、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。试证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\int_0^{\xi}f(t)dt=(1-\xi)f(\xi)$

证: 令 $\boldsymbol{F(x)=(x-1)\int_0^x f(t)dt}$ （2 分）

因 $\boldsymbol{F(0)=F(1)=0}$ （1 分）

且 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt-(1-x)f(x)$

由罗尔中值定理 $\exists\xi$, 使得 $\boldsymbol{F'(\xi)=0}$

即 $\boldsymbol{\int_0^{\xi} f(t)dt=(1-\xi)f(\xi)}$ （2 分）