线性代数习题册

第五章 习题 (部分解答)

$|\lambda E - A| = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 53\lambda - 42 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 42)$

$\lambda=1,\ \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

习 题 5-1

1．求下列矩阵的特征值与特征向量：

题解

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$； （2）$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$；

解：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1 \quad \lambda_3=10$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时 $(\lambda_1 E - A)x=0$ 基础解系为 $\eta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=10$ 时 $(\lambda_3 E - A)x=0$ 的基础解系为 $\eta_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ （k_1,k_2不同时为零）

$\lambda_3=10$ ——— $k_3\eta_3$ （$k_3\neq 0$）

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$

$\xi=(1,0,0,0)'$

$(\lambda E-A)x=0$

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 设λ_1，λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，ξ_1是A的属于特征值λ_1的特征向量，ξ_2是A的属于特征λ_2的特征向量，证明：ξ_1, ξ_2线性无关。

反证：若ξ_1，ξ_2线性相关，则：$\xi_1 = k\xi_2$

由已知：$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$，$A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$

由 $\left.\begin{array}{l} A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \\ \xi_1 = k\xi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(k\xi_2) = \lambda_1(k\xi_2)$ 即 $k\xi_2$是特征值λ_1的特征向量.

$A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \Rightarrow A(k\xi_2) = \lambda_2(k\xi_2)$，即：$k\xi_2$又是特征值$\lambda_2$的特征向量.

故：$\lambda_1 = \lambda_2$，（一个特征向量，只能属于一个特征值！），这与已知矛盾. 故ξ_1, ξ_2线性无关.

3. 满足$A^2 = A$的 n 阶矩阵叫做幂等矩阵，证明：幂等矩阵 A 的特征值是 1 或者 0.

3．满足$A^2=A$的 n 阶矩阵叫做幂等矩阵，证明：幂等矩阵 A 的特征值是 1 或者 0.

证：设 $A\xi=\lambda\xi$，求证：$\lambda=0$，$\lambda=1$.

$$\text{由}\ \left.\begin{aligned} &A\xi=\lambda\xi \\ &A\xi=A^2\xi=\lambda^2\xi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &(\lambda-\lambda^2)\xi=0,\ \Rightarrow \lambda(\lambda-1)\xi=0 \\ &\xi\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=0,\ \lambda=1.$$

习题 5--2

1. 若矩阵 $A \backsim B$，证明：$A' \backsim B'$，$kA \backsim kB$.

证：$A \backsim B \Rightarrow B = P^{-1}AP$

$\Rightarrow B' = (P^{-1}AP)' = (AP)'(P^{-1})'$

$= P'A'(P')^{-1}$

由定义：$B' \backsim A'$.

$kA \backsim kB$ 同样可证.

2．判定下列矩阵是否可以对角化，若能，将其对角化：

（1）$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$；

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}-2 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=-2$ $\quad \lambda_1E-A\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & +1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=1$ $\quad \lambda_2E-A\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

（2）$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -5 & 7 & -1\end{pmatrix}$；

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ 5 & -7 & \lambda+1\end{pmatrix}$

令 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ 5 & -7 & \lambda+1\end{vmatrix}=-(\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda+4$

$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ \lambda-1 & -7 & \lambda+1\end{vmatrix}$.

$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$

得 $\lambda_1=1$. $\lambda_2=\lambda_3=2$

$\lambda_1=1$ $\quad (\lambda_1E-A)X=0$ 基础解系 $\eta_1=(1,1,1)'$

$\lambda_2=\lambda_3=2$

$(\lambda_2E-A)X=0$ 基础解系 $\eta_2=(2,1,-1)'$

$\therefore$ A 只有两个无关特征向量

$\therefore A$ 只有两个无关特征向量

3: $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=0$ 、 $\lambda_2=\lambda_3=1$

1: $\lambda_1=0$ $\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2: $\lambda_2=1$ $\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

习题 5--3

1. 求下列矩阵 A 的正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵：

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{pmatrix}$.　　(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

(1) 解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\2&\lambda+3&-4\\-2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2+(-2)r_1}\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\2-2\lambda&\lambda-1&0\\-2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\-2&1&0\\-2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda+8)$

∴ 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-8$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时 $(\lambda_1E-A)X=0$ $\Rightarrow x_1=-2x_2+2x_3$

的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$

η_1 与 η_2 正交

$\lambda_3=-8$ 时 $(\lambda_3E-A)X=0$ $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$

的基础解系为 $\eta_3=\begin{pmatrix}+1\\+2\\-2\end{pmatrix}$

规范化得 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\1/\sqrt5\\0\end{pmatrix}$ $\gamma_2=\begin{pmatrix}2\sqrt5/15\\4\sqrt5/15\\5\sqrt5/15\end{pmatrix}$ $\gamma_3\begin{pmatrix}2/3\sqrt5\\4/3\sqrt5\\5/3\sqrt5\end{pmatrix}$

$\gamma_3=\begin{pmatrix}+1/3\\+2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

$\therefore T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&+1/3\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&+2/3\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&-2/3\end{pmatrix}$

$\therefore T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$

(2) 解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)+0+0-0-4(\lambda-1)-4(\lambda-3)$

$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-1)-8]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

式 $=\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10$

$\lambda_1=-1$. $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\lambda_2=2$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\lambda_3=5$. $\eta_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

规范化得 $\gamma_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$ $\gamma_2=\begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$ $\gamma_3=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$

$T=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&2/3\\2/3&-1/3&-2/3\\2/3&2/3&1/3\end{pmatrix}$

$\therefore T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$