院（系）______ 班 级______ 姓 名______ 学 号______

密 封 线

成都理工大学 2015—2016 学年
第一学期《线性代数》期末考试试卷（A）

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

得 分	

1.若行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7$，则 $x =$ ___ 4______.

2.若矩阵 A 满足______ $A^T = A$ ________，则矩阵 A 称为对称矩阵。

3.已知A是n阶方阵，$A^k = O$，则 $(E-A)^{-1} =$ __ $E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$ _______.

4.设 $|A|=1$, $|2A|=32$，则A为_5____阶矩阵。

5. n+2 个 n 维向量的相关无关性为___相关__(填“相关”，“无关”或“不确定”)。

6.当 a=___1___时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解。

7.已知 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非零实矩阵，且 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 和 a_{ij}（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）相等，

则秩 r(A)=__ n _____.

8. $f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，则 $f(A) =$ ____ $-6E$ ______.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得 分	

1.设 A，B 都是 n 阶方阵，则下列等式成立的是（ C ）

（A）$(AB)^k = A^k B^k$　　　　　　（B）$|A+B| = |A| + |B|$

（C）$|AB| = |A||B|$　　　　　　（D）$\left(AB\right)^T = A^T B^T$

2. 同阶方阵 A,B 合同的充分必要条件是 （ B ）

（A）存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

（B）存在可逆矩阵 P，使 $P^{T}AP=B$

（C）存在可逆矩阵 P 和 Q，使 PAQ=B

（D）A 可以经过有限次初等变换变成 B

3. 向量组（1）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，向量组（2）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\alpha_{s+1},\cdots$，$\alpha_t$，则

（ B ）

（A）(1)线性无关$\Rightarrow$（2）线性无关；（B）(2)线性无关$\Rightarrow$（1）线性无关；

（C）(1)线性无关$\Rightarrow$（2）线性相关；（D） (2)线性相关$\Rightarrow$（1）线性相关；

4. 设 A 为 $n(n \ge 2)$ 阶方阵，且 A 的行列式 $|A| = a \neq 0$, 则 $|A^*|$ 等于 （ D ）

（A）a^{-1}　　（B）a　　（C）a^n　　（D）a^{n-1}

5. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$AX = 0$ 是非齐次方程组 $AX = b$ 的导出组，则下列结论正确的是 （ D ）

（A）若 $AX = 0$ 仅有零解，则 $AX = b$ 有唯一解；

（B）若 $AX = 0$ 有非零解，则 $AX = b$ 有无穷多解；

（C）若 $AX = b$ 有无穷多解，则 $AX = 0$ 仅有非零解；

（D）若 $AX = b$ 有无穷多解，则 $AX = 0$ 有非零解；

6.n 阶矩阵 A 相似于对角矩阵的充分必要条件是（ D ）

（A）有 n 个互异的特征值;
（B）有 n 个互异的特征向量;
（C） A的每个r_i重特征值λ_i，应有秩$r(A-\lambda_i E)=r_i$;

（D） A的每个r_i重特征值λ_i，应对应有r_i个线性无关的特征向量;

三．计算题（每小题 6 分，共 36 分）

得 分	

1．求行列式$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$的值（$a_0 a_1 \cdots a_n \neq 0$）.

解：原式$=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ ....(4)

$=a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$ ....

2.设向量组$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(3,2,1,1),\alpha_3=(0,1,2,2),\alpha_4=(5,4,3,3)$，求该向量组的一个极大无关组和秩。

$$解:(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

...........(4)

$\therefore$ α_1，α_2为该向量组的一个极大无关组 ....(1)

该向量组的秩为2 ....(1)

3. 求方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$的通解。

解：$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 原方程组的解为：$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 2 \\ x_2 = 3x_3 + 1 \end{cases}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

取（x_3, x_4）为（0, 0），得特解γ_0 =（2, 1, 0, 0）$^{\mathrm{T}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

导出组的基础解系为：η_1 =（1, 3, 1, 0）$^{\mathrm{T}}$，η_2 =（-1, 0, 0, 1）$^{\mathrm{T}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ 原方程组的通解为：$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

4. 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 是否是正定二次型。

解：$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$P_1 = 3 > 0, P_2 = 8 > 0, P_3 = 28 > 0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ f是正定二次型。 $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

5. 已知A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解：（A，E）=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

6.设三阶矩阵 A 的特征值为 1,2,3，求$\left|A^3 - 5A^2 + 7A\right|$.

解：设λ为矩阵A的特征值，

则$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$为$A^3 - 5A^2 + 7A$的特征值。 $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

又$\because$ A的特征值为1,2,3

$\therefore A^3 - 5A^2 + 7A$的特征值为：3, 2, 3 $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$\therefore \left|A^3 - 5A^2 + 7A\right| = 18$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

得 分	

四．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1.设 A 是正交矩阵，证明：A 的行列式等于 1 或-1.

证：$\because$ A是正交矩阵

$\therefore A^T = A^{-1}$ ....(2)

$\therefore \left|A^T\right| = \left|A^{-1}\right|$

$\therefore |A| = \dfrac{1}{|A|}$

$\therefore |A|^2 = 1$

$\therefore |A| = \pm 1$ ....(3)

2. 设α_1，α_2，α_3线性无关，并且$\alpha_1=\beta_1-\beta_2-\beta_3$，$\alpha_2=\beta_1+\beta_2-\beta_3$，$\alpha_3=\beta_1-\beta_2+\beta_3$。

证明：向量组β_1，β_2，β_3线性无关。

证：$\because \alpha_1=\beta_1-\beta_2-\beta_3$，$\alpha_2=\beta_1+\beta_2-\beta_3$，$\alpha_3=\beta_1-\beta_2+\beta_3$

$\therefore \beta_1=\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$，$\beta_2=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$，$\beta_3=\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{2}$ ....(1)

设有数k_1,k_2,k_3,使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$成立 ....(1)

即（$-k_2-k_3$）α_1+（k_1+k_2）$\alpha_2+(k_1+k_3)\alpha_3=0$成立

又$\because \alpha_1$，α_2，α_3线性无关

$$\therefore \begin{cases} -k_2-k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_1+k_3=0 \end{cases}$$

解之，得：$\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases}$ ....(2)

..

$\therefore \beta_1$，β_2，β_3线性无关 ....(1)

五、解答题（共 12 分）

得 分	

用正交变换法将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 化成标准形，并指出 f 的秩。

解： $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) = 0$$

得特征值：λ_1=4，λ_2=1，λ_3=-2. $\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

对于λ_1=4，由（A-4E）X=0, 得基础解系：ξ_1=（2,-2，1）^{T}，

单位化，得：η_1=（$\frac{2}{3}$,-$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{3}$）. $\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

对于λ_2=1，由（A-E）X=0, 得基础解系：ξ_2=（2，1,-2）^{T}，

单位化，得：η_2=（$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{3}$,-$\frac{2}{3}$）. $\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

对于λ_3=-2，由（A+2E）X=0, 得基础解系：ξ_3=（1，2，2）^{T}，

单位化，得：η_3=（$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{2}{3}$）.$\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

令$T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$，　　　　　…………(1)

则通过正交变换X=TY，二次型化为标准型：$f=4y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

…………(2)

该二次型秩为3.　　　　…………(2)