《高等数学Ⅰ、Ⅱ》（上）期末复习题（3）及解答

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每题 3 分，共 24 分）

得 分	

1．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}, x>0 \\ b+x^2, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $b=$ ____0____。

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n\pi})=$ ___1___。

3．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+2}{n+1})^{3n}$ ＝_____e^3_____ 。

4．反常积分 $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$ ＝ ___1___。

5．设函数 $f(u)$ 二阶可导，且 $y=f(\ln x)$，则 $y''=\dfrac{1}{x^2}\left[f''(\ln x)-f'(\ln x)\right]$。

6．函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$ 的渐近线有____x=0，y=0，y=1 ____。

7．函数 $f(x)=xe^x$ 的拐点是 $(-2,-2e^{-2})$ 。

8．阿基米德螺线 $r=a\theta$（$a>0$）对应于 θ 从 0 变到 2π 所围图形的面积 S=___$\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$___。

二、单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

得 分	

9．当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-\sin x$ 是 x 的（　C　）。

（A）等价无穷小　　　（B）同阶但不等价

（C）高阶无穷小　　　　（D）低阶无穷小

10. 下列等式中正确的是（　D　）。

（A）$\int f'(x)dx = f(x)$　　　　（B）$\int df(x) = f(x)$

（C）$d\int f(x)dx = f(x)$　　　　（D）$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

11. 由连续曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b(a < b)$ 及 x 轴所围图形的面积 S 是（　C　）。

（A）$\int_a^b f(x)dx$　　　　（B）$\left|\int_b^a f(x)dx\right|$

（C）$\int_b^a |f(x)|dx$　　　　（D）$\frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$

12. 微分方程 $y'' + y = \cos x$ 所具有的特解形式为 y^*（　B　）。

（A）$A\cos x + B\sin x$　　　　（B）$x(A\cos x + B\sin x)$

（C）$x^2(A\cos x + B\sin x)$　　　　（D）$Ax\cos 2x$

13. 微分方程 $xy' = y(\ln y - \ln x)$ 属于（　C　）。

（A）可分离变量方程　　　　（B）一阶线性方程

（C）齐次方程　　　　（D）以上选项均不正确

14. 已知函数 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - y = -2$ 的一个特解，并且当 $x = x_0$ 时，$y' = 0$，$y = 1$，则 x_0 点是函数 $f(x)$ 的（A ）。

（A）极大值点　　　　（B）极小值点

（C）拐点的横坐标　　　　（D）以上选项均不正确

三、计算题（每题 5 分，共 30 分）

得 分	

15．计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{\sin 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin 2x}\ln(e^x+x)}$ ————————————————（2 分）

而：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+1)}{2}=1$ ————（2 分）

$\therefore$ 原式$=e$ ————————（1 分）

16．对于曲线$\begin{cases}x=3e^{-t}\\ y=2e^t\end{cases}$，求 $y''(x)$

解：$y'=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$ ———————————————（3 分）

$y''=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{2}{3}\cdot 2e^{2t}}{-3e^{-t}}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$ ———————————————————（2 分）

17．求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2+4r+4=0$，解得特征根 $r_1=r_2=-2$

对应齐次的通解为 $Y=(c_1+c_2x)e^{-2x}$ ——————————————————————————（2 分）

设原方程的特解 $y^*=Ax^2e^{-2x}$ ——————————————（1 分）

求出 $y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$ 代入原方程比较系数解得：$A=\dfrac{1}{2}$，——————————————（1 分）

因此所求通解为：$y=Y+y^*=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$。 ————————（1 分）

18．设函数 $f(x)$ 可微，且满足 $\int_0^x [2f(t)-1]dt = f(x)-1$，求 $f(x)$。

解：方程两边对 x 求导：$2f(x)-1=f'(x)$

即：$f'(x)-2f(x)=-1$ ——————————————————————————（2 分）

$f(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]=\frac{1}{2}+Ce^{2x}$，——————————（2 分）

又因 $f(0)=1$，代入上式得：$C=\frac{1}{2}$

于是 $f(x)=\frac{1}{2}(1+e^{2x})$ ————————————————————————（1 分）

19、求 $\int \frac{\ln\ln x}{x}dx$

解：原式=$\int \ln\ln x d\ln x$ ……………………………………..2 分

$=(\ln\ln x)\ln x-\int \ln x d\ln\ln x$

$=(\ln\ln x)\ln x-\int \frac{1}{x}dx$ ………………………..2 分

$=(\ln\ln x)\ln x-\ln x+C$ …………………………..1 分

20. 计算：$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

解：令：$\sqrt{5-4x}=t$，则 ————————————（2 分）

原式=$\int_3^1 \frac{t^2-5}{8}dt$ ——————————————（2 分）

$=\frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}-5t\right]_3^1=\frac{1}{6}$ ————————————（1 分）

四、解答题（每题 6 分，共 18 分）

得 分	

21．设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$。

解：方程两边对 x 求导：

$e^y y' + y + xy' = 0$，　　（1）

当 $x=0$ 时， $y(0)=1$，代入（1）式得： $y'(0) = -\dfrac{1}{e}$ ——————（3 分）

（1）式两边再对 x 求导：

$e^y (y')^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' = 0$　　（2）

将 $x=0$，$y=1$，$y' = -\dfrac{1}{e}$ 代入（2）式得： ———————————（2 分）

$e\dfrac{1}{e^2} + ey''\big|_{x=0} - 2\cdot\dfrac{1}{e} = 0$，$y''(0) = \dfrac{1}{e^2}$ ——————————————（1 分）

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ x^3 e^x, & x \geq 0 \end{cases}$，求： $f'(x)$。

解：当 $x<0$ 时， $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} + x^2\cos\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{x^2}) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ ———（2 分）

当 $x>0$ 时， $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x$ ——————————————————（1 分）

当 $x=0$ 时， $f_-'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3e^x - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2e^x = 0$$

所以： $f'(0) = 0$ ————————————————————————————（2 分）

综上： $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 3x^2e^x + x^3e^x, & x \geq 0 \end{cases}$ ——————————————————（1 分）

23. 求由 $y=x^3$，$x=2$，$y=0$ 所围成图形，分别绕 x，y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解：绕 x 轴旋转：$V_x = \pi\int_0^2 (x^3)^2 dx = \dfrac{128}{7}\pi$ ————————————（3 分）

绕 y 轴旋转：$V_y=2\pi\int_0^2 xf(x)dx=2\pi\int_0^{2\pi} x\cdot x^3dx=\frac{64}{5}\pi$

或$V_y=\pi\cdot 2^2\cdot y-\pi\int_o^y (y^{\frac{1}{3}})^2 dx=\frac{64}{5}\pi$ ——————————————（3 分）

五、证明题（每题 5 分，共 10 分）

得 分	

24．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数，且 $f(b)=f(a)=0$，$\int_a^b f^2(x)dx=1$，证明：$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=-\frac{1}{2}$。

证：$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=\int_a^b xf(x)df(x)$

$=xf^2(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)d(xf(x))$ ———————————————（2 分）

$=bf^2(b)-af^2(a)-\left[\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right]$

$=-1-\int_a^b xf(x)f'(x)dx$

所以：$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=-\frac{1}{2}$ ————————————————————（3 分）

25.设奇函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在区间 $[-1,1]$ 可导，且 $\boldsymbol{f(1)=1}$，证明：

存在 $\xi\in\boldsymbol{(0,1)}$，使得 $\boldsymbol{f'(\xi)}=1$。

证明：1：法一：$\boldsymbol{f(x)}$ 为奇函数，$\boldsymbol{f(0)=0}$，而 $\boldsymbol{f(1)=1}$ ....（1 分）

$\boldsymbol{f(x)}$ 在 $[0,1]$ 满足拉格朗日中值定理条件，由拉格朗日中值定理：

存在 $\xi\in\boldsymbol{(0,1)}$，使得 $\boldsymbol{f'(\xi)=f(1)-f(0)}$,即 $\boldsymbol{f'(\xi)}=1$ ......（.4 分 ）

法二：令函数 $\boldsymbol{F(x)=f(x)-x}$，显然：$\boldsymbol{F}(0)=\boldsymbol{F}(1)=0$ ....（.2 分）

由罗尔中值定理，存在 $\xi\in\boldsymbol{(0,1)}$，使得 $\boldsymbol{F'(\xi)=0}$，

即 $\boldsymbol{f'(\xi)}=1$ ....（3 分）