院（系）________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线

# 成都理工大学 2016—2017 学年第一学期

# 《线性代数》期末考试卷（A）

| 大题 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

| 得 分 | |
|---|---|

## 一、 填空题 (每题 3 分，共计 30 分)

1 $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}$。

2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A* = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$。

3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \underline{\begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$。

4 二次型 $5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3$ 的矩阵

是 $\underline{\begin{bmatrix} 5 & & & 1 \\ & 4 & 2 & \\ & 2 & 3 & \\ 1 & & & 2 \end{bmatrix}}$。

5 线性方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，则 $X =$ ________$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$______。

6 五阶行列式完全展开式里的一项 $(a_{51}a_{43}a_{22}a_{34}a_{15})$ 前面的符号是__+正__。

7 4 阶行列式 $|A| = -2$, $|A^*| =$____-8______。

8 $AX_i = B$，且 $\sum_{i=1}^{n} k_i = 2$，则 $A(k_1X_1 + \cdots + k_nX_n) =$__2B__。

9 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$的特征值是 <u>1，2，7</u> (错写或漏写不能得分 )。

10 向量$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，将其进行正交化得$\beta_1,\beta_2$， 设$\beta_1=\alpha_2$，

则$\beta_2=$ <u>$\alpha_1-\frac{(\beta_1,\alpha_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$</u>。

11 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$中元素$a_{ij}$的代数余子式是$A_{ij}$，则

$A_{14}-5A_{34}-6A_{44}=$ <u>0</u>。

## 二、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

| 得 分 | |
|---|---|

12 方程组 AX=0 有非零解 ，A 是方阵，B≠0,则方程组 AX=B 的解的情况是（D）

（A）肯定无解　　　　（B）肯定有无穷多解

（C）肯定有唯一解　　　　（D）不能确定

13 向量组$\eta_1$，$\eta_2$线性无关，$k$是任意实数，则下列一定也线性无关的是（B）

（A） $\eta_1$，$\eta_1+k\eta_2$，　　　　（B）$\eta_1$，$k\eta_1+\eta_2$，

（C）$k\eta_1$，$\eta_2$，　　　　（D）$\eta_1$，$k\eta_2$

14 A 是 n 阶方阵，二次型 X'AX 正定的充分必要条件是（C）

（A）|A|>0,　　　　（B） A 的特征值≥0,

（C）二次型的正惯性指数=n,　　（D）X'AX≥0

15 向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots\alpha_s$线性相关的充分必要条件是（ A ）

（A）有一个向量能被其余的向量线性表示

（B）有一个向量不能被其余向量线性表示

（C）每一个向量都不能被其余的向量线性表示

（D）每一个向量都能被其余的向量线性表示

16　方阵 A 有一个特征值是 3，　则 $A^2+E$ 有一个特征值是（D）

（A）3　　　　（B）4　　　　（C）9　　　　（D）10

## 三　计算题（每小题 6 分，共 30 分）

| 得 分 | |
|---|---|

17 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{bmatrix}$, 求 $r(A)$。

列变换 $A\to\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & \lambda^2-1\end{bmatrix}$,

$|A|=(\lambda^2-1)^2$ ---------------3 分

$\lambda\neq\pm1$，　r=3　------------1 分

$\lambda=1$，r=1　　------------1 分

$\lambda=-1$, r=2　------------1 分

18　求方程组的通解 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$。

解:增广矩阵行变换 化为$\begin{bmatrix}1 & & & \frac{3}{2} & 1\\ & 1 & & -\frac{3}{2} & 0\\ & & 1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$,

齐次方程通解　k(-3,3,-1,2) ---------3 分

令　$x_4 = 0$，　特解　(1,0,1,0), -----------2 分

通解是 k(-3,3,-1,2)+ (1,0,1,0)-----------------1 分

19 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

解：$= \begin{vmatrix} b + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ b + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$

$= (b + \sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$ -------------------2 分

$= (b + \sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$ --------------------2 分

$= (b + \sum_{i=1}^{n} a_i) b^{n-1}$ ------------------------2 分

20　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,求 $A^{-1}$ 。

解：　$AE=\begin{bmatrix}1 & & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 2 & & 1 & \\ & 1 & 2 & & & 1\end{bmatrix}$ -------------2 分

行变换得$\begin{bmatrix}1 & & & 0 & 1 & -1 \\ & 1 & & -2 & 2 & -1 \\ & & 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ -------------2 分

$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ---------2 分

21 已知 $A^3=4A$ ，求 A 的特征值。

解：设 $A\xi=\lambda\xi$，------------------------------2 分

$A^3\xi=\lambda^3\xi$， $4A\xi=4\lambda\xi$ ，$\lambda^3\xi=4\lambda\xi$

$\xi\neq\bar{0}$， $\lambda^3=4\lambda$，--------------------------------2 分

$\lambda=0,2,-2$ ----------------------------2 分

**四 证明题 （每小题 6 分　共 12 分）**

| 得 分 | |
|---|---|

22 方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$,对任意实数 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 都有解。

证明：矩阵$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$可逆。

证明：设增广矩阵的列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta$，

方程组有解，任意向量 $\beta$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 表示，----2 分

当 $\beta$ 取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 表示，-----2 分

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 的秩=n，

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 的秩≥n，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 的秩=n，

矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 可逆。-----2 分

23 向量 $\alpha_1, \alpha_2,$ 线性无关，向量组向量 $\beta_1, \beta_2$ 线性相关。

且 $\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 \\ \beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 \end{cases}$， 证明：矩阵 $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ 不可逆。

证明:

$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 = 0$，有非零解 --------------2 分

$$x_1(c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2) + x_2(c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2)$$
$$= (x_1c_{11} + x_2c_{21})\alpha_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})\alpha_2 = 0$$

$\begin{cases} x_1c_{11} + x_2c_{21} = 0 \\ x_1c_{12} + x_2c_{22} = 0 \end{cases}$ 有非零解--------------2 分

$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0$，

矩阵 $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ 不可逆。--------------------2 分，

| 得 分 | |
|---|---|

**五 解答题（10 分）**

24 用正交变换法化二次型为标准型 $2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$。

解：矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$， --------------2 分

特征值 1,2,5, ------------------------------2 分

对应的特征向量分别是(0,-1,1)(1,-0,0)(0,1,1)---------------2 分

正交单位化后$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$,    -----------------2 分

$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$, 令 X=TY,

则标准型为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$---------------2 分