线性代数习题册

第六章　习题　(部分解答)

习 题 6-2

1. 设二次型 $f=x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2-4x_1x_3+4x_3^2-4x_2x_4-8x_3x_4-x_4^2$，用配方法化二次型为标准形，并求出所用的线性变换。

$$f=(x_1+3x_2-2x_3)^2-(2x_2-3x_3+x_4)^2+(3x_3-\frac{7}{3}x_4)^2-\frac{49}{21}x_4^2$$

$$=(x_1+3x_2-2x_3)^2-4x_2^2+12x_2x_3-4x_2x_4-8x_3x_4-x_4^2$$

$$=(x_1+3x_2-2x_3)^2-(2x_2-3x_3+x_4)^2+9x_3^2-14x_3x_4$$

习题 6 -3（了解）

1. 用合同变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. 为标准形。

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AE) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{r_3+1\cdot r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{c_3+1\cdot c_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{r_3+(-\frac{1}{2})r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $X = CY$

$$f = 1\cdot y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$$

习题 6 -4

1. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使 $T'AT$ 成对角矩阵。

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$

$\lambda_1=-2$. $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \nu_1=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=1$. $\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \nu_1=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=4$ $\quad \xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \nu_3=\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$T=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad T'AT=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

习题 6 -5

2. 用正交变换法化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$. 为标准形。 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$ $\quad x=CY \quad C=\begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & -2/3\sqrt5 & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt5 & -2/3 \\ 1/\sqrt5 & 4/3\sqrt5 & 2/3 \end{pmatrix}$

解： $f=x'\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}x$

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_3}{=\!=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$\lambda_{1,2}=1.\quad \lambda E-A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

或 ~~$\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$~~

或正交 $\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

单位化. $\beta_1=\begin{pmatrix} 2/\sqrt5 \\ 0 \\ 1/\sqrt5 \end{pmatrix} \quad \beta_2=\begin{pmatrix} -2/3\sqrt5 \\ 5/3\sqrt5 \\ 4/3\sqrt5 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=10.\quad \lambda_3E-A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \beta_3=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

1. 设 A，B 是 n 阶正定矩阵，λ, μ 为任何正数，证明：$\lambda A+\mu B$ 也是正定矩阵.

证：用定义，对于 $\forall\, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$，$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^T A x>0 \\ x^T B x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^T(\lambda A)x>0 \\ x^T(\mu B)x>0 \end{cases} \Rightarrow x^T(\lambda A)x+x^T(\mu B)x$$

$$=x^T(\lambda A+\mu B)x>0$$

由定义，对称阵 $\lambda A+\mu B$ 也是正定矩阵.

第六章补充题

1. $\underline{\quad 0 \quad}$

2. $\underline{-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}}$

3. A

4.设λ是 A 的任一特征值，对应的特征向量为$\xi \neq 0$，则有

$$(A^3 - 3A^2 + 5A - 3E)\xi = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3)\xi = 0$$

可得 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$

在实数范围内，λ只有 1 个取值$\lambda = 1$，
故λ为 A 的 n 重根，且$\lambda > 0$，
所以 A 正定。

5.变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

因 A 与 B 相似，

可得 $|A|=|B|$，（此处也可用特征多项式相同来进行计算）

即 $18-2a^2=10$，可得 $a=2$。

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix},$$

特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$。

计算可得，

$$\xi_1=(0\quad -1\quad 1)',\ \xi_2=(1\quad 0\quad 0)',\ \xi_1=(0\quad 1\quad 1)',$$

规范化可得，

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}',$$

$$\eta_2=(1\quad 0\quad 0)',$$

$$\eta_3=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}',$$

故所用正交变换矩阵为 $T=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。