《线性代数》模拟考试试卷（一）

一、填题（每空3分，共30分）

1．设 A 为 4×4 矩阵，B 为 5×5 矩阵，$|A|=2$，$|B|=-2$

则 $\left|-|B|A\right| = \underline{\;|2A|\;} = 2^4\,|A| = 32$

2．设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A+2E=0$，则 $(A+E)^{-1}=$

解：$A(A+E)+2E=0$

$\Rightarrow A(A+E)=-2E$

$\Rightarrow -\dfrac{A}{2}(A+E)=-E$ 所以：$(A+E)^{-1}=-\dfrac{A}{2}$

3．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$|A|=1$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$

则$|B|=$ $\underline{\quad 2 \quad}$

解：
$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$=|\underline{\alpha_1}+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_1|$$

$$=|\alpha_2+\alpha_3,\ \underline{\alpha_2}+3\alpha_3,\ \alpha_1|=|\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_3,\ \alpha_1|$$

$$=|\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_1|+0=-2|\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2$$

4．设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 k

应满足 $\underline{\quad k \neq \frac{3}{5} \quad}$　　$|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ $k \neq \frac{3}{5}$

5．若向量组 $a_1 = (1, a, 1)'$, $a_2 = (1, 1, a)'$, $a_3 = (a, 1, 1)'$

线性相关，则 $a =$ $\underline{\quad 1或-2 \quad}$。

$|A| = 0$　　$A \longrightarrow$ 初等变换

6．逆序数 $\tau(54321)=$ $\underline{\quad 10 \qquad\qquad}$。

7．当 $k=$ $\underline{\quad -8 \quad}$ 时，向量 $\beta=(1,k,5)$ 能由向量 $\alpha_1=(1,-3,2)$, $\alpha_2=(2,-1,1)$ 表示。

解：设 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$$\Rightarrow l_1(1,-3,2)+l_2(2,-1,1)=(1,k,5)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} l_1+2l_2=1 \\ -3l_1-l_2=k \\ 2l_1+l_2=5 \end{cases}$$

所以：$k=-8$ 时，β 能由 α_1,α_2 线性表出。

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & -1 & k \end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k+8 \end{pmatrix}$$

8. **二次型** $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

的秩为___3___。

9. **行列式** $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \underline{\quad x^4 - y^4 \quad}$

按第一列展开

10．设$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)',\beta=(1,1,1)'$，则

$$\alpha\beta'=\underline{\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{pmatrix}}$$

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

11. 设A为n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，则$\| A | A^* |$等于（ D ）。

（A）$|A|^2$ （B）$|A|^n$

（C）$|A|^{2n}$ （D）$|A|^{2n-1}$

$$\| A | A^* | = |A|^n |A^*| = |A|^n |A|^{n-1} = |A|^{2n-1}$$

12．设A为n阶方阵，且$|A|\neq 0$，下列正确的是 （ A ）

（A）对n阶方阵B，若$AB=0$，则$B=0$

（B）对n阶方阵B，若$AB=BA$，则$|B|\neq 0$

（C）对n阶方阵B，若$|B|=|A|$,则 A,B有相同的特征值

（D）对任意非零向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，都有$X'AX>0$

$$AB=0 \Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}0 \Rightarrow B=0$$

13．若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性相关，则（ C ）

（A）α_1必可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出

（B）α_2必不可由$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性表出

（C）α_4必可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出

（D）α_1必不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出

14. 设A为n阶可逆矩阵，λ是A的一个特征值，则A的伴随矩阵A^*的特征值之一是（ B ）

（A）$\lambda^{-1}|A|^n$

（B）$\lambda^{-1}|A|$

（C）$\lambda|A|$

（D）$\lambda|A|^n$

15．已知 A,B 均为 n 阶方阵，且方程组 $ABX=0$ 有非零解，则（ A ）

（A）$Ax=0$与$Bx=0$至少有一个存在非零解

（B）$Ax=0$与$Bx=0$均不存在非零解

（C）$Ax=0$必有非零解

（D）$Bx=0$必有非零解

三、计算题及证明题（含4个小题，共25分）

16. （5分）计算矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$的秩。

解：$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$r(A)=2$$

17. （6分）已知 $A^2 = A, 2A - B - AB = E$，证明 $A-B$ 可逆。

$???(A - B) = E$

证：$2A - B - AB = E$

$$A - B + A - AB = E$$

因 $A^2 = A$，故 $(A-B) + (A^2 - AB) = E$

$$(A - B) + A(A - B) = E$$

$$(E + A)(A - B) = E$$

故 $A-B$ 可逆。

18. （7分）计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$

解： $$D_n=\left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=(b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \\ 0 & b & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n} a_i)b^{n-1}$$

19. （7分）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是某向量组的极大无关组，而 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3,$ $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$，且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 含于该向量组中，证明：$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是该向量组的极大无关组。

证：设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$，即

$$(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2 + 3k_3)\alpha_2 + (k_1 + 2k_2 + 3k_3)\alpha_3 = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是极大无关组，得

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

又因该向量组的秩为3，即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$是该向量组的极大无关组。

四、解答题（10分）

20．已知$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

（1）求 A^{-1}　　（2）求 $X=CAB$

解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{pmatrix}$

$$X=CAB=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\-1 & 2 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

五、解答题（10分）

21. 讨论线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - k_1 x_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = k_2 \end{cases}$$

（1）当 k_1, k_2 取何值时，方程组无解？有惟一解？有无穷多解？

（2）在有无穷多解的情况下，求出其导出组的基础解系并写出方程组的通解。

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-k_1&15&3\\1&-5&-10&12&k_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-k_1-6&6&0\\0&-6&-12&9&k_2-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&-k_1+2&2&4\\0&0&0&3&k_2+5\end{pmatrix}$$

当 $k_1\neq 2$ **时，** $r(A)=r(\overline{A})=4$**，方程组有惟一解。**

当 $k_1=2$ **时，有**

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{pmatrix}$$

若 $k_2 \neq 1$，**则** $r(A) = 3 < r(\overline{A}) = 4$，**方程组无解。**

若 $k_2 = 1$，**则** $r(A) = r(\overline{A}) = 3$，**方程组有无穷多解。**

当 $\begin{matrix} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{matrix}$ **时，** $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-8\\ x_2+2x_3=3\\ x_4=2\end{cases}$

其导出的基础解系是：$\eta_1=(0,-2,1,0)'$

令 $x_3=0$**，得原方程组的特解** $\eta_0=(-8,3,0,2)'$

故原方程组的通解为 $x=\eta_0+k\eta_1=\begin{pmatrix}-8\\ 3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

其中k为任意常数。

六、解答题（10分）

22．已知二次型 $f=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$，**写出它的矩阵，并用正交变换法化** f **为标准型。**

解： $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_1x_3$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A **的特征多项式** $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$

A **的特征值** $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=3$

1° $\lambda_1=0,\quad (\lambda E-A)X=0\qquad \xi_1=(1,\ 1,\ 1)'$

$\xi_1 = (1,\ 1,\ 1)'$

标准化： $\eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)'$

2° $\lambda_2 = \lambda_3 = 3 \qquad (\lambda_2 E - A)X = 0$

$\xi_2 = (-1,\ 1,\ 0)',\ \ \xi_3 = (-1,\ 0,\ 1)'$

其正交化，标准变化： $\eta_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)',\ \eta_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$

令 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

则$T'AT=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

即正交变换 $X=TY$ 将二次型化为标准型

$$f=3y_2^2+3y_3^2$$

《线性代数》模拟考试试卷（二）

一、填空题（每空3分，共30分）

1．设 A, B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则

$|2A^*B^{-1}|=$ $\underline{-\dfrac{2^{2n-1}}{3}}$

结论：

A	kE	$A+kE$	kA	$kA+E$	A^2	A^{-1}	A^*
λ	k	$\lambda+k$	$k\lambda$	$k\lambda+1$	λ^2	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{\|A\|}{\lambda}$
ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ

②由 $A\xi=\lambda\xi \Rightarrow (A^2+2A+3E)\xi = A^2\xi+2A\xi+3E\xi$

$$= \lambda^2\xi+2\lambda\xi+3\xi = (\lambda^2+2\lambda+3)\xi$$

2．设 n 阶方阵 A满足 $A^2+A+2E=0$（E是n阶单位矩阵）

则 $A^{-1}=$ $-\dfrac{A+E}{2}$ ____________

3. 设α 为3维列向量，α'是α的转置,若 $\alpha\alpha'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

则 $\alpha'\alpha=$ 3 ____________

4．设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶可逆矩阵，则 $B^{2004}-2A^2=$ $\underline{\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}}$

与第五章补充题,第3题类似

$$B^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^2P \Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5．设 A 为三阶方阵，且 $A' = -A$，则 $|A| =$ ____ 0 ____

$$A' = -A \qquad |A'| = |-A|$$

$$|A| = (-1)^3 |A| = -|A|$$

6．若 n 元线性方程组有解，且其系数矩阵的秩为 r，则当 ____ $r = n$ ____ 时，方程组有惟一解。

7．逆序数 $\tau(45321)=$ $\underline{\quad 9 \quad}$

8．已知 $\alpha=(3,5,7,9)$, $\beta=(-1,5,2,0)$, x 满足

$2\alpha+3x=\beta$，则 $x=$ $\underline{\left(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3},-4,-6\right)}$

9．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+10x_1x_2+12x_1x_3+12x_2x_3$

的秩为 $\underline{\quad 2 \quad}$

10．已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $AB=$ $\underline{\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}}$

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

11．设3阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\ 2r_2\\ 3r_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\beta\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix}$，其中 α,β,r_2,r_3 均为3维行向量,且已知行列式 $|A|=18,\ |B|=2$,则行列式 $|A-B|$ 等于（　B　）

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

$$|A-B|=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\ \gamma_2\\ 2\gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha\\ \gamma_2\\ 2\gamma_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-\beta\\ \gamma_2\\ 2\gamma_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\begin{vmatrix}\alpha\\ 2\gamma_2\\ 3\gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-\beta\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\times 18-2\times 2=2$$

12．设 A,B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是（ B ）。

（A）若 A,B 均可逆，则 $A+B$ 可逆

（B）若 A,B 均可逆，则 AB 可逆

（C）若 $A+B$ 均可逆，则 $A-B$ 可逆

（D）若 $A+B$ 均可逆，则 A,B 均可逆

13．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（ C ）。

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（B）$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

（C）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

（D）$\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

（C）$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$

$$\Rightarrow (\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_1-\alpha_3$$

$$\Rightarrow -(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_3-\alpha_1$$

14．设三阶矩阵A的特征值为 $-2,-1,2$，矩阵 $B=A^3-3A^2+2E$，则$|B|=$（ D ）

（A）-4 （B）-16

（C）-36 （D）-72

15．设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是$AX=0$的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表成（ C ）。

（A）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的一个等价向量组

（B）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的一个等秩向量组

（C）$\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

（D）$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2-\varepsilon_3,\varepsilon_3-\varepsilon_1$ 相关

三、计算题及证明题（含4个小题，共25分）

16. （4分）计算矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$的秩。

解： $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A)=2$

17．（7分）计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_4 = \cdots\cdots$$

解：把D_n按第n行展开，得

$$D_n = (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}a_{n-1} \begin{vmatrix} x & & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+n-1}a_2\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ 0 & x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & x & 0 \\ & & & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+n} a_n \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n-2} a_{n-1} \cdot x$$

$$+ \cdots + (-1)^{2n-1} \cdot (-1) a_2 x^{n-2} + (-1)^{2n} (x + a_1) x^{n-1}$$

$$= a_n + a_{n-1} x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n$$

18. （7分）设A为n阶可逆矩阵，且$A^2=|A|E$，证明A的伴随矩阵$A^*=A$

证明：因 $A^*=|A|A^{-1}$ （1）

又由

$$A^2=|A|E \Rightarrow A^2A^{-1}=|A|EA^{-1} \Rightarrow A=|A|A^{-1}$$

（2）

故由（1）（2）可得

$$A^*=A$$

19. （7分）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + k\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + k\alpha_3$，当 k 为何值时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

解：设 k_1, k_2, k_3，使 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$，整理得

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (kk_1 + k_2 + 2k_3)\alpha_2 + (k_2 + kk_3)\alpha_3 = 0 \qquad ①$$

由题意知 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ kk_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_2 + kk_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 2k - 2 \neq 0$$

即 $k \neq 1$ 时①只有零解。

故当 $k \neq 1$ 时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

四、解答题（10分）

20. 设 $AB = A + 2B$，且 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

（1）求 $(A-2E)^{-1}$　　　　（2）求 B

解：$(A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　　　$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

五、解答题（10分）

21．已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

（1）a,b为何值时，方程组有解。

（2）方程组有解时，求出其导出组的一个基础解系并写出方程组的通解。

解：（1）增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3b\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$$

当且仅当 $b-3a=0,\ 2-2a=0$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$

方程组有解，即 $a=1,\ b=3$

（2）当 $a=1,\ b=3$ 时，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

其同解方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$ ①

其导出组的基础解系：$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)'$

$\eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)'$

$\eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)'$

令①式中 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$，**得原方程组的特解**

$\eta_0 = (-2, 3, 0, 0, 0)'$

故原方程组的通解为

$x = y_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

故原方程组的通解为

$$x = y_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2, k_3为任意常数。

六、解答题（10分）

22．已知二次型 $f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$

写出它的矩阵，并用正交变换法化 f **为标准型。**

解： $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

A**的特征多项式** $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-8)$

A**的特征值** $\lambda_1=\lambda_2=2 \quad \lambda_3=8$

1° $\lambda_1=\lambda_2=2 \qquad (\lambda_1E-A)X=0$

$\xi_1=(-1,\ 1,\ 0)' \qquad \xi_2=(-1,\ 0,\ 1)'$

标准正交化： $\eta_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)'$ $\quad \eta_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

2° $\lambda_3=8 \quad (\lambda_2 E-A)X=0$

$$\xi_3=(1,\ 1,\ 1)'$$

标准化： $\eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)'$

故令 $T=(\eta_1,\ \eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 8$$

则 $T'AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

即正交变换 $X = TY$将二次型化为标准型

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2$$

《线性代数》模拟考试试卷（三）

一、填空题（每空3分，共30分）

1．设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

则 $[PAQ]^T = \underline{\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32}+2a_{12} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31}+2a_{11} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}+2a_{13} \end{bmatrix}}$

2．设 A, B是可逆矩阵，且 $AXB = C$，则 $X =$ $A^{-1}CB^{-1}$

3．设 n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,则 $A^2 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

4．5阶方阵$A=(a_{ij})_{5\times 5}$的行列式的完全展开式中，

$a_{33}a_{12}a_{54}a_{25}a_{41}$这项之前的符号是<u>负</u>。（填正或负）

5. n阶方阵$A, |A| = k \neq 0$,则$|A^*| =$ <u>k^{n-1}</u>（用k表示）

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

6．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均为4维列向量，记矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)$，$|A|=4$，

$|B|=-1$，则 $|A+B|=$ ___24___

7．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=3$，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=$ ___4___

$$\alpha_5 \Rightarrow \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

若 $\alpha_4+\alpha_5=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

则 $\alpha_4=\ldots\ldots$

8．非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解向量是 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_t$,若

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$ 也是 $AX=B$ 的解，则

$k_1+k_2+\cdots+k_t=$ ____1____

由．非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解向量是 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\ \xi_t$

$$\Rightarrow\quad A\xi_i=B\quad i=1,2,\ldots n$$

由 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$ 也是 $AX=B$ 的解，则

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t)=B$$

$$\Rightarrow\quad k_1B+k_2B+\cdots+k_tB=B$$

9. A 为实对称阵，且 $A\xi_i = \lambda_i \xi_i, \lambda_i$ 互不相等，$i = 1,2,3$,则向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是否线性相关<u>否</u>。（填是或否）

10．4阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4$ 设 $A\xi_i = \lambda_i \xi_i, i = 1,2,3,4$，矩阵 $P = [\xi_4, \xi_1, \xi_3, \xi_2]$，则

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

11. 下排列（　A　）是偶排列

（A）4 3 2 1　　（B）5 1 4 3 2

（C）5 4 1 2 3　　（D）6 1 3 4 2 5

12. 下列关于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件中，不正确的是（ A ）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意两个向量都线性无关；

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$没有一个向量能由其余向量线性表出；

（C）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩为 m

（D）任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$$

13．设n 阶方阵 A有一个特征值 $\lambda=-3$，且 $|A|=-4$，则 A的伴随矩阵 A^* 有一个特征值为（ B ）。

（A）$-\dfrac{4}{3}$ （B）$\dfrac{4}{3}$ （C）$-\dfrac{3}{4}$ （D）$\dfrac{3}{4}$

即：若*可逆阵*A有特征值 λ，对应特征向量 ξ

则：A^*有特征值 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，对应特征向量还是 ξ

14. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

相似，则 x, y 的值应为（　B　）

（A）$x=0, y=-1$　　（B）$x=0, y=1$

（C）$y=0, x=-1$　　（D）$y=0, x=1$

$\Rightarrow$ $2+x=y+1$

15．设A,B,C均为n阶方阵，且 $AB=BC=CA=E,E$为n阶单位阵，则 $A^2+B^2+C^2=$（ D ）

（A） 0　　（B）E　　（C）$2E$　　（D）$3E$

因 A,B,C 均为方阵，由：

$$\left.\begin{array}{l} AB=E\Rightarrow B=A^{-1} \\ CA=E\Rightarrow C=A^{-1} \\ A\text{的逆阵唯一} \end{array}\right\}\Rightarrow B=C$$

同样可得：$A=C\ \ \Rightarrow A=B=C$

$$A^2+B^2+C^2=AB+AC+CA=E+E+E=3E$$

三、计算题及证明题（含4个小题，共24分）

16. （6分）求矩阵A的秩，$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & a & a^2 & a^3\end{bmatrix}$

解：$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & a & a^2 & a^3\end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)r_1+r_3]{(-1)r_1+r_2}$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1\end{bmatrix}$$

若$a=1$，第三行为0，秩为2。

若 $a=1$，第三行为0，秩为2。

若 $a\neq 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & a+1 & a^2+a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & a-2 & a^2+a-6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & a-2 & (a-2)(a+3) \end{bmatrix}$$

若 $a=2$，第三行为0，秩为2。

若 $a\neq 2$，秩为3。

综上所述，当 $a=1$ 或 $a=2$ 时，秩为2当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$ 时，秩为3。

另：也可先进行$(-1)r_2+r_3$消法变换，这样导致先讨论 a 是否等于2，然后才讨论 a 是否等于1，最终答案一样。

17.（6分）若 n 阶方阵 A，满足 $A^3+A^2-A-E=0$，且 $|A+E|\neq 0, E$ 为 n 阶单位阵，证明：A 可逆，并求其逆阵 A^{-1}

证明：$\because A^3+A^2-A-E=0$

$\therefore A^3+A^2=A+E$, 即 $A^2(A+E)=A+E$ ①

$\because |A+E|\neq 0.\therefore A+E$ **可逆，①式两边同时右乘** $(A+E)^{-1}$

得 $A^2=E$, 即 $A\bullet A=E, \therefore A$ **可逆，且** $A^{-1}=A$

18. （6分）计算n 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}$$

提出来

解： $$D_{n+1} \underline{\underline{\text{按第一行展开}}}\ aD_n+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} ax & -1 & \dots & 0 \\ ax^2 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & 0 \\ ax^n & ax^{n-2} & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$=aD_n+xD_n=(a+x)D_n$$

$$=(a+x)^2D_{n-1}=\cdots=(a+x)^{n-1}D_2\ =a(a+x)^n$$

19. （6分） 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明：向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 也线性无关。

证明：设∃数 $K_i\in P$，$i=1,2,3,4$，使

$$K_1(\alpha_1+\alpha_2)+K_2(\alpha_2+\alpha_3)+K_3(\alpha_3+\alpha_4)+K_4(\alpha_4-\alpha_1)=0 \quad ※$$

即有 $(K_1-K_4)\alpha_1+(K_1+K_2)\alpha_2+(K_2+K_3)\alpha_3+(K_3+K_4)\alpha_4=0$

由已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则有

$$\begin{cases} K_1-K_4=0 \\ K_1+K_2=0 \\ K_2+K_3=0 \\ K_3+K_4=0 \end{cases} \quad ①$$

解线性方程组①，其系数行列式 $D\neq 0$，∴ ① 只有零解，即只有当 $K_1=K_2=K_3=K_4=0$ 才能使※式成立从而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 也线性无关。

四、解答题（10分）

20.n 阶方阵 A，且 $|A| = a \neq 0$，求 $\left| -3\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \right|$ 的值，

其中 A^{-1} 为 A 的逆矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵。

解：$$\left| -3\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \right| = (-3)^{2n} \begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{vmatrix}$$

$$= (-3)^{2n} \left|A^{-1}\right| \bullet \left|A^*\right|$$

$$= (-3)^{2n} \frac{1}{|A|} \bullet |A|^{n-1} = (-3)^{2n} a^{n-2}$$

五、解答题（10分）

21．线性方程组 $AX=B$，其增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{经过一系列初行变换}} \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

问 a,b 取何值时，$AX=B$ （1）无解；（2）有唯一的解；（3）有无穷多解，并求出其通解。

解：（1）当 $a=1, b\neq -1$时，$r(A)=2\neq r\left(\bar{A}\right)=3.\therefore$ 无解。

（2）当 $a\neq 1$时，$r(A)=r(\bar{A})=4. AX=B$ 有唯一的解；

（3）当$a=1$且$b=-1$时，$r(A)=r\left(\bar{A}\right)=2<n=4, AX=B$

有无穷多解。此时，与原方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_3-x_4=-1 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \end{cases} *$$

令 $x_3=x_4=0$, 得$AX=B$ 特解 $\gamma_0=\left(-1,1,0,0\right)^T$，下求通解：

$\because r\left(A\right)=2, n=4$，故基础解系中解向个数为2。

*的导出组为：$\begin{cases} x_1=x_3+x_4 \\ x_2=-2x_3-2x_4 \end{cases} *^{-1}$

令$(x_3, x_4)=(1,0)$或$(0,1)$，由$*$得$AX=0$的基础解系：

$$\eta_1=(1,-2,1,0)^T, \eta_2=(1,-2,0,1)^T$$

故原方程组 $AX=B$ 的通解为：

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\gamma_0=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2为任意常数。

六、解答题（11分）

22．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

写出它的矩阵，并用正交变换法化 f 为标准型。

解：二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$

（1）求特征值，由 $|\lambda E-A|=0$ 得：$\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-1\\-1&\lambda-4&-1\\-1&-1&\lambda-4\end{vmatrix}=0$

$(\lambda-3)^2(\lambda-6)=0$。特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=6$

求特征向量。

$\lambda = 3$ 对应的特征向量，解方程组

$$(3E-A)X=0 \Rightarrow \text{系数矩阵是} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

特征方程化为 $x_1 = -x_2 - x_3$，特征向量或基础解系是

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 6$ 对应的特征值，解方程组

$$(6E-A)X=0 \Rightarrow \text{系数矩阵是} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ & & \end{bmatrix}$$

特征方程化为 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，特征向量或基础解系是 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

正交单位化：对 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 进行正交

单位化。

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta_3 = \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

令 $P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3], P$ 是正交矩阵，$P^T AP = P^{-1} AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$

所以令 $X = PY$,代入

$$f = X^T AX = Y^T P^T APY = Y^T \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Y = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^3$$

《线性代数》模拟考试试卷（四）

一、填空题（每小题3分，共21分）

1．设：$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$，则 $f(4)=$ $\underline{\quad 160 \quad}$

每行之和=?

2．设 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}$，则 $B^{*}=$ $\underline{\dfrac{1}{18}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}}$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&\frac{1}{3}&0\\4&5&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^{*}$$

$$\Rightarrow B^{*}=|B|B^{-1}$$

3．已知方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **只有零解，则** λ 应满足

$\underline{\quad \lambda \neq 1 \quad}$。

4. A **有特征值** λ **，则** $f(\boldsymbol{A}) = a_0 E + a_1 \mathbf{A} + \cdots + a_k \mathbf{A}^k$

有特征值 $\underline{\quad \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_k \lambda^k \quad}$

5．已知三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=-1$，其对应的特征向量分别是 ξ_1, ξ_2, ξ_3，取 $P=[\xi_3\xi_2\xi_1]$，则

$$P^{-1}AP=\underline{\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}}$$

6．设 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$ 正定,则 k 应满足的条件 $\underline{k>1}$

7、$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$，则 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} =$

$\underline{\quad 0 \quad}$，其中$A_{ij}$为元素 a_{ij} 的代数余子式，$i, j = 1,2,3,4$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

8. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 - 5b_1 & 3b_1 \\ a_2 & 2c_2 - 5b_2 & 3b_2 \\ a_3 & 2c_3 - 5b_3 & 3b_3 \end{vmatrix} =$（ D ）

（A）$30m$ （B）$-15m$

（C）$6m$ （D）$-6m$

9. 设A是n阶矩阵，且$|A|=0$，则（ C ）

（A）A 中必有两行元素对应成比例

（B）A 中任一行向量是其余各行向量的线性组合

（C）A 中必有一列向量可以由其余的列向量线性表出

（C）方程组$AX=B$必有无穷多解

10．一个值不为零的n阶行列式，经过若干次矩阵的初等变换后，该行列式的值（ B ）。

（A）保持不变；　　（B）保持不为零；

（C）保持相同的正、负号；　　（D）可以变为任何值。

11．设 A, B 均是 n 阶非零方阵，满足 $AB=0$，则 A, B 必有（ C ）

（A）$r(A)=0$或$r(B)=0$ （B）$r(A)=n$或$r(B)=n$

（C）$r(A)<n$或$r(B)<n$ （D）$r(A)=n$或$r(B)=0$

若 $AB=0$ 则：$r(A)+r(B)\leq n$

12．设 A 是三阶矩阵，有特征值为 $1,-1,2$，则下列矩阵

中可逆矩阵是（ D ）。

（A）$E-A$　　（B）$E+A$

（C）$2E-A$　　（D）$2E+A$

三、解答题（每小题8分，共16分）

13．设三阶方阵A, B满足 $A^{-1}BA = 6A + BA$，且

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$，求B

解： 显然A可逆，用 A^{-1}右乘方程两边，得

$A^{-1}B = 6E + B$，即 $(A^{-1} - E)B = 6E, B = (A^{-1} - E)^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^{-1} - E\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ **与** $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ **相似，求** a和b **的值。**

解： $a=0$

$b=-2$ $\quad (|\lambda E-A|=|\lambda E-B|)$

四、解答题（每小题8分，共16分）

15．求向量组$\alpha_1=(1,2,1,3),\ \alpha_2=(1,1,-1,1),\alpha_3=(1,3,3,5),\alpha_4=(4,5,-2,6),\alpha_5=(-3,-5,-1,-7)$**的秩和极大线性无关组。**

解:

$$\begin{array}{ccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\0 & -1 & 1 & -3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\beta_1' \quad \beta_2' \quad \beta_3' \quad \beta_4' \quad \beta_5'$$

$$\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -2\\0 & 1 & -1 & 3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可见 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=2$**，由** β_1',β_2'**线性无关，**β_1,β_2 **也线性无关，可见:** β_1,β_2**是** $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ **的一组极大线性无关组。**

16、计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \end{vmatrix}$

的值。

解： $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

五、解答题（每小题8分，共16分）

17．非齐次线性方程组$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2 \end{cases}$，当$\lambda$取何值时有解？并求出它的全部解。

解：当$\lambda=1$或-2**方程组有解；**

$\lambda=1$**时，方程组解为** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda=-2$**时，方程组解为** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

18．用正交变换将二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$化成准标形。

解：二次型的对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$**，其特征多项式**

$$|\lambda \boldsymbol{E}-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-5 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -4 & \lambda-9 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\left(x^2-11\lambda+18-8\right)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=10.$

$\lambda=1$时，由方程组 $(E-A)x=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$

得线性无关特征向量 $\xi_1=\left[-2,1,0\right]^T,\xi_2=\left[2,0,1\right]^T$

$\lambda=10$时，由方程组 $(10E-A)x=\begin{bmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$

得特征向量 $\xi_3=[1,2,-2]^T$

将对应于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个特征向量 ξ_1,ξ_2 用 $Schmidt$ 正化方法标准正交化。

$$\eta_1=\xi_1=[-2,1,0]^T,$$

$$\eta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1\eta_1)}\eta_1=[2,0,1]^T-\frac{-4}{5}[-2,1,0]^T$$

$$=[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1]^T\ //[2,4,5]^T$$

再将 η_1,η_2,ξ_3 单位化，得正交阵 Q

$$\eta_1^0=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{bmatrix},\quad \eta_2^0=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{45}}\\ \frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{5}{\sqrt{45}}\end{bmatrix},\quad \xi_3^0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}，\text{则 } Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}.$$

令 $x = Qy$ ，原二次型化成标准型，即

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$$

$$= y^T (Q^T A Q) y$$

$$= y_1^2 + y_2^2 + 10 y_3^2$$

六、证明题（每小题8分，共16分）

19．已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$n$维线性无关向量，设

$\beta_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}\alpha_3\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}\alpha_4\\0\end{pmatrix}$ 证明：向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。

证明：设存在 k_1,k_2,k_3,k_4 使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$$

$$k_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\alpha_2\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}\alpha_3\\1\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}\alpha_4\\0\end{pmatrix}=0$$

则有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则

$k_1=k_2=k_3=k_4=0$ $\therefore\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。

20、已知α是 n维列向量，且 $\alpha'\alpha = E$，若 $A = E - \alpha\alpha'$

证明：$|A| = 0$

证明: $A\alpha = (E - \alpha\alpha')\alpha = \alpha - \alpha\alpha'\alpha$

$$= \alpha - \alpha(\alpha'\alpha) = \alpha - \alpha = 0$$

知α 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的非零解，

故 $|A| = 0$

若证得 $A\alpha = 0$，$\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ $AX = 0$ 有非零解，$\Rightarrow$ $|A| = 0$