院（系）________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线

成都理工大学 2015—2016 学年
第一学期《高等数学Ⅰ、Ⅱ》（上）考试试卷

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

得 分	

1．$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\ln\frac{x}{x+1}\cdot\cos(\ln x)=$ ____0____；

2．设函数增量：$\Delta y=\frac{x}{1+x}\Delta x+o(\Delta x)$，则 $y'|_{x=1}=$ ____$\frac{1}{2}$____；________。

3．极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$ 等于____1____。

4．设 $\boldsymbol{y-xe^y=1}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ____e____。

5．曲线 $\boldsymbol{y=(x+2)e^{-\frac{1}{x-1}}}$ 的铅直渐近线为 $\boldsymbol{x=1}$， 。

6．广义积分 $\int_0^{+\infty}\boldsymbol{xe^{-x^2}dx=}$ ________$\frac{1}{2}$________。

7．方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解. $\frac{1}{x}(-\cos x+C)$.________

8．阿基米德螺旋线 $r=a\theta\ (a>0)$ 对应 θ 从 0 到 2π 所围图形的面积为____$\frac{4}{3}\pi^3a^2$____。

9．由曲线 $\boldsymbol{y=x^2}$ 和 $\boldsymbol{y=x^3}$ 所围平面图形绕 $\boldsymbol{x}$ 轴一周所得旋转体的体积等于

____$\frac{2\pi}{35}$____

10．不定积分 $\int arc\cos xdx=$ ____$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+$ ________

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

得 分	

11、 设函数 $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 为函数的（ C ）

（A）无穷间断点； （B）可去间断点；

（C）跳跃间断点； （D）第二类间断点。

12、若 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x<1 \\ 3 & x=1 \\ 2a-bx & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则（ A ）。

（A）$a=2,b=1$ （B）$a=1,b=2$

（C）$a=3,b=0$ （D）$a=0,b=3$

13、设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f''(0)=f'(0)=0$，

则（ D ）。

（A）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的零点；

（B）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

（C）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 时，$(0, f(0))$ 为拐点；

（D）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sin x}=1$ 时，$(0, f(0))$ 为拐点.

14、在下列极限中，能推出 $f'(0)=1$ 的是（ B ）

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ （B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{x}=1$

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-\cos x)-f(0)}{x}$ （D）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(|\sin x|)-f(0)}{|x|}=1$

三、计算题（每题 5 分，共 30 分）

得 分	

15．计算极限：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

解：原式

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$ --------- 3 分

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0$$ ----------2 分

16．设 $x=f'(t),\ y=tf'(t)-f(t)$, 且 $f''(t)\neq0$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(tf'(t)-f(t)\right)'}{f''(t)}=t$ ---------3 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}$$ --------2 分

17．求函数 $y=xe^{-x}$ 的拐点及凹凸区间。

解 $y'=-e^{-x}(x-1)$ $y''=e^{-x}(x-2)$

令 $y''=0$ 及 $x=2$ 且 $x=2$ 左右两侧 2 分

y' 由负变为正，故 $(-\infty,2)$ 为上凸区间

（$2,+\infty$）为下凸区间 2 分

拐点为 $(2,2e^{-2})$ 1 分

18．求函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 的单调区间与极值。

解：令 $f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)=0$

得驻点 $x=-1, x=3$ -------------- 1 分

函数的单调递增区间为 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$

函数的单调递增区间为（-1，3） ------------2 分

函数的极大值为 $f(-1)=3$；函数的极小值为 $f(3)=-61$ ------------2 分

19、 求 $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}}dx$

解：令 $\boldsymbol{t=\sqrt{x-1}}$ （1 分）

原式 $= 2\int_0^1 \boldsymbol{te^t dt}$ （2 分）

$= 2\boldsymbol{e^t(t}-1\boldsymbol{)}\Big/_0^1$

$= 2$ （2 分）

20．设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt = e^{-2x}-1$，求：$\int_0^1 f(x)dx$。

解：令 $u=x-t$

左边 $=\int_0^x f(u)du$ （3 分）

所以：$\int_0^x f(u)du = e^{-2x}-1$

取 $x=1$ $\therefore \int_0^1 f(u)du = e^{-2}-1$ （1 分）

$\int_0^1 f(x)dx = e^{-2}-1$ （1 分）

四、解答题（每题 6 分，共 18 分）

得 分	

21．设函数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，

$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$。

解：利用恒等变形 $[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\left\{[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}$ 3 分

由题意 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=2$ 2 分

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$ 1 分

22、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}-x, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$，求： $f'(x)$

解：当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}-x\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-1$ ……………2分

当 $x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}-x\right)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x^2-x}{x^2}$

$\underline{\underline{\frac{0}{0}}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-2x-1}{2x}\underline{\underline{\frac{0}{0}}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-2}{2}=-1$ ……………3分

$f'(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-1, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$ 。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 1 分

23、求微分方程 $\boldsymbol{y''-3y'+2y=2e^x}$ 的通解。

解：特征方程：$\lambda^2-3\lambda+2=0$，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 。

$y''-3y'+2y=0$ 的通解：$C_1e^x+C_2e^{2x}$ （3 分）

特解待定形式：$\boldsymbol{y^*=xe^xa}$，代入原方程得 $\boldsymbol{a=-2}$ 。 （2 分）

非齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$ （1 分）

五、证明题（每题 5 分，共 10 分）

得 分	

24．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)<1,$ 证明方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $[0,1]$ 上只有一个根。

证：令 $g(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$ 2 分

则 $g(x)$ 在[0，1]上连续，

且 g（0）= -1 <0, $g(1)=1-\int_0^1 f(t)dt>1-\int_0^1 1dt=0$ 1 分

$\therefore$ 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g(\xi)$ =0

即方程至少有一正根 1 分

又 $g'(x)=2-f(x)>0$ $\therefore$ 根唯一 1 分

25、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。试证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $\int_0^{\xi} f(t)dt = (1-\xi)f(\xi)$

证: 令 $F(x) = (x-1)\int_0^x f(t)dt$ （2 分）

因 $F(0) = F(1) = 0$ （2 分）

由罗尔中值定理 $\exists \xi$，使得 $F'(\xi) = 0$

即 $\int_0^{\xi} f(t)dt = (1-\xi)f(\xi)$ （1 分）