MÉTODOS ESTOCÁSTICOS EN RECURSOS HIDRÁULICOS

Sthochastic Methods in Water Resources

2024 – 1S

Ejercicio 04 – Funciones aleatorias

1. Proporcione ejemplos de variables hidrológicas que pueden ser modeladas con una serie aleatoria de valores continuos y una serie aleatoria de valores discretos en:

    a. una serie aleatoria,
    b. un proceso de retícula,
    c. un proceso de tiempo continuo,
    d. un proceso de espacio continuo,
    e. un proceso de espacio-tiempo continuo,
    f. un proceso de punto compuesto en el tiempo,
    g. un proceso de punto compuesto en el espacio.

    Tenga en cuenta que se piden 14 combinaciones.

2. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:
$$\gamma\left(h\right) = 10h^{1.5},$$
mientras que la media es constante. ¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

3. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:
$$\gamma\left(h\right) = 10\exp\left(-\frac{h}{30}\right),$$
y una media constante. La función de densidad de probabilidad en una ubicación dada es la distribución Gamma. ¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

4. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:
$$\gamma\left(h\right) = 10\exp\left(-\frac{h}{30}\right),$$
y una media constante. La función de densidad de probabilidad en una ubicación dada es la distribución Gaussiana. ¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

Laboratorio de Hidráulica
Av. NQS (Carrera 30) No. 45-03
Edificio Luis Enrique Orduz Espinosa (Edificio 409) Oficina 313
+57 1 316 5000 Ext. 13480
Código Postal 111321, Bogotá DC, Colombia
http://sites.google.com/view/agua_unal

5. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:

$$\gamma\left(h\right)=10\exp\left(-\frac{h}{30}\right),$$

y una media constante. La función de densidad de probabilidad multivariada de cualquier conjunto de ubicaciones es la distribución Gaussiana.
¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

6. Demuestre que la escala integral de la función de correlación exponencial es igual al parámetro a y de la función de correlación esférica es igual a (3/8)a.

Exponencial $$C_Z\left(h\right)=\sigma_Z^2\exp\left(-\frac{h}{a}\right)\therefore h\geq 0, a>0$$

Esférica $$C_Z\left(h\right)=\begin{cases}\sigma_Z^2\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{h}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right] & \text{si } h<a\\ 0 & \text{si } h\geq a\end{cases}$$
$$h\geq 0, a>0$$

7. Obtener la expresión:

$$C_Z\left(\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}S_Z\left(\omega\right)\cos\left(\omega\tau\right)\mathrm{d}\omega$$

con función de densidad espectral:

$$S_Z\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_Z\left(\tau\right)\cos\left(\omega\tau\right)\mathrm{d}\tau.$$

Es decir la función de covarianza es una transformada de Fourier del espectro y viceversa, formando un par de Fourier.

Encuentre la Ecuación:

$$C_Z\left(0\right)=\sigma_Z^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_Z\left(\omega\right)\mathrm{d}\omega$$

Laboratorio de Hidráulica
Av. NQS (Carrera 30) No. 45-03
Edificio Luis Enrique Orduz Espinosa (Edificio 409) Oficina 313
+57 1 316 5000 Ext. 13480
Código Postal 111321, Bogotá DC, Colombia
http://sites.google.com/view/agua_unal

8. La siguiente relación se mantiene para el valor esperado de las amplitudes complejas:

$$E\left[\mathrm{d}X\left(\omega_1\right)\mathrm{d}X^*\left(\omega_2\right)\right]=\begin{cases}S\left(\omega\right)\mathrm{d}\omega, & \text{si } \omega_1=\omega_2=\omega\\ 0 & \text{si } \omega_1\neq\omega_2\end{cases}$$

donde $\mathrm{d}X^*\left(\omega\right)$ es el conjugado complejo de la amplitud compleja aleatoria $\mathrm{d}X\left(\omega\right)$ en la Ecuación:

Dada esta relación,

$$Z\left(t\right)=\mathbb{R}\left\{\mu_Z+\sum_{k=-K}^{K}X_k\exp\left(i\omega_k t\right)\right\}\underset{K\to\infty}{\rightarrow}\mathbb{R}\left\{\mu_Z+\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t\right)\mathrm{d}X\left(\omega\right)\right\}$$

Con la frecuencia $\omega_k=\frac{1}{2}\left(2k-1\right)\Delta\omega$ y X_k es un número aleatorio complejo que representa la amplitud

Encuentre la Ecuación:

$$C_Z\left(\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}S_Z\left(\omega\right)\cos\left(\omega\tau\right)\mathrm{d}\omega$$

Un número complejo (z = a + bi) tiene un conjugado complejo (z* = a - bi). El producto de un número complejo y su conjugado complejo es un valor real: (a+bi)(a-bi) = $a^2 + b^2$.

9. Considera una función aleatoria Z(t) con una escala de fluctuación θ de 50 días, una función de covarianza exponencial y varianza de 20 . Grafique la relación entre la varianza de Z del proceso promediado $Z_T(t)$ con T aumentando de 1 a 100 días.

Laboratorio de Hidráulica
Av. NQS (Carrera 30) No. 45-03
Edificio Luis Enrique Orduz Espinosa (Edificio 409) Oficina 313
+57 1 316 5000 Ext. 13480
Código Postal 111321, Bogotá DC, Colombia
http://sites.google.com/view/agua_unal

TALLER 4 - MÉTODOS ESTOCÁSTICOS

Funciones aleatorias

Solución:

1)

a. Una serie aleatoria:

Los datos de Precipitación diaria, Caudal diario y Temperatura diaria. En este caso, la variable hidrológica se representa como una secuencia de valores aleatorios en el tiempo.

b. Un proceso de retícula:

La distribución espacial de la precipitación y temperatura en una región. En este caso la variable hidrológica se modela como una distribución espacial sobre una cuadrícula, donde cada celda de la cuadrícula representa la cantidad de lluvia en esa área.

c. Un proceso de tiempo continuo:

La Evapotranspiración y variación de la humedad del suelo a lo largo un periodo de tiempo definido. En este caso, la variable hidrológica se modela como una función que se mide continuamente e ininterrumpidamente en el tiempo.

d. Un proceso de espacio continuo:

La variación espacial de la temperatura y la humedad del suelo en una región. En este caso, la variable hidrológica se modela como una función que se mide continuamente en el espacio y que varía suavemente en función de la ubicación geográfica.

e. Un proceso de espacio-tiempo continuo:

El cambio temporal y espacial de la temperatura y humedad del suelo en una región. En este proceso se combinan las características de los procesos de tiempo continuo y espacio continuo. Se utiliza para modelar variables hidrológicas que varían tanto en el espacio como en el tiempo de forma continua.

f. Un proceso de punto compuesto en el tiempo:

La frecuencia de ocurrencia de eventos de tormentas y sequías en un periodo de tiempo. En este caso, la variable hidrológica se modela como una secuencia de eventos discretos en el tiempo.

g. Un proceso de punto compuesto en el espacio:

La distribución espacial de eventos de tormentas y sequías en un periodo de tiempo. En este caso, la variable hidrológica se modela como una distribución espacial de eventos discretos, donde cada punto representa la ubicación de una tormenta o sequía en un periodo de tiempo.

2) El proceso descrito es intrínseco ya que su semivarianza depende solo de la distancia h y no de la posición en el espacio. Además, también es estacionario en sentido amplio ya que su media es constante y su semivarianza depende solo de la distancia h. El proceso no es Estacionario de segundo orden porque su semivarianza no es constante para todas las distancias h. El proceso no

es estrictamente estacionario ya que la semivarianza no es constante para todas las distancias h y tampoco sus momentos son invariantes en el tiempo.

3) La distribución de la función de densidad de probabilidad Gamma puede afectar la variable en determinados puntos en el tiempo, en este caso el proceso descrito es intrínseco ya que su semivarianza depende solo de la distancia h y no de la posición en el espacio. Además, también es estacionario en sentido amplio ya que su media es constante y su semivarianza depende solo de la distancia h. El proceso no es Estacionario de segundo orden porque su semivarianza no es constante para todas las distancias h. El proceso es estrictamente estacionario ya que a pesar de que la semivarianza no es constante para todas las distancias h, sus momentos si pueden variar en algunos puntos en el tiempo.

4) La distribución de la función de densidad de probabilidad Gausiana es estacionaria, en este caso el proceso descrito es intrínseco ya que su semivarianza depende solo de la distancia h y no de la posición en el espacio. Además, también es estacionario en sentido amplio ya que su media es constante y su semivarianza depende solo de la distancia h. El proceso no es Estacionario de segundo orden porque su semivarianza no es constante para todas las distancias h. El proceso no es estrictamente estacionario ya que la semivarianza no es constante para todas las distancias h y tampoco sus momentos son invariantes en el tiempo.

5) Dado que la función de densidad de probabilidad Gaussiana describe la distribución conjunta de las variables aleatorias en diferentes ubicaciones en el espacio, influirá en cómo se correlacionan las variables en función de la distancia y la dirección en el espacio. Por lo tanto, el proceso será intrínseco ya que su semivarianza depende solo de la distancia h en el tiempo y no de la posición absoluta en el espacio. Además, también es estacionario en sentido amplio ya que su media es constante y su semivarianza depende solo de la distancia $h \text{ entre los puntos}$. El proceso es Estacionario de segundo orden porque su semivarianza es constante para todas las distancias h. El proceso es estrictamente estacionario ya que la semivarianza es constante para todas las distancias h y sus momentos son invariantes en el tiempo.

9)

```
# Función para calcular la varianza de Z_T(t) en función de T

var_zt <- function(T, sigma2, theta) {

  return(sigma2 * (1 - 2/theta + 1/theta^2 * (1 - exp(-T/theta))))

}

# Parámetros del proceso

sigma2 <- 20

theta <- 50

# Valores de T de 1 a 100 días

T_values <- 1:100

# Calcular la varianza de Z_T(t) para cada valor de T
```

```
variances <- sapply(T_values, function(T) var_zt(T, sigma2, theta))

# Graficar la relación entre la varianza de Z_T(t) y T

plot(T_values, variances, type = "l", xlab = "T (días)", ylab = "Varianza de Z_T(t)",
     main = "Relación entre la varianza de Z_T(t) y T")
```