Friedrich-Schiller-Universität Jena

Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Digitale Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Joachim Denzler
http://www.inf-cv.uni-jena.de

M.Sc. Clemens-A. Brust
clemens-alexander.brust@uni-jena.de

Übung zur Vorlesung

Rechnersehen 2

Sommersemester 2018

Übungsblatt 5: Projektive Rekonstruktion & EM-Algorithmus

Ausgabe: 12.06.2019 Abgabe: 25.06.2019 im Moodle

Anmerkung: Ab diesem Übungsblatt gibt es keine Programmvorschläge mehr.

Aufgabe 1 Epipolargeometrie (2 Punkte)

Gegeben seien Eingabebilder mit Punktkorrespondenzen. Berechnen Sie daraus mit bekannten Verfahren die Epipolargeometrie bzw. lesen Sie diese aus den gegebenen Werten ein. Geben Sie die Fundamentalmatrix anschließend aus.

Aufgabe 2 Projektives Kamerapaar (4 Punkte)

Für eine gegebene Fundamentalmatrix F lässt sich ein Paar von Projektionsmatrizen berechnen, das zu dieser Epipolargeometrie geführt hat. Dies ist jedoch nur bis auf eine projektive Transformation möglich, da die internen Kameraparameter nicht gegeben sind und daher dafür die Identität angenommen wird. Die Kameramatrizen sind dann gegeben durch:

$$P_0 = [\mathrm{Id}|0]$$
$$P_1 = \left[\left[\mathbf{e}'\right]_\times F|\mathbf{e}'\right]$$

wobei $\mathbf{e}'$ der Epipol im zweiten Bild ist und $[\mathbf{e}']_\times$ die entsprechende schiefsymmetrische Matrix zur Darstellung des Kreuzproduktes ist (siehe Vorlesung, Epipolargeometrie):

$$\left[\mathbf{e}'\right]_\times y = \mathbf{e}' \times y \tag{1}$$

Berechnen Sie zu einer gegebenen Epipolargeometrie ein solches Paar von Kameramatrizen.

Aufgabe 3 Projektive Rekonstruktion (4 Punkte)

Führen Sie mit den gegebenen Kameramatrizen und Punktkorrespondenzen eine Triangulation durch. Es sollten sich somit 3-D Positionen für die bekannten Korrespondenzen ergeben.

Stellen Sie die rekonstruierten 3-D Punkte durch Projektion dar. Wählen Sie dafür als Projektionskameras zum einen die beiden für die Rekonstruktion verwendeten Ansichten, zum anderen eine beliebige weitere Ansicht. Was fällt am Rekonstruktionsergebnis auf?

Aufgabe 4 Normalverteilungen (4 Punkte)

Die Dichte der mehrdimensionalen Normalverteilung mit Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und $d \times d$ Kovarianzmatrix Σ ist definiert als:

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

Eine zweidimensionale Normalverteilung lässt sich durch eine Niveaulinie graphisch darstellen. Dies ergibt z.B. eine Ellipse, die einen gegebenen Prozentsatz der Masse der Dichtefunktion umfasst. Der Mittelpunkt der Ellipse ist durch den Mittelwert der Verteilung gegeben. Die beiden Hauptachsen ergeben sich als Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ der Kovarianzmatrix. Die Standardabweichung $\boldsymbol{\sigma}_i$ entlang der zugehörigen Hauptachse $\boldsymbol{v}_i$ ist die Wurzel aus den Eigenwerten, also $\sqrt{\lambda_i}$. Wird die Ellipse mit Hauptachsen der Länge $3\sigma_i$ gezeichnet, liegt ca. 97% der Masse der Verteilung innerhalb der Ellipse.

Schreiben Sie eine Klasse, die eine d-dimensionale Normalverteilung mit gegebener Kovarianzmatrix und gegebenen Mittelwert repräsentiert. Die Klasse soll eine Methode aufweisen, mit der sich für einen gegebenen Vektor die Dichte der Normalverteilung an dieser Stelle auswerten lässt. Mit einer weiteren Methode soll eine 2-dimensionale Verteilung in Form einer Ellipse in einem Bild dargestellt werden.

Aufgabe 5 EM-Algorithmus (6 Punkte)

Mit dem EM-Algorithmus können in einer gegebenen Punktemenge Cluster gefunden werden. Im Folgenden wird dabei davon ausgegangen, dass die Punkte in der Menge durch eine gausssche Mischungsverteilung entstanden sind. Ziel ist es jetzt, die einzelnen Anteile mit ihren Mittelwerten μ_k und Kovarianzmatrizen Σ_k wieder zu rekonstruieren. Um das Verfahren einfach zu halten, sei die Anzahl n der gemischten gaussschen Anteile bereits bekannt und alle Mischkomponenten gleichwahrscheinlich.

Beim EM-Algorithmus wird iterativ vorgegangen. Man beginnt mit einer zufällig gewählten Startlösung, also n Normalverteilungen. Für jeden Punkt $\boldsymbol{x}_i$ aus der Eingabemenge wird nun diejenige Normalverteilung ausgewählt, deren Dichtefunktion für $\boldsymbol{x}_i$ am größten ist. So ergibt sich eine Zugehörigkeit $\gamma_{i,k}$ des Punktes $\boldsymbol{x}_i$ zu Normalverteilungen $k \in \{1, ..., n\}$, die entweder den Wert 0 oder 1 annimmt.

Wenn jeder Punkt einer Verteilung zugewiesen wurde, können für die einzelnen Verteilungen neue Mittelwerte μ_k und Kovarianzmatrizen Σ_k berechnet werden, jeweils unter Berücksichtigung der eben bestimmten zugehörigen Punkte:

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{\sum_i \gamma_{i,k}} \sum_i \gamma_{i,k} \boldsymbol{x}_i$$

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{1}{\sum_i \gamma_{i,k}} \sum_i \gamma_{i,k} (\boldsymbol{x}_i - \hat{\mu}_k)(\boldsymbol{x}_i - \hat{\mu}_k)^T$$

Schreiben Sie ein Programm, das zunächst eine Menge von Punkten aus einer Textdatei einliest. Bei den gegebenen Punktemengen ist jeweils angegeben, wieviele Normalverteilungen überlagert sind. Trennen Sie nun die überlagerten Einzelanteile mit Hilfe des EM-Algorithmus. Zeichnen Sie in jedem Iterationsschritt die gefundenen Lösungen als Ellipsen im Bild ein und geben Sie am Ende die berechneten Mittelwerte und Kovarianzmatrizen aus.

Viel Spaß und Erfolg!

Pfade:

Beispielbilder (1-3):	05-reconstruct/input/
Beispielbilder (4,5):	05-em/input/
Ground-Truth:	05-em/intermediate/