Math. Nachr. 118 (1984) 7—17

Harmonische geodätische Formen und harmonische Räume

Von MARTIN BELGER in Leipzig

(Eingegangen am 6. 10. 1982)

Problemstellung und Resultate

Die Arbeiten [1] und [7] enthalten u. a. folgende Resultate: Eine (pseudo-)RIEMANNsche Mannigfaltigkeit V^n der Klasse C^∞, die von konstanter Krümmung ist, besitzt stets vier linear unabhängige harmonische geodätische p-Formen $(1 \leqq p \leqq n-1)$. Umgekehrt zieht die Existenz von vier solchen Formen in V^n stets konstante Krümmung nach sich. Für diese Aussage reicht es bereits aus, die Existenz von drei solchen Formen in V^n vorauszusetzen.

Im folgenden gehen wir der Frage nach, inwieweit die letzte Aussage auch noch für zwei derartige Formen Gültigkeit behält. Wir werden zeigen, daß ein V^n, in dem es zwei linear unabhängige harmonische geodätische p-Formen gibt, ein harmonischer Raum ist und Krümmungskonstanz sich erst durch eine zusätzliche Determinantenbedingung für die beiden vorausgesetzten Formen einstellt. Für $p = 1$ werden wir umgekehrt zeigen, daß ein harmonischer Raum stets zwei linear unabhängige harmonische geodätische PFAFFsche Formen besitzt. Die Existenz von genau zwei solchen Formen ist notwendig und hinreichend dafür, daß V^n $(n \geqq 4)$ ein nichttrivial harmonischer Raum ist. An einem Beispiel werden wir sehen, daß es harmonische Räume gibt, die nicht zu allen möglichen Stufen p harmonische geodätische Formen besitzen.

1. Geodätische p-Formen

1.1 Definition

In einer (pseudo-)RIEMANNschen Mannigfaltigkeit V^n der Klasse C^∞ sei $s = s(x, y)$ der *geodätische Abstand* zwischen den hinreichend benachbarten Punkten[1] $x, y \in V^n$ mit den lokalen Koordinaten x^i, y^j $(i, j = 1, \ldots, n)$. Aus der *Abstandsfunktion* $\Omega = \frac{e}{2} s^2$ (e: *Indikator* der Geodätischen $\overline{xy}$) bilden wir nun die Doppelformen

$$A^{(1)}(x, dx; y, dy) = d\Omega\, \boldsymbol{d}\Omega, \qquad B^{(1)}(x, dx; y, dy) = d\, \boldsymbol{d}\Omega,$$

$$\Gamma^{(1)}(x, dx; y, dy) = g^{ij}(x)\, \nabla_i \Omega \cdot \nabla_j B^{(1)}$$

des Bigrades $\langle 1; 1\rangle$ und zum Bigrad $\langle p; p\rangle$ noch

$$A^{(p)} = A^{(1)} \wedge\!\boldsymbol{\wedge}\, B^{(p-1)}, \qquad B^{(p)} = [B^{(1)}]^p.$$

[1]) s. Vor. zu Formeln (2).

Hierin bedeuten d bzw. $\boldsymbol{d}$ die Differentiale, $\wedge$ bzw. $\boldsymbol{\wedge}$ die *Keilprodukte* für Doppelformen bezüglich x bzw. y. $[\ldots]^p$ bezeichnet das p-fache Keilprodukt $\wedge\boldsymbol{\wedge}$ des Klammerinhaltes. ∇_i wird auf die Formenkoeffizienten bezüglich x angewandt. *Allgemein sollen Operationszeichen, die sich auf Doppelformen $X^{(p)}(x, dx; y, dy)$ als Formen in y, dy beziehen, im Unterschied zu ihren Entsprechungen bezüglich x, dx fettgedruckt notiert werden.*

Für $1 \leqq p \leqq n-1$ sind $A^{(p)}$ und $B^{(p)}$ über dem Ring der skalaren Funktionen auf V^n linear unabhängig. Die Linearkombination

$$a(\Omega)\, A^{(p)} + b(\Omega)\, B^{(p)} \quad \text{mit} \quad a, b \in C^\infty(\Omega \neq 0)$$

heißt geodätische p-Form; $A^{(0)} = B^{(0)} = 1$, $0 \leqq p \leqq n$. *Beispiele geodätischer Formen* sind die *Paramatrix* von Hodge und Kneser (s. [5] oder [4]) oder in Räumen konstanter Krümmung die Transportform (s. [2] Satz 11). In solchen Räumen sind die geodätischen Formen gerade die *Pseudoorthogonalinvarianten* unter den Doppelformen (s. [2] oder [1]).

Bemerkung. In den bisherigen Arbeiten zu geodätischen Formen (z. B. [1], [2], [7]) wurde anstelle von $A^{(p)}$, $B^{(p)}$ mit $\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$ gearbeitet, anstelle von $\Gamma^{(1)}$ mit $\gamma^{(1)}$ bzw. $\pi^{(1)}$ ([2] bzw. [1]). Es gilt

$$A^{(p)} = e^{p-1} s^{p+1} \alpha^{(p)}, \quad B^{(p)} = e^p s^{p-1}(p\alpha^{(p)} + s\beta^{(p)}), \quad \Gamma^{(1)} = s\pi^{(1)}.$$

1.2 Inneres Produkt.

Es sei $\Pi^{(1)} \lrcorner X^{(p)}$ das *innere Produkt* aus der Pfaffschen Form $\Pi^{(1)}$ und der p-Form $X^{(p)}$ (s. [6], S. 130). Beschreiben wir $\lrcorner$ mit Hilfe des Kählerschen *e-Operators* (s. [8], [1]) durch

$$\Pi^{(1)} \lrcorner = \pi^i e_i, \qquad (\Pi^{(1)} = \pi_i\, dx^i)$$

so sehen wir, daß $\lrcorner$ der gleichen Produktregel folgt wie e_i (s. [3], § 3, (iii)):

$$\Pi^{(1)} \lrcorner (X^{(q)} \wedge Y^{(r)}) = (\Pi^{(1)} \lrcorner X^{(q)}) \wedge Y^{(r)} + (-1)^q X^{(q)} \wedge (\Pi^{(1)} \lrcorner Y^{(r)}). \tag{1}$$

Für Doppeldifferentialformen haben wir neben der inneren Produktbildung $\lrcorner$ bezüglich x ein dazu analoges, mit $\boldsymbol{\lrcorner}$ bezeichnetes inneres Produkt bezüglich y. Mit einer Pfaffschen Doppelform $\Pi^{(1)}$ gilt dann $\Pi^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner} = \pi^{ij} e_i \boldsymbol{e}_j$.

Es sei

$$\Phi^{(p)} = aA^{(p)} + bB^{(p)} + c\Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} A^{(p-1)} + d\Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} B^{(p-1)}$$

mit i. a. von x, y, speziell von Ω abhängigen Koeffizienten a, b, c, d. Ferner setzen wir

$$H = \Delta_2 \Omega \qquad (\Delta_2 = \nabla^\nu \nabla_\nu, \text{ d'Alembert-Operator}).$$

Hilfssatz 1. *Für $2 \leqq p \leqq n$ gilt*

$$\begin{aligned} A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, \Phi^{(p)} &= (2\Omega a + pb) \big((1-p)\, A^{(p-1)} + 2\Omega B^{(p-1)}\big) \\ &\quad + \big(2\Omega c + (p-1)\, d\big) \big((2-p)\, A^{(p-2)} + 2\Omega B^{(p-2)}\big) \wedge\boldsymbol{\wedge}\, \Gamma^{(1)}, \\ B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, \Phi^{(p)} &= \big((p-1)\,(n-p)\, a + (n-H)\, c\big)\, A^{(p-1)} \\ &\quad + \big(2\Omega a + p(n-p+1)\, b + (n-H)\, d\big)\, B^{(p-1)} \\ &\quad + (p-2)\,(n-p-1)\, c\Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} A^{(p-2)} \\ &\quad + \big(2\Omega c + (p-1)\,(n-p)\, d\big)\, \Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} B^{(p-2)} \end{aligned}$$

und für $p = 1$

$$A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, \Phi^{(1)} = 2\Omega(2\Omega a + b),$$

$$B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, \Phi^{(1)} = 2\Omega a + nb + (n - H)\,(c + d).$$

D. h., gegenüber der inneren Multiplikation mit $A^{(1)}$ *und* $B^{(1)}$ *bleiben geodätische Formen geodätisch, die Formen vom allgemeinen Typ* $\Phi^{(p)}$ *gegenüber dieser Multiplikation jedoch nur vom allgemeinen Typ* $\Phi^{(p-1)}$.

Beweis. Unter Verwendung von Normalkoordinaten x^i bezüglich des Ursprungs y: $(0, \ldots, 0)$ versichern wir uns für alle x aus einer Normalumgebung $N(y)$ von y — bei beliebig aber fest gewähltem $y \in V^n$ — der Formeln

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x^i} = s q_i, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y^j} = -s q_j, \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^i\,\partial y^j} = -g_{ij}(y),\ q^i q_i = e,$$

wobei q^i die Koordinaten des *Tangenteneinheitsvektors* q an die Geodätische $\overline{xy}$ sind (s. [2], (1)—(4) oder [9], 1.2 u. 1.3).

a) $A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, A^{(p)}$, $A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, B^{(p)}$: Aus den Formeln (2) folgen für $p = 1$ die Beziehungen

$$d\Omega \lrcorner B^{(p)} = p\, \boldsymbol{d\Omega} \boldsymbol{\wedge} B^{(p-1)}, \qquad \boldsymbol{d\Omega} \boldsymbol{\lrcorner} B^{(p)} = p\, d\Omega \wedge B^{(p-1)}.$$

Deren Gültigkeit für beliebiges p beweisen wir mittels (1) durch Induktion nach p. Wir finden damit bereits — wiederum mittels (1) —

$$2\Omega A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, B^{(p)} = pA^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, A^{(p)} = -2\Omega p\big((p - 1)\, A^{(p-1)} - 2\Omega B^{(p-1)}\big).$$

b) $B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, A^{(p)}$, $B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, B^{(p)}$: Zunächst ermitteln wir nach (2)

$$B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, B^{(1)} = n \quad \text{und} \quad g^{ij}(y)\, e_i[B^{(1)}]\, \boldsymbol{e}_j[B^{(1)}] = -B^{(1)}.$$

Durch Induktion nach p bestätigen wir die Formel

$$B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, B^{(p)} = p(n - p + 1)\, B^{(p-1)}$$

und mit dieser dann

$$B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, A^{(p)} = (p - 1)\,(n - p)\, A^{(p-1)} + 2\Omega B^{(p-1)}.$$

c) $pA^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, (\Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} A^{(p)}) = 2\Omega A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, (\Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} B^{(p)}) = p\Gamma^{(1)} \wedge\boldsymbol{\wedge} (A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, A^{(p)})$ (letzter Ausdruck s. unter a)) finden wir mittels (1) sofort, wenn aufgrund einer Normalkoordinateneigenschaft $d\Omega \lrcorner \Gamma^{(1)} = \boldsymbol{d\Omega} \boldsymbol{\lrcorner}\, \Gamma^{(1)} = 0$ und

$$A^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, \Gamma^{(1)} = 0$$

beachtet wird.

d) Für H finden wir

$$\text{(3)} \qquad H = \nabla^\nu \nabla_\nu \Omega = n + \Gamma^\mu_{\mu\nu} x^\nu.$$

Daher gilt

$$B^{(1)} \lrcorner \boldsymbol{\lrcorner}\, \Gamma^{(1)} = n - H,$$

und unter Verwendung obiger Resultate erhalten wir nach kleiner Rechnung

$$\begin{aligned} &B^{(1)} \lrcorner\!\lrcorner\, (\Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge A^{(p)}) \\ &= (n-H)\, A^{(p)} + \big((p-1)(n-p-2)\, A^{(p-1)} + 2\Omega B^{(p-1)}\big) \wedge\!\!\wedge \Gamma^{(1)}, \\ &B^{(1)} \lrcorner\!\lrcorner\, (\Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge B^{(p)}) = (n-H)\, B^{(p)} + p(n-p-1)\, B^{(p-1)} \wedge\!\!\wedge \Gamma^{(1)}. \end{aligned}$$

q. e. d.

1.3. Weitere Hilfssätze und Hilfsformeln.

Es sei $\Delta = d\delta + \delta d$ der *verallgemeinerte* LAPLACE-*Operator* (für Formen)[2]). Ihn schreiben wir bezüglich lokaler Koordinaten x^ν mit Hilfe des e-Operators in der Form auf:

$$\Delta = -\nabla^\nu \nabla_\nu - R^a_\mu\, dx^\mu \wedge e_a + R^{a\cdot b\cdot}_{\cdot\mu\cdot\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge e_a \circ e_b$$

(s. [3], (31)). Aus den Produktregeln für ∇_ν und e_a (letztere siehe [3], § 3 (iii)) gewinnen wir für Δ die Produktregel

$$\begin{aligned} (4) \qquad \Delta[X^{(p)} \wedge Y^{(q)}] &= \Delta X^{(p)} \wedge Y^{(q)} + X^{(p)} \wedge \Delta Y^{(q)} \\ &\quad - 2\nabla^\nu X^{(p)} \wedge \nabla_\nu Y^{(q)} + 2L(X^{(p)}, Y^{(q)}) \end{aligned}$$

mit

$$L(X^{(p)}, Y^{(q)}) = (-1)^p R^{a\cdot b\cdot}_{\cdot\mu\cdot\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge e_{[a}[X^{(p)}] \wedge e_{b]}\,[Y^{(q)}]$$

(s. [3], (33)).

Für Skalare a ist $e_i[a] = 0$ und deshalb dann $\Delta = -\Delta_2$ der negative D'ALEMBERT-*Operator*.

Hilfssatz 2. *Für* $1 \leqq p \leqq n-1$ *gilt in* V^n

$$A^{(1)} \wedge\!\!\wedge \Delta A^{(p)} = -2A^{(p+1)} + 2A^{(p)} \wedge\!\!\wedge \Gamma^{(1)}.$$

Beweis. a) Nach (4) erhalten wir für $X^{(1)} \wedge\!\!\wedge Y^{(p-1)} = A^{(1)} \wedge\!\!\wedge B^{(p-1)} = A^{(p)}$ jetzt

$$(5) \qquad A^{(1)} \wedge\!\!\wedge \Delta A^{(p)} = A^{(p)} \wedge\!\!\wedge \Delta A^{(1)},$$

wenn $d\Omega \wedge d\Omega = \boldsymbol{d}\Omega \wedge \boldsymbol{d}\Omega = 0$ berücksichtigt wird. Beachten wir zusätzlich noch $e_a[\boldsymbol{d}\Omega] = 0$, so errechnen wir — wieder mittels (4)

$$(6) \qquad A^{(1)} \wedge\!\!\wedge \Delta A^{(1)} = A^{(1)} \wedge\!\!\wedge \Delta[d\Omega\, \boldsymbol{d}\Omega] = -2A^{(1)} \wedge\!\!\wedge g^{ij}(x)\, (\nabla_i\, d\Omega)\, (\nabla_j\, \boldsymbol{d}\Omega).$$

b) Den letzten Ausdruck formen wir durch die Gleichung

$$(7) \qquad B^{(1)} = \Gamma^{(1)} + g^{ij}(x)\, (\nabla_i\, \boldsymbol{d}\Omega)\, (\nabla_j\, d\Omega)$$

um. Deren Beweis geht von der bekannten Gleichung $\Delta_1\Omega := g^{ij}(x)\, (\nabla_i\Omega)\, (\nabla_j\Omega) = 2\Omega$ aus. Auf sie wenden wir das Differential $d = dx^l\, \nabla_l$ an und anschließend noch $\boldsymbol{d}$ (Differential bezüglich y). Wir erhalten

$$g^{ij}(x)\, (\nabla_i\, \boldsymbol{d}\Omega)\, (\nabla_j\, d\Omega) + g^{ij}(x)\, (\nabla_i\Omega)\, (\nabla_j\, \boldsymbol{d}\, d\Omega) = \boldsymbol{d}\, d\Omega.$$

Der Definition von $B^{(1)}$ und $\Gamma^{(1)}$ gemäß ist dies gerade (7).

---

2) LAPLACE-BELTRAMI-Operator oder DE-RHAM-WEYL-Operator.

d) Wir setzen nun (7) in (6) ein, (6) wieder in die rechte Seite von (5) und erhalten die behauptete Gleichung des Hilfssatzes 2.

Hinsichtlich der linearen Abhängigkeit zwischen $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $\Gamma^{(1)}$ gilt nach [2], S. 27–29 der

Hilfssatz 3. *Die (pseudo-)* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit* $V^n \in C^\infty$, $n \geqq 3$, *ist ein Raum von konstanter Krümmung, wenn* $\Gamma^{(1)}$ *für jedes* $y \in V^n$ *und beliebiges* x *einer Normalumgebung* $N(y)$ *von* y *eine pseudogeodätische Form, d. h. von der Form* $a(x, y)\, A^{(p)} + b(x, y)\, B^{(p)}$ *ist.*

Bezüglich der Nullteilerfreiheit bei bestimmten Formenpaaren erlauben die geodätischen Formen folgende Aussage (s. [2], Hilfssatz 3):

Hilfssatz 4. $\Pi^{(1)}(x, dx; y, dy)$ *sei eine* PFAFF*sche Doppelform. Gilt für eine beliebige geodätische* $(p-1)$*-Form* $\Phi^{(p-1)}$ *mit* $1 \leqq p \leqq n-1$ *dann* $\Pi^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, \Phi^{(p-1)} = 0$, *so ist* $\Pi^{(1)} = 0$.

2. Sätze über harmonische Räume und Räume konstanter Krümmung

RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und Räume, die in den nachfolgenden Sätzen und Folgerungen vorkommen, sind durchweg von der Klasse C^∞.

Satz 1. *Jede* n*-dimensionale (pseudo-)* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit, in der es für ein* $p \in (1, 2, \ldots, n-1)$ *zwei linear unabhängige harmonische geodätische* p*-Formen*

$$\Phi_l^{(p)} = a_l(\Omega)\, A^{(p)} + b_l(\Omega)\, B^{(p)} \qquad (l = 1, 2)$$

gibt, ist ein harmonischer Raum.

Für $p = n - 1$ *ist dabei zusätzlich zu fordern:* $2D \neq (n-1)\, B$.

Hierin bedeuten

$$D(\Omega) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad B(\Omega) = \det \begin{pmatrix} b_1' & b_1 \\ b_2' & b_2 \end{pmatrix}.$$

Linear unabhängig heißen die Formen $\Phi_l^{(p)}$, *wenn für sie* $D(\Omega) \neq 0$ *gilt* (s. Anhang), *harmonisch (bezüglich* x*), wenn* $\Delta \Phi_l^{(p)} = 0$ *ist.*

Folgerung 1. *Jede zwei- und jede dreidimensionale (pseudo-)*RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit, in der es zwei linear unabhängige harmonische geodätische* p*-Formen gibt* $(1 \leqq p \leqq n-1)$, *ist ein Raum konstanter Krümmung.*

Für $p = n - 1$ *ist dabei zusätzlich zu fordern:* $2D \neq (n-1)\, B$.

Diese Folgerung aus Satz 1 liegt auf der Hand, weil bekanntlich alle zwei- und dreidimensionalen harmonischen Räume Räume konstanter Krümmung sind ([9]). Eine weitere Folgerung ergibt sich in Verbindung mit der Tatsache, daß alle harmonischen Räume mit normalhyperbolischer Metrik von konstanter Krümmung sind ([9]).

Folgerung 2. *Jede* n*-dimensionale (pseudo-)* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit, die mit einer normalhyperbolischen Metrik ausgestattet ist und zwei linear unabhängige harmonische geodätische* p*-Formen* $(1 \leqq p \leqq n-1)$ *besitzt, ist von konstanter Krümmung.*

Für $p = n - 1$ *ist dabei zusätzlich zu fordern:* $2D \neq (n-1)\, B$.

Satz 2. *Jede n-dimensionale (pseudo-)* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit, in der es für ein* $p \in \{1, \ldots, n-2\}$ *zwei linear unabhängige harmonische geodätische p-Formen gibt, ist ein Raum von konstanter Krümmung, wenn* $D \neq pB$ *gilt. Für* $p = n - 1$ *mit* $n = 2$ *und* $n = 3$ *gilt Folgerung 1.*

Beweis der Sätze 1 und 2.

a) *Gemeinsame Voraussetzung dieser Sätze:* Die (pseudo-) RIEMANNsche Mannigfaltigkeit V^n ist von der Klasse C^∞; es gibt in V^n zwei geodätische Formen $\Phi_l^{(p)} = a_l(\Omega)\, A^{(p)} + b_l(\Omega)\, B^{(p)}$ mit

$$\Delta \Phi_l^{(p)} = 0 \quad (l = 1, 2) \quad \text{und} \quad D(\Omega) \neq 0. \tag{8}$$

b) *Berechnung von* $\Delta[aA^{(p)}]$ *und* $\Delta[bB^{(p)}]$: Beachten wir $\Delta_2 a(\Omega) = 2\Omega a''(\Omega) + Ha'(\Omega)$ und ferner $\nabla_j A^{(p)} = \nabla_j A^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, B^{(p-1)} + (p-1)\, \nabla_j B^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, A^{(p-1)}$, so erhalten wir für $X^{(p)} = A^{(p)}$ und $\Psi^{(0)} = f(\Omega)$ nach (4)

$$\begin{aligned}\Delta[a(\Omega)\, A^{(p)}] = {} & (-2\Omega a'' - Ha')\, A^{(p)} + a\, \Delta A^{(p)} \\ & - 2a' g^{ij}(x)\, \Omega,_i \nabla_j A^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, B^{(p-1)} \\ & - 2(p-1)\, a' g^{ij}(x)\, \Omega,_i \nabla_j B^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, A^{(p-1)}.\end{aligned}$$

$A^{(1)}$ genügt der Beziehung $g^{ij}(x)\, \Omega,_i \nabla_j A^{(1)} = 2A^{(1)}$. Diese und die Definition von $\Gamma^{(1)}$ führen auf

$$\begin{aligned}\Delta[a(\Omega)\, A^{(p)}] = {} & -\big(2\Omega a'' + (H+4)\, a'\big)\, A^{(p)} \\ & -2(p-1)\, a' \Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, A^{(p-1)} + a\, \Delta A^{(p)}.\end{aligned} \tag{9}$$

Analog erhalten wir

$$\Delta[b(\Omega)\, B^{(p)}] = -\,(2\Omega b'' + Hb')\, B^{(p)} - 2pb' \Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, B^{(p-1)} + b\, \Delta B^{(p)}. \tag{10}$$

c) *Auflösung des Gleichungssystems* (8) *nach* $\Delta A^{(p)}$:

Mit den Formeln (9) und (10) überführen wir (8) in das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem in $\Delta A^{(p)}$ und $\Delta B^{(p)}$:

$$\begin{aligned}a_l\, \Delta A^{(p)} + b_l\, \Delta B^{(p)} = {} & \big(2\Omega a_l'' + (H+4)\, a_l'\big)\, A^{(p)} + (2\Omega b_l'' + Hb_l')\, B^{(p)} \\ & + 2(p-1)\, a_l' \Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, A^{(p-1)} + 2pb_l' \Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, B^{(p-1)}.\end{aligned}$$

Dessen Auflösung nach $\Delta A^{(p)}$ liefert

$$\begin{aligned}D(\Omega)\, \Delta A^{(p)} = {} & EA^{(p)} + (F + BH)\, B^{(p)} \\ & + (p-1)\, G\Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, A^{(p-1)} + 2pB\Gamma^{(1)} \wedge\!\!\wedge\, B^{(p-1)};\end{aligned} \tag{11}$$

E, F, G sind Funktionen, von denen uns nur interessiert, daß sie von der Klasse C^∞ sind und daß dabei F allein von Ω abhängt. $D(\Omega) \neq 0$ und $B(\Omega)$ sind die in Satz 1 angegebenen Determinanten.

Eine analoge Auflösungsformel erhalten wir für $\Delta B^{(p)}$, beachten sie aber nicht weiter, da sich ihre weitere Auswertung als kompliziert erweist.

d) Elimination von $\Delta A^{(p)}$ *aus* (11):

Multiplizieren wir (11) mit $A^{(1)}$ durch und beachten den Hilfssatz 2, so finden wir

$$(12)\qquad [(K + BH)\, B^{(1)} - 2(D - pB)\, \Gamma^{(1)}] \wedge\!\!\blacktriangle\, A^{(p)} = 0$$

mit

$$K = K(\Omega) := F + 2D;\ 1 \leqq p \leqq n - 1\,.$$

e) Auflösung von (12) *nach* $\Gamma^{(1)}$:

Das Ziel dieser Auflösung ist es, mittels Hilfssatz 3 Schlüsse aus der Gestalt von $\Gamma^{(1)}$ ziehen zu können. Gleichung (12) wird im Sinne des inneren Produktes mit $A^{(1)}$ durchmultipliziert. Nach Hilfssatz 1 (im Falle von $a = K + BH$, $c = -2(D - pB)$, $b = d = 0$ und $1 \leqq p \leqq n - 1$) erhalten wir

$$(13)\qquad \begin{aligned} &2(D - pB)\, \Gamma^{(1)} \wedge\!\!\blacktriangle \big((1 - p)\, A^{(p-1)} + 2\Omega B^{(p-1)}\big) \\ &= (K + BH)\,(-pA^{(p)} + 2\Omega B^{(p)})\,. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren — jetzt im Sinne des äußeren Produktes — nun (13) mit $B^{(1)}$ durch und ersetzen in der erhaltenen Gleichung $2(D - pB)\, \Gamma^{(1)} \wedge\!\!\blacktriangle\, A^{(p)}$ gemäß (12) durch $(K + BH)\, A^{(p+1)}$:

$$(14)\qquad [(K + BH)\,(A^{(1)} - 2\Omega B^{(1)}) + 2\Omega \cdot 2(D - pB)\, \Gamma^{(1)}] \wedge\!\!\blacktriangle\, B^{(p)} = 0\,.$$

Aus (12) und (14) folgt nun, daß der Faktor $[\cdots]$ vor $B^{(p)}$ in (14) verschwinden muß, wenn $1 \leqq p \leqq n - 2$ ist:

Wir können nämlich (12) mit 2Ω skalar durchmultiplizieren und auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichung die Nullform $-(K + BH)\, A^{(1)} \wedge\!\!\blacktriangle\, A^{(p)}$ hinzufügen. Wir erhalten $[\cdots] \wedge\!\!\blacktriangle\, A^{(p)} = 0$. Diese Gleichung mit einer beliebigen Funktion $f(\Omega)$ durchmultipliziert und zu der mit beliebigem $g(\Omega)$ durchmultiplizierten Gleichung (14) addiert, führt auf $\Pi^{(1)} \wedge\!\!\blacktriangle \big(f(\Omega)\, A^{(p)} + g(\Omega)\, B^{(p)}\big) = 0$ mit $\Pi^{(1)} = [\cdots]$. Nach Hilfssatz 4 folgt hieraus $\Pi^{(1)} = 0$, also

$$(15)\qquad 2\Omega \cdot 2(D - pB)\, \Gamma^{(1)} = -(K + BH)\,(A^{(1)} - 2\Omega B^{(1)})\,.$$

f) Auswertung der Gleichungen (*13*) *und* (*15*):

(i) Ist $D = pB$, $1 \leqq p \leqq n - 1$, so folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $A^{(p)}$ und $B^{(p)}$ aus (13) $K + BH = 0$. Wegen $D \neq 0$ ist hier $B \neq 0$ und deshalb $H = \Delta_2\Omega$ eine C^∞-Funktion von Ω allein, und zwar für jedes beliebig aber festgewählte $y \in V^n$ und alle $x \in N(y)$. Also ist V^n harmonisch und für $n = 2, 3$ sogar von konstanter Krümmung.

(ii) Ist $D \neq pB$, $1 \leqq p \leqq n - 2$, so zeigt (15) für $\Omega \neq 0$, daß $\Gamma^{(1)}$ für jedes feste $y \in V^n$ und alle $x \in N(y)$ eine pseudogeodätische Form ist. Da hier $n \geqq 3$ ist, folgt aus Hilfssatz 3, daß V^n von konstanter Krümmung und damit auch harmonisch ist.

Für $1 \leqq p \leqq n - 2$ sind die Sätze 1 und 2 damit bewiesen.

g) Der Fall $1 \leqq p = n - 1$:

Wir multiplizieren im Sinne des inneren Produktes die Gleichung (13) mit $B^{(1)}$ durch. Wir erhalten nach Hilfssatz 1 im Falle $a = p(K + BH)$, $b = -2\Omega(K + BH)$,

$c = (1 - p) \cdot 2(D - pB)$, $d = 2\Omega \cdot 2(D - pB)$:

$$\left[\left(2D - (n-1)B\right)H - 2n\left(D - (n-1)B\right) + (n+1)K\right] \times \left((n-2)A^{(n-2)} - 2\Omega B^{(n-2)}\right) = 0.$$

Der Faktor in der eckigen Klammer muß wegen der linearen Unabhängigkeit von $A^{(p)}$ und $B^{(p)}$ verschwinden. Wenn dann $2D \neq (n-1)B$ ist, befinden wir uns wieder in der Situation f), (i) d. h. $H = f(\Omega)$. V^n ist dann also harmonisch und für $n = 2, 3$ sogar von konstanter Krümmung. q. e. d.

Satz 3. *Ein harmonischer (pseudo-)* RIEMANN*scher Raum H^n besitzt stets zwei lineare unabhängige*[3]) *harmonische geodätische* PFAFF*sche Formen*[4]) *mit $D = B$, z. B. die Formen*

$$\Pi_1 = \mathrm{d}\,\boldsymbol{d}f = f''A^{(1)} + f'B^{(1)}, \qquad \Pi_2 = d\,\boldsymbol{d}g = g''A^{(1)} + g'B^{(1)}, \tag{16}$$

in denen $f = f(\Omega)$ eine nichtkonstante Lösung von $\Delta f = 0$ und $g = g(\Omega)$ eine solche von $\Delta g = 1$ ist.

Ferner besitzt H^n dann auch zwei linear unabhängige harmonische $(n-1)$-Formen, z. B.

$$\Pi_1^* = * \Pi_1, \qquad \Pi_2^* = * \Pi_2.$$

Bemerkungen. 1) Für Skalare ist $\Delta = -\Delta_2$. 2) $*$ bedeutet die *Dualisierung* bezüglich y; Π_1^* und Π_2^* sind i. a. keine geodätischen Formen. In WALKERs nichttrivial harmonischem Raum W^4 z. B. sind die Π_i^* von der Gestalt $\Phi^{(n-1)}$ (W^4 s. Abschnitt 3, $\Phi^{(p)}$ s. Hilfssatz 1). 3) Wäre in Satz 3 die Determinante $D \neq B$, so würde der Fall $p = 1$ in Satz 2 bedeuten, daß jeder harmonische Raum H^n $(n \geqq 4)$ von konstanter Krümmung ist, was bekanntlich nicht der Fall ist (siehe [10]).

Beweis. In H^n besitzt $\Delta f = 0$ definitionsgemäß eine nichtkonstante, nur von Ω abhängige Lösung. Also trifft dies auch für $\Delta g = 1$ zu, denn mit $\Delta g = 1$ gilt auch $\Delta(g + cf) = 1$ (c: const.).

a) Es seien f und g solche Lösungen. Wir zeigen, daß $d\,\boldsymbol{d}f$ und $d\,\boldsymbol{d}g$ harmonische Formen sind: Wir betrachten $\Delta = d\delta + \delta d$. Das Kodifferential $\delta = -*d*$ auf eine skalare Funktion angewandt, liefert stets Null. Deshalb gilt $\delta d\,\boldsymbol{d}f = \boldsymbol{d}(\delta\,\boldsymbol{d}f) = \boldsymbol{d}(\delta\,\boldsymbol{d}f + d\,\delta f) = \boldsymbol{d}\,\Delta f = 0$. Benutzen wir diese Beziehung und dazu das POINCARÉsche Lemma, so erhalten wir $\Delta(d\,\boldsymbol{d}f) = d\delta(d\,\boldsymbol{d}f) + \delta d(d\,\boldsymbol{d}f) = d(\delta d\,\boldsymbol{d}f) + \delta[dd(\boldsymbol{d}f)] = 0$. Ganz analog verläuft der Nachweis von $\Delta(d\,\boldsymbol{d}g) = 0$.

b) Daß für die beiden Formen $\Pi_l = a_l A^{(1)} + b_l B^{(1)}$ $(l = 1, 2)$ mit $a_1 = f''$, $b_1 = f'$ und $a_2 = g''$, $b_2 = g'$ die Determinantenbedingung $D = B$ gilt, ist unmittelbar zu sehen: Nach Satz 1 sind D bzw. B durch $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$ bzw. $B = b_1' b_2 - b_2' b_1$ erklärt. Für Π_1, Π_2 gilt aber $b_1' = a_1$ und $b_2' = a_2$, also $D = B$.

c) Wir zeigen noch $D \neq 0$: Nach b) gilt $D = f''g' - g''f'$, wobei $f(\Omega)$ bzw. $g(\Omega)$ Lösungen von $\Delta f = 0$ bzw. $\Delta g = 1$ sind. Wegen $\Delta f(\Omega) = -2\Omega f'' - Hf'$ folgt aus diesen Gleichungen $2\Omega f'' = -Hf'$ bzw. $2\Omega g'' = -1 - Hg'$, wobei $f' = Ce^J$ (C: constant) ist. Daher gilt $D = 1/2\Omega \cdot f' \neq 0$ $(\Omega \neq 0)$. q. e. d.

d) Π_1^* und Π_2^* sind wegen $*\Delta = \Delta *$ Formen der behaupteten Art. q. e. d.

---

[3]) d. h. $D \neq 0$ für $\Omega \neq 0$.

[4]) nach einer Bemerkung von P. GÜNTHER.

Definition. *Ein harmonischer Raum von konstanter Krümmung heiße trivial harmonisch.*

Folgerung 3. *Dafür, daß eine (pseudo-)* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit V^n, $n \geqq 4$ ein nichttrivialer harmonischer Raum ist, ist die Existenz von genau zwei linear unabhängigen harmonischen geodätischen* PFAFF*schen Formen mit $D = B$ notwendig und hinreichend.*

Bemerkung. Für $n = 2, 3$ ist H^n bekanntlich trivial harmonisch, so daß uns nur $n \geqq 4$ interessiert.

Beweis. a) V^n sei nichttrivial harmonisch. Dann gibt es nach Satz 3 wenigstens zwei Formen obengenannter Art. Angenommen, in V^n gäbe es drei solche Formen $\Pi_l = a_l A^{(1)} + b_l B^{(1)}$ $(l = 1, 2, 3)$, wobei die *lineare Unabhängigkeit* dann bedeutet, daß für $\Omega \neq 0$

$$W_1(\Omega) = \det(a_l, a_l', b_l) \neq 0 \quad \text{oder} \quad W_2(\Omega) = \det(a_l, b_l, b_l') \neq 0$$

gilt (s. Anhang). Nach einem, in der Einleitung dieser Arbeit wiedergegebenen Resultat (Satz 7 aus [1]), muß V^n dann von konstanter Krümmung sein — im Widerspruch zur Voraussetzung in a).

b) V^n besitze genau zwei solche Formen. Dann ist V^n nach Satz 1 harmonisch. V^n ist aber nicht von konstanter Krümmung. Andernfalls besäße V^n nach einem in der Einleitung wiedergegebenen Resultat (Satz 6 aus [1] oder Satz 4 aus [7]) vier über dem Körper der reellen Zahlen linear unabhängige harmonische geodätische Formen. Von diesen vier Formen wählen wir im Sinne ihrer Numerierung in [7] die ersten drei aus — lassen also die dortige Grundlösung weg. Für diese drei gilt $W_1(\Omega) \neq 0$ $(\Omega \neq 0)$ — im Widerspruch zur Voraussetzung in b). q. e. d.

Setzen wir in Folgerung 3 gleich die Harmonizität von V^n voraus, so finden wir noch

Folgerung 4. *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein harmonischer Raum H^n nichttrivial harmonisch ist, ist die Existenz von höchstens zwei linear unabhängigen harmonischen geodätischen* PFAFF*schen Formen in H^n.*

Beweis. a) In H^n gibt es nach Satz 3 stets zwei solche Formen, bei nichtkonstanter Krümmung nach Satz 7 aus [1] jedoch keine drei. b) Gibt es in H^n höchstens zwei solche Formen, so ist H^n nach Satz 7, [1] nicht von konstanter Krümmung, da andernfalls wenigstens drei solche Formen existieren müßten.

3. Beispiel

Die Vermutung, daß alle harmonischen Räume trivial seien, wurde u. a. von WALKER durch ein Gegenbeispiel widerlegt ([10]). In dem von ihm angegebenen vierdimensionalen nichttrivial harmonischen Raum W^4 lauten $A^{(1)}, B^{(1)}, \Gamma^{(1)}$ bezüglich RIEMANNscher Normalkoordinaten x^j bezüglich des Ursprunges y: $(0, 0, 0, 0)$

$$A^{(1)} = -x_i x_j \, dx^i \, dy^j, \qquad B^{(1)} = -g_{ij}(y) \, dx^i \, dy^j, \qquad \Gamma^{(1)} = g_{\alpha\beta}(x) \, dx^\alpha \, dy^\beta,$$

$$\text{wobei} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta}) & E_2 \\ E_2 & O_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (g_{\alpha\beta}) = k \begin{pmatrix} (x^2)^2 & -x^1x^2 \\ -x^1x^2 & (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

(k: const, E_2 bzw. O_2: Einheits- bzw. Nullmatrix der Ordnung 2, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $\alpha = 1, 2$) den *Fundamentaltensor* des W^4 definiert. $A^{(1)}, B^{(1)}, \Gamma^{(1)}$ *sind über dem Ring der skalaren Funktionen $f(\Omega)$ von W^4 linear unabhängig.*

Ohne die dafür notwendigen Rechnungen vorzuführen, nehmen wir nun folgende Resultate zur Kenntnis:

In WALKERS *nichttrivial harmonischem Raum* W^4

a) *bilden die beiden Formen*

$$\Pi_1 = \Omega^{-3}(-2A^{(1)} + \Omega B^{(1)}), \qquad \Pi_2 = -2\Omega^{-3}A^{(1)} + (1 + \Omega^{-2})\, B^{(1)}$$

mit $D = B$ *ein Fundamentalsystem von harmonischen geodätischen* PFAFF*schen Formen,*

b) *gibt es keine von der Nullform verschiedene geodätische 2-Form,*

c) *sind unter den 3-stufigen geodätischen Formen die Formen* $b \cdot B^{(3)}$ (b: *bel. konst.*) *und nur diese harmonisch.*

Hieraus ergibt sich nach Satz 1 und 3 die

Folgerung 5. *Neben den vierdimensionalen harmonischen Räumen mit zwei linear unabhängigen harmonischen geodätischen 2- oder 3-Formen (letzteres (bei* $2D \neq 3B$*) gibt es noch andere harmonische Räume (z. B.* W^4*).*

Neben den n-dimensionalen harmonischen Räumen mit zwei linear unabhängigen harmonischen geodätischen PFAFF*schen Formen gibt es keine weiteren harmonischen Räume.*

Bemerkung. Um welche PFAFFschen Formen es sich dabei handelt, ist in (16) angegeben. Anstelle von W^4 kann auch W^n betrachtet werden.

Anhang

$\Phi_l^{(p)} = a_l(\Omega)\, A^{(p)} + b_l(\Omega)\, B^{(p)}$; $l = 1, 2, 3,\ 1 \leqq p \leqq n - 1$ seien geodätische Formen; $D(\Omega) = \det(a_l, b_l)$, $l = 1, 2$; $W_1(\Omega) = \det(a_l, b_l, a_l')$, $l = 1, 2, 3$; $W_2(\Omega) = \det(a_l, b_l, b_l')$, $l = 1, 2, 3$. Nach bekannten Schlüssen finden wir:

1. $\Phi_1^{(p)}$, $\Phi_2^{(p)}$ *sind über dem Ring der skalaren Funktionen linear (un-)abhängig* $\leftrightarrow (0 \neq)\ D(\Omega) = 0$.

2. $\Phi_1^{(p)}$, $\Phi_2^{(p)}$, $\Phi_3^{(p)}$ *sind über dem Körper der reellen Zahlen linear (un-)abhängig* $\leftrightarrow (0 \neq)\ W_1(\Omega) = 0$ *oder* $(0 \neq)\ W_2(\Omega) = 0$.

3. *Sind* $\Phi_1^{(p)}$, $\Phi_2^{(p)}$, $\Phi_3^{(p)}$ *über dem Ring der skalaren Funktionen linear unabhängig* $\rightarrow W_1(\Omega) \neq 0$ *und* $W_2(\Omega) \neq 0$.

4. *Ist* $W_1(\Omega) = 0$ (*oder* $W_2(\Omega) = 0$) $\rightarrow \Phi_1^{(p)}$, $\Phi_2^{(p)}$, $\Phi_3^{(p)}$ *sind über dem Ring der skalaren Funktionen linear abhängig.*

Literatur

[1] M. BELGER, Geodätische Formen auf pseudoriemannschen Räumen, Serdica, Bulgaricae math. publ. 4 (1978)

[2] —, Geodätische und harmonische geodätische Formen in (pseudo-) RIEMANNschen Räumen konstanter Krümmung mit Anwendungen zum Huygensschen Prinzip, Diss., K.-M.-Univ., Leipzig 1969

[3] —, Transportformen und Grundlösung der LAPLACE-Gleichung in FUBINI-Räumen I, Beiträge zur Analysis 11 (1978)

[4] —, Zur GREENschen Form auf der Kugel, Weiterbildungszentrum für math. Kyb. u. Rechentechnik d. TU Dresden, Vorträge zur Geometrie 28 (1978)

[5] G. de Rahm, Sur la théorie des formes differentielles harmoniques, Ann. Univ. Grenoble, Tom 22 (1946)
[6] —, Variétés différentiables, Hermann, Paris 1955
[7] P. Günther, Harmonische geodätische p-Formen in Nichteuklidischen Räumen, Mathem. Nachr. 28 (1965)
[8] E. Kähler, Innerer und äußerer Differentialkalkül, Abh. Dt. Akad. Wiss. zu Berlin, Akademie-Verlag, Berlin 1960, Nr. 4
[9] H. S. Ruse, A. G. Walker, T. Y. Willmore, Harmonic spaces, Roma 1961
[10] A. G. Walker, A particular harmonic Riemannian space, Journal London Math. Soc. **20** (1945)

Karl-Marx-Universität
Sektion Mathematik
DDR-7010 Leipzig
Karl-Marx-Platz (Hauptgebäude)