

Über Nichtlokale Feldtheorien

Von JERZY RAYSKI

Inhalt

I. Formfaktor-Theorie	165
a) Frühere Entwicklungen	165
1. Einleitende Bemerkungen über relativistische Formfaktoren; Kausalitätsbedingung	165
2. Ein Feldmodell und das entsprechende Modell der Partikelmechanik	166
3. Unzulänglichkeit der üblichen Quantisierungsmethode	168
4. Eine S-Matrix-Theorie	168
5. Konvergenzfragen	170
6. Bemerkung zur Frage der gebundenen Zustände	171
b) Neuere Entwicklungen	171
1. Über eine Möglichkeit der kanonischen Quantisierung	171
2. Eine andere quasi-kanonische Methode	172
3. Konvergenzfragen	175
4. Kritische Schlußbemerkungen	176
II. Bilokale Theorie	177
1. Einleitende Bemerkungen	177
2. Verallgemeinerung des D'ALEMBERTschen Operators	178
3. Reziproke Nebenbedingungen	179
4. Massenspektrum der Elementarteilchen	180
5. Zusammenhang mit der Formfaktorthorie	181

I. Formfaktor-Theorie

a) Frühere Entwicklungen

1. Seit der Entdeckung, daß in der quantisierten Feldtheorie die Selbstenergie der Teilchen unendlich ist, wußte man, daß diese Schwierigkeit zu vermeiden wäre, wenn man den Teilchen eine endliche Ausdehnung zuschreiben könnte. Die Wechselwirkungsenergie der Quantenelektrodynamik (gleich dem negativen Wechselwirkungsanteil der LAGRANGE-Funktion) ist

$$H'(t) = -L'(t) = \int d^3x j_\mu(\vec{x}, t) A_\mu(\vec{x}, t), \quad (1)$$

wo j_μ der Vierervektor der Strom- und Ladungsdichte ist

$$j_\mu(\vec{x}, t) = \frac{ie}{2} \left[\psi^*(\vec{x}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{x}, t) \right] \quad (2)$$

und A_μ die elektromagnetischen Potentiale sind. Das Auftreten desselben Argumentes \vec{x} und t in j_μ und A_μ in (1) bedeutet, daß wir es hier mit einer Nahwirkung zwischen punktförmigen Feldpartikeln zu tun haben. Eine Fernwirkung zwischen den Elektronen und dem elektromagnetischen Felde kann man einführen, indem man j_μ und A_μ in zwei verschiedenen Punkten nimmt und mit einem Formfaktor $F(\vec{x} - \vec{x}')$ verknüpft:

$$H'(t) = \int d^3x' \int d^3x'' F(\vec{x}' - \vec{x}'') j_\mu(\vec{x}', t) A_\mu(\vec{x}'', t). \quad (1')$$

Diese Art von Fernwirkung ist gleichbedeutend mit einer Art Struktur und endlicher Ausdehnung der Elektronen. Mit einem beschränkten Formfaktor, der nur von dem Abstand $(\vec{x}' - \vec{x}'')$ abhängt, wird die Selbstenergie des Elektrons endlich, aber man zerstört zugleich die Lorentzinvarianz des Formalismus. Nun liegt der Gedanke nahe, die Lorentzinvarianz mit Hilfe von relativistisch invarianten Formfaktoren $F(x'_\mu - x''_\mu)$ zu sichern, die nur von dem Viererabstand $(x'_\mu - x''_\mu)^2$ abhängen. Diese Möglichkeit wurde zuerst von WATAGHIN (1), MARCH (2), HEISENBERG (3), MARKOV (4) u. a. diskutiert. Dabei stößt man aber auf bedeutende Schwierigkeiten. Denn erstens ist ein Formfaktor, der von der invarianten Viererlänge abhängt, konstant auf jedem Hyperboloid $(x'_\mu - x''_\mu)^2 = \text{const.}$, wodurch dem Elektron (oder der Fernwirkung) eine unbeschränkte Ausdehnung in Raum und Zeit, unter vollständiger Zerstörung der Kausalität, zukommen würde, und zweitens verhindert eine Abhängigkeit der LAGRANGE-Funktion von zwei

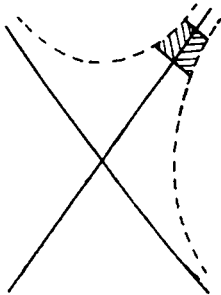


Abb. 1.

Zeitvariablen die Verwendung der üblichen kanonischen Quantisierung.

Die erste der genannten Schwierigkeiten wurde von PEIERLS und MC MANUS (5) überwunden. Diese Forscher bemerkten, daß in dem Falle, daß $F(x_\mu^2)$ nur für sehr kleine (x_μ^2) von Null verschieden und eine ungerade Funktion des Argumentes x_μ^2 ist, sich die Beiträge der (schraffierten) kleinen Gebiete beiderseits des Lichtkegels beinahe wegheben (Abb. 1), und zwar gilt dies um so besser, je weiter die beiden Gebiete vom Aufpunkt entfernt sind. Formfaktoren dieser Art gewährleisten also praktisch eine makroskopische Nahewirkung und Kausalität. Die Wechselwirkung zwischen zwei Punkten x'_μ und x''_μ ist nur dann wesentlich, wenn die Raum- und Zeitabstände $(\vec{x}' - \vec{x}'')$ und $(t' - t'')$ jeweils für sich klein sind. Man darf sagen, daß mit solchen Formfaktoren das Kausalitätsprinzip in Strenge gilt, nur ist die Lokalisierung der Teilchen in Raum und Zeit keine exakte (d. h. punktförmige), sondern eine schwache (verwaschene). In der zitierten Arbeit von MCMANUS wird die klassische Elektrodynamik mit Formfaktor diskutiert und gezeigt, daß die wohlbekannten Schwierigkeiten, die mit dem punktförmigen Modell geladener Teilchen zusammenhängen, alle vermieden werden können.

2. Bekanntlich sind die (linearen) Felder, die in der Quantenfeldtheorie betrachtet werden, einem System von (unendlich vielen) Oszillatoren gleichwertig. Ein reelles Feld entspricht einer Familie, ein komplexes Feld zwei

Familien von Oszillatoren. Der geläufigste Kopplungsansatz ist vom Typus eines Produktes von Feldfunktionen, das linear in den reellen und bilinear in den komplexen Feldfunktionen ist. Da wir in diesem Artikel die Aufmerksamkeit auf die leitenden Ideen, nicht aber auf Einzelheiten konzentrieren wollen, nehmen wir statt eines Feldmodells ein entsprechendes Modell der Partikeltheorie, das nur aus je einem Oszillator jeder Art besteht. Einer komplexen Feldfunktion $\psi(x_\mu)$ entspricht also in unserem Modell eine komplexe Koordinate $Q(t)$, einer reellen Feldfunktion $\varphi(x_\mu)$ entspricht eine reelle Koordinate $q(t)$ und dem x_μ entspricht die Zeitvariable t . Das Integral über die LAGRANGE-Funktion (Wirkungsintegral) für gekoppelte Oszillatoren ist:

$$W = W^{(0)} + W' = \int dt L(t) = \int dt [L^{(0)}(t) + L'(t)], \quad (3)$$

$$\text{wo} \quad L^{(0)} = \dot{Q}^* \dot{Q} - M^2 Q^* Q + \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - m^2 q^2) \quad (3')$$

$$\text{und} \quad L' = e Q^* Q q. \quad (3'')$$

Den Wechselwirkungsterm haben wir der Kopplungsart der Elektrodynamik (1) nachgebildet. e bedeutet die Kopplungskonstante. Bei Abwesenheit der Wechselwirkung ($e = 0$) haben wir es mit drei unabhängigen harmonischen Oszillatoren mit den Frequenzen M und m zu tun.

Nun können wir den Übergang zur nichtlokalen Theorie nachahmen, indem wir einen Formfaktor $F(t' - t'')$ einführen, wobei¹⁾

$$W' = e \int dt' \int dt'' F(t' - t'') Q^*(t') Q(t'') q(t''). \quad (4')$$

Im Rahmen der Mechanik der Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden entspricht dies genau dem MCMANUSSchen Ansatz $F(x'_\mu - x''_\mu)$ für die Feldtheorie. Nun sehen wir, daß ein allgemeinerer Ansatz z. B. ist

$$W' = e \int dt' \int dt'' \int dt''' F(t' - t'', t'' - t''') Q^*(t') q(t'') Q(t'''), \quad (4'')$$

wo jede Koordinate von einer anderen Variablen abhängt. Diesem verallgemeinerten Ansatz entspricht im Rahmen der Feldtheorie ein $F(x'_\mu - x''_\mu, x''_\mu - x'''_\mu)$ und eine Abhängigkeit der Feldfunktionen von verschiedenen Raum-Zeit-Punkten $\psi^*(x'_\mu)$, $\varphi(x''_\mu)$, $\psi(x'''_\mu)$ ²⁾. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die ein verallgemeinerter (relativistischer) Formfaktor erfüllen muß, um die makroskopische Kausalität zu gewährleisten, sind in einer Arbeit von CHRÉTIEN und PEIERLS (6) angegeben. Außer der Kausalitätsbedingung muß noch eine Korrespondenzbedingung bez. der lokalen Feldtheorie erfüllt sein: es soll möglich sein in allen Formeln, die

¹⁾ Wenn Integrationsgrenzen nicht explizite angeschrieben werden, soll von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert werden.

²⁾ Auf die Elektrodynamik angewandt zerstört ein solcher Ansatz die Eichinvarianz zweiter Art, ist aber notwendig, um die Divergenzen zu vermeiden, die in den Formeln für die Vakuumpolarisation auftreten.

sinnvoll in der lokalen Theorie sind, den Formfaktor durch ein Produkt von DIRACschen Deltafunktionen zu ersetzen:

$$F(x'_\mu - x''_\mu, x''_\mu - x'''_\mu) \rightarrow \delta^{(4)}(x'_\mu - x''_\mu) \delta^{(4)}(x''_\mu - x'''_\mu), \quad (5)$$

ohne dabei merkliche Fehler zu begehen.

3. Unser Modell von gekoppelten Oszillatoren mit dem Ansatz (4') oder (4'') läßt sich nicht, ebensowenig wie die entsprechenden Feldtheorien, in der üblichen Weise quantisieren. Der Grund dafür liegt darin, daß aus dem (mehrfachen) Wirkungsintegral keine eindeutige LAGRANGE-Funktion folgt: wir wissen nicht, ob t' , t'' , t''' oder irgendeine lineare Kombination dieser Variablen als Argument der LAGRANGE-Funktion gelten soll. Ohne die LAGRANGE-Funktion kennen wir aber auch keine kanonischen Impulse und keine HAMILTON-Funktion. Die kanonische Quantisierung ist also nicht durchführbar (oder wenigstens nicht in gewöhnlicher Weise durchführbar. Vgl. dazu Abschnitt b).

Die allgemein verbreitete Meinung bezüglich dieser Schwierigkeit war die folgende: wegen der Fernwirkung und Nichtlokalisierbarkeit, die praktisch nur für ultra-mikroskopische Gebiete, prinzipiell aber für das ganze Raum-Zeitgebiet sich geltend machen, ist es nicht möglich, einen differentiellen Ausdruck für die Zustandsänderung (etwa eine zeitabhängige Schrödingergleichung) aufzustellen. Dagegen kann man aber einen integralen, das ganze Raum-Zeit-Kontinuum umfassenden Ausdruck für die Zustandsänderung von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ finden. Das bedeutet einen prinzipiellen Verzicht auf die traditionelle Quantenmechanik, die durch einen S-Matrix-Formalismus zu ersetzen ist.

4. Das Programm, eine S-Matrix für die nicht-lokalen Felder zu konstruieren, ist dem Verfasser (7) und (beinahe gleichzeitig) BLOCH (8) und KRISTENSEN u. MÖLLER (9) gelungen. Wir wollen diese Konstruktion an Hand des Oszillatorenmodelles mit dem Kopplungsansatz (4'') erklären.

Die Variation der Koordinate δQ ergibt

$$\begin{aligned} \delta_Q W = & \int dt \left(\frac{dL^{(9)}}{dQ} - \frac{d}{dt} \frac{dL^{(0)}}{d\dot{Q}} \right) \delta Q + \left(\frac{dL^{(0)}}{d\dot{Q}} \delta Q \right)_{-\infty}^{+\infty} \\ & + e \int \int \int dt' dt'' dt''' F(t' - t'', t'' - t''') Q^*(t') q(t'') \delta Q(t'''), \end{aligned} \quad (6)$$

wo $L^{(0)}$ durch (3') gegeben ist. Wie in einer lokalen Theorie nehmen wir an, daß die Variation $\delta_Q W$ nur von den Variationen δQ in den Endpunkten des Integrationsgebietes abhängen darf (Prinzip der stationären Wirkung). Es muß also der Koeffizient von $\delta Q(t)$ verschwinden, was die EULER-LAGRANGEsche Gleichung liefert

$$\ddot{Q}^*(t) + M^2 Q^*(t) - e \int dt' \int dt'' F(t' - t'', t'' - t) Q^*(t') q(t'') = 0. \quad (7')$$

Die Variationen δQ^* und δq liefern die weiteren EULER-LAGRANGESchen Gleichungen

$$\ddot{Q}(t) + M^2 Q(t) - e \int dt' \int dt'' F(t - t'', t'' - t''') q(t'') Q(t''') = 0, \quad (7'')$$

$$\ddot{q}(t) + m^2 q(t) - e \int dt' \int dt'' F(t' - t, t - t''') Q^*(t') Q(t''') = 0. \quad (7''')$$

Es ist zweckmäßig, diese Integro-Differentialgleichungen durch reine Integralgleichungen zu ersetzen. Zu diesem Zweck bilden wir ein Analogon zu der wohlbekannten Δ -Funktion von JORDAN und PAULI, welches die wechselwirkungsfreie Gleichung befriedigt

$$\left(\frac{d}{dt^2} + M^2\right) \Delta(t) = 0, \quad (8)$$

eine ungerade Funktion ist und die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt} \Delta(t)|_{t=0} = -1 \quad (9)$$

hat. Diese Funktion ist

$$\Delta(t) = -\frac{1}{M} \sin Mt. \quad (10)$$

Die Gleichung (7'') ist gleichwertig mit der Integralgleichung

$$Q(t) = Q^{(0)}(t) - e \int_{t_0}^t dt' \int dt'' \int dt''' \Delta(t-t') F(t'-t'', t''-t''') q(t'') Q(t'''), \quad (11)$$

wo $Q^{(0)}$ eine Lösung der wechselwirkungsfreien Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2\right) Q^{(0)}(t) = 0 \quad (12)$$

ist. Wegen der Eigenschaften der Δ -Funktion verschwindet das Integral in (11) zusammen mit seiner ersten Ableitung, für $t = t_0$, was bedeutet, daß $Q^{(0)}$ und $\dot{Q}^{(0)}$ die Anfangsbedingungen für t_0 bestimmen. Analoge Gleichungen gelten für Q^* und q . Nun kann man die Integrationsgrenze ins Unendliche verschieben $t_0 \rightarrow \mp \infty^1$. Dann geht $Q^{(0)}$ in $Q^{(\text{in})}$ (oder in $Q^{(\text{out})}$) über mit der folgenden Bedeutung: $Q^{(\text{in})}$ (oder $Q^{(\text{out})}$) ist eine Lösung der wechselwirkungsfreien Gleichung (12), die in unendlichferner Vergangenheit (oder Zukunft) mit der Lösung $Q(t)$ asymptotisch übereinstimmt. Schreiben wir z. B. die retardierte Gleichung auf:

$$Q(t) = Q^{(\text{in})}(t) - e \int_{-\infty}^t dt' \int dt'' \int dt''' \Delta(t-t') F(t'-t'', t''-t''') q(t'') Q(t'''). \quad (13)$$

(Analoge Gleichungen gelten für Q^* und q mit den freien Termen $Q^{*(\text{in})}$ und $q^{(\text{in})}$.)

Da diese $Q^{(\text{in})}$ usw. Lösungen der wechselwirkungsfreien Gleichungen sind, liegt der Gedanke nahe, sie auf die gewöhnliche Weise zu quantisieren, d. h. durch Operatoren zu ersetzen mit den Vertauschungsrelationen²⁾ ³⁾

$$[Q^{(\text{in})}(t), Q^{(\text{in})*}(t')] = i \Delta(t-t'), \quad [q^{(\text{in})}(t), q^{(\text{in})}(t')] = i D(t-t'), \quad (14)$$

¹⁾ Im allgemeinen ist das nur möglich, wenn man die Wechselwirkung adiabatisch ein- oder ausschaltet.

²⁾ Wir benutzen solche Einheiten, daß $\hbar = 1$, $c = 1$.

³⁾ Alle anderen Kommutatoren verschwinden.

wo D die Δ -Funktion von JORDAN und PAULI mit der Frequenz („Masse“) m bedeutet. Die Vertauschungsregeln (14) sind den kanonischen Regeln gleichwertig (was durch Differenzieren und Gleichsetzen $t = t'$ mit Hilfe von (9) geprüft werden kann). Die $Q^{(\text{in})}$ usw. bestimmen die Lösungen $Q(t)$ usw., die auch in Operatoren verwandelt werden. Diese ihrerseits bestimmen die $Q^{(\text{out})}$ usw., welche [aus den bestimmten $Q(t)$ usw.] aus der Gleichung

$$Q(t) = Q^{(\text{out})}(t) + e \int_{-\infty}^t dt' \int dt'' \int dt''' \Delta(t-t') F(t'-t'', t''-t''') q(t'') Q(t''') \quad (15)$$

(und aus zwei weiteren Gleichungen) sich prinzipiell bestimmen lassen. Letzten Endes sind also die $Q^{(\text{out})}$ durch die $Q^{(\text{in})}$ bestimmt, und auch die Vertauschungsregeln für die $Q^{(\text{out})}$ usw. sind durch die Regeln (14) eindeutig bestimmt. Da aber die $Q^{(\text{out})}$ usw. auch Lösungen der wechselwirkungsfreien Gleichungen (12) usw. sind, liegt die Vermutung nahe, daß sie dieselben Vertauschungsregeln (14) befriedigen:

$$[Q^{(\text{out})}(t), Q^{(\text{out})*}(t')] = i\Delta(t-t'), \quad [q^{(\text{out})}(t), q^{(\text{out})}(t')] = iD(t-t'). \quad (14')$$

Wenn diese Vermutung richtig ist, dann existiert eine unitäre Matrix S , die $Q^{(\text{in})}$ in $Q^{(\text{out})}$ transformiert

$$\begin{aligned} S^{-1} Q^{(\text{in})} S &= Q^{(\text{out})}, & S^{-1} Q^{(\text{in})*} S &= Q^{(\text{out})*} \\ S^{-1} q^{(\text{in})} S &= q^{(\text{out})}. \end{aligned} \quad (16)$$

Diese Matrix ist dann mit der HEISENBERG'schen S -Matrix (10) identisch und läßt sich mit Hilfe von (13), (14) und (15) explizite konstruieren (in Form einer Potenzreihenentwicklung nach der Kopplungskonstante e). Der Verfasser (7) hat die Übereinstimmung von (14') mit (14) in der Weise gezeigt, daß er die S -Matrix explizite konstruiert¹⁾ hat und zeigen konnte, daß sie wirklich unitär ist. Einen direkten Beweis dafür, daß (14') aus (13) (14) und (15) folgt, hat ein Jahr später C. BLOCH (8) gegeben²⁾.

Dieselbe Methode der Konstruktion der S -Matrix war früher von YANG und FELDMAN (11) für lokale Felder vorgeschlagen worden. Während aber für lokale Theorien das nur eine Alternative mehr ist (man kann die S -Matrix auch aus der Schrödingergleichung berechnen), ist für nichtlokale Felder (wo keine Schrödingergleichung existiert) das der einzige gangbare Weg zur Konstruktion der S -Matrix.

5. Einfache Regeln lassen sich formulieren für eine direkte Übertragung der S -Matrix einer lokalen Theorie auf die entsprechende nichtlokale Form. Wie in einer jeden S -Matrix-Theorie gibt es auch hier Größen, die bei der Streuung konstant bleiben (Impuls, Drehimpuls, kinetische Energie und Ladung). Darüber hinaus konnte man zeigen, daß viele von den bekannten Divergenzen der lokalen Theorie verschwinden (dank des Formfaktors). Z. B. weisen die Selbstenergie der Teilchen und die Vakuumpolarisationseffekte (in der Näherung²⁾) keine Unendlichkeiten mehr auf. Dadurch werden auch alle strahlungs-

¹⁾ Nur bis zur zweiten Näherung e^2 .

²⁾ Weitere Diskussion zu diesem Problem ist zu finden bei C. HAYASHI (19), insbesondere S. 544.

theoretischen Korrekturen $(n + 2)$ -ter Ordnung für Prozesse n -ter Ordnung mit keinen neuen Divergenzen behaftet. Eine allgemeine Konvergenz konnte aber nicht gesichert werden. C. BLOCH hat einen Beweis dafür gegeben, daß — um in jeder Näherung nur endliche Resultate zu erhalten — man einen Formfaktor verwenden muß, dessen Fouriertransformierte $F(p_\mu - k_\mu, k_\mu - q_\mu)$ für raumartige Vektoren p_μ, k_μ, q_μ verschwindet (PAULI) (12). Solche Formfaktoren stehen aber in Widerspruch zum Postulat der makroskopischen Kausalität.

Eine besondere Schwierigkeit bietet das Element $\langle 0 | S | 0 \rangle$, d. h. die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß ein Vakuumzustand in unendlich ferner Vergangenheit in einen Vakuumzustand in unendlich ferner Zukunft übergeht. Der Verfasser hat gezeigt (13), daß dieses Element unendlich ist mit jedem relativistisch invarianten Formfaktor (und zwar schon in der niedrigsten Ordnung e^2).

Diese Resultate beweisen, daß, obwohl ein gewisser Fortschritt in der Konvergenzfrage durch die nichtlokale S -Matrix Theorie erzielt wurde, die S -Matrix jedoch sicher keine analytische Funktion der Kopplungskonstanten e für $e \rightarrow 0$ ist.

6. Eine weitere von ZIMMERMANN (14) u. a. diskutierte Schwierigkeit ist die, daß die YANG-FELDMANSche Methode, als eine Quantisierungsmethode betrachtet, nicht vollständig ist. Im Fall gebundener Zustände sind nicht die inhomogenen Integralgleichungen vom Typus (13) oder (15), sondern die homogenen Integralgleichungen (ohne $Q^{(\text{in})}$ oder $Q^{(\text{out})}$) lösbar. Da die Quantisierung an die $Q^{(\text{in})}$ und $Q^{(\text{out})}$ anknüpfte, werden gebundene Zustände durch die Methode nicht erfaßt.

b) Die neueren Entwicklungen

In der letzten Zeit sind neue Arbeiten erschienen, die nach einer an physikalischem Inhalt reicheren Formulierung der Theorie streben. Nach diesen Arbeiten sollte es möglich sein einen Zustand zu irgendeinem Zeitpunkt t zu definieren, und Übergänge zwischen zwei Zuständen zu t_1 und t_2 zu betrachten (also nicht nur für $t_1 \rightarrow -\infty$ und $t_2 \rightarrow +\infty$, wie es in einer reinen S -Matrix Theorie der Fall war). Die von verschiedenen Autoren verwendeten Methoden sind aber sehr verschieden.

1. Unabhängig voneinander haben RZEWUSKI (15), PAULI (12), ONO (16) u. a. gefunden, daß (außer den Streuungskonstanten) auch wirkliche Bewegungskonstanten existieren. Es existiert insbesondere eine konstante Energie. Für unser Modell ist sie

$$\begin{aligned}
 H(t) = & \dot{Q}^* \dot{Q} + M^2 Q^* Q + \frac{1}{2} \dot{q} \dot{q} + \frac{m^2}{2} q q \\
 & - e \int dt' \int dt'' F(t' - t, t - t'') Q^*(t') q(t) Q(t'') \\
 & + \frac{e}{2} \iiint dt' dt'' dt''' F(t' - t'', t'' - t''')
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial Q^*(t')}{\partial t'} q(t'') Q(t''') [\varepsilon(t' - t) - \varepsilon(t'' - t)] + Q^*(t') q(t'') \frac{\partial Q(t''')}{\partial t'''} - [\varepsilon(t''' - t) - \varepsilon(t'' - t)] \right], \quad (17)$$

$$\text{wo} \quad \varepsilon(t) = \pm 1 \quad \text{für} \quad t \geq 0. \quad (18)$$

Die Konstanz von (17) ist durch Differentiation nach t leicht zu beweisen mit Hilfe von (7) und der Formel

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = 2 \delta(t). \quad (19)$$

Beim Grenzübergang zur lokalen Theorie artet der Formfaktor in ein Produkt von δ -Funktionen: $\delta(t' - t'') \delta(t'' - t''')$ aus. Dann verschwinden die letzten Terme mit den ε -Funktionen, während der vorletzte Term in (17) übergeht in

$$-e Q^*(t) q(t) Q(t), \quad (20)$$

so daß die Korrespondenz mit der lokalen Theorie gesichert ist.

Da es eine konstante Energie gibt, darf man hoffen, daß auch kanonische Koordinaten und Impulse konstruiert werden können. PAULI hat gezeigt, daß im klassischen (nichtquantisierten) Fall solche kanonischen Variablen existieren. Es sind bestimmte Funktionale der ursprünglichen Koordinaten Q^* , Q , q und ihrer Zeitableitungen. Die Durchführung einer kanonischen Quantisierung ist allerdings nur in erster Näherung in der Kopplungskonstante gelungen. Man weiß bis jetzt noch nicht, ob die kanonische Quantisierung in aller Strenge durchführbar ist.

2. Es existiert dagegen eine andere Formulierung (17) der nichtlokalen Theorien, in der eine quasi-kanonische Quantisierung vollständig durchgeführt worden ist. Wir wollen die Grundideen dieser Theorie an Hand des Oszillatorenmodelles erklären.

Den Ausgangspunkt für diese Theorie bildet wieder das Wirkungsintegral, welches jedoch an die Problemstellung von vornherein anzupassen ist. Das geläufigste Problem ist: der Anfangszustand sei für t_1 bestimmt, wir fragen nach dem späteren Zustand zur Zeit t_2 . Dieser Fragestellung entspricht ein Wirkungsintegral mit den Integrationsgrenzen t_1 und t_2 ¹⁾

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{Q}^* \dot{Q} - M^2 Q^* Q + \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{m^2}{2} q^2 \right) + e \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{t_1}^{t_2} dt'' \int_{t_1}^{t_2} dt''' F(t', t'', t''') Q^*(t') q(t'') Q(t'''). \quad (21)$$

Es ist also ein Wirkungsintegral für ein Gebiet, bei dem das System isoliert von den Meßapparaten ist. Betrachten wir die Variation δW_{12} , die durch die

¹⁾ Der Formfaktor F darf auch von den Integrationsgrenzen abhängen.

Variationen der Koordinaten δQ , δQ^* , δq hervorgerufen wird. Insbesondere bekommt man für $\delta Q = \delta q = 0$ und beliebiges δQ^*

$$\begin{aligned} \delta_{Q^*} W_{12} = & \int_{t_1}^{t_2} dt (-\ddot{Q} - M^2 Q) \delta Q^* \\ & + \dot{Q} \delta Q^* \Big|_{t_1}^{t_2} + e \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{t_1}^{t_2} dt'' \int_{t_1}^{t_2} dt''' F(t', t'', t''') q(t'') Q(t''') \delta Q^*(t'). \end{aligned} \quad (22)$$

Wegen des Postulates der stationären Wirkung darf die Variation nur von den Werten $\delta Q^*(t_1)$ und $\delta Q^*(t_2)$ abhängen, was eine EULER-LAGRANGESche Gleichung liefert

$$\ddot{Q}(t) + M^2 Q(t) = e \int_{t_1}^{t_2} dt'' \int_{t_1}^{t_2} dt''' F(t, t'', t''') q(t'') Q(t'''), \quad (23)$$

wobei die Variation (22) sich auf

$$\delta_{Q^*} W_{12} = \dot{Q} \delta Q^* \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (24)$$

reduziert. Entsprechende Variationen δQ und δq liefern weitere zwei EULER-LAGRANGESche Gleichungen, und die Variation des Wirkungsintegrals wird im allgemeinen

$$\delta W_{12} = (\dot{Q} \delta Q^* + \dot{Q}^* \delta Q + \dot{q} \delta q) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (25)$$

Wir sehen aus (23), daß die EULER-LAGRANGESchen Gleichungen, also auch ihre Lösungen, von den Integrationsgrenzen abhängig sind

$$Q = Q(t, t_1, t_2), \quad (26)$$

was die nicht-lokale Theorie von der lokalen scharf unterscheidet. Allerdings ist diese Abhängigkeit nur für sehr kleine $|t - t_1|$ oder $|t - t_2|$ von Bedeutung.

Der Umstand, daß die Variation des Wirkungsintegrals die Form einer Differenz (25) hat, ist entscheidend für eine quasi-kanonische Quantisierung. Wir definieren die kanonisch konjugierten Impulse als die Koeffizienten von (25)

$$P = \dot{Q}^*, \quad P^* = \dot{Q}, \quad p = \dot{q} \quad (27)$$

für $t = t_1$ und $t = t_2$. Neben W_{12} führen wir noch ein anderes Wirkungsintegral

$$\overline{W}_{12} = W_{12} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (PQ + P^*Q^* + pq) dt \quad (28)$$

ein, welches dieselben EULER-LAGRANGESchen Gleichungen liefert. Dann wird

$$\delta_Q \overline{W}_{12} = [P \delta Q - \delta(PQ)] \Big|_{t_1}^{t_2} = -Q \delta P \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (29)$$

was auch als eine Variation des ursprünglichen W_{12} betrachtet werden darf, wenn jetzt P statt Q als eine unabhängige Variable gilt

$$\delta_Q \overline{W}_{12} = -Q \delta P \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta_P W_{12}. \quad (30)$$

Die Äquivalenz von (30) und (24) bedeutet, daß $Q \rightarrow P$, $P \rightarrow -Q$ eine kanonische Transformation ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Quantisierung übergehen. Wir führen zwei Formeln ein, die aus dem DIRACschen abstrakten Formalismus, der Algebra der Bra- und Ketvektoren folgen

$$\delta G = i [F, G] \quad (31)$$

$$\delta \langle \alpha' | \beta' \rangle = i \langle \alpha' | F_\alpha - F_\beta | \beta' \rangle. \quad (32)$$

Hier bedeutet F einen infinitesimalen hermiteschen Operator, der eine Änderung der Darstellung verursacht, insbesondere bewirkt F_α eine Änderung des Systems von Vektoren der Basis $|\alpha'\rangle$; entsprechendes gilt für F_β und $|\beta'\rangle$. G ist ein beliebiger Operator¹⁾. Nun ist $Q \rightarrow Q + \delta Q$ (wo δQ eine c -Zahl ist) einer Änderung der Basis gleichwertig, während (24) oder (30) die Form einer Differenz, genau wie (32) hat. Wir sind also berechtigt, eine Brücke zwischen dem abstrakten Formalismus und unserem Modell zu schlagen, indem wir postulieren:

$$P(t_1) \delta Q(t_1) = a F_1, \quad P(t_2) \delta Q(t_2) = a F_2, \quad (33)$$

wo a ein Proportionalitätsfaktor ist. Wir nehmen also an, daß die beiden Teile des Ausdruckes $\delta_Q W_{12}$ infinitesimale hermitesche Operatoren bedeuten, die eine Änderung der Darstellung (gleichwertig mit $Q \rightarrow Q + \delta Q$) bewirken.

Die Vertauschungsregeln zwischen den Koordinaten können jetzt leicht aus (31) abgeleitet werden. Nehmen wir z. B. $G = Q$, dann gilt:

$$\delta Q(t_1) = \frac{i}{a} [P(t_1) \delta Q(t_1), Q(t_1)] = \frac{i}{a} [P(t_1), Q(t_1)] \delta Q(t_1) \quad (34)$$

mit einem beliebigen $\delta Q(t_1)$, also

$$[P(t_1), Q(t_1)] = -i a. \quad (35)$$

Das ist aber die kanonische Vertauschungsregel, wenn der Proportionalitätsfaktor $a = 1$ angenommen wird. Dasselbe gilt auch für t_2 . Nehmen wir weiter $G = q$, dann ist

$$\delta q(t_1) = \frac{i}{a} [P(t_1), q(t_1)] \delta Q(t_1). \quad (36)$$

Wegen der Unabhängigkeit der beiden Variationen muß der Kommutator in (36) verschwinden

$$[P(t_1), q(t_1)] = 0. \quad (37)$$

¹⁾ Der Beweis der Formeln (31) und (32) ist im Anhang gegeben.

Dasselbe gilt für t_2 . Weitere Vertauschungsregeln folgen aus (31) mit $G = Q$, Q^* , P^* , p oder mit

$$F = -Q\delta P, \quad F = P^*\delta Q^*, \quad F = -Q^*\delta P^*, \quad F = p\delta q, \quad F = -q\delta p. \quad (38)$$

Alle diese Ansätze stehen im Einklang miteinander und ergeben die gewöhnlichen kanonischen Vertauschungsregeln. Diese Methode der Quantisierung läßt sich auf die Feldtheorie übertragen.

Die oben skizzierte Methode war im Rahmen der lokalen Theorie schon früher bekannt (18). Der einzige, aber wichtige Unterschied liegt darin, daß für eine lokale Theorie dieselben Vertauschungsregeln für jeden Zeitpunkt t gelten, während in der nichtlokalen Theorie (für ein gegebenes W_{12}) die kanonischen Vertauschungsregeln nur für die Endpunkte t_1 und t_2 gelten, wo definitionsgemäß eine Wechselwirkung mit Meßanordnungen stattfindet. Eine Verschiebung von t_2 (oder t_1) zieht auch eine Änderung der EULER-LAGRANGESchen Gleichungen nach sich, was aus (23) ersichtlich ist. Im Gegensatz zu der lokalen Theorie gibt es hier keine Additivität $W_{12} \neq W_{13} + W_{31}$ (wo t_3 ein Zeitpunkt zwischen t_1 und t_2 ist), so daß es auch unmöglich ist, das Gebiet in unendlich kleine Teilgebiete der Länge dt zu unterteilen, um zu einer differentiellen Beschreibung der Zustandsänderung überzugehen. Eine Schrödingergleichung existiert im Rahmen dieser Theorie nicht. Statt dessen gibt es eine integrale Form der Beschreibung der Zustandsänderung zwischen zwei beliebigen t_1 und t_2 . Da die Vertauschungsregeln für t_2 dieselben sind wie für t_1 , gibt es eine unitäre Matrix U_{12} , welche die Koordinaten zum Zeitpunkt t_1 in die Koordinaten zum Zeitpunkt t_2 transformieren

$$Q(t_2) = U_{12}^{-1} Q(t_1) U_{12}, \quad Q^*(t_2) = U_{12}^{-1} Q^*(t_1) U_{12}, \quad q(t_2) = U_{12}^{-1} q(t_1) U_{12}. \quad (39)$$

Die Elemente der unitären Matrix U_{12} bedeuten die Wahrscheinlichkeitsamplituden für Übergänge zwischen zwei Zuständen zur Zeit t_1 und t_2 . Die Matrix U_{12} läßt sich in Form einer Potenzreihe der Kopplungskonstante schrittweise berechnen. Die im ersten Abschnitt besprochene S -Matrix entsteht aus U_{12} durch einen Grenzübergang $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow +\infty$ dann und nur dann, wenn dieser Grenzübergang mathematisch zulässig ist. Das ist im allgemeinen aber nicht der Fall.

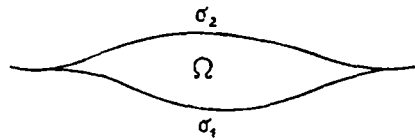


Abb. 2.

3. Die oben skizzierte Quantisierungsmethode läßt sich in der Feldtheorie nachahmen. Um eine evident lorentzinvariante Matrix U zu bekommen, kann man die Integrationsgrenzen t_1 , t_2 durch zwei Hyperflächen σ_1 und σ_2 mit einer zeitartigen Normalenrichtung ersetzen.

Insbesondere kann man diese Hyperflächen so legen, daß sie ein endliches Gebiet Ω einschließen (Abb. 2). Die Verwendung eines endlichen Gebietes ändert grundsätzlich die Situation in der Konvergenzfrage. Man kann zeigen, daß in diesem Falle jede Näherung der Störungsrechnung endlich ist, wenn nur der Formfaktor beschränkt ist. Insbesondere haben wir im Abschnitt α erwähnt, daß in der S -Matrix-Theorie die Wahrscheinlichkeit, daß

ein Vakuum in ein Vakuum übergeht, unendlich ist (schon in der Näherung e^2) für jeden relativistischen Formfaktor. Jetzt aber, wo wir uns auf ein endliches Gebiet beschränken, ist diese Wahrscheinlichkeit endlich (13), wenn nur der Formfaktor beschränkt ist¹⁾.

Diese Resultate beweisen, daß ein unendliches Gebiet, das in der S -Matrix-Theorie verwendet wird, „an sich“ eine Quelle von Konvergenzschwierigkeiten bedeutet. Dies ist nicht verwunderlich, weil ein unendliches Gebiet einen singulären Fall beschreibt. Ein Grenzübergang von einem endlichen zum unendlichen Gebiet ist nicht immer durchführbar. Einen regulären Fall bildet nur eine Feldtheorie in einem endlichen Raum-Zeit-Gebiet und mit beschränkten Formfaktoren.

4. Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß eine reine S -Matrix-Theorie sicher unbefriedigend ist. Die neuesten Entwicklungen berechtigen aber den Schluß zu ziehen, daß es auch in einer nichtlokalen Formfaktortheorie möglich ist, von Zuständen im Endlichen zu sprechen. Die sehr interessante Möglichkeit einer kanonischen Theorie mit einer HAMILTON-Funktion ist noch nicht genügend ausgearbeitet²⁾, dagegen ist ein anderer quasikanonischer Formalismus formuliert worden und es scheint, daß er widerspruchsfrei ist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die beiden Theorien nur für ultramikroskopische Gebiete verschieden sind und die Resultate der beiden für makroskopische Raum-Zeit-Gebiete asymptotisch übereinstimmen werden.

Es bleiben natürlich noch viele Fragen bezüglich der Interpretation des Formalismus unbeantwortet. Zum Beispiel mag es zweifelhaft erscheinen, was eine momentane Messung zur Zeit t_1 oder t_2 im Rahmen einer nichtlokalen Theorie bedeutet. Der Verfasser ist der Meinung, daß es hier keinen Widerspruch gibt. Die ultramikroskopische Nichtlokalisierbarkeit betrifft nur die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Teilen (Komponenten) des zu messenden Feldsystems, nicht aber die Wechselwirkung mit den Meßanordnungen. Diese sind sowieso klassisch und makroskopisch zu behandeln. Sollten auch die Meßanordnungen nichtlokal wirken, dann hätte es keinen Sinn, eine Punktgeometrie mit Metrik (den LORENTZschen Raum) zu verwenden, wie es in jeder bisherigen Formfaktortheorie üblich ist. Solange wir eine gewöhnliche metrische Geometrie benutzen, soll das auch bedeuten, daß Punktmessungen prinzipiell durchführbar sind.

Es wurde erwähnt, daß die Formfaktortheorie (auf ein endliches Gebiet angewandt) Unendlichkeiten in jeder einzelnen Näherung der Störungsrechnung vermeidet. Man weiß aber bis jetzt noch nicht, ob die ganze Reihe der Näherungen (eine Potenzreihe der Kopplungskonstante) konvergiert. Die Konvergenz der Reihe ist (13, 17) nur in einem vereinfachten Fall bewiesen, wo eines der beiden gekoppelten Felder ein äußeres (gegebenes) Feld ist.

Einen prinzipiellen Mangel der bisherigen Formfaktortheorie bedeutet der Umstand, daß der Formfaktor unbestimmt ist. Die Forderungen der Inva-

¹⁾ Zum Beweis ist es vorteilhaft, die x -Raumdarstellung der Δ -artigen Funktionen statt der Fourierdarstellung zu verwenden.

²⁾ Nach Abschluß dieses Berichtes hat der Verfasser eine neue Arbeit von HAYASHI (19) gesehen, wo die kanonische Theorie weiter entwickelt ist.

rianz, der makroskopischen Kausalität, der Korrespondenz und der Konvergenz genügen nicht, um den Formfaktor (also die Mikrostruktur der Wechselwirkung) eindeutig zu bestimmen. Um die Konvergenz zu sichern, muß ein Formfaktor so beschaffen sein, daß er die Wahrscheinlichkeiten der energiereichen Prozesse genügend stark verringert. Es sollte also möglich sein, den Formfaktor experimentell zu bestimmen aus Zusammenstößen sehr schneller Teilchen. Erfahrungsgemäß kommen aber bei Zusammenstößen von Teilchen großer Energie neuartige Prozesse vor. Es entstehen nämlich neue schwerere Teilchen kurzer Lebensdauer. Wir sehen also, daß das Problem der Bestimmung der Formfaktoren, also das Problem der Struktur der Wechselwirkung (oder der Elementarteilchen selbst), aufs engste mit dem Rätsel der unstabilen schweren Teilchen verknüpft sein muß. Wahrscheinlich können die beiden Probleme nur gemeinsam gelöst werden. Deswegen wenden wir uns jetzt einer anderen Art von nichtlokalen Theorien zu, die eine Hoffnung auf die Lösung des Problems der Existenz von schweren, unstabilen Teilchen darbietet.

II. Bilokale Theorie

1. Im Jahre 1950 hat YUKAWA (20) eine weitgehende Verallgemeinerung der Feldtheorie vorgeschlagen. Statt, wie bisher, die Feldvariable ψ als Funktion des Raum-Zeit-Punktes x_μ ($\mu = 1, \dots, 4$) zu betrachten,

$$\psi = \psi(x_\mu) \quad (1)$$

nimmt YUKAWA an, daß jede Feldvariable von zwei Raum-Zeit-Punkten x'_μ, x''_ν abhängig ist

$$\psi = \psi(x'_\mu, x''_\nu). \quad (2)$$

ψ ist dann also keine lokale mehr, sondern eine bilokale Funktion. Um eine Interpretation zu erleichtern, führt YUKAWA neue Variablen ein

$$x_\mu = \frac{1}{2}(x'_\mu + x''_\nu), \quad r_\mu = x'_\mu - x''_\nu. \quad (3)$$

Man kann also auch schreiben

$$\psi = \psi(x_\mu, r_\nu), \quad (4)$$

wo die neuen x_μ -Koordinaten dieselbe Rolle wie die ursprünglichen „lokalen“ Koordinaten in (1) spielen (und einigermassen als Schwerpunktskoordinaten der Teilchen gelten können), während die neuen Koordinaten r_μ (die Relativkoordinaten) zur Beschreibung einer inneren Struktur der Teilchen dienen sollen.

Für die entsprechenden Ableitungen führen wir die folgenden Bezeichnungen ein

$$p_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad k_\mu = -i \frac{\partial}{\partial r_\mu}. \quad (5)$$

Man sieht leicht, daß im Rahmen einer bilokalen Feldtheorie allerlei Möglichkeiten für eine Verallgemeinerung der SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung

vorliegen. Wenn wir uns von vornherein auf zweite Ableitungen beschränken, dann ist die allgemeinste lorentzinvariante Form der (wechselwirkungs-freien) Gleichung

$$(-p_\mu p_\mu + A_\mu k_\mu + B_{\mu\nu} k_\mu k_\nu + C_\mu p_\mu + D_{\mu\nu} p_\mu k_\nu + E) \psi(x, r) = 0, \quad (6)$$

wo A bis E noch von den r_μ abhängen können¹⁾. Die x_μ können dagegen in (6) nicht vorkommen, weil die Gleichung Translationen gegenüber invariant sein muß. In zwei aufeinander folgenden Noten (21) diskutiert YUKAWA beispielsweise den Fall $C_\mu = D_{\mu\nu} = 0$. In diesem Falle kann man die Relativkoordinaten von den Schwerpunktskoordinaten abseparieren

$$\psi(x, r) = u(x) \chi(r), \quad (7)$$

$$\text{wobei} \quad (p_\mu p_\mu + m^2) u(x_r) = 0 \quad (6')$$

$$\text{und} \quad (A_\mu k_\mu + B_{\mu\nu} k_\mu k_\nu + E + m^2) \chi(r_\lambda) = 0. \quad (6'')$$

Es ist ersichtlich, daß die Separationskonstante m^2 die Rolle des Quadrates einer Masse spielt. Die Gleichung (6'') sagt aber aus, daß m^2 im allgemeinen kein beliebiger Parameter ist, sondern ein Eigenwert der Gleichung (6'') sein muß. Schon dieses einfache Beispiel zeigt, daß die bilokale Feldtheorie auf eine Quantisierung der Masse führt. Wir stehen also einem großen Problem gegenüber: Lassen sich die vielen Möglichkeiten einer verallgemeinerten Wellengleichung so einengen, daß ein eindeutiges und sinnvolles, der Wirklichkeit entsprechendes Massenspektrum der Elementarpartikeln abgeleitet werden kann? Einen Versuch (22) in dieser Richtung wollen wir jetzt besprechen.

2. Der D'ALEMBERTSche Operator $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$ spielt eine wichtige Rolle in der Quantentheorie der Wellenfelder. Deswegen fragen wir zuerst nach einer Verallgemeinerung dieses Operators für die bilokale Theorie. Es gibt zwei solche Operatoren, die symmetrisch in beiden Koordinaten x'_μ und x''_μ sind, nämlich

$$2 \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \right) \quad \text{und} \quad 4 \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \quad (8)$$

oder auch eine lineare Kombination der beiden

$$2 c_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial x''^2_\mu} \right) + 4 c_2 \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \quad (9)$$

mit $c_1 + c_2 = 1$. Führen wir also eine einzige Konstante C ein

$$c_1 = \frac{1+C}{2}, \quad c_2 = \frac{1-C}{2}, \quad (10)$$

¹⁾ Zum Beispiel $A_\mu = a r_\mu$, $B_{\mu\nu} = b r_\mu r_\nu$, wo a und b Funktionen der Invariante r^2_μ sein können.

dann läßt sich (9) auch wie folgt schreiben

$$\square\square \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \right)^2 + C \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \right)^2. \quad (11)$$

Wir glauben, daß (11), mit einem dimensionslosen, noch willkürlichen C , die richtige Verallgemeinerung des D'ALEMBERTschen Operators ist. Mit Hilfe der YUKAWAschen Variablen (3) kann man (11) auch so schreiben

$$\square\square = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + 4C \frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2} = -p_\mu^2 - 4Ck_\mu^2. \quad (11')$$

Nun liegt der Gedanke nahe, eine verallgemeinerte SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung

$$(\square\square - \kappa^2) \psi = 0 \quad (12)$$

zu versuchen, wo

$$4ck_\mu^2 + \kappa^2 = m^2 \quad (13)$$

die Rolle eines Massenoperators spielt. Auf eine so einfache Weise werden wir aber nicht zum Ziele kommen können. Der Grund für die Mißerfolge liegt einfach darin, daß der Operator k_μ^2 ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Wir glauben, daß die soeben besprochene verallgemeinerte Wellengleichung grundsätzlich doch richtig ist, aber der Formalismus ist noch zu weit gefaßt und muß durch passende Nebenbedingungen etwas eingeeengt werden.

3. In der bilokalen Theorie haben wir es mit einem achtdimensionalen Raume der Variablen x_μ und r_μ zu tun. Dieser Raum scheint etwas zu weit gefaßt, so daß man versuchen muß, diesen Raum durch Nebenbedingungen einzuengen. Die durch Nebenbedingungen eingeführten Zwangskräfte müssen natürlich den Invarianzforderungen genügen. Nun ist unser Raum nicht nur lorentzinvariant. Eine etwas mehr abstrakte Art der Beschreibung dieses Raumes¹⁾, auf die wir hier nicht eingehen wollen, zeigt, daß dieser Raum der BORNschen Reziprozitätstransformation (23) gegenüber invariant ist. In den YUKAWAschen Bezeichnungen lautet die BORNsche Transformation

$$\lambda^{-1}r_\mu \rightarrow \lambda p_\mu, \quad \lambda p_\mu \rightarrow -\lambda^{-1}r_\mu, \quad (14)$$

wo λ eine Konstante von der Dimension einer Länge ist. Wir nehmen an, daß die Nebenbedingungen invariant gegenüber (14) sein müssen. Diese Eigenschaft besitzen die folgenden Nebenbedingungen (24)

$$r_\mu p_\mu \psi = 0, \quad (\lambda^{-2}r_\mu^2 + \lambda^2 p_\mu^2) \psi = 0. \quad (15)$$

Die Bedeutung der Bedingungen (15) wird besonders übersichtlich für ein ruhendes Teilchen (d. h. für eine Funktion $\psi_{(R)}$, die eine Eigenlösung der Operatoren p_μ zu den Eigenwerten $p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0$ und $p'_4 = im$ ist). In diesem Falle reduzieren sich die Nebenbedingungen auf

$$imr_4 \psi_{(R)} = 0, \quad (\lambda^{-2}r_\mu^2 - \lambda^2 m^2) \psi_{(R)} = 0. \quad (16)$$

¹⁾ Mit Hilfe von Lage- und Verrückungsoperatoren x_μ, d_μ .

Die erste Bedingung sagt aus, daß die Wellenfunktion für alle Werte r_μ identisch Null sein muß mit Ausnahme von $r_4 = 0$ (\vec{r} beliebig). Die zweite Bedingung bedeutet dann, daß die Wellenfunktion für alle Werte \vec{r} mit Ausnahme von $\vec{r}^2 = \lambda^4 m^2$ verschwindet. Zwei von den acht Variablen (r_4 und $r = |\vec{r}|$) werden also eliminiert, und die (einem ruhenden Teilchen entsprechende) Wellenfunktion hängt, außer von x_μ , nur noch von den Winkelkoordinaten ϑ , ψ ab. Man darf also sagen, daß das Teilchen durch eine Kugeloberfläche mit dem Radius $r = \lambda^2 m$ repräsentiert ist. Entsprechendes gilt auch für bewegte Teilchen.

4. Unsere verallgemeinerte Wellengleichung (12) steht mit den Nebenbedingungen noch im Widerspruch: es kommen dort die Verrückungen k_4 und k_r vor, die den Nebenbedingungen widersprechen und eliminiert werden müssen. Die relativistische Verallgemeinerung von k_4^2 ist

$$\frac{1}{p_\varrho^2} (p_r k_r)^2 = - \frac{1}{m^2} (p_r k_r)^2 = - \frac{\lambda^4}{r^2} (p_r k_r)^2 = - \frac{\lambda^4}{r_\varrho^2} (p_r k_r)^2, \quad (17)$$

wo von der zweiten Nebenbedingung ($r = \lambda^2 m$) und von der ersten ($r_4 = 0$) Gebrauch gemacht worden ist. Die relativistische Verallgemeinerung von

$$\begin{aligned} k_r^2 &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = - \left(\frac{r_i r_j}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} + 2 \frac{r_i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \right) \\ &= \frac{r_i r_j}{r^2} k_i k_j - 2 i \frac{r_i}{r^2} k_i \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{ist}^1) \quad \frac{1}{r_\varrho^2} (r_\mu r_\nu k_\mu k_\nu - 2 i r_\mu k_\mu), \quad (19)$$

wo von der ersten Nebenbedingung Gebrauch gemacht worden ist. Die beiden Glieder (17) und (19) müssen aus der Gleichung (12) ausscheiden, so daß die endgültige Form der Wellengleichung (12) ist

$$\left\{ -p_\mu^2 - x^2 - 4C \left[k_\mu^2 + \frac{1}{r_\varrho^2} (\lambda^4 (p_\mu k_\mu)^2 - r_\mu r_\nu k_\mu k_\nu + 2 i r_\mu k_\mu) \right] \right\} \psi(x, r) = 0. \quad (20)$$

Die in (20) vorkommenden zusätzlichen Glieder können als von den Bindungen herrührende Zwangskräfte interpretiert werden.

Für ein ruhendes Teilchen $\psi_{(R)}$ reduziert sich (20) auf

$$\left[m^2 - x^2 - 4C \left(k_\mu^2 - k_4^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \psi_{(R)} = 0 \quad (20')$$

$$\text{oder} \quad \left[m^2 - x^2 - 4C \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi_{(R)} = 0 \quad (20'')$$

¹⁾ i und j wird summiert von 1 bis 3, dagegen μ , ν , ϱ von 1 bis 4.

wo $l(l+1)$ das Quadrat des Impulsmomentes im r -Raume bedeutet. Mit Hilfe der ersten Nebenbedingung führt das auf eine Eigenwertgleichung der Masse

$$m^2 - \kappa^2 - 4C \frac{l(l+1)}{\lambda^4 m^2} = 0. \quad (21)$$

Für eine positive Konstante C sind die Eigenwerte der Masse

$$m_l^2 = \frac{\kappa^2}{2} + \sqrt{\frac{\kappa^4}{4} + 4C \frac{l(l+1)}{\lambda^4}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Wir sehen also, daß die verallgemeinerte Wellengleichung (beschränkt durch die reziproken Nebenbedingungen) auf ein diskretes Massenspektrum führt, das aufs engste mit dem Problem eines Rotators im r -Raume verknüpft ist. Deswegen können wir den Namen „Rotatormodell der Elementarteilchen“ einführen.

Wir können fragen, wie man die zusätzlichen Rotations-Freiheitsgrade interpretieren soll, und wie sich diese Freiheitsgrade (außer in den Masseneigenwerten) physikalisch offenbaren.

Zuerst (an eine Arbeit von PAIS (25) anknüpfend) glaubte ich, daß zusätzliche Freiheitsgrade mit dem isotopen Spin etwas zu tun haben müßten. Diese Vermutung erwies sich aber als unrichtig. Einer Beweismethode von FIERZ (26) folgend kann man zeigen, daß die höheren Massenzustände mit höheren Werten des (gewöhnlichen) Spins verknüpft sind, so daß $l = 0, 1, 2, \dots$ zugleich Spin und Masse numeriert.

Nehmen wir an, daß die bilokale Funktion $\psi(x, r)$ ein Pseudoskalar ist, dann beschreibt (22) das Massenspektrum der Pion-Familie, dessen Repräsentanten, der Reihe nach, die Spinwerte $0, 1, 2, \dots$ besitzen.

Wenn wir also m_0 mit der Masse des π -Mesons ($273 m_e$) und m_1 mit der Masse des τ -Mesons ($966 m_e$) identifizieren, dann lassen sich die Konstanten $C\lambda^{-4}$ und κ aus (22) bestimmen und für die höheren Massen folgt:

$$m_2 = 1260 m_e, \quad m_3 = 1500 m_e, \text{ etc. } \dots \quad (23)$$

Diese Werte scheinen im Einklang zu stehen mit den (allerdings sehr knappen) experimentellen Daten, die mit dem Kosmotron in Brookhaven gewonnen wurden (FOWLER und THORNDIKE $1280 \pm 80 m_e$, $1290 \pm 90 m_e$) und mit den Ergebnissen von PERKINS und FOWLER ($1485 \pm 50 m_e$ ¹⁾).

Es bleibt noch abzuwarten, ob die auf diesem Wege erhaltenen Massenspektren mit den zukünftigen, mehr exakten experimentellen Ergebnissen übereinstimmen werden. Jedenfalls können wir schon jetzt sagen, daß die bilokale Theorie imstande ist, wenigstens qualitativ die höheren Masseneigenwerte der Elementarteilchen und die „Zoologie der Partikelfamilien“ zu erklären.

5. Zum Abschluß wollen wir noch zeigen, daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen der bilokalen Theorie und der Formfaktor-Theorie. Die bilokalen Wellenfunktionen sind eigentlich wie Matrizen zu behandeln

$$\psi(x', x'') = (x' | \psi | x'') \quad (24)$$

¹⁾ Glasgow-Konferenz, Juli 1954.

mit der gewöhnlichen Multiplikationsregel, d. h.

$$(x' | \psi^* \psi | x'') = \int (x' | \psi^* | x''') d^4 x''' (x''' | \psi | x'). \quad (25)$$

Wenn wir also einen Wechselwirkungsterm von der Art

$$L'(x) = g \psi^*(x) \varphi(x) \psi(x) \quad (26)$$

(wo φ ein reelles Feld ist) in der bilokalen Theorie nachahmen wollen, dann müssen wir schreiben

$$(x' | L' | x'') = g \iint (x' | \psi^* | x''') d^4 x''' (x''' | \varphi | x^{IV}) d^4 x^{IV} (x^{IV} | \psi | x'') \quad (26')$$

und das Wirkungsintegral definieren als

$$W' = \iint d^4 x' d^4 x'' (x' | L' | x''). \quad (27)$$

Nehmen wir einfachheitshalber an, daß nur das reelle Feld bilokal ist, während das komplexe Feld ein gewöhnliches lokales Feld ist, also

$$(x' | \psi | x'') = \delta(x' - x'') \psi(x'') \quad (28)$$

In diesem Falle bekommen wir

$$\begin{aligned} W' &= g \iint d^4 x' d^4 x'' \psi^*(x') (x' | \varphi | x'') \psi(x'') \\ &= g \iint d^4 x d^4 r \psi^* \left(x + \frac{r}{2} \right) \varphi(x, r) \psi \left(x - \frac{r}{2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Daraus sehen wir, daß die Argumente von ψ und ψ^* verschieden sind, was mit den Ansätzen der Formfaktorthorie eng verwandt ist. Der Formfaktor ist jetzt aber in der bilokalen Funktion $(x' | \varphi | x'')$ selbst verborgen. Die bilokale Feldtheorie vermag also die Form des Formfaktors sozusagen „von selbst“ zu bestimmen.

Es scheint sehr wahrscheinlich, daß eine zukünftige Feldtheorie, die imstande sein wird die Konvergenzschwierigkeiten zu vermeiden und die energiereichen Umwandlungen befriedigend zu beschreiben, eine bilokale Theorie sein muß.

Anhang

Wir betrachten einen beliebigen Operator G und eine unitäre Transformation

$$G \rightarrow U^{-1} G U. \quad (A. 1)$$

Ist U eine infinitesimale unitäre Transformation, dann läßt sie sich bekanntlich schreiben in der Form

$$U = 1 - iF, \quad (A. 2)$$

wo F ein infinitesimaler hermitischer Operator ist. Man pflegt zu sagen, daß der Operator F die Transformation U induziert.

Die Änderung des Operators G ist

$$\delta G = U^{-1} G U - G = i[F, G], \quad (A. 3)$$

womit die Formel (31) in Abschnitt I bewiesen ist.

Führen wir eine Darstellung ein, also die Bra- und Ketvektoren¹⁾ der Basis $\langle \alpha' |$ und $|\alpha'\rangle$. Bekanntlich läßt sich G als eine Matrix $\langle \alpha' | G | \alpha'' \rangle$ in dieser Darstellung schreiben. Die Gleichung (A. 3) wird in dieser Darstellung

$$\langle \alpha' | \delta G | \alpha'' \rangle = i \langle \alpha' | [F, G] | \alpha'' \rangle. \quad (\text{A. 4})$$

Statt den Operator G selbst zu transformieren, kann man dieselbe Änderung (A. 4) seiner Matricelemente auch durch eine passende Änderung der Basis

$$|\alpha'\rangle \rightarrow U |\alpha'\rangle, \quad \langle \alpha' | \rightarrow \langle \alpha' | U^{-1} \quad (\text{A. 5})$$

erzielen, weil aus (A. 5) folgt

$$\begin{aligned} \delta \langle \alpha' | G | \alpha'' \rangle &= \langle \alpha' | U^{-1} G U | \alpha'' \rangle - \langle \alpha' | G | \alpha'' \rangle \\ &= i \langle \alpha' | [F, G] | \alpha'' \rangle \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

in Übereinstimmung mit (A. 4).

Durch die Änderung der Basis (A. 5) werden auch die Komponenten eines beliebigen Bra-vektors $\langle |$ geändert

$$\delta \langle | \alpha' \rangle = \langle | U | \alpha' \rangle - \langle | \alpha' \rangle = -i \langle | F | \alpha' \rangle; \quad (\text{A. 7})$$

Entsprechendes gilt auch für die Komponenten eines beliebigen Ketvektors

$$\delta \langle \alpha' | \rangle = \langle \alpha' | U^{-1} | \rangle - \langle \alpha' | \rangle = i \langle \alpha' | F | \rangle. \quad (\text{A. 8})$$

Betrachten wir jetzt eine Transformationsmatrix $\langle \alpha' | \beta' \rangle$ zwischen zwei Vektorsystemen der Basen $|\alpha'\rangle$ und $|\beta'\rangle$. Eine gleichzeitige infinitesimale Transformation der beiden Systeme von Basisvektoren, induziert durch zwei unabhängige Transformationen

$$U_\alpha = 1 - iF_\alpha, \quad U_\beta = 1 - iF_\beta, \quad (\text{A. 9})$$

ist nach (A. 5), (A. 7) und (A. 8)

$$\delta \langle \alpha' | \beta' \rangle = \langle \alpha' | U_\alpha^{-1} U_\beta | \beta' \rangle - \langle \alpha' | \beta' \rangle = i \langle \alpha' | F_\alpha - F_\beta | \beta' \rangle, \quad (\text{A. 10})$$

womit die Formel (32) bewiesen ist.

Zakład Fizyki teoret. Uniwersytet M. KOPERNIKA, Toruń, Polska

Literatur

- (1) WATAGHIN, G., Z. Phys. **86**, 92, 1934.
- (2) MARCH, A., Z. Phys. **104**, 93, 161, 1936.
- (3) HEISENBERG, W., Ann. d. Phys. **82**, 20, 1938.
- (4) MARKOW, W. Zurn. exp. teor. Fiz. **25**, 527, 1953.
- (5) MC MANUS, H., Proc. Roy. Soc. A **195**, 323, 1948.
- (6) CHRETIEN, M. und PEIERLS, R. E., Nuovo Cim. **10**, 668, 1953.
- (7) RAYSKI, J., Phil. Mag. **42**, 1289, 1951.
- (8) BLOCH, C., Dan. Mat. Fys. Medd. **27**, Nr. 8, 1952.
- (9) KRISTENSEN, P., and MØLLER, C., Dan. Mat. Fys. Medd. **27**, Nr. 7, 1952.

¹⁾ DIRAC P. A. M., Quantum Mechanics, Oxford 1947, III. Auflage.

- (10) HEISENBERG, W., Z. Phys. **120**, 513, 1943.
- (11) YANG, C. N., and FELDMAN, D., Phys. Rev. **79**, 972, 1950.
- (12) PAULI, W., Nuovo Cim. **10**, 648, 1953.
- (13) RAYSKI, J., Acta Phys. Pol. **18**, 95, 1954.
- (14) ZIMMERMANN, W., Z. Phys. **185**, 473, 1953, s. auch H. KITA, Progr. Theor. Phys. **10**, 231, 1953.
- (15) RZEWUSKI, J., Acta Phys. Pol. **12**, 14, 1953; Nuovo Cim. **10**, 182, 1953.
- (16) ONO, Y., Progr. Theor. Phys. **10**, 125, 1953.
- (17) RAYSKI, J., Acta Phys. Pol. **18**, 15, 1954.
- (18) SCHWINGER, J., Phys. Rev. **82**, 914, 1951.
- (19) HAYASHI, C., Progr. Theor. Phys. **10**, 533, 1953.
- (20) YUKAWA, H., Phys. Rev. **77**, 219, 1950, **80**, 1047, 1950.
- (21) YUKAWA, H., Phys. Rev. **91**, 415, 1953.
- (22) RAYSKI, J., Acta Phys. Pol. **18**, 77, 1954.
- (23) BORN, M., Rev. Mod. Phys. **21**, 465, 1949.
- (24) RAYSKI, J., Proc. Phys. Soc. **64**, 957, 1951; Acta Phys. Pol. **11**, 109, 1951.
- (25) PAIS, A., Physica **19**, 869, 1953.
- (26) FIERZ, M., Helv. Phys. Acta. **23**, 412, 1950.