

- 3 GAMER, U.; BENERI, M. V.: Residual stress at the periphery of a coldworked hole. Z. angew. Math. Mech. (to be published).  
 4 GAMER, U.: The effect of a special hardening law on continuity in elastic-plastic problems with rotational symmetry. Forsch. Ing.-Wes. 55 (1989), 60–64.  
 5 GAMER, U.: The expansion of the elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening. Int. J. Mech. Sci. 30 (1988), 415–426.

Address: Prof. Dr. U. GAMER; M. BENERI, Institut für Mechanik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien, Österreich

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 302–T 304

Akademie Verlag

LE, K. C.; STUMPF, H.

## A New Look at Finite Strain Elastoplasticity from the Thermodynamic Viewpoint

MSC (1980): 73U05

### 1. Introduction

When dealing with elastoplasticity at finite strain, one should take into account the following two phenomena. The first one is the irreversibility of the plastic deformation leading to the dissipation of energy [1] and the increase of entropy [2]. The second one concerns the microscopical mechanism of slip and the crucial idea of the relaxed intermediate configuration used for expressing the explicit independence of the free energy on the preceding plastic strain [3], [4]. Therefore, thermodynamic requirements formulated with respect to the relaxed intermediate configuration should play a key role in establishing the constitutive equations for elastoplastic bodies. The present paper is devoted to this problem.

To introduce the intermediate configuration we decompose the motion of an elastoplastic body into a plastic motion in some relaxed space  $\mathcal{R}^3$ , considered as Riemannian manifold ([5], [6]), and an elastic motion

$$\varphi = \varphi^e \circ \varphi^p. \quad (1)$$

This leads to the multiplicative decomposition of the deformation gradient [3], [4] (see Fig. 1)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p. \quad (2)$$

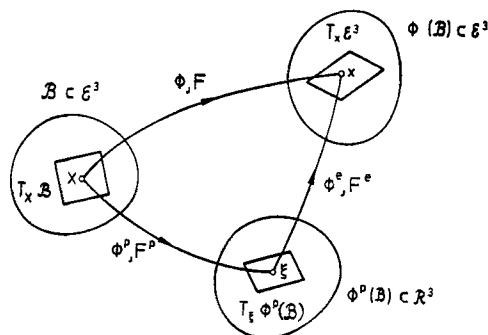


Fig. 1. Schematic sketch of reference, intermediate and spatial configurations, their tangent spaces and the associated multiplicative decomposition of the deformation gradient

In contrast to [3], [4] we view the relaxed space rather as a primitive concept not implied by the multiplicative decomposition law. The kinematics of strain is next developed [7], with strain measures defined on tangent spaces to the reference, spatial and intermediate configuration, respectively. Of special interest is the definition of objective rates for tensors referred to the intermediate and spatial configuration. This problem becomes very actual in our case, because the time-dependent intermediate configuration is chosen as reference configuration for the thermodynamical requirements. In this paper we use the intermediate Lie derivatives as objective rates for the intermediate strain tensors ([7, 8]).

### 2. Balance equations in intermediate description

Within the framework of classical mechanics and field theories, we formulate a set of balance equations and entropy production inequality in integral form with respect to the spatial configuration for an arbitrary volume. Equivalent sets of equations in material and intermediate description for an elastoplastic body at finite strain can be obtained by

changing variables in the former equations and passing to their localized forms. In intermediate description we have

$$\bar{D}_t \bar{\varrho} + \bar{\varrho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}^p = 0 \quad (\text{balance of mass}), \quad (3)$$

$$\bar{\varrho} \bar{D}_t \mathbf{v} = \bar{\varrho} \bar{\boldsymbol{\beta}} + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad (\text{balance of momentum}), \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{s}}^T, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{s}} \quad (\text{balance of moment of momentum}), \quad (5)$$

$$\bar{\varrho} \bar{D}_t \bar{e} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\varrho} \bar{r} + \bar{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{d}} \quad (\text{balance of energy}), \quad (6)$$

$$\bar{\varrho} (\bar{\eta} \bar{D}_t \bar{\theta} + \bar{D}_t \bar{\psi}) - \bar{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{d}} + \frac{\nabla \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \cdot \bar{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (\text{entropy production inequality}), \quad (7)$$

$$\bar{\psi} = \bar{e} - \bar{\eta} \bar{\theta} \quad (\text{definition of free energy}). \quad (8)$$

Here  $\bar{\varrho}$  is the mass density,  $\bar{\mathbf{v}}^p$  the velocity of the plastic flow,  $\mathbf{v}$  the total velocity of motion,  $\bar{\theta}$  the temperature field defined on the intermediate configuration. We denote by  $\boldsymbol{\tau}$  and  $\bar{\mathbf{s}}$  the “intermediate” first and second Piola-Kirchhoff stress tensors, respectively,  $\bar{e}$  the internal energy,  $\bar{\mathbf{q}}$  the heat flux vector,  $\bar{r}$  the heat source,  $\bar{\psi}$  the free energy and  $\bar{\eta}$  the entropy defined on the intermediate configuration. Here the symbol  $\bar{D}_t = \partial/\partial t + \bar{\mathbf{v}}^p \cdot \nabla$  is used to denote the material time derivative for quantities expressed in the intermediate picture.

### 3. Consequences of the entropy production inequality

The entropy production inequality (7) together with the following assumption about the functional form of the free energy

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{e}^c, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{g}}^{-1}) \quad (9)$$

leads to the inequality

$$\left( \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{e}^c} - \bar{s} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{e}}^c + \bar{\varrho} \left( \bar{\eta} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\theta}} \right) \bar{\mathbf{v}} \bar{\theta} - \left( \bar{\mathbf{s}} + 2 \bar{\varrho} \bar{\mathbf{g}}^{-1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{g}}^{-1}} \bar{\mathbf{g}}^{-1} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{e}}^p + \frac{\nabla \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \cdot \bar{\mathbf{q}} \leq 0. \quad (10)$$

Here  $\bar{\mathbf{v}}$  denotes the intermediate Lie derivative [8]. The inequality (10) can be used to substantiate the following new constitutive equations

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{e}^c}, \quad \bar{\eta} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\theta}}. \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \partial_{\mathbf{d}^p} \bar{\mathbb{D}}^p, \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{v} \partial_{\mathbf{q}} \bar{\mathbb{D}}^h, \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbb{D}}^h(\partial_{\mathbf{q}} \bar{\mathbb{D}}^h \cdot \bar{\mathbf{q}})^{-1}, \quad (12)$$

$$\bar{\mathbb{D}}^p = \bar{\mathbb{D}}^p(\bar{\mathbf{d}}^p, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{g}}^{-1}) \geq 0, \quad \bar{\mathbb{D}}^h = \bar{\mathbb{D}}^h(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{g}}) \geq 0. \quad (13)$$

The dissipation functions  $\bar{\mathbb{D}}^p$  and  $\bar{\mathbb{D}}^h$  are supposed to be positive definite, convex and lower-semi-continuous with respect to their arguments  $\bar{\mathbf{d}}^p$  and  $\bar{\mathbf{q}}$ , respectively. In (12) the symbol  $\partial$  is used to denote the sub-differential of convex functions. An example of the dissipation functions can be given for the case of isotropic materials with a generalization of von Mises' and Fourier's laws referred to the intermediate configuration [9].

We present also the above constitutive equations in material description by pulling them back with  $\mathbf{F}^p$  and those in spatial description by pushing forward with  $\mathbf{F}^c$ , in full agreement with the covariance principle.

Constitutive equations in material description

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E} - \mathbf{E}^p, \Theta, \mathbf{B}^p), \quad \mathbf{B}^p = (\mathbf{C}^p)^{-1} = (\mathbf{G} + 2\mathbf{E}^p)^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{S} = \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{N} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}, \quad (15)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + 2\varrho_0 \mathbf{B}^p \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^p} \mathbf{B}^p, \quad (16)$$

$$\bar{\mathbb{D}}^p(\dot{\mathbf{E}}^p, \Theta, \mathbf{B}^p) = \begin{cases} \sigma_0 (2/3)^{1/2} [\mathbf{B}^{pAC} \mathbf{B}^{pBD} \dot{\mathbf{E}}_{AB}^p \dot{\mathbf{E}}_{CD}^p]^{1/2} & \text{if } \mathbf{B}^{pAB} \dot{\mathbf{E}}_{AB}^p = 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (17)$$

$$\mathbf{P} = \partial_{\dot{\mathbf{E}}^p} \bar{\mathbb{D}}^p, \quad \mathbf{Q}^A = \varkappa \mathbf{B}^{pAB} \frac{\partial \Theta}{\partial X^B}. \quad (18)$$

## Constitutive equations in spatial description

$$\psi = \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \mathbf{b}^e), \quad \mathbf{b}^e = (\mathbf{c}^e)^{-1} = \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{g}}^{-1} \mathbf{F}^{eT}, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\sigma} + 2\rho \mathbf{b}^e \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}^e}, \quad (21)$$

$$\varphi(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{c}^e) = \begin{cases} 0 & \text{if } [(c_{ac}^e c_{bd}^e - \frac{1}{3} c_{ac}^e c_{cd}^e) p^{ab} p^{cd}]^{1/2} \leq \sigma_0 (2/3)^{1/2} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{e} - \mathbf{e}^e) = \partial_{\boldsymbol{\pi}} \varphi(\boldsymbol{\pi}, \theta, \mathbf{c}^e), \quad q^a = \kappa b^{cab} \frac{\partial \theta}{\partial x^b}. \quad (23)$$

Here  $\boldsymbol{\pi}$  is related to  $\mathbf{p}$  by

$$\boldsymbol{\pi} = \bar{\mathbf{J}}/\mathbf{J} \mathbf{p} = \bar{\mathbf{J}}/\mathbf{J} \varphi_*(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{J}}/\mathbf{J} \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{p}} \mathbf{F}^{eT}. \quad (24)$$

As we can see from (14), (17), (18) the constitutive equations in the material description depend also on the plastic deformation  $\mathbf{B}^p$ . The same is valid for the constitutive equations (19), (22), (23) in the spatial description, which depend also on the elastic deformation  $\mathbf{b}^e$ . Thus, within the spatial (material) description, anisotropy appears at large elastic (plastic) strain. Special attention is focused to the cases of small elastic/large plastic strain deformation (metal plasticity) and rigid-plastic deformation [9]. In these cases the plastic stress tensor can approximately be replaced by the Cauchy stress tensor.

## References

- 1 FARREN, W. S.; TAYLOR, G. I.: The heat developed during plastic extension of metals. Proc. Roy. Soc. (London) A **107** (1925), 422–451.
- 2 ZIEGLER, H.: An attempt to generalize Onsager's principle, and its significance for rheological problems. ZAMP **9** (1958), 749–763.
- 3 LEE, E. H.; LIU, D. T.: Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. J. Appl. Phys. **38** (1967), 19–27.
- 4 LEE, E. H.: Elasto-plastic deformation at finite strains. J. Appl. Mech. **36** (1969), 1–6.
- 5 ECKART, C.: The thermodynamics of irreversible processes. 4. The theory of elasticity and anelasticity. Phys. Rev. **73** (1948), 373–382.
- 6 SEDOV, L. I.: Foundations of the non-linear mechanics of continua. Pergamon Press, Oxford 1966.
- 7 STUMPF, H.: Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity. J. Plasticity 1993 (to appear).
- 8 STUMPF, H.; BADUR, J.: On missing links of rate-independent elastoplasticity at finite strains. Mech. Res. Comm., Vol. **17** (5) (1990), 353–364.
- 9 LE, K. C.; STUMPF, H.: Constitutive equations for elastoplastic bodies at finite strain: thermodynamic implementation. Acta Mechanica 1993 (to appear).

Address: Prof. Dr.-Ing. H. STUMPF; Dr. Phys. Math. Sc. K. CH. LE, Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Postfach 10 21 48, D-W-4630 Bochum 1, Germany

## Modelling of the Cyclic Loading of Metals Using Boundary Element Method

MSC (1980): 73E99

The boundary element method is already a well established tool for the numerical simulations of elastoplastic problems. With the support of the updated-Lagrange procedure it was possible to model the cyclic loading/unloading and alternate loading with the isotropic hardening of material. Due to the loading of elastoplastic material, the plastic zones occur and cause residual stresses in the interior during unloading. The tensile and bending cases were considered. The results were compared also with the experiment.

### 1. Problem explanation

According to praxis, most of the steel constructions can resist pulsating or even alternating loadings. Many questions arise: where the plastic zone appears, which strains and global deformations occur, what is the distribution of the stresses after the loading/unloading cycles and what is the amount of residual stresses.

Some answers to these questions shall be given in this paper.

### 2. Basic elastoplastic formulations

The mechanical properties of materials may be divided into elastic, plastic and viscous ones. For the purpose of our elastoplastic formulation the viscous behaviour shall be neglected. Within the elastoplastic formulation the basic equations of mechanics should be considered also on increment (kinematic, equilibrium and compatibility equations). The seat of the plasticity can be checked with the yield criterion (according to Mises):

$$F(S_{ij}, k) = \frac{2}{3} S_{ij} S_{ij} - k^2 = 0 \quad (1)$$

where  $k$  denotes uniaxial yield stress and  $S$  deviatoric tensor components.

The flow rule (Prandtl-Reuss equation) can be written as:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} S_{ij} \quad (2)$$

where  $\dot{\lambda} > 0$  denotes the proportionality factor.

The formal multiplication of the above expressions with time increment ( $\Delta t > 0$ ) gives us the incremental formulation that is characteristic for classical time-independent elastoplastic presentation

$$\dot{u} \Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t} \Delta t = \Delta u \Rightarrow \dot{u}. \quad (3)$$

### 3. Boundary element method (BEM)

Today BEM represents an efficient tool for solving different engineering problems and is more than only an alternative method to other numerical approaches. In our case it is used for solving elastoplastic problems. A description of the BEM as well as its modification with the updated Lagrange procedure can be found in references [1, 3, 4] so only basic formulation shall be introduced in this paper.

#### Governing integral equations

The nonelastic formulation may be transcribed by the use of weighted residuals into the following integral formulation:

$$\int b_k^* u_k dV + \int p_k^* u_k dA = \int u_k^* b_k dV + \int u_k^* p_k dA + \int \varepsilon_{jk}^* (\sigma_{jk}^{th} + \sigma_{jk}^p) dV \quad (4)$$

which corresponds to the 2nd Betti's reciprocal theorem, extended for thermal and plastic contributions. Taking into account Kelvin's fundamental solutions (\*) and particular solutions due to thermal loads ( $u_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ), the above record can be rewritten analogously to Somigliana's identity for increments.

Applying a limit process makes it possible to transfer the source point on the surface, rendering the governing integral equation of the BEM for nonelastic computations ("initial strain" concept)

$$C_{ik}[u_k - \bar{u}_k] = \int_A [u_{ik}^*(p_k - \bar{p}_k) - p_{ik}^*(u_k - \bar{u}_k)] dA + \int_V \sigma_{ijk}^* \varepsilon_{jk}^p dV. \quad (5)$$

Stresses on the boundary can be evaluated directly from (5). The remainder stress components are obtained by numerical derivation. Stresses in the domain are obtained by the differentiation of equation (5) and assuming constant values of plastic strain in the close vicinity of internal points the following formulation for the plane strain case can be obtained:

$$\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = \int_A [U_{kij}^*(p_k - \bar{p}_k) - p_{kij}^*(u_k - \bar{u}_k)] dA - \delta_{ij} \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \theta + \int_V \sum_{ijk}^* \varepsilon_{km}^p dV - D_{ij}[\varepsilon_{km}^p(\xi)]. \quad (6)$$

#### Algebraisation of the integral equation

Performing the discretisation with boundary elements and internal integration cells, and evaluating all source nodes on the contour, equation (5) yields a system of linear equations:

$$Ax = \underline{f} + \underline{S}\underline{\varepsilon}^p \quad (7)$$

where  $x$  represents the unknown boundary values.

The solution of the above system is:

$$\underline{x} = \underline{m} + \underline{K}_1 \underline{\varepsilon}^p. \quad (8)$$

A similar procedure is used for the evaluation of the stresses. For the unknown boundary values the solution of equation (8) is used, producing

$$\underline{\sigma} = \underline{n} + \underline{K}_2 \underline{\varepsilon}^p. \quad (9)$$

In engineering applications with small strains, large displacements can appear. So arised geometrical changes can not be neglected in the computation. In the BEM program ROBEL-PL, developed at the University of Maribor, the updated Lagrange routine (known in FEM) has been adopted. This routine is working as well with loading history informations and geometrical changes and changes of prescribed boundary conditions.

For the simulation of cyclic loading/unloading of the boundary pressure and displacements, the modification of ROBEL-PL code with "updated Lagrange" procedure has been utilized and is presented in Fig. 1.

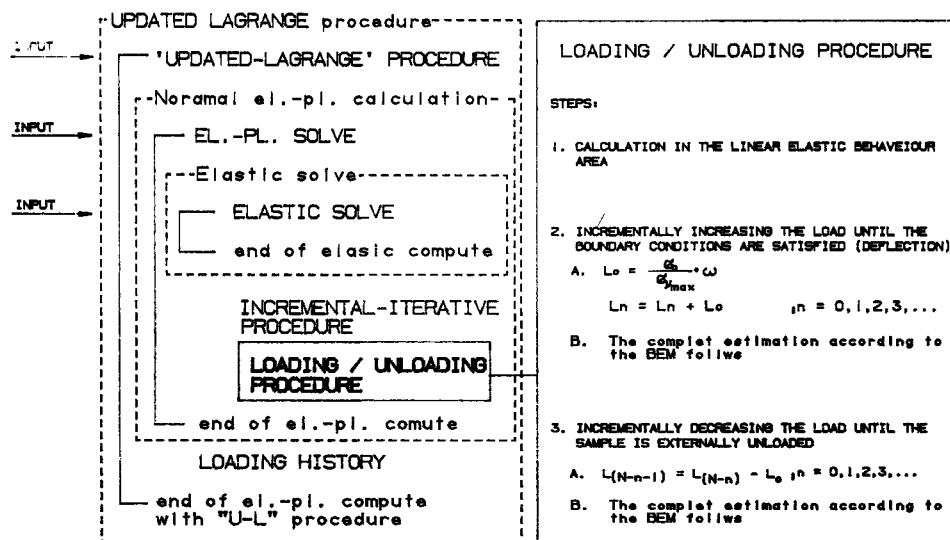


Fig. 1. Updated Lagrange technique for the simulation of cyclic loading/unloading

#### 4. Modelling of loading and unloading

##### 4.1 Loading and unloading of the tension sample

Based on the experimental diagram for ST E47 a semi-linear material model has been defined. Loading and unloading may be modeled as follows:

For the loading part of the first cycle the boundary displacements are determined. These boundary conditions are changed in the case of tractions for the unloading part. For the next cycles only the boundary traction/pressure should be gradually added or taken away.

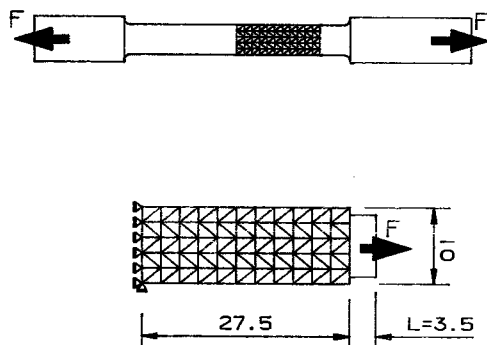


Fig. 2. A model of strain loaded profile

material: ST E47  
 $E = 210915 \text{ N/mm}^2$   
 mesh: 2D  
 boundary: NE = 32  
 NN = 36  
 interior: NP = 40  
 NC = 110

#### 4.2 Loading of the bending sample

In the first case we take the same material model as in the previous one and a model only a half of the flexion loaded bearer. The bearer should be bended to the required final displacement then, similarly to the previous case, the force, that appears as a consequence of the former prescribed displacement, should be gradually added or taken away (Fig. 3).

In the second case the bearer should be bended to the required final hanger and afterwards, as in the preceeding cases, it should be gradually loaded or unloaded in the opposite direction (Fig. 4).

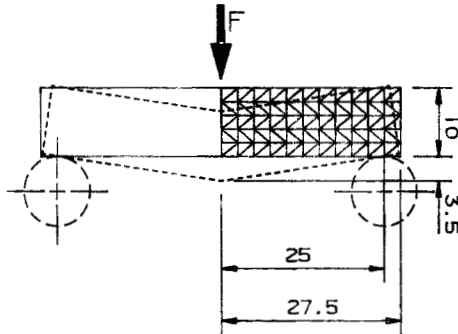


Fig. 3. Loading and unloading of the bending sample

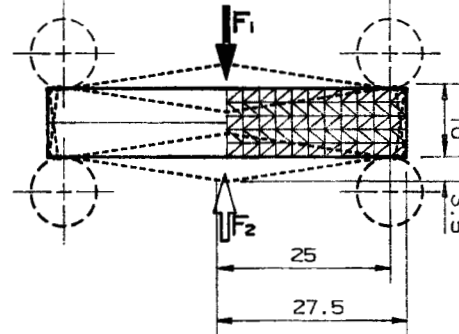


Fig. 4. Loading of the bending sample. The sign of load is changing

### 5. Results

#### 5.1 Loading and unloading of the tension sample

In this case the loaded boundary has constant tractions, which yields constant stress and deformation distribution in the interior. Fig. 5 shows the stresses and deformations in dependence of the boundary loading that cyclically increases and decreases.

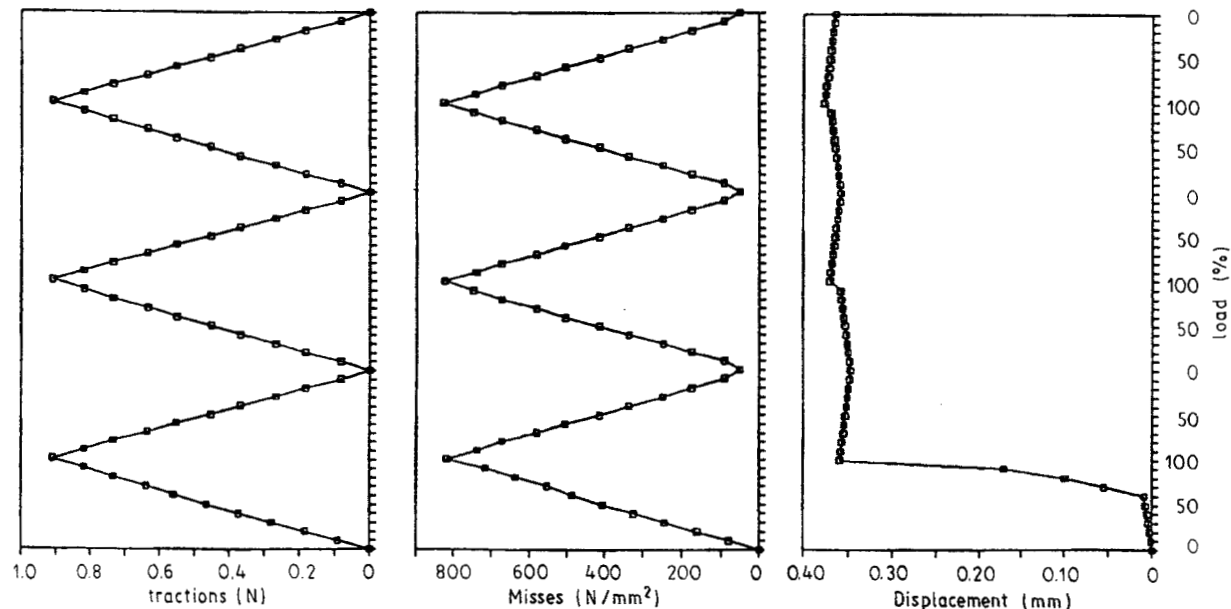


Fig. 5. Stress and deformation dependence on the strain loading

#### 5.2 Loading of the bending sample

The flexion loading causes the characteristic distribution of the stress on the transverse and longitudinal crosssections of the bearer. In Fig. 6 and 7 the given results are valid only for the lower (most loaded) fibre of the bearer. The characteristic stresses and deformations are shown in dependence of loading. The loading that cyclically increases and decreases is shown in Fig. 6. Similarly as in the previous case, Fig. 7 graphically illustrates the conditions in the lower fibre for the case of alternating loading.

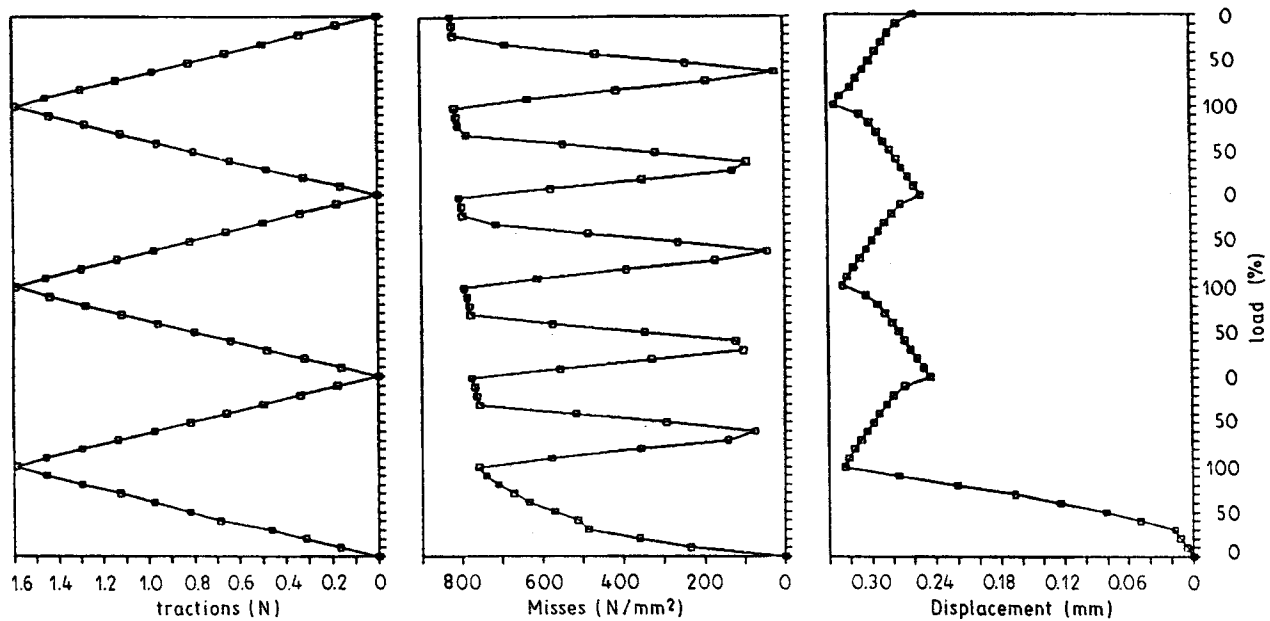


Fig. 6. Loading/unloading of the bending sample

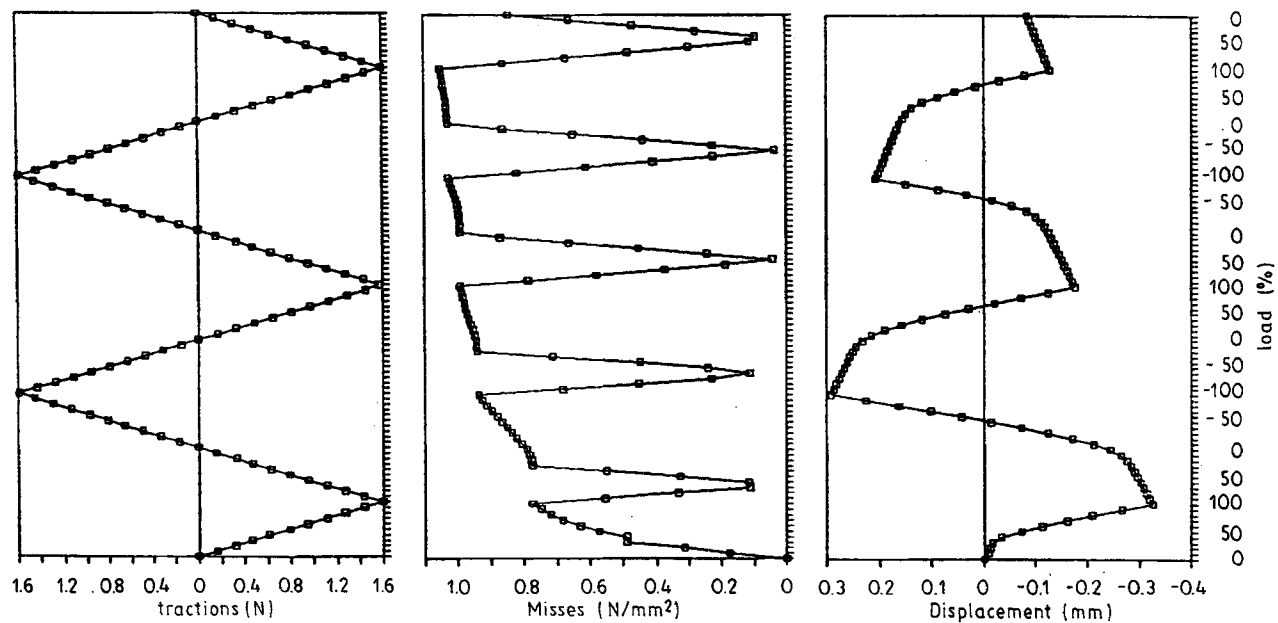


Fig. 7. Loading of the bending sample with alternate loading force

### 5.3 Comparison of the experiment with the numerical model

Fig. 8 illustrates the results obtained by numerical model and the results obtained by experiment for one period of flexion loading and unloading.

## 6. Conclusion

The observation of the results leads us to the conclusion that this procedure could be utilized for the analysis of the parts of the constructions which was subjected to a certain loading. The approach to the simulation of the processes of re-modelling is interesting. Also the information about the straightening of the material after the loading and unloading history can be obtained with the present simulation.

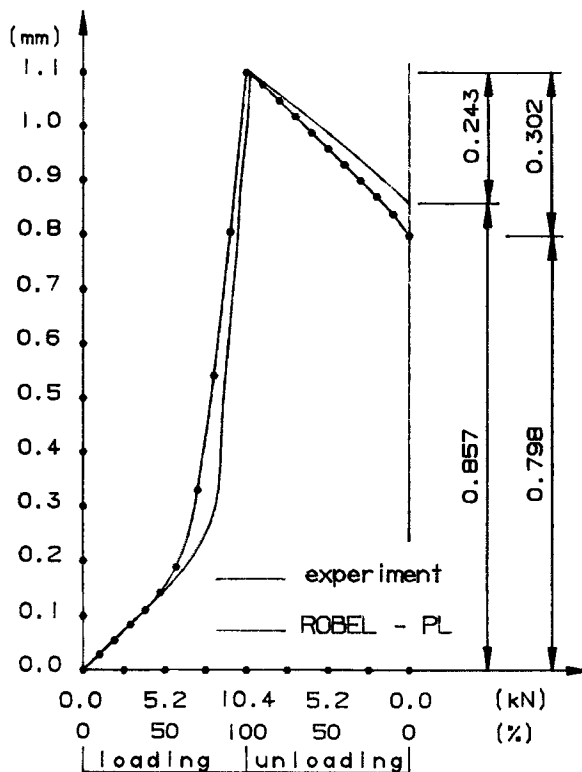


Fig. 8. Results of the numerical model and of the experiment

## References

- 1 BREBBIA, C.; TELLES, J. F.; WROBEL, L. C.: Boundary element techniques. Springer-Verlag, New York 1984.
- 2 MENDELSON, A.: Plasticity – theory and application. Mac Millan, New York 1968.
- 3 POTRČ, I.: Zur Behandlung temperaturabhängiger elastoplastischer Probleme mittels Radelementmethode. Dissertation, University of Erlangen 1987.
- 4 POTRČ, I.; GLUŠIČ, I.: Modelling of double bending and cutting using the boundary element method. ZAMM **71** (1991), T 605 – T 607.
- 5 POTRČ, I.; ALUJEVIČ, A.: Thermo-elasto-plastičnost z robnimi elementi. CAD/CAM PPPR, Znanstveni rad A3.02 Scientific paper, 59 – 64.
- 6 BATHE, H. J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1986.
- 7 OWEN, D. R. J.; FAWKES, A. J.: Engineering fracture mechanics: Numerical methods and applications. Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K. 1983.

Address: Dr.-Ing. IZTOK POTRČ, Msc. IVAN GLUŠIČ, University of Maribor, Smetanova 17, SLO-62000 Maribor, Slovenia

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **73** (1993) 4 – 5, T 309 – T 312

Akademie Verlag

TRITSCH, J. B.; WEICHERT, D.

## Shakedown of Elastic-Plastic Structures at Finite Deformations – a Comparative Study of Static Shakedown Theorems

MSC (1980): 73E99

A decomposition of total strain is proposed allowing for an analogy between geometrical linear and geometrical non-linear general shakedown theory. Then, a comparison with previous static theorems for geometrically non-linear cases is given.

### 1. Proposed decomposition of deformations

A global intermediate configuration is introduced in the deformation process, obtained by removing external loads from the considered structure. We get a multiplicative decomposition of the deformation gradient tensor, which differs from



LEE's decomposition [2] by the fact that the intermediate configuration corresponds to a state of deformation which satisfies the compatibility conditions

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)} \mathbf{F}^* . \quad (1)$$

We call  $\mathbf{F}^{(e)}$  the “free elastic deformation gradient”.  $\mathbf{F}^*$  represents the deformation gradient in the intermediate configuration containing plastic and residual elastic deformations. Introducing  $\mathbf{F}^p$  according to [2] leads to

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(e)} \mathbf{F}^{re} \mathbf{F}^p , \quad (2)$$

where  $\mathbf{F}^{re}$  denotes the residual elastic deformation gradient. Using (2) and the pull-back operations [4], it is possible to get an additive decomposition of Green-Lagrange strain tensor  $\mathbf{E}$  so that

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^* = \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{re} + \mathbf{E}^p = \mathbf{E}^e + \dot{\mathbf{E}}^p , \quad (3)$$

with, e.g.

$$\mathbf{E}^{re} = (\mathbf{F}^p)^T \frac{1}{2} ((\mathbf{F}^{re})^T \mathbf{F}^{re} - \mathbf{I}) \mathbf{F}^p , \quad (4)$$

where  $\mathbf{I}$  is the unity tensor and “ $()^T$ ” stands for “transposed”.

## 2. Sketch of demonstration for an extended theorem

As for the linear theory, we start from a quadratic form

$$W = \frac{1}{2} \int_{D_0} L_{IJKL} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (S_{KL}^r - \bar{S}_{KL}) dV_0 , \quad (5)$$

here  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{S}^r$ ,  $\bar{\mathbf{S}}$  ( $\mathbf{S}$  second Piola-Kirchhoff stress tensor), denote the constant elasticity tensor with the usual symmetries, the actual time dependent residual stresses, the time independent residual stresses, respectively, with

$$\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^{(e)} = \mathbf{S}^s \quad \text{and} \quad \mathbf{S}^r + \mathbf{S}^{(e)} = \mathbf{S} , \quad (6)$$

where  $\mathbf{S}^{(e)}$  is the stress state due to the elastic deformations  $\mathbf{E}^{(e)}$ ,  $\mathbf{S}^s$  is a safe state of stress and  $\mathbf{S}$  stands for the real state of stress. Assuming that the elastic responds of the material can be given by

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{L}^{-1} : \dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{L}^{-1} : (\dot{\mathbf{E}}^{(e)} + \dot{\mathbf{E}}^{re}) = \dot{\mathbf{S}}^{(e)} + \dot{\mathbf{S}}^r , \quad (7)$$

and noting that (3) can be used in the rate form

$$\dot{\mathbf{E}}^{re} = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^{(e)} - \dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\mathbf{E}}^* - \dot{\mathbf{E}}^p \quad \text{with} \quad \dot{\mathbf{E}}^* = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} ((\mathbf{F}^*)^T \mathbf{F}^* - \mathbf{I}) \right) , \quad (8)$$

the time derivative of  $W$  becomes finally

$$\dot{W} = - \int_{D_0} (S_{IJ} - S_{IJ}^s) (\dot{E}_{IJ}^p) dV_0 + \int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (\dot{E}_{IJ} - \dot{E}_{IJ}^{(e)}) dV_0 , \quad (9)$$

where the last integral vanishes. For the proof, one notes that the residual stresses verify the equilibrium equation in the intermediate configuration

$$(\Pi_{kJ})_{,J} = 0 \quad \text{in } V; \quad \Pi_{kJ} n_J = 0 \quad \text{on } S^F, \quad (\text{with } \Pi_{kJ} = F_{kI}^* S_{IJ}) \quad (10)$$

where  $\Pi$  is the first (non-symmetric) Piola-Kirchhoff stress tensor. Then from (8), (10) and the principle of virtual power follows

$$\int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (\dot{E}_{IJ} - \dot{E}_{IJ}^{(e)}) dV_0 = \int_{D_0} (\Pi_{kJ}^r - \bar{\Pi}_{kJ}) (\dot{F}_{kJ}^*) dV_0 = 0 , \quad (11)$$

with

$$\dot{F}_{kJ}^* = (V_k^*)_{,J} , \quad (12)$$

where  $V_k^*$  is a kinematically admissible velocity field. Because of the validity of the normality rule,  $\dot{W}$  is always negative if plastic flow occurs, otherwise zero. Thus  $W$  being by definition positive and bounded, one concludes just as in the classical theory by Melan that plastic deformations must stop growing beyond a certain instant of time.

### 3. Comparison with previous approaches

In MAIER's matrix approach [3], a reference configuration  $\bar{\Sigma}$  is assumed to be in equilibrium for external actions  $\bar{\mathbf{f}}$  represented by the stress state  $\bar{\mathbf{Q}}$ . MAIER studied what happened for additional loading  $\mathbf{f}(t)$  causing the additional stress state  $\mathbf{Q}(t)$  and gave the following linearized equilibrium equation

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q}(t) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (13)$$

which is supposed to contain the influence of the second order geometric effects. Here,  $\mathbf{C}^T$  is the divergence matrix operator used in linear theory and  $\mathbf{Q}$ , written as column matrix, is to be compared to  $\mathbf{S}$ . Applying our formulation to this approach, we get for (13) the following form:

$$\text{DIV}(\mathbf{S}(t)) + \mathbf{H}(t) \text{DIV}(\bar{\mathbf{S}}) + \underline{\mathbf{H}(t) \text{DIV}(\mathbf{S}(t))} + \text{DIV}(\mathbf{H}(t))(\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}(t)) = \mathbf{f}(t) \left( \text{with } \mathbf{H}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right). \quad (14)$$

One can identify both first terms of (13) and (14). The last expression is negligible because of linearisation in the vicinity of  $\bar{\Sigma}$ . But the underlined term may be neglected if and only if the stress  $\mathbf{S}(t)$  remains small compared to  $\bar{\mathbf{S}}$ , which restricts the domain of application.

WEICHERT [7] uses a tensorial formulation and the concept of a purely elastic comparison body. Then an additive decomposition of the total gradient tensor is carried out

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0, \quad (15)$$

where  $\mathbf{F}^0$  is the deformation gradient of the purely elastic body undergoing the same loading history as the real one. The multiplicative decomposition would give

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{F}^0 \quad (\text{and } \Delta \mathbf{F} = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{F}^0). \quad (16)$$

The commutation between (1) and (16) allows to get the following comparison expressions between our formulations

$$\mathbf{H}^0 \equiv \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{H}} \mathbf{F}^0 \equiv \mathbf{H}^*. \quad (17)$$

The inelastic part of the deformation is then defined by

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^0. \quad (18)$$

According to (17), the time derivative of  $\Delta \mathbf{E}$  may be written as

$$\begin{aligned} 2(\Delta \dot{\mathbf{E}}) = & 2\dot{\mathbf{E}}^* + ((\dot{\mathbf{H}}^*)^T \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* + \underline{(\mathbf{H}^*)^T \dot{\mathbf{H}}^{(e)} \mathbf{F}^*} + (\mathbf{H}^*)^T \mathbf{H}^{(e)} \dot{\mathbf{F}}^*) \\ & + ((\dot{\mathbf{H}}^*)^T \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* + \underline{(\mathbf{H}^*)^T \dot{\mathbf{H}}^{(e)} \mathbf{F}^*} + (\mathbf{H}^*)^T \mathbf{H}^{(e)} \dot{\mathbf{F}}^*)^T. \end{aligned} \quad (19)$$

Using (17), the underlined terms turn out to be the expression which generates the integral  $W_G$  in Weichert's formulation. Complete agreement with the presented approach is possible under additional assumptions. In its general form, the approach [7] is free of restrictive assumptions other than that of additive decomposition of total strains.

GROSS-WEEGE's tensorial approach [1] uses a two step loading. The structure is in equilibrium under loads  $\mathbf{f}^R$  at the end of the first one (configuration  $C^R$ ). In the next step, (loads  $\mathbf{f}^r$ , configuration  $C(t)$ ), the deformations are assumed to remain small compared to the first step. GROSS-WEEGE studied the shakedown behavior for the second step only, and therefore uses a purely comparison body related to the configuration  $C^R$ . He defines the difference deformation tensor by

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^r - \mathbf{E}^0. \quad (20)$$

Using the herein proposed multiplicative decomposition and GROSS-WEEGE's notations, one gets

$$2\hat{\mathbf{E}} = ((\hat{\mathbf{F}})^T \mathbf{F}^R + (\mathbf{F}^R)^T \hat{\mathbf{F}} + \underline{(\mathbf{F}^r)^T \mathbf{F}^r - (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{F}^0}) - (\mathbf{F}^0)^T \hat{\mathbf{F}} - (\hat{\mathbf{F}})^T \mathbf{F}^0, \quad (21)$$

where Gross-Weege's expression is put into brackets. According to his hypotheses, the underlined terms vanish and agreement with our approach is obtained. This shows that in the light of the proposed formulation, Gross-Weege has made judicious restrictive hypotheses corresponding to the application domain of his approach.

For the same problem, SACZUK [6] uses the multiplicative decomposition. Furthermore, he introduces a permutation of different orders of magnitude allowing to define explicitly the accuracy of the developed theory. The resulting expressions and equilibrium equations turn out to be the same as in our approach for this particular case.

## Static Shakedown Theorems for Non-Linear Cases

New Formulation	Weichert's Formulation [7]
$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\varepsilon)\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{(e)}\mathbf{F}^{er}\mathbf{F}^p$	$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{F}^0$
$\mathbf{H}^0 \equiv 0(\varepsilon) \quad \text{and} \quad \mathbf{H} \equiv 0(\varepsilon^{1/2})$ $\Rightarrow W_G = 0$ $\Rightarrow \text{both formulations are identical}$	
<p>two step loading:</p> <p><math>\mathbf{F} = \mathbf{F}^r\mathbf{F}^R</math> and <math>\mathbf{F}^r = \mathbf{F}^0\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{r(e)}\mathbf{F}^{r*}</math></p> <p>permutation <math>\mathbb{P}(\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^r)</math> of <math>(0(\varepsilon), 0(\varepsilon^{1/2}))</math>  <math>\rightarrow</math> Saczuk <math>\rightarrow</math></p> <p><math>\mathbf{H}^r\mathbf{F}^R</math> small, evolutions in the vicinity of <math>C^R</math>  <math>\rightarrow</math> Gross-Weege</p> <p><math>\bar{\Sigma} \equiv C^R</math> taken as reference configuration  <math>\Rightarrow \mathbf{F}^R \equiv \mathbf{I}</math></p> <p>and <math>\mathbf{H}^r \equiv \mathbf{H}(t)</math> small (linearization)  and <math>\mathbf{S}^r \ll \mathbf{S}^R</math> (additional restriction)  <math>\rightarrow</math> Maier</p> <p style="text-align: right;">Total linearization (linear theory)</p> <p><math>\rightarrow</math> Melan</p>	

## References

- 1 GROSS-WEERGE, J.: A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems. *Int. J. Plasticity* **6** (1990), 433–447.
- 2 LEE, E. H.: Some comments on elastic-plastic analysis. *Int. J. Solids Structures* **17** (1981), 859–872.
- 3 MAIER, G.: A shakedown matrix theory allowing for work-hardening and second-order geometrical effects. *Foundation in plasticity* 1973, 417–433.
- 4 MARSEN, J. E.; HUGHES, J. R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1983.
- 5 MELAN, E.: Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. *Ing. Arch.* **9** (1938), 116–126.
- 6 SACZUK, J.; STUMPF, H.: On statical shakedown theorems for non-linear problems. *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*, Nr. 47, Ruhr-Universität Bochum (1990).
- 7 WEICHERT, D.: On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures. *Int. J. Plasticity* **2** (1986) 2, 135–148.

*Address:* Prof. Dr.-Ing. D. WEICHERT; J.-B. TRITSCH, Laboratoire de Mécanique de Lille, CNRS URA 1441, USTL-EUDIL, Département Mécanique, F-59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

## 2.2c EXPERIMENTELLE MECHANIK

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 313–T 316

Akademie Verlag

ADLER, P.

### Die Erfassung von Spannungszuständen in granularen Materialien mittels Testbohren

MSC (1980): 73C99

#### 1. Einleitung

Ausgehend von einer früheren theoretischen Arbeit [1] wird hier eine Erweiterung der Theorie über das Bohren in vorgespannte, felsartige Materialien für ein entfestigendes Materialverhalten dargestellt. Für die experimentell durchgeführten Bohrversuche soll im Gegensatz zu früheren Experimenten [2], [3] die in der Theorie verwendeten rotationssymmetrischen Bedingungen beibehalten bleiben. Nur so ist ein direkter Vergleich zwischen theoretisch ermittelten Werten und experimentellen Resultaten zulässig.

#### 2. Anwendung des Testbohrens im Bergbau

Eine der häufigsten Unfallursachen im Steinkohlenbergbau ist das Auftreten des translatorischen Gebirgsschlages. Dabei werden große Teile des zwischen den Nebengesteinen eingeklemmten Kohlenflözes mit großer Wucht in den anstehenden bergmännischen Hohlraum geschleudert. Der kritische Parameter für die Auslösung eines translatorischen Gebirgsschlages ist der Spannungszustand im Kohlenflöz. Um ihn zu ermitteln, werden Testbohrungen in die Tiefe des Kohlenflözes durchgeführt (Abb. 1). Die dabei anfallende Bohrmehlmasse pro Bohrvorschub dient als Maß für den Spannungszustand. Die Bohrmehlmasse kann hier die dem Bohrloch selbst entsprechende Masse bei weitem überschreiten.

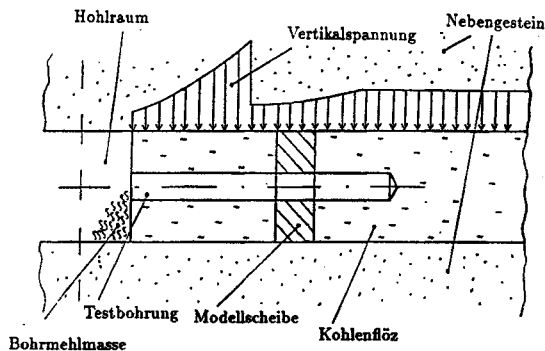


Abb. 1. Testbohrung in ein Kohleflöz

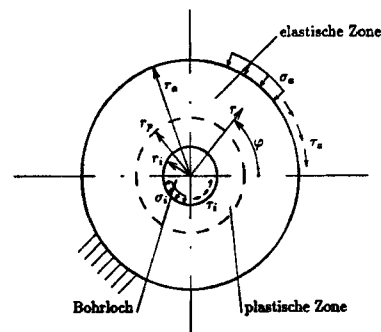


Abb. 2. Rotationssymmetrischer Modellansatz für das Testbohren

#### 3. Mechanische Modellbildung des Bohrvorganges

Als Modellansatz dient eine rotationssymmetrische Kreisscheibe mit ebener Formänderung, die senkrecht zur Bohrachse herausgeschnitten gedacht ist (Abb. 2). Der Außenrand sei fest eingespannt ( $u_r(r_a) = u_\phi(r_a) = 0$ ) und mit der Außenanfangslast  $\sigma_a$  vorgespannt. Aufgrund der Spannungskonzentration am Bohrloch erfolgt die Ausbildung einer plastischen Zone um das Bohrloch mit dem Grenzradius  $r_p$ .

Als Fließbedingung wird der Ansatz nach Mohr-Coulomb verwendet:

$$F(K, \Phi) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{2}\right)^2 + \tau_{r\phi}^2} - \frac{\sigma_r + \sigma_\phi}{2} \sin \Phi - K \cos \Phi \leq 0. \quad (1)$$

Hier ist  $\Phi$  der innere Reibwinkel und  $K$  die Kohäsion.

Zur Nachbildung des entfestigenden Materialverhaltens werden unterschiedliche Festigkeitszustände betrachtet. Im Inneren der plastischen Zone sei das Material bereits gebrochen und im Zustand der Restfestigkeit mit dem inneren

Restreibwinkel  $\Phi_R$  und der Restkohäsion  $K_R$ . Auf der elastischen Seite des Grenzradius beginnt das Material gerade zu brechen und befindet sich im Zustand der Grenzfestigkeit mit dem inneren Grenzreibwinkel  $\Phi_G$  und der Grenzkohäsion  $K_G$ . Für Kohle oder Modellmaterial sei ein entfestigendes Verhalten angenommen:  $K_R < K_G$ .

Die Spannungen in der plastischen Zone stellen sich in Parameterform wie folgt dar:

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= -\frac{K_R}{\sin \Phi_R} \left( \cos \Phi_R - \frac{|B|}{K_R R^2} \frac{1 - \sin \Phi_R \cos 2|\alpha|}{\tan^{\sin \Phi_R} |\alpha|} \right), \\ \sigma_\varphi^p &= -\frac{K_R}{\sin \Phi_R} \left( \cos \Phi_R - \frac{|B|}{K_R R^2} \frac{1 + \sin \Phi_R \cos 2|\alpha|}{\tan^{\sin \Phi_R} |\alpha|} \right), \\ \tau_{r\varphi}^p &= \frac{B \sin 2|\alpha|}{R^2 \tan^{\sin \Phi_R} |\alpha|} \quad \text{mit: } r = R \sqrt{\frac{\tan^{\sin \Phi_R} |\alpha|}{\sin 2|\alpha|}}.\end{aligned}\quad (2)$$

Die Konstanten  $B$  und  $R$  sind aus den Randbedingungen am Bohrlochrand  $\sigma_r(r_i) = \sigma_i$  und  $\tau_{r\varphi}(r_i) = \tau_i$  zu ermitteln.

In der elastischen Zone lauten die Spannungen:

$$\begin{aligned}\sigma_r^e &= \sigma_a - \frac{EA}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ 1 + (1-2\nu) \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_\varphi^e &= \sigma_a - \frac{EA}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ 1 - (1-2\nu) \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \right], \\ \tau_{r\varphi}^e &= \frac{EC}{1+\nu} \left( \frac{r_a}{r} \right)^2\end{aligned}\quad (3)$$

mit  $E$  dem Elastizitätsmodul und  $\nu$  der Querkontraktionszahl.

Die Konstanten  $A$  und  $C$  werden mit der Koppelbedingung der Spannungen am Grenzradius

$$\sigma_r^p(r_p) = \sigma_r^e(r_p); \quad \tau_{r\varphi}^p(r_p) = \tau_{r\varphi}^e(r_p)$$

bestimmt.

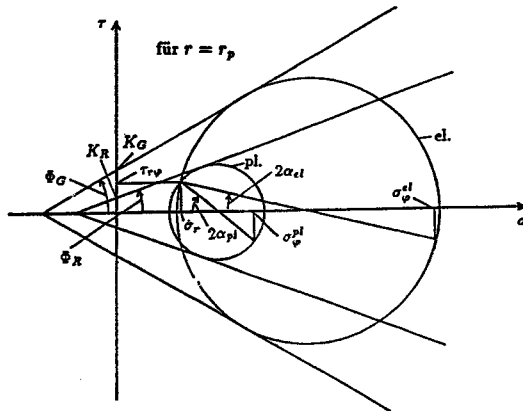


Abb. 3. Spannungszustand am Grenzradius  $r = r_p$

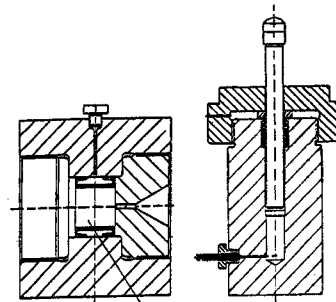


Abb. 4. Schnittbild der Versuchsanordnung mit Druckzelle und Druckzylinder

Die Ermittlung des Grenzradiuses erfolgt durch die Erfüllung der Fließbedingung für die Grenzfestigkeit auf der elastischen Seite des Grenzradiuses:

$$F(\Phi_G, K_G) = 0, \quad (4)$$

wobei die entsprechenden Spannungen

$$\sigma_r = \sigma_r^e(r_p); \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^e(r_p); \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}^e(r_p)$$

eingesetzt werden. Aus den unterschiedlichen Fließbedingungen ergibt sich ein Sprung in der Umfangsspannung  $\sigma_\varphi$  am Grenzradius (Abb. 3).

Zur Ermittlung der Bohrmehlmasse wird die assoziierte Fließregel:

$$\dot{\epsilon}_v = 2 |\dot{\epsilon}_d| \sin \chi \quad (5)$$

mit Dilatanzwinkel  $\chi = \Phi_R$  eingeführt. Die radiale Verschiebungsgeschwindigkeit in der plastischen Zone läßt sich wie folgt darstellen:

$$\dot{u}_r = U \sqrt{\tan^{\sin \Phi_R} |\alpha| \sin 2|\alpha|}. \quad (6)$$

Die Konstante  $U$  ermittelt sich aus der Randbedingung am Innenrand. Eine erste Integration der Volumenzunahme  $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{d\dot{u}_r}{dr} + \frac{\dot{u}_r}{r}$  über die Zeit führt zur Dichteverteilung  $\frac{Q}{Q_0}$ . Die Anfangsdichte sei  $Q_0$ . Eine zweite Integration der Dichteverteilung über die gesamte plastische Zone führt zur auf die Masse des Bohrloches  $m_0$  bezogenen Bohrmehlmasse:

$$Q = \frac{m}{m_0} = \frac{2}{r_i^2} \int_{r_i}^{r_p} \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) r dr. \quad (7)$$

#### 4. Modellexperiment

Alle Experimente werden mit einem Modellmaterial durchgeführt. Hierzu wird das Kunstharz Araldit mit 4 Gewichts% Härter, das ein ähnliches mechanisches Verhalten wie Steinkohle zeigt, aber leichter bearbeitbar ist, verwendet. Die Bohrversuche werden an zylinderförmigen Probenkörpern durchgeführt. Die Belastung wird mittels einer hydraulischen Hochdruckzelle (Abb. 4, 5) aufgebracht. Anschließend wird in die vorgespannte Probe stirnseitig bei konstant gehaltener Einspannung gebohrt.

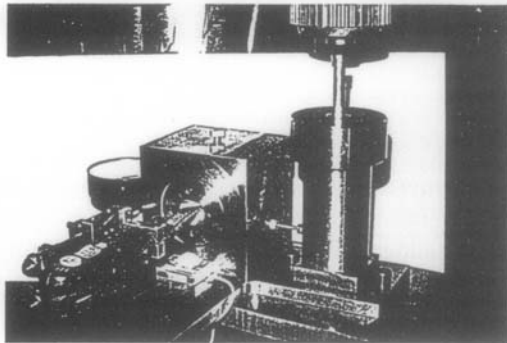


Abb. 5. Abbildung der Versuchsanordnung mit Druckzelle, Druckzylinder, Bohrvorrichtung und Präzisionswaage

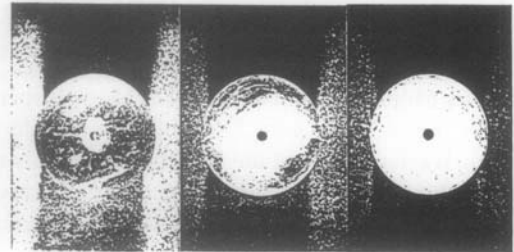


Abb. 6. Bohrproben aus Araldit für verschieden große Belastungen

Die im Versuch gemessenen Größen sind die Stempelkraft des Druckkolbens, der Stempelweg und die Bohrmehlmasse. Abb. 6 zeigt Probenkörper für verschieden große Belastungen. Charakteristisch ist die Ausbildung einer weißlich getrübbten, plastischen Zone um das Bohrloch herum.

#### 5. Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Alle für die Berechnung notwendigen Materialwerte, die Belastungsrandbedingungen und die Abmessungen sind in Tab. 1 zusammengefaßt.

In Abb. 7 ist die bezogene Bohrmehlmasse in Abhängigkeit vom Außenanfangsdruck im Vergleich zwischen Theorie und Experiment aufgezeichnet. Zu erkennen ist, daß erst ab einem bestimmten Schwellwert der Außenanfängsspannung von etwa 30 MPa eine Zunahme der Bohrmehlmasse zu beobachten ist. Die Bohrmehlmasse wird ab diesem Wert zunehmend größer, wodurch sie sich sehr gut als Indikator für die Bestimmung des Spannungszustandes verwenden läßt.

Aufgrund des Bohrens tritt bei einem fest eingespannten Probenkörper ein Abfall der Außenanfängsspannung  $\sigma_a$  auf die Restspannung  $\sigma_{\text{Rest}}$  auf. Dieser Umstand wird beim sogenannten Entspannungsbohren, einer Methode zur

Tabelle 1. Ausgangswerte für Berechnung

Materialwerte für Kunstharz Araldit:		Belastungsrandbedingungen am Bohrlochrand:	
Elastizitätsmodul:	$E = 2850 \text{ MPa}$	Innennormalspannung:	$\sigma_i = 0.0 \text{ MPa}$
Querdehnzahl:	$\nu = 0.4 \text{ MPa}$	Innenschubspannung:	$\tau_i = 6.0 \text{ MPa}$
innerer Restreibwinkel:	$\Phi_R = 8.0^\circ$	Maße der Probe:	
innerer Grenzreibwinkel:	$\Phi_G = 8.0^\circ$	Bohrlochradius:	$r_i = 2.5 \text{ mm}$
Restkohäsion:	$K_R = 6.0 \text{ MPa}$	Außenradius:	$r_a = 25.0 \text{ mm}$
Grenzkohäsion:	$K_G = 28.0 \text{ MPa}$		

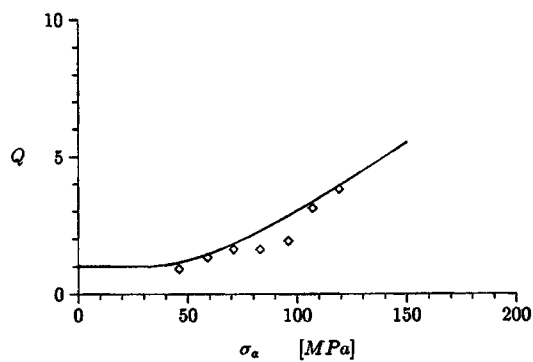


Abb. 7. Theoretischer Verlauf der bezogenen Bohrmehlmasse  $Q$  über der Außenanfangsspannung  $\sigma_a$ ;  $\diamond$  experimentell ermittelte Werte

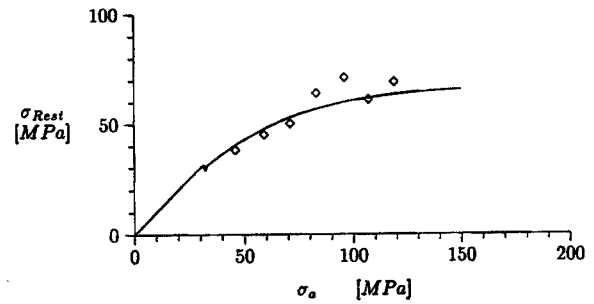


Abb. 8. Theoretischer Verlauf der Restspannung  $\sigma_{\text{Rest}}$  über der Außenanfangsspannung  $\sigma_a$ ;  $\diamond$  experimentell ermittelte Werte

Verringerung der Gebirgsschlaggefahr, genutzt. In Abb. 8 ist die Restspannung in Abhängigkeit von der Außenanfangsspannung im Vergleich zwischen Theorie und Experiment aufgetragen. Der Entspannungsvorgang ist auch hier erst ab einem Schwellwert der Außenanfangsspannung von etwa 30 MPa bemerkbar. Für größer werdende Außenanfangsdrücke ist eine deutliche Zunahme des Entspannungsvorganges feststellbar.

Sowohl im Experiment als auch bei Bohrungen im Bergbau treten sogenannte Bohrlochschläge auf. Dabei handelt es sich um schlagartige Entspannungsvorgänge verursacht durch ein plötzliches Zusammenbrechen der Festigkeit des Materials und verbunden mit einem starken Anstieg der Bohrmehlmasse. Die Ursache für diese Bohrlochschläge ist in den unterschiedlichen Festigkeitszuständen, nämlich der höheren Grenzfestigkeit und der niedrigeren Restfestigkeit, zu suchen.

## 6. Schlußfolgerung

Theoretisches Modell und entsprechendes Modellexperiment dienen hauptsächlich zum besseren Verständnis der Mechanik des Bohrvorganges. Eine gute Übereinstimmung der experimentell ermittelten Ergebnisse mit den mittels der Theorie berechneten Werten bestätigt die Richtigkeit der theoretischen Überlegungen. Eine Übertragung der Modellvorstellungen auf tatsächliches Bohren im Bergbau ist jedoch schwierig, da große Inhomogenitäten und auch geänderte und oftmals unbekannte Randbedingungen einen großen störenden Einfluß auf die Bohrungen im Bergbau ausüben.

## Literatur

- 1 LIPPMANN, H.: Mechanik des Bohrens in vorgespanntem spröden oder granularen Material, speziell in Kohlenflözen. Ingenieur Archiv **48** (1979), 347–364.
- 2 TOKAR, G.: Modellversuche zum Testbohren für das Erkennen einer Gebirgsschlaggefahr. Glückauf-Forschungshefte **49** (1988), 191–198.
- 3 MÜLLER, W.: Entspannungsverhalten triaxial belasteter Steinkohlenproben beim Anbohren. Glückauf-Forschungshefte **51** (1990), 76–85.

Anschrift: Dipl.-Ing. PETER ADLER, Technische Universität München, Lehrstuhl A für Mechanik, Arcisstraße 21, W-8000 München 2, Deutschland

## Einsatz der Bildanalyse zur Isochromaten- und Kaustikensimulation

MSC (1980): 73M05

Das Problem der Initiierung bzw. der Ausbreitung von Last- bzw. Eigenspannungsrissen innerhalb der Matrix von Faser-verbundwerkstoffmodellen sowie die Beschreibung des Rißverzweigungsphänomens von Faser/Matrix-Grenzflächenrissen und deren bruchmechanische Analyse wurde in mehreren Arbeiten [1–6] behandelt. In jüngster Zeit haben die schatten-optische Kaustikenmethode sowie die Spannungsoptik in Verbindung mit den Verfahren der digitalen Bildanalyse in der modernen Verbundmaterialforschung speziell für bruchmechanische Untersuchungen eine besondere Bedeutung erlangt.

Im Jahre 1964 wurde die schattenoptische Kaustikenmethode von MANOGG [7] quantitativ beschrieben, später wurde sie von THEOCARIS [8], KALTHOFF [9] und ROSAKIS [10] und anderen auch zur Behandlung von Spannungskonzentrationsproblemen eingesetzt.

Die Bereitstellung spezieller Auswertalgorithmen und Meßwertgleichungen, die z. B. auf der Grundlage bekannter Kaustikengleichungen sowie von spannungsoptischen Ansätzen durch Vermessung der Geometrie von Kaustiken und Isochromaten beruhen, lassen die Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren zu [11–13].

Bei der Bearbeitung dieser Fragestellungen wird verstärkt Wert gelegt auf ein systematisches hybrides Zusammenwirken der bekannten Analysemethoden der Mechanik bzw. auf die Symbiose zwischen den Disziplinen „EXPERIMENT“, „THEORIE“ und „NUMERIK“ der Mechanik. So kann mittels theoretischer Ansätze eine experimentelle Methode umfassend beschrieben und zusätzlich unter Verwendung der begleitenden numerischen Simulation überprüft werden. Neben der Anwendung verschiedener FE-Programmsysteme zur Analyse des Spannungs- und Energiezustandes in

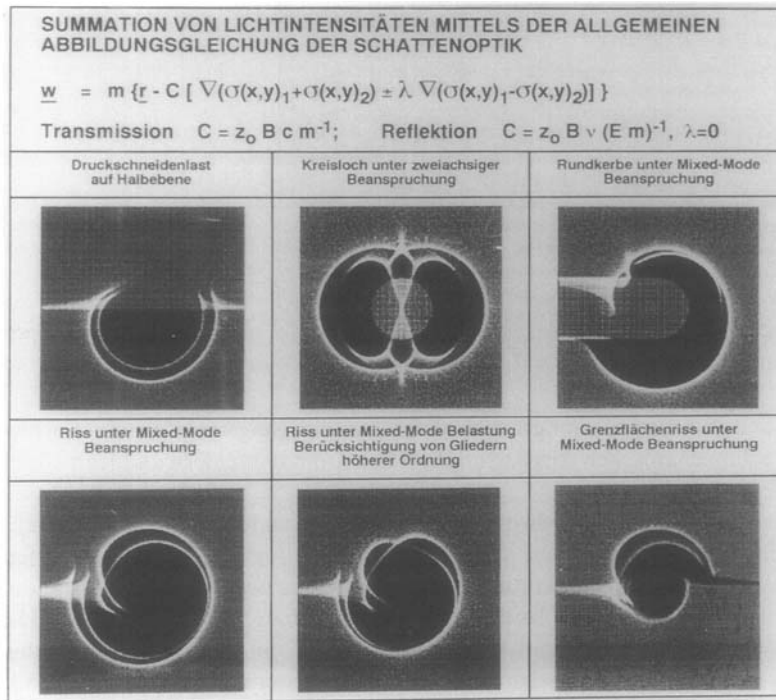


Abb. 1. Simulation schattenoptischer Effekte

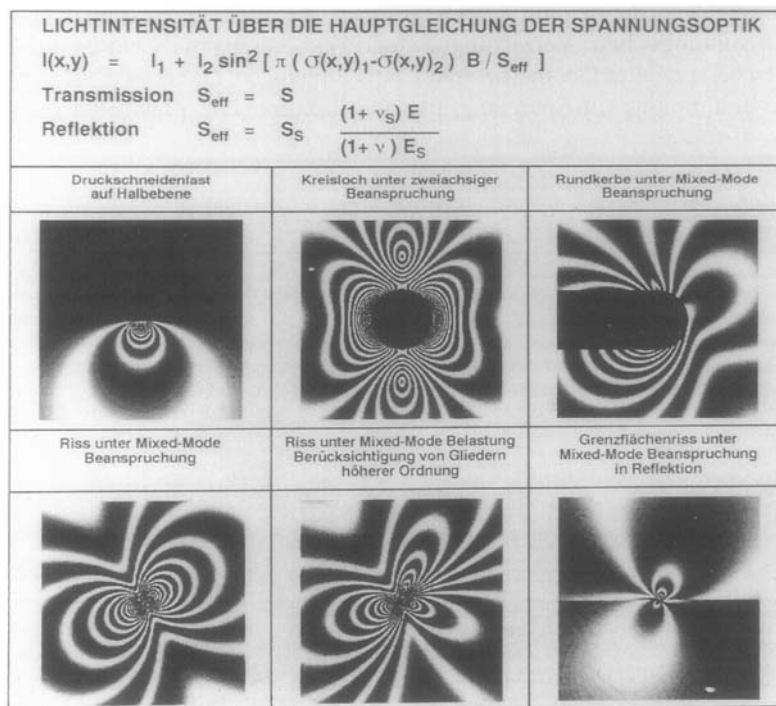


Abb. 2. Simulation spannungsoptischer Effekte



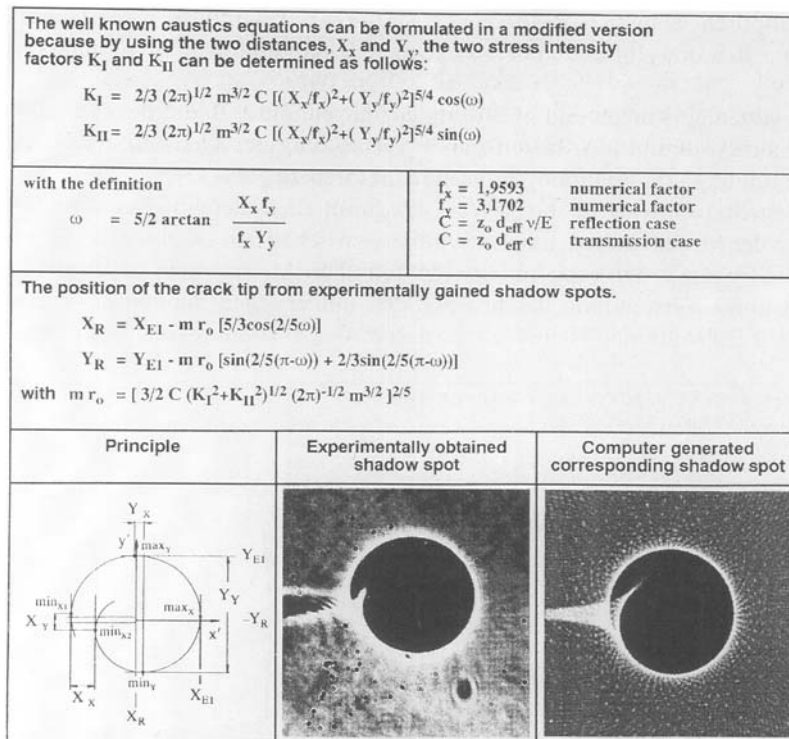


Abb. 3. Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren mittels der digitalen Bildanalyse

Verbundwerkstoffmodellen mit Last- und Wärmespannungsrissen wurde in der jüngsten Zeit ein Softwarepaket zur digitalen Bildanalyse zum Zwecke der bruchmechanischen Auswertung von Isochromatenfeldern und Kaustikinformatoren in Verbundstrukturen erstellt [11 – 13].

Nachfolgend werden Simulationsergebnisse von Isochromatenverteilungen und Kaustiken vorgestellt, wobei für ausgewählte Modellvarianten, hinsichtlich der Variation von Werkstoffkombinationen und Belastungsarten, der Spannungszustand numerisch oder analytisch berechnet werden konnte. Aus den gewonnenen Spannungszuständen lassen sich etwa Grauwertbilder für Isochromaten der Spannungsoptik bzw. Kaustiken der Schattenoptik simulieren. Hierzu wurden die zugehörigen Numerik-Programmroutinen an ein Bildanalyse-System adaptiert, mit dem eine vollständige Erfassung optischer Erscheinungsformen wie etwa der Kaustikengeometrie und der Isochromateninformation erfolgen kann, so daß der unmittelbare Vergleich zu experimentell ermittelten Interferenzliniensystemen möglich wird. In diesem Zusammenhang wurde die Erstellung einer Programmbibliothek zur Implementierung bekannter mathematischer Ansätze zur Beschreibung von Spannungs- und Verformungszuständen an Kerben und Rißspitzen vorgenommen. Im Vergleich zu anderen experimentellen Methoden der Spannungsanalyse, die sich auf Effekte gründen, die direkt proportional zu dem in einem Bauteil oder einer Probe herrschenden Spannungs- bzw. Verzerrungszustand sind, basiert die schattenoptische Methode auf der Existenz von Spannungsgradienten bei speziellen Geometrie- und Lastbedingungen. Daher ist die Kaustikenmethode besonders geeignet für die experimentelle Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren in der Umgebung von Rißspitzen,

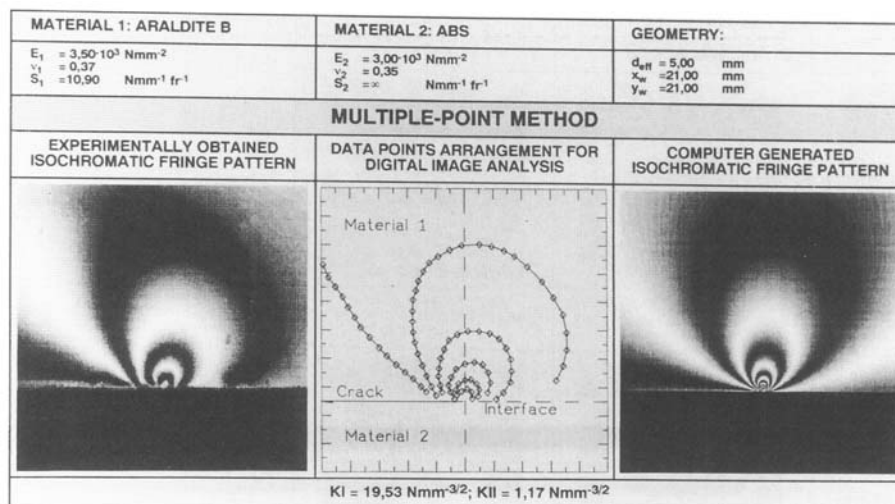


Abb. 4. Experimentell ermittelte bzw. simulierte Mixed-Mode Isochromaten an der Spitze eines Grenzflächenrisses (Materialkombination: Araldit B/ABS)

jedoch auch für alle anderen Spannungskonzentrationsprobleme in der Nähe von Bohrungen und Löchern sowie auch für Kontaktprobleme.

Mittels der allgemeinen Gleichung zur Beschreibung der Abbildungspunkte eines Schattenflecks lassen sich Lichtintensitätsverteilungen ermitteln, in eine äquivalente Grauwertdarstellung umsetzen und für eine Pseudobildanalyse aufbereiten. Hierbei kommt ein spezieller Summationsalgorithmus zur Anwendung, um die Lichtintensitätsverteilung zu simulieren.

Die Abbildung 1 zeigt simulierte Schattenflecken für den Fall optischer Anisotropie für unterschiedliche Beispiele von Spannungskonzentrationen.

In der Abbildung 2 sind simulierte Isochromatenverteilungen wiedergegeben, die durch Verwendung der spannungsoptischen Hauptgleichung gewonnen wurden.

Zur quantitativen Auswertung von Kaustiken werden üblicherweise charakteristische, leicht aus den Kaustikenkurven zu entnehmende Längen gewählt, wie etwa die in Bild 3 angegebenen Distanzen  $X_X$  und  $Y_Y$ . Die Abbildung gibt den Zusammenhang zwischen den charakteristischen Längen und den sie erzeugenden Beanspruchungsgrößen  $K_I$  bzw.  $K_{II}$  wieder [12]. Zusätzlich läßt sich die Position der Rißspitze ermitteln. Es ist das Prinzip der Auswertung, eine experimentell gewonnene Mixed-Mode Kaustik und die entsprechende numerische Simulation anzugeben.

Die quantitative Auswertung von Isochromatenfeldern in der Nähe von Rißspitzen innerhalb einer Grenzfläche erfolgt mittels einer modifizierten Form der sogenannten Multiparametermethode der Spannungsoptik [11, 13]. Die Darstellungen 4 bis 6 zeigen Isochromatenverteilungen in dem verwendeten Modellmaterial 1 (Araldit B) für unterschiedliche Materialkombinationen (ABS bzw. Aluminium) und Beanspruchungsrelationen. Es sind wiederum die experimentell

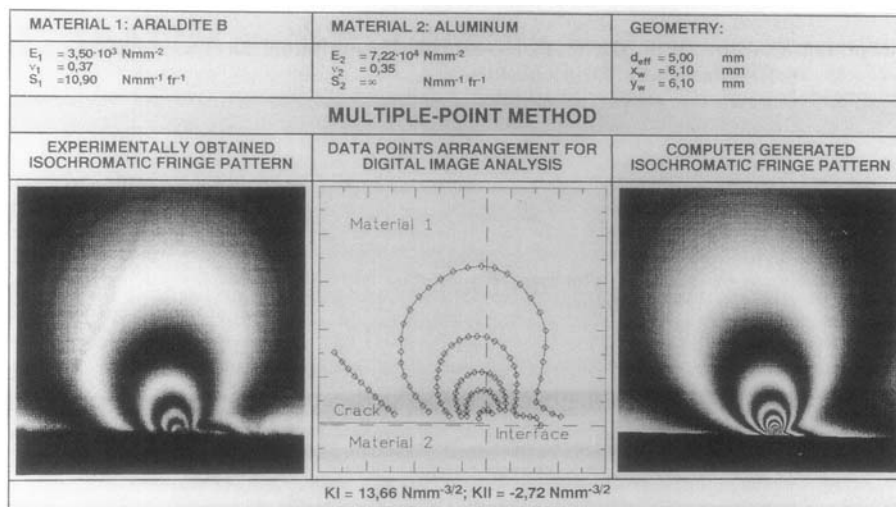


Abb. 5. Experimentell ermittelte bzw. simulierte Mixed-Mode Isochromaten an der Spitze eines Grenzflächenrisses (Materialkombination: Araldit B/Aluminium)

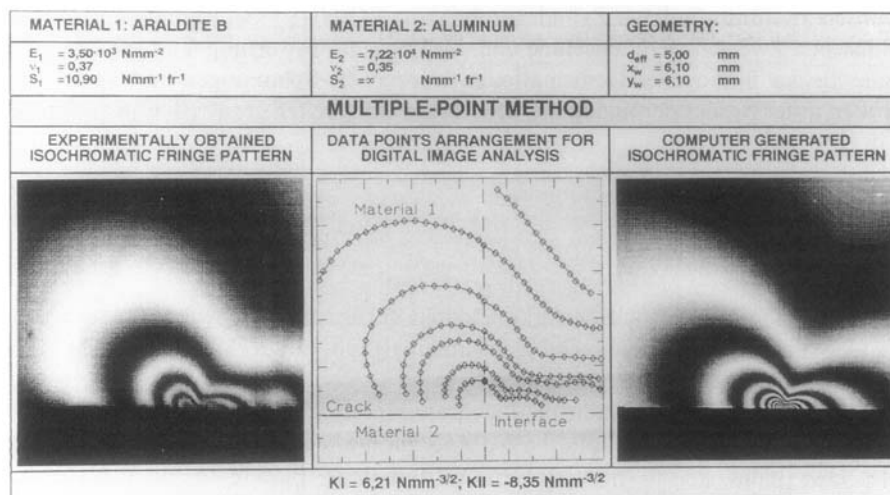


Abb. 6. Experimentell ermittelte bzw. simulierte Mixed-Mode Isochromaten an der Spitze eines Grenzflächenrisses (Materialkombination: Araldit B/Aluminium)

ermittelten Isochromatenverteilungen, die zur Auswertung herangezogenen Meßpunkte und die äquivalenten numerisch simulierten spannungsoptischen Bilder angeführt worden. Es wird deutlich, daß mit zunehmender Scherbeanspruchung, d. h. mit wachsendem  $K_{II}$  das Isochromatenbild deformiert wird.

### Literatur

- 1 FERBER, F.: Ph. D. Dissertation, Universität Paderborn (1986).
- 2 FERBER, F.; HERRMANN, K. P.: VDI-Berichte **631** (1987), 63–74.
- 3 FERBER, F.; HERRMANN, K. P.: ZAMM **68** (1988), 178–181.
- 4 FERBER, F.; HERRMANN, K. P.: Proc. 9th Int. Conference on Experimental Mechanics. Edited by V. ASKEGAARD. Aaby Tryk, Kopenhagen 1990, pp. 395–404.
- 5 FERBER, F.; HERRMANN, K. P.: Brittle matrix composites 3. Eds.: BRANDT, A. M.; MARSHALL, I. H. Elsevier Applied Science, London 1991, pp. 403–412.
- 6 FERBER, F.; HERRMANN, K. P.: VDI-Berichte **731** (1989), 303–314.
- 7 MANOGG, P.: Dissertation, Universität Freiburg (1964).
- 8 THEOCARIS, P. S.: Mechanics of Fracture **7** (1981), 189–252.
- 9 KALTHOFF, J. F.: Handbook on Experimental Mechanics (1985), 430–500.
- 10 ROSAKIS, A. J.; ZEHNDER, A. T.: J. of Elasticity **15** (1985), 347–367.
- 11 FERBER, F.; HINZ, O.; HERRMANN, K. P.: VDI-Berichte **815** (1990), 459–470.
- 12 NOE, A.; FERBER, F.; HERRMANN, K. P.: VDI-Berichte **882** (1991), 313–324.
- 13 FERBER, F.; NOE, A.; HINZ, O.; HERRMANN, K. P.: Proc. IMEKO/GESA-Symposium VDI/VDE, Düsseldorf 28. bis 30. April 1992, VDI-Berichte **940** (1992), 69–78.

*Anschrift:* Dr.-Ing. F. FERBER; Dipl.-Ing. O. HINZ; Prof. Dr. K. P. HERRMANN, Laboratorium für Technische Mechanik, Universität Paderborn, Pohlweg 47–49, W-4790 Paderborn, Deutschland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 320–T 325

Akademie Verlag

HAUPT, P.; SCHREIBER, L.; LION, A.

## Experimentelle Untersuchung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens bei nichtradialen Belastungen

MSC (1980): 73B99

### Experimentelles

Die folgenden Experimente wurden an dünnwandigen Zylinderproben aus XCrNi18.9 bei Raumtemperatur durchgeführt. Die Steuerung der servohydraulischen Zweiachs-Prüfmaschine und die Versuchsauswertung fand mit einem Personalcomputer statt. Unter der Annahme kleiner homogener Deformationen wurden die Spannungen und Verzerrungen aus den gemessenen Kraft- und Weggrößen unter Berücksichtigung der Maschinensteifigkeiten ermittelt. Eine numerische Glättung der Meßsignale fand nicht statt.

### Verzerrungsgesteuerte Experimente

Monotone Scherexperimente mit einer über die Versuchsdauer konstanten Verzerrungsgeschwindigkeit geben einen Hinweis auf die stark ausgeprägte, jedoch unterlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit dieses Materials (Bild 1). Abnehmende Dehnungsgeschwindigkeiten ziehen kleinere Spannungen nach sich.

Legt man in den soeben beschriebenen Deformationspfad mehrere hinreichend große Haltezeiten ein, so beobachtet man, daß die Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge unterhalb der Kennlinie liegen, die mit der kleinsten Verzerrungsgeschwindigkeit ermittelt wurde. Dies kann so interpretiert werden, daß diese Punkte in guter Näherung den (zeit-unabhängigen) Gleichgewichtszuständen dieses Materials entsprechen. Die Verbindung sämtlicher Gleichgewichtspunkte ergibt die Gleichgewichtskennlinie (statische Spannung). Diese kann durch ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional der Verzerrungsgeschichte dargestellt werden.

Schubspannung [100 MPa]

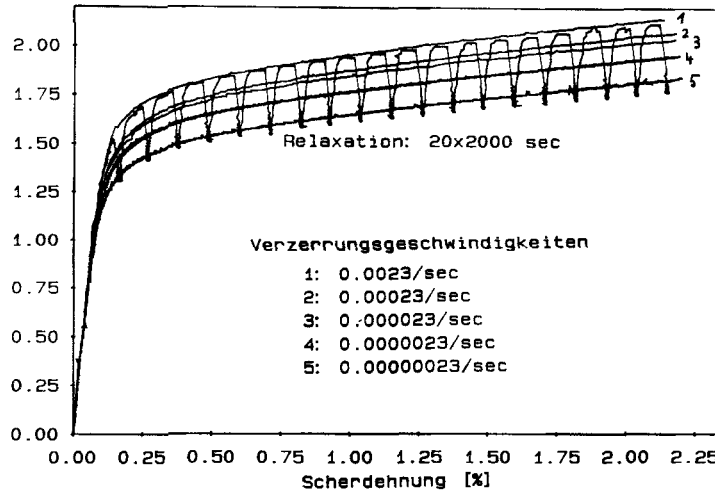


Bild 1. Experimentelle Daten

### Materialmodell

Die Diskussion der experimentellen Beobachtungen motiviert für den Cauchyschen Spannungstensor  $T$  die Materialgleichung [1, 4]

$$\dot{T} = G_0[\dot{E}] - \frac{1}{M(\|T^D - T_\infty^D\|)} (T - T_\infty), \quad (1)$$

$$\text{mit } M > 0, \quad M(0) = M_0, \quad M' \leq 0, \quad T_\infty = \mathcal{F}_\infty[E(t-s)]_{s \geq 0}$$

$$G_0[\dot{E}] := G_{01}\dot{E}^D + \frac{1}{3} G_{02} \operatorname{tr}(\dot{E}) \mathbf{1}.$$

Hierbei ist  $E$  der linearisierte Greensche Verzerrungstensor. Die statische Spannung wird mit  $T_\infty$  bezeichnet.

$\mathcal{F}_\infty$  ist ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional der Verzerrungsgeschichte. Die Maßstabsfunktion  $M$ , welche physikalisch als spannungsabhängige Relaxationszeit interpretiert werden kann, modelliert die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit. Der isotrope Tensor  $G_0$  beschreibt die spontane Elastizität des Materials. Für die statische Spannung wurde das folgende Modell der geschwindigkeitsunabhängigen Plastizität gewählt (implizite Definition von  $\mathcal{F}_\infty$ ):

Für  $F = \frac{1}{2} \|T_\infty^D - X\|^2 - \frac{1}{3} g_0^2 = 0$  und Belastung, d. h.  $(T_\infty^D - X) \cdot \dot{T}_\infty \geq 0$  gilt

$$\dot{T}_\infty = G_\infty[\dot{E}] - \frac{G_{\infty 1} \dot{E} \cdot (T_\infty^D - X)}{N(T_\infty^D, X)} (T_\infty^D - X), \quad (2a)$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \dot{X}_i = c_i \left( \dot{E}^D - \frac{1}{G_{\infty 1}} \dot{T}_\infty^D \right) - b_i \left\| \left( \dot{E}^D - \frac{1}{G_{\infty 1}} \dot{T}_\infty^D \right) \right\| X_i,$$

mit

$$N(T_\infty^D, X) := \frac{2}{3} g_0^2 \sum_{i=1}^n \left( c_i - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{b_i}{g_0} (T_\infty^D - X) \cdot X_i \right).$$

In allen anderen Fällen gilt die Elastizitätsbeziehung

$$\dot{T}_\infty = G_\infty[\dot{E}] = G_{\infty 1} \dot{E}^D + \frac{1}{3} G_{\infty 2} \operatorname{tr}(\dot{E}) \mathbf{1} \quad \text{sowie} \quad \dot{X}_i = 0. \quad (2b)$$

Die Verfestigung wurde an dieser Stelle als rein kinematisch angesetzt, da erste zyklische Experimente einen Hinweis darauf gegeben haben, daß die Beiträge der isotropen Verfestigung vernachlässigbar klein sind. Eine weitere Annahme ist, daß sich die kinematische Verfestigung  $X$  durch ein lineares Funktional des plastischen Verzerrungstensors bezüglich der plastischen Bogenlänge approximieren läßt [3]. Unter der Annahme, daß der Kern dieses Funktionals als Summe von  $n$  nicht negativen abklingenden Exponentialfunktionen darstellbar ist, ergibt sich das obige Differentialgleichungssystem für die Größen  $X_i$ . Die Materialparameter  $c_i$  und  $b_i$  beschreiben den Verlauf der Verfestigung über der plastischen Bogenlänge. Der Parameter  $g_0$  ist ein Maß für den Durchmesser der Fließfläche. Das statische Elastizitätsverhalten des Materials wird durch den Tensor  $G_\infty$  modelliert.

### Parameteridentifikation

Die statische Fließspannung  $g_0$  wurde anhand des in Bild 1 dargestellten Scherexperimentes mit der kleinsten Verzerrungsgeschwindigkeit zu 180 MPa ermittelt.

Die in die statische Spannung  $T_\infty$  eingehenden Verfestigungsparameter  $c_i$  und  $b_i$  werden durch Anpassung der analytischen Lösung der kinematischen Verfestigung  $X$  an die Meßdaten bestimmt. Eine gute Approximation an die statische Materialkennlinie erhält man durch die in Bild 1 gezeigten Relaxationsendpunkte. Aus diesen Meßdaten für  $\tau_\infty$  und  $\varepsilon$  ergibt sich mittels der Beziehungen

$$x(\varepsilon_p) = \tau_\infty(\varepsilon_p) - \frac{1}{\sqrt{3}} g_0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon_p = \varepsilon - \frac{1}{G_{\infty 1}} \tau_\infty \quad (3)$$

der Verlauf der kinematischen Verfestigung  $x$  über der plastischen Dehnung  $\varepsilon_p$ . Die Auftragung dieser Größen (Bild 2) und die analytische Integration der Verfestigung motiviert  $n = 2$  und  $b_2 = 0$ , d. h.,

$$x(\varepsilon_p) = c_2 \varepsilon_p + \frac{c_1}{\sqrt{2} b_1} (1 - \exp(-\sqrt{2} b_1 \varepsilon_p)). \quad (4)$$

Man erhält schließlich:  $c_1 = 53000$  MPa,  $c_2 = 1600$  MPa,  $b_1 = 900$ . Die vier Elastizitätskonstanten wurden mittels schneller und langsamer Zug- und Torsionsexperimente mit einem linearen Regressionsverfahren aus den Anfangssteigerungen der Kennlinien identifiziert:

$$\begin{aligned} G_{01} &= 140000 \text{ MPa}, & G_{02} &= 228000 \text{ MPa}, \\ G_{\infty 1} &= 134000 \text{ MPa}, & G_{\infty 2} &= 221000 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

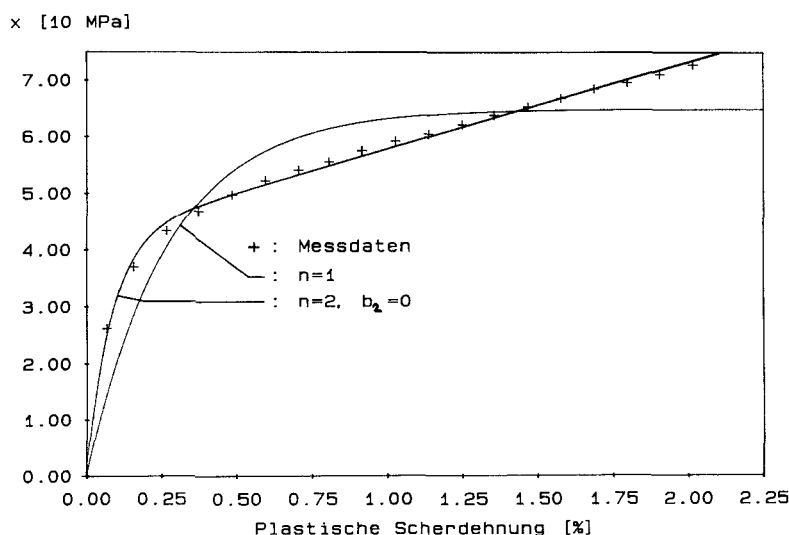


Bild 2. Anhand der Gleichgewichtskennlinie ermittelte Verfestigung

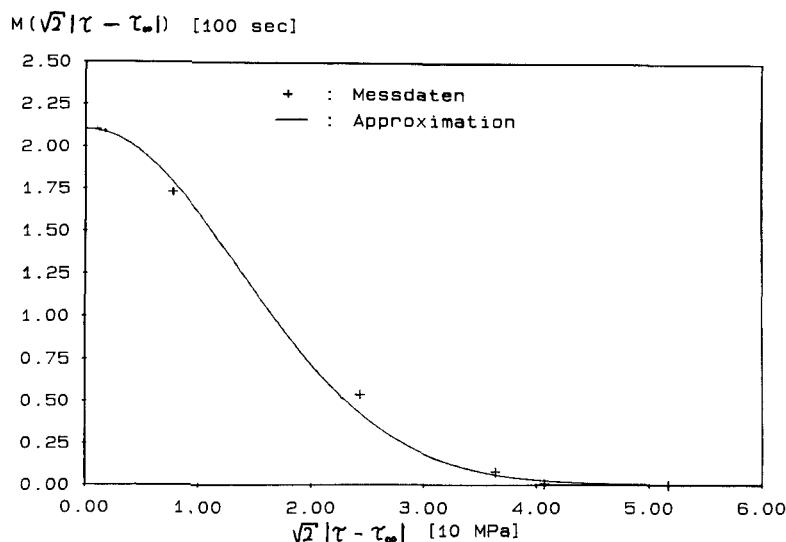


Bild 3. Maßstabsfunktion

Die Materialfunktion  $M$ , welche die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit modelliert, wird identifiziert, indem man die Differentialgleichung Gl. (1) für ein mit konstanter Verzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}_0$  gesteuertes Experiment auswertet:

$$M(\sqrt{2} |\tau - \tau_x|) = \frac{\tau - \tau_x}{\dot{\varepsilon}_0 \left( G_{01} - \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)}. \quad (5)$$

Mit  $\tau$  wird die Spannungsantwort bezeichnet und mit  $\tau_x$  die zur Scherung  $\varepsilon$  gehörige statische Spannung, die man aus dem Relaxationsexperiment gewinnt. Trägt man die rechte Seite von Gl. (5) gegen das Argument der Funktion  $M$  auf, so erhält man ein Bild der gesuchten Funktion (Bild 3), welches gleichzeitig den Ansatz Gl. (6) motiviert:

$$M(\|T^D - T_x^D\|) = M_0 \exp\left(-\frac{\|T^D - T_x^D\|^2}{s_0^2}\right), \quad M_0 = 210 \text{ sec}, \quad s_0 = 19 \text{ MPa}. \quad (6)$$

Interpretiert man die Werte der Maßstabsfunktion als spannungsabhängige Relaxationszeit, so überstreicht diese je nach Größe der Überspannung einen Bereich von etwa  $10^{-3}$  sec bis hin zu  $10^2$  sec.

### Verifikation

In Bild 4 sind die auf der Grundlage des Materialmodells Gl. (1, 2) und der identifizierten Parameter berechneten Materialantworten dargestellt. Man sieht, daß die wesentlichen Effekte richtig beschrieben werden.

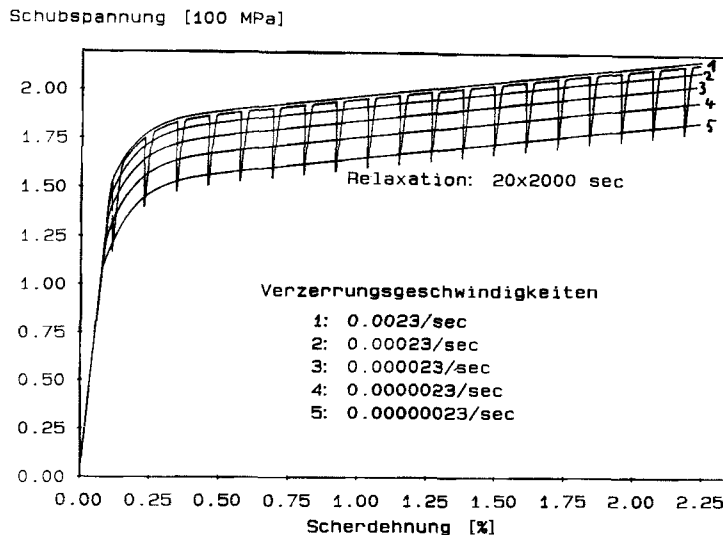


Bild 4. Berechnete Materialantwort

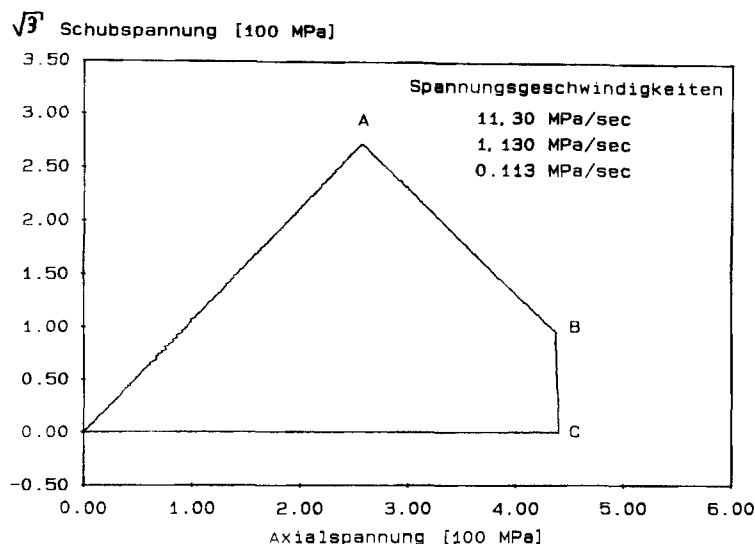


Bild 5. Nichtradialer Lastpfad

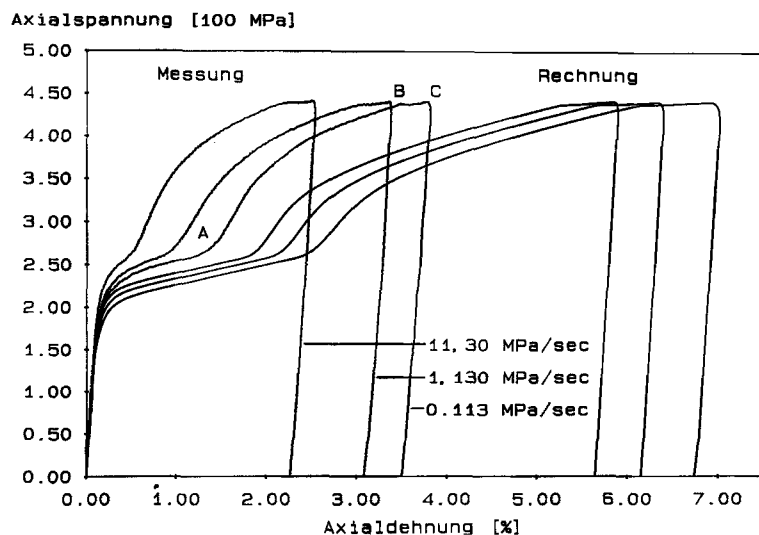


Bild 6. Gemessene und berechnete Materialantwort

Im folgenden soll getestet werden, inwieweit es möglich ist, mit dem anhand monotoner Experimente gefundenen Parametersatz die Materialantwort, insbesondere bei nichtradialen Belastungen, vorherzusagen.

Zunächst wurde ein auf CORUM und PUGH [2] zurückgehender spannungsgesteuerter Lastpfad gewählt (Bild 5). Wählt man die Komponentengeschwindigkeiten des Spannungstensors derart, daß während des gesamten Pfades die Bedingung  $\|\dot{T}\| = \text{const}$  erfüllt ist, so ergeben sich in einer  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Darstellung die in Bild 6 gezeichneten Materialantworten. Man

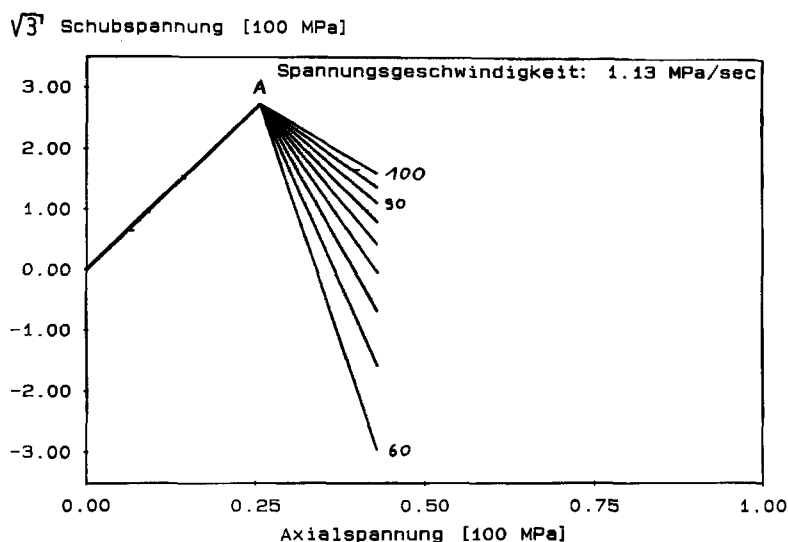


Bild 7. Nichtradiale Belastungen

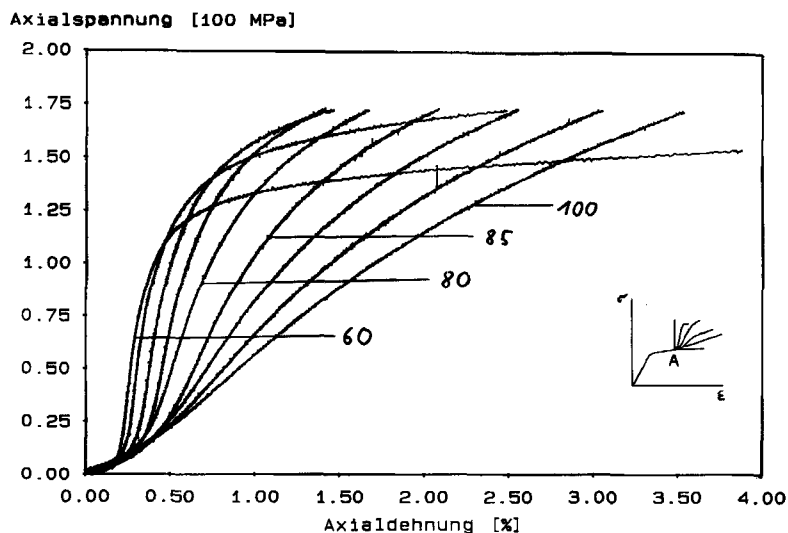


Bild 8. Gemessene Materialantwort

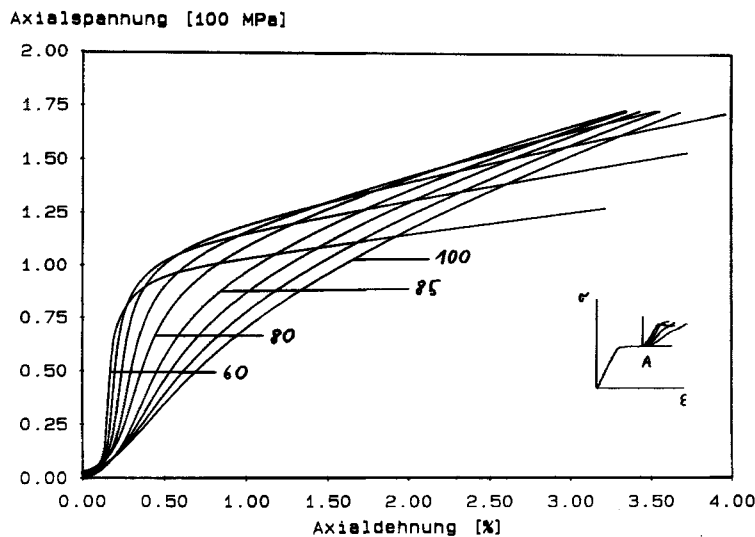


Bild 9. Berechnete Materialantwort

entnimmt, daß die Verzerrungen mit fallenden Spannungsgeschwindigkeiten größer werden. Physikalisch ist dieser Effekt als Kriechen zu interpretieren. Die numerischen Ergebnisse zeigen bei richtig modellierter Geschwindigkeitsabhängigkeit eine qualitative Übereinstimmung mit den Meßdaten. Die Verzerrungen werden allerdings zu groß modelliert.

In einer weiteren Versuchsserie wurde bei konstanter Belastungsgeschwindigkeit ( $\|\dot{T}\| = \text{const}$ ) untersucht, wie sensibel das Material auf Winkeländerungen am Schubspannungsumkehrpunkt reagiert. Das Verhältnis der Komponentengeschwindigkeiten wurde so variiert, daß sich am Punkt A in Bild 7 Winkel zwischen  $60^\circ$  und  $100^\circ$  einstellen. Die zugehörigen Materialantworten und die numerischen Ergebnisse sind in den Bildern 8 und 9, zur besseren Auflösung in relativen Koordinatensystemen, aufgetragen. Die Meßdaten zeigen, daß die Steifigkeiten bei nicht allzu großen Spannungen monoton mit steigenden Winkeln abnehmen. Man erkennt, daß die einem Winkel von  $60^\circ$  entsprechende Kennlinie anfänglich ein sehr steifes, aber bei höheren Spannungen ein recht nachgiebiges Materialverhalten aufweist. Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß die wesentlichen Effekte qualitativ richtig beschrieben werden. Die Verzerrungen werden auch hier zu groß modelliert.

### Literatur

- 1 KORZEN, M.: Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom viskoelastisch-plastischen Typ. Dissertation Darmstadt 1988.
- 2 BRUHNS, O. T.; MÜLLER, R.: Some remarks on the application of a two surface model in plasticity. *Acta Mechanica* **53** (1984), 81 – 100.
- 3 HAUPT, P.; KORZEN, M.; TSAKMAKIS, CH.: Über Verfestigungsmodelle der Plastizitätstheorie in funktionaler Darstellung. *ZAMM* **67** (1987) 4, T 193 – T 194.
- 4 HAUPT, P.; KORZEN, M.: On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics. In: JINGHONG, F.; MARAKAMI, S. (eds.): Chongqing, China, Pergamon Press, Kronberg 1989, pp. 456 – 459.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. P. HAUPT; Dr.-Ing. L. SCHREIBER; Dipl. Phys. A. LION, Institut für Mechanik, Universität GH Kassel, Mönchebergstraße 7, W-3500 Kassel, Deutschland

### Fließpotential von X2CrNi18.9 bei zyklischer Belastung

MSC (1980): 73E05

In vielen Bereichen der Technik stehen metallische Werkstoffe unter zyklischen Belastungen, die mit plastischen Formänderungen einhergehen. So wandert beispielsweise in der Umformtechnik beim Blechbiegen die neutrale Faser, die der elastischen Biegung zuzuordnen ist, mit fortschreitender plastischer Biegung in Richtung des Krümmungsmittelpunktes. Die dabei überstrichene Zone erfährt in tangentialer Richtung zunächst eine Druckspannung und danach eine Zugspannung. Sie wird somit zyklisch plastifiziert.



Auf dem Gebiet der Betriebsfestigkeit von zyklisch thermomechanisch belasteten Strukturen stellt sich regelmäßig die Frage, ob und unter welchen Bedingungen kleine plastische Formänderungen mit der Zyklenzahl abklingen, d. h. die Struktur einspielt. Eine brauchbare numerische Simulation dieser Vorgänge setzt voraus, daß das zyklische plastische Fließen besonders für kleine Formänderungsvorgänge möglichst naturgetreu modelliert wird.

Bei metallischen Werkstoffen mit stetig differenzierbarem Spannungsweg beim elastisch-plastischen Übergang im Hauptspannungsraum kann vermutet werden, daß die beginnende Plastifizierung immer mit einem Rotationsellipsoiden als Fließfläche im Hauptspannungsraum einsetzt [1]. Die Anfangsfließfläche geht dann nach kleinen plastischen Formänderungen in eine Zylinderfließfläche über. Dieser Effekt konnte an Aluminiumlegierungen experimentell gezeigt werden [2]. Im Gegensatz zu den Aluminiumlegierungen sind für Eisenwerkstoffe (Stähle) die Voraussetzungen eines stetig differenzierbaren elastisch-plastischen Überganges oft nicht gegeben — man denke an Streckgrenzeffekte. Andererseits liefert der Eisenwerkstoff X2CrNi18.9 (mit Einschränkungen) einen experimentellen Befund, der auf eine Übergangsfließfläche schließen läßt.

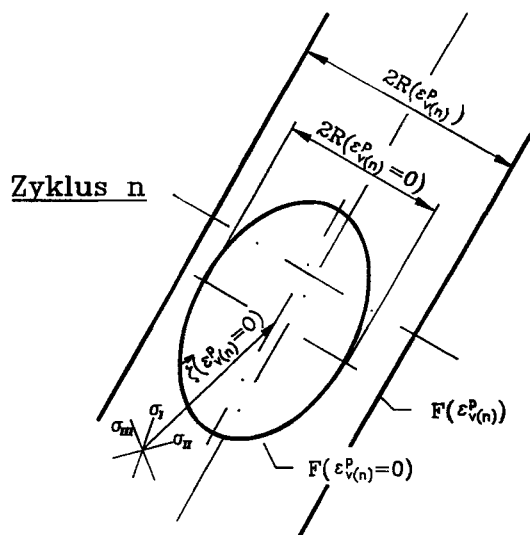


Bild 1. Fließflächen im Meridianschnitt

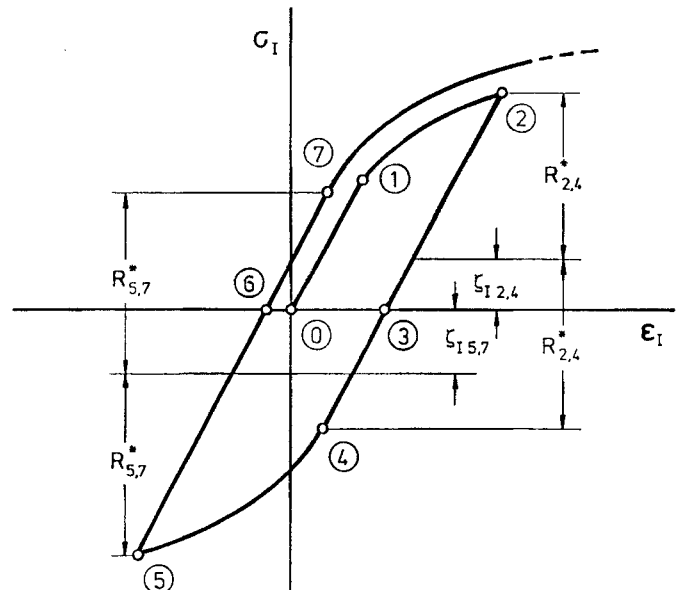


Bild 2. Prinzipieller Spannungs-Dehnungsverlauf für zyklische einachsige Belastung

Bild 1 zeigt im Meridianschnitt die prinzipielle Entwicklung der Fließfläche im Übergangsbereich der Plastifizierung für den Belastungszyklus  $n$ . Dabei wird isotropes Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Das plastische Fließen beginnt bei der plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_v^n = 0$  mit einem Rotationsellipsoiden als Fließfläche  $F$ . Die größere Halbachse liegt dabei parallel zur Raumdiagonalen des Hauptspannungsraumes. Aufgrund der kinematischen Verfestigung ist dieses Ellipsoid um  $\vec{\zeta} = \zeta_H \vec{e}_H$  ( $H = \text{I, II, III}$ ) als Ganzes im Hauptspannungsraum verschoben. Als Maß für die isotrope Verfestigung steht der kleine Radius  $R$  des Ellipsoiden. Mit fortschreitender Plastifizierung verändern sich in der Regel beide Verfestigungsanteile. Weiterhin kann man beobachten, daß die große Halbachse des Ellipsoiden bereits nach einer kleinen plastischen Formänderung gegen unendlich geht. Die „Übergangsfließfläche“ hat sich zur Zylinderfließfläche entwickelt. Im allgemeinen Spannungsraum mit den Spannungskordinaten  $\sigma_{ij}$  wird diese Fließflächenentwicklung durch den folgenden Ansatz für das Fließpotential  $F$  beschrieben:

$$F = [2\alpha(s_{kk})^2 + s'_{ij}s'_{ij}]^{1/2} - R(\alpha, \varepsilon_v^n, \dot{\varepsilon}_v^n, T) = 0, \quad (1)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \zeta_{ij}, \quad s'_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij} - \text{Spannungskordinaten}.$$

Der Verlauf der Ansatzwerte  $\alpha(\varepsilon_v^n)$  muß für den Übergangsbereich in Abhängigkeit von der plastischen Vergleichsdehnung experimentell bestimmt werden. Für die Anfangsfließfläche ( $\varepsilon_v^n = 0$ ) nimmt  $\alpha$  bei metallischen Werkstoffen Werte zwischen 0.02 und 0.08 an.  $\alpha$  verschwindet jedoch bereits nach einer kleinen plastischen Formänderung. Im Experiment kann die Ansatzfunktion  $\alpha(\varepsilon_v^n)$  u. a. an Rohrproben unter Zug, Druck, Torsion, Innendruck und daraus kombinierter Belastung an unterschiedlichen Stellen des Spannungsraumes nach der folgenden Gleichung ermittelt werden:

$$\alpha = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \frac{3(s_{11} - s_{22} d\varepsilon_{11}^p / d\varepsilon_{22}^p)}{s_{ii}(1 - d\varepsilon_{11}^p / d\varepsilon_{22}^p)} \right\}. \quad (2)$$

Gleichung (2) folgt aus Gleichung (1) und dem Potentialgesetz nach v. MISES [3]. Sie setzt voraus, daß für den betrachteten Werkstoffpunkt die drei Normalspannungen, die Koordinaten des Verschiebungsvektors  $\vec{\zeta}$  und für zwei Richtungen die plastischen Formänderungssinkremente (Formänderungsdifferenzen) bekannt sind.

Bild 2 zeigt beispielhaft ein prinzipielles zyklisches Spannungs-Dehnungsdiagramm für den einachsigen Versuch. Das plastische Fließen des Werkstoffs beginnt im Punkt 1 mit der Anfangsfließfläche. Im Punkt 2 wird der Werkstoff entlastet, durchläuft die elastische Gerade (2 bis 4) und wird im Punkt 4 erneut plastifizieren. Die kinematischen Verschiebungen  $|\zeta_{a,c}|$  und die Radien  $R_{a,c}$  der Fließflächen aller folgenden Belastungszyklen werden auf den Radius  $R_{2,4}$  bezogen. Dabei gilt näherungsweise:

$$R_{a,c} \approx R_{a,c}^* \frac{\sqrt{3\alpha_a + 1} + \sqrt{3\alpha_c + 1}}{\sqrt{6}} \approx R_{a,c}^* \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Für den einachsigen Versuch muß immer  $\zeta_{II} = \zeta_{III}$  gelten. Außerdem ist die Annahme  $\zeta_{II} = 0 = \zeta_{III}$  sehr wahrscheinlich. Damit gilt hier

$$\vec{\zeta}_{a,c} = \zeta_{la,c} \vec{e}_1. \quad (4)$$

Für X2CrNi18.9 zeigt Bild 3 in vier Versuchsreihen die Entwicklung der isotropen Verfestigung. Man sieht, daß sich nach einem anfänglich leichten Anstieg die isotrope Verfestigung nicht mehr ändert. Anders dagegen die kinematische Verfestigung in Bild 4. Sie steigt bereits bei einer sehr kleinen Formänderung auf den Wert  $1,6 \cdot R_{2,4}$ . Für die weiteren Zyklenfolgen wird dann ein linearer Anstieg der kinematischen Verfestigung beobachtet. In den Versuchen war die Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit so niedrig eingestellt, daß sie keinen Einfluß auf die Fließspannung hatte. Andererseits war die Versuchsdauer so kurz, daß die Formänderung durch Kriechen vernachlässigbar blieb. Die Dehnungen wurden mit der DMS-Technik erfaßt. Man kann zusammenfassend sagen, daß ab einem bestimmten Plastifizierungsgrad nur noch die kinematische Verfestigung (linear) ansteigt.

Bild 5 gibt beispielhaft für eine Versuchsreihe die gemessenen ersten Zyklen der Vergleichsspannung in Abhängigkeit von der plastischen Vergleichsdehnung wieder. Auffallend ist, daß die erste Plastifizierung nur mit einem kleinen Bogen

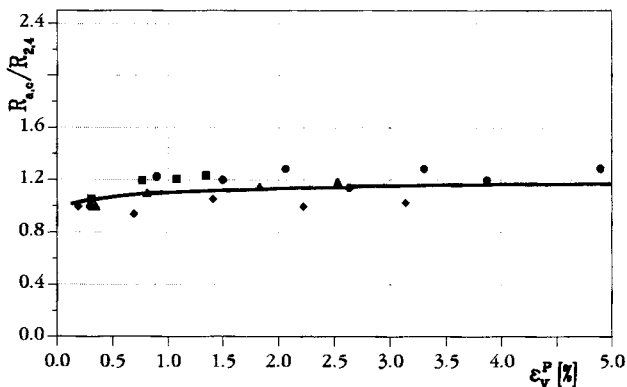


Bild 3. Isotrope Verfestigung von X2CrNi18.9 bei zyklischer Belastung (Spannungsschwingbreite  $+237 \geq \sigma_1 \geq -237 \text{ N/mm}^2$ , Raumtemperatur, Ausgangszustand: Rekristallisationsgeglüht)

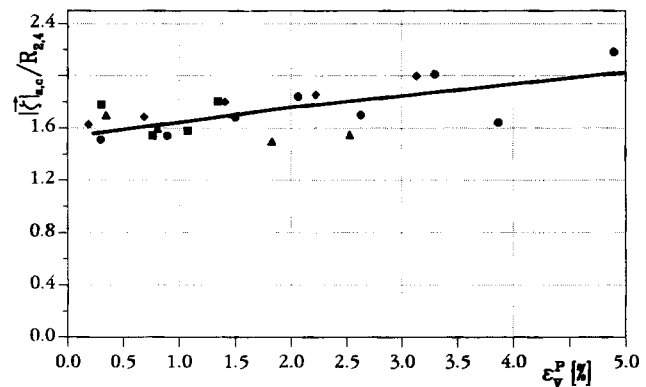


Bild 4. Kinematische Verfestigung

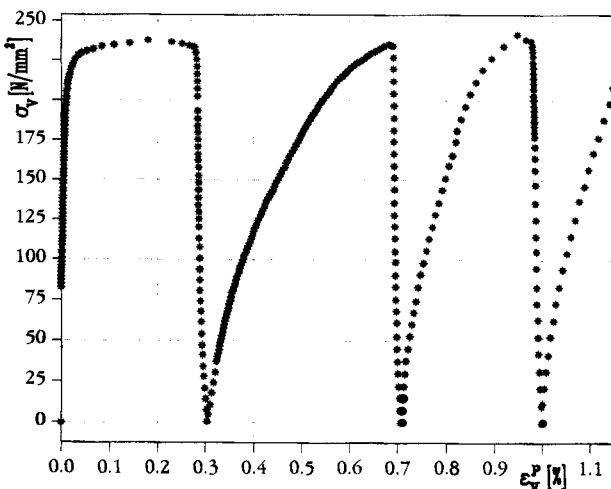


Bild 5. Vergleichsspannungs-Dehnungsverlauf  $\sigma_V(\epsilon_V^p)$  für zyklische einachsige Belastung von X2CrNi18.9

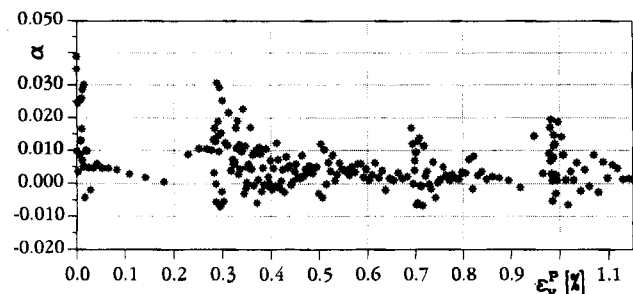


Bild 6. Ansatzfunktion  $\alpha(\epsilon_V^p)$

im Fließkurvenverlauf eingeleitet wird. Bei allen folgenden Plastifizierungen in der Zyklenfolge macht dagegen die Fließkurve im Übergangsbereich einen verhältnismäßig großen Bogen. Bemerkenswert ist zudem, daß bereits während der Entlastungsphasen der Werkstoff erneut plastifiziert, d. h. in Bild 2 würde beim realen Werkstoff Punkt 4 über Punkt 3, Punkt 7 unter Punkt 6 usw. liegen. Dies deutet sich bereits in Bild 4 durch  $|\zeta_{a,c}|/R_{2,4} > 1$  an.

In Bild 6 ist schließlich die Ansatzfunktion  $\alpha(\varepsilon_v^p)$  für den in Bild 5 dargestellten zyklischen Spannungsverlauf wiedergegeben. Die Kurve wurde online aus den Messungen (Spannung, Formänderungen) unter Zwischenschaltung eines Computers nach Gl. (2) berechnet. Man sieht, daß die erste Plastifizierung mit  $\alpha > 0$  beginnt und dann nach einer Vergleichsdehnung von etwa  $\varepsilon_v^p = 0.2\%$  auf  $\alpha = 0$  abgeklungen ist. Die Fließfläche hat sich in diesem Übergangsbereich von einem Rotationsellipsoiden in einen Zylinder entwickelt. Entsprechend dem „weichen“ Übergang der Vergleichsspannung in Bild 5 ist für die folgenden Zyklen der Verlauf der Ansatzfunktion  $\alpha(\varepsilon_v^p)$  „gestreckter“. Man erkennt, daß  $\alpha$  immer mit einem positiven Wert beginnt (konvexe Fließfläche) und dann abfällt.

Die obigen Ergebnisse zeigen, daß auch für bestimmte Eisenwerkstoffe eine Fließpotentialmodellierung im elastisch-plastischen Übergangsbereich möglich ist. Numerische Einspielsimulationen mit der Zweiflächenverfestigungstheorie haben gezeigt, daß die heute noch überwiegende Annahme einer Zylinderfließfläche ( $\alpha = 0$ ) im Ergebnis stark von Rechnungen abweicht, die mit einer Übergangsfließfläche  $\alpha(\varepsilon_v^p)$  durchgeführt wurden. Dies gilt besonders für den Fall, daß die Zyklen in Formänderungsbereichen liegen, die stark vom Fließflächenwechsel betroffen sind.

### Literatur

- 1 MAHRENHOLTZ, O.; ISMAR, H.: Ein Modell des elastisch-plastischen Übergangsverhaltens metallischer Werkstoffe. Abh., Braunsch. Wiss. Gesellsch. **30** (1979), 138–144.
- 2 ISMAR, H.; SCHMITT, J.: Zur Modellierung der Verfestigung metallischer Werkstoffe unter zyklischer Belastung in der Umformtechnik. Steel Research **63** (1992), 27–32.
- 3 MISES, R. v.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM **8** (1928), 161–185.

*Anschrift:* Prof. Dr. HEINZ ISMAR, Dipl.-Ing. JOACHIM SCHMITT, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Universität des Saarlandes, W-6600 Saarbrücken, Deutschland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 328–T 330

Akademie Verlag

LAERMANN, K.-H.

### Experimentelle/Numerische Analyse des Spannungszustandes in aus verschiedenen Werkstoffen zusammengesetzten Scheiben

MSC (1980): 73K20

Basierend auf der Randintegral-Methode wird ein experimentell/numerisches Verfahren beschrieben. Dieses ermöglicht, ausgehend von experimentell gegebenen Randwerten einer harmonischen Funktion, hier der 1. Invarianten des Spannungstensors, der Hauptspannungssumme, die Werte dieser Funktion im Innern einer Scheibe beliebiger Randgeometrie, die aus mehreren Bereichen aus unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt ist, zu berechnen. Die Randwerte werden im spannungsoptischen Versuch aus den Isochromatenordnungen längs des Außenrandes des ebenen Objektes ermittelt. Die automatische, digitale Auswertung der Interferenzlinien, der Isochromaten liefert die Differenz der Hauptnormalspannungen im Inneren, die zusammen mit der Spannungssumme die Hauptnormalspannungen selbst liefert. Die in der automatisierten Auswertung problematische experimentelle Ermittlung der Hauptachsen des Spannungstensors über die Isoklinen ist zur betragsmäßigen Berechnung der Hauptnormalspannungen nicht erforderlich.

Ausgehend von der Green'schen Formel kann für ein ebenes Problem mit den Randwerten  $u^*$  und  $q^* := u^*_{,n}$  einer harmonischen Funktion  $u$  deren Wert in jedem beliebigen Punkt  $M$  im Inneren eines durch den Rand  $\Gamma$  begrenzten Bereiches  $\Omega$  berechnet werden [1].

$$u_M = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ \ln \frac{1}{r} q^* - \left( \ln \frac{1}{r} \right)_{,n} u^* \right] d\Gamma. \quad (1)$$

Liegt  $M$  auf dem Rand selbst, so läßt sich bei gegebenen Randwerten  $u^*$  (Dirichletsches Problem) die Normalenableitung  $q^*$  berechnen:

$$(q^*) = [G^*]^{-1} \cdot [H^*] \cdot (u^*). \quad (2)$$

Die Elemente der Matrizen  $[H^*]$  und  $[G^*]$  werden nach der Rand-Element-Methode [2] mit den Interpolationsfunktionen  $\varphi(\hat{x})$  und  $\psi(\hat{x})$  wie folgt ermittelt:

$$h_{\kappa\nu}^r = \frac{1}{2} \delta_{\kappa\nu} + \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{r_{\nu}} \right)_{,n} \int_{\Gamma_{\mu}} \varphi(\hat{x}) d\Gamma, \quad (3)$$

$$g_{\kappa\nu}^r = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{\nu}} \int_{\Gamma_{\mu}} \psi(\hat{x}) d\Gamma.$$

Handelt es sich um eine Scheibe mit mehreren Einschlüssen (Subbereiche  ${}^i\Omega$ ,  $i \in [2/I]$ ) mit den Rändern  ${}^i\Gamma$ ,  $i \in [2/I]$  und sind nur die Randwerte  ${}^1u$  bekannt, (Fig. 1) so gilt

$${}^1\Omega \quad \sum_{i=1}^I [{}^1H] ({}^1U) = \sum_{i=1}^I [{}^1G] ({}^1q); \quad i \in [1/I] \quad (a)$$

$${}^i\Omega \quad [{}^iH] ({}^iu) = [{}^iG] ({}^iq); \quad i \in [2/I] \quad (b).$$

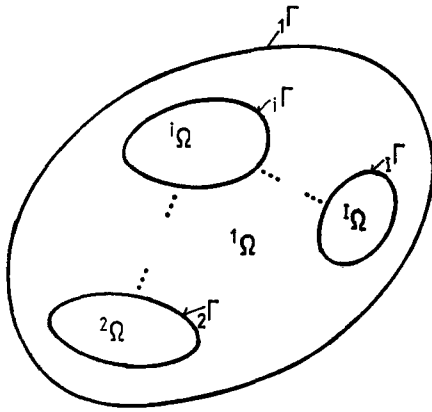


Fig. 1

Unter Berücksichtigung der Kontaktbedingungen,

$$({}^iu) = {}^ia({}^1u), \quad ({}^iq) = {}^ib({}^1q), \quad i \neq 1, \quad (5)$$

die längs der Ränder  ${}^i\Gamma$ ,  $i \neq 1$  konstant seien, folgt aus Gln. (4)

$$\sum_i \left[ [{}^1G]; [{}^2K]; \dots; [{}^iK]; \dots; [{}^IK] \right] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} ({}^1q) \\ ({}^2u) \\ \vdots \\ ({}^iu) \\ \vdots \\ ({}^Iu) \end{bmatrix}}_{(x)} = [{}^1H] \cdot ({}^1u) \quad (6)$$

bzw. mit Einführung des Supervektors  $(x)$  für die Werte der Normalenableitung  ${}^1q$  und den Funktionswerten  ${}^1u$  sowie der Matrix  $[K]$

$$(x) = [K]^{-1} \cdot [{}^1H] \cdot ({}^1u). \quad (6a)$$

Die Matrizen  $[{}^iK]$ ,  $i \neq 1$  sind wie folgt definiert:

$$[{}^iK] = \frac{{}^ia}{{}^ib} [{}^1G] [{}^iG]^{-1} [{}^iH] - [{}^1H]. \quad (7)$$

$\sum_i$ ,  $i \in [1/I]$  bezeichnet die Summe aller diskreten Randpunkte. Nach Auflösung des linearen Gleichungssystems werden die Werte  ${}^1u$  und  ${}^1q$  nach Gln. (5) und (4) berechnet.

Die 1. Invariante  $S$  des Spannungstensors erfüllt die Laplace'sche Differentialgleichung und ist somit eine harmonische Funktion; es gilt also

$$u \cong S, \quad q \equiv u_{,n} \cong S_{,n}.$$

Aus der spannungsoptischen Untersuchung eines aus mehreren Teilbereichen zusammengesetzten ebenen Problems ergeben sich längs eines unbelasteten äußeren Randes  ${}_1\Gamma$  mit der gemessenen Isochromatenordnung  ${}_1\delta$ , der sogen. spannungsoptischen Konstanten  ${}_1\hat{S}$  für den Bereich  ${}_1\Omega$  und der Dicke  $d$  der Scheibe die Randwerte

$$({}_1S) \triangleq ({}_1\sigma) = \frac{{}_1\hat{S}}{d} ({}_1\delta). \quad (8)$$

Wird nun längs der Ränder  ${}_i\Gamma$ ,  $i \neq 1$ , z. B. voller Verbund angenommen, so folgt, mit den unterschiedlichen mechanischen und optischen Eigenschaften der Werkstoffe der einzelnen Teilbereiche, für die Koeffizienten  ${}_ia$  und  ${}_ib$ , welche die Kontaktbedingungen beschreiben:

$${}_ia = -{}_ib = \frac{{}_iE(1 - {}_i\mu)}{{}_iE(1 - {}_1\mu)}. \quad (9)$$

Durch eine Grenzwertbetrachtung kann der Einfluß von am äußeren Rand  ${}_1\Gamma$  angreifenden Einzellasten  $P_m$  erfaßt werden; der Gl. (6a) ist ein Zusatzglied anzufügen, so daß diese nunmehr lautet [3]

$$(x) = [K]^{-1} \{ [{}_1H] \cdot ({}_1S) + [{}_1H^{(m)}] \cdot ({}_1S^{(m)}) \} \quad (10)$$

mit den Elementen des Vektors  $({}_1S^{(m)})$ :

$${}_1s_{\kappa\nu}^{(m)} = \begin{cases} \frac{2P_m \cos \alpha_m}{d} & \text{wenn } \nu = m \\ 0 & \text{wenn } \nu \neq m \end{cases} \quad (11)$$

und der Matrix  $[{}_1H^{(m)}]$ :

$${}_1h_{\kappa\nu}^{(m)} = \begin{cases} \frac{2}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{r_{\nu,n}} \right) & \text{wenn } \nu = m \\ 0 & \text{wenn } \nu \neq m. \end{cases} \quad (12)$$

Mit der Lösung nach Gl. (10) und Berechnung von  ${}_iS$ , sowie  ${}_iS_n$  entsprechend Gln. (5) und (4) kann nunmehr die Summe der Hauptnormalspannungen in jedem beliebigen Punkt  $M$  der einzelnen Bereiche  ${}_i\Omega$  ermittelt werden:

im Bereich  ${}_1\Omega$ :

$${}_1S_M = \sum_{i=1}^I \{ ({}_1h_{M\nu})^T \cdot ({}_1S) + ({}_1g_{M\nu})^T \cdot ({}_1S_n) \} + ({}_1h_{M\nu}^{(m)})^T \cdot ({}_1S^{(m)}); \quad i \in [1/I] \quad (13)$$

im Bereich  ${}_i\Omega$ :

$${}_iS_M = ({}_ih_{M\nu})^T \cdot ({}_iS) + ({}_ig_{M\nu})^T \cdot ({}_iS_n); \quad i \in [2/I]. \quad (14)$$

Aus dem spannungsoptischen Versuch ergibt sich nach der Hauptgleichung der Spannungsoptik die Differenz der Hauptnormalspannungen:

$${}_i\Delta_M = (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{{}_i\hat{S}}{d} \delta_M; \quad i \in [1/I]. \quad (15)$$

Damit sind diese dann selbst in jedem beliebigen Punkt der gesamten Scheibe gegeben.

## Literatur

- 1 SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil IV. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
- 2 HARTMANN, F.: Methode der Randelemente. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo 1987.
- 3 LAERMANN, K. H.: Ein hybrides Verfahren zur Bestimmung des Spannungszustandes in ebenen, aus unterschiedlichen Werkstoffen zusammengesetzten Objekten. VDI-Berichte Nr. 882, VDI-Verlag Düsseldorf 1991.

*Anschrift:* Univ.-Prof. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. KARL-HANS LAERMANN, BUGH Wuppertal, Fachbereich 11: Bautechnik, Lehr- und Forschungsgebiet Baustatik, Pauluskirchstr. 7, W-5600 Wuppertal 2, Deutschland

## 2.3a MIKROSTRUKTURMODELLIERUNG/STOFFGESETZE

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 331–T 333

Akademie Verlag

BLINK, S.; MUSCHIK, W.

### Mesoscopic Concepts for Constitutive Equations of Nematic Liquid Crystals in Alignment Tensor Formulation

MSC (1980): 73B05

Starting out with mesoscopic orientational balance equations for a Cosserat continuum macroscopic constitutive equations are derived by exploiting the dissipation inequality due to Coleman and Noll. The chosen state space includes the second order alignment tensor and its derivatives. The results are compared with those obtained by Ericksen and Leslie, who introduced a unit director field  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  indicating only the mean orientation of the media, and with those of Ericksen's '91-paper, which describes the general uniaxial case.

#### 1. The mesoscopic concept

To describe the behavior of a nematic liquid crystal a common model is used for the particles which are assumed to be rigid rods with fixed length [4]. Thus the orientation is given by a microscopic director  $\mathbf{n}$  of unit length

$$\mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{with} \quad \mathbf{u} := \frac{d}{dt} \mathbf{n}. \quad (1)$$

Consequently each particle has a set of five independent coordinates (three in position space and two in orientation space). For simplicity we presuppose a head-tail symmetry for the particles, thus particles with orientation  $\mathbf{n}$  and  $-\mathbf{n}$  are indistinguishable, and that the particles are needle-shaped.

Then we combine this microscopic director approach with an orientation distribution function (ODF) for being able to describe changes in orientational order. Therefore we introduce the ODF

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \equiv f(\cdot), \quad (\cdot) \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1, \quad (2)$$

which has a symmetry  $f(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = f(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$  according to the particle symmetry. In the case of total alignment, the ODF is given by

$$f(\cdot) = \frac{1}{2} [\delta(|\mathbf{n} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)|) + \delta(|\mathbf{n} - \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)|)], \quad (3)$$

and the microscopic director reduces to the macroscopic director  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  introduced by ERICKSEN and LESLIE [5], [8] as we have shown in [3]. With this mesoscopic approach a new set of balance equations results [1].

#### 2. Exploitation of the dissipation inequality

The dissipation inequality reads [9]

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varrho(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}, t)] + \nabla \cdot [\varrho(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x}, t)] - \varrho(\mathbf{x}, t) \sigma(\mathbf{x}, t) \geq 0. \quad (4)$$

With the usual ansatz  $\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{r(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)}$  (which can be considered as the definition of the temperature  $\theta(\mathbf{x}, t)$ ), and the definitions for the free energy density  $F(\mathbf{x}, t)$  and for the excess heat flux vector  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$

$$F(\mathbf{x}, t) := \varepsilon(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

we insert the balance of internal energy into the dissipation inequality and get

$$-\varrho(\mathbf{x}, t) \left[ \frac{d}{dt} F(\mathbf{x}, t) + \eta(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \theta(\mathbf{x}, t) \right] + \nabla \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) + \varphi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \theta(\mathbf{x}, t) + E(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad (6)$$

$$E(\mathbf{x}, t) := [\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] : \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{I} [\nabla s(\mathbf{x}, t)] : \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{I} s(\mathbf{x}, t) \cdot \varepsilon : \mathbf{t}(\mathbf{x}, t). \quad (7)$$

We now transform (7) using the expressions for  $s(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  and  $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$  we have got from the orientational balances [3] under the assumption that there is no coupling between orientation and diffusion, i.e.  $\delta \mathbf{v}(\cdot) = \mathbf{o}$ . Introducing  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  and  $\omega_{ij}(\mathbf{x}, t)$  for the symmetric and skew-symmetric part of the velocity gradient, and  $N_i(\cdot) := D_i^{(1)} n_i = u_i(\cdot) - n_j \omega_{ji}(\mathbf{x}, t)$  for the co-rotational time derivative of  $\mathbf{n}$ , we get from (7) by a straight forward calculation

$$E(\mathbf{x}, t) = D_{ij}(\mathbf{x}, t) t_{ji}(\mathbf{x}, t) + \omega_{ij}(\mathbf{x}, t) t_{ji}(\mathbf{x}, t) + 2B_{ilk}(\mathbf{x}, t) M_{lki}(\mathbf{x}, t) + 2C_{ilk}(\mathbf{x}, t) M_{lki}(\mathbf{x}, t) + 2(\nabla_i A_{lo}(\mathbf{x}, t)) \omega_{ok}(\mathbf{x}, t) M_{lki}(\mathbf{x}, t) - 2\Gamma_{mi}(\mathbf{x}, t) t_{mi}(\mathbf{x}, t) - 2A_{kn}(\mathbf{x}, t) \omega_{nj}(\mathbf{x}, t) t_{[kj]}(\mathbf{x}, t), \quad (8)$$

where we introduced the following abbreviations

$$B_{ilk}(\mathbf{x}, t) := \int_{S^2} (\nabla_i f(\cdot)) n_l N_k(\cdot) d^2 n; \quad C_{ilk}(\mathbf{x}, t) := \int_{S^2} f(\cdot) n_i \nabla_l u_k(\cdot) d^2 n, \quad (9)$$

$$M_{lki}(\mathbf{x}, t) := \int_{S^2} n_l h_{kl}(\cdot) d^2 n \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} m_{ji}(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

$$\Gamma_{mi}(\mathbf{x}, t) := \int_{S^2} f(\cdot) n_{lm} N_l(\cdot) d^2 n; \quad A_{kn}(\mathbf{x}, t) := \int_{S^2} f(\cdot) n_k n_n d^2 n. \quad (11)$$

By this calculation the fields  $s(\mathbf{x}, t)$  and  $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$  in (7) are replaced by the new macroscopic fields  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$ , and  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  which are mesoscopically defined by (9) to (11). The quantity  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  in (11) is a second order alignment tensor, for which we can derive a relaxation equation of the form

$$D_t^{(2)} A_{jk}(\mathbf{x}, t) = G_{jk}(\mathbf{x}, t) := \int_{S^2} f(\cdot) n_{(j} N_{k)}(\cdot) d^2 n, \quad (12)$$

with  $D_t^{(2)} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  being the co-rotational time derivative of  $\mathbf{A}$ . Thus we introduce the state space as

$$\mathcal{Z} := \{\varrho, \theta, \nabla \theta, \mathbf{D}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}, \nabla \mathbf{A}, \nabla \nabla \mathbf{A}, D_t^{(2)} \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}\}(\mathbf{x}, t). \quad (13)$$

The Coleman-Noll evaluation of the transformed dissipation inequality with the state space (13) leads to a set of algebraic differential equations coupling the derivatives of  $F$  and  $\mathcal{Q}$  and the constitutive equations, which results for example in

$$\varrho F(\varrho, \theta, \mathbf{A}, \nabla \mathbf{A}) = F_0(\varrho, \theta, \mathbf{A}) + W(\theta, \mathbf{A}, \nabla \mathbf{A}). \quad (14)$$

In equilibrium a Taylor-expansion of the rest dissipation equation around equilibrium under the presupposition  $\mathbf{H}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} \geq 0 \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$  [9] leads to further restrictions to the constitutive equations [2].

### 3. Constitutive equations

With the ansatz of  $W$  and  $\mathcal{Q}$  being maximal second order in  $(\nabla \theta, \nabla \mathbf{A}, \nabla \nabla \mathbf{A}, D_t^{(2)} \mathbf{A}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma})$ , and maximal linear in the traceless alignment tensor  $\mathbf{a} := \mathbf{A} - \frac{1}{3} \delta$  [10] we get for the elastic free energy

$$\begin{aligned} W = & [\beta_1 + \frac{1}{3}(\beta_5 + \beta_6)] \nabla_i a_{ij} \nabla_k a_{kj} + [\beta_2 + \frac{1}{3}(\beta_7 + \beta_8)] \nabla_i a_{jk} \nabla_l a_{kl} \\ & + [\beta_3 + \frac{1}{3}(\beta_9 + \beta_{10})] \nabla_i a_{jk} \nabla_k a_{ji} + \beta_4 \nabla_i a_{ij} \nabla_j a_{kl} a_{lk} + \beta_5 a_{ji} \nabla_i a_{jk} \nabla_l a_{lk} \\ & + \beta_6 \nabla_i a_{ij} a_{jk} \nabla_l a_{lk} + \beta_7 \nabla_i a_{jk} a_{il} \nabla_l a_{kj} + \beta_8 \nabla_i a_{jk} \nabla_i a_{jl} a_{lk} + \beta_9 \nabla_i a_{jk} \nabla_k a_{il} a_{lj} \\ & + \beta_{10} \nabla_i a_{jk} \nabla_k a_{jl} a_{ii}, \end{aligned} \quad (15)$$

and for the couple stress tensor

$$\begin{aligned} M_{lki} = & \frac{1}{4} [\gamma_1 + \frac{1}{3}(\gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8)] (\nabla_j a_{jk} \delta_{il} - \nabla_j a_{jl} \delta_{ki}) \\ & + \frac{1}{4} [\gamma_2 + \frac{1}{3}(\gamma_{10} - \gamma_{11} - \gamma_{12})] (\nabla_l a_{ki} - \nabla_k a_{li}) + \frac{1}{4} \gamma_5 (\nabla_k a_{jm} \delta_{il} a_{jm} - \nabla_l a_{jm} \delta_{ik} a_{jm}) \\ & + \frac{1}{4} \gamma_6 (\nabla_j a_{km} \delta_{il} a_{mj} - \nabla_j a_{lm} \delta_{ik} a_{mj}) + \frac{1}{4} \gamma_7 (\nabla_j a_{jk} a_{li} - \nabla_j a_{jl} a_{ki}) \\ & + \frac{1}{4} \gamma_8 (\nabla_j a_{jm} \delta_{il} a_{km} - \nabla_j a_{jm} \delta_{ik} a_{lm}) + \frac{1}{4} \gamma_9 (\nabla_i a_{lj} a_{kj} - \nabla_l a_{kj} a_{ij}) \\ & + \frac{1}{4} \gamma_{10} (\nabla_i a_{ji} a_{jk} - \nabla_k a_{ji} a_{jl}) + \frac{1}{4} \gamma_{11} (\nabla_j a_{li} a_{kj} - \nabla_j a_{ki} a_{lj}) + \frac{1}{4} \gamma_{12} (\nabla_k a_{lj} a_{ij} - \nabla_l a_{kj} a_{ij}) \\ & + \frac{1}{4} [\tilde{\gamma}_1 + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_3] (\nabla_k \theta \delta_{il} - \nabla_l \theta \delta_{ki}) + \frac{1}{4} \tilde{\gamma}_3 (\nabla_j \theta a_{jk} \delta_{il} - \nabla_j \theta a_{jl} \delta_{ik} + \nabla_k \theta a_{li} - \nabla_l \theta a_{ki}). \end{aligned} \quad (16)$$

In equilibrium we get additional constitutive equations, for example the skew-symmetric part of the stress tensor then reads

$$\begin{aligned} t_{[jk]}^{eq} = & -\frac{1}{4} [\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{3} (\gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8 + \gamma_{10} - \gamma_{11} - \gamma_{12})] [(\nabla_j \nabla_p a_{pk})^{eq} - (\nabla_k \nabla_p a_{pj})^{eq}] \\ & -\frac{1}{4} (\gamma_6 - \gamma_{12}) [a_{oq}^{eq} (\nabla_j \nabla_q a_{ko})^{eq} - a_{oq}^{eq} (\nabla_k \nabla_q a_{jo})^{eq}] - \frac{1}{4} (\gamma_7 - \gamma_{11}) [a_{oq}^{eq} (\nabla_p \nabla_q a_{qk})^{eq} - a_{kp}^{eq} (\nabla_p \nabla_q a_{qj})^{eq}] \\ & -\frac{1}{4} (\gamma_8 + \gamma_{10}) [a_{ko}^{eq} (\nabla_j \nabla_p a_{po})^{eq} - a_{jo}^{eq} (\nabla_k \nabla_p a_{po})^{eq}] \\ & -\frac{1}{4} (\gamma_6 + \gamma_{10}) [\nabla_p a_{ko} \nabla_j a_{op} - \nabla_p a_{jo} \nabla_k a_{op}]^{eq} - \frac{1}{4} (\gamma_8 - \gamma_{12}) [\nabla_p a_{po} \nabla_j a_{ko} - \nabla_p a_{po} \nabla_k a_{jo}]^{eq}. \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4. Constitutive equations assuming special ODF

Several simplifications of the constitutive equations may be derived by assuming a special form for the orientation distribution function

- if  $f(\cdot)$  is uniaxial  $f(\cdot) = f(|\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)|, \mathbf{x}, t)$  we get  $a_{ij} = S(d_i d_j - \frac{1}{3} d_{ij})$  [6] which can be inserted into the constitutive equations obtained above.
- in the case of total alignment ( $S = 1$ ) the elastic free energy reduces to

$$\begin{aligned} W = & (\beta_1 + \beta_6) (\nabla_k d_k) (\nabla_j d_j) + (\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + 2\beta_7 + \beta_{10}) (d_i \nabla_i d_k) (d_j \nabla_j d_k) \\ & + 2(\beta_2 - \frac{1}{3} \beta_7 + \frac{2}{3} \beta_8) (\nabla_j d_k) (\nabla_j d_k) + (\beta_3 + \beta_9) (\nabla_j d_k) (\nabla_k d_j), \end{aligned} \quad (18)$$

which compared to the FRANK-notation [7] leads to

$$\begin{aligned} k_{11} = & 2(\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_6 - \frac{2}{3} \beta_7 + \frac{4}{3} \beta_8 + \beta_9), \quad k_{22} = 4(\beta_2 - \frac{1}{3} \beta_7 + \frac{2}{3} \beta_8), \\ k_{24} = & 2(\beta_3 + \beta_9), \quad k_{33} = 2(\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 + \frac{4}{3} \beta_7 + \frac{4}{3} \beta_8 + \beta_{10}). \end{aligned} \quad (19)$$

- finally in the one constant approximation we get

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} = 4\beta_2 + \frac{8}{3} \beta_8. \quad (20)$$

#### 5. Conclusions

The main results of the theory presented here may be stated as

- a fully mesoscopic founded theory is presented, introducing quite naturally a second rank alignment tensor [10],
- the Ericksen-Leslie theory, as well as the Maier-Saupe theory are shown to be special cases (i.e., the case of total alignment and the uniaxial case) of this approach,
- the coefficients of the free energy are determined in comparison with the Frank theory,
- the couple stress tensor and the stress tensor in equilibrium can be calculated explicitly.

#### Acknowledgement

We thank the Sonderforschungsbereich 335 “Anisotrope Fluide” and the Draloric, W-8672 Selb, Germany, for financial support, H. EHRENTAUT and C. PAPENFUSS for valuable discussions.

#### References

- 1 BLENK, S.; EHRENTAUT, H.; MUSCHIK, W.: Statistical foundation of macroscopic balances for liquid crystals in alignment tensor formulation. *Physica A*, **174** (1991), 119–138.
- 2 BLENK, S.; EHRENTAUT, H.; MUSCHIK, W.: Macroscopic constitutive equations for liquid crystals induced by their mesoscopic orientation distribution. *Int. J. Eng. Sci.* **30** (1992) 9, 1127–1143.
- 3 BLENK, S.; MUSCHIK, W.: Orientational balances for nematic liquid crystals describing different degrees of orientational order. *ZAMM* **72** (1992) 5, T 400–T 403.
- 4 DE GENNES, P. G.: *The physics of liquid crystals*. Clarendon Press, Oxford 1974.
- 5 ERICKSEN, J. L.: Conservation laws for liquid crystals. *Trans. Soc. Rheol.* **5** (1961), 23–34.
- 6 ERICKSEN, J. L.: Liquid crystals with variable degree of orientation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **113** (1991) 2, 97–120.
- 7 FRANK, F. C.: Liquid crystals, on the theory of liquid crystals. *Discussion Faraday Soc.* **25** (1958), 19–28.
- 8 LESLIE, F. M.: Some constitutive equations for liquid crystals. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **28** (1968), 265–283.
- 9 MUSCHIK, W.: *Aspects of non-equilibrium thermodynamics*. World Scientific, Singapore 1990.
- 10 PARDOUITZ, I.; HESS, S.: On the theory of irreversible processes in molecular liquids and liquid crystals, nonequilibrium phenomena associated with the second and fourth rank alignment-tensors. *Physica 100A* (1980), 540–562.

Address: Dr. STEFAN BLENK, Prof. Dr. WOLFGANG MUSCHIK, Institut für Theoretische Physik, PN 7-1, Technische Universität Berlin, Hardenbergstr. 36, W-1000 Berlin 12, Germany



LEI, Y.; ZIEGLER, F.

## Associate Linear System Approach to the Random Vibration of Bilinear Hysteretic System

MSC (1980): 73B35

### 1. Introduction

The random response of bilinear hysteretic system [see Fig. (1)] has been analysed by various methods. Statistical linearization scheme is frequently used [1], however, the method becomes inaccurate when  $\alpha$  is small. Some more sophisticated techniques with varying degree of complexity have been proposed [2–4]. For the special case of an elasto-plastic system, KARNOPP and SCHARTON [5] laid the foundation of the associate linear system (ALS) approach, and further research work has been done by VANMARCKE [6, 8]. Recently, IRSCHIK and ZIEGLER improved the approach by the concept of effective loading [7]. The method reduces the inelastic response analysis to the elastic response analysis of the associate linear system with unchanged stiffness and light viscous damping. It is simple and straightforward, and results in satisfactory accuracy.

In the present paper, the ALS approach with the concept of effective loading is extended to analyse the random response of bilinear hysteretic system with small stiffness-ratio  $\alpha$ .

### 2. Equation of motion

As indicated in Fig. (2) the equation of motion of the physical model of bilinear hysteretic system under ground excitation is derived as

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{x}_g - (1 - \alpha) \omega_0^2 y \quad (1)$$

where  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\ddot{x}_g$  is a random process, for simplicity, it is assumed to be a white noise with one-sided power spectrum density  $S_0$ .  $y$  indicates the movement of the slider in Fig. (2).

$x$  can be split into  $x^0$  and  $x^*$  as follows

$$x^* = (1 - \alpha) y, \quad (2a)$$

$$\ddot{x}^0 + 2\zeta_0 \omega_0 \dot{x}^0 + \omega_0^2 x^0 = -\ddot{x}_g - \ddot{x}^*, \quad (2b)$$

$x^*$  indicates the plastic drift of the system and a small viscous damping is added in Eq. (2b).

### 3. Deterministic solution and simulation

Contrary to the common direct numerical solution of the above equation of motion with added size of the response-measures state space due to the differential representation of the hysteretic force [1], the efficient method of updated internal loading [7] is applied, i.e., the plastic drift  $x^*$  in Eq. (2b) is treated as an internal loading to be updated in the course of time, and Eq. (2b) is the motion equation of the associate linear system with original stiffness but under both the external loading and the internal loading. A time-stepping solution is adopted in an incremental formulation. Assuming an initial value for  $\Delta y_i$  at time  $t_i$ ,

$$\Delta x_i^* = (1 - \alpha) \Delta y_i, \quad (3)$$

and using a linear time-ramp function for  $x^*$  within  $\Delta t_i$ ,  $\Delta x_i^0$  can be evaluated from Eq. (2b) with a linear strategy. Subsequently, the nonlinear equations are solved in an iterative manner incorporating the bilinear force-displacement relation.

### 4. Approximate stochastic analysis

#### 4.1. Stationary response

In Eq. (2b),  $x^*$  appears as an additional external loading acting upon the associate linear system, the associate linear system is therefore driven by an effective loading consisting of the original external loading and the additional loading. We characterize the effective loading including the inelastic influence by changing the given excitation

spectrum density through a reduction factor  $\psi_0$ . This idea can also be interpreted from the concept of overall energy balance [8].

The variance of  $x^0$  is thus given by

$$\sigma_{x^0}^2 = \frac{\psi_0 \pi S_0}{4 \zeta_0 \omega_0^3}. \quad (4)$$

In order to get a proper value of  $\psi_0$ , the power balance relation of the system is considered.

1) If  $|y| < x_0/\alpha$ , between yielding excursions, the oscillator responds in the elastic regime. Yielding occurs whenever  $x^0$  surpasses either the positive or the negative yielding barrier, thus

$$\frac{1}{2} m \pi S_0 (1 - \psi_0) = k x_0 (1 - \alpha) [\mu^+ \langle \Delta y^+ \rangle - \mu^- \langle \Delta y^- \rangle], \quad (5)$$

where

$$\mu^\pm = \frac{\omega_0}{2\pi E(N^\pm)} \exp \left\{ \frac{(\pm x_0 + \alpha y)^2}{2\sigma_{x^0}^2} \right\},$$

and  $E(N^\pm)$  are the mean clump sizes as yielding excursions occur in clumps when the yielding barrier is not too high [6],  $\langle \Delta y^\pm \rangle$  are the mean increments of the movement of the slider in the positive and negative yielding excursion, respectively. They are determined by the energy relation during a yielding phase,

$$T_2 - T_1 = \Delta W_p - \Delta U, \quad (6)$$

where  $T_2 = 0$ ,  $T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^0{}^2$  and  $\Delta W_p$  is the dissipated work due to the slider.  $\Delta U$  is the change of potential energy of the system in its yielding and it corresponds to the change of the elastic strain energy of the spring (1) since the strain energy of the spring (2) does not change (Fig. (2)). Due to the unsymmetrical yielding barrier, yielding excursion in the positive and negative directions must be considered separately.

Taking expectation on both sides of Eq. (6) and assuming the increments to be exponentially distributed leads to the quadratic equations for  $\langle \Delta y^\pm \rangle$ .

2) If  $|y| > x_0/\alpha$ , elastic motion between yielding excursion is instantaneous, i.e. the oscillator moves back instantly to within  $|y| < x_0/\alpha$ .

With a certain  $y$  value, the above equations for  $\psi_0$  can be solved using a standard iteration procedure to get conditional statistical results for the associate linear system [7].

From Eq. (6), it is shown that the increments depend only on the most recent value of  $y$  and therefore it is reasonable to model  $Y(t)$  by a Markov process [4]. The corresponding FPK-equation for the transition probability density is

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} [\beta_1(y) p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\beta_2(y) p], \quad (7a)$$

where

$$\begin{aligned} \beta_1(y) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} E[\Delta Y | Y(t) = y]/\tau = \mu^+ \langle \Delta y^+ \rangle + \mu^- \langle \Delta y^- \rangle, \\ \beta_2(y) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} E[(\Delta Y)^2 | Y(t) = y]/\tau = 2[\mu^+ \langle \Delta y^+ \rangle^2 + \mu^- \langle \Delta y^- \rangle^2]. \end{aligned} \quad (7b)$$

When  $\alpha = 0$ , i.e., for elasto-plastic system,  $\beta_1 = 0$  and  $\beta_2$  becomes independent of  $y$ . Thus

$$p(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_2 t}} \exp \left( - \frac{y^2}{2\beta_2 t} \right); \quad \sigma_y^2 = \beta_2 t,$$

these are results derived by IRSCHIK and ZIEGLER [7].

When  $\alpha > 0$ , there exists a stationary response for  $y(t)$  due to the post-yielding stiffness  $\alpha k$ . Then

$$p(y) = \frac{c}{\beta_2(y)} \exp \left[ \int_0^y \frac{2\beta_1(x)}{\beta_2(x)} dx \right], \quad (8)$$

is the probability function. The unconditional statistics for the associate linear system can be evaluated further on the basis of the total probability theorem.

Comparison between the approximate results and those from the simulation scheme derived above is shown in Figs. (3–4).  $\alpha$  is selected to be  $\alpha = 0.2$  and the nondimensional excitation is  $H = \omega_0^3 x_0^2 / S_0$ .

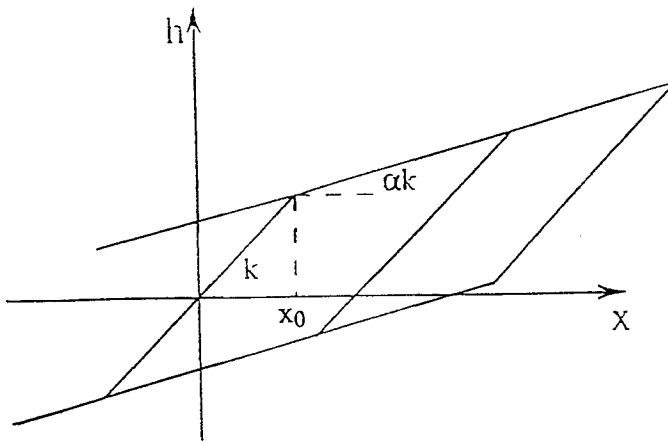


Fig. 1. Bilinear hysteretic force

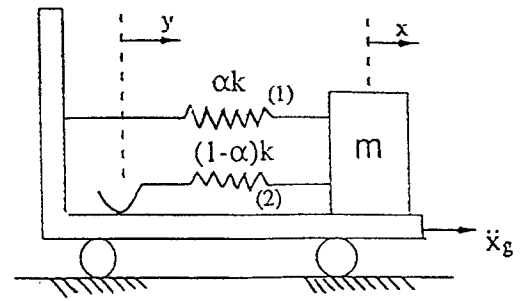


Fig. 2. System model

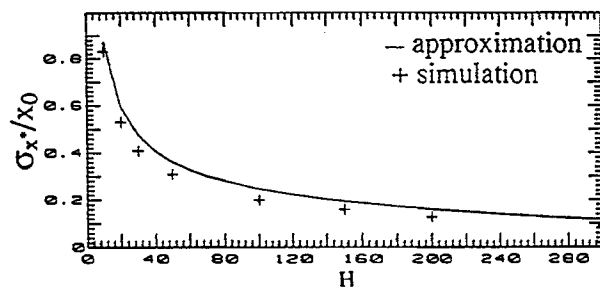


Fig. 3. Standard deviation of the plastic drift

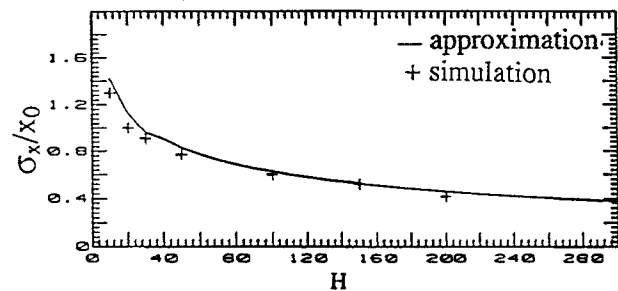


Fig. 4. Standard deviation of the total displacement

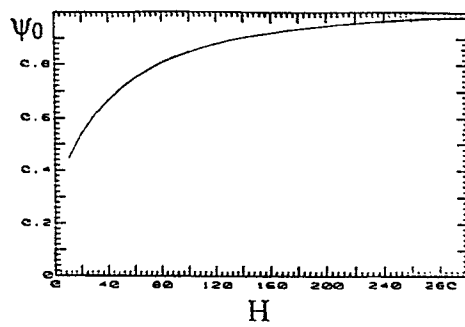


Fig. 5. Reduction factor

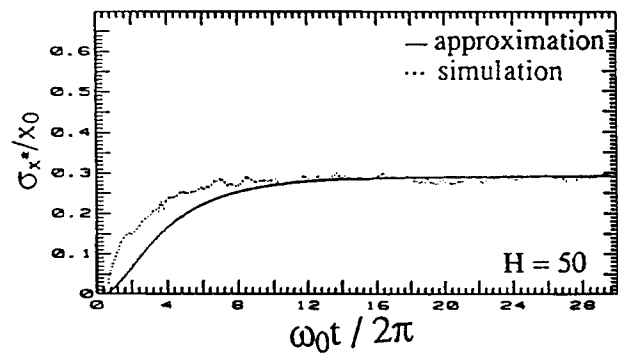


Fig. 6. Transient standard deviation of the plastic drift

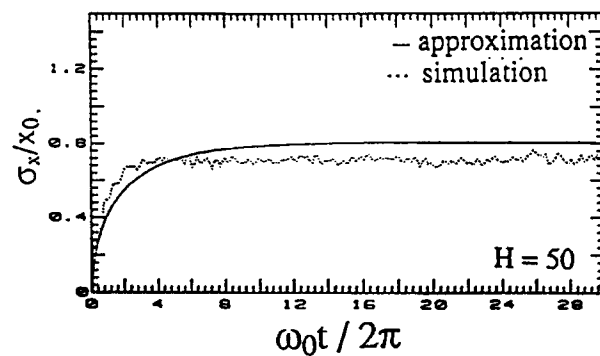


Fig. 7. Transient standard deviation of the total displacement

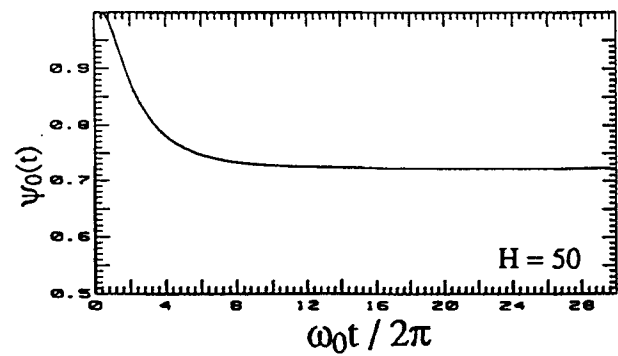


Fig. 8. Transient value of the reduction factor

#### 4.2. Transient response

The effective loading concept is still applied, however the reduction factor is now a time function  $\psi_0(t)$ . The nonstationary response variance for the associate linear system was approximated by, [7]

$$\sigma_{x_0}^2 = \frac{\pi S_0}{2\omega_0} \exp(-2\zeta_0\omega_0 t) \int_0^t \exp(-2\zeta_0\omega_0 \tau) \psi_0(\tau) d\tau. \quad (9)$$

To evaluate  $\psi_0(t)$ , the power balance equation is adapted by considering the nonstationary expression for  $E(N^\pm)$ , [7].  $\langle \Delta y^\pm \rangle$  are still determined by the energy relation during the yielding phase.

With a certain  $y(t)$  value, the conditional statistics for the associate linear system are estimated in a time-stepping procedure assuming  $\psi_0(t)$  to vary linearly within a time interval, [7].

The FPK-equation for the transition probability density of  $y(t)$  is given by Eq. (7) but the two coefficients are now time functions. This parabolic partial-differential equation can be solved by the Crank-Nicolson implicit finite-difference scheme. Evolution is also made in a time-stepping manner compatible with that for the solution of the associate linear system.

Figs. (6–7) indicate the comparison of the transient responses between the approximation and the simulation,  $\alpha$  is still selected to be  $\alpha = 0.2$ .

#### 5. References

- 1 WEN, Y. K.: Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation. *J. Appl. Mech.* **47** (1980), 150–154.
- 2 ZHU, W. Q.; LEI, Y.: Stochastic averaging of energy envelope of bilinear hysteretic system. In: ZIEGLER, F.; SCHÜELLER, G. I. (eds.): *Nonlinear stochastic dynamic engineering systems. Proc. IUTAM-Symposium. Springer-Verlag, Berlin 1988*, pp. 381–391.
- 3 CAI, G. Q.; LIN, Y. K.: On randomly excited hysteretic structures. *J. Appl. Mech.* **57** (1990), 442–448.
- 4 GROSSMAYER, R. L.; IWAN, W. D.: A linearization scheme for hysteretic systems subjected to random excitation. *Earth. Eng. and Struct. Dyn.* **9** (1981), 171–185.
- 5 KARNOPP, D.; SCHARTON, T. D.: Plastic deformation in random vibration. *J. Acoust. Soc. Am.* **39** (1966), 1151–1161.
- 6 VANMARCKE, E. H.: Structural response to earthquakes. In: LOMNITZ, C.; ROSENBLUETH, E. (eds.): *Seismic risk and engineering decisions. Elsevier, Amsterdam 1976*.
- 7 IRSCHIK, H.; ZIEGLER, F.: Evolutionary damage prediction of discrete and continuous elastoplastic structures with random earthquake excitation. In: LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T. (eds.): *Computational mechanics of probabilistic and reliability analysis. Elmepress Int., Lausanne, Washington 1989*.
- 8 BHARTIA, B. K.; VANMARCKE, E. H.: Associate linear system approach to nonlinear random vibration. *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE* **117** (1991) 10, 2407–2428.

Address: Master Eng. YING LEI, Prof. Dr. FRANZ ZIEGLER, TU Wien, Institut für Allgemeine Mechanik, Wiedner Hauptstr. 8–10, A-1040 Wien, Austria

### On Intrinsic Geometry of Continua with Microstructure

MSC (1980): 73B99

The main objective of this note is to present some methodological foundations of a coherent geometric theory of material bodies irrelative of their dimension and possible internal microstructure or non-local character of constitutive relations. In spite of mathematical complexity the central idea giving rise to the abstract theory is straight forward: beginning with the configuration space as the basic underlying concept we determine the formal structure of the theory in a way which parallels analytical mechanics. In this aspect our approach substantially differs from earlier works in the field (cf. [6, 7] and the references cited therein). The basic concepts outlined here are worked out in details in [5].

We define a configuration space of the body as a set  $\mathcal{C} \equiv C(\mathcal{B}, \mathcal{Q}) = \{q: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Q}\}$  of all sufficiently regular maps of a  $n$ -dimensional manifold  $\mathcal{B}$  possibly with a boundary  $\partial\mathcal{B}$ , called a body or carrying manifold, into a  $N$ -dimensional manifold  $\mathcal{Q}$  without boundary, called a state manifold. To this scheme belong all known theories and less familiar propositions of their generalization. For example, the choice of  $\mathcal{B}$  to be a curve, a surface or a regular region in the three-dimensional Euclidean point space is appropriate for a theory of rods, shells or three-dimensional bodies. As most

familiar examples of a possible choice of the state manifold  $\mathcal{Q}$  one can mention  $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{E}^3 \times SO(3)$  or  $\mathbb{E}^3 \times GL(3)$  leading to the theories (of rods, shells or three-dimensional bodies) with single deformable director, with rigid triad or three deformable directors, respectively. Many other examples are considered in [5]. However, our consideration is not restricted to any particular case.

Assuming that the maps  $q: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Q}$  are sufficiently smooth, the configuration space  $\mathcal{C}$  can be equipped with the Banach manifold structure, obviously infinite dimensional [1]. This allows to adhere to all concepts and theorems of the advanced differential geometry. Let  $\mathcal{V} \equiv C(T\mathcal{C})$  and  $\mathcal{P} \equiv C(T^*\mathcal{C})$  denote the linear spaces of cross sections of the tangent and cotangent bundle of  $\mathcal{C}$ , respectively. In accordance with classical analytical mechanics we call the elements  $\delta q \in \mathcal{V}$  and  $p \in \mathcal{P}$  the generalized virtual displacements and the generalized global forces, respectively. The evaluation  $\langle p, \delta q \rangle \equiv p(\delta q)$  of  $p$  on  $\delta q$  is then called the global virtual work. Proceeding completely formally and assuming that  $q \in \mathcal{C}$  are differentiable maps, we have the associated tangent maps  $\mathfrak{F} \equiv Tq: T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{Q}$  which may be called the generalized deformation gradients. They can be viewed as the elements of the linear space  $\mathcal{F} \equiv C(q^*T\mathcal{Q} \otimes T\mathcal{B})$  of the cross sections of the tensor bundle. Here  $q^*T\mathcal{Q}$  denotes the pull-back vector bundle. Since  $\mathcal{F}$  has the natural manifold structure it is meaningful to speak about the linear spaces of the cross sections  $C(T\mathcal{F})$  and  $C(T^*\mathcal{F})$  of the tangent and cotangent bundles of  $\mathcal{F}$ . We shall refer to the elements  $\delta \mathfrak{F} \in C(T\mathcal{F})$  and  $\mathfrak{I} \in C(T^*\mathcal{F})$  as the generalized virtual deformation gradients and the generalized stresses, respectively. Then  $\langle \mathfrak{I}, \delta \mathfrak{F} \rangle \equiv \mathfrak{I}(\delta \mathfrak{F})$  may be called the local virtual work. As the basic postulate of the theory we assume the consistency of the local and global models in the sense that  $\langle \mathfrak{I}, \delta \mathfrak{F} \rangle = \langle p, \delta q \rangle$  for every  $q \in \mathcal{C}$  (cf. [7]).

At this place it is essential to note that the same concept can be naturally generalized by including higher order deformation gradients leading to the concept of the so-called non-simple materials. The appropriate mathematical setting for such theories is the concept of jet bundles but due to lack of space we will not go into details here (see [5]). A schematic sketch of the mathematical structure with deformation gradients up to the first order is given in [Fig. 1].

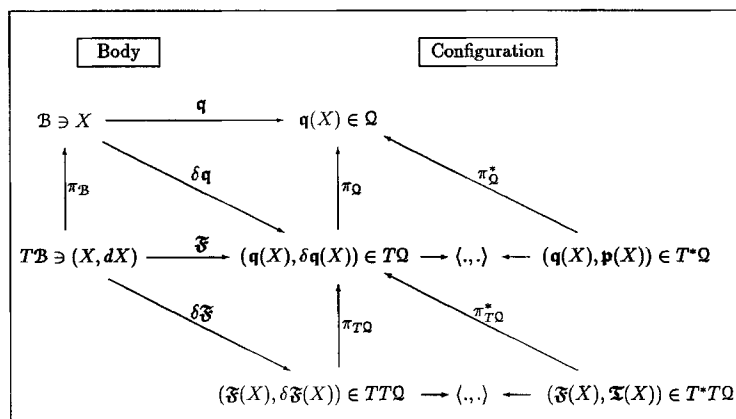


Fig. 1. Structural scheme

In order to draw a constructive conclusion from the consistency postulate, we need now to introduce the concept of force and stress densities. Within our approach the forces are defined as the elements of the cotangent bundle  $T^*\mathcal{C}$  and hence their properties follow from the topological structure of the configuration space  $\mathcal{C}$ . Thus in general the existence of the force and stress densities can be proved under appropriate regularity assumptions (see [7] for the case of classical continuum mechanics). However, the problem is by no means trivial and for the purpose of this note we just assume that the internal and external virtual works have the following representations

$$\langle p, \delta q \rangle = \int_{\mathcal{B}} \langle b(X), \delta q(X) \rangle dV(X) + \int_{\partial \mathcal{B}} \langle t_v(X), \delta q(X) \rangle dS(X), \quad (1)$$

$$\langle \mathfrak{I}, \delta \mathfrak{F} \rangle = \int_{\mathcal{B}} \langle \mathfrak{I}(X), \delta \mathfrak{F}(X) \rangle dV(X). \quad (2)$$

Here  $dV$  and  $dS$  are the volume elements of  $\mathcal{B}$  and  $\partial \mathcal{B}$ ,  $b(X)$  and  $t_v(X)$  are called the body force and the surface traction, both taking their values in the cotangent bundle  $T^*\mathcal{Q}$ , and  $\mathfrak{I}(X)$  is called the generalized stress at  $X \in \mathcal{B}$ .

The next step in the formal construction of the theory relies on introducing the connections  $\nabla_{\mathcal{B}}$  and  $\nabla_{\mathcal{Q}}$  on the manifolds  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{Q}$ . Then following [2, 3] we can define the iterated covariant differential operator  $\nabla$  and the associated divergence operator  $\text{div}$  which together with the Stokes' theorem allows to derive the local field equations and boundary conditions from the consistency postulate [5]. When the internal and external virtual works are given by (1) and (2) these equations take the form

$$\text{div } \mathfrak{I} + b = 0 \quad (\text{in } \mathcal{B}), \quad \mathfrak{I}v = t_v \quad (\text{on } \partial \mathcal{B}). \quad (3)$$

These equations resemble the familiar Euler equation and the Cauchy principle. However, their content is far from being classical. In particular, it has to be noted that we do not assume that the connections on  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{Q}$  are induced by

Riemannian structures on these manifolds. Nevertheless, a purely abstract consideration shows that a formal mathematical structure of the theory of generalized continua is similar to classical continuum mechanics.

Alone, the equations (3) do not suffice for the complete specification of the theory. This becomes clear if we note that until now our approach is not related in any way to the concept of the physical space-time. In the statical theory the concept of the physical space can be introduced by an action  $\varphi: G \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  of a Lie group  $G$  on the state manifold. It induces the action  $\Phi: G \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  of  $G$  on the configuration space, where  $\Phi = \varphi_q \circ q$  for  $q \in \mathcal{C}$  and  $\varphi_q: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  is a diffeomorphism for every  $q \in \mathcal{Q}$ . Now we say that a force  $p \in T^*\mathcal{C}$  is  $G$ -invariant if the global virtual work  $\langle p, \delta q \rangle$  is invariant under the pull-back of  $p$  by  $T^*\Phi$ . It can be then shown [5, 7] that this concept implies  $k$  balance laws, where  $k = \dim G$ . Within Newtonian mechanics the Galilean group has to be chosen as  $G$ . It remains, however, to specify the action  $\varphi$  which in general depends on the specific properties of the state manifold  $\mathcal{Q}$  and its physical interpretation [5]. Only when  $\varphi$  is specified, the explicit form of the implied balance laws can be derived.

To obtain the closed system of equations we also need a concept of the constitutive equations. In most general case the constitutive equations can be defined as a map  $c: \mathcal{C} \rightarrow T^*\mathcal{C}$  subjected to suitable postulates in order to ensure that the theory is mathematical sound and physically reasonable [5].

Closing, we recall that the classical mechanics of material continua has been generalized in three main directions: by enriching the kinematical model, by allowing a non-locality and by admitting further complexity of configurations (non-affine, non-metric) [4]. Within our approach the first direction is encompassed by the specification of the state manifold  $\mathcal{Q}$ . The second direction can be included by accounting for higher order gradients. Finally, the third direction is characterized by particular choices of the connections on the body and state manifolds. To this we can add that the choice of the Lie group  $G$  is related to the Newtonian or Non-Newtonian mechanics.

## References

- 1 BINZ, E.; SNIATYCKI, J.; FISCHER, H.: Geometry of classical fields. North-Holland, Amsterdam 1988.
- 2 EELLS, J.; LEMAIRE, L.: A report on harmonic maps. Bull. London Math. Soc. **10** (1978), 1–68.
- 3 ELLIASSON, H. I.: Variation integrals in fibre bundles. In: Global analysis. Proc. Symp. Pure Mathematics, Am. Math. Society. Providence, Rhode Island 1970, pp. 67–89.
- 4 KRÖNER, E.: Interrelations between various branches of continuum mechanics. In: Mechanics of Generalized Continua. IUTAM Symp., Stuttgart 1967.
- 5 MAKOWSKI, J.; HOPPE, U.; STUMPF, H.: Analytical mechanics of generalized continua (in preparation).
- 6 SEGEV, R.: On statical theories and models. Arch. Rat. Mech. Anal. **111** (1990), 211–223.
- 7 SEGEV, R.: On the definition of forces in continuum mechanics. In: BLAQUIÈRE, A.; LEITMANN, G. (eds.): Dynamical systems and microphysics. Academic Press, Orlando 1984, pp. 341–357.

Address: Prof. Dr.-Ing. H. STUMPF; Dr.-Ing. J. MAKOWSKI; Dipl.-Ing. U. HOPPE, Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Postfach 1021 48, W-4630 Bochum, Germany

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **73** (1993) 4–5, T 339–T 343

Akademie Verlag

PEŁCHERSKI, R. B.

## A Model of Plastic Flow Accounting for Micro-Shear Bands Idealized by Means of a Double-Shearing System

MSC (1980): 73E05

### 1. Introduction

Large plastic deformations of polycrystalline metallic materials, in particular under highly constrained conditions such as rolling or in the case of ductile fracture, while coalescence of voids occurs, can give rise to profuse flow localization into shear bands. They appear on different scales: grain-scale shear bands, sometimes called micro-shear bands, which extend through a few grains; and sample-scale shear bands, often called macroscopic shear bands, which extend through the entire sample. Micro-shear bands are understood as a long and thin sheet-like regions of concentrated plastic shearing that cross grain boundaries without deviation, bear very large shear strains and form a definite pattern in relation to the maximum strain direction. They lay in the position that is usually non-crystallographic and operate only once, develop rapidly to their full width and do not contribute further to the deformation process. According to DÈVE and ASARO [1], in heavily deformed metals, shear localization progressively replaces the current deformation mode, viz. crystallographic

slip and/or twinning. This change in deformation mode contributes to the development of strain induced and anisotropy and modifies material properties. Therefore, formulation of a model of large plastic deformations accounting for micro-shear bands seems to be important for adequate constitutive description of inelastic behaviour of metallic materials. The study will be confined to plane deformations of polycrystalline metallic materials at moderate temperature and quasi static loading conditions. A model of plastic flow with an account of a single-shearing system was considered in [2], whereas the basic physical mechanisms and physical motivation to formulate the model accounting for double-shearing was presented in detail in [3]. The model proposed shows that micro-shear bands produce the non-coaxiality between principal directions of stress and rate of plastic deformations.

## 2. Basic equations

The fundamental ideas of the elastoplastic models for metals based on the assumption of the local, current, relaxed, isoclinic configurations, resulting in the unique decomposition of the deformation gradient  $F$  into the elastic transformation  $E$  and the plastic one  $P$ ,  $F = EP$ , are presented by TEODOSIU [4], MANDEL [5] and in the critical review [6].

The simple model of small elastic strains and finite plastic deformations with Huber-Mises yield criterion

$$f = \bar{\tau} - \kappa(\bar{\gamma}) = 0, \quad \bar{\tau} = (\tfrac{1}{2} \tau' : \tau')^{1/2}, \quad \bar{\gamma} = (2D^p : D^p)^{1/2}, \quad \dot{\bar{\gamma}} = \int_0^t \dot{\bar{\gamma}} dt \quad (2)$$

makes a basis to incorporate new effects of active micro-shear bands. The polar decomposition  $E = V^e R^s$ , with  $V^e = 1 + \varepsilon$ , where  $\|\varepsilon\| \ll 1$ , leads to

$$D = D^e + D^p, \quad W = \Omega + W^p, \quad \Omega = \dot{R}^s (R^s)^{-1}, \quad W^p = R^s \{\dot{P} P^{-1}\}_a (R^s)^{-1}, \quad (3)$$

$$D^e = \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon, \quad D^p = R^s \{\dot{P} P^{-1}\}_s (R^s)^{-1}, \quad (4)$$

where  $R^s$  is the rotation of structure arising from elastic deformations and the geometric constraints imposed by boundary and compatibility conditions. The  $J_2$  flow theory is assumed to approximate the case when the sole mechanism of crystallographic multiple slip is responsible for plastic deformation

$$D_s^p = \langle \lambda \rangle N = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}_s N, \quad \dot{\gamma}_s = \sqrt{2} \langle \lambda \rangle, \quad N = \frac{\tau'}{\sqrt{2} \bar{\tau}}. \quad (5)$$

Due to (3)<sub>1</sub> the total rate of deformation reads

$$D = D^e + D_s^p = \left( \mathcal{L}^{-1} + \frac{\alpha}{2h} N \otimes N \right) : \dot{\varepsilon}, \quad \text{for } D^p = D_s^p, \quad (6)$$

where  $h = \partial \kappa / \partial \bar{\gamma}$  denotes plastic hardening modulus,  $\lambda = \frac{\dot{\tau} : N}{2h}$  is the loading index,  $\dot{\gamma}_s$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\tau'$  represent, respectively, effective shear strain rate, tensor of elastic moduli and deviator of the Kirchhoff stress. The bracket  $\langle \cdot \rangle$  and  $\alpha$  give, respectively,  $\langle \lambda \rangle = \lambda$ ;  $\alpha = 1$  if  $\lambda > 0$  and  $f = 0$  and  $\langle \lambda \rangle = 0$ ;  $\alpha = 0$  if  $\lambda \leq 0$  or  $f < 0$ , and

$$\dot{\tau} = \dot{\tau} - \Omega \tau + \tau \Omega, \quad \Omega = W - W^p, \quad (7)$$

provided  $W^p \neq 0$ . In case of the  $J_2$  flow theory, with isotropic hardening,  $W^p = 0$ .

## 3. Phenomenological model of plastic flow accounting for double-shearing system

To capture the gross effects of active micro-shear bands, consider the mode of plane deformation of rigid-plastic solid and assume that the contribution of the mechanisms of crystallographic multiple slip is approximated by the flow rule (5)<sub>1</sub>. The contribution of active micro-shear bands rate of plastic deformations is idealized by means of an additional double-shearing system, normal to the flow plane, with the directions of shear  $n_1^{(i)}$  and the normal to the shear plane  $n_2^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , cf. Fig. 1. The double-shearing system can be oriented according to the fixed principal axes of strain, (e.g.  $i_1$  may correspond to the direction of rolling, extrusion, tension or compression). In such a case the angle  $\varphi$  approximates the mean orientation of micro-shear bands. The conjecture is made here, following the works of HILL [7], CHRISTOFFERSEN and HUTCHINSON [8] and PETRYK [9] that for continued plastic flow with the deviations from proportional loading contained within certain cone of stress rates, that corresponds to the total loading range (fully active range), the incremental plastic response can be assumed as linearly dependent on the stress increment. Outside the range, the spatial pattern of active micro-shear bands is continuously changing when the partially active loading is varied. This is associated with the thoroughly non-linear relation between the rates of plastic deformations and stress (cf. [7]). For the loading paths within the fully active range the principal directions of stress and strain are coaxial and it is then justified to relate the unit vectors of the double-shearing system ( $n_1^{(i)}$ ,  $n_2^{(i)}$ ) with the unit vectors ( $e_1^{(i)}$ ,  $e_2^{(i)}$ ),  $i = 1, 2$ , describing the orientation of the planes of maximum

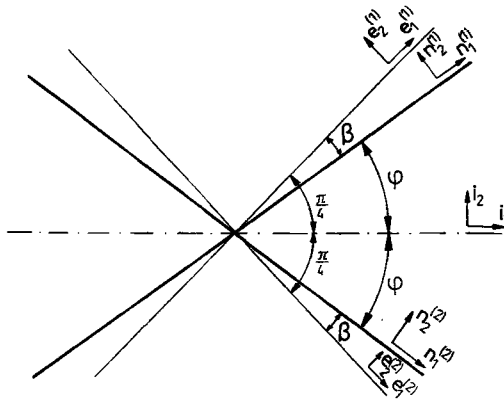


Fig. 1. Geometry of double-shearing system,  $\beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ ,  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

shear stress. According to the discussion in [3], it is typical to active micro-shear bands that their planes are rotated relative to the respective planes of maximum shear stress with the angle  $\beta \approx (5 \div 10)^\circ$ , (cf. Fig. 1). Such a misorientation is very characteristic for micro-shear bands produced in the deformation processes carried under nearly isothermal conditions. On the other hand, thermal shear bands; i.e. the mode of flow localization governed by a coupled thermoplastic mechanism, the special case of which are so called adiabatic shear bands, are often reported to coincide with slip lines and the trajectories of maximum shearing stress (cf. e.g. DODD and BAI [10]), what results in  $\beta = 0$ .

According to Fig. 1. the following geometrical relations hold

$$\begin{aligned} n_1^{(1)} &= \cos \beta e_1^{(1)} - \sin \beta e_2^{(1)}, & n_1^{(2)} &= \cos \beta e_1^{(2)} + \sin \beta e_2^{(2)}, \\ n_2^{(1)} &= \sin \beta e_1^{(1)} + \cos \beta e_2^{(1)}, & n_2^{(2)} &= -\sin \beta e_1^{(2)} + \cos \beta e_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

The rate of plastic deformations and plastic spin produced by active micro-shear bands is assumed in the form

$$D_{MS}^p = \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_{MS}^{(i)} (n_1^{(i)} \otimes n_2^{(i)})_s, \quad W_{MS}^p = \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_{MS}^{(i)} (n_1^{(i)} \otimes n_2^{(i)})_a, \quad (9)$$

where  $\dot{\gamma}_{MS}^{(i)}$  is the rate of plastic shearing along the  $i$ th direction of shear. Equations (9) can be transformed with use of (8)<sub>2</sub> into the following form (cf. PECHERSKI [12])

$$D_{MS}^p = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}_{MS} N + \dot{\epsilon}_{MS} T, \quad (10)$$

$$W_{MS}^p = (\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} + \dot{\gamma}_{MS}^{(2)}) (e_1^{(1)} \otimes e_2^{(1)})_a, \quad (11)$$

where

$$\dot{\gamma}_{MS} = \cos 2\beta (\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} - \dot{\gamma}_{MS}^{(2)}), \quad \dot{\epsilon}_{MS} = \sin 2\beta (\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} + \dot{\gamma}_{MS}^{(2)}), \quad (12)$$

represent, respectively, the rate of plastic shearing in the direction of the maximum shear stress and the axial strain rate component in the direction  $e_1^{(1)}$ , whereas

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2} (e_1^{(1)} \otimes e_2^{(1)})_s, \quad T = \frac{\sqrt{2}}{2} (e_1^{(1)} \otimes e_1^{(1)} - e_2^{(1)} \otimes e_2^{(1)}). \quad (13)$$

The discussed contribution of the mechanisms of crystallographic multiple slip and micro-shear allow for the additive composition of the rates of plastic deformations as a combination of two modes of pure shear in the plane of plastic flow and the relation for rate of plastic deformations reads

$$D^p = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}^* N + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\epsilon}_{MS} T, \quad \dot{\gamma}^* = \dot{\gamma}_s + \dot{\gamma}_{MS}. \quad (14)$$

The unit tensor  $T$  is orthogonal to the normal  $N$  and coaxial with the tangent to the Huber-Mises yield locus in the deviatoric plane at the loading point

$$T = A \bar{\tau} \left( \frac{\tau'}{\tau} \right) = A [\bar{\tau}' - (\bar{\tau} : N) N], \quad (15)$$

where  $A$  is a normalization factor and  $\bar{\tau}' : N = \bar{\tau} : N$  is taken into account. The rate  $\dot{\gamma}^* = \sqrt{2} \langle \dot{\lambda} \rangle$  contributes to the change of the radius of the Huber-Mises yield locus. Accordingly, the following equation for the rate of plastic deformations is



obtained, PĘCHERSKI [12]

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{2h} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N}) \mathbf{N} + \frac{A}{2h} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N}) (f_{MS}^{(1)} - f_{MS}^{(2)}) \tan 2\beta [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' - (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N}) \mathbf{N}], \quad (16)$$

where in the partially active loading range, i.e. for  $\alpha \in \left[ \alpha_c, \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' : \mathbf{N}}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'\|} \right)$ ,

$$A = \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'\| \sin \alpha}. \quad (17)$$

The critical angle  $\alpha_c$ , delimiting the fully active range, can be related with the geometry of micro-shear bands displayed in Fig. 1,  $\alpha_c = 2\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\beta$ , what results in

$$A = \frac{1}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'\| \cos 2\beta}, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N} = \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'\| \sin 2\beta, \quad (18)$$

and for continued plastic flow with the deviations from proportional loading, that are contained within the total loading range, i.e. for  $\alpha \in [0, \alpha_c]$ , the relation for rate of plastic deformations reads

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{2h} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N}) \mathbf{N} + \frac{1}{2\mu} [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' - (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N}) \mathbf{N}], \quad (19)$$

where

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2h} (f_{MS}^{(1)} - f_{MS}^{(2)}) \tan^2 2\beta. \quad (20)$$

The second term in (16) and (19) is responsible for the non-coaxiality between the principal directions of stress and rate of plastic deformations and  $\mu$  plays the rôle of the Mandel-Spencer non-coaxiality modulus as discussed e.g. in NEMAT-NASSER [13] and LORET [14] within the context of plastic behaviour of geological materials.

In (16) and (19) the fractions of the rate of plastic shearing carried by the active micro-shear bands,  $f_{MS}^{(1)}$ ,  $f_{MS}^{(2)}$ , were introduced, respectively, to eliminate the unknown rates,  $\dot{\gamma}_{MS}^{(1)}$ ,  $\dot{\gamma}_{MS}^{(2)}$ ,

$$\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} \sin 2\varphi_1 = f_{MS}^{(1)} \dot{\gamma}^*, \quad -\dot{\gamma}_{MS}^{(2)} \sin 2\varphi_2 = f_{MS}^{(2)} \dot{\gamma}^*, \quad (21)$$

where for  $\dot{\gamma}^* > 0$  the following constraints hold (cf. [3] and [12])

$$\frac{\dot{\gamma}^*}{\dot{\gamma}^*} + f_{MS}^{(1)} + f_{MS}^{(2)} = 1, \quad f_{MS}^{(1)} + f_{MS}^{(2)} \in [0, 1], \quad f_{MS}^{(1)}, f_{MS}^{(2)} \in [0, 1]. \quad (22)$$

To eliminate in (11) the orientation tensor  $(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_a$  the following relation is derived

$$(\mathbf{e}_1^{(1)} \otimes \mathbf{e}_2^{(1)})_S \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p (\mathbf{e}_1^{(1)} \otimes \mathbf{e}_2^{(1)})_S = -\sin 2\beta (\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} + \dot{\gamma}_{MS}^{(2)}) (\mathbf{e}_1^{(1)} \otimes \mathbf{e}_2^{(1)})_a. \quad (23)$$

Hence, the equation for plastic spin reads

$$\mathbf{W}^p = \frac{1}{2\bar{\tau} \sin 2\beta} (\mathbf{D}^p \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D}^p) \quad (24)$$

or with use of (17) and (20)

$$\mathbf{W}^p = \frac{f_{MS}^{(2)} - f_{MS}^{(1)}}{4\bar{\tau}h \cos 2\beta} \frac{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{N})}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'\| \sin \alpha} (\boldsymbol{\tau} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\tau}), \quad \text{for } \alpha \in \left[ \alpha_c, \frac{\pi}{2} \right], \quad (25)$$

$$\mathbf{W}^p = \frac{f_{MS}^{(2)} - f_{MS}^{(1)}}{4\bar{\tau}h \cos 2\beta} \tan 2\beta (\boldsymbol{\tau} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\tau}), \quad \text{for } \alpha \in [0, \alpha_c]. \quad (26)$$

The fractions  $f_{MS}^{(1)}$ ,  $f_{MS}^{(2)}$  can be considered as internal variables displaying the stochastic character of the active shear bands formation during the deformation process. Proper description of their evolution remains an open and challenging problem. Certain microscopic models lead to the conjecture that shear banding can contribute to the rate of plastic deformations as a sequence of generations of active micro-shear bands governed by logistic equation (Verhulst equation), taken from the population dynamics, (cf. [2]). Relations to known vertex-type plasticity models and non-linear flow laws in rates of deformations and stress are discussed in [11].

### Acknowledgement

The paper was prepared with the support of the Committee for Research (KBN) Poland, under the project No. 3 11 12 91 01.

### References

- 1 DÈVE, H. E.; ASARO, R. J.: The development of plastic failure modes in crystalline materials: shear bands in fcc polycrystals. *Metall. Trans.* **20A** (1989), 59–593.
- 2 PĘCHERSKI, R. B.: A model of plastic flow with an account of micro-shear banding. *ZAMM* **72** (1992), T 250–T 254.
- 3 PĘCHERSKI, R. B.: Physical and theoretical aspects of large plastic deformations involving shear banding. In: BESDO, D.; STEIN, E. (eds.): *Proc. IUTAM-Symposium on finite inelastic deformations. Theory and applications*. Springer Verlag, Berlin etc. 1992.
- 4 TEODOSIU, C.: A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic-plastic continuum. In: SIMMONS, A. et al. (eds.): *Fundamental aspects of dislocations theory*. Nat. Bur. Stand. Spec. Publ. **317** (1970), II, 837–875.
- 5 MANDEL, J.: *Plasticité classique et viscoplasticité*. C.I.S.M., Udine, Springer-Verlag, Berlin etc. 1972.
- 6 CLEJA-TIGOIU, S.; SOÓS, E.: Elastoviscoplastic models with relaxed configurations and internal state variables. *Appl. Mech. Rev.* **43** (1990), 131–151.
- 7 HILL, R.: The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* **15** (1967), 779–795.
- 8 CHRISTOFFERSEN, J.; HUTCHINSON, J. W.: A class of phenomenological corner theories of plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* **27**, (1979), 465–487.
- 9 PETRYK, H.: On constitutive inequalities and bifurcation in elastic-plastic solids with a yield-surface vertex. *J. Mech. Phys. Solids* **37** (1989), 265–291.
- 10 DODD, B.; BAI, Y.: *Ductile fracture and ductility with applications to metalworking*. Academic Press, London 1987.
- 11 PĘCHERSKI, R. B.: Modelling of large plastic deformations based on the mechanism of micro-shear banding. *Arch. Mech.* **44** (1992), 563–583.
- 12 NEMAT-NASSER, S.: Generalization of the Mandel-Spencer double-slip model. In: GITTUS, J.; ZARKA, J.; NEMAT-NASSER, S. (eds.): *Large deformations of solids: Physical basis and mathematical modelling*. Elsevier, London, New York 1986, pp. 269–282.
- 13 LORET, B.: Some macroscopic consequences of the granular structure of sand. *Ibid.*, pp. 477–496.

Address: Dr.-Ing. RYSZARD B. PĘCHERSKI, Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Świętokrzyska 21, PL-00-049 Warsaw, Poland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **73** (1993) 4–5, T 343–T 345

Akademie Verlag

SCHREIBER, L.

### Parameteridentifikation bei Stoffmodellen mit der Evolutionsstrategie

MSC (1980): 73B99

Um die in einem Stoffmodell enthaltenen Parameter so zu bestimmen, daß das Modell das Materialverhalten eines bestimmten Stoffes beschreibt, müssen Experimente durchgeführt und Messungen gemacht werden. Im Experiment hängt die Meßgröße  $y$  in der Regel von  $k$  Variablen  $x_j$  ab, die im folgenden zu einem Vektor  $\vec{x}$  gebündelt werden. Zu jedem der aufgezeichneten  $n$  Meßwerte  $y_i$  gehört folglich ein Zustandsvektor  $\vec{x}_i$ . Das Stoffmodell beinhaltet neben den Variablen  $\vec{x}$   $q$  Parameter  $p$ , hier zusammengefaßt zu dem Parametersatz  $\vec{p}$ .

Modell:  $y = y(\vec{x}, \vec{p})$ .

Wenn der Parametersatz richtig bestimmt ist, nimmt die Fehlerquadratsumme

$$Q = \sum_{i=1}^n [y(\vec{x}_i, \vec{p}) - y_i]^2 \quad (1)$$

ein Minimum an, so daß sich (1) als geeigneter Bewertungsmaßstab im Optimierungsprozeß „Parameteridentifikation“ anbietet. Als Optimierungsstrategie soll die von RECHENBERG [1] vorgestellte Evolutionsstrategie dienen, die sich bemüht, jeden in der Natur erkannten Evolutionsmechanismus [2] in einen Algorithmus umzusetzen, der zur Variation von Zahlenwerten implementiert werden kann. Das findet den ersten Niederschlag in der Datenstruktur: Die  $q$  Parameter  $p$ , eines Parametersatzes, Real-Zahlen im Intervall  $[p_a, p_b]$ , werden zu  $l$  „Chromosomen“, d. h. Gruppen von Parametern gleicher Dimension zusammengefaßt. Eine endliche Folge von  $m$  schon bewerteten Parametersätzen  $\vec{p}_s$  bildet die „Population“, deren „Individuen“ im Lauf der Optimierung durch Parametersätze mit besserer Bewertung ausgetauscht werden. Dies adaptiert den Aspekt „Selektion“ aus dem natürlichen Wettkampfschema Mutation – Selektion.

Mutation heißt in diesem Zusammenhang, ein neuer Parametersatz wird zufällig erzeugt. „Zufällig“ heißt dabei: Ob ein Algorithmus zum Tragen kommt, und wenn, in welcher Größenordnung, entscheiden Pseudozufallszahlen im

Zusammenspiel mit „Verfahrensparametern“  $v_i$ , die die Bedeutungen Wahrscheinlichkeit, Häufigkeit oder Standardabweichung haben. Im einzelnen laufen folgende Algorithmen ab (in Klammern: der nachgebildete Evolutionsmechanismus):

- Fertige Kopien von zwei zufällig aus der Population ausgewählten Parametersätzen. (Sexuelle Vererbung)
- Suche in den Kopien zufällig Parameter aus und verändere mit einer *normalverteilten* Zufallszahl ihren Wert. (Genmutation, genetisch geglätteter Code)
- Tausche in den Kopien innerhalb von Chromosomen zufällig die Reihenfolge der Parameter. (Inversion)
- Ersetze Parameter mit dem Wert 0 zufällig durch den Wert anderer Parameter. (Translokation)
- Setze zufällig Parameter zu 0. (Deletion)
- Spiegele zufällig ausgesuchte Parameter  $p_i$  an der Mitte von  $[p_w, p_o]_i$ . (Intrachromosomale Rekombination)
- Schreibe zufällig wechselnd von beiden geänderten Kopien einen neuen Parametersatz ab. Wenn der Wert von  $p_i$  außerhalb  $[p_w, p_o]_i$  liegt, nimm den der anderen Kopie. (crossing over, genetische Kontrolle, diploider Erbgang)

Da die normalverteilte Zufallszahl in keinem Rechner implementiert ist, sei hier ein Behelf angegeben:

$$x = \bar{x} + \operatorname{sgn} \left( u - \frac{1}{2} \right) \sqrt{2} \sigma \frac{\operatorname{artanh}(v)}{\sqrt{1-v^4}}; \quad u, v: \text{Pseudozufallszahlen} \in [0, 1].$$

Die schon erwähnten Verfahrensparameter  $v_i$  bleiben während des Optimierungsprozesses nicht konstant, genauso wenig wie die Evolutionsmechanismen während der Evolutionsgeschichte gleich geblieben sind. Sie werden in analoger Weise zu Parametersätzen  $\vec{v}$  gebündelt, in einer „Verfahrenspopulation“, sortiert nach ihrem Erfolg, gesammelt und einem einfacheren Mutations-Selektionsschema, das nur die Genmutation kennt, ausgesetzt. Ein geeigneter Bewertungsmaßstab ist, neben anderen Möglichkeiten, den Erfolg eines Verfahrensparametersatzes  $\vec{v}_j$  an der relativen Qualitätssteigerung zu messen, die mit ihm bei den eigentlichen Parametersätzen erreicht wurde. Wenn vor der Anwendung von  $\vec{v}_j$  die bislang beste Qualität  $Q_{\text{alt}}$  war und durch seine Anwendung die Qualität  $Q_{\text{neu}}$  erreicht wurde, sei der Erfolg von  $\vec{v}_j$ :

$$E = (Q_{\text{alt}} - Q_{\text{neu}})/Q_{\text{alt}}. \quad (2)$$

Dabei wird mit einem Verfahrensparametersatz genau eine Parametervariation durchgeführt. Dieses Verfahren nennt RECHENBERG „Die lernende Bevölkerung“, bleibt aber eine genaue Beschreibung des von ihm verwandten Bewertungsmaßstabs schuldig. Viel ausführlicher geht er auf hypothetische Verteilungen der Qualitätsdichte  $Q$  im Parameterraum ein und leitet daraus für die Änderung der Verfahrensparameter seine „1/5-Regel“ ab, die nicht einleuchtend ist und unbefriedigende Ergebnisse liefert.

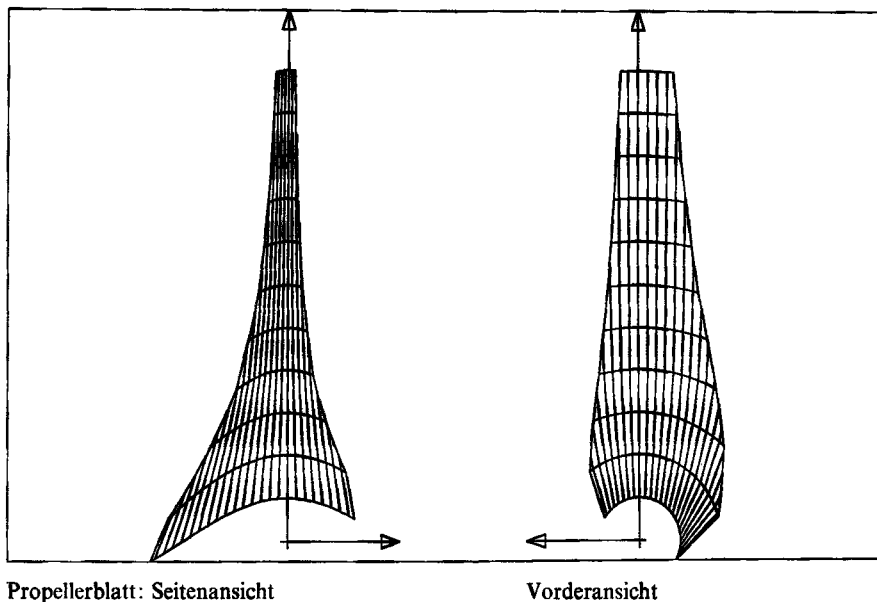
Um zu zeigen, daß sich auch ein normales Optimierungsproblem nicht dem oben beschriebenen „curve-fitting“ entzieht, sei hier ein rechenintensives Problem angegeben. Gesucht ist die optimale Geometrie eines Propellerblattes, Profil NACA2412, das bei gegebener Fluggeschwindigkeit  $v = 10$  m/s und Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 300/\text{sec}$  die Vorschubkraft  $L = 30$  N liefern soll, ohne daß an einer Stelle die Reynoldszahl außerhalb des Intervalls  $[6 \cdot 10^4, 1,5 \cdot 10^5]$  liegt, bzw. der sich einstellende Anstellwinkel  $\alpha$  außerhalb von  $[-7^\circ, 12^\circ]$ . Außerdem soll die Bauhöhe in axialer Richtung unter 30 mm bleiben.

Die Balkenachse des Propellerblattes sei gerade, wodurch sich die Beschreibung der Geometrie in der Angabe der Länge  $t(r)$  der Profilsehne und ihrer Neigung  $\gamma(r)$  gegenüber der Propellerebene erschöpft ( $r$ : Koordinate der Balkenachse). Beide Funktionen seien als interpolierende Splines 3. Ordnung von jeweils 11 Werten  $t_i, \gamma_i$  an äquidistanten Stützstellen zwischen  $r_a$  und  $r_e$  gegeben. Die notwendigen Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte  $c_a(\alpha, R_e)$  und  $c_w(\alpha, R_e)$  sind aus tabellarisch vorliegenden Meßwerten zu interpolieren.

Das mathematische Modell  $y(\vec{x}, \vec{p})$ , das an den einzigen Funktionswert  $y_1 = 0$  angepaßt werden soll, setzt sich aus vier Summanden zusammen,

$$\begin{aligned} y(\vec{x}, \vec{p}) &= y_F + y_{R_e} + y_\alpha + y_h; \quad \vec{p} = (r_a, r_e, t_i, \gamma_i); \quad i = 1, 2, \dots, 11, \\ y_F &= \left| \int_{r_a}^{r_e} \frac{\rho}{2} \sqrt{\omega^2 r^2 + v^2} \omega t(r) \left( c_a(\alpha, R_e) - c_w(\alpha, R_e) \frac{v}{\omega r} \right) dr - L \right|, \\ \alpha(r) &= \gamma(r) - \arctan \left( \frac{v}{\omega r} \right); \quad R_e(r) = \frac{\sqrt{\omega^2 r^2 + v^2} t(r)}{v}; \quad v: \text{Zähigkeit der Luft}, \\ y_{R_e} &= \int_{r_a}^{r_e} \max(0, \Delta^- R_e, \Delta^+ R_e) dr, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_\alpha &= \int_{r_a}^{r_e} \max(0, \Delta^- \alpha, \Delta^+ \alpha) dr; \quad \Delta^+ x = x - x^{\max}; \quad \Delta^- x = x^{\min} - x, \\ y_h &= \int_{r_a}^{r_e} \max(0, \Delta^+ h) dr; \quad h = t(r) \sin \gamma(r). \end{aligned} \quad (4)$$



Alle Integrationen wurden numerisch ausgeführt, daher der hohe Rechenaufwand. Der Test eines Parametersatzes dauert ca. 1,31 CPU-Sekunden.

Das Bild zeigt die nach 781 Versuchen gefundene beste Geometrie. Sie ist noch nicht unbedingt das Optimum, weil zwar die Nebenbedingung über die Reynoldszahlen erfüllt ist, nicht aber die über die Bauhöhe. Das liegt an dem numerischen Ungleichgewicht der beiden Integranden in (3) und (4). Bei einer nochmaligen Rechnung müßten die Integrale, die bei Überschreitung der jeweiligen Randbedingung zu einer Verschlechterung des Gesamtwertes  $y$  führen, mit geeigneten Penalty-Faktoren gewichtet werden.

### Literatur

- 1 RECHENBERG, I.: Evolutionsstrategie. Frd. Frommann Verlag 1973.
- 2 CRAMER, F.: Chaos und Ordnung. Die komplexe Struktur des Lebendigen. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart 1988.

Anschrift: Dr.-Ing. L. SCHREIBER, Institut für Mechanik, Universität — Gesamthochschule Kassel, Mönchebergstr. 7, Postfach 101380, W-3500 Kassel, Deutschland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 345–T 349

Akademie Verlag

WEGENER, K.

## Stabilisierung von Nebenbedingungen in der Plastomechanik

MSC (1980): 73E05

### 1. Einleitung

Die plastomechanischen Probleme verschlingen durch die inkrementelle Lösung, die Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen, die Ausiteration des Gleichgewichtsfehlers und des Fehlers in der Fließbedingung, sofern eine solche existiert, Unmengen Rechenzeit. In den letzten sechs Jahren sind große Anstrengungen unternommen und gewaltige Erfolge zur Beschleunigung der Iterationen erzielt worden. Die zur Konvergenzverbesserung entwickelten numerischen Verfahren, z. B. konsistente Tangenten, haben aber zwei wesentliche Nachteile. Zum einen verlagern sie den Iterationsaufwand zumindest teilweise auf die Aufstellung der Steifigkeitsmatrix. Andererseits verlangen sie dem Programmierer erhebliche analytische Vorarbeiten ab. Die schnelle Erprobung von Stoffgesetzen oder deren Varianten wird damit völlig unmöglich, die Implementierung leistungsfähiger und damit in der Regel komplizierter Stoffgesetze sehr schwierig. Ziel muß es daher sein, Iterationen zu vermeiden, wo immer es geht. Hierfür dient in dieser Arbeit die Stabilisierung der das Problem beschreibenden Nebenbedingungen.

Das Gleichungssystem für die Beschreibung plastomechanischer Probleme wird nach der räumlichen Diskretisierung zu einem Zeitdifferentialgleichungssystem mit Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} D_k(\dot{y}_j, y_j, j = 1, \dots, J) &= 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ g_n(y_j) &= 0, \quad n = 1, \dots, N < J, \quad N + K \geq J. \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei sind die Systemvariablen  $y_k$  elastische Dehnungskomponenten, Spannungskomponenten, innere Zustandsvariablen, Temperaturen, Koordinaten der materiellen Elemente an den Gaußpunkten oder den Elementknoten je nach Formulierung und Variable. Die Nebenbedingungen enthalten charakteristischerweise die Zeitableitungen der Systemvariablen nicht, so daß eine direkte Integration des Systems ausgeschlossen ist. Zeitdifferentialgleichungen sind die Evolutionsgleichungen für die inneren Zustandsgrößen, elastischen Dehnungen, Temperaturen und Drehtensoren. Die Nebenbedingungen in der Plastomechanik sind

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{0} \quad \text{Gleichgewichtsbedingung,} \quad (2)$$

$$f = f(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}, \vartheta) = 0 \quad \text{Fließbedingung,} \quad (3)$$

$$\underline{R}^T \underline{R} - \underline{1} = \underline{0} \quad \text{Orthogonalitätsbedingung} \quad (4)$$

mit  $\underline{\sigma}$  der Gegenspannung als Beispiel für innere Variablen,  $\underline{\sigma}$  dem Spannungstensor,  $f$  einer Fließfunktion,  $\underline{\varepsilon}$  dem Deviator einer effektiven Spannung,  $\vartheta$  der Temperatur und  $\underline{R}$  dem materiellen Drehtensor.

## 2. Stabilisierungsstrategie

Zur Lösung des Zeitdifferentialgleichungssystems (1) leitet man üblicherweise die Nebenbedingungen nach der Zeit ab:

$$D_k(\dot{y}_j, y_j, j = 1, \dots, J) = 0, \quad \dot{g}_n = \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_n}{\partial y_j} \dot{y}_j. \quad (5)$$

Das so entstandene einheitliche Zeitdifferentialgleichungssystem kann sodann durch ein beliebiges numerisches Integrationsverfahren gelöst werden. Während bei exakter Integration die Nebenbedingungen für alle Zeiten identisch erfüllt bleiben, nehmen die Fehler  $g_n(y_k)$  infolge der numerischen Integration überproportional zu. Um diesen Defekt des Algorithmus zu beheben, stabilisiert man die Nebenbedingung, indem man sie in eine Zeitdifferentialgleichung einkleidet, die eine asymptotisch stabile Lösung  $g_n(y_j) = 0$  besitzt. Die Stabilisierung von Nebenbedingungen geht auf BAUMGARTE [1] zurück, der

$$\dot{g}_n + \lambda_n g_n = 0 \quad \text{statt} \quad \dot{g}_n = 0 \quad (6)$$

verwendet. Beträgt zum Zeitpunkt  $t = 0$  der Fehler  $g_{n0}$ , so wird dieser gemäß der Lösung der Differentialgleichung (6)

$$g_n = g_{n0} \cdot e^{-\lambda_n \cdot t} \quad (7)$$

auf  $g_n = 0$  zurückgedrückt, sofern  $\lambda_n$  positiv ist. Es zeigt sich aber, daß die Baumgartesche Stabilisierung wegen der ständigen Auffrischung des Fehlers durch die numerische Integration auf einen von 0 verschiedenen Fehler führt. OSTERMEYER [4] schlägt daher vor, den Fehler durch eine PI-Regelung auszuregeln:

$$\dot{g}_n + \lambda_n g_n + \mu_n \int g_n dt = 0. \quad (8)$$

Durch Anhängen weiterer Glieder mit höheren Integralen über den Fehler läßt sich der Grad des Fehlerpolynoms weiter senken:

$$\dot{g}_n + \lambda_n g_n + \mu_n \int g_n dt + \nu_n \int \int g_n d\tau dt = 0. \quad (9)$$

Die Notwendigkeit weiterer Integrale hängt von der Ordnung des auf die Regelstrecke, nämlich die Integration der Feldgleichungen, wirkenden Störfunktion ab. Die Fehlerursache kann durch Fehler auf die Zeitableitung der Nebenbedingung dargestellt werden, da sie im Integrationsschritt z. B. nur konstant angesetzt wird und da sie aus der Zeitableitung der Systemvariablen zusammengesetzt wird. Demnach entspricht die analytische Integration von  $\dot{g} + z$  der numerischen Integration von  $\dot{g}$ , wobei  $z$  die Störfunktion ist, und liefert die Fehlerfunktion  $\tilde{g}$ . Wegen des stark dissipativen Charakters des Gleichungssystems werden periodische Fehleranteile rasch weggedämpft, so daß  $z$  als Polynom angesetzt werden kann. Die Lösung der Differential- und Integralgleichungen liefert:

1. Unstabilisiert: Der Grad des Fehlerpolynoms  $\tilde{g} = \int z d\tau$  wird gegenüber dem des Störpolynoms um eins erhöht.
2. Baumgartesche Stabilisierung: Der Grad des Fehlerpolynoms  $\tilde{g} = z/\lambda$  ist dem des Störpolynoms gleich.
3. Ostermeyersche Stabilisierung: Der Grad des Fehlerpolynoms  $\tilde{g} = \dot{z}/\mu$  ist kleiner als der des Störpolynoms.
4. Stabilisierung mit  $n$  Integralgliedern: Der Grad des Fehlerpolynoms ist um  $n$  kleiner als der des Störpolynoms.

Große Werte für  $\lambda$  und  $\mu$  verringern die Steigung des Fehlerpolynoms und sorgen für ein rasches Abklingen von Anfangsfehlern. Sicherzustellen ist nur, daß die Eigenwerte allesamt negative Realteile besitzen, um für abklingende Anfangsfehler zu sorgen.

### 3. Stabilisierung der plastomechanischen Nebenbedingungen

Soll die Materialkonvektion abgesehen von Translationen als reine Drehung beschrieben werden, und will man deren Eigenschaften ausnutzen (vgl. WEGENER [6]), muß man dafür sorgen, daß die Drehtensoren  $\underline{R}$  zu allen Zeiten die Orthogonalitätsbedingung erfüllen. Eine Integration der Rotationsgleichung  $\dot{\underline{R}} = \underline{K} \underline{R}$  bzw. der Entwicklungsgleichung für die Zustandstensoren liefert mit wachsender Integrationszeit eine zunehmende Verletzung der Orthogonalitätsbedingung für die zugehörigen Drehtensoren. Die Rotationsgleichung folgt direkt aus der Ableitung der Orthogonalitätsbedingung, so daß mit Hilfe der Stabilisierung eine modifizierte Rotationsgeschwindigkeit  $\tilde{\underline{K}}$  anstelle  $\underline{K}$  bestimmt werden kann, die diesen Defekt vermeidet:

$$\dot{\underline{R}} = \tilde{\underline{K}} \underline{R} \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{K}} = \underline{K} - \lambda(\underline{R}' \underline{R} - \underline{1}) - \mu \int (\underline{R}' \underline{R} - \underline{1}) dt - \nu \int \int (\underline{R}' \underline{R} - \underline{1}) d\tau dt. \quad (10)$$

Die stabilisierte Entwicklungsgleichung für einen Zustandstensor  $\underline{\alpha}$  lautet dann mit  $\overset{\nabla}{\underline{\alpha}}$  einer mitrotierenden Zeitableitung:

$$\dot{\underline{\alpha}} = \overset{\nabla}{\underline{\alpha}} + \tilde{\underline{K}} \underline{\alpha} + \underline{\alpha} \tilde{\underline{K}}. \quad (11)$$

Bei zeitunabhängigen Problemen und nur dort muß grundsätzlich die Fließbedingung erfüllt werden (vgl. WEGENER [6]). Dies geschieht dadurch, daß man einen Reduktionsfaktor, der die Fließgeschwindigkeit begrenzt, aus der Konsistenzbedingung  $\dot{f} = 0$  berechnet. Numerische Integration der Spannungen und inneren Zustandsvariablen führt zu einer Verletzung der Fließbedingung. In der Regel wird dieser Restfehler durch sog. Return-Algorithmen zu null gezwungen, wobei aber die Spannungsreduktionsrichtung willkürlich ist (vgl. BREINLINGER [2]). Mit Hilfe der Stabilisierung setzt man eine modifizierte Konsistenzbedingung

$$\dot{f} + f_{\text{stab}} = 0 \quad \text{mit} \quad f_{\text{stab}} = \lambda f + \mu \int f dt + \nu \int \int f d\tau dt \quad (12)$$

an, aus der der Reduktionsfaktor bestimmt und in das elastische Stoffgesetz eingesetzt wird. Man erhält:

$$\dot{\underline{\alpha}} = \left[ \underline{C} - \frac{1}{N} \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \underline{C} \otimes \underline{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \right) \right] \cdot \underline{D} - \frac{1}{N} \left( + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \dot{\underline{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \cdot \underline{\dot{\underline{\alpha}}} + f_{\text{stab}} \right) \underline{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}. \quad (13)$$

Hierbei enthält  $\underline{\alpha}_E$  die Erholungs- und Rotationsterme,  $\underline{\tilde{\alpha}}$  die durch den Reduktionsfaktor dividierten, der plastischen Rotationsgeschwindigkeit proportionalen Anteile. Während der erste Summand die tangentielle Steifigkeit wiedergibt, wirkt sich die Stabilisierung zusammen mit der Werkstoffherholung als Pseudolast aus. Zur Erprobung wurde ein einachsiger Zugversuch mit einem Stoffgesetz integriert, das isotrope und kinematische und formative Verfestigung über eine Fließfunktion nach EDELMAN und DRUCKER [3] beschreibt:

$$f = J_2 + aJ_3 - [k^2 - bJ_2^a(\underline{\underline{g}})]. \quad (14)$$

$J_2$  und  $J_3$  sind 2. und 3. Invariante des effektiven Spannungsdeviators,  $J_2(\underline{\underline{g}})$  die 2. Invariante der Gegenspannung. Den Fehler- und Zugkraftverlauf, den man mit sehr grober Schrittweite und expliziter Integration erhält, zeigt Bild 1. Zum Fließbeginn wurde die Fließbedingung durch Extrapolation möglichst gut erfüllt (Punkt x). Ohne Stabilisierungsmaßnahmen steigt der Fehler der Fließbedingung von dort aus kontinuierlich an. Der zugehörige Zugkraftverlauf liegt

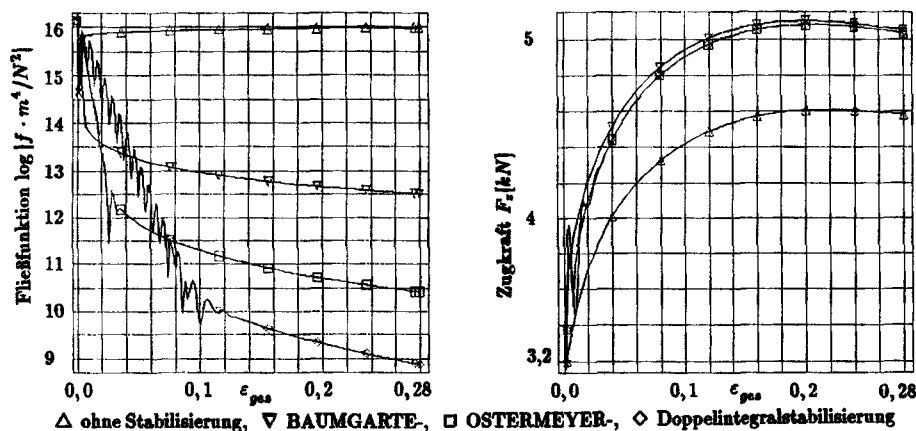


Bild 1. Fehler in der Fließbedingung und Zugkraftverlauf bei einachsigem Zugversuch bis 28% Verformung mit verschiedenen Stabilisierungen

viel zu niedrig. Die Stabilisierungsmaßnahmen drücken den Fehler sehr rasch weit unter den durch Extrapolation gewonnenen Punkt. Die Baumgartesche Stabilisierung führt noch zu etwas zu hohen Zugkräften, während die Zugkraftverläufe der beiden höheren Stabilisierungen praktisch zusammenfallen. Die anfängliche Oszillation des Zugkraftverlaufes mit der Doppelintegralstabilisierung resultiert aus einem zu groß gewählten Parameter  $\nu$ , was im Abschnitt 4 noch diskutiert wird.

Die Gleichgewichtsbedingung ist immer dann eine Nebenbedingung, wenn weder Trägheitskräfte noch Reibspannungen berücksichtigt werden. Zur ihrer Diskretisierung und Auswertung im Rahmen des Zeitdifferentialgleichungssystems muß man die Variationsgleichung der Gleichgewichtsbedingung nach der Zeit ableiten und erhält:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G_0} \hat{T}_0 \delta \underline{v} \, dA_0 - \int_G {}^S \nabla \otimes \underline{v} \cdot \cdot \underline{C} \cdot \cdot {}^S \nabla \otimes \delta \underline{v} \, dG - \int_G \{ (-\underline{\sigma} \cdot \nabla \otimes \underline{v} + \underline{\sigma} \operatorname{div} \underline{v}) \cdot \nabla \otimes \delta \underline{v} \} \, dG \\ + \int_G \{ [(\underline{\Phi} + (\dot{G}_a + \dot{G}_p) \underline{1}) \cdot \underline{C} - \underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\dot{C}}] \cdot \cdot {}^S \nabla \otimes \delta \underline{v} \} \, dG + \int_{\partial G_0} \hat{T}_0 \delta \underline{v} \, dA_0 - \int_G \underline{\sigma} \cdot \cdot {}^S \nabla \otimes \delta \underline{v} \, dG = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

I. d. R. wird diese Variationsgleichung ohne den Stabilisierungsterm in der letzten Zeile verwendet, wobei dann die direkte Integration der hieraus ermittelten Geschwindigkeiten zu einer Verletzung der Gleichgewichtsbedingung führt. Zur Abhilfe wird der Gleichgewichtsfehler iterativ unter eine Toleranzschwelle gedrückt. Projiziert man die Erweiterung des Testfunktionsraumes um  $\delta \underline{v}$  auf den der ursprünglichen Testfunktionen  $\delta \underline{v}_n$  über  $\delta \underline{v}_n = \lambda_n \cdot \delta \underline{v}_n$ , folgt die Baumgartesche Stabilisierung für die Gleichgewichtsbedingung aus (15). Bild 2 zeigt für einen günstig gewählten Satz von Stabilisierungsparametern  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , der für alle Gleichungen der Gleichgewichtsbedingung identisch gewählt wurde, den Stabilisierungserfolg an einer Hohlkegelzugprobe mit vier Ringelementen, die bis zu einer durchschnittlichen Dehnung von 98% verformt wurde. Als skalarer Gleichgewichtsfehler wird der auf die maximale Zugkraft  $F_z$  bezogene cartesische Betrag des Residualvektors der unabgeleiteten Gleichgewichtsbedingung berechnet und halblogarithmisch über der mittleren Gesamtdehnung aufgetragen. In Bild 2 zeigt die obere Kurve das exponentielle Wachstum des Gleichgewichtsfehlers, wie es sich ohne jede Stabilisierung ausgehend vom Fehler infolge geometrischer Linearisierung bei rein elastischer Beanspruchung, bis der erste Integrationspunkt die Fließgrenze erreicht, ergibt. Bild 2 beweist, daß der Gleichgewichtsfehler bei diesen beachtlichen Deformationen bereits mit der einfachsten Stabilisierungsstrategie nach Baumgarte, Gleichung (6), unter dem Fehler aus der geometrischen Linearisierung im elastischen Bereich bleibt. Die höheren Stabilisatoren mit Integral- und Doppelintegralglied erreichen eine weitere Fehlerreduktion am Ende des Verformungsprozesses um jeweils etwa zwei Größenordnungen. Für die weitere Verformung ist noch wichtiger, daß sie den Fehleranstieg deutlich vermindern.

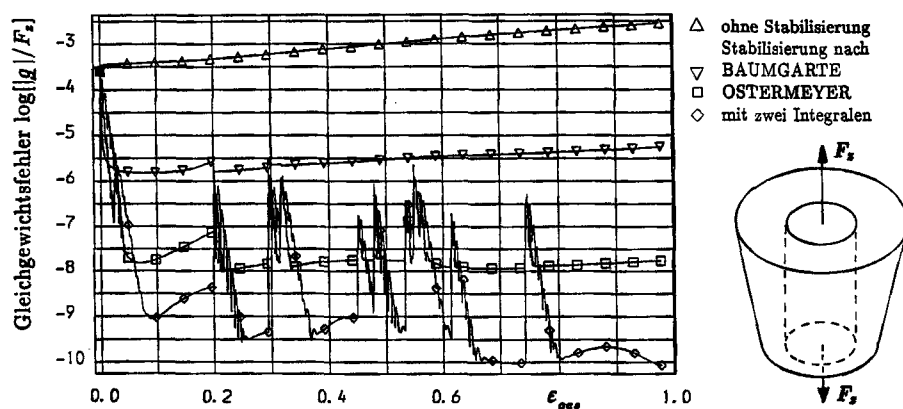


Bild 2. Die Entwicklung des Gleichgewichtsfehlers mit zunehmender Integrationszeit ohne Stabilisierung und bei Stabilisierung nach Baumgarte, Ostermeyer und mit zwei Integralen

#### 4. Parameterwahl

Die Betrachtung des Abschnittes 2 verlangte nach möglichst großen Stabilisierungsparametern, ließ aber den Einfluß der Integrationsschrittweite unberücksichtigt. Jedes Integrationsverfahren ist mit einer bestimmten Schrittweite nur in der Lage, Prozesse mit genügend großen charakteristischen Systemzeiten zu integrieren. Die Stabilisatoren bringen eine zusätzliche charakteristische Zeit in das System mit ein. Wählt man diese Zeit zu klein, verringert eine Schrittweitensteuerung die Schrittweite bzw. bei nicht gesteuerter Integration wird die Nebenbedingung destabilisiert. Hauptproblem bei der Anwendung der Stabilisierung ist daher die Wahl der Stabilisierungsparameter  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Für einen zu großen Parameter  $\lambda$  kehrt der Fehler  $g(t + \Delta t)$  am Schrittanfang gegenüber dem am Schrittanfang  $g(t)$  sein Vorzeichen um, und der Fehlerbetrag wächst sehr viel rascher als ohne Stabilisierungsmaßnahme. Im Falle der expliziten Euler-Integration ergibt sich aus (6)

$$g(t + \Delta t) = g(t) + \dot{g}(t) \cdot \Delta t = (1 - \lambda \Delta t) g(t) \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{1}{\Delta t} \quad (16)$$

als Anhaltswert für den Parameter  $\lambda$ , so daß der Anfangsfehler zum Schrittlende gerade auf null reduziert wird. Diese Parameterwahl beseitigt, wie STICKFORTH [5] zeigt, bei dem einfachen Euler-Verfahren die Fehler erster Ordnung auf die Nebenbedingung. Trotz dieser Wahl findet man wegen des erwähnten Integrationsfehlers am Schrittlende  $g_1 \neq 0$  vor, den man zur Konstruktion einer adaptiven Steuerung von  $\lambda$  verwenden kann, wobei zur Dämpfung Regelungslücken und -verzögerungen eingebaut werden müssen. Mit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_{\text{neu}} = \lambda_{\text{alt}} + p \frac{g_1}{g_0} \cdot \frac{1}{\Delta t} & \text{für } g_1 > 10^{-6} \\ \lambda_{\text{neu}} = \lambda_{\text{alt}} & \text{sonst} \\ \text{und } p = 0,01 & \text{für } \frac{g_1}{g_0} > -1 \\ p = 0,1 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (17)$$

konnte ein ähnlicher Stabilisierungserfolg erzielt werden wie mit der Ostermeyerschen Stabilisierung und konstanten Parameterwerten. Bei der Gleichgewichtsstabilisierung an der Hohlkegelprobe pendelten sich die Parameterwerte für die einzelnen Gleichungen bei  $\lambda_n = (3/2, \dots, 2) \Delta t^{-1}$  ein. Anhaltswerte für  $\mu$  und  $\nu$  lassen sich in analoger Weise wie für  $\lambda$  aus der Reihenentwicklung für  $g$  um den Zeitschrittanfang

$$g_2 = g_1 + \Delta t \dot{g}_1 + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{g}_1 + \frac{1}{6} \Delta t^3 \ddot{\ddot{g}}_1 + O(\Delta t^4) \quad (18)$$

errechnen. Aus (9) folgt durch Umstellen  $\dot{g}_1$  und durch Differenzieren  $\ddot{g}_1$  und  $\ddot{\ddot{g}}_1$ . Die Integrale werden für die Ostermeyersche Stabilisierung bzw. die Doppelintegralstabilisierung durch die Rechteckregel bzw. die Trapezregel bestimmt. Mit dem Stabilisierungsziel  $g_2 = 0$  ergibt sich:

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{1}{3} \lambda^2 \quad \text{Ostermeyer} \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t}, \quad \mu = \frac{1}{2} \lambda^2 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{3}{16} \lambda^3 \quad \text{Doppelintegral.} \quad (20)$$

Der Parameter  $\nu$  erweist sich in den numerischen Rechnungen i. d. R. als zu groß. In Bild 1 zeigt sich dies im oszillierenden Zugkraftverlauf, obwohl hier  $\nu = (3/16) \lambda^3$  den kleinsten Fehler zum Integrationsende liefert.

## 5. Zusammenfassung

Insbesondere bei der Stabilisierung der Gleichgewichtsbedingung, deren Lösung den größten Aufwand bedeutet, liegen die Vorteile der Stabilisierung auf der Hand:

1. Übersichtliche Formulierung komplett auf der aktuellen Konfiguration.
2. Anwendbarkeit beliebiger Integrationsverfahren.
3. Keine Gleichgewichtssiteration mehr erforderlich (bei zeitunabhängigen Stoffmodellen muß  $f$  stabilisiert werden).

Der mit der Stabilisierung verbundene Aufwand erweist sich selbst bei der Verwendung dreier Stabilisatorterme gegenüber dem bei Ausiteration des Gleichgewichtsfehlers vernachlässigbar. Auch bei der Iteration muß der Gleichgewichtsresidualvektor als Zielgröße der Iteration berechnet werden, und die Integration mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens, das hier zur Anwendung kam, benötigt pro Freiheitsgrad nur eine Multiplikation und eine Addition. Zentrales Problem bei der Anwendung der Stabilisierung ist die Bestimmung der Parameter, für die zumindest Schätzwerte angegeben werden können.

## Literatur

- 1 BAUMGARTE, J.: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1 (1972), 1–16.
- 2 BREINLINGER, F.: Stoffgleichungen bei großen Deformationen sowie Be- und Entlastungsvorgängen. Diss. TU Stuttgart 1989.
- 3 EDELMAN, F., DRUCKER, D. C.: Some extensions of elementary plasticity theory. J. Franklin Institute 251 (1951), 581–605.
- 4 OSTERMEYER, G.-P.: Stabilisierung von Bindungen und ersten Integralen als Regelungsproblem und ihre Konsequenzen. ZAMM 65 (1985), 185–187.
- 5 STICKFORTH, J.: A remark on the time integration of plastic flow and creep. Acta Mechanica 59 (1986), 113–121.
- 6 WEGENER, K.: Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Spannungstyp. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 2-1991, Mechanik Zentrum TU Braunschweig 1991.

Anschrift: Dr. KONRAD WEGENER, Schuler Pressen GmbH, Bahnhofstr. 41, W-7320 Göppingen, Deutschland



## 2.3b STRUKTURMECHANIK/VERALLGEMEINERTE STRUKTURMODELLE

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 350–T 352

Akademie Verlag

GABRIEL, G.

## Die Anwendung isoparametrischer Makroelemente zur elastisch-plastischen Festigkeitsanalyse

MSC (1980): 73E99

Ziel dieses Beitrages sind numerische Untersuchungen zur Ermittlung lokaler Plastizierungen in ebenen und räumlich strukturierten Flächentragwerken, wie sie bei schiffbaulichen Konstruktionen häufig anzutreffen sind. Es erfolgt eine Beschränkung auf physikalisch nichtlineares, zeit- und geschwindigkeitsunabhängiges Materialverhalten. Dabei werden infinitesimale Verformungen betrachtet, die plastischen Deformationen sollen in der Größenordnung der elastischen liegen.

Die Entwicklung erfolgte auf der Basis isoparametrischer Scheibenmakroelemente mit einer gemischten Interpolation der Verschiebungsansatzfunktionen  $u$  [1]. Der Grundgedanke besteht darin, auf den Elementrändern vorgegebene Funktionen so in das Elementinnere zu interpolieren, daß die entstehende Funktion  $U$  für die Beschreibung des Zustandes im Element kompatibel zu allen Zuständen auf dem Elementrand ist. Zu diesem Zweck werden zwei Interpolationsoperatoren

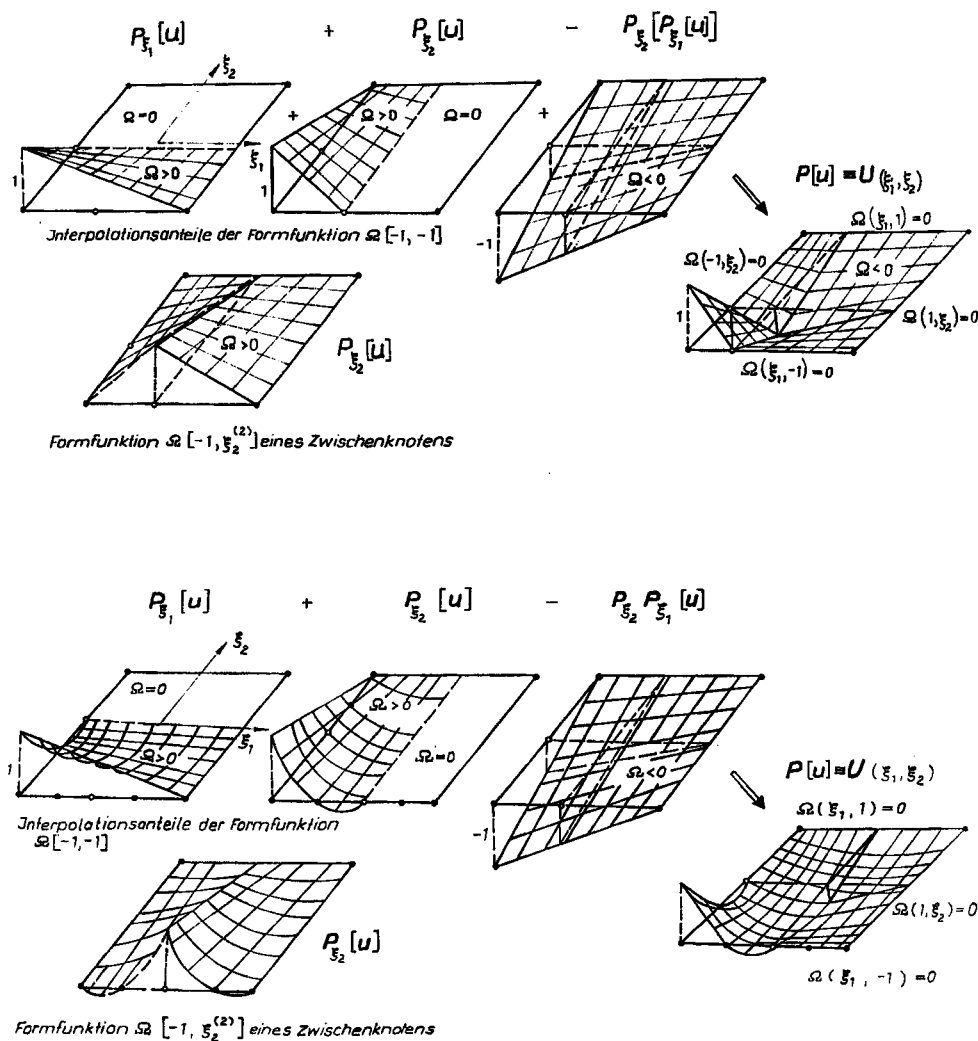


Bild 1. Beispiele für die Formfunktion eines Eck- und eines Zwischenknotens für eine lineare (oben) und eine quadratische Randinterpolation (unten). Man ersetze  $\Omega[-1, \xi_2^{(2)}]$  durch  $\Omega[\xi_1^{(2)}, -1]$

eingeführt, welche die Projektion der Randfunktionen definieren:

$$\begin{aligned} P_{\xi_1}[u] &= u(-1, \xi_2) \cdot h_0(\xi_1) + u(+1, \xi_2) \cdot h_1(\xi_1), \\ P_{\xi_2}[u] &= u(\xi_1, -1) \cdot h_0(\xi_2) + u(\xi_1, +1) \cdot h_1(\xi_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei bezeichnen  $u$  die jeweilige Ansatzfunktion auf dem Rand,  $h$  die Interpolationspolynome. Desweiteren wird ein gemischter Interpolationsoperator eingeführt:

$$P[u] = P_{\xi_1}[u] + P_{\xi_2}[u] - P_{\xi_1}[P_{\xi_2}[u]]. \quad (2)$$

Dann bezeichnet:

$$U(\xi_1, \xi_2) \equiv P[u] \quad (3)$$

die gemischte Interpolationsfunktion von  $u$ .

Für den Fall der hier verwendeten bilinearen Interpolation werden folgende Polynome  $h$  verwendet:

$$h_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad h_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (4)$$

Die Funktionsverläufe auf den Rändern werden durch Polynome stückweise zwischen den Knoten approximiert.

Es werden verwendet:

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad f_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5)$$

für eine lineare und

$$f_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad f_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad f_4(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (6)$$

für eine quadratische stückweise Randinterpolation (Bild 1).

Mit dieser Technik ist die Kopplung von Elementen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Zwischenknoten auf den Rändern problemlos möglich. Im Gegensatz zu anderen Verfahren erfolgt die Kopplung vollkompatibel und ohne Zwangsbedingungen. Die Berechnung der Elementmatrizen erfolgt durch numerische Integration in den durch die Lage der Zwischenknoten gegebenen Integrationsgebieten (Bild 2). Dabei können an jedem Gauß-Punkt die jeweils aktuellen Materialkennwerte verwendet werden. Es werden die Fließbedingung nach v. Mises und das differentielle Stoffgesetz von Prandtl-Reuss verwendet. Dabei wird eine lineare, isotrope Verfestigung berücksichtigt.

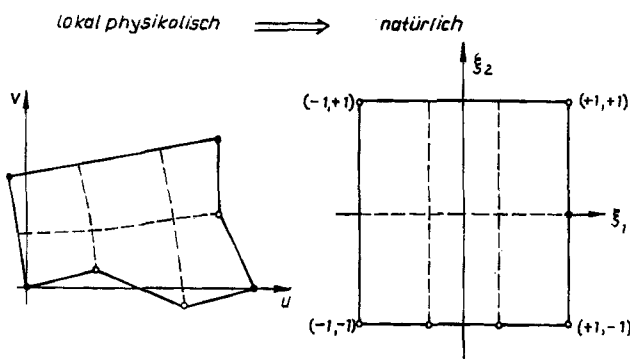


Bild 2. Darstellung der Elementtransformation aus lokal physikalischen in natürliche Koordinaten unter Beachtung der entstandenen Integrationsgebiete

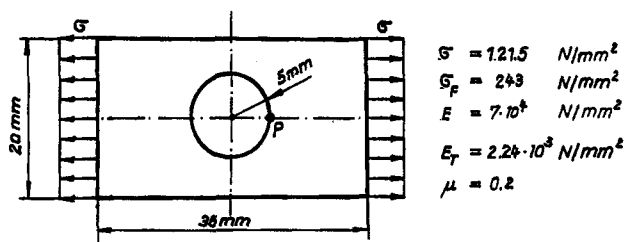


Bild 3. Abmessung und Materialdaten der Scheibe mit Innenloch

Das bei der FE-Formulierung des Anfangs-Randwert-Problems entstehende nichtlineare Gleichungssystem wird inkrementell-iterativ gelöst.

Die zur Spannungsberechnung erforderliche Integration der konstitutiven Gleichungen erfolgte auf der Basis eines impliziten Verfahrens. Es handelt sich dabei um einen Projektionsalgorithmus [2], den sogenannten *radial return algorithm*.

Mit den beschriebenen Verfahren wurden unter anderem ein Schweißnaht-Kreuzstoß und eine größere Luken-eckenkonstruktion [3, 4] berechnet, auf deren Darstellung hier aus Platzgründen verzichtet werden muß. Bei dem vorgestellten Beispiel handelt es sich um eine aus der Literatur [5–7] bekannte Scheibe mit Innenloch unter Zugbelastung (Bild 3). Es wurden zwei Varianten berechnet (Bild 4): Variante A: 20 Elemente mit linearen Ansatzfunktionen, 129 FRG; Variante B: 8 Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen, 92 FRG.

Der Belastungsparameter  $t$  kennzeichnet das Verhältnis der an den Rändern aufgetragenen Zugspannung zur Fließspannung.

Im Bild 5 werden Normalspannungsverläufe im engsten Querschnitt im Vergleich zu Ergebnissen aus der Literatur dargestellt. Es wurde mit einer Lastschrittgröße von  $t = 0,1$  gearbeitet.

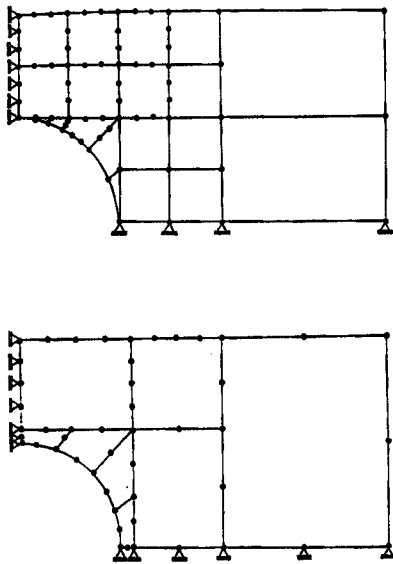


Bild 4. Vernetzung durch Elemente mit linearen (oben) und quadratischen (unten) Ansatzfunktionen

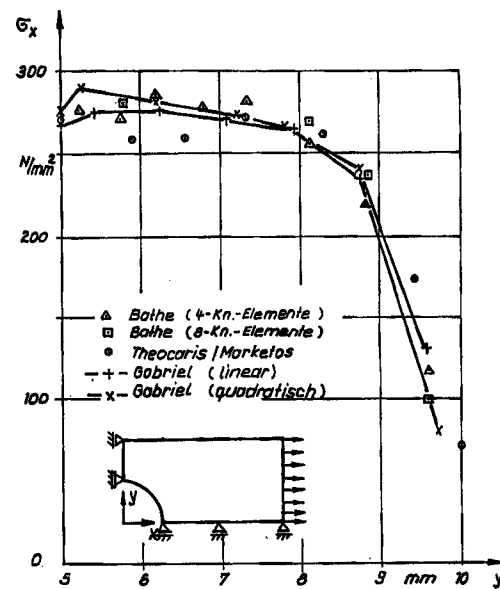


Bild 5. Normalspannungsverläufe im engsten Querschnitt

Weiterhin wurden Belastungs-Verschiebungskurven eines Punktes  $P$  (s. Bild 3) mit dem von RAMM/MATZENMILLER [7] ermittelten Verlauf verglichen (Tabelle 1):

Tabelle 1. Verschiebung des Punktes  $P$  (s. Bild 3) in  $x$ -Richtung für die Varianten A und B im Vergleich zur Lösung von RAMM/MATZENMILLER

Laststufe	A (linear)	B (quadratisch)	Ramm/Matz.
0,5	0,017	0,018	—
1,0	0,042	0,044	—
1,1	0,070	0,073	0,076
1,4	0,259	0,269	0,267
1,7	0,503	0,546	0,546

Insgesamt zeigt sich, daß mit beiden Elementtypen brauchbare Ergebnisse erzielt werden können, wobei Variante B sich erwartungsgemäß etwas „weicher“ zeigte.

## Literatur

- 1 RÖHR, U.: Entwicklung und Anwendung einer kombinierten Finite-Elemente-Methode für die Strukturanalyse des Schiffskörpers. Universität Rostock, Diss. B 1988.
- 2 ORTIZ, M.; SIMO, J. C.: An analysis of a new class of integration algorithms for elasto-plastic constitutive equations. Int. J. for Numerical Methods in Engineering **23** (1986), 353–366.
- 3 GABRIEL, G.: Elastisch-plastische Strukturanalyse unter Verwendung isoparametrischer Makroelemente mit gemischter Interpolation. Universität Rostock, Diss. A 1990.
- 4 GABRIEL, G.: Physikalisch nichtlineare Festigkeitsanalyse schiffbaulicher Konstruktionen. Teil 1–3. Schiffbauforschung **30** (1991) 1, 2, 3–4.
- 5 BATHE, K. J.; OZDEMIR, H.; WILSON, E. L.: Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis. Report No. UCSESM 74-4. University of California 1974.
- 6 ZIENKIEWICZ, O. C.: Methode der Finiten Elemente. Leipzig 1983.
- 7 RAMM, E.; MATZENMILLER, A.: Consistent linearization in elasto-plastic shell analysis. Engineering Computations **5** (1988) 4.

Anschrift: Dr.-Ing. GUNTER GABRIEL, Universität Rostock, FB Maschinenbau und Schiffstechnik, Institut für Technische Mechanik, Albert-Einstein-Str. 2, O-2500 Rostock, Deutschland