Syntopogene Gruppen I

Herrn WILLI RINOW zum 60. Geburtstag am 28. Februar 1967 gewidmet

Von ÁKOS CSÁSZÁR in Budapest

(Eingegangen am 27. 1. 1967)

1. Einleitung

Neben der klassischen Theorie der topologischen Gruppen gibt es Untersuchungen, in denen der Begriff der topologischen Gruppe in dem Sinne verallgemeinert wird, daß statt der Stetigkeit (in beiden Faktoren) der Multiplikation und der Inversbildung schwächere Stetigkeitsforderungen angenommen werden. So wird in der Definition einer halbtopologischen Gruppe [1]) neben der Stetigkeit der Inversbildung nur die Stetigkeit der Multiplikation bei je einem festgesetzten Faktor, mit anderen Worten die Stetigkeit der Links- und Rechtstranslationen gefordert. In der Definition einer paratopologischen Gruppe [2]) wird dagegen nur die Stetigkeit der Multiplikation (in beiden Faktoren) ohne die Stetigkeit der Inversbildung vorausgesetzt.

Weiterhin spielen bekanntlich in der Theorie der topologischen Gruppen außer der Topologie noch gewisse uniforme Strukturen eine wesentliche Rolle.

Da ich nun in der Theorie der syntopogenen Strukturen [3]) eine gemeinsame Verallgemeinerung der Topologien und uniformen Strukturen (und noch anderer Strukturentypen) ausgearbeitet habe, liegt die Frage nahe, was man über solche Gruppen sagen kann, in denen eine syntopogene Struktur angegeben ist, die verschiedenen Stetigkeitsforderungen unterworfen wird.

Die Untersuchung dieser und ähnlicher Fragen ist der Zweck einer Reihe von Aufsätzen, die mit der vorliegenden Note beginnt. Dabei erweist sich als zweckmäßig, neben den syntopogenen Strukturen eine noch etwas allgemeinere Begriffsbildung zugrunde zu legen. Im nächsten Paragraph wird dieser Begriff kurz untersucht, und wir werden uns dann dem Studium der verschiedenen Stetigkeitsarten zuwenden.

---

[1]) Siehe [1], S. 100, Exercise 2).

[2]) Siehe [1], S. 100, Exercise 4).

[3]) Siehe Monographie [2], deren Terminologie und Bezeichnungen im folgenden angewendet werden.

2. Ordnungsstrukturen

Eine *syntopogene Struktur* $\mathscr{S}$ auf einer Menge E ist ein *Ordnungssystem* (d. h. ein nichtleeres System $\{<\}$ *topogener Ordnungen*[4]) auf E), das einerseits *gerichtet*, andererseits *idempotent* ist. Dabei heißt das Ordnungssystem $\mathscr{S}$ gerichtet[5]), wenn aus $<_1, <_2 \in \mathscr{S}$ die Existenz von $<_3 \in \mathscr{S}$ mit $<_1 \subset <_3$, $<_2 \subset <_3$ folgt, und idempotent, wenn aus $< \in \mathscr{S}$ die Existenz von $<_1 \in \mathscr{S}$ folgt mit der Eigenschaft

$$A < B \Rightarrow A <_1 C <_1 B \quad \text{mit geeignetem} \quad C \subset E.$$

Als Grundbegriff sei nun im folgenden der Begriff des gerichteten Ordnungssystems betrachtet und der Kürze halber Ordnungsstruktur genannt. Eine *Ordnungsstruktur* auf einer Menge E ist also ein nichtleeres System $\mathscr{R}$ topogener Ordnungen auf E mit der Eigenschaft, daß aus $<_1$, $<_2 \in \mathscr{R}$ die Existenz von $<_3 \in \mathscr{R}$ folgt mit $<_1 \subset <_3$, $<_2 \subset <_3$. Eine syntopogene Struktur ist nichts anderes als eine idempotente Ordnungsstruktur.

Auf Ordnungsstrukturen lassen sich fast alle für syntopogene Strukturen eingeführten Begriffe übertragen, und ihre wesentlichsten Eigenschaften bleiben dabei gültig. Z. B. heißt die Ordnungsstruktur $\mathscr{R}$ symmetrisch, perfekt oder biperfekt, wenn sie aus lauter symmetrischen, perfekten bzw. biperfekten topogenen Ordnungen besteht, d. h. wenn $\mathscr{R} = \mathscr{R}^s$, $\mathscr{R} = \mathscr{R}^p$ bzw. $\mathscr{R} = \mathscr{R}^b$ gilt.[6]) $\mathscr{R}$ heißt einfach, wenn sie aus einer einzigen Ordnung besteht.[7]) Ist $\{\mathscr{R}_i : i \in I\}$ ein nichtleeres System von Ordnungsstrukturen auf E, so ist

$$(2.1) \qquad \bigvee_{i \in I} \mathscr{R}_i = (\bigcup_{i \in I} \mathscr{R}_i)^g$$

die gröbste Ordnungsstruktur, die feiner ist als jede $\mathscr{R}_i$.[8]) Ist $\mathscr{R}_i (i \in I)$ eine Ordnungsstruktur auf E_i, so setzt man $E = \times_{i \in I} E_i$ und

$$(2.2) \qquad \mathsf{X}_{i \in I} \mathscr{R}_i = \bigvee_{i \in I} \mathrm{pr}_i^{-1} (\mathscr{R}_i)\,^{9)},$$

wobei also $\mathsf{X}_{i \in I} \mathscr{R}_i$ derjenigen Ordnungsstruktur $\mathscr{R}$ äquivalent ist, die aus den Ordnungen

$$(2.3) \qquad \mathsf{X}_{i \in I} <_i = (\bigcup_{i \in I} \mathrm{pr}_i^{-1} (<_i))^q$$

[4]) Siehe [2], S. 29.
[5]) Siehe [2], S. 83.
[6]) Siehe [2], S. 36, 41 und 49.
[7]) Vgl. [2], S. 72.
[8]) Vgl. [2], S. 99.
[9]) Vgl. [2], S. 105 und 129.

besteht, und $<_i \in \mathfrak{R}_i$ für endlich viele Indizes $i \in I$ und $<_i = <_{0,E_i}$ für die anderen i ist.[10])

Ist $\mathfrak{R}$ eine Ordnungsstruktur auf E und $E_0 \subset E$, so setzt man

(2.4) $$\mathfrak{R}|E_0 = \{<|E_0 : < \in \mathfrak{R}\}.$$ [11])

Ist f eine Abbildung von E in E' und bezeichnet $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}'$ eine Ordnungsstruktur auf E bzw. E', so heißt f $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$-stetig, wenn $f^{-1}(\mathfrak{R}') \prec \mathfrak{R}$ ist, wenn es also zu $<' \in \mathfrak{R}'$ ein $< \in \mathfrak{R}$ gibt mit

$$A' <' B' \Rightarrow f^{-1}(A') < f^{-1}(B').$$ [12])

Aus den Definitionen folgert man ohne Schwierigkeit, daß z. B. die Sätze (8.98) bis (8.103), (10.7), (10.10), (10.11), (10.12), (10.18), (10.19), (11.20) bis (11.29) von [2] gültig bleiben, wenn man in ihnen die syntopogenen Strukturen überall durch Ordnungsstrukturen ersetzt.

Wir verzichten auf eine ausführliche Analyse der Frage, welche in der Literatur eingeführten Strukturentypen sich durch allgemeine (nicht notwendig idempotente) Ordnungsstrukturen darstellen lassen. Dieser Problemenkreis sei für eine spätere Angelegenheit vorbehalten; nun wenden wir uns der Untersuchung der Ordnungsstrukturen auf Gruppen zu.

3. Stetigkeitsarten

Es sei also E eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit Einselement e. Für $c \in E$ sei σ_c bzw. δ_c die dem Element c entsprechende Links- bzw. Rechtstranslation:

(3.1) $$\sigma_c(x) = c\,x, \quad \delta_c(x) = x\,c \qquad (x, c \in E),$$

ferner bedeute $\pi\colon E \times E \to E$ die Multiplikation:

(3.2) $$\pi(x, y) = x\,y \qquad (x, y \in E),$$

endlich sei $\varrho\colon E \to E$ die Inversbildung:

(3.3) $$\varrho(x) = x^{-1} \qquad (x \in E).$$

Mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir immer eine Ordnungsstruktur auf E.

Im Zusammenhang mit den hier eingeführten Abbildungen werden folgende Stetigkeitsbegriffe betrachtet.

$\mathfrak{R}$ heiße *linksstetig*, wenn alle Abbildungen $\sigma_c (c \in E)$ $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$-stetig sind. Aus der Gleichung

$$\sigma_c^{-1} = \sigma_{c^{-1}}$$

[10]) Vgl. [2], (11. 10) und (5. 50).

[11]) Vgl. [2], S. 108.

[12]) Vgl. [2], S. 116.

folgt leicht, daß $\mathfrak{R}$ genau dann linksstetig ist, wenn zu jeder Ordnung $< \in \mathfrak{R}$ und zu jedem Element $c \in E$ eine Ordnung $<_1 = <_1(<, c) \in \mathfrak{R}$ gehört mit der Eigenschaft

$$(3.4) \qquad A < B \Rightarrow cA <_1 cB \quad (A, B \subset E).$$

$\mathfrak{R}$ heiße *gleichgradig linksstetig*, wenn in der vorhergehenden Bedingung $<_1$ unabhängig von $c \in E$ gewählt werden kann, wenn also zu jeder Ordnung $< \in \mathfrak{R}$ eine Ordnung $<_1 = <_1(<) \in \mathfrak{R}$ so gehört, daß (3.4) gleichzeitig für jedes Element $c \in E$ gilt.

Eine halbtopogene Ordnung $<$ auf E heiße *linksinvariant*, wenn

$$(3.5) \qquad A < B \Rightarrow cA < cB \quad (A, B \subset E)$$

für jedes $c \in E$ besteht. Die Ordnungsstruktur $\mathfrak{R}$ heiße linksinvariant, wenn jede Ordnung $< \in \mathfrak{R}$ linksinvariant ist.

Die dualen Begriffe *rechtsstetig*, *gleichgradig rechtsstetig*, *rechtsinvariant* werden auf dieselbe Weise mit Hilfe der Rechtstranslationen δ_c definiert. Im folgenden wird doch aus zwei dualen Aussagen immer nur die eine formuliert.

Ist $\mathfrak{R}$ (gleichgradig) links- und rechtsstetig, so heißt sie (*gleichgradig*) *translationsstetig*. Ist $<$ bzw. $\mathfrak{R}$ links- und rechtsinvariant, so wird sie *translationsinvariant* heißen.

$\mathfrak{R}$ heiße *invers-stetig* oder *ϱ-stetig*, wenn die Abbildung ϱ $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$-stetig ist, wenn es also zu jedem $< \in \mathfrak{R}$ ein $<_1 \in \mathfrak{R}$ gehört mit

$$(3.6) \qquad A < B \Rightarrow A^{-1} <_1 B^{-1} \quad (A, B \subset E).$$

Die halbtopogene Ordnung $<$ heiße *ϱ-invariant*, wenn

$$(3.7) \qquad A < B \Rightarrow A^{-1} < B^{-1}$$

für je zwei Mengen $A, B \subset E$ besteht. $\mathfrak{R}$ heiße ϱ-invariant, wenn jede Ordnung $< \in \mathfrak{R}$ ϱ-invariant ist.

Was endlich die Stetigkeit der Abbildung π betrifft, liegt es auf der Hand, solche Ordnungsstrukturen $\mathfrak{R}$ zu betrachten, für die diese Abbildung $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R})$-stetig ist. Doch muß man bedenken, daß z. B. in dem Falle, wenn $\mathcal{T}$ eine Topologie auf E und $[E, \mathcal{T}]$ eine gewöhnliche topologische Gruppe bedeutet, die Abbildung π keineswegs $(\mathcal{T} \times \mathcal{T}, \mathcal{T})$-stetig zu sein braucht. Diese Tatsache hängt damit zusammen, daß die Produkttopologie auf $E \times E$ nicht zu $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, sondern zu $(\mathcal{T} \times \mathcal{T})^{tp} \sim (\mathcal{T} \times \mathcal{T})^{p}$ assoziiert ist.[13])

Diese Überlegung veranlaßt uns, folgende Definition aufzustellen:

Es sei ^{a} eine elementare Operation.[14]) $\mathfrak{R}$ heiße *^{a}-stetig*, wenn sie der Gleichung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^a$ genügt und die Abbildung π $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^a, \mathfrak{R})$-stetig ist.

[13]) Siehe [2], S. 136 und (11. 24).

[14]) Siehe [2], S. 80.

Allerdings muß man bemerken, daß unter den wichtigsten elementaren Operationen ^{i}, ^{q}, ^{s}, ^{p}, ^{b} nur ^{i} und ^{p} aus diesem Standpunkt interessant sind. In der Tat, es gilt immer

$$(\mathcal{R} \times \mathcal{R})^q = \mathcal{R} \times \mathcal{R},$$

aus $\mathcal{R} = \mathcal{R}^s$ folgt

$$(\mathcal{R} \times \mathcal{R})^s = (\mathcal{R} \times \mathcal{R}),$$

und aus $\mathcal{R} = \mathcal{R}^b$ folgt

$$(\mathcal{R} \times \mathcal{R})^b = (\mathcal{R} \times \mathcal{R})^p.$$ [15])

4. Elementare Beziehungen

Einige einfache Bemerkungen über die Zusammenhänge der oben eingeführten Begriffe lassen sich aus den entsprechenden Definitionen unmittelbar entnehmen.

(4.1) *Aus der Linksinvarianz von $\mathcal{R}$ folgt die gleichgradige Linksstetigkeit, und aus der letzteren folgt die Linksstetigkeit.*

(4.2) *Ist $\mathcal{R}$ einfach, so fallen Linksstetigkeit, gleichgradige Linksstetigkeit und Linksinvarianz zusammen.*

(4.3) *Aus der ϱ-Invarianz von $\mathcal{R}$ folgt die ϱ-Stetigkeit.*

(4.4) *Bei einfacher $\mathcal{R}$ fallen ϱ-Invarianz und ϱ-Stetigkeit zusammen.*

(4.5) *Ist $\mathcal{R}$ linksstetig und ϱ-stetig, so ist $\mathcal{R}$ auch rechtsstetig, also translationsstetig.*

Beweis. Zu gegebenem $< \in \mathcal{R}$ sei $<_1 \in \mathcal{R}$ so gewählt, daß aus $A < B$ immer $A^{-1} <_1 B^{-1}$ folgt. Zu $<_1$ und $c \in E$ gehört ein $<_2 = <_2(<_1, c) \in \mathcal{R}$ mit

$$C <_1 D \Rightarrow c^{-1} C <_2 c^{-1} D,$$

also

$$A < B \Rightarrow c^{-1} A^{-1} <_2 c^{-1} B^{-1},$$

und zu $<_2$ existiert $<_3 \in \mathcal{R}$ im Sinne der ϱ-Stetigkeit, so daß endlich aus $A < B$

$$A c = (c^{-1} A^{-1})^{-1} <_3 (c^{-1} B^{-1})^{-1} = Bc$$

folgt.

Mit Hilfe desselben Gedankenganges erhält man:

(4.6) *Ist $\mathcal{R}$ gleichgradig linksstetig und ϱ-stetig, so ist $\mathcal{R}$ auch gleichgradig rechtsstetig, also gleichgradig translationsstetig.*

(4.7) *Ist $<$ linksinvariant und ϱ-invariant, so ist diese Ordnung auch rechtsinvariant, also translationsinvariant.*

---

[15]) Siehe [2], (11. 25).

Stetigkeit in beiden Veränderlichen hat partielle Stetigkeit zur Folge; das ist der Inhalt des folgenden Satzes:

(4.8) *Ist* $\mathfrak{R}$ ^{a}*-stetig* (für eine beliebige elementare Operation ^{a}), *so ist* $\mathfrak{R}$ *gleichgradig translationsstetig.*

Beweis. Zu $< \in \mathfrak{R}$ gehört $<' \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft

$$A < B \Rightarrow \pi^{-1}(A) <'^a \pi^{-1}(B),$$

und es gilt für geeignete $<_1, <_2 \in \mathfrak{R}$

$$<' \subset <_1 \times <_2 = (\mathrm{pr}_1^{-1}(<_1) \cup \mathrm{pr}_2^{-1}(<_2))^q \tag{4.9}$$

(vgl. (2.3)). Für gegebenes $b \in E$ und

$$E' = \{b\} \times E$$

gilt nun offenbar

$$\pi^{-1}(A) \frown E' = \{b\} \times b^{-1}A,$$
$$\pi^{-1}(B) \frown E' = \{b\} \times b^{-1}B,$$

daher folgt aus $A < B$

$$\pi^{-1}(A) \frown E' \left((<_1 \times <_2)^a \mid E'\right) \pi^{-1}(B) \frown E'$$

(vgl. [2], (6.22)), also nach [2], (A_6) (S. 81)

$$(\{b\} \times b^{-1}A)(<_1 \times <_2 \mid E')^a (\{b\} \times b^{-1}B). \tag{4.10}$$

Nun beweisen wir folgendes Lemma:

(4.11) *Ist* $<_i$ *eine topogene Ordnung auf* $E_i (i = 1, 2)$, *und setzt man für* $b \in E_1$

$$E = E_1 \times E_2, \quad <_1 \times <_2 = (\mathrm{pr}_1^{-1}(<_1) \cup \mathrm{pr}_2^{-1}(<_2))^q,$$
$$E' = \{b\} \times E_2, \quad f = \mathrm{pr}_2 | E',$$

so ist

$$<_1 \times <_2 | E' = f^{-1}(<_2).$$

Mit den Bezeichnungen

$$C' = \{b\} \times C, \quad D' = \{b\} \times D \quad (C, D \subset E_2) \tag{4.12}$$

bedeutet nämlich

$$C' (<_1 \times <_2 | E') D'$$

soviel wie

$$C' <_1 \times <_2 D' \smile (E - E'),$$

und das besteht nach [2], (3.6) genau dann, wenn

$$C' = \bigcup_1^m C_i, \quad D' \smile (E - E') = \bigcap_1^n D_j, \tag{4.13}$$

und entweder $C_i \operatorname{pr}_1^{-1}(<_1) D_j$ oder $C_i \operatorname{pr}_2^{-1}(<_2) D_j$ für jedes i und j ($1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$). Offenbar kann man noch $C_i \neq 0$, $D_j \neq E$ voraussetzen, und dann wird

$$C_i \operatorname{pr}_1^{-1}(<_1) D_j$$

mit

$$\{b\} = \operatorname{pr}_1 C_i <_1 E_1 - \operatorname{pr}_1(E - D_j) = E_1 - \{b\}$$

gleichwertig (vgl. [2], (6.1)), denn aus $E - E' \subset D_j \neq E$ folgt

$$0 \neq E - D_j \subset E', \quad \text{also} \quad \operatorname{pr}_1(E - D_j) = \{b\}.$$

Somit kann also nur

$$C_i \operatorname{pr}_2^{-1}(<_2) D_j$$

für alle i und j gültig sein. Jede der folgenden Aussagen ist nun mit der nachfolgenden gleichbedeutend:

$$C_i \operatorname{pr}_2^{-1}(<_2) D_j \quad (1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n),$$

$$\operatorname{pr}_2(C_i) <_2 E_2 - \operatorname{pr}_2(E - D_j) \quad (1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n),$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{pr}_2(C_i) <_2 \bigcap_{j=1}^{n} (E_2 - \operatorname{pr}_2(E - D_j)),$$

$$\operatorname{pr}_2\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) <_2 E_2 - \operatorname{pr}_2\left(\bigcup_{j=1}^{n} (E - D_j)\right),$$

$$\operatorname{pr}_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) <_2 E_2 - \operatorname{pr}_2\left(E - \bigcap_{j=1}^{n} D_j\right).$$

Nach (4.12) und (4.13) erhält man aber

$$\operatorname{pr}_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \operatorname{pr}_2(C') = C,$$

$$\operatorname{pr}_2\left(E - \bigcap_{j=1}^{n} D_j\right) = \operatorname{pr}_2(E - (D' \cup (E - E')))$$
$$= \operatorname{pr}_2(\{b\} \times (E_2 - D)) = E_2 - D,$$

so daß endlich

$$\{b\} \times C (<_1 \times <_2 | E') \{b\} \times D$$

mit

$$C <_2 D$$

gleichbedeutend ist, w. z. b. w.

Aus (4.11) folgt nun

$$(4.14) \qquad (<_1 \times <_2 | E')^a = f^{-1}(<_2)^a = f^{-1}(<_2^a) = f^{-1}(<_2) = <_1 \times <_2 | E',$$

da aus der Voraussetzung $\mathcal{R} = \mathcal{R}^a$, also $<_2 = <_2^a$ folgt.

Mit Hilfe von (4.14) ergibt sich aus (4.10)

$$b^{-1}A <_2 b^{-1}B,$$

wobei $b \in E$ beliebig ist und $<_2$ unabhängig von b gewählt wurde. Das zeigt die gleichgradige Linksstetigkeit von $\mathcal{R}$ und die gleichgradige Rechtsstetigkeit kann ähnlich bewiesen werden.

Bemerkungen. 1. Ist $\mathcal{T}$ eine solche Topologie auf der Gruppe E, daß E mit $\mathcal{T}$ versehen eine halbtopologische, aber keine topologische Gruppe ist, dann ist $\mathcal{T}$ translationsinvariant und ϱ-invariant, aber nicht ^{p}-stetig.

Ein Beispiel einer solchen Gruppe ist das folgende: E sei die Zahlengerade mit der additiven Gruppe, und für die zu $\mathcal{T}$ assoziierte klassische Topologie sollen die Mengen der Form $G \setminus H$[16]) eine Basis bilden, wobei G bezüglich der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ offen und H abzählbar ist. Dann ist $\mathcal{T}$ offenbar translationsinvariant und ϱ-invariant, aber nicht ^{p}-stetig, da es für die Umgebung

$$V = (-1, 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

von 0 keine Umgebung $V_1 = G \setminus H$ (G $\mathcal{E}$-offen, H abzählbar) von 0 mit $V_1 + V_1 \subset V$ gibt. In der Tat, ist $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset G$, so gibt es ein x mit

$$0 < x < \frac{1}{n+1}, \quad x \notin H, \quad \frac{1}{n+1} - x \notin H,$$

so daß

$$x \in G \setminus H = V_1, \quad \frac{1}{n+1} - x \in V_1,$$

und doch

$$x + \left(\frac{1}{n+1} - x\right) = \frac{1}{n+1} \notin V$$

ist.

2. Als Beispiel einer (symmetrischen und biperfekten) translationsstetigen und ϱ-invarianten, aber nicht gleichgradig translationsstetigen syntopogenen Struktur sei das folgende betrachtet: auf der Zahlengeraden E mit der additiven Gruppe bedeute $\mathcal{S}_d$ die aus der Entfernung

$$d(x, y) = |x^3 - y^3|$$

abgeleitete syntopogene Struktur.[17]) Die ϱ-Invarianz von $\mathcal{S}_d$ ist unmittelbare Folge der Gleichung

$$d(-x, -y) = d(x, y),$$

---

16) In additiven Gruppen wird die mengentheoretische Differenz mit $\setminus$ bezeichnet, um Mißverständnisse zu vermeiden.

17) Siehe [2], S. 176.

die Translationsstetigkeit ergibt sich leicht aus der Ungleichung

$$d(c+x, c+y) \leqq 3\,c^2|x-y| + 3\,|c|\,|x^2-y^2| + |x^3-y^3|$$

mit Rücksicht auf die gleichmäßige Stetigkeit der Funktionen $u^{1/3}$ und $u^{2/3}$ $(-\infty < u < +\infty)$. Daß $\mathscr{S}_d$ nicht gleichgradig translationsstetig ist, folgt aus der Tatsache, daß

$$d(c, c+a) = a^3 + 3\,a^2\,c + 3\,a\,c^2$$

bei gegebenem $a > 0$ mit $c \to +\infty$ nach $+\infty$ strebt.

3. Bezeichnet wiederum E die additive Gruppe der reellen Zahlen und ist $\mathscr{T}$ die Topologie, für deren assoziierte klassische Topologie die Intervalle $[a, b)$ eine Basis bilden, so ist $\mathscr{T}$ offenbar ${}^{\nu}$-stetig, aber nicht ϱ-stetig.

4. Es sei $\mathscr{T}$ dieselbe Topologie auf der Zahlengeraden E, ferner setze man

$$E_0 = (0, +\infty), \quad \mathscr{T}_0 = \mathscr{T}\,|\,E_0.$$

Das Element $(x, y) \in E_0 \times E$ sei mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

identifiziert, und man versehe $E_0 \times E$ mit der Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,u & x\,v + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x & -y/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\mathscr{T}_0 \times \mathscr{T})^{tp}$ linksinvariant, aber nicht rechtsstetig.

In der Tat, eine einfache Rechnung ergibt die Formel

$$\begin{aligned} &\sigma_{(x,y)}([u, u+\varepsilon) \times [v, v+\varepsilon)) \\ &= [x\,u, x\,u + x\,\varepsilon) \times [x\,v + y, x\,v + y + x\,\varepsilon) \\ &\quad \subset [x\,u, x\,u + \eta) \times [x\,v + y, x\,v + y + \eta) \end{aligned}$$

bei gegebenen $x > 0$, y, $\eta > 0$ und $0 < \varepsilon < \eta/x$. Dagegen gilt bei gegebenen $u > 0$, $v < 0$, $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \delta_{(u,v)}(x+\varepsilon, y) &= (x\,u + u\,\varepsilon, x\,v + y + v\,\varepsilon) \\ &\notin [x\,u, x\,u + \eta) \times [x\,v + y, x\,v + y + \eta) \end{aligned}$$

wegen $x\,v + y + v\,\varepsilon < x\,v + y$, wie klein $\varepsilon > 0$ auch sei.

5. Stetigkeitserzeugende Operationen

Nun werden wir gewisse, mit den unter 3 eingeführten Stetigkeitsarten zusammenhängende Operationen betrachten, die den elementaren bzw. gewöhnlichen Operationen [18]) ähnlich sind.

Zuerst sei $<$ eine beliebige halbtopogene Ordnung auf der Gruppe E. Wir betrachten die halbtopogene Ordnung

(5.1) $$<^\sigma = \bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<).$$

Aus der nach [2], (6.1) gültigen Beziehung

(5.2) $$A\, \sigma_x^{-1}(<)\, B \Leftrightarrow xA < xB$$

folgt also, daß $A <^\sigma B$ genau dann gilt, wenn $xA < xB$ für mindestens ein $x \in E$ besteht.

(5.3) *$<^\sigma$ ist die gröbste linksinvariante halbtopogene Ordnung, die feiner als $<$ ist. $<$ ist genau dann linksinvariant, wenn $< \, = \, <^\sigma$ ist.*

Beweis. $<^\sigma$ ist linksinvariant:

(5.4) $$\sigma_c^{-1}(<^\sigma) = \sigma_c^{-1}\Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)\Big) = \bigcup_{x\in E} \sigma_c^{-1}\sigma_x^{-1}(<) = \bigcup_{x\in E} \sigma_{xc}^{-1}(<) = <^\sigma$$

(vgl. [2], (6.7) und (6.3)), also nach (5.2)

$$A <^\sigma B \Rightarrow cA <^\sigma cB \quad (c \in E).$$

Wegen $\sigma_e^{-1}(<) = \, <$ ist $< \, \subset \, <^\sigma$. Ist endlich $<'$ linksinvariant und $< \, \subset \, <'$, so hat man

$$\sigma_x^{-1}(<) \subset \sigma_x^{-1}(<') = \, <' \quad (x \in E),$$

folglich $<^\sigma \, \subset \, <'$.

Aus (5.3) folgt unmittelbar:

(5.5) $$<^{\sigma\sigma} = \, <^\sigma.$$

(5.6) $$<_1 \subset <_2 \Rightarrow <_1^\sigma \subset <_2^\sigma,$$
$$\Big(\bigcup_{i\in I} <_i\Big)^\sigma = \bigcup_{i\in I} <_i^\sigma.$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus (5.1). Ferner hat man nach [2], (6.7)

$$\Big(\bigcup_{i\in I} <_i\Big)^\sigma = \bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} <_i\Big) = \bigcup_{x\in E}\bigcup_{i\in I} \sigma_x^{-1}(<_i) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<_i) = \bigcup_{i\in I} <_i^\sigma.$$

[18]) Siehe [2], S. 84.

(5.7) *Ist ^{a} eine elementare Operation, so gilt*

$$<^{a\sigma a} = <^{\sigma a} = <^{\sigma a\sigma},$$

und $<^{\sigma a}$ ist linksinvariant.

Beweis. Aus [2], (8.9) ergibt sich

$$<^{a\sigma a} = \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<^a)\Big)^a = \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)^a\Big)^a$$
$$= \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)\Big)^a = <^{\sigma a}.$$

Weiterhin ist nach (5.5) und (5.3)

$$<^{\sigma a\sigma} \subset <^{\sigma a\sigma a} = <^{\sigma\sigma a} = <^{\sigma a} \subset <^{\sigma a\sigma},$$

also $<^{\sigma a\sigma} = <^{\sigma a}$, woraus die Linksinvarianz von $<^{\sigma a}$ folgt.

Aus [2], (2.13) und (6.8) folgt

(5.8) $$<^{\sigma c} = <^{c\sigma}.$$

(5.9) $$(<_1 <_2)^\sigma \subset <_1^\sigma <_2^\sigma, \quad \text{speziell} \quad <^{2\sigma} \subset <^{\sigma 2}.$$

Beweis. $A(<_1 <_2)^\sigma B$ hat $xA <_1 <_2 xB$ mit geeignetem $x \in E$ zur Folge. Aus der letzten Beziehung ergibt sich $xA <_1 C <_2 xB$ für ein $C \subset E$, d. h. $xA <_1 xD <_2 xB$ mit $D = x^{-1}C$. Daraus folgt $A <_1^\sigma D <_2^\sigma B$ und schließlich $A <_1^\sigma <_2^\sigma B$.

(5.10) *Ist h ein Homomorphismus einer Gruppe E' in die Gruppe E, so gilt*

$$h^{-1}(<)^\sigma \subset h^{-1}(<^\sigma).$$

Ist h ein Epimorphismus, so ist hier das Gleichheitszeichen gültig.

Beweis. Aus $h \circ \sigma_{x'} = \sigma_{h(x')} \circ h$ $(x' \in E')$ folgt nach [2], (6.7) und (6.5)

$$h^{-1}(<)^\sigma = \bigcup_{x'\in E'} \sigma_{x'}^{-1} h^{-1}(<) = \bigcup_{x'\in E'} h^{-1} \sigma_{h(x')}^{-1}(<)$$
$$= h^{-1}\Big(\bigcup_{x'\in E'} \sigma_{h(x')}^{-1}(<)\Big) \subset h^{-1}\Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)\Big) = h^{-1}(<^\sigma).$$

Im Falle eines Epimorphismus gilt $=$ statt $\subset$.

(5.11) *Ist ^{a} eine elementare Operation, so genügt $^{\sigma q a}$ den Bedingungen (A_1) bis (A_5) in der Definition der elementaren Operation*[19]) *und auch (A_6) im Falle eines Epimorphismus.*

Beweis. $< \subset <^\sigma \subset <^{\sigma q a}$ nach (5.3).

$$<^{\sigma q a \sigma q a} = <^{\sigma\sigma q a} = <^{\sigma q a}$$

---

[19]) Siehe [2], S. 80.

nach [2], (8.7) und (5.7) bzw. (5.5).

$$<_1 \subset <_2 \Rightarrow <_1^{\sigma q a} \subset <_2^{\sigma q a}$$

nach (5.6).

$$<^{2\sigma q a} \subset <^{\sigma 2 q a} \subset <^{\sigma q a 2}$$

nach (5.9) und [2], (8.7).

$$<^{\sigma q a q} \subset <^{\sigma q q a} = <^{\sigma q a} \subset <^{q \sigma q a}$$

nach (5.6).

Für einen Epimorphismus $h\colon E' \to E$ gilt nach (5.10) und [2], (8.7)

$$h^{-1}(<^{\sigma q a}) = h^{-1}(<^{\sigma})^{q a} = h^{-1}(<)^{\sigma q a}.$$

Damit ist alles bewiesen.

Ist nun $\mathcal{R}$ eine Ordnungsstruktur auf E, so setze man

(5.12) $\quad \mathcal{R}^{\sigma} = \{<^{\sigma q}\colon < \in \mathcal{R}\}$.

(5.13) *$\mathcal{R}^{\sigma}$ ist die gröbste linksinvariante Ordnungsstruktur, die feiner als $\mathcal{R}$ ist.*

Beweis. $\mathcal{R}^{\sigma}$ ist eine Ordnungsstruktur, da $<^{\sigma q}$ für $< \in \mathcal{R}$ eine topogene Ordnung ist und aus $<_1, <_2 \subset <_3$ ($<_i \in \mathcal{R}$) immer $<_1^{\sigma q}, <_2^{\sigma q} \subset <_3^{\sigma q}$ folgt. Nach (5.7) ist $\mathcal{R}^{\sigma}$ linksinvariant und offenbar feiner als $\mathcal{R}$. Ist $\mathcal{R}'$ eine linksinvariante Ordnungsstruktur mit $\mathcal{R} < \mathcal{R}'$, so gehört zu einer Ordnung $< \in \mathcal{R}$ eine Ordnung $<' \in \mathcal{R}'$ mit $< \subset <'$, und aus der Linksinvarianz von $<'$ folgt $<^{\sigma} \subset <'$ nach (5.3), also auch $<^{\sigma q} \subset <'$. Daher gilt $\mathcal{R}^{\sigma} < \mathcal{R}'$.

(5.14) *$\mathcal{R}$ ist genau dann linksinvariant, wenn $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\sigma}$, und genau dann gleichgradig linksstetig, wenn $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\sigma}$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus (5.12) und (5.13). Ist $\mathcal{R}$ gleichgradig linksstetig, so gibt es zu $< \in \mathcal{R}$ ein $<_1 \in \mathcal{R}$ mit $A < B \Rightarrow xA <_1 xB$ für alle $x \in E$ und $A, B \subset E$. Dann folgt aus $A <^{\sigma} B$ immer $xA < xB$ für ein $x \in E$, also $x^{-1}xA <_1 x^{-1}xB$, d. h. $A <_1 B$. Mithin ergibt sich $<^{\sigma} \subset <_1$ und $<^{\sigma q} \subset <_1$, so daß $\mathcal{R}^{\sigma} < \mathcal{R}$. Da nach (5.13) auch $\mathcal{R} < \mathcal{R}^{\sigma}$ gilt, ist $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\sigma}$. Ist umgekehrt $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\sigma}$, so gibt es zu $< \in \mathcal{R}$ ein $<_1 \in \mathcal{R}$ mit $< \subset <_1^{\sigma q}$, und zu $<_1^{\sigma q}$ ein $<_2 \in \mathcal{R}$ mit $<_1^{\sigma q} \subset <_2$. Aus $A < B$ folgt daher $A <_1^{\sigma q} B$, also $xA <_1^{\sigma q} xB$ für alle $x \in E$ und endlich $xA <_2 xB$ für alle $x \in E$. Somit ist $\mathcal{R}$ gleichgradig linksstetig.

Aus (5.11) folgt leicht:

(5.15) *Die Operation $\mathcal{R} \to \mathcal{R}^{\sigma}$ genügt den Bedingungen (K_1) bis (K_5) in der Definition der gewöhnlichen Operationen [20]) und auch (K_6) im Falle eines Epimorphismus.*

---

20) Siehe [2], S. 84.

Nur (K_5) braucht erwiesen zu werden. Nun besteht für $<_i \in \mathcal{R}\,(1 \leqq i \leqq n)$

$$\Big(\bigcup_1^n <_i^{\sigma q}\Big)^q = \Big(\bigcup_1^n <_i^{\sigma}\Big)^q = \Big(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{x \in E} \sigma_x^{-1}(<_i)\Big)^q$$
$$= \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^n <_i\Big)\Big)^q = \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\bigcup_1^n <_i\Big)^q\Big)^q$$
$$= \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\Big(\bigcup_1^n <_i\Big)^q\Big)\Big)^q = <^{\sigma q}$$

mit

$$< = \Big(\bigcup_1^n <_i\Big)^q \in \mathcal{R}^q.$$

Da

$$\Big(\bigcup_1^n <_i^{\sigma q}\Big)^q$$

das allgemeine Element von $\mathcal{R}^{\sigma q}$ ist, folgt daraus $\mathcal{R}^{\sigma q} \subset \mathcal{R}^{q\sigma}$ und erst recht $\mathcal{R}^{\sigma q} \prec \mathcal{R}^{q\sigma}$.

Aus (5.15) ergibt sich:

(5.16) *Ist $\mathcal{S}$ eine syntopogene Struktur auf E, so ist auch $\mathcal{S}^\sigma$ eine syntopogene Struktur.*

(5.17) *Für eine beliebige elementare Operation ^{a} ist $\mathcal{R}^{a\sigma a} = \mathcal{R}^{\sigma a} = \mathcal{R}^{\sigma a\sigma}$. Außerdem ist auch $\mathcal{R}^{\sigma c} = \mathcal{R}^{c\sigma}$ und $\mathcal{R}^{\sigma t} = \mathcal{R}^{t\sigma}$.*

Beweis. Aus $< \in \mathcal{R}$ folgt $< = <^q$, somit ist nach (5.7), (5.8) und [2], (8.7), (3.20)

$$<^{a\sigma q a} = <^{q a\sigma q a} = <^{\sigma q a}, \quad <^{\sigma q c} = <^{\sigma c q} = <^{c\sigma q}.$$

Das ergibt die ersten beiden Behauptungen. Um die letzte einzusehen, sei bemerkt, daß $\mathcal{R}^{\sigma t}$ bzw. $\mathcal{R}^{t\sigma}$ je aus einer topogenen Ordnung besteht, und zwar nach [2], (8.14) aus

$$\Big(\bigcup_{<\in\mathcal{R}} \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)\Big)^q\Big)^q = \Big(\bigcup_{<\in\mathcal{R}} \bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)\Big)^q$$

bzw.

$$\Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\Big(\bigcup_{<\in\mathcal{R}} <\Big)^q\Big)\Big)^q = \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\bigcup_{<\in\mathcal{R}} <\Big)^q\Big)^q$$
$$= \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\bigcup_{<\in\mathcal{R}} <\Big)\Big)^q = \Big(\bigcup_{x\in E} \bigcup_{<\in\mathcal{R}} \sigma_x^{-1}(<)\Big)^q.$$

Natürlich entsprechen den Operationen $<^\sigma$ bzw. $\mathcal{R}^\sigma$ die dualen Operationen

(5.18) $$<^\delta = \bigcup_{x\in E} \delta_x^{-1}(<)$$

bzw.

(5.19) $$\mathcal{R}^\delta = \{<^{\delta q} : < \in \mathcal{R}\}.$$

Die Formeln und Behauptungen (5.2) bis (5.17) lassen sich leicht auf diese übertragen. Ferner besteht noch:

(5.20) *$<^{\sigma\delta} = <^{\delta\sigma}$ ist die gröbste translationsinvariante halbtopogene Ordnung, die feiner als $<$ ist. $\mathfrak{R}^{\sigma\delta} = \mathfrak{R}^{\delta\sigma}$ ist die gröbste translationsinvariante Ordnungsstruktur, die feiner als $\mathfrak{R}$ ist.*

Beweis. Aus $\sigma_x \circ \delta_y = \delta_y \circ \sigma_x$ $(x, y \in E)$ folgt nach [2], (6.7)

$$<^{\sigma\delta} = \bigcup_{y\in E} \delta_y^{-1}\,(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(<)) = \bigcup_{y\in E}\bigcup_{x\in E} \delta_y^{-1}\,\sigma_x^{-1}(<)$$
$$= \bigcup_{x\in E}\bigcup_{y\in E} \sigma_x^{-1}\,\delta_y^{-1}(<) = \bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}\,(\bigcup_{y\in E} \delta_y^{-1}(<)) = <^{\delta\sigma}.$$

Für $< \in \mathfrak{R}$ ist noch $< = <^q$, somit

$$<^{\sigma q\delta q} = <^{\sigma\delta q} = <^{\delta\sigma q} = <^{\delta q\sigma q}$$

nach (5.7), woraus $\mathfrak{R}^{\sigma\delta} = \mathfrak{R}^{\delta\sigma}$ folgt. Das übrige ergibt sich aus (5.3) und (5.13).

(5.21) *$<$ ist genau dann translationsinvariant, wenn $< = <^{\sigma\delta}$ ist. $\mathfrak{R}$ ist genau dann translationsinvariant bzw. gleichgradig translationsstetig, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{\sigma\delta}$ bzw. $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}^{\sigma\delta}$ ist.*

Ähnliche Ergebnisse leitet man im Zusammenhang mit ϱ-Invarianz und ϱ-Stetigkeit her. Für eine beliebige halbtopogene Ordnung $<$ auf E setzen wir

(5.22) $<^{\varrho} = < \cup\ \varrho^{-1}(<)$,

und für eine Ordnungsstruktur $\mathfrak{R}$

(5.23) $\mathfrak{R}^{\varrho} = \{<^{\varrho q}: < \in \mathfrak{R}\}$.

Den vorangehenden vollständig analoge (und sogar einfachere) Überlegungen ergeben folgendes:

(5.24) *$<^{\varrho}$ ist die gröbste ϱ-invariante halbtopogene Ordnung, die feiner als $<$ ist. $<$ ist genau dann ϱ-invariant, wenn $< = <^{\varrho}$ ist.*

(5.25) $<^{\varrho\varrho} = <^{\varrho}$.

(5.26) $<_1 \subset <_2 \Rightarrow <_1^{\varrho} \subset <_2^{\varrho}$,
$(\bigcup_{i\in I} <_i)^{\varrho} = \bigcup_{i\in I} <_i^{\varrho}$.

(5.27) *Ist ^{a} eine elementare Operation, so gilt*
$<^{a\varrho a} = <^{\varrho a} = <^{\varrho a\varrho}$.
$<^{\varrho a}$ ist immer ϱ-invariant.

(5.28) $<^{\varrho c} = <^{c\varrho}$.

(5.29) $(<_1 <_2)^{\varrho} \subset <_1^{\varrho} <_2^{\varrho}$; $\quad <^{2\varrho} \subset <^{\varrho 2}$.

(5.30) *Ist h ein Homomorphismus von E' in E, so gilt*

$$h^{-1}(<)^{\varrho} = h^{-1}(<^{\varrho}).$$

Beweis. Es genügt, die Gleichung

$$\varrho^{-1}h^{-1}(<) = h^{-1}\varrho^{-1}(<)$$

zu erweisen, die aber aus $h \circ \varrho = \varrho \circ h$ unmittelbar folgt.

(5.31) *Ist ^{a} eine elementare Operation, so genügt ${}^{\varrho a}$ den Bedingungen (A_1) bis (A_5) und auch (A_6) im Falle eines Homomorphismus.*

(5.32) *$\mathfrak{R}^{\varrho}$ ist die gröbste ϱ-invariante Ordnungsstruktur, die feiner als $\mathfrak{R}$ ist. $\mathfrak{R}$ ist genau dann ϱ-invariant bzw. ϱ-stetig, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{\varrho}$ bzw. $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}^{\varrho}$ ist.*

(5.33) *Die Operation $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^{\varrho}$ genügt den Bedingungen (K_1) bis (K_5) und auch (K_6) im Falle eines Homomorphismus.*

(5.34) *Ist $\mathcal{S}$ eine syntopogene Struktur auf E, so ist auch $\mathcal{S}^{\varrho}$ eine syntopogene Struktur.*

(5.35) *Es gilt $\mathfrak{R}^{a\varrho a} = \mathfrak{R}^{\varrho a} = \mathfrak{R}^{\varrho a \varrho}$ für eine beliebige elementare Operation ^{a}, ferner ist $\mathfrak{R}^{\varrho c} = \mathfrak{R}^{c\varrho}$ und $\mathfrak{R}^{\varrho t} = \mathfrak{R}^{t\varrho}$.*

(5.36) *$<^{\sigma\delta\varrho} = <^{\varrho\sigma\delta}$ ist die gröbste translations- und ϱ-invariante halbtopogene Ordnung, die feiner als $<$ ist.*

Beweis. Aus $\sigma_x \circ \varrho = \varrho \circ \delta_{x^{-1}} (x \in E)$ folgt

(5.37) $$\varrho^{-1}\sigma_x^{-1}(<) = \delta_{x^{-1}}^{-1}\varrho^{-1}(<),$$

daher

$$\begin{aligned}\varrho^{-1}(<^{\sigma}) &= \varrho^{-1}\Big(\bigcup_{x\in E}\sigma_x^{-1}(<)\Big) = \bigcup_{x\in E}\varrho^{-1}\sigma_x^{-1}(<)\\ &= \bigcup_{x\in E}\delta_{x^{-1}}^{-1}\varrho^{-1}(<) = \varrho^{-1}(<)^{\delta},\end{aligned}$$

also

(5.38) $$\varrho^{-1}(<^{\sigma}) = \varrho^{-1}(<)^{\delta}$$

und ähnlicherweise

(5.39) $$\varrho^{-1}(<^{\delta}) = \varrho^{-1}(<)^{\sigma}.$$

Folglich hat man nach (5.22), (5.37), (5.38), (5.20) und (5.6)

$$\begin{aligned}<^{\sigma\delta\varrho} &= <^{\sigma\delta} \cup \varrho^{-1}(<^{\sigma\delta}) = <^{\sigma\delta} \cup \varrho^{-1}(<^{\sigma})^{\sigma}\\ &= <^{\sigma\delta} \cup \varrho^{-1}(<)^{\delta\sigma} = <^{\sigma\delta} \cup \varrho^{-1}(<)^{\sigma\delta}\\ &= (< \cup\, \varrho^{-1}(<))^{\sigma\delta} = <^{\varrho\sigma\delta}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Übrige.

(5.40) *$\mathfrak{R}^{\sigma\delta\varrho} = \mathfrak{R}^{\varrho\sigma\delta}$ ist die gröbste translations- und ϱ-invariante Ordnungsstruktur, die feiner als $\mathfrak{R}$ ist. $\mathfrak{R}$ ist genau dann translations- und ϱ-invariant, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{\sigma\delta\varrho}$ ist, und genau dann gleichgradig translationsstetig und ϱ-stetig, wenn $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}^{\sigma\delta\varrho}$ ist.*

Da die Eigenschaft der Linksstetigkeit sich nicht auf eine halbtopogene Ordnung, sondern auf eine Ordnungsstruktur bezieht, entspricht ihr nur eine Operation an Ordnungsstrukturen, und zwar die folgende:

(5.41) $$\mathfrak{R}^{\tau} = \bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}).$$

(5.42) *$\mathfrak{R}^{\tau}$ ist die gröbste linksstetige Ordnungsstruktur, die feiner als $\mathfrak{R}$ ist. $\mathfrak{R}$ ist genau dann linksstetig, wenn $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}^{\tau}$ ist.*

Beweis. Für $c \in E$ besteht nach [2], (9.10)

(5.43) $$\sigma_c^{-1}(\mathfrak{R}^{\tau}) = \bigvee_{x\in E} \sigma_c^{-1}\,\sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}) = \bigvee_{x\in E} \sigma_{xc}^{-1}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^{\tau},$$

so daß $\sigma_c(\mathfrak{R}^{\tau}, \mathfrak{R}^{\tau})$-stetig, also $\mathfrak{R}^{\tau}$ linksstetig ist. $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}^{\tau}$ folgt aus $\sigma_e^{-1}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$. Ist endlich $\mathfrak{R}'$ linksstetig und $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}'$, so hat man für $x \in E$

$$\sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}) < \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}') < \mathfrak{R}'$$

und

$$\mathfrak{R}^{\tau} = \bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}) < \mathfrak{R}'.$$

Das übrige folgt daraus unmittelbar.

(5.44) $$\mathfrak{R}^{\tau\tau} = \mathfrak{R}^{\tau}.$$

Beweis. Aus (5.43) sowie [2], (8.89) und (8.25) ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^{\tau\tau} &= \bigvee_{y\in E} \sigma_y^{-1}(\mathfrak{R}^{\tau}) = \Big(\bigcup_{y\in E} \sigma_y^{-1}(\mathfrak{R}^{\tau})\Big)^g = \mathfrak{R}^{\tau g} = \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R})\Big)^{gg}\\ &= \Big(\bigcup_{x\in E} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R})\Big)^g = \bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^{\tau}.\end{aligned}$$

(5.45) $$\mathfrak{R}_1 < \mathfrak{R}_2 \Rightarrow \mathfrak{R}_1^{\tau} < \mathfrak{R}_2^{\tau},$$
$$\Big(\bigvee_{i\in I} \mathfrak{R}_i\Big)^{\tau} = \bigvee_{i\in I} \mathfrak{R}_i^{\tau}.$$

Beweis. Die erste Behauptung ist eine Folge von [2], (8.98) und (9.3), die zweite von [2], (8.96) und (9.10):

$$\begin{aligned}\Big(\bigvee_{i\in I} \mathfrak{R}_i\Big)^{\tau} &= \bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}\Big(\bigvee_{i\in I} \mathfrak{R}_i\Big) = \bigvee_{x\in E}\bigvee_{i\in I} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}_i)\\ &= \bigvee_{i\in I}\bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}(\mathfrak{R}_i) = \bigvee_{i\in I} \mathfrak{R}_i^{\tau}.\end{aligned}$$

(5.46) *Für eine elementare Operation ^{a} gilt*

$$\mathfrak{R}^{a\tau a} = \mathfrak{R}^{\tau a} = \mathfrak{R}^{\tau a\tau a},$$

ferner besteht

$$\mathcal{R}^{\tau c} = \mathcal{R}^{c\tau}, \quad \mathcal{R}^{t\tau t} = \mathcal{R}^{\tau t}.$$

Beweis. Die erste Gleichung ergibt sich aus [2], (8.89), die zweite aus

$$\mathcal{R}^{\tau a \tau a} = \mathcal{R}^{\tau\tau a} = \mathcal{R}^{\tau a},$$

die dritte aus [2], (8.102) und (9.8), die vierte aus [2], (9.9) und (8.100).

(5.47) $\mathcal{R}^{2\tau} < \mathcal{R}^{\tau 2}$.

Beweis. Setzt man

$$\bigcup_{x \in E} \sigma_x^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{A},$$

so ergibt sich aus [2], (8.89), (6.18) und (8.25)

$$\mathcal{R}^{2\tau} = \big(\bigcup_{x \in E} \sigma_x^{-1}(\mathcal{R}^2)\big)^g < \big(\bigcup_{x \in E} \sigma_x^{-1}(\mathcal{R})^2\big)^g = \mathcal{A}^{2g} < \mathcal{A}^{g2} = \mathcal{R}^{\tau 2}.$$

(5.48) *Für einen Homomorphismus $h\colon E' \to E$ gilt*

$$h^{-1}(\mathcal{R})^\tau < h^{-1}(\mathcal{R}^\tau).$$

Ist h ein Epimorphismus, so besteht das Gleichheitszeichen.

Beweis. Aus $h \circ \sigma_{x'} = \sigma_{h(x')} \circ h$ $(x' \in E')$ folgt

$$h^{-1}(\mathcal{R})^\tau = \bigvee_{x' \in E'} \sigma_{x'}^{-1} h^{-1}(\mathcal{R}) = \bigvee_{x' \in E'} h^{-1} \sigma_{h(x')}^{-1}(\mathcal{R}) = h^{-1}\big(\bigvee_{x' \in E'} \sigma_{h(x')}^{-1}(\mathcal{R})\big) < h^{-1}\big(\bigvee_{x \in E} \sigma_x^{-1}(\mathcal{R})\big) = h^{-1}(\mathcal{R}^\tau)$$

(vgl. [2], (9.10) und (9.3)). Im Falle eines Epimorphismus gilt hier $=$ statt $<$.

(5.49) *Die Operation $^\tau$ erfüllt die Bedingungen (K_1) bis (K_5) und auch (K_6) im Falle eines Epimorphismus.*

Beweis. Nur (K_5) braucht bewiesen zu werden:

$$\mathcal{R}^{\tau g} = \big(\bigcup_{x \in E} \sigma_x^{-1}(\mathcal{R})\big)^{gg} = \big(\bigcup_{x \in E} \sigma_x^{-1}(\mathcal{R})\big)^g = \mathcal{R}^\tau < \mathcal{R}^{g\tau}.$$

Bemerkung. Da $^\tau$ nur für Ordnungsstrukturen definiert wurde, gilt $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^g$ und daher ist in Wirklichkeit $\mathcal{R}^{\tau g} \sim \mathcal{R}^{g\tau}$.

(5.50) *Ist $\mathcal{S}$ eine syntopogene Struktur, so ist auch $\mathcal{S}^\tau$ eine syntopogene Struktur.*

Natürlich kann man nach dem Muster von (5.41)

(5.51) $$\mathcal{R}^\varepsilon = \bigvee_{x \in E} \delta_x^{-1}(\mathcal{R})$$

definieren und die den Behauptungen (5.42) bis (5.50) entsprechenden Aussagen beweisen. Ferner gilt noch:

(5.52) $\mathcal{R}^{\tau\varepsilon} = \mathcal{R}^{\varepsilon\tau}$ *ist die gröbste translationsstetige Ordnungsstruktur, die feiner als* $\mathcal{R}$ *ist.* $\mathcal{R}$ *ist genau dann translationsstetig, wenn* $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\tau\varepsilon}$ *ist.*

Beweis. Nach $\sigma_x \circ \delta_y = \delta_y \circ \sigma_x$ und [2], (9.10) und (9.3) hat man

$$\mathcal{R}^{\tau\varepsilon} = \bigvee_{y\in E} \delta_y^{-1}\,(\bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}\,(\mathcal{R})) = \bigvee_{y\in E}\bigvee_{x\in E} \delta_y^{-1}\,\sigma_x^{-1}(\mathcal{R})$$
$$= \bigvee_{x\in E}\bigvee_{y\in E} \sigma_x^{-1}\,\delta_y^{-1}(\mathcal{R}) = \bigvee_{x\in E} \sigma_x^{-1}\,(\bigvee_{y\in E} \delta_y^{-1}(\mathcal{R})) = \mathcal{R}^{\varepsilon\tau}.$$

Das übrige folgt aus (5.42).

(5.53) $\mathcal{R}^{\tau\varepsilon\varrho} \sim \mathcal{R}^{\varrho\tau\varepsilon} \cdot \mathcal{R}^{\tau\varepsilon\varrho}$ *ist die gröbste translationsstetige und* ϱ*-invariante Ordnungsstruktur, die feiner als* $\mathcal{R}$ *ist.* $\mathcal{R}$ *ist genau dann translationsstetig und* ϱ*-stetig, wenn* $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\tau\varepsilon\varrho}$ *ist.*

Beweis. Alles folgt aus der ersten Äquivalenz, die sich auf die folgende Weise beweisen läßt.

Zuerst sei bemerkt, daß

(5.54) $\mathcal{R}^{\varrho} \sim \mathcal{R} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R})$

für jede Ordnungsstruktur gültig ist. In der Tat, das allgemeine Element der rechten Seite besitzt die Gestalt

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} <_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} \varrho^{-1}(<_j)\right)^q \tag{5.55}$$

mit $<_i$, $<_j \in \mathcal{R}$ (eventuell ist $m = 0$ oder $n = 0$). Da $\mathcal{R}$ gerichtet ist, existiert $< \in \mathcal{R}$ mit $<_i, <_j \subset <$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$, so daß

$$\bigcup_{i=1}^{m} <_i \subset <, \quad \bigcup_{j=1}^{n} \varrho^{-1}(<_j) \subset \varrho^{-1}(<)$$

und (5.55) gröber als $(< \cup\ \varrho^{-1}(<))^q = <^{\varrho q} \in \mathcal{R}^{\varrho}$ ist. Deshalb ist

$$\mathcal{R} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R}) < \mathcal{R}^{\varrho},$$

andererseits besitzt das allgemeine Element von $\mathcal{R}^{\varrho}$ die Form

$$(< \cup\ \varrho^{-1}(<))^q \qquad (< \in \mathcal{R}),$$

also

$$\mathcal{R}^{\varrho} \subset \mathcal{R} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R})$$

und erst recht

$$\mathcal{R}^{\varrho} < \mathcal{R} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R}).$$

Nun folgt aus (5.51)

$$\mathcal{R}^{\tau\varepsilon\varrho} \sim \mathcal{R}^{\tau\varepsilon} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R}^{\tau\varepsilon}). \tag{5.56}$$

Außerdem ergibt sich aus (5.37) und (5.51)

$$\varrho^{-1}(\mathcal{R}^{\tau\varepsilon}) = \varrho^{-1}\,(\bigvee_{y\in E}\delta_y^{-1}\,(\bigvee_{x\in E}\sigma_x^{-1}(\mathcal{R})))$$
$$= \bigvee_{y\in E}\bigvee_{x\in E}\varrho^{-1}\,\delta_y^{-1}\,\sigma_x^{-1}(\mathcal{R}) = \bigvee_{y\in E}\bigvee_{x\in E}\sigma_{y^{-1}}^{-1}\,\delta_{x^{-1}}^{-1}\,\varrho^{-1}(\mathcal{R})$$
$$= \varrho^{-1}(\mathcal{R})^{\varepsilon\tau} = \varrho^{-1}(\mathcal{R})^{\tau\varepsilon},$$

also nach (5.56), (5.45) und (5.54)

$$\mathcal{R}^{\tau\varepsilon\varrho} \sim \mathcal{R}^{\tau\varepsilon} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R})^{\tau\varepsilon} = (\mathcal{R} \vee \varrho^{-1}(\mathcal{R}))^{\tau\varepsilon} \sim \mathcal{R}^{\varrho\tau\varepsilon}.$$

6. Schlußfolgerungen

Die vorangehenden Ergebnisse zeigen, daß die Linksstetigkeit, gleichgradige Linksstetigkeit, Linksinvarianz, Translationsstetigkeit, Translationsinvarianz, ϱ-Stetigkeit, ϱ-Invarianz, Translations- und ϱ-Stetigkeit, Translations- und ϱ-Invarianz einer Ordnungsstruktur $\mathcal{R}$ der Reihe nach den Formeln

$$\mathcal{R}^{\tau} \sim \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\sigma} \sim \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\sigma} = \mathcal{R};$$
$$\mathcal{R}^{\tau\varepsilon} \sim \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\sigma\delta} \sim \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\sigma\delta} = \mathcal{R};$$
$$\mathcal{R}^{\varrho} \sim \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\varrho} = \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\tau\varepsilon\varrho} \sim \mathcal{R},\quad \mathcal{R}^{\sigma\delta\varrho} = \mathcal{R}$$

gleichbedeutend sind. Dabei besitzen die Operationen $^{\tau}$, $^{\sigma}$, $^{\varepsilon}$, $^{\delta}$, $^{\varrho}$ zu den Eigenschaften der gewöhnlichen Operationen ähnliche Eigenschaften, und die folgenden Beziehungen gelten:

$$\mathcal{R}^{\tau t} = \mathcal{R}^{t\tau t},\quad \mathcal{R}^{\sigma t} = \mathcal{R}^{t\sigma},\quad \mathcal{R}^{\varrho t} = \mathcal{R}^{t\varrho},$$
$$\mathcal{R}^{\tau c} = \mathcal{R}^{c\tau},\quad \mathcal{R}^{\sigma c} = \mathcal{R}^{c\sigma},\quad \mathcal{R}^{\varrho c} = \mathcal{R}^{c\varrho},$$
$$\mathcal{R}^{\tau a} = \mathcal{R}^{a\tau a} = \mathcal{R}^{\tau a\tau a},\quad \mathcal{R}^{\sigma a} = \mathcal{R}^{\sigma a\sigma} = \mathcal{R}^{a\sigma a},$$
$$\mathcal{R}^{\varrho a} = \mathcal{R}^{\varrho a\varrho} = \mathcal{R}^{a\varrho a},$$

wobei ^{a} eine beliebige elementare Operation bedeutet.

Insbesondere folgt daraus, daß eine der hier erwähnten Stetigkeitsarten von $\mathcal{R}$ dieselbe Stetigkeitsart von $\mathcal{R}^{t}$, $\mathcal{R}^{c}$ und $\mathcal{R}^{a}$ für eine beliebige elementare Operation ^{a} mit sich bringt.

Dieser letzten Bemerkung entsprechende Aussagen kann man für den Begriff der ^{a}-Stetigkeit in folgender Weise formulieren:

(6.1) *Sind ^{a_1}, ^{a_2} und $^{a_1 a_2}$ elementare Operationen, so folgt aus der ^{a_1}-Stetigkeit von $\mathcal{R}$ die $^{a_1 a_2}$-Stetigkeit von $\mathcal{R}^{a_2}$.*

Beweis. Zuerst folgt aus $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{a_1}$ die Gleichung

$$\mathcal{R}^{a_2} = \mathcal{R}^{a_1 a_2} = \mathcal{R}^{a_1 a_2 a_1 a_2} = \mathcal{R}^{a_2 a_1 a_2}.$$

Ist nun π $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{a_1}, \mathfrak{R})$-stetig, so ist dieselbe Abbildung nach [2], (10.12) auch $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{a_1 a_2}, \mathfrak{R}^{a_2})$-stetig, und

$$(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{a_1 a_2} = (\mathfrak{R}^{a_1 a_2} \times \mathfrak{R}^{a_1 a_2})^{a_1 a_2} = (\mathfrak{R}^{a_2} \times \mathfrak{R}^{a_2})^{a_1 a_2}$$

nach [2], (11.22). Somit ist π $((\mathfrak{R}^{a_2} \times \mathfrak{R}^{a_2})^{a_1 a_2}, \mathfrak{R}^{a_2})$-stetig.

(6.2) *Ist ^{a} eine elementare Operation mit $^{ca} = {}^{ac}$, so folgt aus der ^{a}-Stetigkeit von $\mathfrak{R}$ die ^{a}-Stetigkeit von $\mathfrak{R}^c$.*

Beweis. $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^a$ hat $\mathfrak{R}^c = \mathfrak{R}^{ac} = \mathfrak{R}^{ca}$ zur Folge, und aus der $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^a, \mathfrak{R})$-Stetigkeit von π folgt ihre $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{ac}, \mathfrak{R}^c)$-Stetigkeit. Schließlich ist nach [2], (11.25)

$$(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{ac} = (\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{ca} = (\mathfrak{R}^c \times \mathfrak{R}^c)^a.$$

(6.3) *Ist $\mathfrak{R}$ ^{a}-stetig für eine elementare Operation ^{a}, so ist $\mathfrak{R}^{ta}$ ebenfalls ^{a}-stetig.*

Beweis. $\mathfrak{R}^{ta} = \mathfrak{R}^{taa}$ ist trivial, und die $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^a, \mathfrak{R})$-Stetigkeit von π hat die $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{ata}, \mathfrak{R}^{ta})$-Stetigkeit von π zur Folge. Ferner gilt nach [2], (8.50), (11.23) und (11.24)

$$(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{ata} = (\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^{ta} = (\mathfrak{R}^{ta} \times \mathfrak{R}^{ta})^{ta} \sim (\mathfrak{R}^{ta} \times \mathfrak{R}^{ta})^a,$$

woraus die Behauptung nach [2], (10.11) folgt.

Wesentlich stärkere Behauptungen erhält man, wenn man statt einer beliebigen elementaren Operation eine feste Operation, insbesondere ^{p} oder ^{i} betrachtet, und dabei sich auf solche Ordnungsstrukturen beschränkt, die noch weiteren Bedingungen genügen, z. B. perfekt, biperfekt, symmetrisch oder einfach sind. In solchen Untersuchungen sind hauptsächlich die links-, translations- oder ϱ-invarianten Ordnungsstrukturen von Bedeutung, wir wissen nämlich, daß z. B. eine gleichgradig linksstetige Ordnungsstruktur $\mathfrak{R}$ mit einer linksinvarianten Ordnungsstruktur $\mathfrak{R}^\sigma$ äquivalent ist, die noch dazu perfekt, biperfekt oder symmetrisch gewählt werden kann, falls $\mathfrak{R}$ dieselbe Eigenschaft besitzt:

$$\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}^\sigma \Rightarrow \mathfrak{R}^a \sim \mathfrak{R}^{\sigma a} = \mathfrak{R}^{\sigma a \sigma}.$$

Unsere nächste Aufgabe ist also die Untersuchung der links-, translations- oder ϱ-invarianten perfekten, biperfekten, symmetrischen oder einfachen Ordnungsstrukturen. Das wird den Gegenstand eines nachfolgenden Aufsatzes bilden.

Literatur

[1] N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. 3–4, 3. Auflage, Paris 1960.
[2] Á. Császár, Grundlagen der allgemeinen Topologie, Budapest-Leipzig 1960.