JOURNAL OF ALGEBRA 118, 468–476 (1988)

Les cogroupes et les D-hypergroupes

LABIB HADDAD ET YVES SUREAU

Département de Mathématiques Pures, Université de Clermont II,
B.P. 45, 63170 Aubiere, France

Communicated by Erwin Kleinfeld

Received October 24, 1986

Parmi d'autres résultats, on montre en particulier que les D-hypergroupes ne forment pas une classe élémentaire, autrement dit, que la structure de D-hypergroupe ne peut pas être caractérisée par un système d'axiomes du premier ordre, dans le langage des hypergroupes. © 1988 Academic Press, Inc.

Among other results, it is shown that the class of D-hypergroups is not an elementary class in the sense of model theory. © 1988 Academic Press, Inc.

INTRODUCTION

Soient G un groupe quelconque, H un sous-groupe quelconque de G, et $K = G/H = \{xH: x \in G\}$ l'ensemble des classes ("à droite") de G modulo H. Dans le cas général, lorsque H n'est pas nécessairement invariant dans G, l'ensemble K est muni naturellement d'une opération multivalente (une hyperloi de composition) qui fait de K un hypergroupe. Cet hypergroupe quotient coïncide, évidemment, avec le *groupe* quotient lorsque H est invariant.

En 1937, Krasner [4] a donné le nom de *hypergroupe*$_D$ à tout hypergroupe isomorphe à un hypergroupe du type précédent. Depuis Utumi [9], on dit aussi *D-hypergroupe* au lieu de hypergroupe$_D$.

Eaton [3], en 1940, a distingué parmi tous les hypergroupes une classe particulière, celle des *cogroupes* (à droite). Sans utiliser le langage de Krasner (qu'il ne connaissait apparemment pas) il montrait que tout D-hypergroupe est un cogroupe, et demandait si la réciproque est vraie.

En 1941, puis 1944, Krasner publie deux notes [5, 6]: parmi de nombreux autres résultats, il donne une caractérisation des D-hypergroupes à l'aide de ce qu'il nomme les "permutations droites."

En 1949, Utumi [9] donne l'exemple d'un cogroupe *fini* ayant exactement huit éléments, et qui n'est pas un D-hypergroupe. N'ayant connaissance des notes de Krasner que par les rapports de R. Hull et

0021-8693/88 $3.00

D. C. Murdoch (MR **3** 37), il retrouve la notion de "permutation droite" introduite par Krasner. Il lui donne le nom de *multiplicateur* sous lequel elle est habituellement désignée à présent. Et il établit essentiellement la même caractérisation que Krasner pour les D-hypergroupes.

Mais ces deux caractérisations équivalentes se font dans un langage du second ordre.

Dès lors, la question suivante se posait naturellement:

Peut-on caractériser la classe des D-hypergroupes par un système d'axiomes du premier ordre, dans le langage des hypergroupes?

La réponse est *non*. Tel est l'objet essentiel de cette note.

Lexique

Nous donnons ci-dessous un petit lexique destiné à faciliter la lecture de notre texte.

Pour d'autres détails au sujet des hypergroupes, on pourra consulter [7] et sa bibliographie. Pour la théorie des modèles, on se référera à [1].

Le langage du premier ordre des hypergroupes contient, outre les symboles logiques, un seul symbole P, symbole de relation ternaire qui s'interprète comme une hyperloi de composition où $P(x, y, z)$ veut dire $x \cdot y \ni z$. On appelera *hypermagma* tout modèle de ce langage. Autrement dit, un hypermagma est un ensemble K muni d'une hyperloi de composition qui fait correspondre à chaque couple (x, y) d'éléments de K une partie de K que l'on désigne alors généralement par $x \cdot y$.

Une liste d'énoncés.

E1: Pour tous x et y, on a $x \cdot y \neq \emptyset$.

E2: Pour tous x, y, z on a $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

E3: Pour tous x, y, z, il existe a, b, c, tels que l'on ait $P(a, y, z)$ et $P(x, b, z)$ et $P(x, y, c)$.

(On remarquera que l'énoncé E3 implique l'énoncé E1.)

E4: Il existe un élément e tel que l'on ait $x \cdot e = x$ pout tout x.

(Remarque: l'élément e est alors unique, et l'on dit que c'est une unité scalaire à droite.)

E5: Il existe une unité scalaire à droite e, et pour tous x, y, z si $x \cdot y \cap x \cdot z \neq \emptyset$ alors $e \cdot y = e \cdot z$.

Les énoncés précédents se font dans le langage du premier ordre des hypergroupes. L'énoncé suivant se fait dans un langage du second ordre:

EE: Pour tous x, y, z on a $|y \cdot x| = |z \cdot x|$.

QUELQUES DÉFINITIONS. Un hypergroupoïde est un hypermagma qui vérifie l'énoncé E1.

Un hypergroupe est un hypermagma qui vérifie les trois énoncés E1, E2 et E3.

Un hypergroupe de type C (à droite) est un hypergroupe qui vérifie l'énoncé E5.

1. *Présentation des résultats.* Le présent travail est né d'une série d'exposés que nous avions faits en 1981, du 10 mars au 14 avril, au séminaire d'algèbre de Clermont.

Sureau y avait introduit la notion d'hypergroupe de type C. Il montrait qu'un cogroupe (à droite) tel que le définissait Eaton est très précisément un hypergroupe de type C (à droite) qui vérifie la propriété EE (qui est du second ordre). (Voir aussi Sureau [8]. On retrouve, plus récemment, cette même notion d'hypergroupe de type C chez Comer [2], sous le nom de "weak cogroup," dans une présentation différente.) Pouvait-on compléter le système d'axiomes des hypergroupes de type C pour obtenir un système d'axiomes pour les D-hypergroupes? Haddad rappelait les éléments de théorie des modèles, et plus particulièrement les constructions d'ultraproduits, qui sont pertinents dans ce genre de questions. C'est Sureau qui a fini par trouver la famille adéquate d'hypergroupes, les hypergroupes de type $S(n, p)$, qui permettait de répondre à la question par la négative.

Soit T l'ensemble de tous les énoncés du premier ordre qui sont vrais pout chaque D-hypergroupe. Nous établissons ci-dessous les résultats suivants.

I. Il existe des modèles de T qui ne sont pas des D-hypergroupes.

II. Tout modèle *fini* de T est un D-hypergroupe.

III. Il n'existe pas de système *fini* d'axiomes pour T.

IV. Plus précisément, si F est une partie *finie* de T, il existe au moins un hypergroupe fini de type C qui vérifie F mais qui n'est pas un D-hypergroupe.

2. *Une nouvelle famille d'hypergroupes.* Etant donnés deux ensembles disjoints quelconques X et A, et un élément particulier $e \in X$, on pose $K = X \cup A$, puis on définit une hyperloi sur K de la manière suivante:

$$r \cdot e = r, \qquad x \cdot y = X - \{x\}, \qquad x \cdot a = A, \qquad a \cdot y = A - \{a\}, \qquad a \cdot b = X,$$

pour tous $r \in K$, $x \in X$, $y \in X - \{e\}$, $a \in A$ et $b \in A$.

On désigne alors par $K(e, X, A)$ l'hypermagma ainsi défini.

Si $|X| = |Y|$ et $|A| = |B|$, $e \in X$ et $f \in Y$, les deux structures $K(e, X, A)$ et $K(f, Y, B)$ sont évidemment isomorphes.

Pour chaque couple (n, p) de cardinaux finis ou infinis, on dira qu'un hypermagma est de type $S(n, p)$ lorsqu'il est isomorphe à un $K(e, X, A)$ où $|X| = n$ et $|A| = p$.

On range les structures de type $S(n, p)$ en quatre espèces qui s'excluent mutuellement:

1ère espèce: $n \geqq 1$ et $p = 0$.

2ème espèce: $n = p \geqq 1$.

3ème espèce: $n \geqq 3$ et $p \geqq 3$ et $n \neq p$.

4ème espèce: tous les autres cas.

3. LEMME. *Soit K un hypermagma de type $S(n, p)$. Alors*

(1°) *K est un hypergroupe s.s.i. K est de première, de deuxième ou de troisième espèce s.s.i. K est un hypergroupe de type C.*

(2°) *K est un D-hypergroupe s.s.i. K est de première ou deuxième espèce.*

Voir plus loin pour les démonstrations, le paragraphe 13.

4. *Ultraproduits.* Soient $(K_i)_{i \in I}$ une famille d'hypermagmas et U un ultrafiltre sur I. On désignera brièvement par K_U l'ultraproduit $\prod_U K_i$. De même, si $(n_i)_{i \in I}$ et $(p_i)_{i \in I}$ sont deux familles de cardinaux, on désignera par n_U et p_U respectivement les *cardinaux* des ultraproduits $\prod_U n_i$ et $\prod_U p_i$. L'ultraproduit K_U est un hypermagma. Par simple transfert, on établit le résultat attendu suivant.

5. LEMME. *La classe des D-hypergroupes est stable par ultraproduits.*

Autrement dit, l'ultraproduit d'une famille quelconque de D-hypergroupes est lui-même un D-hypergroupe.

Plus précisément, soient $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes. Pour chaque indice i, soient H_i un sous-groupe de G_i et $K_i = G_i/H_i$ le D-hypergroupe quotient. Pour tout ultrafiltre U sur I, l'ultraproduit K_U est alors isomorphe au D-hypergroupe quotient G_U/H_U.

6. LEMME. *Soient $(K_i)_{i \in I}$ une famille d'hypermagmas et U un ultrafiltre sur I. On suppose que K_i est de type $S(n_i, p_i)$ pour chaque indice i. L'ultraproduit K_U est alors un hypermagma de type $S(n_U, p_U)$.*

La vérification de ce lemme se fait sans détour à l'aide des tables de multiplication qui définissent le type $S(n, p)$.

7. *Deux cas particuliers.* On suppose $I = N$ l'ensemble des entiers naturels. On se donne un ultrafiltre non principal quelconque U sur I. On considère une famille $(K_i)_{i \in I}$ d'hypermagmas où K_i est de type $S(n_i, p_i)$.

Premier cas particulier: On suppose $K_i = K$, $n_i = n$ et $p_i = p$ pour tout $i \in I$. Si n et p sont infinis, on a $n_U = n^\omega$ et $p_U = p^\omega$. Voir [1, proposition 4.3.7, p. 202]. En particulier, pour $n = \omega$ et $p = 2^\omega$, on aura $n_U = p_U = 2^\omega$. Donc K_U est alors un D-hypergroupe, tandis que $K_\iota = K$ est un hypergroupe qui n'est pas un D-hypergroupe, d'après le lemme 3 ci-dessus.

Second cas particulier: On suppose $n_i = i$ et $p_\iota = i + 1$. Alors $n_U = p_U = 2^\omega$. Voir, par exemple, [1, exercice 4.3.14, p. 210]. Ainsi donc, dans ce cas, K_U est encore un D-hypergroupe tandis qu'aucun des K_ι n'est un D-hypergroupe. Cependant, chacun des K_ι, pour $i \geqq 3$, est un hypergroupe de type C (d'après le lemme 3 ci-dessus).

8. *Conséquences.* On a désigné par T l'ensemble de tous les énoncés du langage du premier ordre des hypergroupes qui sont vrais dans chacun des D-hypergroupes. On peut constater, à présent, ce qui suit:

(1°) L'hypergroupe de type $S(\omega, 2^\omega)$ qui n'est pas un D-hypergroupe vérifie pourtant tous les énoncés de T.

(2°) Pour chaque partie *finie* F de T, *presque tous* les hypergroupes de type $S(n, n+1)$ vérifient F. Autrement dit, il existe un entier $m = m(F)$ tel que tout hypergroupe de type $S(n, n+1)$ vérifie tous les énoncés de F dès que l'entier n dépasse m.

En effet: (1°) D'après le premier cas particulier présenté ci-dessus, l'hypergroupe de type $S(\omega, 2^\omega)$ possède une ultrapuissance qui est un D-hypergroupe de type $S(2^\omega, 2^\omega)$. Or, par la propriété fondamentale de transfert pour les ultrapuissances, ces deux hypergroupes sont élémentairement équivalents (voir [1]), autrement dit, tout énoncé vrai pour l'un est encore vrai pour l'autre!

(2°) Reprenons le second cas particulier. Par la propriété fondamentale des ultraproduits (voir [1]), il existe une partie V de I, appartenant à l'ultrafiltre U, et telle que chacun des hypergroupes K_i vérifie tous les énoncés de F dès que $i \in V$. On tient alors le raisonnement classique suivant: soit $V(F)$ l'ensemble des indices i tels que K_i vérifie tous les énoncés de F. Si le complémentaire de $V(F)$ dans I n'était pas *fini*, il existerait au moins un ultrafiltre non principal U sur I ayant le complémentaire de $V(F)$ comme élément, ce qui serait contradictoire! C.Q.F.D.

9. *La caractérisation des D-hypergroupes par Utumi.* Soit K un hypergroupoïde. Utumi [9] appelle *multiplicateur* de K toute permutation f de K telle que l'on ait

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot y \qquad \text{pour tous } x, y.$$

(On observera que la notion est "latéralisée": si l'on appelle multiplicateur "à droite" la notion que l'on vient de définir, il y a une notion de multiplicateur "à gauche" qui lui est corrélative.)

L'ensemble des multiplicateurs de K est évidemment un sous-groupe du groupe des permutations de K.

Introduisons la définition suivante: on dira que K est *homogène* lorsque, pour tous éléments x_0, x_1, y_0, y_1, c, tels que $x_1 \in x_0 \cdot c$ et $y_1 \in y_0 \cdot c$, il existe au moins un multiplicateur f de K tel que $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$.

En utilisant cette façon de parler, la caractérisation de Utumi s'énonce comme suit:

THÉORÈME DE UTUMI. *Soit K un hypergroupoïde quelconque. Afin que K soit un D-hypergroupe, il faut et il suffit qu'il soit homogène et possède un élément e tel que $x \in e \cdot x$ pour tout x.*

Remarque. On observe, comme nous l'avons dit dans notre introduction, que l'énoncé "K est homogène" est du second ordre, et n'appartient pas au langage du premier ordre des hypergroupes. Plus précisement, la formule

"il existe un multiplicateur f tel que $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$"

est une formule $\sum_1^1$ et passe donc, par transfert, aux ultraproduits (voir [1, corollaire 4.1.14, p. 175]). Cependant, le théorème de Utumi joint à ce que nous avons vu au 8.(1°) ci-dessus, permet d'ajouter que l'énoncé "K est homogène" qui est du second ordre, dans sa forme, *n'est pas équivalent* à un énoncé du premier ordre!

10. *Multiplicateurs locaux.* Soit K un hypermagma quelconque. Nous appellerons *multiplicateur local* de K toute application injective $f: X \to K$ où X est une partie de K (que l'on nommera le *domaine* de f) et telle que, pour tout $c \in K$, $x_0 \in X$ et $x_1 \in X$, on ait

$$x_1 \in x_0 \cdot c \qquad \text{si et seulement si } f(x_1) \in f(x_0) \cdot c.$$

Nous reviendrons plus longuement sur cette notion dans une prochaine publication.

Pour le moment, nous introduirons seulement, pour chaque entier $n \geqq 1$, l'énoncé suivant:

M_n: pour chaque partie X de K ayant n éléments, et pour tout couple x_0, x_1 d'éléments de X, si $x_1 \in x_0 \cdot c$ et $y_1 \in y_0 \cdot c$, où y_0, y_1, c sont des éléments donnés de K, il existe au moins un multiplicateur local f de K ayant pour domaine X et tel que $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$.

On dira que K est *n-homogène* lorsqu'il vérifie l'énoncé M_n. (Et cette notion est visiblement du premier ordre: elle ne porte que sur un nombre fini d'éléments à la fois!)

Comme conséquence du théorème de Utumi, on peut alors énoncer le résultat suivant.

11. COROLLAIRE. (1°) *Tout D-hypergroupe est n-homogène pour chaque entier* $n \geqq 1$.

(2°) *Tout hypergroupe fini ayant n éléments exactement et qui possède un élément e tel que* $x \in e \cdot x$ *pour tout x, est n-homogène si et seulement s'il est un D-hypergroupe.*

12. THÉORÈME. *On désigne par T l'ensemble de tous les énoncés du premier ordre qui sont vrais pour chaque D-hypergroupe.*

I. *Il existe des hypergroupes qui vérifient tous les énoncés de T et qui ne sont pas des D-hypergroupes.*

II. *Tout hypergroupe* fini *qui vérifie les énoncés de T est un D-hypergroupe.*

III. *Il n'existe pas de système* fini *d'axiomes pour T.*

IV. *Plus précisément, si F est une partie* finie *de T, il existe au moins un hypergroupe fini de type C qui vérifie F et qui n'est pas un D-hypergroupe.*

Tels sont bien les résultats annoncés ci-dessus au paragraphe 1. Et nous avons à présent tous les éléments réunis pour les établir simplement.

Démonstration du théorème. I. L'hypergroupe de type $S(\omega, 2^{\omega})$ n'est pas un D-hypergroupe et vérifie pourtant tous les énoncés de T comme on l'a vu au 8(1°) ci-dessus.

II. D'après le corollaire 11(1°), les énoncés M_n appartiennent à T. Et d'après 11(2°), tout hypergroupe fini qui vérifie tous ces énoncés M_n est un D-hypergroupe!

IV. Soit F une partie *finie* de T. D'après 8(2°), *presque tous* les hypergroupes de type $S(n, n+1)$, pour n entier, vérifient les énoncés de F. Et d'après le lemme 3, tous ces hypergroupes sont de type C, mais aucun n'est un D-hypergroupe!

III. C'est une conséquence de IV lorsqu'on prend $F = \varnothing$. C.Q.F.D.

13. *Démonstration du lemme* 3. Il nous reste à expliquer comment on établit le lemme 3.

Pour chaque ensemble E, on désignera par $S(E)$ le groupe de toutes les permutations de E.

Avec les notations du paragraphe 2, considérons un hypermagma $K = K(e, X, A)$ de type $S(n, p)$.

(1°) Si $p=0$, autrement dit $A=\varnothing$, on considère le groupe $G=S(K)=S(X)$. On désigne par H le sous-groupe de G formé des permutations qui laissent le point e fixe. On vérifie sans peine que K est canoniquement isomorphe à l'hypergroupe quotient G/H.

(2°) Si $n=p\geqq 1$, autrement dit si X et A sont équipotents et non vides, on procède de manière analogue. Mais on considère, cette fois, le sous-groupe G de $S(K)$ formé des permutations f pour lesquelles on a $f(X)=X$ *ou* $f(X)=A$. On désigne ensuite par H le sous-groupe de G formé des permutations f telles que $f(e)=e$. L'hypermagma K est canoniquement isomorphe, cette fois encore, à l'hypergroupe quotient G/H.

(3°) Si $n\geqq 3$ et $p\geqq 3$ et $n\neq p$, on peut encore donner de K une représentation "fonctionelle" mais locale, cette fois. Nous ne le ferons pas ici. Mais on peut également vérifier, avec un peu de patience, sur la table de multiplication, que K satisfait bien l'axiome d'associativité (énoncé E2 du lexique). D'autre part, il est clair que e est une unité scalaire à droite. De plus, K vérifie bien les énoncés E1 et E5.

Cependant K ne vérifie pas l'énoncé EE: en effet, toujours avec les notations du paragraphe 2, on a

$x\cdot a=A$ et $b\cdot a=X$, mais A et X ne sont pas équipotents!

Ainsi K est un hypergroupe de type C qui n'est pas un cogroupe et donc, a fortiori, pas un D-hypergroupe.

(4°) Si $n\geqq 2$ et $p=1$, $A=\{a\}$, alors $a\cdot y=\varnothing$ et donc K ne vérifie pas E1.

(4°bis). Dans tous les autres cas, K ne satisfait pas l'associativité.

En effet. (1) Soit $n=1$ et $p\geqq 2$. Alors $a\cdot(a\cdot a)=a\cdot e=a$ mais $(a\cdot a)\cdot a=e\cdot a=A$.

(2) Soit $n=2$ et $p\geqq 3$. Alors $a\cdot(y\cdot y)=a\cdot e=a$ mais $(a\cdot y)\cdot y=A$.

(3) Soit $n\geqq 3$ et $p=2$. Alors $a\cdot(y\cdot y)=A$ et $(a\cdot y)\cdot y=a$. C.Q.F.D.

14. *En guise de conclusion.* Certains se souviennent encore de la très vive polémique qui a opposé M. Krasner et A. Weil, au sujet des D-hypergroupes notamment. Sans nullement prendre parti ici, on observera ceci: il est avéré que dans la classe élémentaire engendrée par les D-hypergroupes, il y a bien autre chose que les seuls hypergroupes quotients de groupes par des sous-groupes quelconques *alias* les "hypergroupes de classes."

15. *Post Scriptum.* Le "referee" nous fait observer ceci:

La classe X de tous les hypermagmas qui sont plongeables dans des D-hypergroupes est évidemment une classe universelle.

Il nous suggère ensuite de chercher un système d'axiomes caractérisant cette classe X. Ce dernier problème est analogue, bien entendu, au problème, résolu par Malcev, de la caractérisation des monoïdes qui sont plongeables dans des groupes.

Nous n'avons pas la solution complète de ce nouveau problème. On s'en tiendra, pour le moment à cette remarque:

Tout hypermagma H de la classe X possède nécessairement les propriétés "universelles" suivantes:

(1°) Si $x \cdot y \cap x \cdot z$ n'est pas vide alors, pour tout s, on a $s \cdot y = s \cdot z$. C'est la propriété analogue à la simplification à gauche dans les monoïdes.

(2°) Si $x \in x \cdot e$ alors pour tout s on a $s \in e \cdot s$ et $s \cdot e = s$.

(3°) Si $x \in x \cdot e$ et $e \in y \cdot z$ alors pour tout s et tout t on a $s \in t \cdot z$ s.s.i. $t \in s \cdot y$.

Ces trois propriétés peuvent s'écrire respectivement comme suit:

(1°) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall r\ \forall s\ \forall t[P(x, y, t) \wedge P(x, z, t) \rightarrow (P(s, y, r) \leftrightarrow P(s, z, r))]$,

(2°) $\forall e\, \forall x\, \forall r\, \forall s\{P(x, e, x) \rightarrow [P(e, s, s) \wedge (P(s, e, r) \leftrightarrow r = s)]\}$,

(3°) $\forall e\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall t[P(x, e, x) \wedge P(y, z, e) \rightarrow (P(t, z, s) \leftrightarrow P(s, y, t))]$.

Pour terminer nous remercions vivement le "referee" d'avoir soulevé ce problème intéressant sur lequel nous espérons pouvoir revenir prochainement.

Références

1. C. C. Chang and H. J. Keisler, "Model Theory," Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73, North-Holland, Amsterdam/London, 1973.
2. S. D. Comer, Polygroups derived from cogroups, *J. Algebra* **89** (1984), 397–405.
3. J. E. Eaton, Theory of cogroups, *Duke Math. J.* **6** (1940), 101–107.
4. M. Krasner, "Sur la théorie de la ramification des idéaux des corps non-galoisiens de nombres algébriques," Thèse, Paris; *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect. 4°* **11**, n° 4 (1937), 1–110.
5. M. Krasner, La caractérisation des hypergroupes de classes et le problème de Schreier dans ces hypergroupes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **212** (1941), 948–950.
6. M. Krasner, Rectification à ma Note précédente et quelques nouvelles contributions à la théorie des hypergroupes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **218** (1944), 542–544.
7. Y. Sureau, "Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble," Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. de Clermont II, 1980.
8. Y. Sureau, Hypergroupes de type *C*, Conférence Taormine, 1983.
9. Y. Utumi, On hypergroups of group right cosets, *Osaka Math. J.* **1**, n° 1 (1949), 73–80.