Math. Z. 114, 271–277 (1970)

Über Polynome J-symmetrischer Operatoren in J-Räumen

Peter Hess

Einleitung

Kürzlich hat Lo [9] Polynome von J-symmetrischen Operatoren eines Pontrjaginraumes Π_κ untersucht und folgende Resultate gewonnen: 1) Falls A ein J-selbstadjungierter Operator[1] des Raumes Π_κ ist und falls P und $\bar{P}$ zwei Polynome vom Grade n mit konjugiert komplexen Koeffizienten bezeichnen, so sind die Operatoren $P(A)$ und $\bar{P}(A)$ zueinander J-adjungiert: $(P(A))^+ = \bar{P}(A)$. 2) Wenn die n-te Potenz eines J-symmetrischen Operators A dicht definiert ist, läßt sich umgekehrt aus der Beziehung $(P(A))^+ = \bar{P}(A)$ die J-Selbstadjungiertheit von A folgern. Lo stützt sich bei seinen Betrachtungen auf Ergebnisse von Iohvidov und Krein [4, 5] über Operatoren in Π_κ-Räumen.

In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß Lo's Resultate Spezialfälle gewisser Sätze über Polynome von Operatoren eines Hilbertraumes sind. Diese Tatsache gestattet uns, die gleichen Resultate für eine größere Klasse von J-symmetrischen Operatoren eines allgemeinen J-Raumes zu beweisen.

1. Grundbegriffe und Resultate

1.1. Es sei (X, H, Q) ein J-Raum, d.h. ein komplexer linearer Raum X, auf dem außer dem Hilbertschen (Hermiteschen) Skalarprodukt $H(u, v)$ eine indefinite Hermitesche Bilinearform

$$Q(u, v) = H(J u, v)$$

gegeben ist mit $J = P_+ - P_-$, wobei P_+ und P_- komplementäre ($P_+ + P_- = I$) orthogonale Projektoren bezeichnen. Für die allgemeine Theorie der J-Räume sei auf [1, 2, 7] verwiesen. Der Raum (X, H, Q) heißt Pontrjaginraum $\Pi_\kappa (\kappa < \infty)$, wenn $\min\{\dim P_+ X, \dim P_- X\} = \kappa$ ist.

Falls die Definitionsmenge $D(A)$ des Operators A des Raumes X bezüglich der H-Topologie dicht in X liegt, ist der (zu A bezüglich H) adjungierte Operator A^* erklärt: es gilt $H(A u, v) = H(u, A^* v)$ für alle $u \in D(A)$ und $v \in D(A^*)$. Ferner existiert der (zu A) J-adjungierte Operator A^+: die Definitionsmenge $D(A^+)$ besteht aus allen $v \in X$, zu denen es je ein $w \in X$ gibt mit $Q(A u, v) = Q(u, w)$ für alle $u \in D(A)$; es ist $w = A^+ v$. Der Operator A^+ ist bezüglich der H-Topologie abgeschlossen, und es gilt $A^+ = J A^* J$ (man vergleiche z.B. [8], S. 64–65). Der Operator A heißt J-symmetrisch, falls $A \subset A^+$, und J-selbstadjungiert, falls $A = A^+$.

[1] Unter „Operator" wird in dieser Note immer ein „linearer Operator" verstanden.

1.2. Wir wollen nun eine Klasse K von J-symmetrischen Operatoren einführen, die wir in dieser Arbeit untersuchen werden. Dazu benötigen wir einige Begriffe.

Es sei A ein dicht definierter J-symmetrischer Operator mit $P_+ X \subset D(A)$. Wir werden zeigen, daß dann $D(A) \subset D(A^*)$. Die Operatoren

$$A_{\mathrm{Re}} = \tfrac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{und} \quad A_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

sind folglich auf der Menge $D(A)$ definiert und (bezüglich H) symmetrisch. Der Operator A läßt sich in die Summe

$$A = A_{\mathrm{Re}} + i A_{\mathrm{Im}}$$

zerlegen.

Es seien T und B zwei lineare Operatoren des Hilbertraumes (X, H). Der Operator B heißt bezüglich des Operators T relativ kompakt, oder kürzer T-kompakt, wenn $D(B) \supset D(T)$ und B jede beschränkte Menge M aus $D(T)$, deren Bild TM ebenfalls beschränkt ist, auf eine in (X, H) relativ kompakte Menge abbildet.

Definition. *Es sei (X, H, Q) ein J-Raum. Die Klasse K sei von den Operatoren A dieses Raumes gebildet, die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(i) *A ist in der H-Topologie dicht definiert und abgeschlossen,*

(ii) *A ist J-symmetrisch,*

(iii) *$P_+ X \subset D(A)$,*

(iv) *A_{Im} ist bezüglich A_{Re} relativ kompakt.*

Diese Klasse K umfaßt die von Langer ([8], S. 71–72) untersuchten Operatoren mit kompakten Imaginärteilen und als Spezialfall hiervon die J-symmetrischen Operatoren eines Pontrjaginraumes Π_κ ([5], S. 291, Lemma 4.2).

1.3. Im Gegensatz zu (bezüglich H) selbstadjungierten Operatoren kann das Spektrum eines J-selbstadjungierten Operators auch einen nichtreellen Teil enthalten. Allgemeine Aussagen über diesen Teil findet man in [8] (S. 67–69). Für J-selbstadjungierte Operatoren der Klasse K ist es jedoch möglich, den nichtreellen Teil des Spektrums vollständig zu beschreiben. Im Hinblick darauf stellen wir einige Begriffe zusammen:

Es sei ζ ein Eigenwert des abgeschlossenen linearen Operators T. Der diesem Eigenwert entsprechende algebraische Eigenraum S_ζ von T ist die lineare Menge aller Elemente u, für die je eine natürliche Zahl r so existiert, daß $(T-\zeta)^r u = 0$. Die Dimension von S_ζ heißt algebraische Vielfachheit des Eigenwertes ζ. Algebraische Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig ([10], S. 89).

Satz 1. *Es sei (X, H, Q) ein J-Raum und in diesem A ein J-selbstadjungierter Operator der Klasse K. Dann besteht der nichtreelle Teil des Spektrums von A aus Paaren $\zeta, \bar{\zeta}$ von isolierten Eigenwerten derselben algebraischen Vielfachheit k.*

Das indefinite Skalarprodukt Q verschwindet identisch auf den zu nichtreellen Eigenwerten gehörenden Eigenräumen S_ζ und $S_{\bar\zeta}$. Die Räume S_ζ und $S_{\bar\zeta}$ sind schief verbunden: Zu jeder Basis $e_1, \ldots, e_k$ von S_ζ existiert eine Basis $f_1, \ldots, f_k$ von $S_{\bar\zeta}$ derart, daß $Q(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$. Für die Basis $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k$ der direkten Summe $S_\zeta \dot{+} S_{\bar\zeta}$ hat die Einschränkung von A auf diesen Unterraum die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^* \end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{A}^*$ die zu $\mathfrak{A}$ adjungierte Matrix bedeutet. Die zu ζ und $\bar\zeta$ gehörenden Elementarteiler des Operators A entsprechen einander eindeutig, und ihre Ordnungen stimmen überein.

1.4. Es bezeichne P ein Polynom vom Grade n mit komplexen Koeffizienten. Der Operator $P(A)$ ist auf der linearen Menge $D(A^n)$ definiert. Für einen J-selbstadjungierten Operator A der Klasse K liegt $D(A^n)$ in X dicht.

Der folgende Satz ist eine Erweiterung eines Resultates, das Lo [9] für Polynome von J-symmetrischen Operatoren eines Π_κ-Raumes erhalten hat.

Satz 2. *Es sei (X, H, Q) ein J-Raum und in diesem Raum A ein Operator der Klasse K, und es bezeichne P ein Polynom vom Grade n mit komplexen Koeffizienten. Ferner sei $\bar P$ das Polynom, das man aus P durch Übergang zu konjugiert komplexen Koeffizienten erhält. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Falls A J-selbstadjungiert ist, so gilt $\big(P(A)\big)^+ = \bar P(A)$.*

(b) *Falls die n-te Potenz des J-symmetrischen Operators A in X (bezüglich der H-Topologie) dicht definiert ist und $\big(P(A)\big)^+ = \bar P(A)$ gilt, so ist A J-selbstadjungiert.*

2. Einige Sätze über lineare Operatoren eines Hilbertraumes

2.1. Für den Beweis von Satz 1 benötigen wir zwei Hilfssätze.

Lemma 1. *In einem Hilbertraum sei T ein selbstadjungierter, B ein symmetrischer und T-kompakter Operator. Dann gilt $(T + iB)^* = T - iB$.*

Beweis. Die Inklusion $(T+iB)^* \supset T - iB^* = T - iB$ ist evident. Die Zahl ζ sei in der Resolventenmenge $\rho(T - iB)$ von $T - iB$ so gewählt, daß $\bar\zeta \in \rho(T + iB)$ (die Existenz solcher Zahlen ζ wird z.B. durch [3], S. 215, Theorem 5.1, garantiert). Dann liegt ζ auch in $\rho\big((T+iB)^*\big)$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Lemma 2 verallgemeinert ein von Langer aufgestelltes Resultat ([8], S. 70, Lemma 1.7):

Lemma 2. *In einem Hilbertraum sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Operator A läßt sich in der Form $A = T + iB$ darstellen, wobei T ein selbstadjungierter, B ein symmetrischer und T-kompakter Operator ist.*

(ii) *Der Operator A ist abgeschlossen und dicht definiert, es gilt $D(A) = D(A^*)$, und A_{Im} ist A_{Re}-kompakt.*

Beweis. Aus (i) folgt (ii): Nach [6] (S. 194, Theorem IV.1.11) ist A abgeschlossen und $D(A)=D(T)$. Wegen Lemma 1 gilt $D(A^*)=D(T)$. Ferner ist $T=A_{\mathrm{Re}}$ und $B\supset A_{\mathrm{Im}}$.

Aus (ii) folgt (i): Da der symmetrische Operator A_{Re} abschließbar ist, ist A_{Im} gemäß dem oben zitierten Satz auch bezüglich $A=A_{\mathrm{Re}}+iA_{\mathrm{Im}}$ relativ kompakt. Nach demselben Satz impliziert die Abgeschlossenheit von A diejenige von $A_{\mathrm{Re}}=A-iA_{\mathrm{Im}}$. Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß der symmetrische Operator A_{Re} selbstadjungiert ist. Für A_{Re} ist der Index[2]

$$\kappa(\zeta, A_{\mathrm{Re}})=\operatorname{codim} R(A_{\mathrm{Re}}-\zeta)-\dim K(A_{\mathrm{Re}}-\zeta)$$

in den Halbebenen $\operatorname{Im}\zeta>0$ und $\operatorname{Im}\zeta<0$ je konstant und nichtnegativ ([3], S. 244–245); diese Halbebenen sind (Semi-) Fredholmbereiche des Operators A_{Re}. Der Index ändert sich nicht unter relativ kompakten Störungen: $\kappa(\zeta, A_{\mathrm{Re}})=\kappa(\zeta, A_{\mathrm{Re}}\pm iA_{\mathrm{Im}})$. Da $D(A)=D(A^*)$ ist, gelten die Darstellungen $A=A_{\mathrm{Re}}+iA_{\mathrm{Im}}$ und $A^*=A_{\mathrm{Re}}-iA_{\mathrm{Im}}$. Es ergibt sich

$$\kappa(\zeta, A_{\mathrm{Re}})=\kappa(\zeta, A)=-\kappa(\bar{\zeta}, A^*)=-\kappa(\bar{\zeta}, A_{\mathrm{Re}}),$$

woraus folgt, daß $\kappa(\zeta, A_{\mathrm{Re}})=0$ für nichtreelle ζ. Also ist der Operator A_{Re} selbstadjungiert.

2.2. Es gilt ([9], S. 300, Lemma 3.2):

Lemma 3. *Es sei A ein linearer Operator eines linearen Raumes. Falls $(A-\zeta)\,D(A^m)\supset D(A^m)$ für eine natürliche Zahl m, so gilt $(A-\zeta)\,D(A^n)=D(A^{n-1})$ für alle $n>m$.*

Es sei nun A ein dicht definierter abgeschlossener linearer Operator des Hilbertraumes (X, H). Falls die Resolventenmenge $\rho(A)$ nicht leer ist, sind die Operatoren A^n $(n=1,2,\dots)$ dicht definiert. Denn für $\lambda\in\rho(A)$ gilt $D(A^n)=R\big((A-\lambda)^{-n}\big)$, und diese Wertemengen liegen offenbar in X dicht.

Satz 2 ist eine Folgerung aus den folgenden beiden Lemmata über Operatorpolynome.

Lemma 4. *Es sei P ein Polynom vom Grade n mit komplexen Koeffizienten. Mit $\bar{P}$ bezeichne man das Polynom vom Grade n, das aus P durch Übergang zu konjugiert komplexen Koeffizienten erhalten wird. Ferner sei A ein dicht definierter abgeschlossener Operator des Hilbertraumes (X, H). Falls eine komplexe Zahl ζ derart existiert, daß die Nullstellen z_j $(j=1,\dots,n)$ des Polynoms $P(z)-\zeta$ in der Resolventenmenge $\rho(A)$ des Operators A liegen, so gilt $\big(P(A)\big)^*=\bar{P}(A^*)$.*

Beweis. Der Operator $P(A)$ ist auf der dichten Menge $D(A^n)$ definiert; folglich existiert $\big(P(A)\big)^*$. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist der Operator A^* und somit, da $\bar{z}_j\in\rho(A^*)$ $(j=1,\dots,n)$, auch der Operator $\bar{P}(A^*)$ dicht definiert. Die Inklusion $\big(P(A)-\zeta\big)^*\supset\bar{P}(A^*)-\bar{\zeta}$ ist evident. Aus Lemma 3 (mit $m=1$)

[2] Mit $R(T)$ bezeichnen wir die Wertemenge und mit $K(T)$ den Kern des Operators T.

folgert man, daß die Wertemenge des Operators

$$\bar{P}(A^*)-\bar{\zeta}=\bar{c}\prod_{j=1}^{n}(A^*-\bar{z}_j)$$

gleich X ist. Also ist auch $R((P(A)-\zeta)^*)=X$. Analog wird die Beziehung $R(P(A)-\zeta)=X$ gezeigt. Die orthogonale Zerlegung des Raumes (X, H),

$$X=K((P(A)-\zeta)^*)\oplus R((P(A)-\zeta)^{**}),$$

impliziert, daß der Operator $(P(A)-\zeta)^*$ invertierbar ist. Folglich ist $\bar{P}(A^*)-\bar{\zeta}$ ebenfalls invertierbar, und aus der Gleichheit der Definitionsmengen der inversen Operatoren ergibt sich $((P(A)-\zeta)^*)^{-1}=(\bar{P}(A^*)-\bar{\zeta})^{-1}$ und schließlich $(P(A))^*=\bar{P}(A^*)$.

Lemma 5. *Es bezeichne P ein Polynom vom Grade n mit komplexen Koeffizienten, und $\bar{P}$ sei das Polynom vom Grade n, das man aus P durch Übergang zu konjugiert komplexen Koeffizienten erhält. Man setze voraus:*

1) *A und B seien zwei dicht definierte Operatoren des Hilbertraumes (X, H),*

2) *$B\subset A^*$,*

3) *Die Operatoren $P(A)$ und $\bar{P}(B)$ seien dicht definiert,*

4) *Es existiere eine komplexe Zahl ζ derart, daß die Nullstellen z_j $(j=1,\dots,n)$ des Polynoms $P(z)-\zeta$ Punkte regulären Typs[3] von A und die Zahlen $\bar{z}_j$ Punkte regulären Typs von B sind,*

5) $(P(A))^*=\bar{P}(B)$.

Dann ist $B=A^*$.

Beweis. (i) Die Wertemenge $R(\bar{P}(B)-\bar{\zeta})$ liegt in X dicht: Sei u ein Element, das zu dieser Menge orthogonal steht; es gelte also

$$0=H((\bar{P}(B)-\bar{\zeta})\,v, u)=H((P(A)-\zeta)^*\,v, u)$$

für alle $v\in D(B^n)=D((P(A))^*)$. Dann ist $(P(A)-\zeta)^{**}\,u=0$ und folglich $u=0$, weil man der Darstellung

$$P(A)-\zeta=c\prod_{j=1}^{n}(A-z_j)$$

leicht entnimmt, daß ζ ein Punkt regulären Typs von $P(A)$ und somit von $(P(A))^{**}$ ist.

(ii) Wegen der Darstellung

$$\bar{P}(B)-\bar{\zeta}=\bar{c}\prod_{j=1}^{n}(B-\bar{z}_j)$$

ist $\bar{\zeta}$ Punkt regulären Typs von $\bar{P}(B)$. Da der Operator $\bar{P}(B)$ $(=(P(A))^*)$ abgeschlossen ist, ist die Wertemenge $R(\bar{P}(B)-\bar{\zeta})$ abgeschlossen; also ist

[3] Eine Zahl z heißt „Punkt regulären Typs“ des Operators A, falls eine Konstante $c=c(z)>0$ existiert derart, daß $\|(A-z)\,u\|\geqq c\,\|u\|$ für alle $u\in D(A)$.

$R(\bar{P}(B)-\bar{\zeta})=X$. Aus der obigen Darstellung von $\bar{P}(B)-\bar{\zeta}$ folgt, daß auch $R(B-\bar{z}_j)=X$ $(j=1,\ldots,n)$ gilt.

(iii) Weil

$$\bar{P}(B)-\bar{\zeta}=(P(A)-\zeta)^* \supset \bar{P}(A^*)-\bar{\zeta}=\bar{c}\prod_{j=1}^{n}(A^*-\bar{z}_j)$$

gilt und der Operator $\bar{P}(B)-\bar{\zeta}$ invertierbar ist, sind die Zahlen $\bar{z}_j$ nicht Eigenwerte von A^*.

(iv) Die Inklusion $B-\bar{z}_j \subset A^*-\bar{z}_j$ und (iii) implizieren

$$(B-\bar{z}_j)^{-1} \subset (A^*-\bar{z}_j)^{-1};$$

wegen (ii) ergibt sich $(B-\bar{z}_j)^{-1}=(A^*-\bar{z}_j)^{-1}$, und damit ist $B=A^*$.

2.3. Für den Beweis von Satz 2 benötigen wir neben den Resultaten der Lemmata 4 und 5 noch

Lemma 6. *In der komplexen Ebene sei $\mathscr{F}$ eine Menge, die keine nichtreelle Häufungspunkte hat. Ferner sei P ein Polynom vom Grade $n(\geqq 1)$ mit komplexen Koeffizienten. Dann gibt es eine komplexe Zahl ζ so, daß die Nullstellen des Polynoms $P(z)-\zeta$ nichtreell sind und nicht zu $\mathscr{F}$ gehören.*

Beweis. Das Polynom P vermittelt eine holomorphe Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene. In der z-Ebene wählen wir eine (abgeschlossene) Kreisscheibe $\mathscr{K}$ mit Zentrum 0 und Radius R derart, daß $|P(z)|>1$ außerhalb der Scheibe gilt. Von dieser Kreisscheibe $\mathscr{K}$ entfernen wir einen schmalen, beidseits der reellen Achse gelegenen Streifen sowie die weiteren (endlich vielen) Punkte von $\mathscr{F}$, die in dem übrigen Teil der Kreisscheibe liegen. Die so aus $\mathscr{K}$ erhaltene Menge bezeichnen wir mit $\mathscr{G}$. Falls der entfernte Streifen schmal genug ist, ist der Durchschnitt von $P(\mathscr{G})$ mit der Einheitskreisscheibe der w-Ebene nichtleer. In diesem Durchschnitt wählen wir die Zahl ζ.

3. Operatoren der Klasse K

3.1. Es sei (X, H, Q) ein J-Raum und in diesem Raum A ein dicht definierter J-symmetrischer Operator mit $P_+X \subset D(A)$. Dann ist

$$P_-D(A)=(I-P_+)D(A) \subset D(A)$$

und folglich $JD(A) \subset D(A)$. Aus der J-Symmetrie von A, $A \subset A^+=JA^*J$, leitet man unmittelbar die Inklusion $D(A) \subset D(A^*)$ her. Falls A J-selbstadjungiert ist, gilt $A=A^+$ und somit $A^*=JAJ$; die letztere Relation impliziert die Gleichheit $D(A)=D(A^*)$.

3.2. *Beweis von Satz* 1. Für einen J-selbstadjungierten Operator A der Klasse K gilt die Aussage (ii) von Lemma 2; der Realteil von A ist also ein (bezüglich H) selbstadjungierter Operator. Der nichtreelle Teil des Spektrums von A besteht deshalb aus isolierten Eigenwerten endlicher algebraischer Vielfachheit ([3], S. 215, Theorem 5.1). Unter Berücksichtigung einiger Resultate von Langer ([8], S. 69) folgt daraus die Gültigkeit von Satz 1.

3.3. *Beweis von Satz* 2. (a) Der Operator A der Klasse K sei J-selbstadjungiert. Das Spektrum von A hat keine nichtreelle Häufungspunkte. Nach Lemma 6 läßt sich deshalb eine Zahl ζ so finden, daß die Nullstellen des Polynoms $P(z)-\zeta$ in der Resolventenmenge von A liegen. Unter Berücksichtigung von Lemma 4 und der Beziehung $J^2=I$ erhalten wir

$$(P(A))^+ = J(P(A))^* J = J\bar{P}(A^*) J = \bar{P}(JA^*J) = \bar{P}(A).$$

(b) Es sei A ein solcher J-symmetrischer Operator der Klasse K, daß A^n dicht definiert ist. Dann ist der Operator $B^n=(JAJ)^n=JA^nJ$ auf der in X dichten linearen Menge $JD(A^n)$ definiert. Da der Operator A_{Re} abgeschlossen ist (vgl. Beweis von Lemma 2), sind alle nichtreellen Zahlen, mit Ausnahme eventueller isolierter Eigenwerte, Punkte regulären Typs von A ([3], S. 245, Theorem 9.4). Wir bemerken, daß Punkte regulären Typs von A auch solche von $B=JAJ$ sind, und daß die Inklusion $B\subset A^*$ gilt. Gemäß Lemma 6 existiert eine Zahl ζ derart, daß die Nullstellen z_j des Polynoms $P(z)-\zeta$ sowie die konjugiert komplexen Zahlen $\bar{z}_j$ Punkte regulären Typs von A sind.

Nach Voraussetzung ist $J(P(A))^* J=(P(A))^+=\bar{P}(A)$; es ergibt sich

$$(P(A))^* = J\bar{P}(A) J = \bar{P}(JAJ) = \bar{P}(B).$$

Gemäß Lemma 5 ist deshalb $A^*=B=JAJ$, also $A=JA^*J=A^+$.

Literatur

1. Bognár, J.: Linear spaces with an indefinite inner product. [Vorlesungsausarbeitung] Stockholm: Kungl. Tekniska Högskolan 1966.
2. Ginzburg, Yu. P., Iohvidov, I. S.: The geometry of infinite-dimensional spaces with a bilinear metric. Russ. Math. Surveys **17**, Nr. 4, 1–51 (1962).
3. Gohberg, I. C., Kreĭn, M. G.: The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators. Amer. Math. Soc. Translat. (2) **13**, 185–264 (1960).
4. Iohvidov, I. S., Krein, M. G.: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I. Amer. Math. Soc. Translat. (2) **13**, 105–175 (1960).
5. — — Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric II. Amer. Math. Soc. Translat. (2) **34**, 283–373 (1963).
6. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
7. Kreĭn, M. G.: Einführung in die Geometrie indefiniter J-Räume und in die Theorie der Operatoren auf diesen Räumen. [Russisch.] Vtoraja letnjaja matematičeskaja škola (Kaciveli, 1964) I. Akademija nauk Ukrainskoĭ SSR. Institut matematiki. Kiev: Naukova Dumka, 15–92, 1965.
8. Langer, H.: Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren. Math. Ann. **146**, 60–85 (1962).
9. Lo, C. Y.: On polynomials in self-adjoint operators in a space with an indefinite metric. Trans. Amer. Math. Soc. **134**, 297–304 (1968).
10. Mal'cev, A. I.: Foundations of linear algebra. San Francisco-London: Freeman 1963.

Dr. Peter Hess
Department of Mathematics
University of Chicago
5734 University Avenue
Chicago, Illinois 60637, USA

(Eingegangen am 20. November 1969)