manuscripta math. 23, 143 - 154 (1978)

manuscripta mathematica

PROJEKTIVE MODULN ÜBER POLYNOMRINGEN $A[T_1,\ldots,T_m]$ MIT EINEM REGULÄREN GRUNDRING A

Hartmut Lindel

We are concerned with a question of H. Bass and D. Quillen which asks whether the following is true:

If A is a regular noetherian ring, then every finitely generated projective module P over a polynomial extension A[T] of A is extended from A. (cf. [1], § 4, (IX) and [7]).

We give an affirmative answer, either if
(i) A equals a ring of fractions of a polynomial ring over a regular noetherian ring B with dim B $\leq$ 2,
or if
(ii) A equals a ring of fractions of a polynomial extension of a power series ring over a complete regular local ring B with dim B $\leq$ 2.

(ii) implies the case that A is an unramified complete regular local ring. This generalizes the result in [4], which has been proved independently in [5]. (i) specializes to the known theorem of Quillen and Suslin if A = B (cf. [2]).

1. HILFSSÄTZE ÜBER IDEALE IN POLYNOMRINGEN

Für das folgende Lemma 1 hat der Verfasser keinen Beleg in der Literatur gefunden. Es besagt, daß die Lokalisierung eines Polynomringes über einem noetherschen Ring nach einem Primideal gleich der Lokalisierung eines geeigneten anderen Polynomringes nach einem maximalen Ideal ist.

LEMMA 1. *Sei* $C = B[Z_1,\ldots,Z_n]$ *ein Polynomring über einem noetherschen Ring* B *und* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal in* C *der Höhe* $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = s$. *Dann gibt es eine Permutation* $(Z_1,\ldots,Z_n) \longrightarrow (X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_t)$ *der Variablen*

0025-2611/78/0023/0143/$ 02.40

$Z_1,\dots,Z_n$ mit $t = s - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\cap B$ und $m = n - t$, so daß gilt:

(i) $\mathfrak{p}\cap B[X_1,\dots,X_m] = B[X_1,\dots,X_m](\mathfrak{p}\cap B)$

und

(ii) $$C_{\mathfrak{p}} = L_{L\mathfrak{p}},$$

wobei $L = (B[X_1,\dots,X_m])_{\mathfrak{p}\cap B[X_1,\dots,X_m]}[Y_1,\dots,Y_t]$ und $L\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in L mit $\mathrm{ht}\,L\mathfrak{p} = \dim L = s$ ist. Insbesondere ist L ein Polynomring über einem Körper, falls B ein Körper ist.

BEWEIS. Wir zeigen (i) durch Induktion über n und folgern (ii) aus (i). Für $n = 0$ ist nichts zu beweisen. Es sei $n \geq 1$. Wir schreiben $C' = B[Z_1,\dots,Z_{n-1}]$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}\cap C'$. Falls $\mathfrak{p} \neq C\mathfrak{p}'$ ist, gilt $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}' + 1$, also $s' = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}' = s - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Variablenpermutation $(Z_1,\dots,Z_{n-1}) \longrightarrow (X_1,\dots,X_{m'},Y_1,\dots,Y_{t'})$ mit $t' = s' - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}'\cap B = s - 1 - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}'\cap B$, $m' = (n-1) - t' = n - s - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}'\cap B$ und $\mathfrak{p}'\cap B[X_1,\dots,X_{m'}] = B[X_1,\dots,X_{m'}](\mathfrak{p}'\cap B)$. Es gilt $\mathfrak{p}'\cap B = \mathfrak{p}\cap B$, also $m = m'$ und $t = t' + 1$. Wenn man $Y_t = Z_n$ setzt, erhält man eine Variablenpermutation in C mit der Eigenschaft (i). Im Falle $\mathfrak{p} = C\mathfrak{p}'$ gilt $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}' = s$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Variablenpermutation $(Z_1,\dots,Z_{n-1}) \longrightarrow (X_1,\dots,X_{m'},Y_1,\dots,Y_{t'})$, so daß $t' = s - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}'\cap B$, $m' = n - 1 - t' = n - 1 - s - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}'\cap B$ und $\mathfrak{p}'\cap B[X_1,\dots,X_{m'}] = B[X_1,\dots,X_{m'}](\mathfrak{p}'\cap B)$ ist. Man setze $t = t'$ und $m = m' + 1$ und $X = X_m = Z_n$. Es sei $D = D'[X]$, $D' = B[X_1,\dots,X_{m'}]$. Aus $\mathfrak{p}'\cap D' = D'(\mathfrak{p}'\cap B) = D'(\mathfrak{p}\cap B)$ folgt $\mathfrak{p}\cap D = C\mathfrak{p}'\cap D = C[X]\mathfrak{p}'\cap D'[X] = D'[X](\mathfrak{p}'\cap D') = D(D'(\mathfrak{p}\cap B)) = D(\mathfrak{p}\cap B)$. Also hat die Variablenpermutation $(Z_1,\dots,Z_n) \longrightarrow (X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_t)$ die Eigenschaft (i).

L ist die Quotientenerweiterung $L = C_S$ von C bzgl. der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S = D\setminus\mathfrak{p}\cap D$. Da $\mathfrak{p}\cap S = \emptyset$ ist, ist $L\mathfrak{p} \neq L$. Weil $\mathrm{ht}\,L\mathfrak{p} \geq s$ und $\dim L = t + \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\cap B = s$ ist, ist $L\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal der Höhe $\dim L$ in L.

Es ist $C_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \cap L \neq L$ und $L\mathfrak{p} \subset C_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \cap L$, also $L = C_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \cap L$. Hieraus folgt $L\mathfrak{p} \cap C = C_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \cap L \cap C = C_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \cap C = \mathfrak{p}$.

Da L Unterring von C ist, ist wegen $L\mathfrak{p} = C_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \cap L$ der Ring $L_{L\mathfrak{p}}$ Unterring von $C_{\mathfrak{p}}$. Da C Unterring von $L_{L\mathfrak{p}}$ ist, ist wegen $L\mathfrak{p} \cap C = \mathfrak{p}$ der Ring $C_{\mathfrak{p}}$ ein Unterring von $L_{L\mathfrak{p}}$. Also ist $C_{\mathfrak{p}} = L_{L\mathfrak{p}}$.

Falls B ein Körper ist, ist $\mathfrak{p} \cap B = 0$ und L ein Polynomring über dem Körper $B(X_1,\ldots,X_m)$. Damit ist Lemma 1 gezeigt.

Wir notieren noch zwei weitere Lemmata:

LEMMA 2. *B sei ein noetherscher Ring der Dimension* $\dim B = d$ *und* $C = B[X_1,\ldots,X_n]$ *ein Polynomring über* B. *Jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m}$ *in* C *mit der Höhe* $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \dim C$ *hat die Form* $\mathfrak{m} = C(\mathfrak{m}\cap B) + \sum_{i=1}^{n} Cf_i$, *wobei* $f_i \in B[X_1,\ldots,X_i]$, $1 \leq i \leq n$, *und normiert in* X_i *über* $B[X_1,\ldots,X_{i-1}]$ *ist*.

BEWEIS. $\mathfrak{m} \cap B$ ist ein maximales Ideal in B, also $B/\mathfrak{m}\cap B$ ein Körper. Es ist $C/C(\mathfrak{m}\cap B) = B/(\mathfrak{m}\cap B)[X_1,\ldots,X_n]$. Nach [9], Vol. II, Chap. VII, § 7, Theorem 24, folgt die Behauptung.

In [3] wird gezeigt:

LEMMA 3. $C = B[X]$ *sei ein Polynomring über einem noetherschen Ring* B *und* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal in* C, *das ein normiertes Polynom enthält. Wenn für ein Ideal* $\mathfrak{b}$ *in* B *gilt* $C = \mathfrak{a} + C\mathfrak{b}$, *so ist* $\mathfrak{a} \cap B + \mathfrak{b} = B$.

2. VERALLGEMEINERUNG EINES RESULTATES VON QUILLEN UND SUSLIN

Die Lösung des Serreschen Problems für projektive Moduln über Polynomringen $I[X_1,\ldots,X_n]$, I ein Hauptidealring, in [7] und [8] beruht auf folgendem Satz:

P sei ein endlich erzeugter projektiver Modul über einer Polynomerweiterung A[T] eines noetherschen Ringes A und Q ein projektiver Untermodul von P. Wenn $Q \cong A[T]\otimes_A Q/TQ$ ist ("erweitert von A"), und wenn ein normiertes Polynom $h \in A[T]$ mit der Eigenschaft $hP \subset Q$ existiert, so $P \cong Q$.

Man kann dieses Ergebnis verallgemeinern:

LEMMA 4. *B und R seien noethersche Ringe und B ein Unterring von R. P sei ein endlich erzeugter R-Modul und Q ein Untermodul von P. Q sei Erweiterung eines B-Moduls und es gebe ein Element $h \in B$, so daß gilt*

$$R = B + Rh \ , \quad Rh \cap B = Bh$$

und $$hP \subset Q.$$

Dann ist P Erweiterung eines B-Moduls.

Wenn P und Q projektiv vom Range r sind und Q Erweiterung eines projektiven B-Moduls ist, so ist P Erweiterung eines projektiven B-Moduls.

Wenn $B = A[Y]$ ein Polynomring über einem noetherschen Ring A ist, P und Q projektiv vom Range r sind und Q Erweiterung eines projektiven A-Moduls ist, und wenn h ein normiertes Polynom in Y ist, so ist $P \cong Q$.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst den Teil des Lemmas, bei dem die Projektivität von P und Q nicht vorausgesetzt wird.

Weil Q Erweiterung eines endlich erzeugten B-Moduls Q' ist, gibt es ein endliches Erzeugendensystem B_1 von Q, dessen Relationenmodul durch die Zeilenvektoren einer Matrix U mit Koeffizienten in B erzeugt wird. Wegen $hP \subset Q$ ist der Faktormodul P/Q ein endlich erzeugter R/Rh-Modul. Man hat $R/Rh = B + Rh/Rh = B/B \cap Rh = B/Bh$. Also ist P/Q ein endlich erzeugter B/Bh-Modul. B_2 bezeichne eine endliche Teilmenge von $P \smallsetminus Q$, so daß die Restklassen der Elemente von B_2 modulo Q den Modul P/Q erzeugen. $B_1 \cup B_2$ ist ein Erzeugendensystem von P. Weil $R = B + Rh$ ist, kann man B_2 so wählen, daß für alle $p \in B_2$ gilt $hp \in \sum Bp_i$, $p_i \in B_1$. Also wird der Relationenmodul L von P bzgl. $B_1 \cup B_2$ durch die Zeilenvektoren einer Matrix V vom Typ

$$V = \left(\begin{array}{c|c} V_1 & h\mathfrak{E}_m \\ \hline V_2 & V_3 \\ \hline U & 0 \end{array}\right)$$

erzeugt. Hierbei ist m die Zahl der Elemente von B_2, $\mathfrak{E}_m$ die m×m-Einheitsmatrix und V_1, V_3, U sind Untermatrizen von V mit Koeffizienten in B. Da $h \in B$ ist, ist V_2 die einzige der angegebenen Untermatrizen, deren Koeffizienten möglicherweise nicht in B liegen. Wir zeigen, daß $V_2 = V_2' + W_2 \circ U$ ist, wobei V_2' Koeffizienten in B hat. Die Zeilenvektoren der Matrix $hV_2 - V_3 \circ V_1$ sind Elemente des von den Zeilenvektoren von U erzeugten Relationenmoduls von Q bzgl. B_1. Also gibt es eine Matrix W, für die $hV_2 - V_3 \circ V_1 = W \circ U$ ist. Da $R = B + Rh$ ist, erhält man eine Darstellung $W = W_1 + hW_2$, bei der die Matrix W_1 Koeffizienten in B hat. Hieraus folgt $h(V_2 - W_2 \circ U) = V_3 \circ V_1 + W_1 \circ U$. Die Matrix auf der rechten Seite dieser Gleichung hat Koeffizienten in B. Weil $Rh \cap B = Bh$ ist, hat die Matrix $V_2' = V_2 - W_2 \circ U$ Koeffizienten in B. Durch elementare Zeilentransformationen kann man in V die Untermatrix V_2 in V_2' so überführen, daß die übrigen angegebenen Untermatrizen von V unverändert bleiben. Die transformierte Matrix V' hat Koeffizienten in B. Damit ergibt sich, daß der Relationenmodul L von Vektoren mit Komponenten in B erzeugt wird. Bezeichnet L' den von diesen Vektoren erzeugten B-Modul und s die Zahl der Elemente von $B_1 \cup B_2$, so bedeutet dies, daß $L = R.L'$ und $P = R \otimes_B P'$ für $P' := B^s/L'$ ist. Also ist P von B erweitert.

Angenommen, P sei R-projektiv und Q' sei B-projektiv. $l = s - m$ ist die Zahl der Elemente von B_1, $r = rg_R P = rg_B Q'$. Die Matrix U hat den Rang $l - r$ und V' den Rang $s - r$. Es sei $\mathfrak{u}$ das von den $(s-r)$-reihigen Minoren von V' in B erzeugte Ideal. Weil P R-projektiv ist, ist $R\mathfrak{u} = R$. Weil Q' B-projektiv ist, erzeugen die $(l-r)$-reihigen Minoren von U die 1 in B. Aus der speziellen Form von V' folgt $h^m \in \mathfrak{u}$. Um zu zeigen, daß P' B-projektiv ist, genügt es, $\mathfrak{U} = B$ zu beweisen. Hierzu dient folgendes

LEMMA 5. Es seien R und B Ringe wie in Voraussetzungen von Lemma 4. Dann gilt

(i) $R = B + Rh^m$ und $Rh^m \cap B = Bh^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und

(ii): Wenn $\mathfrak{U}$ ein Ideal in B mit $h^m \in \mathfrak{U}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist, so ist $R\mathfrak{U} \cap B = \mathfrak{U}$.

BEWEIS von Lemma 5. (i) ergibt sich unmittelbar durch Induktion über m. Zu (ii): Aus $R\mathfrak{U} = (B+Rh^m)\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U} + Rh^m$ folgt $R\mathfrak{U} \cap B \subset \mathfrak{U} + Rh^m \cap B = \mathfrak{U} + Bh^m = \mathfrak{U}$.

Für den im Beweis von Lemma 4 vorliegenden Fall $h^m \in \mathfrak{U}$ und $R\mathfrak{U} = R$ ergibt sich $\mathfrak{U} = R\mathfrak{U} \cap B = R \cap B = B$. Also ist P' B-projektiv.

Es sei nun speziell $B = A[Y]$. Aus der speziellen Form der Matrix V' folgt $h^m P' \subset Q'$. Weil Q Erweiterung eines endlich erzeugten projektiven A-Moduls ist, können wir annehmen, daß U Koeffizienten in A hat und damit Q' Erweiterung eines projektiven A-Moduls Q'' ist. Da h normiert ist, ergibt das zu Beginn dieses Abschnittes zitierte Ergebnis von Quillen und Suslin, daß $P' \cong Q'$ ist. Also folgt $P \cong Q$.

Damit ist Lemma 4 bewiesen.

BEMERKUNGEN zu Lemma 4. Die Beziehungen $R = B + hB$ und $Rh \cap B = Bh$ für zwei Ringe B und R, B Unterring von R, $h \in B$, sind u.a. in folgendem Fall erfüllt: Es sei $R = k[[X_1,\dots,X_n]]$ ein formaler oder konvergenter Potenzreihenring über einem Körper k in n Variablen und $B = A[X_n]$, $A = k[[X_1,\dots,X_{n-1}]]$. Zu jeder in X_n regulären Potenzreihe $h' \in R$ gibt es nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ein in X_n normiertes Polynom $h \in A[X_n]$ und eine Einheit $u \in R$, so daß $h' = uh$ ist. Es gilt $R = B + h'R = B + hR$ und $Rh \cap B = Bh$. Diese Relationen übertragen sich auf den allgemeineren Fall einer Polynomerweiterung $R' = R[T_1,\dots,T_m]$ von R als $R' = B' + R'h$ und $R'h \cap B' = B'h$, wenn $A' = A[T_1,\dots,T_m]$, $B' = A'[X_n]$ und $h \in B$ ein normiertes Polynom in X_n ist. Dies wurde in [4] benutzt, um die Freiheit der projektiven R'-Moduln zu zeigen.

Eine weitere Anwendung von Lemma 4 wird zum Beweis des folgenden Lemmas führen:

LEMMA 6. *C sei ein regulär lokaler Ring der Dimension* $\dim C \leq 2$, $D = C[Y]$ *eine Polynomerweiterung von* C *in einer Variablen* Y *und* $H = D_{D\mathfrak{m}+DY}$ *die Lokalisierung von* D *nach dem maximalen Ideal* $D\mathfrak{m} + DY$, *wobei* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* C *ist. Dann sind alle endlich erzeugten projektiven* $H[T_1,\dots,T_m]$*-Moduln* P *frei*.

BEWEIS. $D_Y = C[Y,Y^{-1}]$ ist ein regulärer Ring der Dimension $\dim D_Y \leq 2$. Nach dem Theorem von Quillen und Suslin ist P_Y Erweiterung eines projektiven D_Y-Moduls, also $P_Y = R_Y \otimes_R (P/\sum T_i P)_Y$. Da $P/\sum T_i P$ als projektiver Modul über einem lokalen Ring frei ist, ist P_Y ein freier Modul. Also gibt es einen freien Untermodul Q von P und ein $s \in \mathbb{N}$, so daß $Y^s P \subset Q$ ist.

Es sei $h \in C[Y]$ ein normiertes und ausgezeichnetes Polynom, d.h. $h = Y^s + b_{s-1}Y^{-1} + \dots + b_o$ mit $b_o,\dots,b_{s-1} \in \mathfrak{m}$. Dann ist für alle $v \in D$, $v \notin D\mathfrak{m} + DY$, $Dh + Dv + D\mathfrak{m} = D$. Aus Lemma 3 folgt $(Dh+Dv) \cap C + \mathfrak{m} = C$. Weil $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal des lokalen Ringes C ist, ergibt sich $(Dh+Dv) \cap C = C$. Also ist $D = Dv + Dh$ und damit $v^{-1} \in D + Hh$. Weil jedes Element $z \in H$ ein Quotient der Form $z = dv^{-1}$ mit $d, v \in D$, $v \notin D\mathfrak{m} + DY$ ist, folgt $H = D + Hh$. Hieraus ergibt sich für $R = H[T_1,\dots,T_m]$, $B = D[T_1,\dots,T_m]$, daß $R = B + Rh$ ist. Mit $A = C[T_1,\dots,T_m]$ schreibt sich diese Beziehung als $R = A[Y] + Rh$. Man rechnet leicht nach, daß $Rh \cap B = Bh$ ist.

Im vorliegenden Fall ist $h = Y^s$. Also folgt aus Lemma 4 die Freiheit von P.

Das voranstehende Ergebnis hat auch Mohan Kumar in [5] erhalten.

Lemma 4 hat Anwendungsmöglichkeiten auch in Fällen, in denen der Ring R nicht regulär ist. Hierfür nur ein Beispiel:

k sei ein Körper und $R = k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ die durch die Relationen $x_iy_j - x_jy_i = 0$, $1 \leq i,j \leq n$, bestimmte affine k-Algebra. R ist bekanntlich normal aber nicht regulär. Es sei P ein endlich erzeugter projektiver R-Modul und es gebe einen freien Untermodul Q von P und ein $c \in k$, $c \neq 0$, so daß für ein $t \in \mathbb{N}$ gilt: $(x_1-c)^tP \subset Q$. Dann ist P frei.

<u>BEWEIS.</u> Man setze $A = k[y_1,x_2,\ldots,x_n]$, $B = A[x_1]$ und $h' = (x_1-c)^t$. Man rechnet leicht nach, daß für $h = x_1 - c$ die Beziehungen $R = B + Rh$ und $Rh \cap B = Bh$ erfüllt sind. Nach Lemma 5 folgt $R = B + Rh'$ und $Rh' \cap B = Bh'$. Also ist nach Lemma 4 der Modul P frei.

3. ANWENDUNGEN VON LEMMA 4 AUF DIE FRAGE VON BASS UND QUILLEN

Die folgenden Resultate ergeben im Spezialfall, daß die eingangs zitierte Frage von Bass und Quillen positiv beantwortet ist, falls A ein Quotientenring $A = C_S$ eines Polynomringes $C = k[X_1,\ldots,X_n]$ oder eines Potenzreihenringes $C = k[[X_1,\ldots,X_n]]$ über einem Körper k ist. Im Potenzreihenfall sind die konvergenten Potenzreihenringe eingeschlossen. S bezeichnet eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von C.

Allgemeiner kann man statt eines Körpers k einen regulär lokalen Ring B der Dimension $\dim B = d$ setzen, falls man weiß, daß das Problem von Bass und Quillen für alle regulär lokalen Ringe der Dimension d positiv entschieden ist. Falls B komplett ist, läßt sich darüber hinaus eine Polynomerweiterung von $B[[X_1,\ldots,X_n]]$ an die Stelle von $k[[X_1,\ldots,X_n]]$ setzen.

Falls A ein unverzweigter kompletter regulär lokaler Ring ist, ist $A = J[[X_1,\ldots,X_n]]$, wobei J ein Körper oder ein kompletter lokaler Hauptidealring der Dimension 1 ist. In diesem Falle ergibt sich Freiheit aller projektiven $A[T_1,\ldots,T_m]$-Moduln. Der verzweigte Fall bleibt offen. Da jeder komplette regulär lokale Ring A Restklassenring eines unverzweigten regulär lokalen Ringes ist, würde sich im kompletten Fall des Problems eine positive Antwort ergeben, wenn das Problem für den Fall eines regulären Restklassenringes $A = J[[X_1,\ldots,X_n]]/\mathfrak{a}$, J kompletter Hauptidealring, positiv entschieden ist, $\mathfrak{a}$ Hauptideal in $J[[X_1,\ldots,X_n]]$.

SATZ 1. B sei ein regulär lokaler Ring der Dimension $\dim B \leqq 2$, $C = B[X_1,\ldots,X_n]$ ein Polynomring über B und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in C. R sei ein Polynomring $R = C_{\mathfrak{p}}[T_1,\ldots,T_m]$ über der Lokalisierung $C_{\mathfrak{p}}$ von C in $\mathfrak{p}$. Alle endlich erzeugten projektiven R-Moduln sind frei.

BEWEIS. Es sei $s = \operatorname{ht}\mathfrak{p}$ die Höhe von $\mathfrak{p}$. Wir schließen durch Induktion über s. Falls $s \leqq 2$, so ist $\dim C_{\mathfrak{p}} \leqq 2$ und die Behauptung folgt aus dem Theorem von Quillen und Suslin. Angenommen, $s \geqq 3$. Nach Lemma 1 genügt es, den Fall zu behandeln, daß $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist mit $s = n + \dim B$. Aus $s \geqq 3$ und $\dim B \leqq 2$ folgt $n \geqq 1$. $\mathfrak{p} \cap B$ ist das maximale Ideal in B. Nach Lemma 2 ist $\mathfrak{p} = C(\mathfrak{p}\cap C') + Ch$, wobei $C' = B[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ und h ein normiertes Polynom in X, $X := X_n$, mit Koeffizienten in C' ist. Betrachte $R_h = (C_{\mathfrak{p}})_h[T_1,\ldots,T_m]$. P sei ein endlich erzeugter projektiver R-Modul. $P_h = R_h \otimes_R P$ ist ein endlich erzeugter projektiver R_h-Modul. $(C_{\mathfrak{p}})_h$ ist regulär und $\dim(C_{\mathfrak{p}})_h < s$. Nach Induktionsvoraussetzung und Theorem 1 aus [7] ist P_h Erweiterung eines projektiven $(C_{\mathfrak{p}})_h$-Moduls, also $P_h = R_h \otimes_R (P/\sum T_iP)_h$. Weil $C_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring und $P/\sum T_iP$ ein projektiver $C_{\mathfrak{p}}$-Modul ist, ist $P/\sum T_iP$ frei. Also ist P_h ein freier R_h-Modul, und es gibt einen freien Untermodul F von P und ein $t \in \mathbb{N}$, so daß $h^tP \subset F$ ist.

Es sei $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}\cap C'$ und $A = C'_{\mathfrak{p}'}[T_1,\ldots,T_m]$. Wir zeigen, daß $R = A[X] + Rh$ und $Rh \cap A[X] = A[X]h$ ist.

Es sei $r = bs^{-1} \in R$, $b \in C[T_1,\ldots,T_m]$, $s \in C\setminus\mathfrak{p}$ und $rh \in A[X]$. Man kann annehmen, daß h und s teilerfremd sind für alle $s \in C\setminus\mathfrak{p}$. Aus $bh \in A[X]s$ folgt dann $bh = (av^{-1})s$ für ein $v \in C'\setminus\mathfrak{p}'$ und $a \in C[T_1,\ldots,T_m]$ und hieraus $a \in h.C[T_1,\ldots,T_m]$. Also ist $b \in A[X]s$, d.h. $r \in A[X]$. Dies ergibt $Rh \cap A[X] = A[X]h$.

Weil $\mathfrak{p}$ maximal in C und $s \notin \mathfrak{p}$ ist, gilt $\mathfrak{p} + Cs = C$, also $C = (Cs+Ch) + C\mathfrak{p}'$. Weil h normiert in X ist, ergibt sich nach Lemma 3, daß $(Cs+Ch) \cap C' + \mathfrak{p}' = C'$ ist. Es gibt daher ein $w \in (Cs+Ch) \cap C'$, so daß $w \notin \mathfrak{p}'$ ist. w ist eine Einheit in $C'_{\mathfrak{p}'}$. Man hat wegen $w \in Cs + Ch$ in $C_{\mathfrak{p}}$ die Beziehung $s^{-1} \in Cw^{-1} + C_{\mathfrak{p}}h$. Weil C Unterring von $C'_{\mathfrak{p}'}[X]$ ist, ergibt sich $s^{-1} \in C'_{\mathfrak{p}'}[X] + C_{\mathfrak{p}}h$ für alle $s \in C \setminus \mathfrak{p}$. Hieraus folgt $R = A[X] + Rh$.

Aus Lemma 5 folgt $R = A[X] + Rh^t$ und $Rh^t \cap A[X] = A[X]h^t$. Weil $h^tP \subset F$ und F frei ist, ist P nach Lemma 4 frei. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Aus Theorem 1 in [7] ergibt sich

<u>SATZ 1'.</u> B sei ein regulärer Ring der Dimension $\dim B \leq 2$ und C_S eine Quotientenerweiterung eines Polynomringes $C = B[X_1,...,X_n]$ nach einer multiplikativen Menge $S \subset C$. Alle endlich erzeugten projektiven Moduln über einem Polynomring $R = C_S[T_1,...,T_m]$ sind Erweiterungen projektiver C_s-Moduln.

<u>BEMERKUNG.</u> Im Falle eines regulär lokalen Ringes A mit Koeffizientenkörper k und einem regulären Parametersystem $\{x_1,...,x_d\}$, $d = \dim A$, hat man eine Einbettung $A_O \longrightarrow A$ der Lokalisierung A_O eines Polynomringes $C = k[x_1,...,x_d]$ nach dem von den $x_1,...,x_d$ in C erzeugtem maximalen Ideal in A, die sich zur Einbettung der Polynomerweiterungen $A_O[T_1,...,T_m] \longrightarrow A[T_1,...,T_m]$ fortsetzt. Um die Freiheit der projektiven $A[T_1,...,T_m]$-Moduln zu beweisen, würde es nach Satz 1 genügen zu zeigen, daß diese Moduln Erweiterungen projektiver $A_O[T_1,...,T_m]$-Moduln sind.

Falls B ein kompletter regulär lokaler Ring der Dimension $\dim B \leq 2$ ist, kann man in Satz 1 anstelle von B sogar eine Potenzreihenerweiterung von B setzen. Es gilt

<u>SATZ 2.</u> $D = B[[Y_1,...,Y_l]]$ sei ein Potenzreihenring über einem kompletten regulär lokalen Ring B der Dimension $\dim B \leq 2$ und $C = D[X_1,...,X_n]$ ein Polynomring über D. $R = C_{\mathfrak{p}}[T_1,...,T_m]$ sei ein Polynomring über der Lokali-

sierung $C_{\mathfrak{p}}$ von C in einem Primideal $\mathfrak{p}$ von C. Jeder endlich erzeugte projektive R-Modul P ist frei.

Falls D ein konvergenter Potenzreihenring über einem bewerteten Körper B ist, ist P ebenfalls frei.

BEWEIS. Wir schließen durch Induktion über l. Falls $l = 0$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 1. Es sei $l \geq 1$. $\mathfrak{m}$ bezeichne das maximale Ideal von B und es sei S die multiplikative Menge $S = D\setminus D\mathfrak{m}$. Die Quotientenerweiterung D_S ist regulär lokal und $\dim D_S = \dim B \leq 2$. Die Menge $L = (C\setminus\mathfrak{p})\cdot S$ ist multiplikativ und es gilt $(C_{\mathfrak{p}})_S = (D_S[X_1,\ldots,X_n])_L$. Nach Satz 1' ist $P_S = R_S \otimes_R P$ Erweiterung eines projektiven $(C_{\mathfrak{p}})_S$-Moduls, also $P_S = R_S \otimes_R (P/\sum T_iP)_S$. Weil $P/\sum T_iP$ ein freier $C_{\mathfrak{p}}$-Modul ist, ist P_S frei. Es gibt also einen freien Untermodul F von P und ein $h \in S$, so daß $hP \subset F$ ist. Es sei $D' = B[[Y_1,\ldots,Y_{l-1}]]$ und $Y = Y_l$. Weil $h \notin D\mathfrak{m}$ ist, gibt es mindestens einen Koeffizienten von h in B, der nicht in $\mathfrak{m}$ liegt. Also können wir o.B.d.A. annehmen, daß h einen Summanden der Form Y^k, $k \in \mathbb{N}$, hat, wobei wir von der Darstellung als Potenzreihe in $Y_1,\ldots,Y_{l-1},Y$ mit Koeffizienten in B ausgehen. Da B komplett ist, gibt es nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz eine Einheit $u \in D$ und ein normiertes Polynom $h' \in D'[Y]$, so daß $h = uh'$ ist. Es ist $h'P \subset F$. Wir nehmen an, daß $h = h'$ ist.

Falls $h \notin \mathfrak{p}$ ist, so ist h eine Einheit in R und $P = F$. Angenommen, $h \in \mathfrak{p}$. Wir schreiben $C' = D'[Y,X_1,\ldots,X_n]$ und $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap C'$. Jedes $r \in C_{\mathfrak{p}}$ hat die Form $r = ab^{-1}$ mit $a \in C$ und $b \in C\setminus\mathfrak{p}$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ist $D = D' + Dh$, also $C = C' + Ch$. Daher gibt es ein $b' \in C'$, so daß $b - b' \in Ch$ ist. Weil $h \in \mathfrak{p}$ und $b \notin \mathfrak{p}$ ist, folgt $b' \notin \mathfrak{p}'$, also $b^{-1} \in C'_{\mathfrak{p}'} + hC$. Dies ergibt $r = ab^{-1} \in b^{-1}(C'+Ch) \subset C'_{\mathfrak{p}'} + hC_{\mathfrak{p}}$. Also ist $C_{\mathfrak{p}} = C'_{\mathfrak{p}'} + hC_{\mathfrak{p}}$. Hieraus folgt $R = R' + Rh$, wenn $R' := C'_{\mathfrak{p}'}[T_1,\ldots,T_m]$ ist.

Wir zeigen nun $Rh \cap R' = R'h$. Angenommen, $rh \in C_{\mathfrak{p}}h \cap C'_{\mathfrak{p}'}$, wobei $r = ab^{-1}$ für ein $a \in C$ und $b \in C\setminus\mathfrak{p}$

ist. Da $rh \in C'_{\mathfrak{p}'}$ ist, gibt es $a' \in C'$ und $b' \in C' \setminus \mathfrak{p}'$ mit $ab^{-1}h = a'(b')^{-1}$, also $ba' = ab'h$. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß h zu jedem $b \in C \setminus \mathfrak{p}$ teilerfremd ist. Also ergibt sich $a' \in Ch \cap C' = C'h$. Hieraus folgt $r \in C'_{\mathfrak{p}'}$ und damit $C_{\mathfrak{p}}h \cap C'_{\mathfrak{p}'} = C'_{\mathfrak{p}'}h$. Also ist $Rh \cap R' = R'h$.

Weil $R = R' + Rh$, $Rh \cap R' = R'h$ und $hP \subset F$ ist, folgt nach Lemma 4 aus der Freiheit von F, daß P Erweiterung $P = R \otimes_{R'} P'$ eines projektiven R'-Moduls P' ist. Auf R' läßt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden. Also ist P' frei. Dies zeigt, daß P frei ist.

Da der Weierstraßsche Vorbereitungssatz für konvergente Potenzreihenringe über bewerteten Körpern B gilt, ist auch der "konvergente Teil" des Satzes 2 gezeigt.

Literatur

1. BASS, H.: Some problems in "classical" algebraic K-theory, Algebraic K-Theory II, Lect. Notes in Math. 342, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York
2. FERRAND, D.: Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynomes sur un corps sont libres, Sem Bourbaki, 28 e annêe, 1975/76
3. LINDEL, H.: Wenn B ein Hauptidealring ist, so sind alle projektiven B[X,Y]-Moduln frei, Math. Ann. 222, 283-289(1976)
4. LINDEL, H., LÜTKEBOHMERT, N.: Projektive Moduln über polynomialen Erweiterungen von Potenzreihenalgebren, Archiv der Math. 27, 51-54(1977)
5. MOHAN KUMAR, N.: On a question of Bass and Quillen, preprint 1977
6. MURTHY, P.: Projective A[X]-modules, J. London Math. Soc. 41, 453-456(1966)
7. QUILLEN, D.: Projective modules over polynomial rings, Invent. math. 36, 166-172(1976)
8. SUSLIN, A.A.: Projektive Moduln über Polynomringen, Dokl. Akad. Nauk S.S.R. (1976), in russisch
9. ZARISKI, O., SAMUEL, P.: Commutative Algebra, Vol. II, van Nostrand Comp., Princeton (1958)

Hartmut Lindel

Mathematisches Institut
der Universität Münster

Roxeler Str. 64

4400 Münster

Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 25. Juli 1977)