Zum Isoperimeterproblem auf vollständigen Flächen mit summierbarer Gaußscher Krümmung

ALFRED HUBER

Vorgelegt von R. FINN

1. Einleitung

Sei $\mathfrak{F}$ eine abstrakte Fläche (zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit) mit folgenden Eigenschaften:

(A) *$\mathfrak{F}$ ist homoeomorph zur euklidischen Ebene und nach der Definition von* HOPF *und* RINOW [9] *vollständig;*

(B) *die Gaußsche Krümmung K ist auf $\mathfrak{F}$ absolut integrierbar, d.h.*

$$\iint_{\mathfrak{F}} |K| \, dA < \infty, \tag{1}$$

wobei dA das Flächenelement auf $\mathfrak{F}$ bezeichnet.

Daneben hat die Fläche gewisse Mindestanforderungen an Regularität zu erfüllen, die wir später umschreiben werden.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht im Beweis des folgenden Satzes:

Satz 1. *Sei $\{\Omega_j\}$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ eine gegen $\mathfrak{F}$ strebende Folge kreishomoeomorpher Gebiete auf $\mathfrak{F}$, welche von rektifizierbaren Kurven $\{\Gamma_j\}$ berandet werden. Dann ist*

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{L^2(\Gamma_j)}{4\pi A(\Omega_j)} \geqq \min\left(1, 1-\frac{C}{2\pi}\right), \tag{2}$$

wobei $L(\Gamma_j)$ die Länge von Γ_j, $A(\Omega_j)$ den Flächeninhalt von Ω_j und C die Curvatura integra von $\mathfrak{F}$ bezeichnen.

Diese Ungleichung kann nicht verbessert werden: auf jeder die Eigenschaften (A) *und* (B) *besitzenden Fläche $\mathfrak{F}$ gibt es eine Gebietsfolge $\{\Omega_j\}$, für welche in* (2) *die Gleichheit eintritt.*

Dieses Resultat ist bereits bekannt für solche Flächen $\mathfrak{F}$, auf welchen überall $K \geqq 0$ ist. (In diesem speziellen Fall darf Voraussetzung (B) weggelassen werden; diese ist von selbst erfüllt, da zufolge eines Satzes von COHN-VOSSEN [3] die Ungleichung

$$\iint_{\mathfrak{F}} |K| \, dA = \iint_{\mathfrak{F}} K \, dA \leqq 2\pi$$

gelten muß.) Für analytische Flächen dieser Klasse ist Satz 1 schon im Jahre 1941 von FIALA [4] mit Hilfe von Betrachtungen an geodätischen Parallelen bewiesen worden. Vor kurzem hat HARTMAN [8] die Fialaschen Untersuchungen wesentlich vertieft und insbesondere die Theorie von der Voraussetzung der Analytizität befreit.

Auf Flächen dieser speziellen Klasse gilt die isoperimetrische Ungleichung von FIALA [4]

$$\frac{L^2(\Gamma)}{4\pi A(\Omega)} \geqq 1 - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} K\,dA \geqq 1 - \frac{C}{2\pi}. \tag{3}$$

Dabei bezeichnet Ω ein beliebiges kreishomoeomorphes Gebiet mit rektifizierbarem Rand Γ. Aus (3) folgt unmittelbar die Ungleichung (2)[1]. Damit ist Satz 1 für diese Flächenklasse bewiesen bis auf die folgende Aussage: Es existiert eine die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllende Gebietsfolge $\{\Omega_j\}$, für welche

$$\lim_{j\to\infty} \frac{L^2(\Gamma_j)}{4\pi A(\Omega_j)} = 1 - \frac{C}{2\pi}. \tag{4}$$

Es gelang FIALA zu zeigen, daß die Innengebiete $\{\Omega_j\}$ einer gegen den idealen Rand von $\mathfrak{F}$ strebenden Folge geodätischer Parallelen $\{\Gamma_j\}$ zu einer festen Jordankurve Γ die Bedingung (4) erfüllen (Abschnitt 12 in [4]).

Vor kurzem ist von HARTMAN (Satz 7.1 in [8]) bewiesen worden, daß diese Eigenschaft geodätischer Parallelen – und damit die zuletzt erwähnte Teilaussage von Satz 1 – auf *allen* Flächen gilt, welche die Voraussetzungen (A) und (B) befriedigen.

In der vorliegenden Arbeit wird von der Methode der geodätischen Parallelen *kein* Gebrauch gemacht. Statt dessen führen wir – an Untersuchungen von FINN [5, 6] anknüpfend – globale isotherme Parameter ein. Als Parameterbereich tritt dabei die Ebene auf, denn nach einem Satz von BLANC und FIALA [2] ist zufolge (A) und (B) die $\mathfrak{F}$ zugrunde liegende Riemannsche Fläche vom parabolischen Typ. Die Fläche $\mathfrak{F}$ kann also erzeugt werden durch ein Linienelement der Form

$$e^{u(x,y)}\sqrt{dx^2+dy^2} = e^{u(z)}\,|dz|,$$

wobei u eine in der ganzen endlichen z-Ebene ($z=x+iy$) definierte Funktion bezeichnet. Sind etwa die Koeffizienten der $\mathfrak{F}$ ursprünglich definierenden metrischen Fundamentalform dreimal stetig differenzierbar, so folgt daraus dasselbe für u (WINTNER [17]), und die Gaußsche Krümmung berechnet sich nach der Formel

$$K = -\frac{\Delta u}{e^{2u}} \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Es ist

$$C = \iint_{\mathfrak{F}} K\,dA = -\iint_{z\text{-Ebene}} \Delta u\,dx\,dy. \tag{5}$$

Die Funktion u erfüllt – entsprechend den Eigenschaften (A) und (B) von $\mathfrak{F}$ – die Bedingungen:

[1] Enthält die Fläche $\mathfrak{F}$ Punkte, in welchen K negativ ist, so versagt diese Schlußweise. Denn dann existieren stets Gebiete Ω, für welche die linke Ungleichung (3) nicht erfüllt ist (Th. 4, p. 246 in [10]).

(a) *Die Funktion u ist definiert in der Gaußschen Ebene, reellwertig und zweimal stetig differenzierbar. Für jeden lokal rektifizierbaren, ins Unendliche führenden*[2] *Weg σ gilt*

$$\int_\sigma e^{u(z)}\,|dz| = \infty .$$

(b) *Es ist*

$$\iint_{z\text{-Ebene}} |\Delta u|\, dx\, dy < \infty \qquad (z = x + iy).$$

Finn setzt ferner voraus, daß u sich darstellen läßt in der Form

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\zeta\text{-Ebene}} \left[\log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|\right] \Delta u(\zeta)\, d\xi\, d\eta + c \tag{6}$$

$(\zeta = \xi + i\eta)$, wobei c eine Konstante bezeichnet. Nachträglich hat sich jedoch herausgestellt, daß diese zusätzliche Annahme keine Einschränkung bedeutet. In [*13*] wird nämlich vom Verfasser bewiesen, daß die Voraussetzungen (a) und (b) die Existenz der Darstellung (6) implizieren. (Von Finn wurde gezeigt, daß (6) jedenfalls dann gültig ist, wenn die Menge $\{z \mid \Delta u(z) < 0\}$ beschränkt, also $K \leqq 0$ außerhalb eines kompakten Teilbereiches von $\mathfrak{F}$ ist.)

In seinen von (6) ausgehenden Untersuchungen zum Cohn-Vossenschen Problemkreis wird Finn u.a. auf ein Ergebnis geführt, welches die zuletzt erwähnte Teilaussage von Satz 1 ebenfalls impliziert: Die Beziehung (4) ist immer dann erfüllt, wenn den Gebieten Ω_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ in der isothermen Parameterebene Kreisscheiben vom Mittelpunkt 0 entsprechen, deren Radien mit j gegen unendlich streben.

Den Anstoß zur vorliegenden Untersuchung hat die von Finn geäußerte Vermutung (p. 4 in [*6*]) gegeben, daß wahrscheinlich für alle die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllenden Gebietsfolgen $\{\Omega_j\}$ die linke Seite von (2) den Wert $1 - (C/2\pi)$ nicht unterschreite. Satz 1 bestätigt die Richtigkeit dieser Aussage für $C \geqq 0$ und widerlegt sie für $C < 0$.

Auf Grund der oben beschriebenen Einführung isothermer Parameter im Großen ist Satz 1 zu folgendem Resultat aequivalent:

Satz 2. *Die Funktion u besitze die Eigenschaften* (a) *und* (b). *Dann ist*

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_j} e^u\,|dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_j} e^{2u}\, dx\, dy} \geqq \min\left(1, 1 + \frac{1}{2\pi} \iint_{z\text{-Ebene}} \Delta u\, dx\, dy\right) \tag{7}$$

für jede die Ebene ausschöpfende Folge kreishomoeomorpher Gebiete $\{\omega_j\}$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ *mit rektifizierbaren Rändern* $\{\gamma_j\}$.

Diese Ungleichung kann nicht verbessert werden: zu jeder Funktion u mit den Eigenschaften (a) *und* (b) *gibt es eine Gebietsfolge* $\{\omega_j\}$, *für welche in* (7) *die Gleichheit eintritt.*

Dieser Satz wird in Abschnitt 3 bewiesen. Als Hilfsmittel gelangen dabei eine isoperimetrische Ungleichung [*10*, p. 238] sowie die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Finn zur Anwendung:

[2] Wir sagen, der Weg σ führe ins Unendliche, wenn seine stereographische Projektion auf der Riemannschen Kugel einen Punkt $z_0 \neq \infty$ mit ∞ stetig verbindet.

Satz 3. *Die Funktion u besitze die Eigenschaften* (a) *und* (*b*). *Sei* γ *eine stückweise analytische Jordankurve, welche nicht durch den Ursprung geht, und sei* ω *das Innere von* γ. *Es bezeichne*

$$\gamma_t = \{t z \mid z \in \gamma\} \quad \textit{und} \quad \omega_t = \{t z \mid z \in \omega\}, \qquad 0 < t < \infty .$$

Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_t} e^u |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_t} e^{2u} dx\, dy} = \frac{\left(\int_{\gamma} |z|^\alpha |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega} |z|^{2\alpha} dx\, dy}, \tag{8}$$

wobei

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \iint_{z\text{-Ebene}} \Delta u\, dx\, dy .$$

Bemerkungen. 1) Ist $\alpha \leqq -1$ und enthält ω den Ursprung, so ist der rechten Seite von (8) der Wert 0 zuzuschreiben. (Der Fall $\alpha < -1$ kann übrigens nicht auftreten: dies folgt aus dem Cohn-Vossenschen Satz.)

2) Man kann Beispiele angeben, aus welchen ersichtlich wird, daß Satz 3 seine Gültigkeit verliert, wenn die Worte „stückweise analytisch" ersetzt werden durch „rektifizierbar".

3) Ist γ ein Kreis um den Ursprung, so nimmt die rechte Seite von (8) den Wert $1+\alpha = 1-(C/2\pi)$ an, wobei C die Curvatura integra der durch die Metrik $e^{u(z)}|dz|$ erzeugten Fläche bezeichnet. Man erhält das oben erwähnte Resultat von Finn [*6*].

4) Satz 3 wird in Abschnitt 2 bewiesen. Wir benützen eine von der Finnschen wesentlich verschiedene Abschätzungsmethode, welche auch eine Herabsetzung der an die Funktion u zu stellenden Regularitätsvoraussetzungen gestattet.

Bisher haben wir stets die Gütltigkeit von (A) und (B) angenommen und deswegen nur einen Teil der den Gegenstand von Untersuchung [*6*] bildenden Flächen erfaßt: Finn setzt nämlich außer (B) nur noch die Orientierbarkeit und Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$ voraus[3].

Der Übergang vom bisher betrachteten Spezialfall zu dieser allgemeineren Flächenklasse läßt sich jedoch mit Hilfe einer kurzen Überlegung leicht durchführen. Eine vollständige orientierbare Fläche mit Eigenschaft (B) ist notwendigerweise von endlichem Zusammenhang (Th. 13, p. 61 in [*11*]) und die ihr zugrunde liegende Riemannsche Fläche ist nullberandet (Th. 15, p. 71 in [*11*]). Jedes Ende von $\mathfrak{F}$ kann also dargestellt werden durch eine konforme Metrik $e^{u(z)}|dz|$ mit folgenden Eigenschaften:

(c) *Die Funktion u ist definiert in*

$$\Omega = \{z \mid R < |z| < \infty\}, \qquad R > 0,$$

reellwertig und zweimal stetig differenzierbar. Für jeden lokal rektifizierbaren, ins Unendliche führenden Weg σ *gilt*

$$\int_\sigma e^{u(z)}\, |dz| = \infty .$$

[3] Eine weitere Annahme (Hypothese S) darf auf Grund von Satz 1 in [*13*] weggelassen werden.

(d) *Es ist*

$$\iint_{\Omega} |\Delta u|\, dx\, dy < \infty .$$

Sei $\{\beta_j\}$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ eine Folge glatter Jordankurven in Ω, deren Innengebiete die Ebene ausschöpfen. Wir führen den – wegen (d) – von der Wahl dieser Folge unabhängigen Grenzwert

$$\Phi = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_j} \frac{\partial u}{\partial n} |dz| \tag{9}$$

ein. Dabei bezeichnet $\partial/\partial n$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen.

Satz 4. *Die Funktion u besitze die Eigenschaften* (c) *und* (d). *Sei* $\{\gamma_j\}$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ *eine Folge rektifizierbarer Jordankurven in* Ω, *deren Innengebiete den Ursprung enthalten und für gegen unendlich strebendes j die Ebene ausschöpfen. Es bezeichne* $\omega(\gamma_0, \gamma_j)$ *das (für genügend große j definierte) von* $\gamma_0 \cup \gamma_j$ *berandete Ringgebiet. Dann ist*

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_j} e^u |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_j} e^{2u}\, dx\, dy} \geq \min(1, 1+\Phi). \tag{10}$$

Diese Ungleichung kann nicht verbessert werden: zu jeder Funktion u mit den Eigenschaften (c) *und* (d) *gibt es eine Kurvenfolge* $\{\gamma_j\}$, *für welche in* (10) *die Gleichheit eintritt.*

Natürlich kann dieses Resultat auch ohne Bezugnahme auf ein spezielles Koordinatensystem – entsprechend Satz 1 – formuliert werden.

Der Beweis von Satz 4 erfolgt durch Zurückführung auf Satz 2. Man betrachtet eine Funktion v, welche in der ganzen Gaußschen Ebene definiert und zweimal stetig differenzierbar ist und im Außengebiet von γ_0 mit u übereinstimmt. Diese Funktion besitzt die Eigenschaften (a) und (b), und es ist

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{z\text{-Ebene}} \Delta v\, dx\, dy = \Phi .$$

Nach Satz 2 existiert eine Folge rektifizierbarer Jordankurven $\{\gamma_j\}$ $(j=1,2,3,\ldots)$, deren Innengebiete $\{\omega_j\}$ die Ebene ausschöpfen, mit der Eigenschaft, daß

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_j} e^v |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_j} e^{2v}\, dx\, dy} = \min(1, 1+\Phi). \tag{11}$$

Für dieselbe Folge $\{\gamma_j\}$ gilt aber auch

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_j} e^v |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_j} e^{2v}\, dx\, dy} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_j} e^u |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega(\gamma_0, \gamma_j)} e^{2u}\, dx\, dy}, \tag{12}$$

und somit das Gleichheitszeichen in (10). (Die Beziehung (12) ist offenbar richtig, wenn das eine Nennerintegral – und damit auch das andere – gegen unendlich strebt. Bleiben die Nennerintegrale in (12) beschränkt, so besitzt die durch die Metrik $e^{v(z)}|dz|$ erzeugte vollständige Mannigfaltigkeit einen endlichen Flächeninhalt. Also (Th. 12, p. 59 in [*11*]) beträgt ihre Curvatura integra 2π, und es ist $1+\Phi=0$. Wir entnehmen (11), daß die linke Seite von (12) den Wert 0 besitzt. Daraus folgt, daß die beiden Zählerintegrale in (12) gegen 0 konvergieren. Also nimmt auch die rechte Seite von (12) den Wert 0 an: (12) ist in jedem Falle erfüllt).

Auf analoge Weise zeigt man: Wäre für eine Folge $\{\gamma_j\}$ die Ungleichung (10) nicht erfüllt, so wäre für dieselbe Folge auch (7) – v an Stelle von u gesetzt – nicht gültig. Da dies aber Satz 2 widerspräche, gilt somit (10) für alle Folgen $\{\gamma_j\}$. Damit ist Satz 4 auf Satz 2 zurückgeführt.

FINN hat bewiesen (Th. 10, p. 17 in [*6*]), daß

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\left(\int\limits_{|z|=r} e^u |dz|\right)^2}{4\pi \iint\limits_{r_0<|z|<r} e^{2u}\,dx\,dy} = 1+\Phi \tag{13}$$

für jede Funktion u mit den Eigenschaften (c) und (d) und beliebiges $r_0>R$. Unsere Methode liefert folgende Verallgemeinerung dieses Resultates:

Satz 5. *Die Funktion u besitze die Eigenschaften* (c) *und* (d). *Seien γ_0 und γ Jordankurven in Ω, deren Innengebiete den Ursprung enthalten; γ sei stückweise analytisch. Es bezeichne*

$$\gamma_t=\{t z \mid z\in\gamma\}, \qquad 1<t<\infty,$$

$\omega(\gamma)$ das Innengebiet von γ und $\omega(\gamma_0, \gamma_t)$ das (für genügend große t definierte) von $\gamma_0\cup\gamma_t$ berandete Ringgebiet. Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\int\limits_{\gamma_t} e^u |dz|\right)^2}{4\pi \iint\limits_{\omega(\gamma_0,\gamma_t)} e^{2u}\,dx\,dy} = \frac{\left(\int\limits_{\gamma} |z|^{\Phi} |dz|\right)^2}{4\pi \iint\limits_{\omega(\gamma)} |z|^{2\Phi}\,dx\,dy}, \tag{14}$$

wobei Φ durch (9) *definiert wird.*

Man beweist diese Aussage durch Zurückführung auf Satz 3. Wir überlassen die Details dem Leser.

Die nun folgenden Beweise der Sätze 2 und 3 werden unter beträchtlich schwächeren Regularitätsvoraussetzungen geführt als den oben formulierten (s. Sätze 6 und 7). An Stelle der Existenz und Stetigkeit aller Ableitungen von u bis und mit der zweiten Ordnung fordern wir nur, daß u sich als Differenz subharmonischer Funktionen darstellen lasse. Wir verstehen dann den Laplaceoperator im Sinne der Theorie der Distributionen: Δu ist ein Radonsches Maß, von welchem – in Verallgemeinerung der Bedingung (b) – vorausgesetzt wird, daß seine totale Variation endlich sei.

Diese Allgemeinheit ergibt sich aus unserer potentialtheoretischen Methode in natürlicher Weise. Sie läßt sich ohne weiteres auch auf die Sätze 4 und 5 übertragen, wobei für die Definition von Φ der verallgemeinerte Flußbegriff der Rieszschen Theorie [*16*] heranzuziehen ist.

Die verschärfte Fassung von Satz 2 (Satz 7) gestattet es uns, den Gültigkeitsbereich von Satz 1 unter Anwendung eines Resultates von RESCHETNIAK [*15*] wie folgt abzugrenzen: *Satz 1 gilt für alle Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung im Sinne von* ALEXANDROW [*1*], *welche die Eigenschaften* (A) *und* (B) *besitzen*[4].

2. Beweis von Satz 3

Zuerst wird folgender Hilfssatz bewiesen:

Lemma. *Sei μ ein auf der Gaußschen Ebene $\boldsymbol{C}$ definiertes Radonsches Maß mit folgenden Eeigenschaften:*

(1) *μ ist von endlicher totaler Variation;*

(2) *μ verschwindet in einer Umgebung des Ursprungs;*

(3) *die Funktion $e^{2u(z)}$, wobei*

$$u(z) = -\int_{\boldsymbol{C}} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu(e_\zeta), \tag{15}$$

ist in der z-Ebene lokal summierbar.

Sei ferner γ eine stückweise analytische Jordankurve, welche nicht durch den Ursprung geht, und sei ω das Innengebiet von γ. Es bezeichne

$$\gamma_t = \{tz \mid z \in \gamma\} \quad und \quad \omega_t = \{tz \mid z \in \omega\}, \qquad 0 < t < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_t} e^u |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_t} e^{2u}\, dx\, dy} = \frac{\left(\int_{\gamma} |z|^\alpha |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega} |z|^{2\alpha}\, dx\, dy}, \tag{16}$$

wobei $\alpha = -\mu(\boldsymbol{C})$. (Ist $\alpha \leqq -1$ und enthält ω den Ursprung, so ist der rechten Seite von (16) *der Wert* 0 *zuzuschreiben.)*

Bemerkungen. 1) Die Funktion u ist im allgemeinen nicht in allen Punkten von $\boldsymbol{C}$ definiert. Die Menge der Ausnahmepunkte ist jedoch stets von der Kapazität 0 und für das Folgende ohne Belang (vgl. Fußnote[6] in [*13*]).

2) Die Funktion e^{2u} ist jedenfalls dann lokal summierbar, wenn die durch das Linienelement $e^{u(z)}|dz|$ erzeugte Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung zur Ebene homoeomorph ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\mu(\{z\}) < 1$ ist für alle $z \in \boldsymbol{C}$.

Beweis des Lemmas. Der auf der rechten Seite von (16) stehende Quotient bleibt unverändert, wenn gleichzeitig γ durch γ_t und ω durch ω_t (für irgend ein $t > 0$) ersetzt wird. Infolgedessen darf ohne Verlust an Allgemeinheit angenommen werden, daß ω im Innern des Einheitskreises liegt.

Es vereinfacht die Beweisdarstellung, wenn die Kurve γ festgehalten und an ihrer Stelle die Metrik variiert wird. Für alle Borelmengen e definieren wir

$$\mu_t(e) = \mu(\{tz \mid z \in e\}), \qquad 0 < t < \infty.$$

[4] Bedingung (B) ist verallgemeinert so zu interpretieren, daß die (nun als additive Mengenfunktion auf der Fläche definierte) Krümmung K eine endliche totale Variation besitzen soll.

Es ist

$$u(tz) = -\int_C \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu_t(e_\zeta). \tag{17}$$

Mit den Abkürzungen

$$L_t = \int_\gamma e^{u(tz)}\,|dz| \quad \text{und} \quad A_t = \iint_\omega e^{2u(tz)}\,dx\,dy \tag{18}$$

ist

$$\frac{\left(\int_{\gamma_t} e^{u(z)}\,|dz|\right)^2}{\iint_{\omega_t} e^{2u(z)}\,dx\,dy} = \frac{L_t^2}{A_t}. \tag{19}$$

Sei ε, $0<\varepsilon<1$, vorgegeben. Zuerst wird eine für alle genügend großen Werte von t gültige Abschätzung von L_t hergeleitet. Es bezeichne $\|\mu_t\|$ $(=\|\mu\|$ für alle $t)$ die totale Variation des Maßes μ_t und $\mu_t=\mu_t^+-\mu_t^-$ dessen Jordansche Zerlegung. Wir dürfen annehmen, daß $\|\mu\|\neq 0$ ist, da im gegenteiligen Fall das Lemma trivialerweise stimmt. Dann existiert eine positive Zahl R so, daß

$$\frac{1}{6\|\mu\|}\log(1-\varepsilon) < \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| < \frac{1}{6\|\mu\|}\log(1+\varepsilon) \tag{20}$$

für $z\in(\omega\cup\gamma)$ und $|\zeta|\geqq R$. Ferner gibt es eine Zahl $r>0$ mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{1}{6\|\mu\|}\log(1-\varepsilon) < \log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right| < \frac{1}{6\|\mu\|}\log(1+\varepsilon) \tag{21}$$

für $z\in\gamma$ und $|\zeta|\leqq r$. Wir zerlegen C in die Bereiche

$$G_1=\{z\,|\,|z|\leqq r\},\qquad G_2=\{z\,|\,r<|z|<R\}\quad\text{und}\quad G_3=\{z\,|\,|z|\geqq R\}.$$

Zufolge (17) und (20) gilt die Abschätzung

$$\tfrac{1}{6}\log(1-\varepsilon)\leqq u(tz)-\log\Phi(R)+\int_{G_1\cup G_2}\log|z-\zeta|\,d\mu_t(\varepsilon_\zeta)\leqq\tfrac{1}{6}\log(1+\varepsilon), \tag{22}$$

wobei

$$\log\Phi(R) = \int_{C-G_3}\log|\zeta|\,d\mu_t(e_\zeta). \tag{23}$$

Es gibt eine Zahl $T_1>0$ mit der Eigenschaft, daß

$$\tfrac{1}{6}\log(1-\varepsilon) < -\mu_t(G_2)\log(2R) < \tfrac{1}{6}\log(1+\varepsilon) \tag{24}$$

für alle $t>T_1$, und

$$\tfrac{1}{6}\log(1-\varepsilon) < -\big(\alpha+\mu_t(G_1)\big)\log|z| < \tfrac{1}{6}\log(1+\varepsilon) \tag{25}$$

für alle $t>T_1$ und $z\in\gamma$.

Das mittlere Glied der Ungleichung (22) kann in der Form

$$u(tz)-\log\Phi(R)+\int_{G_1}\log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right|d\mu_t(e_\zeta)-$$
$$-\int_{G_2}\log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t(e_\zeta)+\mu_t(G_2)\log(2R)+\big(\alpha+\mu_t(G_1)\big)\log|z|-\alpha\log|z|$$

geschrieben werden. Für $t > T_1$ folgt somit aus (18), (21), (22), (24) und (25), daß

$$(1-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\,\Phi(R)\,I_1(t) \leqq L_t \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\,\Phi(R)\,I_2(t), \tag{26}$$

wobei $\Phi(R)$ durch (23) definiert wird und zur Abkürzung

$$I_1(t) = \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{-\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}|dz| \tag{27}$$

und

$$I_2(t) = \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t^+(e_\zeta)\right\}|dz| \tag{28}$$

gesetzt wurde.

Im nächsten Schritt wird gezeigt: es gibt eine Zahl $T_2 \geqq T_1$ mit der Eigenschaft, daß für alle $t > T_2$

$$I_2(t) \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \int_\gamma |z|^\alpha |dz| \tag{29}$$

und

$$I_1(t) \geqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \int_\gamma |z|^\alpha |dz|. \tag{30}$$

Zu diesem Zweck wählen wir zuerst eine Zahl η, $0 < \eta < \frac{1}{2}$, mit der Eigenschaft, daß

$$\Bigl(\int_\gamma |z|^\alpha |dz|\Bigr)^{-2\eta} < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{6}} \tag{31}$$

und

$$\left(\sup_{\zeta_0 \in C} \int_\gamma |z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{\frac{1}{2}} |dz|\right)^{2\eta} < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{6}}. \tag{32}$$

Eine solche Zahl existiert. Da nämlich γ aus endlich vielen analytischen Kurvenbogen besteht, ist das Integral in (32) eine beschränkte Funktion von ζ_0.

Nun wählen wir $T_2 \geqq T_1$ derart, daß für alle $t > T_2$ die Ungleichung

$$\mu_t^+(G_2) + \mu_t^-(G_2) < \eta \tag{33}$$

erfüllt ist.

Zum Beweise von (29) nehmen wir zunächst an, $\mu_t^+ | G_2$ (=Einschränkung des Maßes μ_t^+ auf das Gebiet G_2) sei in einem Punkte ζ_0 konzentriert. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_\gamma |z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^\sigma |dz| \leqq \int_\gamma |z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^\eta |dz| \\ &= \int_\gamma (|z|^\alpha)^{1-2\eta} \left(|z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^{2\eta} |dz| \\ &\leqq \Bigl(\int_\gamma |z|^\alpha |dz|\Bigr)^{1-2\eta} \left(\int_\gamma |z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{\frac{1}{2}} |dz|\right)^{2\eta} \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{3}} \int_\gamma |z|^\alpha |dz|. \end{aligned} \tag{34}$$

Dabei wurde die Abkürzung $\sigma = \mu_t^+(G_2)$ eingeführt und zuerst (33), dann die Höldersche Ungleichung (s. z.B. p. 140 in [7]), und schließlich (31) und (32) angewandt.

Setzen wir nun etwas allgemeiner voraus, das Maß $\mu_t^+ | G_2$ bestehe aus endlich vielen Punktmassen: $p_1\sigma$ in ζ_1, $p_2\sigma$ in ζ_2, ..., $p_m\sigma$ in ζ_m, wobei $p_1+p_2+\cdots+p_m=1$ und alle $p_j>0$. In diesem Falle erhalten wir

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{\sum_{j=1}^m p_j\sigma \log\frac{2R}{|z-\zeta_j|}\right\}|dz| \\
(35)\qquad &= \int_\gamma \prod_{j=1}^m \left(|z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_j}\right|^\sigma\right)^{p_j} |dz| \\
&\leqq \prod_{j=1}^m \left(\int_\gamma |z|^\alpha \left|\frac{2R}{z-\zeta_j}\right|^\sigma |dz|\right)^{p_j} \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \int_\gamma |z|^\alpha |dz|
\end{aligned}
$$

durch Anwendung von (34) und der Hölderschen Ungleichung.

Schließlich erlaubt uns der nachstehende Grenzübergang, jegliche spezielle Annahme über die Struktur von $\mu_t^+ | G_2$ fallen zu lassen. Sei N eine natürliche Zahl. Wir definieren

$$S_N = \int_\gamma |z|^\alpha \exp\{\int_{G_2} L_N(z,\zeta)\, d\mu_t^+(e_\zeta)\}\, |dz|,$$

wobei

$$L_N(z,\zeta) = \min\left(N, \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\right).$$

Es gibt ein aus endlich vielen Massenpunkten, $p_1\sigma$ in ζ_1, $p_2\sigma$ in ζ_2, ..., $p_m\sigma$ in ζ_m ($p_1+p_2+\cdots+p_m=1$, alle $p_j>0$), bestehendes Maß mit der Eigenschaft, daß

$$S_N \leqq \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{\sum_{j=1}^m p_j\sigma L_N(z,\zeta_j)\right\}|dz| + \frac{1}{N}.$$

Mit Anwendung von (35) erhalten wir

$$(36)\quad S_N \leqq \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{\sum_{j=1}^m p_j\sigma \log\frac{2R}{|z-\zeta_j|}\right\}|dz| + \frac{1}{N} \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \int_\gamma |z|^\alpha |dz| + \frac{1}{N}.$$

Lassen wir nun N gegen unendlich streben, so geht (36) in (29) über.

Ungleichung (30) folgt aus der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\gamma |z|^\alpha |dz|\right)^2 &= \left(\int_\gamma \left[|z|^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}\right] \times\right. \\
&\quad \left. \times \left[|z|^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}\right] |dz|\right)^2 \\
&\leqq \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}|dz| \times \\
&\quad \times \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{-\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}|dz| \\
&\leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \int_\gamma |z|^\alpha |dz| \int_\gamma |z|^\alpha \exp\left\{-\int_{G_2} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}|dz|.
\end{aligned}
$$

Hier wurde zuerst von der Schwarzschen Ungleichung und darauf vom eben bewiesenen Resultat (aber angewandt auf μ_t^- statt μ_t^+) Gebrauch gemacht.

Aus (26), (29) und (30) erhalten wir schließlich die für alle $t>T_2$ gültige Ungleichung

$$(1-\varepsilon)\,\Phi(R)\int_\gamma |z|^\alpha\,|dz| \leqq L_t \leqq (1+\varepsilon)\,\Phi(R)\int_\gamma |z|^\alpha\,|dz|. \tag{37}$$

Nun soll A_t in entsprechender Weise abgeschätzt werden. Wir betrachten vorerst den Fall $\alpha>-1$ und nehmen dabei an, die vorgegebene Zahl ε sei kleiner als $\alpha+1$.

Es sei R die bei der Abschätzung von L_t so bezeichnete Zahl. Es gilt also (20) für alle $z\in(\omega\cup\gamma)$ und $|\zeta|\geqq R$.

Wir wählen eine Zahl r_1 derart, daß

$$0<r_1<\min_{z\in\gamma}|z|.$$

Ferner sei r_0, $0<r_0<r_1$, eine Zahl mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{1}{6\,\|\mu\|}\log(1-\varepsilon)<\log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right|<\frac{1}{6\,\|\mu\|}\log(1+\varepsilon) \tag{38}$$

für $|\zeta|\leqq r_0$ und $|z|\geqq r_1$.

Sei außerdem λ eine beliebige Zahl aus dem halboffenen Intervall $(0, 1]$. Beziehung (38) ist offenbar gültig, wenn für irgend einen Wert des Parameters λ gleichzeitig $|\zeta|\leqq\lambda r_0$ und $|z|\geqq\lambda r_1$ ist. Wir definieren

$$\begin{aligned}
G_0(\lambda)&=\{z\,|\,|z|\leqq\lambda r_0\}, & G_3&=\{z\,|\,|z|\geqq R\},\\
G_1(\lambda)&=\{z\,|\,\lambda r_0<|z|\leqq\lambda r_1\}, & G(\lambda)&=G_1(\lambda)\cup G_2(\lambda),\\
G_2(\lambda)&=\{z\,|\,\lambda r_1<|z|<R\}, & \omega^*(\lambda)&=\omega\cap\{z\,|\,|z|>\lambda r_1\}.
\end{aligned}$$

Aus (17) und (23) folgt damit

$$\begin{aligned}
u(tz)=&-\int_{G_3}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu_t(e_\zeta)+\\
&+\log\Phi(R)-\mu_t(G(\lambda))\log(2R)-\mu_t(G_0(\lambda))\log|z|+\\
&+\int_{G(\lambda)}\log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t(e_\zeta)-\int_{G_0(\lambda)}\log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right|d\mu_t(e_\zeta).
\end{aligned} \tag{39}$$

Es gibt eine Zahl $T_3\geqq T_2$ mit der Eigenschaft, daß für alle $t>T_3$ die Ungleichungen

$$[\mu_t^+(C-G_0(1))+\mu_t^-(C-G_0(1))]\,|\log(2R)|<\tfrac{1}{6}\log(1+\varepsilon) \tag{40}$$

und

$$\mu_t^+(C-G_0(1))+\mu_t^-(C-G_0(1))<\varepsilon \tag{41}$$

erfüllt sind. Aus (40) und (41) schließen wir, daß

$$\tfrac{1}{6}\log(1-\varepsilon)<-\mu_t(G(\lambda))\log(2R)<\tfrac{1}{6}\log(1+\varepsilon) \tag{42}$$

für alle $t > T_3/\lambda$ und

$$(\alpha+\varepsilon)\log|z| < -\mu_t(G_0(\lambda))\log|z| < (\alpha-\varepsilon)\log|z| \tag{43}$$

für $t > T_3/\lambda$ und $z \in \omega^*(\lambda)$. (Hier wurde von der zu Beginn des Beweises getroffenen Annahme $\omega \subset \{z \mid |z| < 1\}$ Gebrauch gemacht.) Mit Anwendung von (39), (20), (38), (42) und (43) folgt

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\log(1-\varepsilon)+(\alpha+\varepsilon)\log|z|\\ &\quad\leqq u(tz)-\log\Phi(R)-\int\limits_{G(\lambda)}\log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t(e_\zeta)\leqq\tfrac{1}{2}\log(1+\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)\log|z|\end{aligned}$$

für $t > T_3/\lambda$ und $z \in \omega^*(\lambda)$. Aus dieser Ungleichung ergibt sich die Abschätzung

$$(1-\varepsilon)\,\Phi^2(R)\,K_1(t,\lambda) \leqq \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} e^{2u(tz)}\,dx\,dy \leqq (1+\varepsilon)\,\Phi^2(R)\,K_2(t,\lambda), \tag{44}$$

wobei

$$K_1(t,\lambda) = \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} \exp\left\{-2\int\limits_{G(\lambda)} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t^-(e_\zeta)\right\} dx\,dy$$

und

$$K_2(t,\lambda) = \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \exp\left\{2\int\limits_{G(\lambda)} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\,d\mu_t^+(e_\zeta)\right\} dx\,dy.$$

Im nächsten Schritt wird gezeigt: es gibt eine Zahl $T_4 \geqq T_3$ mit der Eigenschaft, daß für $t > T_4/\lambda$

$$K_2(t,\lambda) \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)}\,dx\,dy \tag{45}$$

und

$$K_1(t,\lambda) \geqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)}\,dx\,dy. \tag{46}$$

Zu diesem Zweck wählen wir zuerst eine Zahl κ, welche der Bedingung $0 < \kappa < \min[2, 2(1+\alpha-\varepsilon)]$ genügt. Darauf führen wir eine Zahl η ein, welche die Ungleichungen $0 < 2\eta < \kappa$,

$$\Big(\iint\limits_{\omega^*(1)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)}\,dx\,dy\Big)^{-\frac{2\eta}{\kappa}} < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \tag{47}$$

und

$$\left(\sup_{\zeta_0 \in C} \iint\limits_{\omega} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{\kappa} dx\,dy\right)^{\frac{2\eta}{\kappa}} < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \tag{48}$$

erfüllt. Schließlich wählen wir $T_4 > T_3$ derart, daß

$$\mu_t^+(C - G_0(1)) + \mu_t^-(C - G_0(1)) < \eta \tag{49}$$

für alle $t \geqq T_4$. Aus (49) folgt, daß

$$\mu_t^+(G(\lambda)) + \mu_t^-(G(\lambda)) < \eta \tag{50}$$

für alle $t \geqq T_4/\lambda$.

Zum Beweise von (45) nehmen wir zunächst an, das Maß $\mu_t^+ \,|\, G(\lambda)$ sei in einem Punkte ζ_0 konzentriert. In diesem Falle gilt für $t \geqq T_4/\lambda$

$$\begin{aligned}
K_2(t,\lambda) &= \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{2\sigma} dx\,dy \\
&\leqq \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{2\eta} dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} \left(|z|^{2(\alpha-\varepsilon)}\right)^{1-\frac{2\eta}{\kappa}} \left(|z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{\kappa}\right)^{\frac{2\eta}{\kappa}} dx\,dy \qquad (51)\\
&\leqq \Big(\iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} dx\,dy\Big)^{1-\frac{2\eta}{\kappa}} \left(\iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_0}\right|^{\kappa} dx\,dy\right)^{\frac{2\eta}{\kappa}} \\
&\leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)}\, dx\,dy.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Abkürzung $\sigma = \mu_t^+(G(\lambda))$ eingeführt und (50), die Höldersche Ungleichung, (47) und (48) angewandt. (Beziehung (47) bleibt richtig, wenn $\omega^*(1)$ ersetzt wird durch $\omega^*(\lambda)$, wobei $\lambda \in (0, 1]$. Ebenso darf in (48) ω in $\omega^*(\lambda)$ abgeändert werden.)

Setzen wir nun etwas allgemeiner voraus, das Maß $\mu_t^+ \,|\, G(\lambda)$ bestehe aus endlich vielen Punktmassen: $p_1\sigma$ in ζ_1, $p_2\sigma$ in $\zeta_2, \dots, p_m\sigma$ in ζ_m, wobei $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$ und alle $p_j > 0$. Mit Anwendung von (51) und der Hölderschen Ungleichung erhalten wir für $t \geqq T_4/\lambda$

$$\begin{aligned}
K_2(t,\lambda) &= \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \exp\left\{2\sum_{j=1}^{m} p_j\sigma \log\frac{2R}{|z-\zeta_j|}\right\} dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} \prod_{j=1}^{m} \left(|z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_j}\right|^{2\sigma}\right)^{p_j} dx\,dy \\
&\leqq \prod_{j=1}^{m} \left(\iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} \left|\frac{2R}{z-\zeta_j}\right|^{2\sigma} dx\,dy\right)^{p_j} \\
&\leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} dx\,dy.
\end{aligned}$$

Durch einen Grenzübergang befreit man sich schließlich von jeglicher spezieller Annahme über die Struktur des Maßes $\mu_t^+ \,|\, G(\lambda)$. (Für die Details verweisen wir auf die ausführliche Darstellung des entsprechenden Schrittes bei der Abschätzung von $I_2(t)$.) Damit ist (45) bewiesen.

Beziehung (46) folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big(\iint\limits_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} dx\,dy\Big)^2 \\
&\quad = \left(\iint\limits_{\omega^*(\lambda)} \left[|z|^{\alpha+\varepsilon} \exp\left\{\int\limits_{G(\lambda)} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}\right] \times\right. \\
&\qquad \left. \times \left[|z|^{\alpha+\varepsilon} \exp\left\{-\int\limits_{G(\lambda)} \log\frac{2R}{|z-\zeta|}\, d\mu_t^-(e_\zeta)\right\}\right] dx\,dy\right)^2
\end{aligned}$$

$$\leqq \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} \exp\left\{2 \int_{G(\lambda)} \log \frac{2R}{|z-\zeta|} d\mu_t^-(e_\zeta)\right\} dx\, dy \times$$

$$\times \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} \exp\left\{-2 \int_{G(\lambda)} \log \frac{2R}{|z-\zeta|} d\mu_t^-(e_\zeta)\right\} dx\, dy$$

$$\leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} dx\, dy \times$$

$$\times \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} \exp\left\{-2 \int_{G(\lambda)} \log \frac{2R}{|z-\zeta|} d\mu_t^-(e_\zeta)\right\} dx\, dy.$$

Hier wurde von der Schwarzschen Ungleichung sowie von (45) (mit μ_t^- an Stelle von μ_t^+ und $\alpha+\varepsilon$ statt α) Gebrauch gemacht.

Aus (44), (45) und (46) folgt, daß für alle $t \geqq T_4/\lambda$

$$(52) \qquad \begin{aligned} &(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \Phi^2(R) \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} dx\, dy \\ &\leqq \iint_{\omega^*(\lambda)} e^{2u(tz)} dx\, dy \leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \Phi^2(R) \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} dx\, dy. \end{aligned}$$

Es gibt eine Zahl λ_0, $0<\lambda_0 \leqq 1$, mit der Eigenschaft, daß

$$\iint_{\omega^*(\lambda_0)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} dx\, dy \geqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \iint_{\omega} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} dx\, dy.$$

Aus dieser Beziehung und (52) folgt unter Verwendung der zweiten Abkürzung (18), daß

$$(53) \qquad A_t \geqq (1-\varepsilon)^2 \Phi^2(R) \iint_{\omega} |z|^{2(\alpha+\varepsilon)} dx\, dy$$

für alle $t \geqq T_4/\lambda_0$.

Ferner existiert eine Zahl λ_1, $0<\lambda_1 \leqq 1$, mit der Eigenschaft, daß

$$(54) \qquad \lambda_1^2 \iint_{|z| \leqq r_1 T_4} e^{2u} dx\, dy \leqq [(1+\varepsilon)^2 - (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]\, \Phi^2(R)\, T_4^2 \iint_{\omega} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} dx\, dy.$$

Sei $t \geqq T_4/\lambda_1$. Mit $\lambda = T_4/t$ ($\leqq \lambda_1$) erhalten wir unter Anwendung von (52) und (54)

$$(55) \qquad \begin{aligned} A_t &= \iint_{\omega^*(\lambda)} e^{2u(tz)} dx\, dy + \iint_{|z| \leqq \lambda r_1} e^{2u(tz)} dx\, dy \\ &\leqq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \Phi^2(R) \iint_{\omega^*(\lambda)} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} dx\, dy + \frac{\lambda_1^2}{T_4^2} \iint_{|z| \leqq r_1 T_4} e^{2u(z)} dx\, dy \\ &\leqq (1+\varepsilon)^2 \Phi^2(R) \iint_{\omega} |z|^{2(\alpha-\varepsilon)} dx\, dy. \end{aligned}$$

Für alle $t \geqq \max(T_4/\lambda_0, T_4/\lambda_1)$ sind gleichzeitig die Ungleichungen (37), (53) und (55) erfüllt. Daraus schließen wir, daß

$$(56) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{L_t^2}{A_t} = \frac{\left(\int_\gamma |z|^\alpha |dz|\right)^2}{\iint_\omega |z|^{2\alpha} dx\, dy}.$$

Ist $\alpha \leqq -1$ und enthält ω den Ursprung nicht, so hat man bei der Abschätzung von A_t nur wenig anders vorzugehen. Die Einführung des Parameters λ ist in diesem

Falle überflüssig: man setzt also in obiger Betrachtung durchwegs $\lambda=1$ und $\omega^*(\lambda)=\omega^*(1)=\omega$. Auf die Annahme $\varepsilon<\alpha+1$ kann – und muß – diesmal verzichtet werden. Der Beweis schließt bereits mit Ungleichung (52); diese impliziert zusammen mit (37) direkt Beziehung (56).

Ist $\alpha\leqq-1$ und enthält ω den Ursprung, so wählt man zunächst zwei Zahlen ε_0, $0<\varepsilon_0\leqq\varepsilon$, und λ_0, $0<\lambda_0\leqq 1$, mit der Eigenschaft, daß

$$(57)\qquad (1-\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}} \iint_{\omega^*(\lambda_0)} |z|^{2(\alpha+\varepsilon_0)}\,dx\,dy>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Wieder wird A_t nach obiger Methode abgeschätzt. Dabei ist aber auf folgende Modifikationen zu achten: (1) ε ist durch ε_0 zu ersetzen; (2) λ wird der fixierte Wert λ_0 erteilt; (3) die Integrale in (47) und (48) sind beide über das Gebiet $\omega^*(\lambda_0)$ zu erstrecken. Aus der linken Hälfte der so resultierenden Ungleichung (52) und (57) schließen wir, daß

$$(58)\qquad A_t>\frac{1}{\varepsilon}\,\Phi^2(R)$$

für alle genügend großen Werte von t. Die rechte Hälfte von (37) und (58) implizieren

$$(59)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{L_t^2}{A_t}=0.$$

Aus (19) und (56), resp. (19) und (59), folgt (16). Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 6. *Sei u eine in C als Differenz $u=u_1-u_2$ von subharmonischen Funktionen darstellbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *das Maß $\mu=-\Delta u/2\pi$ ist von endlicher totaler Variation*[5]*;*

(2) *e^{2u} ist lokal summierbar;*

(3) *es ist*

$$\int_\sigma e^{u(z)}\,|dz|=\infty$$

für jeden lokal rektifizierbaren, ins Unendliche führenden Weg σ.

Dann gilt die Beziehung (16), *wobei den Bezeichnungen γ, γ_t, ω, ω_t und α dieselbe Bedeutung zukommt wie im Lemma.*

Bemerkung. Satz 3 ist offensichtlich in Satz 6 enthalten.

Beweis von Satz 6. Sei r_0 eine positive Zahl mit der Eigenschaft, daß

$$(60)\qquad \mu(\{z\,|\,|z|=r_0\})=0.$$

Wir definieren in C subharmonische Funktionen v_1 und v_2 durch

$$(61)\qquad v_j(z)=\begin{cases} h_j(z) & \text{für}\quad |z|<r_0,\\ u_j(z) & \text{für}\quad |z|\geqq r_0,\end{cases}$$

wobei h_j die beste harmonische Majorante (s. p. 32 in [*14*]) von u_j für das Innere des Einheitskreises bezeichnet ($j=1,2$). Die Funktion $v=v_1-v_2$ besitzt alle in

[5] Der Laplaceoperator ist hier im Sinne der Theorie der Distribution zu verstehen.

Satz 6 von u geforderten Eigenschaften. (Die Funktion e^{2v} ist offenbar lokal summierbar in $\{z \,|\, |z| \neq r_0\}$. Daß sie diese Bedingung auch in einer Umgebung von $\{z \,|\, |z| = r_0\}$ erfüllt, folgt daraus, daß zufolge (60) das Maß $\nu = -\Delta v / 2\pi$ die Eigenschaft besitzt, daß $\nu(\{z\}) = O$ für jeden Punkt z auf diesem Kreise.)

Auf Grund von Satz 2 in [13] schließen wir auf die Existenz der Darstellung

$$v(z) = -\int_C \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu(e_\zeta) + c. \tag{62}$$

Dabei ist $\nu = -\Delta v / 2\pi$ und c eine Konstante. Wir dürfen also das obige Lemma auf die Funktion v anwenden. Es folgt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_t} e^v |dz|\right)^2}{4\pi \iint_{\omega_t} e^{2v} dx\,dy} = \frac{\left(\int_\gamma |z|^\alpha |dz|\right)^2}{4\pi \iint_\omega |z|^{2\alpha} dx\,dy}, \tag{63}$$

wobei $\alpha = -\nu(C) = -\mu(C)$. Wir werden nun zeigen, daß

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_t} e^v |dz|\right)^2}{\iint_{\omega_t} e^{2v} dx\,dy} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\int_{\gamma_t} e^u |dz|\right)^2}{\iint_{\omega_t} e^{2u} dx\,dy}. \tag{64}$$

Damit wird Satz 6 bewiesen sein. Da $v(z) = u(z)$ für $|z| \geqq r_0$, ist (64) sicherlich erfüllt, wenn ω den Ursprung nicht enthält. Aus demselben Grunde ist (64) richtig, wenn das eine Nennerintegral – und damit auch das andere – mit t gegen unendlich strebt. Liegt der Ursprung in ω und bleiben die Nennerintegrale in (64) beschränkt, so besitzt die durch das Linienelement $e^{v(z)}|dz|$ erzeugte zweidimensionale Mannigfaltigkeit einen endlichen Flächeninhalt. Also (Th. 12, p. 59 in [11]) beträgt ihre Curvatura integra 2π, und es ist $\alpha = -\nu(C) = -1$. Wir entnehmen der Beziehung (63) – deren rechten Seite in diesem Fall der Wert 0 zuzuschreiben ist –, daß die linke Seite von (64) verschwindet. Daraus folgt, daß die Zählerintegrale in (64) – die für genügend große t übereinstimmen – gegen 0 konvergieren. Also existiert auch der Limes auf der rechten Seite von (64) und besitzt den Wert 0: (64) ist in jedem Fall erfüllt. Q.e.d.

3. Beweis von Satz 2

Sei u eine in C als Differenz subharmonischer Funktionen, $u = u_1 - u_2$, darstellbare Funktion, welche die in Satz 6 formulierten Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt.

Diese drei Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn der durch die Abstandsfunktion

$$\rho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma \in A(z_1, z_2)} \int_\gamma e^{u(z)} |dz| \tag{65}$$

($A(z_1, z_2)$ = Menge der z_1 mit z_2 verbindenden Polygone in C) erzeugte metrische Raum $\mathfrak{F}$ eine vollständige, zur euklidischen Ebene homoeomorphe Mannigfaltigkeit von beschränkter Krümmung (nach der Definition von ALEXANDROW [1]) darstellt, deren Krümmung eine endliche totale Variation besitzt. In diesem Falle ist $C=2\pi\,\mu(C)$, wobei $\mu=-\Delta u/2\pi$, die Curvatura integra von $\mathfrak{F}$. (Der Laplace-operator ist hier wiederum im verallgemeinerten Sinne aufzufassen.)

Es bezeichne $L(u;\gamma_j)$ die Länge von γ_j und $A(u;\omega_j)$ den Flächeninhalt von ω_j, beide in der Metrik (65) gemessen. Es ist

$$A(u;\omega_j)=\iint_{\omega_j} e^{2u}\,dx\,dy \tag{66}$$

$(j=1,2,3,\ldots)$. Ist die Funktion u stetig, so ist die Kurve γ_j genau dann in der Metrik (65) rektifizierbar, wenn sie euklidisch rektifizierbar ist, und es gilt

$$L(u;\gamma_j)=\int_{\gamma_j} e^{u}\,|dz| \tag{67}$$

$(j=1,2,3,\ldots)$. Für die Definition und Berechnung der Länge im allgemeinen Fall sei der Leser auf [*12*] verwiesen.

Satz 7. A. *Es gilt die Ungleichung*

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{L^2(u;\gamma_j)}{4\pi A(u;\omega_j)}\geqq\min\bigl(1,1-\mu(C)\bigr). \tag{68}$$

B. *Es existiert eine Folge von Jordankurven* $\{\gamma_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, *deren Innengebiete* $\{\omega_n\}$ *die Ebene ausschöpfen, so daß*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^2(u;\gamma_n)}{4\pi A(u;\omega_n)}=\min\bigl(1,1-\mu(C)\bigr). \tag{69}$$

Bemerkung. Satz 2 ist offenbar in Satz 7 enthalten.

Beweis von Satz 7A. Wir dürfen annehmen, daß $\mu(C)<1$ ist, da es nur in diesem Falle etwas zu beweisen gilt. Diese Annahme impliziert (Th. 12, p. 59 in [*11*])

$$A(u;\omega_j)\to\infty \quad \text{für} \quad j\to\infty. \tag{70}$$

Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Wir wählen zunächst $R_1>0$ derart, daß[6]

$$\mu^+(K_1)+\mu^-(K_1)>\|\mu\|-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{71}$$

Dabei bezeichnet $\mu=\mu^+-\mu^-$ die Jordansche Zerlegung des Maßes $\mu=-\Delta u/2\pi$ und $\|\mu\|=\mu^+(C)+\mu^-(C)$ dessen totale Variation.

Dann wählen wir $R_2>R_1$ derart, daß

$$\left|\log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right|\right|<\frac{1}{5\,\|\mu\|}\log(1+\varepsilon) \tag{72}$$

für $|\zeta|\leqq R_1$ und $|z|\geqq R_2$. (Ist $\|\mu\|=0$, so setze man $R_2=R_1$.)

Schließlich wählen wir $R_3>R_2$ so, daß

$$\iint_{K_3-K_2} e^{2u}\,dx\,dy>(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{5}}\iint_{K_3} e^{2u}\,dx\,dy. \tag{73}$$

[6] Wir benützen die Bezeichnungen $K_j=\{z\,|\,|z|\leqq R_j\}$ für $j=1,2,3$.

Wegen (70) ist eine solche Wahl stets möglich. Wir definieren

$$\begin{aligned} v(z) &= u(z) + \int_{K_1} \log|z-\zeta|\, d\mu(e_\zeta) - \mu(K_1)\log|z| \\ &= u(z) + \int_{K_1} \log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right| d\mu(e_\zeta). \end{aligned} \tag{74}$$

Die Funktion v ist in C als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbar. Zufolge (72) gilt für $|z| \geqq R_2$ die Abschätzung

$$|v(z)-u(z)| < \tfrac{1}{5}\log(1+\varepsilon). \tag{75}$$

Sei j_0 eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß für alle $j > j_0$ die Kreisscheibe K_3 in ω_j enthalten ist. Wir vergleichen die von den Linienelementen $e^{u(z)}|dz|$ und $e^{v(z)}|dz|$ erzeugten Metriken miteinander. Unter Anwendung von (73) und (75) erhalten wir die für alle $j > j_0$ gültigen Ungleichungen

$$L(u;\gamma_j) > (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{5}} L(v;\gamma_j) \tag{76}$$

und

$$A(u;\omega_j) < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{5}} \iint_{\omega_j - K_2} e^{2u}\, dx\, dy < (1+\varepsilon)^{\frac{3}{5}} \iint_{\omega_j - K_2} e^{2v}\, dx\, dy < (1+\varepsilon)^{\frac{4}{5}} A(v;\omega_j). \tag{77}$$

Das Maß $\nu = -\Delta v/2\pi$ stimmt auf der Menge $C - K_1$ überein mit dem Maß μ. Auf K_1 reduziert sich ν auf die im Ursprung angebrachte Punktmasse $\mu(K_1)$. Wegen (71) ist

$$\mu^+(\omega_j - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$|\mu(K_1) - \mu(C)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

somit für $j > j_0$

$$\begin{aligned} \nu^+(\omega_j) &= \nu^+(\omega_j - K_1) + \nu^+(K_1) \\ &= \mu^+(\omega_j - K_1) + \max(\mu(K_1), 0) < \max(\mu(C), 0) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{78}$$

Es gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$\frac{L^2(v;\gamma_j)}{4\pi A(v;\omega_j)} \geqq 1 - \nu^+(\omega_j). \tag{79}$$

Dieses Resultat kann unter den hier zugrunde liegenden Regularitätsvoraussetzungen auf zwei ganz verschiedene Arten bewiesen werden: entweder im Rahmen der Theorie der Mannigfaltigkeiten von beschränkter Krümmung unter Anwendung der Methode des Schneidens und Verheftens (Alexandrow [*1*]) oder mit Hilfe von potentialtheoretischen Überlegungen [*10*]. Aus den Ungleichungen (76) bis (79) schließen wir, daß

$$\frac{L^2(u;\gamma_j)}{4\pi A(u;\omega_j)} > \frac{1 - \max(\mu(C), 0) - \varepsilon}{1+\varepsilon}$$

für alle $j > j_0$. Damit ist Satz 7A bewiesen.

Beweis von Satz 7B. Nach dem Cohn-Vossenschen Satz [3] ist $\mu(C)\leqq 1$ (s. Th.10, p. 55 in [11] für die hier benötigte Allgemeinheit). Wir behandeln getrennt die Fälle $0\leqq\mu(C)\leqq 1$ und $\mu(C)<0$.

(I) Ist $0\leqq\mu(C)\leqq 1$, so definieren wir $\omega_n=\{z\,|\,|z|<n\}$ für $n=1,2,3,\ldots$. Es folgt aus Satz 6

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^2(u;\gamma_n)}{4\pi A(u;\omega_n)}=1-\mu(C). \tag{80}$$

Dieses Resultat ist unter etwas stärkeren Regularitätsvoraussetzungen bereits von Finn [6] bewiesen worden (s. Einleitung).

(II) Ist $\mu(C)=-\alpha<0$, so ordnen wir zunächst jeder natürlichen Zahl n ein von einer stückweise analytischen Jordankurve $\bar{\gamma}_n$ berandetes Gebiet $\bar{\omega}_n$ zu, das den Ursprung enthält und für welches

$$1-\frac{1}{n}<\frac{\left(\int\limits_{\bar{\gamma}_n}|z|^{\alpha}\,|dz|\right)^2}{4\pi\iint\limits_{\bar{\omega}_n}|z|^{2\alpha}\,dx\,dy}<1+\frac{1}{n}. \tag{81}$$

Dies geschieht folgendermaßen: Sei

$$\omega=\{z\,|\,\rho_\alpha(1,z)<\rho_\alpha(1,0)\},$$

wobei ρ_α die Abstandsfunktion der durch das Linienelement $|z|^\alpha\,|dz|$ erzeugten Metrik bezeichnet. Diese Metrik ist außerhalb des Ursprungs lokal euklidisch. Im hier betrachteten Fall ($\alpha>0$) ist ω (versehen mit der Metrik $|z|^\alpha\,|dz|$) ein zu einer euklidischen Kreisscheibe isometrisches Gebiet. Es gilt daher

$$\left(\int\limits_{\gamma}|z|^\alpha\,|dz|\right)^2=4\pi\iint\limits_{\omega}|z|^{2\alpha}\,dx\,dy,$$

wobei γ den Rand von ω bezeichnet. Definieren wir

$$\bar{\omega}_n=\omega\cup\{z\,|\,|z|<\delta_n\},$$

so ist bei Wahl eines genügend kleinen $\delta_n>0$ die Ungleichung (81) erfüllt. Außerdem enthält $\bar{\omega}_n$ den Ursprung, und der Rand $\bar{\gamma}_n$ von $\bar{\omega}_n$ ist stückweise analytisch.

Nun definieren wir

$$\omega_n=\{t_n z\,|\,z\in\bar{\omega}_n\}.$$

Dabei soll $t_n>0$ so groß gewählt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: (1) ω_n enthält die Kreisscheibe vom Radius n um den Ursprung; (2) es ist

$$\left|\frac{\left(\int\limits_{\bar{\gamma}_n}|z|^\alpha\,|dz|\right)^2}{4\pi\iint\limits_{\bar{\omega}_n}|z|^{2\alpha}\,dx\,dy}-\frac{L^2(u;\gamma_n)}{4\pi A(u;\omega_n)}\right|<\frac{1}{n}, \tag{82}$$

wobei γ_n den Rand von ω_n bezeichnet. Daß Bedingung (2) stets befriedigt werden kann, folgt aus Satz 6.

Bedingung (1) impliziert, daß die Gebietsfolge $\{\omega_n\}$ für $n\to\infty$ die Ebene ausschöpft. Aus (81) und (82) schließen wir, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^2(u;\gamma_n)}{4\pi A(u;\omega_n)} = 1 .$$

Damit ist Satz 7B bewiesen.

Literatur

[1] ALEXANDROW, A.D., Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Berlin: Akademie-Verlag 1955.

[2] BLANC, CH., & F. FIALA, Le type d'une surface et sa courbure totale. Comment. Math. Helv. **14**, 230—233 (1941/42).

[3] COHN-VOSSEN, S., Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen. Compositio Math. **2**, 69—133 (1935).

[4] FIALA, F., Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. Comment. Math. Helv. **13**, 293—346 (1940/41).

[5] FINN, R., On normal metrics, and a theorem of Cohn-Vossen. Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 772—773 (1964).

[6] FINN, R., On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large. Comment. Math. Helv. **40**, 1—30 (1965).

[7] HARDY, G.H., J.E. LITTLEWOOD, & G. PÓLYA, Inequalities. Second edition, Cambridge 1952.

[8] HARTMAN, P., Geodesic parallel coordinates in the large. Amer. J. of Math. **86**, 705—727 (1964).

[9] HOPF, H., u. W. RINOW, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. Math. Helv. **3**, 209—225 (1931).

[10] HUBER, A., On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature. Annals of Math. **60**, 237—247 (1954).

[11] HUBER, A., On subharmonic functions and differential geometry in the large. Comment. Math. Helv. **32**, 13—72 (1957).

[12] HUBER, A., Zum potentialtheoretischen Aspekt der Alexandrowschen Flächentheorie. Comment. Math. Helv. **34**, 99—126 (1960).

[13] HUBER, A., Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen. Comment. Math. Helv. **41**, 105—136 (1966/67).

[14] RADÓ, T., Subharmonic functions. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete V/1. Berlin: Springer 1937.

[15] RESCHETNJAK, I.G., Isotherme Koordinaten auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung [Russisch]. Sibirskii Math. J. **1**, 88—116, 248—276 (1960).

[16] RIESZ, F., Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, I et II. Acta Math. **48**, 329—343 (1926); **54**, 321—360 (1930).

[17] WINTNER, A., On the local rôle of the logarithmic potential in differential geometry. Amer. J. of Math. **75**, 679—690 (1953).

Eidgenössische Technische Hochschule
Zürich

(Eingegangen am 18. November 1966)