Inventiones math. 20, 73–86 (1973)
© by Springer-Verlag 1973

Über einige Spezialisierungen der Hilbertschen Modulformen in 2 Variablen

M. Eichler (Basel)

Einleitung

Ω sei ein reeller quadratischer Zahlkörper, $\mathfrak{o}$ seine Hauptordnung und

$$\Gamma_\Omega=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}:\ \alpha,\ldots\in\mathfrak{o},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1\right\}$$

die zu Ω gehörige Hilbertsche Modulgruppe. Eine Hilbertsche Modulform in 2 Variablen z_1, z_2 vom Gewicht k ist eine in $(z_1, z_2)\in H^2$ (dem Produkt von 2 komplexen oberen Halbebenen) holomorphe Funktion, welche den Funktionalgleichungen

$$f\left(\frac{\alpha_i z_i+\beta_i}{\gamma_i z_i+\delta_i}\right)\prod_{i=1}^{2}(\gamma_i z_i+\delta_i)^{-k}=f(z_i),\qquad \begin{pmatrix}\alpha & \delta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\in\Gamma_\Omega$$

genügt; dabei bedeuten $\alpha\to\alpha_i$ usw. $(i=1,2)$ die beiden isomorphen Abbildungen $\Omega\to\Omega_i\subset\mathbb{R}$.

Durch die Spezialisierungen

$$z_i=v_i\zeta, \tag{1}$$

wobei ζ eine Variable in der oberen Halbebene und $v\in\Omega$ eine total positive Zahl ist, geht eine Hilbertsche Modulform vom Gewicht k in eine elliptische Modulform

$$g(\zeta)=f(v_1\zeta, v_2\zeta) \tag{2}$$

vom Gewicht $2k$ über, welche zu der Gruppe

$$\Gamma_1(v)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}: ad-bc=1;\ a,\ldots\in\mathbb{Q};\ \begin{pmatrix}v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\in\Gamma_\Omega\right\} \tag{3}$$

gehört. $\Gamma_1(v)$ ist mit der elliptischen Modulgruppe $\Gamma(1)$ kommensurabel, und wenn $v\in\mathfrak{o}$, so ist in einer üblichen Abkürzung

$$\Gamma_1(v)=\Gamma_0(N), \tag{3a}$$

und N die kleinste natürliche durch v teilbare Zahl.

Weiter sei $\mathfrak{J}$ der Ring der Hilbertschen Modulformen von geradem Gewicht und $\mathfrak{J}_1$ das Bild von $\mathfrak{J}$ bei dieser Spezialisierung. Der Kern ist ein Primideal $\mathfrak{P}$ bzgl. $\mathfrak{J}$. Wir haben damit eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{P} \to \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}_1 \to 0, \tag{4}$$

wobei die 2. Abbildung die Injektion, die 3. die Surjektion bedeuten. Hier, wie im folgenden immer, sind alle Abbildungen komogene Abbildungen graduierter Moduln vom Grad 0. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

Es sei $v \in \mathfrak{o}$ und $n(v)$ eine ungerade Primzahl. Ferner sei der Körper der elliptischen Modulfunktionen zu $\Gamma_0(n(v))$ nicht hyperelliptisch (was bekanntlich fast immer zutrifft) ([1, 10]). *Dann enthält $\mathfrak{J}_1$ sämtliche Modulformen zu $\Gamma_0(n(v))$ von durch* 4 *teilbarem und genügend großem Gewicht.*

Im Verlauf des Beweises ergibt sich direkt keine explizite Abschätzung des kleinsten Gewichts, von dem an alle Modulformen zu $\Gamma_0(n(v))$ in $\mathfrak{J}_1$ enthalten sind. Aber da $\mathfrak{J}$ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, gibt es auch für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}_1$ endliche Erzeugendensysteme, und das kleinste solche Gewicht läßt sich durch ein endliches Rechenverfahren ermitteln. Der Beweis für die Endlichkeit von $\mathfrak{J}$ ist konstruktiv [2].

Eine verwandte, aber leichtere Frage wurde von Freitag [5] behandelt, welche, auf unseren Fall zugeschnitten, folgendermaßen lautet: Erhält man durch die Spezialisierung (1), (2) den vollen Körper der Modulfunktionen zu $\Gamma_1(v)$? Die Antwort ist hier positiv. Die Frage für Modulformen anstelle von Modulfunktionen wurde in zwei Fällen behandelt. Der bekannte Operator Φ welcher Siegelsche Modulformen n-ten Grades in solche $(n-1)$-ten Grades überführt, liefert alle Modulformen der letzteren Art, deren Gewichte hinreichend groß sind (Klingen [8]). Ferner studierte Resnikoff [11] eine gewisse Abbildung der Siegelschen Modulformen 2. Grades auf Hilbertsche Modulformen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und speziell den Kern dieser Abbildung.

Es ist klar, daß unser Satz die Normalität der durch (1) gelieferten Kurve impliziert. Das ließe sich natürlich viel einfacher durch lokale Betrachtungen verifizieren. Das Umgekehrte trifft aber nicht zu. Es sei nämlich $l > 1$ und $\mathfrak{J}_1^{(4l)}$ der Ring der Modulformen in ζ bzgl. $\Gamma_0(n(v))$ mit durch $4l$ teilbarem Gewicht. Weiter entstehe $\mathfrak{J}_1'$ aus $\mathfrak{J}_1^{(4l)}$ durch Adjunktion einer Form vom Gewicht $\equiv 4 \mod 4l$. Der Quotientenkörper von $\mathfrak{J}_1'$ ist derselbe wie der von $\mathfrak{J}_1^{(4l)}$, und die zugehörige Kurve ist auch dieselbe (es werden natürlich nur Quotienten von Modulformen gleichen Gewichts gebildet). Jedoch $\mathfrak{J}_1'$ ist nicht ganz abgeschlossen, denn alle Modulformen eines Gewichts $\not\equiv 0 \mod 4l$ in $\mathfrak{J}_1'$ haben gemeinsame Nullstellen, was für den ganzen Ring $\mathfrak{J}_1$ sicher nicht zutrifft.

Nach dieser Bemerkung geht die Theorie der Modulformen über die Algebraische Geometrie der Modulmannigfaltigkeiten hinaus. Man kennt heute auch Invarianten von $\mathfrak{J}$, die sich nicht ganz aus geometrischen Invarianten herleiten. Solche sind z.B. die Funktoren $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{i}}^{\mu}(\mathfrak{J}, \mathfrak{i})$ (Senn [12]), wo $\mathfrak{i}$ den Ring irgendeines projektiven Koordinatensystems bezeichnet (vgl. hierzu § 3).

Unser Beweis verläuft folgendermaßen: falls $n(\nu)$ eine Primzahl ist, werden alle Modulformen zu $\Gamma_0(n(\nu))$ vom Gewicht 2 durch Thetareihen zu Quaternionen-Algebren aufgespannt [1, 4, 6]. Wenn der Körper zu $\Gamma_0(n(\nu))$ außerdem nicht hyperelliptisch ist (vgl. [1, 10]), so werden alle Modulformen von geradem Gewicht durch Potenzprodukte solcher Thetareihen und deren Linearkombinationen geliefert (§ 2). Produkte von je zwei solchen quaternären Thetareihen erhält man durch die Spezialisierung (2) aus gewissen quaternären Thetareihen zum Körper Ω. Diese letzteren sind zwar nicht Modulformen bzgl Γ_Ω, jedoch bzgl. einer gewissen Untergruppe

$$\tilde{\Gamma}_\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_\Omega, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b\nu \\ c\nu^{-1} & d \end{pmatrix} \bmod q \right\}, \tag{5}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n(\nu))$$

ist; q bedeutet eine ganze rationale Zahl, die sich im Verlauf des Beweises ergeben wird, die aber sonst keine weitere Rolle spielen wird.

Die Modulformen geraden Gewichts zu $\tilde{\Gamma}_\Omega$ bilden einen Integritätsbereich $\tilde{\mathfrak{J}}$, und die Spezialisierung (2) bildet auch diesen auf einen Integritätsbereich $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ von Modulformen bzgl. $\Gamma_0(n(\nu))$ ab, deren Gewichte durch 4 teilbar sind. Auch diese Abbildung beschreiben wir durch eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \tilde{\mathfrak{P}} \to \tilde{\mathfrak{J}} \to \tilde{\mathfrak{J}}_1 \to 0. \tag{6}$$

Hier ist nun $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ bekannt, nämlich der Ring aller Modulformen zu $\Gamma_0(n(\nu))$ von durch 4 teilbarem Gewicht.

Bis zu dieser Stelle gründen sich die Beweise hauptsächlich auf die Zahlentheorie; dabei wäre die Beschränkung auf die Variablenzahl 2 sogar entbehrlich. Im letzten Schritt (§ 3) wird gezeigt, daß $\mathfrak{J}_1$ und $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ bis auf Modulformen von kleinem Gewicht übereinstimmen. Das ist die Behauptung unseres Satzes. Hierbei bedienen wir uns algebraischer, modultheoretischer Methoden, welche in [3] entwickelt wurden. Jetzt ist die Voraussetzung wesentlich, daß die Variablenzahl 2 sei.

§ 1. Einige Thetafunktionen

Es gibt eine Quaternionen-Algebra Φ/Ω, welche an den beiden unendlichen Primstellen von Ω und sonst nirgends verzweigt ist.

Hilfssatz 1. $\mathfrak{d}$ *bedeute die Differente von* Ω. *Es gibt ein linksseitiges (oder rechtsseitiges) Ideal* $\mathfrak{M}$ *bzgl. einer maximalen Ordnung von* Φ, *dessen Norm* $n_{\Phi/\Omega}(\mathfrak{M})=\mathfrak{d}^{-1}$ *ist. Es besitzt bzgl.* $\mathfrak{o}$ *eine Modulbasis aus* 4 *Elementen.*

Beweis. Die Existenz eines solchen $\mathfrak{M}$ ist klar, bis auf die Behauptung, daß $\mathfrak{M}$ ein freier $\mathfrak{o}$-Modul ist. Es ist $\mathfrak{d}=(\sqrt{d})$ oder $=(2\sqrt{d})$, wnn $\Omega=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und d ganz und quadratfrei gewählt wird. In jedem Falle ist $\mathfrak{d}$ ein Hauptideal. Wir gehen von 4 bzgl. Ω linear unabhängigen $\alpha_\nu \in \Phi$ aus. Die Substitutionen, welche die α_ν in 4 Elemente aus einer maximalen Ordnung $\mathfrak{O}$ von Φ transformieren, bilden ein Rechtsideal B bzgl. des Matrizenringes $M(4,\mathfrak{d})$. Die Norm von B ist die Quadratwurzel aus dem Quotienten der Diskriminanten $|s_{\Phi/\Omega}(\alpha_\mu\alpha_\nu)|$ des $\mathbb{Z}$-Moduls mit der Basis α_ν und der Diskriminante von $\mathfrak{O}$. Letztere ist das 1-Ideal. Also ist die Norm von B gleich $|s_{\Phi/\Omega}(\alpha_\mu\alpha_\nu)|^{-\frac{1}{2}}$, ein Hauptideal. Aus dem Grunde ist auch B ein Hauptideal $(b_{\mu\nu})\,M(4,\mathfrak{o})$, und die Substitution $(b_{\mu\nu})$ transformiert die α_ν in eine Basis β_ν von $\mathfrak{O}$. Denselben Schluß wenden wir auf das Ideal C derjenigen Substitutionen an, welche die β_ν in 4 Elemente aus $\mathfrak{M}$ transformieren. Die Norm dieses Ideals ist $\mathfrak{d}^{-2}$, also auch ein Hauptideal. Daher ist $C=(c_{\mu\nu})\,M(4,\mathfrak{o})$, und $(c_{\mu\nu})$ transformiert die β_ν in eine Basis von $\mathfrak{M}$.

Hilfssatz 2. *Mit einer* $\mathfrak{o}$-*Basis* γ_μ *von* $\mathfrak{M}$ *bilden wir die total positiv definite quaternäre quadratische Form*

$$\varphi(\xi_\mu)=n_{\Phi/\Omega}(\textstyle\sum \gamma_\mu\,\xi_\mu) \tag{7}$$

und deren Bilder $\varphi_1(\xi_{\mu 1})$, $\varphi_2(\xi_{\mu 2})$ *in* Ω_1,Ω_2. *Mit einer Basis* $1,\omega$ *von* $\mathfrak{o}/\mathbb{Z}$ *zerlegen wir ferner*

$$\xi_\mu=x_\mu+x_{\mu+4}\,\omega \tag{8}$$

und bilden endlich die quadratische Form

$$F(z_1,z_2;\,x_\mu)=z_1\,\varphi_1(\xi_{\mu 1})+z_2\,\varphi_2(\xi_{\mu 2}) \tag{9}$$

in 8 *Variablen* x_μ *und mit zwei Parametern* z_1,z_2.

Die quadratische Form mit der inversen Koeffizientenmatrix $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\right)^{-1}$ *läßt sich dann für jede Primstelle p padisch ganzzahlig in* $F\left(\dfrac{1}{z_1},\dfrac{1}{z_2};\,x_\mu\right)$ *transformieren.*

Beweis. Für eine endliche Primstelle p von $\mathbb{Q}$ ist die p-adische Erweiterung $\mathfrak{o}_p$ von $\mathfrak{o}$ entweder die Hauptordnung einer quadratischen Erweiterung $\Omega_p/\mathbb{Q}_p$ oder die direkte Summe von zwei mit $\mathbb{Z}_p$ isomorphen Integritätsbereichen. In $\mathfrak{o}_p$ läßt sich $\varphi(\xi_\mu)$ unimodular in

$$\varphi_0(\xi_\mu)=\frac{1}{\delta}\,(\xi_1\,\xi_2+\xi_3\,\xi_4)$$

transformieren, wo $(\delta)=\mathfrak{d}$ bedeutet. Für alle $p>2$ ist $\mathfrak{d}_p=\mathbb{Z}_p[1,\sqrt{d}]$. In diesen Fällen ist die Koeffizientenmatrix der analog gebildeten quadratischen Form $F_0=z_1\varphi_{01}+z_2\varphi_{02}$ gleich $\begin{pmatrix} G_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{pmatrix}$ mit

$$G_0=G_0(z_1,z_2)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{z_1-z_2}{\sqrt{d}} & 0 & z_1+z_2 \\ \dfrac{z_1-z_2}{\sqrt{d}} & 0 & z_1+z_2 & 0 \\ 0 & z_1+z_2 & 0 & (z_1-z_2)\sqrt{d} \\ z_1+z_2 & 0 & (z_1-z_2)\sqrt{d} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$G_0^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_0\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Behauptung für $p>2$.

Der Schluß gilt auch für $p=2$, falls $\mathfrak{o}=\mathbb{Z}[1,\sqrt{d}]$, also $d\not\equiv 1 \bmod 4$ ist. Im anderen Falle erhält man die Koeffizientenmatrix von $\varphi_0(\xi_\mu)$ als $\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_1 \end{pmatrix}$ mit

$$G_1=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist

$$G_1^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_1\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Behauptung ist wieder klar.

Hilfssatz 3. *Wenn ν eine total positive Einheit von Ω ist, so ist $s_{\Omega/Q}(\gamma\varphi(\xi_\mu))$ eine ganzzahlige positiv definite quadratische Form der Diskriminante* 1.

Wenn ν eine total positive ganze Zahl aus Ω und wenn $n(\nu)$ eine Primzahl ist, so gehören die folgenden Formen zum gleichen Geschlecht:

$$s_{\Omega/Q}(\nu\,\varphi(\xi_\mu)) \sim \chi_1(x_1, \dots, x_4) + \chi_2(x_5, \dots, x_8); \tag{10}$$

dabei sind χ_1, χ_2 definite Formen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ der Diskriminante $n(\nu)^2$ und der Stufe $n(\nu)$.

Beweis. Die Diskriminante der linken Form ergibt sich im Beweis des vorigen Hilfssatz nebenher als $n(\nu)^4$. Aus jenem Hilfssatz geht hervor, daß $s_{\Omega/Q}(\nu\,\varphi(\xi_\mu)) = F(\nu_1, \nu_2;\, x_\mu)$ nur ganze rationale Zahlen darstellt, und daß das $n(\nu)$-fache der inversen Form dieselbe Eigenschaft hat.

Auch die rechts in (10) stehenden Formen haben diese Eigenschaft. Damit ist das Geschlecht eindeutig gekennzeichnet, wenn man noch die Definitheit hinzunimmt. Man beachte dabei, daß wegen des „Normensatzes für Algebren" alle Formen $\nu\,\varphi(\xi)$ in Ω äquivalent sind.

Die erste Behauptung des Hilfssatzes (ν = Einheit) ist klar.

Wir betrachten im folgenden die Thetareihe

$$\vartheta(z_1, z_2) = \sum_{(\xi) \in \mathfrak{o}^4} e^{\pi i (z_1 \varphi_1(\xi_{\mu 1}) + z_2 \varphi_2(\xi_{\mu 2}))}. \tag{11}$$

Nach Kloosterman [9] stellt sie eine Modulform des Gewichts 2 zur Hilbertschen Modulgruppe Γ_Ω dar. Die Spezialisierung (2) liefert

$$\vartheta_1(\zeta) = \vartheta(\nu_1 \zeta, \nu_2 \zeta) = \sum_{(x) \in \mathbb{Z}^8} e^{\pi i \zeta s_{\Omega/\mathbb{Q}}(\nu \varphi(\xi_\mu))}, \tag{12}$$

das ist nach Hilfssatz 3 unter den erwähnten Voraussetzungen eine Modulform vom Gewicht 4 zur Gruppe $\Gamma_0(n(\nu))$.

§ 2. Die Gruppe $\tilde{\Gamma}_\Omega$

Wir nehmen im folgenden immer an, daß $\nu \in \mathfrak{o}$ und total positiv sei. Ferner sei $n(\nu)$ eine Primzahl.

Alle Modulformen in ζ vom Gewicht 2 und zur Stufe $n(\nu)$ werden durch Linearkombinationen von quaternären Thetareihen dargestellt [1, 4, 6]. Wenn der zugehörige Körper der Modulfunktionen nicht hyperelliptisch ist (und das ist fast immer so), so werden alle Modulformen vom Gewicht $\equiv 0 \bmod 4$ durch Produkte aus je zwei Faktoren

$$\sum_{(x) \in \mathbb{Z}^4} e^{\pi i \zeta \chi_1(x_\mu)} \sum_{(x) \in \mathbb{Z}^4} e^{\pi i \zeta \chi_2(x_\mu)} \tag{13}$$

erzeugt [1]. Wenn es nun zu jedem Paar χ_1, χ_2 eine quadratische Form $\varphi(\xi_\mu)$ der oben beschriebenen Art gäbe, für welche die Formen (10) sogar äquivalent sind, so wäre damit gezeigt, daß man durch die Spezialisierung der Thetareihen (11) den vollen Ring der Modulformen zu $\Gamma_0(n(\nu))$ mit durch 4 teilbarem Gewicht erhält.

Das ist zwar i. allg. nicht möglich, aber die Formen (10) sind nach Hilfssatz 3 wenigstens verwandt. Es gibt daher nach dem Satz von Minkowski-Hasse für jedes Paar χ_1, χ_2 eine lineare Transformation der Determinante 1 und mit rationalen Koeffizienten, welche $\chi_1(x_\mu)+\chi_2(x_{\mu+4})$ in $s_{\Omega/Q}(\nu\,\varphi(\xi_\mu))$ überführt. Dabei kann man noch den Hauptnenner q der Koeffizienten zu einer beliebigen Zahl teilerfremd annehmen.

Man kann das so ausdrücken: es gibt ein Gitter, d.h. einen $\mathbb{Z}$-Modul $\mathfrak{L}$ von Quadrupeln $(\xi_1, \ldots, \xi_4)$ derart, daß die Gesamtheiten

$$\{s(\nu\,\varphi(\xi_\mu)) \colon (\xi_\mu)\in\mathfrak{L}\} = \{\chi_1(x_\mu)+\chi_2(x_{\mu+4}) \colon (x_\mu)\in\mathbb{Z}^8\}$$

übereinstimmen. Wir führen nun die Funktionen

$$\vartheta(z_1, z_2) = \sum_{(\xi_\mu)\in\mathfrak{L}} e^{\pi i (z_1\varphi_1(\xi_{\mu 1})+z_2\varphi_2(\xi_{\mu 2}))} \tag{14}$$

ein. Das Gitter $\mathfrak{L}$ war so konstruiert worden, daß

$$\vartheta_1(\zeta) = \vartheta(\nu_1\zeta, \nu_2\zeta) = \sum_{(x_\mu)\in\mathbb{Z}^4} e^{\pi i \zeta\chi_1(x_\mu)} \cdot \sum_{(x_\mu)\in\mathbb{Z}^4} e^{\pi i\zeta\chi_2(x_\mu)} \tag{15}$$

gilt.

Hilfssatz 4. *Wenn ν ungerade ist, so ist die Funktion* (14) *eine Modulform vom Gewicht* 2 *bzgl. der Kongruenzuntergruppe* (5). *Dabei ist $q=8q_1$ und q_1 eine natürliche Zahl, welche von $\mathfrak{L}$ abhängt und durch passende Wahl des Gitters $\mathfrak{L}$ zu einer beliebigen Zahl teilerfremd gemacht werden kann.*

Beweis. Die Koeffizientenmatrix der quadratischen Form (9) sei

$$Z = Z(z_1, z_2) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right).$$

Das ist eine 8-reihige symmetrische Matrix, welche dem oberen Siegelschen Halbraum angehört, wenn $\operatorname{Im} z_1, z_2 > 0$ ist. Die Thetareihen schreiben wir nun so:

$$\vartheta(z_1, z_2) = \vartheta(Z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^8} e^{\pi i x^t Z x}.$$

Wenn $G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ ein Element der Siegelschen Modulgruppe $\mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z})$ ist und außerdem $C^t A$ und $B^t D$ gerade Elemente in den Diagonalen haben, so ist bekanntlich

$$\vartheta((AZ+B)(CZ+D)^{-1})\,|CZ+D|^{-\frac{1}{2}} = \chi(G)\,\vartheta(Z) \tag{16}$$

mit einer 8. Einheitswurzel $\chi(G)$. Igusa [7] hat gezeigt, daß $\chi(G)=1$ ist, wenn G modulo 8 der Einheitsmatrix kongruent ist.

L bezeichne die lineare Substitution, welche die Basis $(1,0,\ldots)^t$, $(0,1,\ldots)^t,\ldots$ von $\mathbb{Z}^8$ in eine Basis des Gitters $\mathfrak{L}$ überführt. Damit schreibt sich die Thetareihe (14)

$$\tilde{\vartheta}(z_1,z_2)=\tilde{\vartheta}(Z)=\vartheta(L^t ZL)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^8} e^{\pi i x^t L^t Z L x}.$$

Der Hauptnenner der Koeffizienten von L und L^{-1} sei q_2, und $q_1=q_2^2$. Diese Funktion ist dann eine Siegelsche Modulform in Z bzgl. der Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma_S(q_1)=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(8,\mathbb{Z}),\ \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\ \mathrm{mod}\, q_1\right\},$$

und vom Charakter $\chi(G)$. Da $\vartheta(z_1,z_2)$ eine Hilbertsche Modulform bzgl. Γ_Ω ist, und da sich diese Gruppe in unserem Zusammenhang als eine Untergruppe der Siegelschen darstellt, ist $\tilde{\vartheta}(z_1,z_2)$ eine Modulform bzgl. der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_\Omega(q_1)$.

Aber $\tilde{\vartheta}(z_1,z_2)$ verhält sich sogar gegenüber einer größeren Gruppe als Modulform. Nämlich wenn man v_1, v_2 zu z_1, z_2 addiert, so geht die Matrix $Z=Z(z)$ in $Z(z)+Z(v)$ über, wo $Z(v)=\big(s_{\Omega/Q}(v\,\varphi(\xi_\mu))\big)$ die Koeffizientenmatrix dieser quadratischen Form bezeichnet. Also addiert sich zu $L^t ZL$ die Matrix $L^t\big(s_{\Omega/Q}(v\,\varphi(\xi_\mu))\big)L$, und diese ist voraussetzungsgemäß $\big(\chi_1(x_\mu)+\chi_2(x_{\mu+4})\big)$. Die letztere Matrix ist ganzzahlig und hat gerade Koeffizienten in der Diagonalen. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}(z_1+v_1,z_2+v_2)&=\vartheta\big(L^t ZL+\big(\chi_1(x_\mu)+\chi_2(x_{\mu+4})\big)\big)\\ &=\vartheta(L^t ZL)=\tilde{\vartheta}(z_1,z_2).\end{aligned}\tag{17}$$

Weiter ist nach Hilfssatz 3 auch $n(v)\big(\chi_1(x_\mu)+\chi_2(x_{\mu+4})\big)^{-1}$ eine ganzzahlige Matrix. Und dann findet man (der Faktor $|CZ+D|^{-\frac{1}{2}}$ bei der Transformation wird nur durch $*$ angedeutet)

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}(Z)=\vartheta\big(-(L^t ZL)^{-1}\big)*&=\vartheta\big(-L^{-1}Z^{-1}L^{-t}+n(v)\big(\chi_1(x_\mu)+\chi_2(x_{\mu+4})\big)^{-1}\big)*\\ &=\vartheta\big(-L^{-1}Z^{-1}L^{-t}+n(v)(L^t Z(v)\,L)^{-1}\big)*\\ &=\vartheta\big(-L^{-1}(Z^{-1}-n(v)\,Z(v)^{-1})\,L^{-t}\big)*\\ &=\vartheta\big(L^t Z(-n(v)\,Z(v)^{-1}Z+I)^{-1}L\big)*\\ &=\tilde{\vartheta}\big(Z(-n(v)\,Z(v)^{-1}Z+I)^{-1}\big)*.\end{aligned}$$

Das läßt sich so wegen Hilfssatz 2 schreiben:

$$\tilde{\vartheta}(z_1,z_2)=\tilde{\vartheta}\left(\frac{z_1}{-v_2 z_1+1},\frac{z_2}{-v_1 z_2+1}\right)(1-v_2 z_1)^{-2}(1-v_1 z_2)^{-2}.\tag{18}$$

Wenn q_1 zu ν teilerfremd ist, so erzeugen die Substitutionen (17), (18) oder deren Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n(\nu)\,\nu^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ zusammen mit der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_\Omega(q_1)$ die ganze in (5) definierte Gruppe mit q_1 statt q.

Wenn man außer den oben gemachten Voraussetzungen noch $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod 8 voraussetzt, so ist die in (16) auftretende Einheitswurzel immer $\chi(G)=1$. Damit ist der Beweis von Hilfssatz 4 fertig.

Hilfssatz 5. *Eine beliebige Modulform $f(z_1, z_2)$ bzgl. der Gruppe* (5) *geht durch die Spezialisierung* (2) *in eine Modulform $g(\zeta)=f(\nu_1\zeta, \nu_2\zeta)$ bzgl. der Gruppe $\Gamma_0(n(\nu))$ über.*

Das ist evident.

Um alle Thetareihen (15) zu erhalten, welche den Ring der Modulformen zu $\Gamma_0(n(\nu))$ von Gewichten $\equiv 0$ mod 4 erzeugen, muß man endlich viele solche $\vartheta(z_1, z_2)$ bilden. Diese gehören zu einem Durchschnitt von endlich vielen Gruppen (5). Ein solcher Durchschnitt ist aber auch von dieser Form.

§ 3. Die Bilder von $\mathfrak{J}$ und $\tilde{\mathfrak{J}}$ bei der Spezialisierung

Unser Satz behauptet, daß die Bilder von $\mathfrak{J}$ und $\tilde{\mathfrak{J}}$ bei der Spezialisierung (2) bis auf Modulformen von kleinen Gewichten übereinstimmen: Wir drücken das in der in [3] erklärten Sprache aus:

$$\mathfrak{J}_1 \approx \tilde{\mathfrak{J}}_1. \tag{19}$$

Bei dem Beweis müssen wir einige Resultate von [3] heranziehen.

In $\mathfrak{J}$ existieren 3 algebraisch unabhängige Modulformen y_0, y_1, y_2 in z_1, z_2 von gleichem Gewicht, so daß die Ringe $\mathfrak{J}$ und $\tilde{\mathfrak{J}}$ von $\mathfrak{i}=\mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$ ganz algebraisch abhängen. Die y_ρ bilden ein projektives Koordinatensystem, das zum Aufbau der algebraischen Theorie benutzt wird, welches aber durch irgendein anderes ersetzt werden könnte. In diesem Zusammenhang wäre es nicht einmal nötig, die y_ρ von gleichem Gewicht anzunehmen.

$\mathfrak{J}$ und $\tilde{\mathfrak{J}}$ sind endlich algebraische und ganz abgeschlossene Erweiterungen von $\mathfrak{i}$ und daher auch endliche und reflexive $\mathfrak{i}$-Moduln.

Wir bilden zu der kurzen exakten Sequenz (4) die lange

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{i}) \to \cdots;$$

dabei ist $\mathrm{Ext}^0 = \mathrm{Hom}$. $\mathfrak{J}_1$ ist ein Torsionsmodul und daher $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{i})=0$. Die beiden folgenden Moduln schreiben wir so:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{J}, \mathfrak{i}) &= \mathfrak{J}^* = \{g^*\colon s_{\mathfrak{J}/\mathfrak{i}}(g^* f) \in \mathfrak{i} \text{ für alle } f \in \mathfrak{J}\}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{P}, \mathfrak{i}) &= \mathfrak{P}^* = \{g^*\colon s_{\mathfrak{J}/\mathfrak{i}}(g^* f) \in \mathfrak{i} \text{ für alle } f \in \mathfrak{P}\}, \end{aligned} \tag{20}$$

mit $s=$ Spur und g^* aus dem Quotientenkörper. Das sind die Dedekindschen Komplemente von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{P}$. Wie gesagt, ist $\mathfrak{J}_1$ ein Torsionsmodul. Es gibt nämlich ein homogenes Polynom $h(y)$ derart, daß $h(y)\,\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{P}$ und folglich $h(y)\,\mathfrak{J}_1=0$ ist. Man kann die y_ρ so linear transformieren, daß

$$h(y)=y_2^m+c_1(y_0,y_1)\,y_2^{m-1}+\cdots+c_m(y_0,y_1)$$

bzgl. y_2 normiert ist. Dann ist $\mathfrak{J}_1$ ein endlicher Modul bzgl. des Polynomrings

$$\mathfrak{i}_1=\mathbb{C}[y_0,y_1].$$

Nun gilt das Reduktionslemma ([3], S. 31):

$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{i}}^{\mu}(\mathfrak{J}_1,\mathfrak{i})\cong\eta^{-1}\,\mathrm{Ext}_{\mathfrak{i}_1}^{\mu-1}(\mathfrak{J}_1,\mathfrak{i}_1),$$

wobei η^{-1} einen Isomorphismus bedeutet, welcher homogene Elemente vom Grad k in solche vom Grad $k-1$ abbildet (m.a.W. η^{-1} erniedrigt nur den Grad um 1). Die lange zu (4) gehörige exakte Sequenz wird damit

$$0\to\mathfrak{J}^*\to\mathfrak{P}^*\to\eta^{-1}\,\mathfrak{J}_1^*\to\mathrm{Ext}_{\mathfrak{i}}^1(\mathfrak{J},\mathfrak{i})\to\cdots; \tag{21}$$

dabei haben wir die zu (20) analoge Abkürzung $\mathfrak{J}_1^*$ benutzt. Weil $\mathfrak{J}$ ein reflexiver $\mathfrak{i}$-Modul ist, gilt ([3], S. 44, Theorem 1)

$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{i}}^1(\mathfrak{J},\mathfrak{i})\approx 0, \tag{22}$$

d.h. es kommen nur homogene Elemente vor, deren Grade nach unten und oben beschränkt sind.

Wir verkürzen (21) zu der exakten Sequenz

$$0\to\mathfrak{J}^*\to\mathfrak{P}^*\to\mathfrak{U}_1\to 0 \tag{23}$$

und hier gilt wegen (21) und (22)

$$\mathfrak{U}_1\approx\eta^{-1}\,\mathfrak{J}_1^*. \tag{24}$$

In (20)–(24) kann man durchweg $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{P}$ durch $\tilde{\mathfrak{J}}$ und $\tilde{\mathfrak{P}}$ ersetzen.

$\tilde{\mathfrak{J}}$ ist eine endlich algebraische und ganze Erweiterung von $\mathfrak{J}$, und es gilt

$$\tilde{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}\oplus\mathfrak{J}',\qquad \mathfrak{J}'=\{\tilde{f}\in\tilde{\mathfrak{J}}:\ s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(\tilde{f})=0\}. \tag{25}$$

Nämlich jedes $\tilde{f}\in\mathfrak{J}$ kann so zerlegt werden:

$$\tilde{f}=\frac{1}{[\tilde{\mathfrak{J}}:\mathfrak{J}]}\,s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(\tilde{f})+\left(\tilde{f}-\frac{1}{[\tilde{\mathfrak{J}}:\mathfrak{J}]}\,s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(\tilde{f})\right),$$

und der erste Summand gehört ersichtlich zu $\mathfrak{J}$. Aus (25) folgt für die Dedekindschen Komplemente

$$\tilde{\mathfrak{J}}^*=\mathfrak{J}^*\oplus\mathfrak{J}'^*. \tag{26}$$

Wir erinnern weiterhin an die Definitionen

$$s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{i}}(\tilde{\mathfrak{P}}^*\,\tilde{\mathfrak{P}})\subseteq\mathfrak{i},\qquad s_{\mathfrak{J}/\mathfrak{i}}(\mathfrak{P}^*\,\mathfrak{P})\subseteq\mathfrak{i}.$$

Nun ist

$$s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{i}}(\tilde{\mathfrak{P}}^*\,\mathfrak{P})=s_{\mathfrak{J}/\mathfrak{i}}\big(s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(\tilde{\mathfrak{P}}^*)\,\mathfrak{P}\big)\subseteq\mathfrak{i},$$

also

$$\mathfrak{Q}=s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(\tilde{\mathfrak{P}}^*)\subseteq\mathfrak{P}^*. \tag{27}$$

$\mathfrak{Q}^*$ sei das Komplement von $\mathfrak{Q}$, ein Untermodul aus dem Quotientenkörper von $\mathfrak{J}$. Dann wird

$$s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{i}}(\mathfrak{Q}^*\,\tilde{\mathfrak{P}}^*)=s_{\mathfrak{J}/\mathfrak{i}}\big(\mathfrak{Q}^*\,s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(\tilde{\mathfrak{P}}^*)\big)=s_{\mathfrak{J}/\mathfrak{i}}(\mathfrak{Q}^*\,\mathfrak{Q})\subseteq\mathfrak{i}.$$

Weil $\tilde{\mathfrak{P}}$ reflexiv ist, folgt hieraus

$$\mathfrak{Q}^*\subset\tilde{\mathfrak{P}}^{**}=\tilde{\mathfrak{P}}.$$

Definitionsgemäß ist aber der Durchschnitt von $\tilde{\mathfrak{P}}$ und dem Quotientenkörper von $\mathfrak{J}$ gleich $\mathfrak{P}$. Folglich gilt (vgl. (27) und $\mathfrak{P}^{**}=\mathfrak{P}$)

$$\mathfrak{Q}^*=\mathfrak{P}. \tag{28}$$

Nun erhält man durch doppelte Komplementbildung aus einem Modul dessen reflexiven Abschluß, d.h. den kleinsten ihn umfassenden reflexiven Modul. Das geht aus [3, S. 23, Theorem 1] hervor. Aus dem gleichen Theorem entnimmt man ferner, daß der reflexive Abschluß auch gleich dem Durchschnitt der p-adischen Erweiterungen für alle homogenen Primpolynome $p=p(y)$ ist. Auf (28) angewandt bedeutet das

$$\mathfrak{Q}^{**}=\bigcap_p \mathfrak{Q}_p=\mathfrak{P}^*. \tag{29}$$

Nach [3], S. 27/28, Proposition 2 ist das Hilbert-Polynom von $\mathfrak{Q}$:

$$L(\lambda,\mathfrak{Q})=N\binom{\lambda}{2}+\big(2N-G(\mathfrak{Q})\big)\,\lambda+\text{const}$$

mit $N=[\mathfrak{J}:\mathfrak{i}]$ und einer Konstanten $G(\mathfrak{Q})$, welche nur von den p-adischen Komponenten $\mathfrak{Q}_p$ abhängt. Somit kann man aus (29) oder $G(\mathfrak{Q})=G(\mathfrak{P}^*)$ schließen, daß die Hilbert-Polynome von

$$\mathfrak{B}_1=\mathfrak{Q}/\mathfrak{J}^*,\qquad \mathfrak{U}_1=\mathfrak{P}^*/\mathfrak{J}^*$$

folgende Gestalt haben:

$$L(\lambda,\mathfrak{B}_1)=L(\lambda,\mathfrak{Q})-L(\lambda,\mathfrak{J}^*)=\big(G(\mathfrak{J}^*)-G(\mathfrak{Q})\big)\,\lambda+\text{const},$$
$$L(\lambda,\mathfrak{U}_1)=L(\lambda,\mathfrak{P}^*)-L(\lambda,\mathfrak{J}^*)=\big(G(\mathfrak{J}^*)-G(\mathfrak{P}^*)\big)\,\lambda+\text{const},$$

sie stimmen also bis auf eine additive Konstante überein.

Der Koeffizient $(G(\mathfrak{J}^*)-G(\mathfrak{P}^*))$ ist gleich dem Rang von $\mathfrak{U}_1$ als $\mathfrak{i}_1$-Modul. Nach (24) ist er dann auch gleich dem Rang von $\mathfrak{J}_1$ als $\mathfrak{i}_1$-Modul. Man kann diesen Rang aber auch noch auf eine andere Art kennzeichnen; er ist nämlich gleich dem Grad N_1 des Körpers der Quotienten gleichen Gewichts von $\mathfrak{J}_1$ über dem rationalen durch das Modell gelieferten Unterkörper $\mathbb{C}(y_1/y_0)$. Nach Freitag [5] ist dieser Körper der volle Körper der Modulfunktionen zu $\Gamma_0(n(v))$. Man findet nun, daß N_1 auch gleich dem Rang von $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ als $\mathfrak{i}_1$-Modul und damit gleich dem Rang von $\tilde{\mathfrak{U}}_1$ ist. Beachtet man noch die oben festgestellte Tatsache $G(\mathfrak{P}^*)=G(\mathfrak{Q})$, so erkennt man hiermit die Gleichheit der Ränge von $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{U}_1$ als $\mathfrak{i}_1$-Moduln.

Wir können nun zeigen, daß $\mathfrak{V}_1=\tilde{\mathfrak{U}}_1$ ist. Dazu bilden wir das folgende exakte und kommutative Schema, von dem wir die erste Zeile und die Abbildungen der dritten Spalte noch zu erklären haben (vgl. dazu die Übungsaufgabe in [0, S. 16])

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathfrak{J}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathfrak{P}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathfrak{U}}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{\mathfrak{J}}^* \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \tilde{\mathfrak{P}}^* \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \tilde{\mathfrak{U}}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{J}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Q} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{V}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Für die mit s bezeichneten Abbildungen in den beiden ersten Spalten nehmen wir die Spur $s=s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}$. Nach (26), (27) sind sie surjektiv. $\hat{\mathfrak{J}}$ und $\hat{\mathfrak{P}}$ seien die Kerne. Wir behaupten noch

$$\hat{\mathfrak{J}}=\tilde{\mathfrak{J}}^*\cap\hat{\mathfrak{P}},$$

was für die Kommutativität gebraucht wird. Diese Gleichung folgt aus

$$\hat{\mathfrak{P}}=\{p\in\tilde{\mathfrak{P}}^*\colon s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(p)=0\},$$
$$\hat{\mathfrak{J}}=\{f\in\tilde{\mathfrak{J}}^*\colon s_{\tilde{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}}(f)=0\},$$

sowie aus $\tilde{\mathfrak{J}}^*\subset\tilde{\mathfrak{P}}^*$.

Die dritte Spalte besteht aus den Quotienten der beiden ersten, und deren Abbildungen werden auch durch diejenigen der beiden ersten Spalten induziert.

Wegen der Exaktheit der letzten Zeile und der Reflexivität von $\mathfrak{J}^*$ ist $\mathfrak{B}_1$ ein torsionsfreier $\mathfrak{i}_1$-Modul ([3, S. 25, Theorem 2]). Andererseits haben $\mathfrak{B}_1$ und $\tilde{\mathfrak{U}}_1$ den gleichen Rang über $\mathfrak{i}_1$. Beides ist mit der Exaktheit der dritten Spalte nur dann verträglich, wenn $\mathfrak{B}_1$ und $\tilde{\mathfrak{U}}_1$ gleich sind. Wegen (27) ist $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{U}_1$ und selbstverständlicherweise $\mathfrak{U}_1 \subseteq \tilde{\mathfrak{U}}_1$. Damit haben wir

$$\mathfrak{U}_1 = \tilde{\mathfrak{U}}_1.$$

Diese Gleichung zieht wegen (24) und der analogen Gleichung für $\tilde{\mathfrak{J}}^*$: $\mathfrak{J}_1^* \approx \tilde{\mathfrak{J}}_1^*$ nach sich. Die Komplemente irgendwelcher Moduln sind stets reflexiv. Mithin gilt sogar

$$\mathfrak{J}_1^* = \tilde{\mathfrak{J}}_1^*.$$

Bildet man hier nochmals die Komplemente, so entsteht

$$\mathfrak{J}_1^{**} = \tilde{\mathfrak{J}}_1^{**}. \tag{30}$$

Wir sahen bereits oben, daß dies die reflexiven Abschlüsse von $\mathfrak{J}_1$ und $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ sind, und daß die beiden obersten Koeffizienten des Hilbert-Polynoms allein von den p-adischen Erweiterungen eines Moduls abhängen. Das Hilbert-Polynom eines $\mathfrak{i}_1$-Moduls hat aber überhaupt nur zwei Koeffizienten. Folglich sind die Hilbert-Polynome für $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1^{**}$ identisch. Nach (30) sind also die Hilbert-Polynome von $\mathfrak{J}_1$ und $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ die gleichen, und diese Aussage ist mit (19), also mit dem oben behaupteten Satz identisch.

Literatur

0. Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological Algebra, Princeton N.J. 1956.
1. Eichler, M.: Über die Darstellung von Modulformen durch Thetareihen. Journ. reine angew. Math. **195**, 156–171 (1956).
2. Eichler, M.: Zur Begründung der Theorie der automorphen Formen in mehreren Variablen. Aequationes Math. **3**, 93–111 (1969).
3. Eichler, M.: Projective Varieties and Modular Forms. Lecture Notes in Mathematics **210**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.
4. Eichler, M.: The Basis Problem for Modular Forms and the Traces of Hecke Operators, to appear in the Transactions of the Summer School on Modular Functions. Antwerp 1972. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973.
5. Freitag, E.: Fortsetzung automorpher Funktionen. Math. Annalen **177**, 95–100 (1968).
6. Hijikata, H., Saito, H.: On the Representability of Modular Forms by Theta Series. (To appear).
7. Igusa, J.-I.: On the Graded Ring of Theta Constants. Theorem 3. Amer. Journ. Maths. **86**, 219–246 (1964).
8. Klingen, H.: Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen. Math. Z. **102**, 30–42 (1967).

9. Kloosterman, H. D.: Thetareihen in total reellen algebraischen Zahlkörpern. Math. Annalen **103**, 279 – 299 (1930).
10. Lehner, J., Newman, M.: Weierstrass points of $\Gamma_0(n)$. Annals of Maths. **79**, 360–368 (1964).
11. Resnikoff, H. L.: On the Graded Ring of Hilbert Modular forms Associated with $Q(\sqrt{5})$. (To appear.)
12. Senn, E.: Modelle und Modellinvarianz in endlichen, graduierten Algebren. Erscheint demnächst in den Comment. Math. Helv.

M. Eichler
Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
CH-4000 Basel, Schweiz

(Eingegangen am 6. Dezember 1972)