Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II.

Von **P. Jordan**, z. Z. in Kopenhagen.

(Eingegangen am 3. Juni 1927.)

Es wird eine vereinfachte und verallgemeinerte Darstellung der in I. entwickelten Theorie gegeben. Eine Verallgemeinerung war insofern nötig, als dort nur die Theorie stetiger quantenmechanischer Größen vollständig entwickelt wurde, während die unstetigen, „gequantelten" Größen nicht genauer untersucht wurden. Es zeigt sich, daß die kanonische Vertauschungsregel $pq - qp = h \cdot (2\pi i)^{-1}$ nur bei stetigen Größen p, q besteht; es ist z. B. nicht richtig, für eine gequantelte Wirkungsvariable J zu setzen $Jw - wJ = h \cdot (2\pi i)^{-1}$; auch gilt keinerlei derartige Gleichung in der Theorie des Magnetelektrons. Dagegen bewährt sich allgemein, bei stetigen und bei unstetigen Größen, die in I. gegebene Definition kanonisch konjugierter Größen; sie liefert auch die Theorie des ruhenden Magnetelektrons.

Die vorliegende Abhandlung ist, wie der Titel anzeigt, eine Fortsetzung zu einer früheren Arbeit, die wir hier als I. zitieren[1]. Es wird jedoch nur eine ungefähre Kenntnis der Überlegungen von I. vorausgesetzt. Die Wiederaufnahme der Betrachtungen von I. schien deshalb geboten, weil dort nur die Theorie solcher Größen vollständig entwickelt war, deren mögliche Werte eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit bilden: für alle „gequantelten" Größen (Energien, Quantenzahlen) ist die Theorie zunächst nicht anwendbar. Der gleichen Beschränkung unterliegen die mit I. im wesentlichen gleichbedeutenden Ergebnisse von Dirac[2]. Daß diese Beschränkung sehr einschneidend, und daß die notwendige Verallgemeinerung der Theorie nicht trivial ist, werden wir bald erkennen.

Eine Formulierung, welche kontinuierliche und diskrete Größen in gleicher Weise erfaßt, ist kürzlich von J. v. Neumann[3] durch eine stärkere Heranziehung der Theorie der unendlichen quadratischen Formen erreicht worden. Seine Untersuchungen, die als ein sehr wichtiger Beitrag zur mathematischen Aufklärung der quantenmechanischen Gesetze

---

[1] P. Jordan, ZS. f. Phys. **40**, 809, 1927; vgl. auch die Darstellung bei D. Hilbert, J. v. Neumann und L. Nordheim, Math. Annal. Es sei hier ein in I. unterlaufener Irrtum hervorgehoben: S. 832, Formel (1) muß stehen φ^* statt φ, und ψ statt ψ^*. Das gibt einige Änderungen in den nachfolgenden Formeln; vor allem ergibt sich, daß die Heisenbergschen Matrizen stets in dem S. 835 erläuterten Sinne auf $(1; W, t)$ bezogen sind. Danach erscheinen auf $(1; \alpha, \beta)$ bezogene Matrizen als die einzigen wichtigen Matrizen zweiter Stufe; nur diese Matrizen werden deshalb im folgenden als „Matrizen zweiter Stufe" bezeichnet.

[2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **113**, 621, 1927.

[3] J. v. Neumann, Göttinger Nachrichten.

bezeichnet werden müssen, bedürfen jedoch noch einiger Ergänzungen. Vor allem fehlt bei v. Neumann eine Definition kanonisch konjugierter Größen; ferner ist v. Neumann auf die Theorie der kanonischen Transformationen nicht ausführlicher eingegangen. Endlich scheint uns aus später darzulegenden Gründen auch der Ausgangspunkt der v. Neumannschen Betrachtungen in physikalischer Hinsicht nicht so naturgemäß, wie v. Neumann annahm. In dieser Arbeit werden wir eine Darstellung der Theorie entwickeln, die als eine sinngemäße Verallgemeinerung — und zugleich eine wesentliche Vereinfachung — der Darstellung von I. angesehen werden kann.

Die Schwierigkeiten, die einer allgemeinen Theorie der kanonischen Veränderlichen und der kanonischen Transformationen entgegenstehen, werden durch folgende Tatsachen beleuchtet. Kanonisch konjugierte Veränderliche p, q sind früher allgemein durch die Vertauschungsregel

$$p q - q p = \frac{h}{2 \pi i} \tag{1}$$

definiert worden; es wurde angenommen, daß diese Beziehung für jedes Paar kanonisch konjugierter Größen gültig seien. Eine genauere Betrachtung läßt jedoch erkennen, daß diese Annahme verworfen werden muß. Stellt man irgend eine Größe β durch eine Matrix B dar, so sind die Eigenwerte der Matrix B diejenigen c-Zahlwerte β', welche die Größe β annehmen kann[1]. Wir wollen den Fall betrachten, daß die β' sämtlich diskret sind: $\beta_1', \beta_2', \beta_3', \ldots$; und daß die Menge der β'-Werte keinen endlichen Häufungspunkt besitzt. Dann kann es, so behaupten wir, keine Matrix α (auch nicht als singuläre Matrix) geben, derart, daß

$$\alpha \beta - \beta \alpha = \frac{h}{2 \pi i} \tag{2}$$

wird. Denn daraus würde für jede analytische Funktion $F(\beta)$ folgen:

$$\alpha F(\beta) - F(\beta) \alpha = \frac{h}{2 \pi i} F'(\beta). \tag{3}$$

Wählen wir nun als $F(\beta)$ eine solche ganze transzendente Funktion, welche in jedem der Punkte $\beta_1, \beta_2', \beta_3', \ldots$ eine einfache Nullstelle besitzt:

$$F(\beta_1') = F(\beta_2') = \cdots = 0; \quad F'(\beta_1'),\ F'(\beta_2'), \cdots \neq 0,$$

so wird offenbar

$$F(\beta) = 0, \qquad F'(\beta) \neq 0, \tag{4}$$

[1] Wir gebrauchen für die c-Zahlwerte, die von einer q-Zahl angenommen werden können, die sehr übersichtliche Beziehungsweise von Dirac.

was einen Widerspruch gegen (3) bedeutet. Also darf man z. B. nicht für Wirkungs- und Winkelvariable J, w setzen

$$J w - w J = \frac{h}{2 \pi i}. \tag{5}$$

Daß es möglich war, aus dieser unzulässigen Gleichung (5) viele richtige Ergebnisse abzuleiten, ist nach einer mündlichen Bemerkung von Herrn Dirac[1] so zu verstehen, daß zur Herleitung dieser Ergebnisse in Wahrheit statt (5) nur

$$J e^{2 \pi i w} - e^{2 \pi i w} J = h e^{2 \pi i w} \tag{6}$$

benutzt wurde. Ein anderes Beispiel liefert das (ruhende) Magnetelektron, bei dem nach Pauli[2] z. B. die z-Komponente s_z des magnetischen Eigenmomentes (in geeigneter Normierung) die Gleichung

$$s_z^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

befriedigt, woraus wiederum die Unmöglichkeit eines konjugierten Impulses im Sinne der Definition (1), (2) folgt. Gleichzeitig mit der Vertauschungsregel (1), (2) verliert naturgemäß auch die bisherige Fassung der Theorie der kanonischen Transformationen ihre Allgemeingültigkeit, da sie ganz auf (1), (2) aufgebaut war.

Im folgenden machen wir den Versuch, als eine allgemeingültige Definition kanonischer Variabeln diejenige anzunehmen, welche in I. gegeben wurde, und die, wie dort gezeigt, im Sonderfalle stetig veränderlicher Größen p, q mit (1) gleichbedeutend ist. Wir entwickeln ferner die Theorie der kanonischen Transformationen unter Zugrundelegung einer Auffassung, die von Dirac[3] herrührt.

§ 1. Grundeigenschaften von Größen und Wahrscheinlichkeitsamplituden. Als die grundlegende Tatsache der Quantenmechanik kann der von Pauli, Dirac und Heisenberg erkannte Umstand angesehen werden, daß an einem System von f Freiheitsgraden in einer einzigen Messung nur höchstens f (nicht etwa $2f$) mechanische Größen mit idealer Genauigkeit bestimmt werden können. Dieser Satz ist übrigens, wie von Heisenberg[4] klargestellt wurde, genauer so aus-

[1] Ich hebe bei dieser Gelegenheit gern dankbar hervor, wie wertvoll es mir gewesen ist, mich im vergangenen Semester verschiedentlich mit Herrn Dirac über quantenmechanische Probleme unterhalten zu können.

[2] W. Pauli jr., ZS. f. Phys. (im Erscheinen begriffen); vgl. auch C. G. Darwin, Nature, März 1927.

[3] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **113**, 621, 1927.

[4] W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **43**, 172, 1927. Ich habe Herrn Heisenberg bestens zu danken für die Möglichkeit, diese Arbeit schon vor dem Erscheinen kennenzulernen.

zusprechen: Man kann wohl $2f$ Größen zugleich messen, aber nur mit endlicher Genauigkeit, derart, daß — im Gegensatz zur klassischen Mechanik — dieser Genauigkeit eine grundsätzliche, durch das Wirkungsquantum h bestimmte Grenze gezogen ist. Man kann durch geeignete Wahl der Meßanordnung zwar für einige, nämlich bestenfalls gerade f Größen die Genauigkeit beliebig weit treiben; doch muß man dann eine unbegrenzt zunehmende Ungenauigkeit bei der Bestimmung aller anderen, unabhängigen Größen in Kauf nehmen. Für die mathematische Begründung der Quantenmechanik kommt jedoch zunächst nur die obige Limesformulierung des Satzes in Betracht. Wir gehen also davon aus, daß man in einer einzigen „idealen Messung" jeweils für f Größen $\beta_1, \ldots, \beta_f$ gewisse Zahlwerte $\beta_1', \ldots, \beta_f'$, finden kann. Ein System von f unabhängigen Größen $\beta_1, \ldots, \beta_f$, die man in dieser Weise gleichzeitig messen kann, werden wir als ein System von Koordinatengrößen oder ein Koordinatensystem bezeichnen.

Die physikalisch möglichen Wertsysteme $\beta_1', \ldots, \beta_f'$ eines gewissen Koordinatensystems $\beta_1, \ldots, \beta_f$, die wir als Eigenwerte oder in ihrer Gesamtheit als Spektrum des Koordinatensystems β bezeichnen, bilden im allgemeinsten Falle innerhalb eines f-dimensionalen (kartesischen) Raumes ein Gebiet, das aus f-dimensionalen, $(f-1)$-dimensionalen, ..., 1-dimensionalen und 0-dimensionalen Stücken zusammengesetzt ist. Dabei ist noch damit zu rechnen, daß jedes dieser Gebiete mehrfach überdeckt sein kann: jedem Punkte im Spektrum des Koordinatensystems β ist eine gewisse ganze positive Zahl als seine Vielfachheit oder sein statistisches Gewicht zugeordnet. Einen Punkt, dessen Gewicht größer als 1 ist, nennen wir entartet. In der mathematischen Theorie der unendlichen quadratischen Formen treten bekanntlich (abzählbar) unendlich vielfache Eigenwerte auf; für das Vorkommen unendlich vielfacher Eigenwerte in der Quantenmechanik liegt jedoch bis jetzt wohl kein Anzeichen vor [1].

Wir bilden oft aus einer Funktion $F(\beta')$ die Größe

$$\left.\begin{aligned} &\sum \int F(\beta')\, dB_f + \sum \int F(\beta')\, dB_{f-1} \\ &\qquad + \cdots + \int F(\beta')\, dB_1 + \sum F(\beta'). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Darin bedeutet dB_f das Volumenelement eines f-dimensionalen Teilstücks aus dem Spektrum des Koordinatensystems β; es soll über $F(\beta')$ in

[1] Nach den getroffenen Definitionen ist z. B. auch das Auftreten einer zweideutigen Schrödingerfunktion, wie nach Born in der Stoßtheorie vorliegt, als eine Entartung (der Ortskoordinaten des Stoßelektrons) zu bezeichnen.

diesen Teilstücken integriert und die Summe von allen f-dimensionalen Teilstücken gebildet werden. Dazu soll addiert werden die entsprechende Summe für die $(f-1)$-dimensionalen Teilstücke von B (mit Volumenelementen dB_{f-1}) und so fort. Endlich soll noch eine Summe über die isolierten Punkte von B hinzugefügt werden. Je nach Bedarf wollen wir ferner statt der Summen und Integrale Mittelwerte und Integralmittel einführen; auch wollen wir die Möglichkeit zulassen, daß zu den angeschriebenen Volumenintegralen noch gewisse Integrale (oder Integralmittel) bzw. Summen (Mittelwerte) über die Randpunkte hinzutreten. Bei Entartung, also mehrfacher Überdeckung gewisser Gebiete des f-dimensionalen Raumes durch das Spektrum, werden wir über jedes der übereinander gelagerten Spektralgebiete einzeln integrieren und die Integrale addieren. In allen Fällen bezeichnen wir die fragliche Größe abkürzend mit

$$\overline{\sum_{\beta'}} F(\beta'). \tag{2}$$

Wir gebrauchen ferner eine singuläre Funktion von β', die wir mit $\delta(\beta' - \beta'')$ bezeichnen, und welche die Eigenschaften

$$\left.\begin{aligned} \delta(\beta' - \beta'') = 0, \text{ wenn nicht } \beta_1' = \beta_1'', \ldots, \beta_f' = \beta_f''; \\ \overline{\sum_{\beta'}} \delta(\beta' - \beta'') = 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

besitzt; sie enthält als Sonderfälle in sich das Weierstrasssche Symbol δ_{nm} und das Diracsche $\delta(x)$.

Nach dem Gesagten bedarf es kaum noch einer weiteren Erklärung, was wir z. B. unter

$$\overline{\sum_{\beta_1'}} F(\beta') \tag{4}$$

und unter

$$\delta(\beta_1' - \beta_1'') \tag{5}$$

verstehen; auch erhellt unmittelbar die Gültigkeit der Beziehung

$$\delta(\beta' - \beta'') = \prod_{k=1}^{f} \delta(\beta_k' - \beta_k''). \tag{6}$$

Nach diesen Erläuterungen formulieren wir die Grundpostulate der statistischen Beziehungen, die von der Quantenmechanik zwischen verschiedenen mechanischen Größen — oder, wie wir lieber sagen wollen, zwischen verschiedenen mechanischen Koordinatensystemen an einem dynamischen Gebilde hergestellt werden. Diese Postulate sind im wesentlichen dieselben wie in I.; wir wollen uns jedoch bei ihrer Darlegung hier ausschließlich auf den Fall reeller (hermitischer) Größen beziehen, während in I. auch komplexe Größen mitberücksichtigt wurden.

I. Zu jedem Koordinatensystem $\beta(=\beta_1, \ldots, \beta_f)$ gibt es (mindestens) ein anderes $\alpha(=\alpha_1, \ldots, \alpha_f)$ von solcher Art, daß wir α_k als Impuls zu β_k bezeichnen. Umgekehrt ist $-\beta_k$ Impuls zu α_k.

II. Zu je zwei kanonischen Systemen β, α und q, p gibt es eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Amplitude

$$\Phi_{\alpha p}(\beta', q')$$

mit Argumentsystemen β', q' im Spektrum von β bzw. q mit folgenden Eigenschaften:

$$\Phi_{\alpha p}(\beta', q') = \Phi^*_{p\alpha}(q', \beta'); \tag{A}$$

$$\overline{\sum_{q'}} \Phi_{\alpha p}(\beta', q')\, \Phi_{pP}(q', Q') = \Phi_{\alpha P}(\beta', Q'); \tag{B}$$

$$\Phi_{\alpha, -\beta}(\beta', \alpha') = \text{Const}\; e^{-\frac{2\pi i}{h} \sum_{k=1}^{f} \beta'_k \alpha'_k} \tag{C}$$

III. Wenn in zwei kanonischen Systemen β, α und $\bar{\beta}, \bar{\alpha}$ die Koordinate $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ ist, so enthält $\Phi_{\alpha\bar{\alpha}}(\beta', \bar{\beta}')$ den Faktor $\delta(\beta'_1 - \bar{\beta}'_1)$:

$$\Phi_{\alpha\bar{\alpha}}(\beta', \bar{\beta}') = \delta(\beta'_1 - \bar{\beta}'_1)\, \Psi(\beta', \bar{\beta}') \text{ für } \beta_1 = \bar{\beta}_1. \tag{D}$$

Dieses Axiom ist in I nicht angegeben worden, da wir dort nur die Axiome für Systeme von einem Freiheitsgrad formuliert haben.

Es ist häufig bequem, die Amplituden als Matrizen aufzufassen; sie sollen wie in I. Matrizen erster Stufe oder erster Art genannt werden. In Matrizensymbolik schreiben wir kurz für (A), (B):

$$\Phi^{\beta q}_{\alpha p} = \Phi^{*q\beta}_{p\alpha}; \tag{A'}$$

$$\Phi^{\beta q}_{\alpha p}\, \Phi^{qQ}_{pP} = \Phi^{\beta Q}_{\alpha P}. \tag{B'}$$

Die physikalische Bedeutung der Amplituden ist in I. besprochen worden; wir kommen übrigens noch darauf zurück. Wir sind natürlich verpflichtet, zu zeigen, daß die aufgestellten Axiome erfüllbar sind und nicht etwa zu Widersprüchen führen. Dieser Beweis ist in I. nur für den Fall stetig veränderlicher Größen durchgeführt. Was andererseits die Notwendigkeit der einzelnen Axiome betrifft, so ist es sehr wahrscheinlich; daß (D) überflüssig, nämlich durch die anderen Axiome beweisbar ist. Ferner ist (A) in Wahrheit nicht ein zum Aufbau der Theorie nötiges Axiom, sondern nur ein Ausdruck dafür, daß wir uns der Einfachheit halber von vornherein auf reelle Größen beschränken. Als die wirklich wesentlichen Axiome erscheinen somit (B) und (C).

Die Gleichung (B), die unabhängig von Dirac, Pauli und dem Verfasser aufgefunden wurde, ist äquivalent mit dem fundamentalen Heisenbergschen Multiplikationsgesetz der quantenmechanischen Größen (das sich jedoch nicht auf die Amplituden, sondern auf die später zu besprechenden „Matrizen zweiter Art“ bezieht); die Gleichung (C) ist ~~in I.~~ aufgestellt worden mit $-i$ statt i, entsprechend der dortigen etwas abweichenden Bezeichnungsweise.

Was endlich die physikalische Tragweite dieser Axiome betrifft, so ist zu sagen, daß sie im wesentlichen alle bis heute genauer bekannten quantenmechanischen Gesetze zusammenfassen; sie gelten gleichmäßig für Systeme mit endlich vielen und mit unendlich vielen Freiheitsgraden, und für ungequantelte Bewegungen ebenso wie gequantelte mit unendlich vielen oder mit endlich vielen möglichen Zuständen. Sie bieten aber nicht die Möglichkeit einer vierdimensional symmetrischen Behandlung der Zeit: für die relativistische Punktmechanik und für die Quantenmechanik schwingender Kontinua[1] gelten sie nur dann, wenn man die Zeitkoordinate unsymmetrisch gegenüber den Raumkoordinaten auszeichnet. Bekanntlich liegen bereits einige Ansätze zu einer vierdimensional symmetrischen Fassung der quantenmechanischen Gesetze vor. (Vier- [bis fünf-] dimensionale Schrödingergleichung; Comptoneffekt nach Dirac und Gordon); von diesen vermag also die hier erläuterte Theorie keine Rechenschaft zu geben.

§ 2. Folgerungen. Aus (B′) folgt insbesondere

$$\Phi_{\alpha\alpha}^{\beta\beta}\;\Phi_{\alpha p}^{\beta q} = \Phi_{\alpha p}^{\beta q}, \tag{1}$$

und wegen der Willkür von $\Phi_{\alpha p}^{\beta q}$:

$$\Phi_{\alpha\alpha}^{\beta\beta} = 1, \tag{2}$$

d. h.

$$\Phi_{\alpha\alpha}(\beta', \beta'') = \delta(\beta' - \beta''). \tag{3}$$

Aus (2), (B′) folgt dann eine zweifache Orthogonalität (oder: Orthogonalität und Vollständigkeit) der Amplituden:

$$\Phi_{\alpha p}^{\beta q}\;\Phi_{p\alpha}^{q\beta} = \Phi_{p\alpha}^{q\beta}\;\Phi_{\alpha p}^{\beta q} = 1; \tag{4}$$

d. h. ausführlicher (mit Rücksicht auf (A):

$$\left.\begin{aligned} \overline{\sum_{q'}}\,\Phi_{\alpha p}(\beta', q')\,\Phi_{\alpha p}^{*}(\beta'', q') &= \delta(\beta' - \beta''); \\ \overline{\sum_{\beta'}}\,\Phi_{\alpha p}(\beta', q')\,\Phi_{\alpha p}^{*}(\beta', q'') &= \delta(q' - q''). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, ZS. f. Phys. **35**, 557, 1925; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **114**, 243, 1927.

Diese muß insbesondere auch für $\Phi_{\alpha, -\beta}(\beta', \alpha')$ gelten; in Verbindung mit (C) folgt daraus, daß das Spektrum von α von demjenigen von β nicht ganz unabhängig gewählt werden kann. Wir betrachten einige Beispiele, bei denen wir die Zahl der Freiheitsgrade gleich 1 annehmen.

a) Es sei p der Impuls zu q und

$$-\infty < q' < +\infty,$$
$$-\infty < p' < +\infty.$$

Dann ist $\overline{\sum_{q'}}$ als Integral zu definieren, und es wird:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,q' \,.\, e^{\frac{2\pi i}{h} q' p'} \,.\, e^{-\frac{2\pi i}{h} q' p''} = \frac{1}{\pi}\,\delta\,(p' - p'').$$

Diese Formel ist nämlich nur ein anderer Ausdruck der bekannten Tatsache

$$\lim_{a \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,p''\, F\,(p'') \cdot \frac{1}{h}\int\limits_{-a}^{+a} d\,q' \,.\, e^{\frac{2\pi i}{h} q'(p' - p'')} = \frac{1}{\pi}\, F\,(p')$$

(Dirichletsches Integral). Ganz ebenso ergibt sich die zweite der verlangten Orthogonalitätseigenschaften.

b) Es sei p der Impuls zu q und

$$0 < q' < +\infty,$$
$$-\infty < p' < +\infty.$$

Dann ist die eine Orthogonalitätsbedingung genau so zu erhalten wie in a); die andere ergibt sich in der Form

$$\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{\infty} d\,q' \,.\, e^{\frac{2\pi i}{h} q' p'} \,.\, e^{-\frac{2\pi i}{h} q' p''} = \frac{1}{2\pi}\,\delta\,(p' - p'').$$

c) Ferner sei J Impuls zu w und

$$0 \leqq w' < 1,$$
$$J' = \text{Const} + n\,h; \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dann bestehen die Orthogonalitätsrelationen

$$\int\limits_{0}^{1} d\,w' \,.\, e^{\frac{2\pi i}{h} w' (J' - J'')} = \delta\,(J' - J''),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(w' - w'')\,J'} = \text{const}\;\delta\,(w' - w'').$$

d) Etwas verwickelter gestalten sich die Verhältnisse bei dem Beispiel

$$-\infty < t' < +\infty;$$

$$E' = E_1, E_2, E_3, \dots < E_0; \quad \lim_{n \to \infty} E_n = E_0;$$

oder

$$E_0 \leqq E' < +\infty,$$

wobei die Energie E Impuls zur Zeit t ist. Man erhält als die eine der Orthogonalitätsrelationen:

$$\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \,.\, e^{\frac{2\pi i}{h} t'(E'-E'')} = \frac{1}{\pi}\,\delta(E'-E''),$$

wenn ausdrücklich vorausgesetzt wird, daß im Falle $E' = E''$ dieser Wert größer als E_0 ist; falls aber $E' = E'' = E_n$, so muß man statt des Integrals nach t' einen Integralmittelwert bilden, um einen endlichen Wert zu erhalten; allgemein gilt offenbar

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} dt' \,.\, e^{\frac{2\pi i}{h} t'(E'-E'')} = \begin{cases} 1 \text{ für } E' = E'', \\ 0 \quad „ \quad E' \neq E''. \end{cases}$$

Die andere Orthogonalitätsrelation erhält die Form

$$\overline{\sum_{E'}} e^{\frac{2\pi i}{h}(t'-t'')E'} = \frac{1}{2\pi}\,\delta(t'-t'')$$

mit der Definition

$$\overline{\sum_{E'}} F(E') = \frac{1}{h}\int_{E_0}^{\infty} dE' \,.\, F(E') + \lim_{N \to \infty}\left\{\sum_{n=1}^{N} F(E_n) - N F(E_0)\right\}$$

e) Als letztes Beispiel betrachten wir den Fall, daß eine Größe β die endlich vielen Werte $0, 1, 2, \dots, N-1$ annehmen kann. Dann werden die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt, wenn wir dem Impuls α die Eigenwerte $\frac{h}{N} \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ erteilen. Wir erhalten Amplituden

$$e^{\frac{2\pi i}{h} k \cdot \frac{h}{N} l} = e^{2\pi i \frac{kl}{N}}; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

und es bestehen die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\sum_{l=1}^{N} e^{2\pi i \frac{k'-k''}{N} l} = N\,\delta(k'-k'').$$

Die gleichen Formeln erhalten wir, wenn wir für β, α die Werte $-k$ bzw. $-\frac{h}{N}k$ annehmen. Das „ruhende“ Magnetelektron, dessen

Theorie kürzlich von Pauli entwickelt wurde, bildet ein physikalisches Beispiel für den Fall $N = 2$. Natürlich können wir auch für β die Eigenwerte kh und für α die Eigenwerte $\frac{k}{N}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ wählen. Gehen wir dann zum Limes $N \rightarrow \infty$, so kommen wir auf Beispiel c) zurück.

Wir gehen nun dazu über, mit Born und Wiener den quantenmechanischen Größen lineare Operatoren zuzuordnen. Die Operatoren, welche wir betrachten, sind von zweierlei Art; nämlich erstens solche, welche Funktionen $F(\beta')$ der Argumente β' in Funktionen $G(\beta')$ derselben Argumente überführen, und zweitens solche, die $F(\beta')$ in eine Funktion $G(\beta'')$ von Argumenten β'' überführen. Es werden aber bei allen betrachteten Operatoren die Argumente β'' dieselbe Wertemannigfaltigkeit besitzen, wie die β'; deshalb werden wir oft den Ersatz der Argumente β' durch β'' als unwesentlich betrachten, und einen Operator, der eine jede Funktion $F(\beta')$ in eine gewisse Funktion $G(\beta'')$ überführt, identifizieren mit einem Operator, der jeweils die Funktion $F(\beta')$ in $G(\beta')$ überführt. Zum Beispiel werden wir in diesem Sinne den Operator

$$T_1 = \overline{\sum_{\beta'}} R(\beta'')\, \delta(\beta' - \beta'') \ldots$$

identifizieren mit dem Operator

$$T_2 = R(\beta')$$

[Multiplikation mit $R(\beta')$], und insbesondere den Substitutionsoperator

$$T_3 = \overline{\sum_{\beta'}} \delta(\beta' - \beta'') \ldots$$

als identisch mit dem Einheitsoperator betrachten. Genauer hätten wir offenbar statt $T_1 = T_2$ zu schreiben $T_1 = T_3 T_2 = T_2 T_3$. Der Umstand, daß ein Operator T Funktionen von β' in Funktionen von β'' verwandelt, soll, wenn wünschenswert, durch die Bezeichnung

$$T = \underset{\beta'\beta''}{T} \tag{6}$$

hervorgehoben werden.

Bei der Definition der quantenmechanischen Operatoren muß ein bestimmtes Koordinatensystem, sagen wir q, mit einem zugehörigen Impulssystem p ausgezeichnet werden: wir sprechen von Operatoren in bezug auf q, p. Mit irgend einem Koordinatensystem β, zu dem β_1 als eine Koordinate gehört, bilden wir

$$\underset{q''q'}{\beta_1} = \overline{\sum_{\beta'}}\, \overline{\sum_{q''}} \Phi^*_{\alpha p}(\beta', q') \cdot \beta_1' \cdot \Phi_{\alpha p}(\beta', q'') \ldots \tag{7}$$

als Operator von β_1. Diese Definition wird in dem besonderen Falle stetiger Größen äquivalent mit der Definition in I., S. 815. Durch diese Operatoren kann dann die symbolische Addition und Multiplikation der quantenmechanischen Größen definiert werden. Zu zeigen ist später erstens, daß der Operator wirklich durch β_1 und q, p eindeutig bestimmt ist (nicht von den übrigen β_k und den α abhängt), und zweitens, daß die definierte Addition und Multiplikation (im Gegensatz zu den Operatoren selbst) auch nicht von dem ausgezeichneten kanonischen System q, p abhängt.

Vom Operator $\underset{q''q'}{\beta_1}$ in bezug auf q, p geht man mit Schrödinger-Pauli-Eckart über zur Matrix von β_1 in bezug auf μ, τ (τ Impulse zu μ) durch die Formel[1]

$$M_1(\mu', \mu'') = \overline{\sum_{q'}} \Phi_{\tau p}(\mu', q') \underset{q''q'}{\beta_1} \Phi^*_{\tau p}(\mu'', q''). \tag{8}$$

Es ergibt sich sofort

$$M_1(\mu', \mu'') = \overline{\sum_{\beta'}} \Phi^*_{\alpha\tau}(\beta', \mu') \cdot \beta'_1 \cdot \Phi_{\alpha\tau}(\beta', \mu''). \tag{9}$$

Wir können deshalb sagen: Wenn wir die Matrix $B_1(q', q'')$ von β_1 in bezug auf q, p bilden, so erhalten wir den Operator $\underset{q''q'}{\beta_1}$ als

$$\underset{q''q'}{\beta_1} = \overline{\sum_{q''}} B_1(q', q'') \ldots \tag{10}$$

Der Operator einer Größe in bezug auf q, p ist die durch die Matrix dieser Größe in bezug auf q, p vermittelte lineare Transformation.

In der Matrizensymbolik können wir diese Verhältnisse so darstellen: Die Matrix $B_1(q', q'')$ in bezug auf q, p, die wir, da sie nicht eine Amplitude ist, eine Matrix zweiter Art nennen, ist gegeben durch

$$B_1 = \left(\Phi^{\beta q}_{\alpha p}\right)^{-1} \cdot \beta_1 \cdot \Phi^{\beta q}_{\alpha p}, \tag{11}$$

wenn wir mit β_1 hier die Matrix

$$\beta_1 = \beta'_1 \delta(\beta' - \beta'') \tag{12}$$

bezeichnen; der Operator von β_1 in bezug auf q, p ist dann durch (10) definiert. Das Axiom (D) läßt aus (11) die Eindeutigkeit von B_1 entnehmen. Die allgemeinste durch (11) erlaubte Konstruktion von B_1 ist

[1] In der Terminologie von I. ist dies, wenn man die hier in der Fußnote S. 1 angegebene Korrektion vornimmt, die auf $(1, \tau, \mu)$ bezogene Matrix zweiter Stufe von β_1.

nämlich diese: Wir wählen ein kanonisches System $\bar{\beta}, \bar{\alpha}$, in dem $\bar{\beta}_1 = \beta_1$ ist, und setzen

$$\left.\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \left(\Phi^{\bar{\beta} q}_{\bar{\alpha} p}\right)^{-1} \beta_1 \, \Phi^{\bar{\beta} q}_{\bar{\alpha} p} \\ &= \left(\Phi^{\beta q}_{\alpha p}\right)^{-1} \left(\Phi^{\bar{\beta}\beta}_{\bar{\alpha}\alpha}\right)^{-1} \beta_1 \, \Phi^{\bar{\beta}\beta}_{\bar{\alpha}\alpha} \, \Phi^{\beta q}_{\alpha p}; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

dabei ist $\Phi^{\bar{\beta}\beta}_{\bar{\alpha}\alpha}$ nach (D) eine Diagonalmatrix in bezug auf β_1', also mit β_1 vertauschbar, und mithin ist $\bar{B}_1 = B_1$.

Die Formeln (8), (9), die auch in der Form

$$M_1 = \left(\Phi^{\beta\mu}_{\alpha\tau}\right)^{-1} \beta_1 \, \Phi^{\beta\mu}_{\alpha\tau} = \left(\Phi^{q\mu}_{p\tau}\right)^{-1} B_1 \, \Phi^{q\mu}_{p\tau} \tag{14}$$

geschrieben werden können, zeigen, daß die oben definierte Addition und Multiplikation wirklich eine von dem zur Definition benutzten kanonischen System q, p unabhängige Verknüpfung der Größen selber ist[1].

Wir wollen nunmehr insbesondere die Multiplikationsgesetze kanonischer Größen betrachten. Der Operator von q_1 in bezug auf q, p wird nach unseren Formeln gleich

$$\underset{q'' q'}{q_1} = \overline{\sum_{q'''}} \, \overline{\sum_{q''}} \, \Phi^*_{pp}(q''', q') \cdot q_1''' \cdot \Phi_{pp}(q''', q'') \ldots \tag{15}$$

und somit[2] gleich der Multiplikation mit q_1. Den Operator von p_1 in bezug auf q, p, erhalten wir in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \underset{q'' q'}{p_1} &= \overline{\sum_{p_f'}} \, \overline{\sum_{q''}} \, \Phi^*_{-qp}(p', q') \cdot p_1' \cdot \Phi_{-qp}(p', q'') \ldots \\ &= \overline{\sum_{p_1'}} \, \overline{\sum_{q''}} \, e^{\frac{2\pi i}{h} p_1' (q_1' - q_1'')} \cdot p_1' \cdot \delta(q_2' - q_2'') \ldots \delta(q_f' - q_f'') \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Es wirkt also lediglich auf das Argument q_1' einer Funktion $F(q')$; wir bestätigen sonach für $k \neq l$ die bekannten Vertauschungsregeln

$$p_k p_l - p_l p_k = q_k q_l - q_l q_k = p_k q_l - q_l p_k = 0. \quad (k \neq l.) \tag{17}$$

Im Sonderfalle stetiger Größen p_1, q_1 erhalten wir auch die klassische Vertauschungsregel

$$p_1 q_1 - q_1 p_1 = \frac{h}{2\pi i};$$

das wurde schon in I. gezeigt, doch kann der Beweis natürlich auch aus (10) entnommen werden. Es gilt nämlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d p_1' \int_{-\infty}^{+\infty} d q_1' \cdot p_1' \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} p_1' (q_1' - q_1'')} F(q_1') = \text{Const} \, \frac{h}{2\pi i} \, F'(q_1'),$$

[1] Die Matrizen zweiter Art sind häufig stark singulär, während die zugehörigen Operatoren noch regulär sind; diese Verhältnisse sind von Dirac ausführlich erläutert worden.

[2] Man beachte Formel (3), § 2 und Formel (6), § 1.

wie man durch eine partielle Integration erkennt. (Dirichletsches Integral.)

Wir wollen ferner den Fall $J' = nh$; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 \leqq w' < 1$ betrachten. Hier erhält der Operator J die Form

$$\underset{w'w''}{J} = h \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 d w' \,.\, n\, e^{2\pi i n (w' - w'')} \ldots;$$

er hat also die Bedeutung $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial w'}$, dann und nur dann, wenn er angewandt wird auf eine im Intervall $0 \leqq w' < 1$ definierte Funktion, deren Fourierreihe nur Glieder $e^{2\pi i n w'}$ $(n \geqq 0)$ enthält und gliedweise differenzierbar ist. Also gilt $J e^{2\pi i w} - e^{2\pi i w} J = h e^{2\pi i w}$, aber nicht $Jw - wJ = \frac{h}{2\pi i}$ *.

Ganz entsprechend hat der Operator von E in bezug auf t, $-E$ dann und nur dann die Bedeutung $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t'}$, wenn er wirkt auf eine Funktion von t', die in der Form

$$F(t') = \overline{\overline{\sum_{E'}}} f(E') e^{\frac{2\pi i}{h} E' t'}$$

darstellbar ist, und deren zeitliche Ableitung durch gliedweise Differentation erhalten wird:

$$\dot{F}(t') = \frac{2\pi i}{h} \overline{\overline{\sum_{E'}}} f(E') \,.\, E' e^{\frac{2\pi i}{h} E' t'}.$$

Hierdurch wird die Darstellung von E als $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t'}$ gerade in demjenigen Umfang gerechtfertigt, in welchem sie gebraucht wird in der „zweiten" Schrödingergleichung.

§ 3. Die Funktionalgleichungen der Amplituden. Wir bilden die Matrizen aller β, α in bezug auf q, p:

$$\left. \begin{aligned} B_k &= \left(\Phi^{\beta q}_{\alpha p}\right)^{-1} . \beta_k . \Phi^{\beta q}_{\alpha p}, \\ A_k &= \left(\Phi^{\beta q}_{\alpha p}\right)^{-1} . \alpha_k . \Phi^{\beta q}_{\alpha p}; \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

* Eine genauere Betrachtung dieser Ergebnisse liefert die vollständige Rechtfertigung der Diracschen Methode zur Darstellung der Heisenbergschen Matrizen mit Hilfe von J und w, und zwar mit einer charakteristischen Verfeinerung, durch welche gewisse, zumeist nicht ausreichend gewürdigte Schwierigkeiten dieser Diracschen Theorie beseitigt werden. Eine ausführlichere Darlegung dieser Verhältnisse würde jedoch zu viel Platz in Anspruch nehmen.

mit β_k, α_k sind hier die oben berechneten Matrizen der β, α in bezug auf β, α gemeint. Diese Gleichungen (1) können auch ausgedrückt werden in der Form der $2f$ *Amplitudengleichungen*

$$\Phi^{\beta q}_{\alpha p} B_k - \beta_k \Phi^{\beta q}_{\alpha p} = 0, \tag{2a}$$

$$\Phi^{\beta q}_{\alpha p} A_k - \alpha_k \Phi^{\beta q}_{\alpha p} = 0. \tag{2b}$$

Diese Gleichungen sind in I. ausführlich betrachtet worden für den Fall, daß die vorkommenden Größen stetig sind; sie enthalten als sehr spezielle Fälle in sich die beiden *Schrödingerschen* Gleichungen (mit *nicht* explizite von der Zeit abhängender Energie). Wir entnehmen aus ihnen auch leicht (wie in I.) einen formalen Beweis dafür, daß unsere Axiome widerspruchsfrei zu erfüllen sind. Wir wählen zu diesem Zwecke zunächst passende Spektren für die konjugierten Koordinatensysteme q und p; Beispiele dafür sind früher gegeben. Wir ordnen in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von § 2 der Größe q_k den Operator q_k' (Multiplikation mit q_k') zu und der Größe p_k den in (16), § 2 angegebenen Operator (mit p_k' statt p_1'). Wir definieren dann die Gesamtheit der quantenmechanischen Größen durch die Gesamtheit der Operatoren, die aus den Operatoren der q_k, p_k durch Additionen und Multiplikationen aufzubauen sind. Wir bezeichnen ferner $2f$ unabhängige, in solcher Weise gebildete Größen

$$\beta_k(q, p), \quad \alpha_k(q, p) \tag{3}$$

als ein kanonisches System, wenn es möglich ist, solche Spektren für die β und die α zu bestimmen, daß die Gleichungen (2a), (2b) lösbar werden. In diesem Falle definieren wir $\Phi^{\beta q}_{\alpha p}$ durch diese Gleichungen. Zwei verschiedene Lösungen von (2a), (2b) können sich nur durch einen solchen Matrixfaktor unterscheiden, der mit allen Matrizen β, α und mit allen Matrizen B, A vertauschbar ist, und somit (von singulären Fällen abgesehen) als eine konstante Zahl angesehen werden muß. Zu ergänzen ist die Definition kanonischer β, α noch insofern, als festgestellt werden muß, wann sie „reell" sind; wir verweisen hierfür auf I. Die Durchführung des formalen Beweises dafür, daß die soeben definierten Funktionen alle in unseren Postulaten verlangten Eigenschaften haben, ergibt sich nach dem Gesagten ganz unmittelbar. Über das bei weitem schwierigere Problem der Existenz von Lösungen der Gleichungen (2a), (2b) werden wir hernach noch einiges sagen.

Bei den Anwendungen der Theorie liegt die Sache bekanntlich meistens so, daß nicht etwa die Amplitude $\Phi^{\beta q}_{\alpha p}$ zu zwei schon vollständig bekannten kanonischen Systemen β, α und q, p zu suchen ist, sondern daß nur eine einzige der Größen β oder α als Funktion der q, p bekannt ist (z. B. die Energie). Man hat dann nur eine einzige der Gleichungen (2 a), (2 b) vorgegeben, und die Aufgabe ist, durch Betrachtung dieser einen Gleichung gleichzeitig zu einer zweckmäßigen Definition der unbekannten $2f - 1$ Größen β, α und zur Bestimmung von $\Phi_{\alpha p}^{\beta q}$ zu gelangen.

Die Gleichungen (2 a), (2 b) lauten ausführlicher:

$$\overline{\sum_{q''}} \Phi_{\alpha p}(\beta', q'') B_k(q'', q') - \beta'_k \Phi_{\alpha p}(\beta', q') = 0, \tag{4a}$$

$$\overline{\sum_{q''}} \Phi_{\alpha p}(\beta', q'') A_k(q'', q') - \underset{\beta'\beta'}{\alpha_k} \Phi_{\alpha p}(\beta', q') = 0; \tag{4b}$$

wenn wir den vorausgesetzten Umstand benutzen, daß die B_k, A_k hermitisch sind:

$$\left.\begin{aligned} B_k^{+}(q'', q') &= B_k^{*}(q', q'') = B_k(q'', q'), \\ A_k^{+}(q'', q') &= A_k^{*}(q', q'') = A_k(q'', q'), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so wird auch

$$\{\underset{q'q'}{B_k} - \beta_k^{*\prime}\}\, \Phi_{p\alpha}(q', \beta') = 0, \tag{6a}$$

$$\{\underset{q'q'}{A_k} - \underset{\beta'\beta'}{\alpha_k^{*}}\}\, \Phi_{p\alpha}(q', \beta') = 0; \tag{6b}$$

darin sind also die B_k, A_k die Operatoren der β_k, α_k in bezug auf q, p, und zwar derart geschrieben, daß sie Funktionen von q' in Funktionen von q' verwandeln; $\beta_k^{*\prime}$ ist Multiplikation mit $\beta_k^{*\prime} = \beta'_k$, und $\underset{\beta'\beta'}{\alpha_k^{*}}$ ist der komplex konjugierte Operator von α_k in bezug von β, α. Sind insbesondere alle Größen stetig, also

$$\underset{\beta'\beta'}{\alpha_k} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \beta'_k}, \quad \underset{q'q'}{p_k} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q'_k}, \tag{7}$$

und ist

$$\beta_k = g_k(q, p), \quad \alpha_k = f_k(q, p), \tag{8}$$

so gewinnt man für (6 a), (6 b) die Form

$$\left\{g_k\left(q', \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q'}\right) - \beta'_k\right\} \Phi_{p\alpha}(q', \beta') = 0, \tag{9a}$$

$$\left\{f_k\left(q', \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q'}\right) + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \beta'_k}\right\} \Phi_{p\alpha}(q', \beta') = 0; \tag{9b}$$

das sind die Gleichungen aus I.

Ihre allgemeine korrespondenzmäßige Bedeutung ersieht man mit dem Ansatz

$$\Phi_{p\alpha}(q', \beta') = e^{\frac{2\pi i}{h} S}; \tag{10}$$

sie gehen damit über in

$$\left\{g_k\left(q', \frac{\partial S}{\partial q'} + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q'}\right) - \beta_k'\right\} \cdot 1 = 0, \tag{11a}$$

$$\left\{f_k\left(q', \frac{\partial S}{\partial q'} + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q'}\right) + \frac{\partial S}{\partial \beta_{k'}}\right\} \cdot 1 = 0. \tag{11b}$$

Ist nun in der klassischen Theorie durch Gleichungen (8) eine kanonische Transformation gegeben, so kann man sie darstellen in der Form

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad \alpha_k = -\frac{\partial S}{\partial \beta_k}; \quad S = S(\beta, q).$$

Dann kann also (8) geschrieben werden als

$$g_k\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) - \beta_k = 0,$$

$$f_k\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial \beta_k} = 0;$$

und das sind die Gleichungen (11a), (11b) für den Grenfall $h = 0$.

§ 4. Kanonische Transformationen. Die kanonischen Transformationen, deren Theorie, wie in der klassischen Mechanik, die naturgemäße Verallgemeinerung und die prinzipielle Lösung des Problems der Integration der Bewegungsgleichungen liefert, sind ursprünglich[1] so aufgefaßt worden: Die kanonischen Größen q, p sollen dargestellt werden als Funktionen gewisser anderer kanonischer Größen β, α:

$$q_k = G_k(\beta, \alpha), \quad p_k = F_k(\beta, \alpha). \tag{1}$$

Unter der Voraussetzung, daß kanonische Systeme zu definieren seien durch die bekannten kanonischen Vertauschungsregeln, konnte ein formaler Beweis dafür erbracht werden[2], daß die Gleichungen (1) bei kanonischen q, p und β, α, wie schon ursprünglich vermutet wurde, stets darzustellen seien in der Form

$$q_k = T\beta_k T^{-1}, \quad p_k = T\alpha_k T^{-1}. \tag{2}$$

Da nun aber, wie wir sahen, im allgemeinen die früheren kanonischen Vertauschungsregeln nicht gültig sind, so verliert auch dieser Beweis seine Bedeutung; man kann im allgemeinen die Gleichungen (1) nicht in die Form (2) bringen.

Es ist nun von Dirac[3] eine abgeänderte Auffassung der kanonischen Transformationen entwickelt worden. Nach Dirac handelt es sich

[1] M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, ZS. f. Phys. **35**, 557, 1925.
[2] P. Jordan, ZS. f. Phys. **37**, 383, 1926.
[3] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **113**, 621, 1927; vgl. auch K. Lanczos, ZS. f. Phys. **35**, 812, 1926.

nicht darum, gewisse kanonische Größen als Funktionen von anderen kanonischen Größen darzustellen; sondern es handelt sich darum, ohne eine Transformation der Größen selbst zu einer anderen Matrizendarstellung überzugehen. Insbesondere sollen aus den Matrizen von q, p in bezug auf q, p (die wir früher berechnet haben) die Matrizen von q, p in bezug auf β, α hergestellt werden. Dies geschieht nach § 2 allgemein durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}_k &= (\Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha})^{-1}\, q_k\, \Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha}, \\ \bar{p}_k &= (\Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha})^{-1}\, p_k\, \Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

darin sind mit q, p die Matrizen in bezug auf q, p und mit $\bar{q}, \bar{p}$ die in bezug auf β, α gemeint.

In dem besonderen Falle, daß die kanonischen Systeme q, p und β, α übereinstimmende Spektren haben, läßt sich aus (3) eine Darstellung (2) des Zusammenhangs (1) der Größen q, p und β, α gewinnen; das ist in I. gezeigt, mag aber noch einmal kurz erläutert werden. Die Formeln (1) besagen: wenn wir mit $\bar{\beta}, \bar{\alpha}$ die Matrizen von β, α bezüglich β, α bezeichnen, so wird

$$\bar{q}_k = G_k(\bar{\beta}, \bar{\alpha}); \quad \bar{p}_k = F_k(\bar{\beta}, \bar{\alpha}); \tag{4}$$

also gilt

$$\left.\begin{aligned} G_k(\bar{\beta}, \bar{\alpha}) &= (\Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha})^{-1}\, q_k\, \Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha}, \\ F_k(\bar{\beta}, \bar{\alpha}) &= (\Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha})^{-1}\, p_k\, \Phi^{q\,\beta}_{p\,\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wegen der Übereinstimmung der Spektren von q, p und β, α kann man nun auf der rechten Seite die vorkommenden Matrixindizes $q', q'', \ldots; p', \ldots$ auch durch $\beta', \beta'' \ldots; \alpha', \ldots$ ersetzen; bildet man so aus

$$\Phi^{-1}_{p\alpha}(q', \beta') = T(q', \beta') \tag{6}$$

eine Matrix $T(\beta', \beta'')$, so erhält (5) die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} G_k(\bar{\beta}, \bar{\alpha}) &= T\, \bar{\beta}_k\, T^{-1}, \\ F_k(\bar{\beta}, \bar{\alpha}) &= T\, \bar{\alpha}_k\, T^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In diesem speziellen Falle ist also die Diracsche Auffassung der kanonischen Transformationen mit der ursprünglichen Auffassung formal äquivalent; inhaltlich bedeutet sie freilich auch hier etwas anderes.

Wir werden aber auch jetzt noch überzeugt sein dürfen, daß f unabhängige Größen $g_1(q, p), \ldots, g_f(q, p)$, die untereinander sämtlich vertauschbar sind, ein Koordinatensystem $\beta_1, \ldots, \beta_f$ bilden. Diese Behauptung schließt in sich die Behauptung, daß ein gewisses durch die Gleichungen (2a), § 3 bzw. (4a), § 3 gestelltes Eigenwertproblem lösbar sei. Von einem vollständigen Beweis dieser mathematischen Behauptung (deren exakte Voraussetzungen erst noch genauer formuliert werden müßten) sind wir wohl noch weit entfernt; an ihrer mathematischen Richtigkeit (unter geeigneten Voraussetzungen) ist jedoch auf Grund ihres physikalischen Sinnes kaum zu zweifeln. Wertvolle Ansätze zu ihrem Beweis finden sich in der mehrfach genannten von Neumannschen Arbeit; wir weisen darauf hin, ohne genauer auf den diesbezüglichen Inhalt der Arbeit einzugehen, da wir nichts Neues darüber zu sagen haben. Wir wollen aber hervorheben, daß es sich nach dem Gesagten nicht um ein Eigenwertproblem im gewöhnlichen Sinne, nämlich die Transformation einer einzigen quadratischen Form auf ihre Hauptachsen handelt, sondern um die gleichzeitige Hauptachsentransformation von f vertauschbaren Formen. Man möchte geneigt sein, in diesem Umstand zunächst eine besondere Komplikation des mathematischen Problems zu sehen; aber ganz im Gegenteil scheint gerade die Betrachtung aller f Gleichungen (2a), § 3 zusammen — nicht nur einer einzigen von ihnen, wie etwa der Schrödingergleichung — wesentlich, wenn man zu einfachen mathematischen Sätzen, und deshalb wahrscheinlich auch, wenn man zu einfachen mathematischen Beweisen gelangen will.

Von den Mathematikern ist bekanntlich nur das Eigenwertproblem einer beschränkten quadratischen Form vollständig erledigt worden (Hilbert, Hellinger usw.). Einer der wichtigsten Sätze, die für diese gelten, ist: Jeder Eigenwert (auch im Streckenspektrum) besitzt nur eine endliche oder höchstens eine abzählbar unendliche Vielfachheit. Nun sind fast alle in der Quantenmechanik vorkommenden quadratischen Formen nicht beschränkt. Betrachten wir aber ein System von nur einem Freiheitsgrad, so muß nach dem physikalischen Sinne der Sache angenommen werden, daß der genannte Satz trotz der Unbeschränktheit der vorkommenden Formen erhalten bleibt, und daß die Eigenwerte sogar stets nur von endlicher Vielfachheit sind. Anders wird es jedoch bei zwei oder allgemeiner bei f Freiheitsgraden. Hier werden im allgemeinen, wenn man nur eine einzige der Gleichungen (2a), § 3 betrachtet, die Eigenwerte unabzählbar vielfach werden, derart, daß jedem Eigenwert eine Schar von Eigenlösungen entspricht, die bis zu $f-1$ stetige Parameter enthalten kann. Erst die gleichzeitige Betrachtung aller f Gleichungen (2a), § 3 und die erweiterte Definition der Eigenwerte, die wir schon in § 1 eingeführt haben, führt — so muß nach dem physikalischen Sinne der Sache angenommen werden — zu endlich vielfachen Eigenwerten zurück.

§ 5. Die physikalische Bedeutung der Amplituden. In I. sind die Amplituden $\Phi_{\alpha p}^{\beta q}$ (bei nichtentarteten q, β) physikalisch so gedeutet, daß $\left|\Phi_{\alpha p}^{\beta q}\right|^2$ ein Maß für die (relative) Wahrscheinlichkeit gewisser q' bei vorgegebenen β' oder umgekehrt gewisser β' bei vorgegebenen q' sei[1]. Von Dirac ist betont worden, daß die Wahrscheinlichkeit von q' bei vorgegebenen β' und Mittelung über die α' durch $\left|\Phi_{\alpha p}^{\beta q}\right|^2$ zu bestimmen sei; der Umstand jedoch, daß in unserer Ausdrucksweise bei vorgegebenen β' alle α' gleichwahrscheinlich werden — dies folgt unmittelbar aus dem Axiom (C) —, ergibt die volle Äquivalenz beider Deutungen.

Die Möglichkeit einer solchen statistischen Deutung der Amplituden beruht wesentlich auf folgenden drei Tatsachen:

1. Das Absolutquadrat $\left|\Phi_{\alpha p}^{\beta q}\right|^2$ ist — im Gegensatz zu $\Phi_{\alpha p}^{\beta q}$ selbst — unabhängig von der Wahl der Impulse α, p durch die Größen β, q allein bestimmt.

2. Sind einige der Größen q von den Größen β abhängig: also etwa $q_1 = q_1(\beta), \ldots q_r = q_r(\beta)$, so ist $\left|\Phi_{\alpha p}^{\beta q}\right|^2$ nur dann ungleich Null, wenn $q_1' = q_1(\beta'), \ldots, q_r' = q_r(\beta')$. Diese Tatsache ergibt sich nach den gemachten Feststellungen leicht aus der Gestalt der Amplitudengleichungen.

3. Gehen wir von dem kanonischen System β, α zu einem anderen $\bar{\beta}, \bar{\alpha}$ über, bei dem $\bar{\beta}$ Funktionen der β sind, so transformiert sich $\left|\Phi_{\alpha p}^{\beta q}\right|^2$ gerade in der von einer Wahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte zu fordernden Weise.

Wir beweisen jetzt den ersten dieser drei Sätze:

Wir fragen zunächst nach der Amplitude $\Phi_{\alpha p}^{\beta q}$ im Falle $q = \beta$, $p = \bar{\alpha}$, also nach $\Phi_{\alpha \bar{\alpha}}^{\beta \beta}$. Die Gleichungen (4a), § 3 ergeben

$$\Phi_{\alpha \bar{\alpha}}(\beta', \beta'') \beta_k'' - \beta_k' \Phi_{\alpha \bar{\alpha}}(\beta', \beta'') = 0, \tag{1}$$

also

$$\Phi_{\alpha \bar{\alpha}}^{\beta \beta} = \delta(\beta' - \beta'') \cdot \chi(\beta'). \tag{2}$$

Aus (A), (B) folgt dann, daß $|\chi(\beta')| = 1$ sein muß. Danach erhalten wir leicht den Satz:

Zwei Amplituden $\Phi_{\alpha p}^{\beta q}$ und $\Phi_{\bar{\alpha} \bar{p}}^{\beta q}$ zu denselben Koordinatensystemen, aber verschiedenen Impulsen unterscheiden sich

[1] Vgl. insbesondere I., § 2, wo auch der große Anteil hervorgehoben ist, den Herr Pauli an dieser Deutung hat.

nur durch zwei je von den β' allein bzw. den q' allein abhängende Phasenfaktoren:

$$\Phi^{\beta\,q}_{\bar{\alpha}\,\bar{p}} = e^{\frac{2\pi i}{h}\varrho(\beta') + \frac{2\pi i}{h}\sigma(q')} \cdot \Phi^{\beta\,q}_{\alpha\,p}. \tag{3}$$

Dabei ist $\varrho(\beta')$ unabhängig von der Wahl der $\bar{p}$ und $\sigma(q')$ unabhängig von $\bar{\alpha}$.

Insbesondere ist also

$$\left|\Phi^{\beta\,q}_{\bar{\alpha}\,\bar{p}}\right|^2 = \left|\Phi^{\beta\,q}_{\alpha\,p}\right|^2. \tag{4}$$

Wegen des Umstandes, daß in den Amplituden $\Phi^{\beta q}_{\alpha p}$ Phasen enthalten sind, die nicht durch β, q allein bestimmt sind, hat v. Neumann es vorgezogen, die grundsätzlichen Formulierungen der Quantenmechanik ohne Bezugnahme auf die Amplituden zu entwickeln. Man muß dann naturgemäß die mathematische Operatorendarstellung der mechanischen Größen zum Ausgangspunkt der Betrachtung machen. Dabei muß aber nicht nur ein ausgezeichnetes Koordinatensystem, etwa q, festgelegt werden, auf welches sich die Operatoren beziehen, sondern zur Eindeutigmachung der Operatoren muß auch, wie wir ausgeführt haben, ein ausgezeichnetes Impulssystem p zu q angegeben werden. Das bedeutet aber, daß in Wahrheit auch in dieser Formulierung nicht die phasenfreien Absolutquadrate $(\Phi^{\beta q}_{\alpha p})^2$ direkt definiert werden, sondern daß lediglich einer der zwei Phasenfaktoren in (3) aus den Grundformulierungen der Theorie beseitigt ist. Wir haben ferner gesehen, daß eine einfache allgemeine Kennzeichnung der kanonischen Größen nur durch Benutzung der Amplituden möglich ist (Axiom C); in der Operatorendarstellung würde sie ganz kompliziert werden. Auch scheint es z. B. sehr schwierig, die Gesamtheit der Systeme α, die als Impulse zu β benutzt werden können, ohne Benutzung der Amplituden allgemein zu bestimmen. Bei stetigen Größen β, α gilt bekanntlich (wie in der klassischen Theorie) der Satz, daß gleichzeitig mit α auch das System der

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_k + \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta_k}$$

ein Impulssystem zu β ist. Aber es scheint kaum möglich, eine einfache Formel ähnlichen Charakters auch für den allgemeinen Fall nicht durchweg stetiger Größen anzugeben. Dagegen ist, wie wir sahen, die entsprechende Frage bezüglich der Amplituden — nämlich eben die Frage nach der Gesamtheit der möglichen Amplituden zu gegebenen Größen β, q — in einfacher Weise zu beantworten. Es scheint danach, daß wirklich die

Amplituden selber als der physikalisch ursprüngliche Begriff der Quantenmechanik betrachtet werden müssen.

Endlich wenden wir uns zum dritten der am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Sätze[1]. Wir wollen also statt der β ein Koordinatensystem $\bar{\beta}$:

$$\bar{\beta}_k = B_k(\beta); \quad \beta_k = b_k(\bar{\beta}) \tag{5}$$

benutzen. Es gilt

$$\Phi^{\bar{\beta} q}_{\bar{\alpha} p} = \Phi^{\bar{\beta}\beta}_{\bar{\alpha}\alpha}\, \Phi^{\beta q}_{\alpha p}; \tag{6}$$

dabei ist in Rücksicht auf (5) und auf die Amplitudengleichungen:

$$\Phi^{\bar{\beta}\beta}_{\bar{\alpha}\alpha} = \delta\big(b(\bar{\beta}') - \beta'\big)\,.\,F(\bar{\beta}'); \tag{7}$$

also

$$\Phi_{\bar{\alpha} p}(\bar{\beta}', q') = F(\bar{\beta}')\cdot \quad \Phi_{\alpha p}\big(b(\bar{\beta}'), q'\big). \tag{8}$$

Wir haben deshalb nur noch zu zeigen, daß der Faktor $F(\bar{\beta}')$, absolut genommen, den richtigen Wert besitzt, nämlich innerhalb jedes r-dimensionalen Spektralgebiets von $\bar{\beta}$ bzw. β gleich der Wurzel aus der r-dimensionalen Funktionaldeterminante der Transformation in diesem Gebiet ist. Das folgt aber nach (8) unmittelbar aus dem Vergleich der beiden Orthogonalitätsrelationen

$$\Phi^{\bar{\beta} q}_{\bar{\alpha} p}\, \Phi^{q \bar{\beta}}_{p \bar{\alpha}} = \delta(\bar{\beta}' - \bar{\beta}'') \tag{9}$$

und

$$\Phi^{\beta q}_{\alpha p}\, \Phi^{q \beta}_{p \alpha} = \delta(\beta' - \beta''); \tag{10}$$

denn offenbar multipliziert sich δ bei der Transformation (5) mit der Funktionaldeterminante.

§ 6. Zur Theorie des Magnetelektrons. Wir wollen endlich die allgemeine Theorie erläutern durch eine Betrachtung des „ruhenden“ Magnetelektrons, das kürzlich von Pauli[2] untersucht worden ist. Wir haben gesehen, daß, obwohl z. B. die Vertauschungsregel $Et - tE = \frac{h}{2\pi i}$ bei gequantelten Systemen nicht aufrecht erhalten werden kann, dennoch E in den meisten praktisch vorkommenden Fällen durch den Operator $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t'}$ dargestellt werden kann; wir können also

[1] Vgl. dazu P. Jordan, ZS. f. Phys. **41**, 797, 1927.

[2] W. Pauli jr., ZS. f. Phys. (im Erscheinen begriffen). Die vorangegangene Untersuchung von C. G. Darwin, Nature, März 1927, bezieht sich auf den hier nicht betrachteten Fall des translatorisch bewegten Magnetelektrons. Herrn Pauli bin ich sehr zu Dank verpflichtet für die Möglichkeit, seine Arbeit schon vor dem Erscheinen kennenzulernen.

sagen, daß in den meisten Fällen die Abänderungen, die an den früheren Formulierungen der Quantenmechanik vorgenommen werden müssen, nicht sehr groß sind. Aber das Magnetelektron liefert wirklich ein Beispiel, bei dem die früheren kanonischen Vertauschungsregeln gänzlich versagen; der Wunsch, die hier bestehenden Verhältnisse völlig zu verstehen, war eine wesentliche Veranlassung zur Durchführung dieser Untersuchung. In der Tat wird sich im folgenden zeigen, daß die Theorie in der Fassung, die wir oben vorgetragen haben, ohne Abänderung und Einschränkung auch beim ruhenden Magnetelektron gültig bleibt und eine vollständige Beschreibung seines mechanischen Verhaltens liefert.

Nach klassischen Analogien liegt es nahe, als kanonisch konjugierte Größe zur z-Komponente s_z des Drehimpulses einen Drehwinkel um die z-Achse anzusehen. Nach unserer allgemeinen Theorie ist das jedoch unmöglich; da s_z nur endlich viele, nämlich zwei Werte annehmen kann, so kann die erforderliche Orthogonalität der zu s_z und seiner hypothetischen Konjugierten gehörigen Amplitude nur dann hergestellt werden, wenn auch diese konjugierte Größe lediglich zwei (nicht etwa kontinuierlich viele) Eigenwerte besitzt. Wir müssen also schließen, daß beim Magnetelektron ein Analogon eines solchen klassischen Drehwinkels nicht existiert. In der Tat scheint es nicht möglich, ein Experiment anzugeben, durch das man einen solchen Winkel empirisch definieren könnte. Wir wollen geradezu zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen die Annahme machen, daß man beim Magnetelektron keinerlei andere Größen messen kann, als die Impulskomponente s_z in einer beliebigen Richtung z. Diese Messung geschieht nach Pauli etwa so, daß man plötzlich ein starkes homogenes Magnetfeld parallel zu z einschaltet und feststellt, ob sich das Elektron parallel oder antiparallel einquantelt Als konjugierter Impuls zu s_z muß also (da es andere Größen nicht gibt) wiederum eine (geeignet normierte) Komponente $s_{z'}$ angenommen werden. Bei gegebenem s_z (parallele oder antiparallele Einstellung im Felde $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_z$) müssen nach unserem allgemeinen Satze die beiden möglichen Werte des konjugierten Impulses $s_{z'}$ gleich wahrscheinlich werden. Daraus ist zu folgern, daß z' senkrecht auf z stehen muß: in der Tat werden, wenn wir das parallel oder antiparallel zu z eingequantelte Elektron plötzlich, z. B. in ein zu x ($x \perp z$) paralleles Feld versetzen, die parallele und die antiparallele Einstellung im neuen Felde gleich wahrscheinlich sein. Wir haben hier übrigens ein sehr anschauliches Beispiel für den allgemeinen quantenmechanischen Satz, daß man zwei konjugierte Größen nicht zugleich beobachten kann: man kann eben das Magnetelektron nicht gleichzeitig in zwei verschiedenen Richtungen einquanteln.

Wenn wir jetzt mit ξ, η, ζ die zu x, y, z parallelen Komponenten des Eigenimpulses des Elektrons bezeichnen, und zwar gemessen im Maße $\frac{h}{2\pi}$, so daß jede die Werte $\pm\frac{1}{2}$ annehmen kann, so erhalten wir Übereinstimmung mit den Annahmen von § 2, Beispiel e), wenn wir zunächst

$$\beta = -(\zeta + \tfrac{1}{2}), \quad \alpha = -\frac{h}{2}(\xi + \tfrac{1}{2}) \tag{1}$$

setzen. Die Amplitude $\Phi_{-\beta\alpha}^{\alpha\beta}$ nimmt nach § 2 die vier Werte

$$\Phi_{\alpha-\beta}^{\beta\alpha} = \Phi_{-\beta\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \tag{2}$$

an; die Matrizen τ, ϱ von ζ und ξ in bezug auf β, α werden also nach unseren früheren Formeln gleich

$$\tau = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\varrho = \frac{1}{2}(\Phi_{-\beta\alpha}^{\alpha\beta})^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\Phi_{-\beta\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Wir sehen also, daß

$$Q = \frac{2}{i}\tau\varrho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

wieder eine reelle Größe wird, und zwar mit den Eigenwerten $Q' = \pm\frac{1}{2}$. Ihre physikalische Bedeutung ergibt sich, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten von $Q' = \pm\frac{1}{2}$ erstens bei gegebenem ζ und zweitens bei gegebenem ξ bestimmen. Nennen wir P (irgend) einen Impuls zu Q, so gilt die Amplitudengleichung

$$\Phi_{P\alpha}^{Q\beta}\cdot\frac{2}{i}\tau\varrho - Q'\cdot\Phi_{P\alpha}^{Q\beta} = 0, \tag{6}$$

oder, ausführlicher:

$$\left.\begin{aligned} -i\,\Phi_{P\alpha}(Q',-1) - 2\,Q'\,\Phi_{P\alpha}(Q',\;\;0) &= 0,\\ i\,\Phi_{P\alpha}(Q',\;\;0) - 2\,Q'\,\Phi_{P\alpha}(Q',-1) &= 0;\\ 2\,Q' = \pm 1.& \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Das heißt: die vier Werte von $\Phi_{P\alpha}(Q',\beta')$ sind nach Normierung gleich

$$\left.\begin{pmatrix}\Phi_{P\alpha}(-\frac{1}{2},0), & \Phi_{P\alpha}(-\frac{1}{2},-1)\\ \Phi_{P\alpha}(+\frac{1}{2},0), & \Phi_{P\alpha}(+\frac{1}{2},-1)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{i\omega_1} & -i\,e^{i\omega_1}\\ e^{i\omega_2} & i\,e^{i\omega_2}\end{pmatrix};\right\} \tag{8}$$

die Phasendifferenz $\omega_1 - \omega_2$ hängt von der Wahl von P ab. Wir sehen also: Bei vorgegebenem Wert von ζ (bzw. β) sind beide Werte von Q gleichwahrscheinlich. Nach den oben gemachten Bemerkungen muß also Q physikalisch eine zu ζ senkrechte Impulskomponente sein. Wir behaupten aber, daß Q auch zu ξ senkrecht ist: Nach (8) und (2) erhält man nämlich vermöge

$$\Phi^{Q\,\alpha}_{P\,-\beta} = \Phi^{Q\,\beta}_{P\,\alpha}\,\Phi^{\beta\,\alpha}_{\alpha\,-\beta} \tag{9}$$

auch bei vorgegebenem ξ gleichwahrscheinliche Werte von Q. Also müssen wir Q physikalisch deuten als $\pm\,\eta$, wobei das Vorzeichen natürlich beliebig gewählt werden kann; wir wählen es positiv.

Die Matrizen ϱ, σ, τ von ξ, η, ζ in bezug auf β, α erhalten wir somit zusammenfassend in der Form:

$$\varrho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \tag{10}$$

das sind die Paulischen Matrizen $\frac{1}{2}s_x$, $\frac{1}{2}s_y$, $\frac{1}{2}s_z$ [vgl. Paulis Formeln (3), (3')]. Wir bekommen aus ihnen auch die Vertauschungsregeln der s_x, s_y, s_z, wie sie von Pauli (nach Heisenberg und dem Verfasser) in Analogie zu den für die Impulsmomente $M_x = q_y p_z - q_z p_y$ usw. gültigen Vertauschungsregeln angenommen sind: Aus unserer Theorie folgen sie zwangsläufig, ohne daß man sich auf eine solche (im Grunde recht zweifelhafte) Analogie berufen muß.

Am einfachsten sind die Multiplikationsgesetze der s_x, s_y, s_z so auszudrücken: die Größen $i s_x$, $i s_y$, $i s_z$ verhalten sich wie Quaternionen-Einheiten k_1, k_2, k_3. Damit bestätigen wir die unseren Betrachtungen zugrunde gelegte Annahme, daß es beim ruhenden Magnetelektron keine anderen meßbaren Größen gibt als die Impulskomponenten in den verschiedenen Richtungen: Jede durch beliebig viele Multiplikationen und Additionen aus s_x, s_y, s_z gebildete Größe kommt zurück auf die Gestalt

$$a_0 + a_1 i k_1 + a_2 i k_2 + a_3 i k_3 \tag{11}$$

mit reellen a_0 bis a_3, wenn sie hermitisch ist; sie bedeutet also immer die Impulskomponente in einer gewissen Richtung, multipliziert mit einer reellen Zahl und vermehrt um eine reelle Zahl.

Fragen wir endlich nach der Amplitude $\Phi^{\beta\bar{\beta}}_{\alpha\bar{\alpha}}$, wobei β, $\bar{\beta}$ die Impulskomponenten in den Richtungen z, $\bar{z}$ und die konjugierten α, $\bar{\alpha}$ die (geeignet normierten) Komponenten in den Richtungen x, $\bar{x}$ ($x \perp z$, $\bar{x} \perp \bar{z}$) sind, so sind die vier Werte von $\Phi^{\beta\bar{\beta}}_{\alpha\bar{\alpha}}$, wie bei Pauli gezeigt ist, die vier Caley-

Kleinschen Parameter der Drehung vom Achsensystem x, y, z zu $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; damit ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für die Werte $\pm \frac{1}{2}$ von $\bar{\beta}$ bei vorgegebenem Werte $\pm \frac{1}{2}$ von β als

$$\left.\begin{array}{ll} \cos^2 \frac{\theta}{2}, & \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \sin^2 \frac{\theta}{2}, & \cos^2 \frac{\theta}{2}, \end{array}\right\} \tag{12}$$

wenn θ der Winkel zwischen z und $\bar{z}$ ist.

Herrn Prof. N. Bohr bin ich zu herzlichem Dank verpflichtet für die freundliche Aufnahme in seinem Institut und für viele anregende Unterhaltungen. Dem International Education Board habe ich zu danken für die Ermöglichung eines Aufenthalts in Kopenhagen.