Eine neue Einteilung der Permutationen.

Von

Lothar v. Schrutka in Wien.

1. *Aufstiege und Abstiege. Profil einer Permutation.* Ist $ab \ldots ik \ldots m$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so möge gesagt werden, daß zwei nebeneinander stehende Zahlen (Elemente) i und k einen *Aufstieg* oder einen *Abstieg* bilden, je nachdem $i < k$ oder $i > k$ ist. Die Anzahl der Aufstiege und der Abstiege zusammen beträgt $n - 1$. Ein Aufstieg möge durch das Zeichen $/$, ein Abstieg durch das Zeichen $\backslash$ angedeutet werden. Jeder Permutation entspricht daher eine Aufeinanderfolge von $n - 1$ Zeichen $/$ oder $\backslash$, die etwa das *Profil* der Permutation genannt werden möge. Dagegen entsprechen einem solchen Profil im allgemeinen mehrere Permutationen, wie schon daraus ersichtlich ist, daß es $n!$ Permutationen, dagegen 2^{n-1} Profile gibt, und daß zwar für $n = 1$ und 2 $n! = 2^{n-1}$, dagegen für $n \geqq 3$ $n! > 2^{n-1}$ ist. So z. B. entspricht der Permutation 1675243 das Profil $//\backslash\backslash/\backslash$, umgekehrt diesem Profil nicht nur die Permutation 1675243, sondern auch 1453276, 1276354 und noch andere.

Permutationen, die Auf- und Abstiege in regelmäßigem Wechsel aufweisen, sind von D. Andrè in Journ. de Math. (3) **7** (1881), S. 167 und Paris C. R. **97** (1883), S. 983, 1356 betrachtet und *alternierende* genannt worden; er hat einen bemerkenswerten Zusammenhang mit den Sekanten- und den Tangentenkoeffizienten aufgedeckt (auch dargestellt in E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, § 60, 63). Solche alternierenden Permutationen sind z. B. 25143, 51324 usw.

2. *Aufstiegzüge und Abstiegzüge.* Eine Gruppe von Elementen mit lauter Aufstiegen, die beiderseits von einem Abstieg eingeschlossen werden oder bis an den Rand reichen, bildet einen *Aufstiegzug*. Hierunter soll auch der Fall von 0 Aufstiegen eingeschlossen werden. Ganz entsprechend ist ein *Abstiegzug* zu erklären. Die Anzahl der Aufstiegzüge und der Abstiegzüge zusammen beträgt $n + 1$. In der Permutation 1675243 bilden also 167, 5, 24, 3 Aufstiegzüge, 1, 6, 752, 43 Abstiegzüge.

Das letzte Element eines Aufstiegzuges bildet mit dem ersten des folgenden einen Abstieg, und umgekehrt bilden die beiden Elemente eines Abstiegs das Ende und den Anfang je eines Aufstiegzuges. Daher ist die Anzahl der Aufstiegzüge um 1 größer als die der Abstiege. Ebenso ist die Anzahl der Abstiegzüge um 1 größer als die der Aufstiege. Bei Anzahlbestimmungen kann man sich daher auf die Auf- oder Abstiege beschränken. Im folgenden sollen in erster Linie die Abstiege gezählt werden.

Die Auf- und Abstiegzüge sind von J. Bienaymé [Paris C. R. 81 (1875), S. 418] unter dem Namen *steigende* und *fallende Sequenzen* behandelt worden (auch dargestellt in E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, § 60).

3. *Kennzeichnung der Profile durch Zahlen.* Setzt man in einem Profil für / die Ziffer 0 und für \ die Ziffer 1 ein und liest die Zahl im Zweiersystem, so bekommen alle möglichen Profile fortlaufende Zahlen von 0 bis $2^{n-1}-1$.

4. *Einteilung der Permutationen. Die Anzahlen C_k^n.* Man kann die Permutationen nach der Zahl der Abstiege einteilen. Es sei C_k^n die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit k Abstiegen (daher mit $n-1-k$ Aufstiegen). Schreibt man alle Permutationen in umgekehrter Anordnung, so wird aus jedem Aufstieg ein Abstieg und umgekehrt. Also ist $C_k^n = C_{n-1-k}^n$. Hierbei muß $n \geqq 2$ sein.

Als Beispiel seien die 24 Permutationen für $n = 4$ angeführt:

Permutation	Profil	Zahl		Anzahl der Abstiege	Permutation	Profil	Zahl		Anzahl der Abstiege
		dyadisch	dekadisch				dyadisch	dekadisch	
1234	/ / /	000	0	0	3124	\ / /	100	4	1
1243	/ / \	001	1	1	3142	\ / \	101	5	2
1324	/ \ /	010	2	1	3214	\ \ /	110	6	2
1342	/ / \	001	1	1	3241	\ / \	101	5	2
1423	/ \ /	010	2	1	3412	/ \ /	010	2	1
1432	/ \ \	011	3	2	3421	/ \ \	011	3	2
2134	\ / /	100	4	1	4123	\ / /	100	4	1
2143	\ / \	101	5	2	4132	\ / \	101	5	2
2314	/ \ /	010	2	1	4213	\ \ /	110	6	2
2341	/ / \	001	1	1	4231	\ / \	101	5	2
2413	/ \ /	010	2	1	4312	\ \ /	110	6	2
2431	/ \ \	011	3	2	4321	\ \ \	111	7	3

Zählt man ab, so findet man für die Permutationen mit 0, 1, 2, 3 Abstiegen die Anzahlen 1, 11, 11, 1. Bei $n = 3$ findet man in ähnlicher Weise für die Permutationen mit 0, 1, 2 Abstiegen die Anzahlen 1, 4, 1. Bei $n = 2$ gibt es nur die beiden Permutationen 12 und 21; die erste hat keinen, die zweite einen Abstieg. Bei $n = 1$ gibt es nur die eine Permutation 1, die keinen Abstieg hat.

5. *Rücklaufformel für die Zahlen C_k^n.* Für höhere n wäre die Auszählung schon sehr mühsam. Die C_k^n lassen sich aber rücklaufend (rekurrent) berechnen. Zur Herleitung dient ein Verfahren, das auch von D. André angewendet wird. Wird in einer Permutation von $1, 2, \ldots, n$ die Zahl n gestrichen, so bleibt eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ übrig. Stand n am linken Rand, so fällt im Profil das erste Zeichen \ weg; stand n im Innern, so wird ein

Zeichenpaar $/\backslash$ durch $/$ oder durch $\backslash$ ersetzt, je nach der Größenbeziehung der beiden Elemente, die dem n benachbart waren; stand endlich n am rechten Rand, so fällt das letzte Zeichen $/$ weg. Im ersten Fall wird die Anzahl der Abstiege um eins kleiner; im zweiten Fall wird sie um eins kleiner oder sie bleibt unverändert, je nachdem $/$ oder $\backslash$ an Stelle von $/\backslash$ tritt; im dritten Fall bleibt sie unverändert. Also werden aus jeder der C_k^n Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ mit k Abstiegen so viele Permutationen von $1, 2, \ldots, n-1$ mit $k-1$ Abstiegen, als sie selbst Aufstiege haben und noch eine dazu, somit $n-1-k+1 = n-k$, und so viele Permutationen von $1, 2, \ldots, n-1$ mit k Abstiegen, als sie selbst Abstiege haben und noch eine dazu, somit $k+1$.

Also gilt die Rücklauf- (Rekursions-) formel

$$C_k^n = \overline{n-k}\, C_{k-1}^{n-1} + \overline{k+1}\, C_k^{n-1}.$$

Nach dieser lassen sich die Zahlen C leicht berechnen.

6. *Werte der Zahlen C_k^n.* Die ersten Werte enthält die folgende Tabelle:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1
7	1	120	1191	2416	1191	120
8	1	247	4293	15619	15619	4293
9	1	502	14608	88234	156190	88234
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354

In gewissem Sinne ist eine Anordnung im Dreieck, wie bei den Binomialkoeffizienten, anschaulicher:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & \\ 1 & & 26 & & 66 & & 26 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Nach der Bedeutung der Zahlen C_k^n ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile gleich $n!$. Dasselbe folgt durch vervollständigte Induktion aus der Rücklaufformel.

7. *Auftreten der Zahlen C_k^n als höhere Differenzen.* Die Zahlen C_k^n treten an verschiedenen Stellen in der Mathematik auf. Sie finden sich zuerst bei

P. S. Laplace, Mém. de l'acad. des sciences à Paris 1777, S. 99 usw., und bei S. F. Lacroix, Traité des différences, t. 3, 2^de^ éd. 1800, S. 114 (beides angeführt nach L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin, Springer, 1893, S. 65, Anm. 1, mit einigen Ergänzungen nach J. C. Poggendorff, Lit.-biogr. Handwörterbuch, Band 1; bei Saalschütz ist $C_k^n = A_{k+1}^n$). Die Formel von Laplace lautet [Saalschütz, Vorl., S. 63, Formel (32); S. 76, Formel (12)]:

$$C_k^n = (k+1)^n - \binom{n+1}{1} k^n + \binom{n+1}{2} (k-1)^n - \cdots + (-1)^n \binom{n+1}{k} 1^n.$$

Sie kann sogleich durch Nachweis der Rücklaufformel in 5. bestätigt werden (L. Saalschütz, Vorl., S. 63, 64).

Für die Laplacesche Formel kann noch eine recht anschauliche Darstellung gegeben werden. Sie unterscheidet sich nämlich von der Formel für die $(n+1)$-te Differenz für die Zahlenfolge der n-ten Potenzen der ganzen Zahlen

$$(a+n+1)^n - \binom{n+1}{1}(a+n)^n + \binom{n+1}{2}(a+n-1)^n - \cdots + (-1)^{n+1} a^n,$$

wo $a = -n, -n+1, \ldots, -1$ zu setzen ist, nur dadurch, daß an Stelle der n-ten Potenzen der negativen Zahlen 0 eintritt. Die Zahlen C_k^n sind daher die $(n+1)$-ten Differenzen der Zahlenfolge $\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n, \ldots,$ soweit sie nicht Null sind. Der Fall $n = 4$ sei hier mit Hilfe des Differenzenspiegels dargestellt:

$$\begin{array}{rrrrrr}
0 & & & & & \\
 & 0 & & & & \\
0 & & 0 & & & \\
 & 0 & & 0 & & \\
0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & \mathit{1} \\
0 & & 0 & & 1 & \\
 & 0 & & 1 & & \mathit{11} \\
0 & & 1 & & 12 & \\
 & 1 & & 13 & & \mathit{11} \\
1 & & 14 & & 23 & \\
 & 15 & & 36 & & \mathit{1} \\
16 & & 50 & & 24 & \\
 & 65 & & 60 & & 0 \\
81 & & 110 & & 24 & \\
 & 175 & & 84 & & 0 \\
256 & & 194 & & 24 & \\
 & 369 & & 108 & & 0 \\
625 & & 302 & & 24 & \\
 & 671 & & 132 & & \\
1296 & & 434 & & & \\
 & 1105 & & & & \\
2401 & & & & &
\end{array}$$

8. *Auftreten der Zahlen C_k^n als Entwicklungskoeffizienten in höheren Ableitungen.* Die Zahlen C_k^n treten ferner, mit abwechselnden Vorzeichen, als Koeffizienten der Zähler der Ausdrücke

$$\frac{v}{(1+v)^2},\ \left(\frac{v}{(1+v)^2}\right)',\ \left(v\left(\frac{v}{(1+v)^2}\right)'\right)',\ \left(v\left(v\left(\frac{v}{(1+v)^2}\right)'\right)'\right)', \ldots$$

auf (L. Saalschütz, Vorl., S. 60; siehe auch G. Frobenius, Sitzungsb. d. preuß. Akademie d. W., 1910, S. 826). Durch eine kleine Umformung kann man daraus auf die höheren Ableitungen von $\frac{1}{1-e^x}$ gelangen. In der Tat ist

$$\left[\frac{1}{1-e^x}\right]' = -\frac{-e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2},$$

$$\left[\frac{1}{1-e^x}\right]'' = \left[\frac{e^x}{(1-e^x)^2}\right]' = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} - 2\frac{e^x \cdot - e^x}{(1-e^x)^3} = \frac{e^x + e^{2x}}{(1-e^x)^3},$$

$$\left[\frac{1}{1-e^x}\right]''' = \left[\frac{e^x + e^{2x}}{(1-e^x)^3}\right]' = \frac{e^x + 2e^{2x}}{(1-e^x)^3} - 3\frac{(e^x+e^{2x})\cdot - e^x}{(1-e^x)^4} = \frac{e^x + 4e^{2x} + e^{3x}}{(1-e^x)^4},$$

und wenn

$$\left[\frac{1}{1-e^x}\right]^{(n)} = \frac{C_0^n e^x + C_1^n e^{2x} + \cdots + C_{n-1}^n e^{nx}}{(1-e^n)^{n+1}}$$

gesetzt wird, so folgt

$$\left[\frac{1}{1-e^x}\right]^{(n+1)} = \frac{C_0^n e^x + 2C_1^n e^{2x} + 3C_2^n e^{3x} + \cdots + n\, C_{n-1}^n e^{nx}}{(1-e^x)^{n+1}} -$$

$$- \overline{n+1}\, \frac{(C_0^n e^x + C_1^n e^{2x} + \cdots + C_{n-2}^n e^{\overline{n-1}\,x} + C_{n-1}^n e^{nx}) \cdot - e^x}{(1-e^x)^{n+2}}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} C_0^n e^x + 2\,C_1^n e^{2x} + \cdots + n\,C_{n-1}^n e^{nx} - C_0^n e^{2x} - 2\,C_1^n e^{3x} - \cdots - \\ \quad - \overline{n-1}\, C_{n-2}^n e^{nx} - n\,C_{n-1}^n e^{\overline{n+1}\,x} + \overline{n+1}\, C_0^n e^{2x} + \\ \quad + \overline{n+1}\, C_1^n e^{3x} + \cdots + \overline{n+1}\, C_{n-2}^n e^{nx} + \overline{n+1}\, C_{n-1}^n e^{\overline{n+1}\,x} \end{array}\right.}{(1-e^x)^{n+2}}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} C_0^n e^x + (2C_1^n + n\,C_0^n)\, e^{2x} + (3\,C_2^n + \overline{n-1}\, C_1^n)\, e^{3x} + \cdots + \\ \qquad + (n\,C_{n-1}^n + 2\,C_{n-2}^n)\, e^{nx} + C_{n-1}^n e^{\overline{n+1}\,x} \end{array}\right.}{(1-e^x)^{n+2}}$$

und nach der Rücklaufformel

$$\left[\frac{1}{1-e^x}\right]^{(n+1)} = \frac{C_0^{n+1} e^x + C_1^{n+1} e^{2x} + C_2^{n+1} e^{3x} + \cdots + C_{n-1}^{n+1} e^{nx} + C_n^{n+1} e^{\overline{n+1}\,x}}{(1-e^x)^{n+2}},$$

womit die allgemeine Gültigkeit der Formel nachgewiesen ist.

Im Zusammenhang damit steht das Auftreten der Zahlen C_k^n in der Entwicklung von $\frac{p-1}{p-c^u}$ nach Potenzen von u (L. Saalschütz, Vorl., S. 74).

Es sei noch auf eine Abhandlung von E. Unferdinger im Archiv der Mathematik und Physik **41** (1864), S. 145—151 hingewiesen.

9. *Zusammenhang der Zahlen C_k^n mit gewissen Reihen.* Hier mögen noch kurz einige Abhandlungen von L. Toscano, u. a. Tohoku math. Journal **38** (1933), S. 332—342; Boll. Un. Mat. Ital. **15** (1936), S. 8—12; **16** (1937), S. 144—149 angeführt werden. In der zweiten sind insbesondere auch die in 6. angegebenen Zahlenwerte enthalten.

(Eingegangen am 23. 6. 1941.)