Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation.

Par

W. ANISSIMOFF à Varsovie.

---

§ 1.

Remarques préliminaires sur le problème de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Le problème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires peut être considéré et traité de deux points de vue différents. Prenons, pour fixer les idées, l'équation du premier ordre

(1) $$f[x, y, y'] = 0.$$

L'équation (1), regardée en soi même, ne suppose que l'existence de y fonction de x avec une dérivée déterminée y', et exprime une relation entre ces variables x, y, y'; aux dérivées du deuxième et des ordres supérieurs l'équation (1) ne fait aucune allusion. En Analyse, on démontre, sous les conditions supplémentaires*) dont doit jouir $f(x, y, y')$, qu'il existe une fonction unique y de x, ayant une dérivée déterminée y', prenant pour $x = x_0$ une valeur arbitraire $y = y_0$ et satisfaisant à l'équation (1). Mais, ces conditions n'étant pas remplies, on n'a pas de raisons satisfaisantes pour nier l'existence de la fonction intégrale y, de même qu'on ne peut pas, en cas de l'existence de cette fonction, lui imposer la condition d'avoir les dérivées des ordres supérieurs.

Supposons, qu'il existe pour l'équation (1) son intégrale générale

(2) $$F[x, y, \alpha] = 0,$$

d'où y est définie comme fonction de x et de constante arbitraire α.

Au premier point de vue, le but principal de la théorie des équations différentielles est la recherche et la détermination analytique de l'intégrale générale, pour quoi on se sert de fonctions, en nombre

---

*) Voyez, par exemple, E. Picard. — Traité d'Analyse, t. II, p. 291—304. Paris, 1893.

fini, algébriques, élémentaires et supérieures transcendantes, de quadratures et d'intégrales définies, dans lesquelles x joue le rôle d'un paramètre. Et on regarde le problème comme résolu, dès qu'on a trouvé pour F une expression de la forme ci-indiquée. Cependant, une telle solution du problème, on le voit bien, est, en général, *purement formelle.* En effet, l'équation (2) étant trouvée, souvent on ne peut pas, immédiatement d'après cette équation, dire rien des propriétés essentielles de notre fonction y, qui la caractérisent et dont elle diffère des autres fonctions. Une recherche supplémentaire sera nécessaire pour la résolution de ces questions importantes. Par exemple, l'équation

$$y' = \sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}, \quad \varkappa^2 < 1$$

étant donnée, le problème d'intégration, au sens indiqué plus haut, se résout au moyen de la quadrature

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}} = x + \alpha,$$

qui, les fonctions elliptiques n'étant pas connues, ne nous donnerait aucune indication (au moins immédiatement) sur les propriétés de y. On a aussi pour l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \qquad \begin{cases} X = a_0 x^4 + a_1 x^3 + \cdots + a_4, \\ Y = a_0 y^4 + a_1 y^3 + \cdots + a_4, \end{cases}$$

l'intégrale générale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \alpha,$$

exprimée au moyen des quadratures. Mais cette équation intégrale nous apprend peu de choses sur les propriétés de la fonction cherchée, et il fallait avoir toute la pénétration de Lagrange*) pour faire voir qu'on a aussi

$$\left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y}\right)^2 - a_0(x+y)^2 - a_1(x+y) = \alpha,$$

la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Les considerations précedentes mettent en avant, tout naturellement, une autre manière d'envisager le problème, dont il s'agit. *A ce deuxième point de vue,* le problème consiste dans l'étude des propriétés caractéristiques de la fonction intégrale, l'étude dont les résultats indiqueront pour cette fonction la forme analytique la plus

*) L. Euler. — Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de Lagrange usus est, in integranda equatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Acta Acad. Imp. Sc. Petropolit., t. II, p. I, pag. 20—57.

simple. La question étant si posée, la théorie des fonctions d'une variable complexe avec ses propositions et théorèmes généraux offre, pensons nous contrairement aux avis de M. Korkine*), des ressources inappréciables. En beaucoup de cas, cette théorie, permettant de déterminer les propriétés caractéristiques (dans l'ordre des idées de Riemann) de la fonction intégrale, si elle ne donne pas le résultat *final*, *aide au moins* au succès de la recherche concernant la représentation analytique de cette fonction. Ainsi, par exemple, il y a déjà très longtemps, qu'on a connu, que l'intégrale générale de l'équation

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \cdots + X_n y = 0$$

peut être représentée formellement par l'expression

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n,$$

où, $y_1, y_2, \ldots y_n$ étant les n intégrales particulières distinctes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ designent des constantes arbitraires. Mais c'est M. Fuchs, qui, en s'appuyant sur les théorèmes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, a développé le premier la véritable nature analytique des fonctions satisfaisant à de telles équations. Les travaux de M. Fuchs nous ont montré la forme des intégrales dans le domaine d'un point singulier quelconque. Cette connaissance préliminaire de la représentation analytique des intégrales en facilite beaucoup le calcul.

Sans doute, il peut être très utile pour notre but — l'étude de la fonction intégrale — de savoir l'intégrale générale sous une des formes (2), mais, existant une infinité de telles formes vu la voie d'intégration, il s'arrive souvent, que la plus simple, au premier point de vue, manière d'intégrer donne des résultats moins convenables. Cela est bien évident, nous n'en citerons pas d'exemples. Quoi qu'il en soit, dans tout le cas, l'intégrale générale d'une forme quelconque étant un supplément essentiel à l'équation (1), la recherche des nouvelles méthodes d'intégration aussi que la révision et le développement des anciennes est pour l'Analyse d'une importance capitale.

C'est la discussion des méthodes d'intégration usitées qui est l'objet des lignes suivantes.

§ 2.

La méthode de multiplicateur pour l'intégration des équations différentielles du 1^er^ ordre.

En Analyse, nous ne possédons au fond que deux méthodes générales d'intégration. L'une d'elles c'est *la méthode de multiplicateur*, attribuée ordinairement à Euler, qui a développé, à peu près complètement, la théorie de cette méthode et en a donné de nombreuses

*) A. Korkine. — Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Math. Annal., Bd. XLVIII, p. 317.

applications; l'autre-c'est *la méthode de différentiation*, dont les conséquences importantes sont montrées par Lagrange et appliquées à une classe d'équations qui portent son nom. Ces deux méthodes, conduisant à la résolution du problème proposé par des voies variées, présentent, en leurs principes, une différence essentielle, que nous allons éclaircir.

L'équation (1) étant réduite à

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{3}$$

Euler cherche son intégrale générale sous la forme

$$F[x, y] = \alpha. \tag{4}$$

On arrivera à ce but, après avoir trouvé un multiplicateur E sous la condition

$$E(M\,dx + N\,dy) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy;$$

d'où il suit que E satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$N\frac{\partial E}{\partial x} - M\frac{\partial E}{\partial y} = E\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

On démontre aisément que ce multiplicateur E existe une fois que l'équation (3) a une intégrale de la forme (4). Mais, M et N étant données, la détermination de E ne réussit que dans peu de cas. C'est ainsi qu' Euler et plusieurs autres géomètres renversaient le problème, et, E étant pris en avant, cherchaient la forme des fonctions M et N. En faisant, par division, le coefficient $N = 1$, et supposant que le multiplicateur E est donné, on aura l'équation diffèrentielle linéaire ordinaire

$$\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \log E}{\partial y} = \frac{\partial \log E}{\partial x},$$

log étant le signe des logarithmes népériens. On trouve

$$M = \frac{\varphi(x) + \int \frac{\partial E}{\partial x}\,dy}{E}, \tag{5}$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction arbitraire d'une seule variable x, et l'intégrale générale de l'équation (3) s'écrira dans ce cas sous la forme

$$\int \varphi(x)\,dx + \int E\,dy = \alpha. \tag{6}$$

La méthode de multiplicateur est des plus usitées. En effet, on se sert de cette méthode pour la séparation des variables. Dans les cas, où la séparation ne réussit pas immédiatement, on se prête de la transformation des variables afin de donner à l'équation considérée une telle forme, pour laquelle la séparation se ferait le plus simplement. On comprend tout de suite, que la transformation des variables ne peut jouer un rôle différent de celui que nous en avons indiqué; car, l'expression $Mdx + Ndy$, n'étant pas la différentielle exacte, ne la deviendra pas après la transformation. Cette proposition est bien évidente, nous n'en insistons pas davantage.

Envisageons la méthode de multiplicateur d'un point de vue un peu différent. On a l'identité

$$E(M+Ny') = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y},$$

nous disant que le multiplicateur d'Euler rend l'expression $M + Ny'$ la dérivée exacte par rapport à x de la fonction $F(x, y)$, dès qu'on y considère y comme fonction de x avec une dérivée déterminée y', et on a pour cette fonction y la relation

$$F[x, y] = \alpha,$$

si l'équation (1) est satisfaite. Quant aux dérivées des ordres supérieurs, dans la méthode de multiplicateur il n'y en a pas un mot: il peut arriver que, la fonction intégrale y n'ayant pas des dérivées des ordres supérieurs, l'intégrale générale existera et sera trouvée par la méthode de multiplicateur. Nous avons ainsi la conclusion suivante: *au point de vue de la théorie, la méthode de multiplicateur est applicable toutes les fois, quand, pour l'équation* (1), *existe son intégrale générale.*

§ 3.

La méthode de différentiation pour l'intégration des équations différentielles du 1^er^ ordre.

Le problème de l'intégration peut se résoudre d'une autre manière. À côté de l'équation (1) on considère encore l'équation d'en déduite par la différentiation. Cette voie donne lieu à une méthode, qui peut être nommée *la méthode de différentiation.*

La fonction y, définie par l'équation (1), ayant les dérivées y' et y'', on obtient par la différentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \tag{7}$$

l'équation dont $f(x, y, y') = \alpha$ sera une des intégrales premières. Supposons que nous connaissons une autre intégrale

$$f_1[x, y, y'] = \alpha_1 \tag{8}$$

de la même équation. L'élimination de y' entre (1) et (8) nous donnera pour l'équation (1) son intégrale générale. La fonction f_1 de trois arguments x, y, y' se trouve déterminée, comme on le voit aisément, par l'équation aux dérivées partielles*) du premier ordre

*) Il ne faut pas, à notre avis, s'étonner que dans la méthode de multiplicateur aussi bien que dans la méthode de différentiation la résolution de la

$$(9)\qquad \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}+y'\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}},$$

dont l'intégration est équivalente à celle-ci du système d'équations

$$(10)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y'}}=\frac{dy}{y'\frac{\partial f}{\partial y'}}=-\frac{dy'}{\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Il est bien visible qu'il existe toujours pour le système (10) une intégrale $f_1(x, y, y')=\alpha_1$, différente de $f(x, y, y')=\alpha$, *s'il existe la fonction intégrale y de l'équation* (7) *dépendant de deux constantes arbitraires et ayant les dérivées déterminées y' et y''*. Quant aux dérivées des ordres supérieurs, la fonction y peut ne pas les avoir. Sous les conditions énoncées, *l'intégrale générale de l'équation* (1) *se trouve par la méthode de différentiation.*

Les considérations précedentes nous mettent en lumière la différence entre les deux méthodes d'intégration. Tandis que la méthode de multiplicateur est tout à fait générale, la méthode de différentiation n'est applicable que sous les conditions ci-indiquées.

§ 4.

Les équations différentielles du 1er ordre de Lagrange; une autre forme de ces équations.

Revenons à l'équation (7). Supposons que nous connaissons deux intégrales premières de cette équation $\varphi(x, y, y')=\alpha$ et $\psi(x, y, y')=\beta$, où α et β sont des constantes arbitraires. On obtient, y et y' étant exprimées en fonction de x, φ et ψ,

$$f[x, y, y']=\Phi[x, \varphi, \psi].$$

Or, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ étant nulles simultanément, on conclut

$$f(x, y, y')=\Phi(\varphi, \psi).$$

Ainsi, vient-on aux équations de Lagrange

$$(11)\qquad \Phi[x, \psi]=0,$$

où $\varphi=\alpha$, $\psi=\beta$ sont les intégrales premières d'une même équation du deuxième ordre. L'intégrale générale de l'équation (10) sera donnée par le système

question principale se reduit à l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous en voyons la cause véritable en ce que la fonction cherchée y, définie par l'intégrale générale, est une fonction de deux variables indépendantes x et α, constante de l'intégration. De ces variables seulement x figure explicitement dans l'équation (1) et l'autre α doit apparaître nécessairement, quand nous faisons le dernier pas pour obtenir le résultat final.

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi[x, y, y'] = \alpha, \\ \psi[x, y, y'] = \beta, \end{cases} \quad \Phi[\alpha, \beta] = 0.$$

Les équations de Lagrange peuvent prendre une forme un peu plus différente. La fonction y étant définie par l'équation $f_0(x, y, y') = 0$ et admettant $y', y'', \ldots y^{(n+1)}$, on a par la différentiation

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_1 &= \frac{df_0}{dx} = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n &= \frac{df_{n-1}}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} \varphi_0[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_0, \\ \varphi_1[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_n[x, y, \ldots y^{(n)}] &= \alpha_n \end{aligned}$$

les $n + 1$ intégrales premières indépendantes de l'équation $f_n = 0$. On démontre sans peine qu'il y aura

$$\begin{aligned} f_0 &= \Phi_0\ [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n], \\ f_1 &= \Phi_1\ [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n], \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n-1} &= \Phi_{n-1}[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n]. \end{aligned}$$

Ainsi, *si l'équation* (1) *du premier ordre peut être considérée comme le résultat de l'élimination de* $y'', y''', \ldots y^{(n)}$ *entre les équations*

$$(13)\qquad \begin{cases} \Phi_0\ [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0, \\ \Phi_1\ [\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Phi_{n-1}[\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n] = 0, \end{cases}$$

$\varphi_0 = \alpha_0,\ \varphi_1 = \alpha_1, \ldots \varphi_n = \alpha_n$ *étant les* $n + 1$ *intégrales premières indépendantes d'une même équation d'ordre* $n + 1$, *l'intégrale générale de cette équation* (1) *sera réprésentée par le système*

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi_0 = \alpha_0, & \Phi_0\ [\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0, \\ \varphi_1 = \alpha_1, & \Phi_1\ [\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_n = \alpha_n, & \Phi_{n-1}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n] = 0. \end{cases}$$

Par exemple, l'équation, résultante de l'élimination y'' entre

$$\begin{aligned} \Phi_0[y'', xy'' - y', x^2y'' - 2xy' + 2y] &= 0, \\ \Phi_1[y'', xy'' - y', x^2y'' - 2xy' + 2y] &= 0, \end{aligned}$$

a pour l'intégrale générale

$$2y = \alpha_0 x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_2,$$

où les constantes arbitraires α_0, α_1, α_2 sont liées par les relations

$$\Phi_0[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = 0,$$
$$\Phi_1[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = 0.$$

§ 5.

Discussion de l'équation (9) fondamentale dans la méthode de différentiation.

Reprenons l'équation (9) et le système (10) qui lui est conjugué. Pour ce système, une intégrale $f(x, y, y') = \alpha$ nous est donnée par le problème même. D'après le principe du multiplicateur dernier, principe de Jacobi, si fécond en applications, on trouvera, au moyen des quadratures, une autre intégrale $f_1(x, y, y') = \alpha$, toutes les fois, que nous sera connu le multiplicateur J de Jacobi pour le système (10). Cette remarque est bien importante.

Le multiplicateur J soit donné. Si l'équation (1) est résoluble par rapport à y', l'expression

$$J(y'dx - dy),$$

y' étant déterminée en fonction de x et y par l'équation (1), sera une différentielle exacte. On obtient, par suite,

$$f_1[x, y, y'] = \int J(y'dx - dy) \tag{15}$$

et le problème sera résolu. Le multiplicateur J de Jacobi se confond en ce cas avec le multiplicateur E d'Euler.

Quand il est bien plus facile de résoudre l'équation (1) par rapport à y, nous aurons la différentielle exacte

$$J\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

après avoir exprimé y en fonction de x et y', et nous obtiendrons

$$f_1[x, y, y'] = \int J\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{16}$$

Enfin, l'équation (1) étant résoluble par rapport à x, on trouve

$$f_1[x, y, y'] = \int J\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y'}dy'}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \tag{17}$$

où, sous le signe d'intégration, on a une différentielle exacte.

Supposons maintenant, que le multiplicateur J ne nous soit pas connu. En ce cas, nous n'aurons pour la détermination de J que l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial J}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial J}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial J}{\partial y'}=J\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{18}$$

Il n'est pas nécessaire, pour notre but, d'intégrer complètement l'équation (18), car il suffit de connaître pour J une solution particulière quelconque. Mais, ce problème si simple qu'il le soit, est au dessus des forces de l'Analyse en son état présent.

Nous ne pouvons non plus résoudre, en cas général, le problème inverse: J étant donné, déterminer la fonction correspondante $f(x, y, y')$. Ainsi, nous nous contenterons de traiter les cas les plus simples de ce problème inverse.

Les cas, où J est une constante ou une fonction de l'une des variables x, y, y', ne nous donnent aucune nouvelle classe des équations intégrables car on arrive aux formes suivantes

$$\begin{array}{lll}
\text{I)} & J=\text{const.}, & y'=\varphi(x);\\
\text{II)} & J=\Theta(x), & y'=y\varphi(x)+\psi(x);\\
\text{III)} & J=\Theta(y), & y'=\varphi(x)\,.\,\psi(y);\\
\text{IV)} & J=\Theta(y'), & y\;=x\varphi(y')+\psi(y').
\end{array}$$

On obtient plus de résultats utiles quand J dépend de deux quelconques des variables x, y, y'.

1^er^ *cas:* $J=\Theta(x, y)$. L'équation (18) devenant

$$J\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial J}{\partial x}+y'\frac{\partial J}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y'}=0,$$

la fonction $f(x, y, y')$ contient x comme un paramètre. On s'assure sans peine, que l'équation (1) sera de la forme

$$Jy'+\int\frac{\partial J}{\partial x}dy+\varphi(x)=0, \tag{19}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction arbitraire de x. L'équation (19) est identique à celle (3), si l'on y pose $N=1$ et si l'on détermine M d'après la formule (5) dans laquelle on a pris $J=E$.

2^me^ *cas:* $J=\Theta(x, y')$. Dans ce cas, on détermine la forme de la fonction $f(x, y, y')$ par l'équation

$$\frac{\partial J}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial x}+\left(J+y'\frac{\partial J}{\partial y'}\right)\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0,$$

dont l'intégration exige celle du système

$$\frac{dx}{\frac{\partial J}{\partial y'}}=\frac{dy}{J+y'\frac{\partial J}{\partial y'}}=-\frac{dy'}{\frac{\partial J}{\partial x}}.$$

On obtient aisément deux intégrales

$$J = \alpha,$$

$$y - \int \frac{1 + y' \dfrac{\partial \log J}{\partial y'}}{\dfrac{\partial \log J}{\partial y'}} dx = \alpha_1,$$

y' sous le signe d'intégration étant remplacée par son expression en fonction de x et α au moyen de l'équation $J = \alpha$; l'intégration étant faite, on pose $\alpha = J$. On arrive ainsi à l'équation

$$y + \varphi(J) = \int \frac{1 + y' \dfrac{\partial \log J}{\partial y'}}{\dfrac{\partial \log J}{\partial y'}} dx, \tag{20}$$

φ étant le signe d'une fonction arbitraire.

3^{me} *cas:* $J = \Theta(y, y')$. L'équation (18) prend la forme

$$\frac{\partial J}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial x} + \left(J + y' \frac{\partial J}{\partial y'}\right) \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial J}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

dont le système conjugué sera

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial J}{\partial y'}} = \frac{dy}{J + y' \dfrac{\partial J}{\partial y'}} = - \frac{dy'}{y' \dfrac{\partial J}{\partial y}}.$$

On calcule sans peine deux intégrales de ce système

$$J y' = \alpha,$$

$$x + \int \frac{\dfrac{\partial J}{\partial y'}}{y' \dfrac{\partial J}{\partial y}} dy' = \alpha_1,$$

d'où l'on conclut que l'équation (1) doit être de la forme

$$x + \int \frac{\dfrac{\partial J}{\partial y'}}{y' \dfrac{\partial J}{\partial y}} dy' = \varphi(J y'). \tag{21}$$

Pour les équations (19), (20), (21) l'intégrale $f_1(x, y, y') = \alpha_1$ sera donnée par l'une des formules (15), (16), (17).

§ 6.

La méthode de différentiation pour l'intégration des équations différentielles d'ordre n.

Considérons une équation différentielle d'ordre n

$$f[x, y, \dots y^{(n)}] = 0. \tag{22}$$

L'application de la méthode de multiplicateur pour la recherche de l'intégrale générale nous conduirait aux calculs de même qu'aux résultats compliqués; nous n'insistons pas sur ce point. La méthode de différentiation, nous donne, au contraire comme on le verra, des résultats aussi simples qu'intéressants. Nous étudierons cette méthode avec plus de détails.

Différentions l'équation (22), en supposant que la fonction y ait les dérivées $y', y'', \dots y^{(n+1)}$; on aura l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y^{(n+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0, \tag{23}$$

dont $f(x, y, \dots y^{(n)}) = \alpha$ sera une intégrale première. Les n autres intégrales premières

$$\begin{gathered} f_1[x, y, \dots y^{(n)}] = \alpha_1, \\ f_2[x, y, \dots y^{(n)}] = \alpha_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_n[x, y, \dots y^{(n)}] = \alpha_n \end{gathered}$$

étant connues, nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation (22) en éliminant $y', y'', \dots y^{(n)}$ entre les équations

$$f = 0,\ f_1 = \alpha_1 \dots f_n = \alpha_n.$$

Arrêtons-nous à l'hypothèse la plus simple: toutes les $n + 1$ intégrales premières de l'équation (23) nous sont connues

$$\left\{ \begin{aligned} &\varphi_0 [x, y, \dots y^{(n)}] = \alpha_0, \\ &\varphi_1 [x, y, \dots y^{(n)}] = \alpha_1, \\ &\dots\dots\dots \\ &\varphi_n [x, y, \dots y^{(n)}] = \alpha_n. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

On démontre, sans peine, que

$$f[x, y, \dots y^{(n)}] = \Phi[\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n];$$

par suite, l'équation (22) sera de la forme

$$\Phi[\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n] = 0 \tag{25}$$

et son intégrale générale est représentée par le système (24), en même temps que les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ sont liées par la relation

$$\Phi[\alpha_0, a_1, \dots \alpha_n] = 0.$$

De même, étant donnée l'équation

$$\Phi[\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_k] = 0 \qquad k \leqq n \tag{26}$$

le système

$$\begin{cases} \varphi_0 = \alpha_0, \\ \varphi_1 = \alpha_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_k = \alpha_k \end{cases} \qquad \Phi[\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_k] = 0 \tag{27}$$

représentera son intégrale avec k constantes arbitraires. Toutes ces propositions sont dues à J. Serret*).

Revenons au cas général. Toutes les fonctions f_i $(i = 1, 2, \dots n)$ satisfaisant à l'équation de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

nous avons, pour déterminer ces fonctions des arguments $x, y, \dots y^{(n)}$, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + y' \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + y' \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}}{\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} \tag{28}$$

avec le système conjugué

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} = \frac{dy}{y' \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} = \dots = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)} \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}} \tag{29}$$

$$= - \frac{dy^{(n)}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + y' \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}}.$$

Pour le système (29) l'une des intégrales nous est déjà connue: c'est $f(x, y, \dots y^{(n)}) = \alpha$. D'après le principe du multiplicateur dernier, si l'on nous donne les $n - 1$ autres intégrales du même système aussi que le multiplicateur J, la dernière intégrale sera trouvée au moyen des quadratures. Or, donner à côté de l'équation (22) les $n - 1$ intégrales du système (29) c'est la même chose que donner pour cette équation (22) une intégrale avec les $n - 1$ constantes arbitraires. On vient ainsi à la conclusion: étant données une intégrale de l'équation (22) avec les $n - 1$ constantes arbitraires aussi que le multiplicateur J du système (29), l'intégrale générale cherchée se déterminera par des quadratures. Cela posé, il est bien intéressant d'étudier de plus près

*) Oeuvres de Lagrange, t. IX. Note de M. J. Serret, p. 415—421. Paris, 1881.

la relation existante entre J et la fonction f. On trouve sans peine pour J l'équation

$$(30)\qquad \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\left[\frac{\partial J}{\partial x}+y'\,\frac{\partial J}{\partial y}+\cdots+y^{(n)}\,\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}\right]$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}+y'\,\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots+y^{(n)}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right]\frac{\partial J}{\partial y^{(n)}}+J\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

et il y a lieu de considérer quelques hypothèses particulières relatives à J.

1re *hypothèse.* J étant constante, on voit tout de suite que $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}=0$ et l'équation (22) sera de la forme

$$(31)\qquad y^{(n)}=\varphi[x,y,\ldots y^{(n-2)}].$$

2me *hypothèse.* Ayant $J=\Theta(x)$, l'équation (30) devient

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\,\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\,J$$

et on trouve aisément que l'équation (22) doit être de la forme

$$(32)\qquad y^{(n)}=Xy^{(n-1)}+\varphi[x,y,\ldots y^{(n-2)}],$$

X ne dépendant que de x.

3me *hypothèse.* Supposons $J=\Theta[y^{(k)}]$, k recevant les valeurs $k=0,1,\ldots n-2$ et $y^{(0)}$ étant y; on a

$$y^{k+1}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\,\frac{\partial J}{\partial y^{(k)}}=\frac{\partial f}{\partial y^{(k-1)}}\,J$$

et on calcule, que l'équation (22) deviendra

$$(33)\qquad y^{(n)}=Y_k\,y^{(k+1)}y^{(n-1)}+\varphi[x,y,\ldots y^{(n-2)}],\quad k=0,1,\ldots n-2$$

où Y_k est une fonction d'une seule variable $y^{(k)}$.

4me *hypothèse.* En cas $J=\Theta[y^{(n-1)}]$, on a

$$y^{(n)}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\,\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}=\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\,J,$$

et l'équation (22) prendra la forme

$$(34)\qquad y^{(n)}=Y_{n-1}\,\varphi[x,y,\ldots y^{(n-2)}],$$

Y_{n-1} ne dépendant que de $y^{(n-1)}$.

5me *hypothèse.* Enfin, en supposant $J=[\Theta y^{(n)}]$ on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\,\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots+y^{(n-1)}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}+Y_n\,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}=0,$$

et on calculera que l'équation (22) sera de la forme

$$(35)\qquad y^{(n)}=\varphi[u_1,u_2,\ldots u_n],$$

où l'on a désigné

$$u_\varkappa=y^{(n-\varkappa)}-\frac{x}{1}y^{(n-\varkappa+1)}+\cdots+\frac{(-x)^{\varkappa-1}}{1.2.\varkappa-1}y^{(n-1)}+\frac{(-x)^\varkappa}{1.2\ldots\varkappa}Y_\varkappa,$$
$$\varkappa=1,2,\ldots n.$$

En nous rappelant tout ce qui est dit plus haut, nous concluons: *L'intégrale générale des équations* (31), (32), (33), (34) *et* (35) *se trouve au moyen des quadratures, si l'on donne pour ces équations une intégrale avec les* $n-1$ *constantes arbitraires.*

La proposition concernant l'équation (31) a été déjà indiquée et démontrée (en cas $n=2$) par Jacobi*). Nous rencontrons aussi chez Jacobi**) un cas particulier $n=2$ du théorème relatif à l'équation (32). Quant aux autres équations, les propositions leur correspondantes, paraissent ici, aussi bien que nous le savons, pour la première fois.

§ 7.

L'application de la méthode de différentiation au problème des isopérimetres.

Considérons le cas, où il s'agit de déterminer y en fonction de x de telle manière que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} F[x, y, \ldots y^{(n)}]\, dx$$

soit un maximum ou un minimum. Le problème, comme on sait, se réduit à l'intégration de l'équation

$$f[x, y, \ldots y^{(2n)}] = \frac{d^n P_n}{dx^n} - \frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + (-1)^n P_0 = 0,$$

où l'on pose

$$P_0 = \frac{\partial F}{\partial y}, \; P_1 = \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots P_n = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}.$$

En nous reportant à l'équation de la forme (30) déterminant le multiplicateur J, calculons

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y^{(2n-1)}}}{\dfrac{\partial f}{\partial y^{(2n)}}}.$$

Les termes avec $y^{(2n)}$ et $y^{(2n-1)}$ ne proviennent que des expressions $\frac{d^n P_n}{dx^n}$, $\frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}}$. En cas $n > 1$ on trouve

$$\frac{d^n P_n}{dx^n} - \frac{d^{n-1} P_{n-1}}{dx^{n-1}} = y^{(2n)} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} + n y^{(2n-1)} \frac{d}{dx} \log \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} + \psi[x, y, \ldots y^{(2n-2)}];$$

*) C. Jacobi. — Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium applicandi. Gesam. Werke, Bd. IV, pag. 399. — Vorlesungen über Dynamik. Gesam. Werke, Supplementband, pag. 81–82.

**) C. Jacobi. — Theoria novi ... pag. 408.

en supposant, que J ne dépend pas de $y^{(2n)}$, on vient sans peine à la formule

$$J = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial {y^{(n)}}^2}\right]^n. \tag{36}$$

La même formule, comme on s'assure directement, est vraie aussi en cas exclu $n = 1$. Vu ceci, la méthode de différentiation avec le principe du multiplicateur dernier nous amène à cette proposition de Jacobi*): *l'intégrale générale de l'équation d'ordre* $2n$ (35) *des isopérimètres s'obtient au moyen des quadratures toutes les fois, quand on sait pour cette équation une intégrale avec* $2n - 1$ *constantes arbitraires.*

Varsovie, 7.—19. octobre 1897.

*) C. Jacobi. — Theoria novi.... Gesam. Werke, Bd. IV, pag. 498.