Beitrag zur Theorie der Modulgruppe.

(Zweiter Aufsatz.)

Von **Wladimir Lewicki** in Berlin.

1. In meinem früheren Aufsatz[1]) habe ich die Modultransformationen von der Form:

$$U z = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \ddots - \cfrac{1}{a + z}}}} = T S^a T S^a T \ldots T S^a z$$

untersucht, wobei die Fundamentaltransformationen die Gestalt:

$$S z = z + 1, \; T z = -\frac{1}{z} \qquad (z = x + i y)$$

haben, und gezeigt, wie man direct solche n-fache Iteration, ohne den Kettenbruch rückzuwickeln, berechnen kann. Die von mir gegebene Formel gab die Möglichkeit, den obigen Kettenbruch ohne Anwendung der Näherungswerte zu berechnen.

Nun will ich den ganz allgemeinen Fall der Modultransformationen:

$$(1) \qquad U z = T S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T S^{a_{n-2}} T \ldots T S^{a_1} z$$

und

$$(2) \qquad U z = S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T S^{a_{n-2}} T \ldots T S^{a_1} z$$

in Betracht ziehen ($a_n, a_{n-1}, \ldots$ ganzzählig), also die Kettenbrüche von der Form:

$$U z = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \ddots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}$$

[1]) Diese Monatshefte. XI. Jahrg. p. 118 ff.

und

$$U z = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}$$

untersuchen. Diese Untersuchung liefert uns bequeme Formeln, um Kettenbrüche obiger Form zu berechnen, bezw. den Ort zu finden, wohin der Punkt z der z-Halbebene auf Grund einer Modultransformation übersetzt wird.

2. Bezeichnen wir den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cdots \cfrac{1}{a_1 + z}}}$$

mit φ_n, so bekommen wir, wie sofort erhellt, folgende Relation:

$$a_{n+1} - \varphi_n = \frac{1}{\varphi_{n+1}}. \tag{3}$$

Wählen wir nun den Ausdruck:

$$\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \cdots \varphi_1} = F_n(z) \tag{4}$$

so ist auf Grund von (3) klar, dass:

$$\frac{a_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z)$$

wird, oder was dasselbe ist, dass folgende Relation:

$$a_{n+1} F_n(z) - F_{n-1}(z) = F_{n+1}(z) \tag{5}$$

besteht.

Auf Grund dieser Relation können wir folgende $n-2$ Relationen niederschreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \quad F_{n-1} - F_{n-2} = F_n \\ a_{n-1} F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-1} \\ a_{n-2} F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n-2} \\ a_{n-3} F_{n-4} - F_{n-5} = F_{n-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_3 \quad F_2 \quad - F_1 \quad = F_3 \end{array} \right. \tag{6}$$

3. Um aus diesen Gleichungen die Größen F_{n-1}, F_{n-2}, $F_{n-3}, \ldots$ zu eliminieren, bilden wir folgende Ausdrücke:

$$a_n = C_n^{(0)}, \quad C_n^{(-1)} = 1$$

$$\begin{array}{lllll}
a_{n-1}\, a_n & -1 & = C_{n-1}^{(0)}\, C_n^{(0)} & - C_n^{(-1)} & = C_n^{(1)} \\
a_{n-2}\, C_n^{(1)} & - a_n & = C_{n-2}^{(0)}\, C_n^{(1)} & - C_n^{(0)} & = C_n^{(2)} \\
a_{n-2}\, C_n^{(2)} & - C_n^{(1)} & = C_{n-3}^{(0)}\, C_n^{(2)} & - C_n^{(1)} & = C_n^{(3)} \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
a_{n-t}\, C_n^{(t-1)} & - C_n^{(t-2)} & = C_{n-t}^{(0)}\, C_n^{(t-1)} & - C_n^{(t-2)} & = C_n^{(t)},
\end{array}$$

wobei $n > t$ zu setzen ist; $n = 0, 1$ ist auszuschließen, da in dem Falle in den obigen Ausdrücken a_0 vorkäme, ein Glied, das im Kettenbruch nicht auftritt.

Für $t = 0$ gibt uns die letzte Gleichung:

$$C_n^{(0)} = C_n^{(0)}\, C_n^{(-1)} - C_n^{(-2)},$$

d. h.

$$C_n^{(-2)} = 0;$$

für $t = -1$ ergibt sich:

$$C_n^{(0-1)} = C_{n+1}^{(0)}\, C_n^{(-2)} - C_n^{(-3)},$$

d. h.

$$C_n^{(-3)} = - C_n^{(-1)} = -1$$

u. s. w.; es ergibt sich im allgemeinen

$$C_n^{(-2s)} = 0, \quad C_n^{(-(4s+1))} = 1, \quad C_n^{(-(4s+3))} = -1 \qquad (n > 1)$$

Natürlich ist $C_{-n}^{(p)} = 0$ zu setzen.

Multiplicieren wir nun die Gleichungen (6) der Reihe nach mit:

$$\begin{array}{l}
1 \\
C_n^{(0)} \\
C_n^{(1)} \\
C_n^{(2)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(0)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(-1)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(1)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(0)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(2)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(1)} \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(3)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(n-8)}
\end{array}$$

und addieren, so bekommen wir sofort:

$$(7)\qquad \begin{aligned} F_n = (a_3 F_2 - F_1)\,(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - \\ - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)})\, F_2 \end{aligned}$$

und da:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

ist, so bekommen wir die gewünschte Formel:

$$(8)\qquad \varphi_n =$$

$$= \frac{(a_3 F_2 - F_1)\,(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}) - (C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-10)})\, F_2}{a_3 (F_2 - F_1)\,(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)})\, F_2}.$$

Diese Formel ist nur für $n > 5$ giltig, da im Falle $n = 5$ C_0 vorkommt, was ausgeschlossen ist. Dass es so sein muss, ist leicht ersichtlich aus dem Grunde, dass wir erst die fünfte Gleichung mit dem ähnlichen Factor, wie alle übrigen, multipliciert haben, während $\varphi_5 = \dfrac{F_4}{F_5}$ ist.

Für $n \leqq 5$, wo also die Gliederanzahl sehr geringist, lassen sich sofort folgende evidente Formeln niederschreiben:

$$\varphi_3 = \frac{F_2}{a_3 F_2 - F_1}, \quad \varphi_4 = \frac{a_3 F_2 - F_1}{(a_3 F_2 - F_1)\, C_4^{(0)} - F_2},$$

$$\varphi_5 = \frac{(a_3 F_2 - F_1)\, C_4^{(0)} - F_2}{(a_3 F_2 - F_1)\, C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2}.$$

Im Falle $n = 6$ tritt in der allgemeinen Form der Factor $C_1^{(-4)}$ und $C_1^{(-3)}$ auf, was wir früher ausgeschlossen haben.

Wenn wir aber bedenken, dass

$$\varphi_6 = \frac{F_5}{F_6}$$

ist, und den Ausdruck:

$$F_5 = (a_3 F_2 - F_1)\, C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2$$

mit dem Zähler der Formel (8) vergleichen, so bekommen wir sofort:

$$C_1^{(-3)} = -1, \quad C_1^{(-4)} = -\frac{C_5^{(0)} - C_5^{(2)}}{C_5^{(1)}}$$

so dass die Formel (8) für alle Kettenbrüche φ_n, wo $n \geqq 6$ ist, anwendbar ist. Sie ist besonders bequem für höhere n, wie wir gleich an Beispielen zeigen werden.

Wenn wir in φ_n das Vorzeichen ändern, bekommen wir sofort die Modultransformation (1), wenn wir $\varphi_{n-1}(z)$ berechnen und den Ausdruck $a_n \varphi_{n-1}(z)$ bilden, bekommen wir die Transformation (2).

4. Jetzt wollen wir an einigen Beispielen die Giltigkeit der Formel (8) erproben.

a) Es sei

$$\varphi_6 = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+z}}}}}}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1+z}{z}}}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{z}{2z-1}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{2z-1}{3z-2}}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{3z-2}{4z-3}} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Auf Grund von (8) bekommen wir (da $F_1 = 1+z$, $F_2 = z$ ist):

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\left(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}\right) - \left(C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}\right) F_2}{(2z-1)\left(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}\right) - \left(C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}\right) F_2}.$$

Nun ist:

$$C_2^{(-2)} = 0,\quad C_2^{(-3)} = -1,\quad C_5^{(1)} = 3,\quad C_5^{(2)} = 7,\quad C_6^{(1)} = 1,$$
$$C_6^{(2)} = 1,\quad C_3^{(-1)} = 1,\quad C_1^{(-3)} = -1,\quad C_1^{(-4)} = -3,$$

und daher:

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\,3 - (-7+9)\,z}{(2z-1) - z} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Anders gesagt: die Transformation:

$$TS\,TS^2\,TS^2\,TS^3\,TS\,TS\,z$$

führt den Punkt z der Halbebene in den Punkt $\dfrac{3-4z}{z-1}$ derselben über.

b) Es sei

$$\varphi_6 = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2+z}}}}}} = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{2+z}{3+2z}}}}} = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{3+2z}{10+7z}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{10+7z}{27+19z}}} = \cfrac{1}{2-\cfrac{27+19z}{17+12z}} = \frac{17+12z}{7+5z};$$

auf Grund von (8) wird da $F_1 = 2+z$, $F_2 = 3+2z$ ist, erhalten:

$$\varphi_6 = \frac{(10+7z)(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}) - (C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_2^{(-4)})F_2}{(10+7z)(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}) - (C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)})F_2}.$$

Nun ist:

$$C_2^{(-2)} = 0,\quad C_2^{(-3)} = -1,\quad C_3^{(-1)} = 1,\quad C_5^{(1)} = 2,\quad C_5^{(2)} = 4,$$
$$C_6^{(1)} = 1,\quad C_6^{(1)} = 1,\quad C_1^{(-3)} = -1,\quad C_1^{(-4)} = -\frac{7}{2},$$

und wir bekommen daher:

$$\varphi_6 = \frac{(10+7z)\,2 - (3+2z)}{(10+7z) - (3+2z)} = \frac{17+12z}{7+5z}.$$

c) Es sei:

$$\varphi_9 = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1+z}}}}}}}}} = \frac{18+41z}{7+16z}.$$

Dies Resultat erfolgt durch Rückwickeln des Bruches. Au Grund unserer Formel ergibt sich:

$$F_1 = 1 + z,\ F_2 = 1 + 2z,\ a_3 = 2,$$

$$\varphi_9 = \frac{(a_3 F_2 - F_1)(C_8^{(2)} C_5^{(1)} - C_8^{(1)} C_4^{(0)}) - (C_8^{(2)} C_5^{(0)} - C_8^{(1)} C_4^{(-1)}) F_2}{(a_3 F_2 - F_1)(C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}) - (C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}) F_2}.$$

Nun ist:

$$C_8^{(1)} = 5,\quad C_8^{(2)} = 18,\quad C_5^{(0)} = 1,\quad C_5^{(1)} = 0,\quad C_4^{(0)} = 1,\quad C_4^{(-1)} = 1,$$
$$C_9^{(1)} = 1,\quad C_9^{(2)} = 2,\quad C_6^{(1)} = 3,\quad C_6^{(2)} = -1$$

und wir bekommen daher:

$$\varphi_9 = \frac{-(1+3z)5 - (18-5)(1+2z)}{-(1+3z)2 - (6-1)(1+2z)} = \frac{18+41z}{7+16z}.$$

d) Es sei:

$$\varphi_{10} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5+z}}}}}}}}}} = \frac{23+5z}{32+7z}.$$

Die Berechnung dieses Kettenbruches ist ziemlich lang. Unsere Formel gibt aber sofort:

$$a_3 = 2,\quad F_1 = 5 + z,\quad F_2 = 14 + 3z$$

$$\varphi_{10} = \frac{(23+5z)(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}) - (C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}) F_2}{(23+5z)(C_{10}^{(2)} C_7^{(3)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(2)}) - (C_{10}^{(2)} C_7^{(2)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(1)}) F_2}.$$

Nun ist:

$$C_9^{(1)} = 0,\quad C_9^{(2)} = -1,\quad C_5^{(1)} = 1,\quad C_5^{(0)} = 1,\quad C_6^{(1)} = 0,$$
$$C_6^{(2)} = -1,\quad C_{10}^{(1)} = 0,\quad C_{10}^{(2)} = -1,\quad C_7^{(1)} = 0,\quad C_7^{(2)} = -1,$$
$$C_7^{(3)} = -2$$

und wir bekommen:

$$\varphi_{10} = \frac{23+5z}{(23+5z)2 - (14+3z)} = \frac{23+5z}{32+7z}.$$

Die Transformation $TS\,TS\,TS\,TS\,TS\,TS\,TS^2\,TS^2\,TS^3\,TSz$ führt also den Punkt z der z-Halbebene in den Punkt $-\frac{23+5z}{32+7z}$ über.

Sind alle a_λ untereinander gleich, dann haben wir einen speciellen Fall, den ich im früheren Aufsatz behandelt habe.

5. Wir wollen nun den Grenzfall $\lim n = \infty$, d. h. die unendlich vielfache Iteration der Modultransformation untersuchen. Zu dem Zwecke schreiben wir die Relation (8) in folgender Form:

$$\frac{t_3 F_2 C_{n-1}^{(2)}\left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) - C_{n-1}^{(1)}\left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right)F_2 - F_1\left(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}\right)}{t_3 F_2 C_n^{(2)}\left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) - C_n^{(1)}\left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right)F_2 - F_1\left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}\right.}$$

Da für $\lim n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right) = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right) = 0$$

gesetzt werden kann, so bekommen wir:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n = \frac{C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}}{C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}},$$

und dieser Ausdruck gibt beim Grenzübergange (indem wir $\lim\limits_{n=\infty} C_{n-4}^{(n-8)} = \lim\limits_{n=\infty} C_{n-5}^{(n-9)} = \lim\limits_{n=\infty} C_{n-3}^{(n-8)} = \lim\limits_{n=\infty} C_{n-4}^{(n-8)}$ setzen):

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n = \frac{C_{n-1}^{(2)} - C_{n-1}^{(1)}}{C_n^{(2)} - C_n^{(1)}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{(a_{n-1}a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1) - a_{n-1}}{(a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1) - a_n},$$

also jedenfalls eine reelle Größe; die unendlich-vielfache Iteration von Uz gibt also:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1} - (a_{n-1}a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)}{a_n - (a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}$$

für die Transformation (1) und:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty}\left(a_n - \frac{a_{n-2} - (a_{n-2}a_{n-3} - 1)(a_{n-4} - 1)}{a_{n-1} - (a_{n-1}a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)}\right)$$

für die Transformation (2). Jede ganz allgemeine Modultransformation, die aus unendlich vielen Iterationen der Fundamentaltransformationen $S^n z$ und Tz (n ganz, aber beliebig) gebildet ist, bringt daher **jeden** Punkt der positiven z-Halbebene in die unendlich nahe Umgebung eines der beiden Grenzpunkte, die jedenfalls reell sind und auf der Hauptaxe liegen. In diesen Punkten verliert also die Modulgruppe ihre Discontinuität; da aber a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... ganz beliebige, reelle Zahlen sind, so sehen wir, dass die Modulgruppe auf der ganzen reellen Axe discontinuierlich ist, was mit der bekannten Thatsache der Theorie der Modulgruppe übereinstimmt.