4. *Zur Theorie der Vakuumentladung;* *von George Jaffé.*

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat der Verfasser eine Theorie der Hochvakuumentladung entwickelt[1]), die im wesentlichen von den gleichen Annahmen ausgeht, wie die Langmuir-Schottkysche Raumladungstheorie, die aber die Anwesenheit von Gasresten berücksichtigt. Es wurde vorausgesetzt, daß der Strom von Elektronen getragen wird, die — etwa von einer Glühkathode — in genügender Zahl geliefert werden. Daneben soll in den Gasresten Stoßionisation und Wiedervereinigung stattfinden, jedoch soll der Gasdruck so niedrig sein, daß die positiven Ionen nur den Potentialverlauf beeinflussen und keinen merklichen Beitrag zum Stromwert liefern. Unter diesen Umständen kann auch von der Anwesenheit negativer Ionen abgesehen werden.

Wir beschränken die Betrachtung auf den Fall des Stromübergangs zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Ebenen, zu denen wir die x-Achse senkrecht gelegt denken; die Kathode befinde sich bei $x = 0$, die Anode bei x. Die Gleichungen, welche die ausgesprochenen Voraussetzungen ausdrücken, lauten dann (J. S. 146):

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = -4\pi e(p - n), \tag{1}$$

$$i = e n v \tag{2}$$

$$Q - \alpha n p = 0. \tag{3}$$

(V Potential, e Elementarladung, p und n die Zahl der positiven Ionen, bzw. Elektronen pro ccm, i Stromdichte, v Geschwindigkeit der Elektronen, Q die Zahl der pro Sekunde und ccm erzeugten Ionen und α der Wiedervereinigungskoeffizient.) Wie in der früheren Arbeit, wird der Strom

1) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 63. S. 145. 1920. Auf diese Arbeit wird im Text mit J. und folgender Seitenzahl verwiesen.

positiv gerechnet, wenn die Elektronen sich in der Richtung der positiven x bewegen.

Hierzu kommen nun noch die Beziehungen

$$\frac{m}{2} v^2 = e V, \qquad (m = \text{Elektronenmasse}) \tag{4}$$

$$Q = q i. \tag{5}$$

Gleichung (4) enthält die Annahme, daß die Elektronen *im allgemeinen* den Raum zwischen Kathode und Anode unbehindert durchfallen, und (5) setzt die Zahl der wirksamen Stöße proportional der Stromdichte, vernachlässigt also die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Stromrichtung (J. S. 147).

Unter Hinzunahme der Grenzbedingungen, daß V und dV/dx an der Kathode verschwinden sollen (vgl. J. S. 148), ergibt sich aus den Gleichungen (1) bis (5) die gesuchte Stromspannungscharakteristik. Wir deuten die erhaltene Endgleichung [J. S. 149, Formel (16)] hier nur symbolisch an

$$F(i, V, x) = 0, \tag{I}$$

und beschränken uns darauf, die Näherungsformel für kleine Werte von q anzugeben [J. S. 151, Gleichung (20) und Gleichung (20a)]

$$\left\{\begin{aligned} & V = (a_2\, i\, x^2)^{2/3} \{ 1 - b_2\, a_2^{2/3}\, i^{-1/3}\, x^{4/3} \}, \\ & a_2 = 9\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}; \qquad b_2 = \frac{4 e^3 q}{21 m \alpha}. \end{aligned}\right. \tag{Ia}$$

Für $b_2 = 0$ reduziert sich Gleichung (Ia) auf die bekannte Child-Langmuirsche Formel.

Von den gemachten Annahmen haben die Gleichungen (4) und (5) offenbar einen viel engeren Gültigkeitsbereich als die Gleichungen (2) und (3). Es wurde von vornherein darauf hingewiesen (J. S. 147), daß die Gleichungen (3) und (4) streng genommen miteinander in Widerspruch stehen, weil bei Berücksichtigung von Stoßionisation und Wiedervereinigung die Geschwindigkeit der Elektronen gegenüber derjenigen, die durch Gleichung (4) gegeben ist, modifiziert sein muß. Die entwickelte Theorie beansprucht darum auch nur Gültigkeit für extrem niedrige Gasdrucke. (Nach einer J. S. 162 mitgeteilten Schätzung kommt etwa das Intervall von 10^{-7} bis

10^{-5} mm Hg in Frage.) Für höhere Gasdrucke, die allerdings immer noch so niedrig bleiben müssen, daß der Strombeitrag der positiven Ionen vernachlässigt werden kann, muß die Annahme (4) aufgegeben werden.

Im folgenden soll ausgeführt werden, welche Änderung die Theorie dadurch erfährt. Eine solche Untersuchung ist schon darum von Interesse, auch für extrem niedrige Gasdrucke, weil Hr. Lilienfeld in einer Bemerkung zu der Arbeit des Verfassers[1]) betont hat, daß die Annahme (4) mit charakteristischen Merkmalen der von ihm studierten Entladungserscheinungen, insbesondere mit seinen Temperaturmessungen an der Anode, im Widerspruch steht.

Diejenige Abänderung der Voraussetzung (4), welche sich von selbst darbietet, besteht in der einfachen Annahme, daß die Elektronen immer nur über eine kurze Strecke, die mittlere freie Weglänge λ, eine ungestörte Beschleunigung durch das elektrische Feld erfahren und am Ende dieser Strecke die ganze aus dem Felde stammende Energie durch Stoß wieder abgeben. Damit ist zugleich ausgesprochen, daß die Elektronen an der Wärmebewegung der Gasmoleküle teilnehmen, und eine vollständige Theorie dürfte keine Einschränkung über das Verhältnis der mittleren thermischen Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeitsänderung im elektrischen Felde enthalten.

Beschränken wir uns aber, wie in der früheren Arbeit, auf die Betrachtung hohen Vakuums und hinreichender Feldstärken, so dürfen wir die Geschwindigkeit der Elektronen im Felde als groß gegen ihre thermische Geschwindigkeit ansetzen. Bedeute X den Wert der mittleren Feldstärke, P den Gasdruck in mm Hg, so ist die ausgesprochene Voraussetzung erfüllt, sobald X/P einen größeren Wert als 1000 annimmt.[2]) Für solche Werte von X und P, welche dieser Einschränkung unterliegen, ist zugleich die Annahme gerechtfertigt, daß im allgemeinen jeder Stoß Ionisation zur Folge hat. Dann behält also außer den Gleichungen (1) bis (3) auch Gleichung (5)

1) J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **63**. S. 175. 1920.

2) J. S. Townsend, Die Ionisation der Gase. Handbuch der Radiologie **1**. Art. 221.

ihre Gültigkeit, und nur an die Stelle von Gleichung (4) tritt die Beziehung

$$m \frac{v_e^2}{2} = e[V(x + \lambda) - V(x)]. \tag{4'}$$

Dabei ist die Geschwindigkeit zu Beginn der Wegstrecke λ schon vernachlässigt und unter v_e ist die Geschwindigkeit nach Durchlaufen dieser Strecke verstanden. Wenn λ hinreichend klein gegen den Elektrodenabstand ist[1]), kann man Gleichung (4') nach dem Taylorschen Satze entwickeln, nach dem Gliede mit λ abbrechen und findet so

$$v_e = \sqrt{\frac{2e\lambda}{m} \frac{dV}{dx}}. \tag{6}$$

Also ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{e\lambda}{2m} \frac{dV}{dx}}, \tag{7}$$

und dieser Ausdruck ist in Gleichung (2) einzuführen.[2])

Eliminiert man Q, v, p und n zwischen den Gleichungen (1) bis (3), (5) und (7), so erhält man folgende Differentialgleichung für V:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 2\bar{a}_1 \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^{-1/2} - \bar{b}_1 \left(\frac{dV}{dx}\right)^{1/2} \right\} \tag{8}$$

mit der Bedeutung

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \bar{a}\, i; \quad \bar{a} = 4\pi \sqrt{\dfrac{m}{2e\lambda}}, \\ \bar{b}_1 = \dfrac{\bar{b}}{i}; \quad \bar{b} = \dfrac{e^3 q \lambda}{2m\alpha}. \end{cases} \tag{9}$$

Multipliziert man (8) mit $(dV/dx)^{1/2}$ und integriert unter Festhaltung der Grenzbedingungen, daß V und dV/dx für $x = 0$ verschwinden sollen, so ergibt sich

$$V = \frac{x}{\bar{b}_1} - \frac{1}{3\bar{a}_1 \bar{b}_1} \left(\frac{dV}{dx}\right)^{3/2}. \tag{10}$$

---

1) Strenger ausgedrückt: es muß λ so klein sein, daß die Veränderlichkeit von dV/dx über die Strecke λ vernachlässigt werden kann. Da nun hier gerade die Inhomogenität des Feldes zwischen den Elektroden berücksichtigt wird, folgt daraus die Forderung im Text.

2) Man vgl. hierzu: J. J. Thomson, Die Korpuskulartheorie der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1908. S. 52 u. 53 und J. S. Townsend, a. a. O.

Führt man andrerseits $h = \frac{dV}{dx}$ als neue Variable in (8) ein und integriert wiederum, so findet man

$$(11) \qquad \bar{a}_1 \bar{b}_1^{3/2} x = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{\bar{b}_1 h}}{1 - \sqrt{\bar{b}_1 h}} - \sqrt{\bar{b}_1 h}.$$

Setzt man jetzt

$$(12) \qquad \sqrt{\bar{b}_1 h} = \sqrt{\bar{b}_1 \frac{dV}{dx}} = z$$

und

$$(13) \qquad \frac{1}{2} \lg \frac{1+z}{1-z} - z = \varphi(z),$$

so ergibt sich aus (11) und (10)

$$(14) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1^{3/2}} \varphi(z), \\ V = \dfrac{1}{\bar{a}_1 \bar{b}_1^{5/2}} \left[\varphi(z) - \dfrac{z^3}{3}\right]. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen (14) stellen den gesuchten Zusammenhang zwischen V, i und x mittels der Hilfsveränderlichen z dar, und zwar ergeben sie unmittelbar den Potentialverlauf bei gegebenem Stromwert. Zur Berechnung der Charakteristik bei festem x erhält man aus (14) und (9):

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} i = \dfrac{\bar{a}^2 \bar{b}^3 x^2}{[\varphi(z)]^2}, \\ V = \bar{a}^2 \bar{b}^2 x^3 \dfrac{\varphi(z) - \dfrac{z^3}{3}}{[\varphi(z)]^3}. \end{cases}$$

Es zeigt sich also, daß $i/\bar{a}^2 \bar{b}^3 x^2$ universelle Funktion von $V/\bar{a}^2 \bar{b}^2 x^3$ ist[1]) und daraus läßt sich die Druckabhängigkeit der ermittelten Charakteristik ableiten, sobald bekannt ist, wie der Druck in die Konstanten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ eingeht. Nun ist λ umgekehrt proportional dem Druck P, q ist für hinreichend hohe Potentialwerte proportional P (J. S. 147); setzt man also α als vom Druck näherungsweise unabhängig voraus (J. S. 161), so wird auch $\bar{b}$ unabhängig vom Druck und $\bar{a} \infty P^{1/2}$. Folglich ergibt sich dann i/P als für alle Drucke gleiche Funktion von V/P.

1) Man vgl. die analogen Verhältnisse J. S. 150.

Für sehr kleine Werte von i (z näherungsweise = 1) ergibt sich aus (II)

$$i = \frac{\bar{b}\,V}{x}\,, \tag{15}$$

d. h. es müßte dann Ohmsches Gesetz gelten und die Leitfähigkeit wäre unabhängig vom Druck. Aber es muß betont werden, daß die Voraussetzung, welche gegenwärtig verfolgt wird (S. 735), schwerlich für niedrige Strom- und Potentialwerte zutrifft. Dagegen werden die Voraussetzungen der Theorie um so genauer erfüllt sein, je größer i ist.

Nun erhält man für große Werte von i, d. h. kleine Werte von b_1, folgende Näherungsformel [am einfachsten, indem man in (10) V als Potenzreihe nach ganzen Potenzen von b_1 ansetzt]:

$$\text{(IIa)} \quad \left\{ \begin{aligned} V &= (\bar{a}_2\, i)^{2/3}\, x^{5/3} \left\{ 1 - \bar{b}_2\, \bar{a}_2^{\,2/3}\, i^{-1/3}\, x^{2/3} \right\}, \\ \bar{a}_2 &= \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} 12\pi \sqrt{\frac{m}{2e\lambda}}\,; \quad \bar{b}_2 = \frac{5e^3 q \lambda}{21 m \alpha}\,. \end{aligned} \right.$$

Diese Näherungsformel ist darum von besonderem Interesse, weil sie zeigt, daß für genügend große Stromdichten $V \propto i^{2/3}$ wird, welches auch immer die Werte der Konstanten sein mögen; natürlich wird es aber von den Bedingungen des Versuchs abhängen (P und x), ob die erforderlichen Stromdichten wirklich erreicht werden können. Die Formel (IIa) ist der früheren Formel (Ia) völlig analog gebaut, und die numerische Berechnung zeigt, daß auch im allgemeinen Falle die durch (II) dargestellte Gesetzmäßigkeit der früher betrachteten (I) formal sehr ähnlich ist. Trägt man die Stromdichte als Ordinate gegen $V^{3/2}$ als Abszisse auf, so werden die Charakteristiken Kurven, die nur unbeträchtlich von Geraden abweichen (man vgl. Fig. 1, J. S. 153), die Parameter gehen aber in anderer Weise ein. Macht man die oben (S. 737) ausgesprochenen Annahmen über die Druckabhängigkeit der Konstanten, so zeigt sich, daß die Spannung, die zur Aufrechterhaltung einer bestimmten Stromdichte erforderlich ist, mit dem Drucke zunimmt. Der Koeffizient von $i^{2/3}$ in (IIa) unterscheidet sich von demjenigen in (Ia) durch den Faktor $0{,}727\,(x/\lambda)^{1/3}$; d. h. also die Neigung der Grenzgeraden (oder das Verhältnis $i/V^{3/2}$ für große i) nimmt $\propto 1/P^{1/2}$ ab, während es nach (Ia) unabhängig vom Druck ist.

Nach dem soeben Ausgeführten befindet man sich unter den Annahmen, welche der gegenwärtigen Theorie zugrunde liegen, bereits in demjenigen Druckgebiet, in welchem Druckerhöhung den Stromdurchgang erschwert, während nach den Formeln (I) das Umgekehrte der Fall war. Die Umkehr des Druckeinflusses muß dort erfolgen, wo die mittlere freie Weglänge λ anfängt mit dem Elektrodenabstand x vergleichbar zu werden.

Findet gar keine Ionisation durch Stoß statt, d. h. also, setzt man V kleiner voraus als die Ionisierungsspannung, so hat man das q der Gleichung (5) gleich 0 zu setzen. Dann reduzieren sich die Charakteristiken (I) und (II) auf die ersten Glieder von (Ia) und (IIa); demnach ist die Charakteristik dann unabhängig vom Gasdruck, solange λ größer als x ist [Formel (Ia)], und die Stromdichte für gegebenes V nimmt gegenüber dem Vakuumwert ab, wenn λ beträchtlich kleiner geworden ist als x [Formel (IIa)]. Das ist genau, was Schottky beobachtet hat[1]), allerdings bei zylindrischer Anordnung.

Bisher haben wir die Annahme verfolgt, daß die Geschwindigkeit der Elektronen im elektrischen Felde groß sei gegen ihre thermische Geschwindigkeit; um nun zu untersuchen, welche Abweichungen durch die Berücksichtigung der thermischen Geschwindigkeit zu erwarten sind, wollen wir jetzt die umgekehrte Annahme der Rechnung zugrunde legen.

An die Stelle der Gleichung (2) tritt jetzt

$$(2'') \qquad i = e\,n\,k\,\frac{d\,V}{d\,x},$$

wo k die Beweglichkeit der Elektronen ist.

Die Zahl der pro sec und cm³ erzeugten Elektronen ist jetzt nicht mehr proportional i, kann aber proportional n gesetzt werden, so daß wir statt (3) erhalten:

$$(3'') \qquad \bar{\bar{q}}\,n - \alpha\,n\,p = 0\,.$$

Die Größe $\bar{\bar{q}}$ soll als Konstante behandelt werden, die — ebenso wie k — die Molekulargeschwindigkeit enthält. In demjenigen Gebiete, in welchem wirklich die Geschwindigkeit der Elektronen proportional der Feldstärke ist, darf zwar keineswegs $\bar{\bar{q}}$ als unabhängig von $d\,V/d\,x$ angesehen werden,

1) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 15. S. 625. 1914. Letzter Abschnitt.

da es sich aber hier nur um eine Korrektionsrechnung für den Fall handelt, daß Gleichung (7) aufhört zulässig zu sein, mag immerhin $\bar{\bar{q}}$ als konstant angesehen werden.

Aus (1), (2″) und (3″) gelangen wir zu der folgenden Differentialgleichung für V:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = \bar{\bar{a}}_1 \left\{ \left(\frac{d V}{d x} \right)^{-1} - \bar{\bar{b}}_1 \right\}; \tag{16}$$

dabei ist gesetzt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\bar{a}}_1 = \bar{\bar{a}}\, i\,; & \bar{\bar{a}} = \frac{4\pi}{k}\,. \\ \bar{\bar{b}}_1 = \frac{\bar{\bar{b}}}{i}\,; & \bar{\bar{b}} = \frac{e\,\bar{\bar{q}}\,k}{\alpha}\,. \end{array} \right. \tag{17}$$

Durch ganz analoge Rechnungen wie oben (S. 736 u. 737) gelangt man zu folgender Lösung, wenn

$$\bar{\bar{b}}_1 h = \bar{\bar{b}}_1 \frac{d V}{d x} = \zeta \tag{18}$$

und

$$-\lg(1 - \zeta) - \zeta = \psi(\zeta) \tag{19}$$

gesetzt wird:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \dfrac{\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}}^2\, x}{\psi(\zeta)}\,, \\ V = \bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}}\, x^2 \dfrac{\psi(\zeta) - \frac{\zeta^2}{2}}{[\psi(\zeta)]^2}\,. \end{array} \right. \tag{III}$$

Für kleine Werte von i ergibt sich analog (15):

$$i = \frac{\bar{\bar{b}}\, V}{x} \tag{20}$$

und für große Werte von i:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \bar{\bar{a}}_2^{\,1/2}\, i^{1/2}\, x^{3/2} \{1 - \bar{\bar{a}}_2^{\,1/2}\, \bar{\bar{b}}_2\, x^{1/2}\, i^{-1/2}\}\,; \\ \bar{\bar{a}}_2 = \dfrac{32\pi}{9k}\,; \qquad \bar{\bar{b}}_2 = \dfrac{3\,e\,\bar{\bar{q}}\,k}{8\alpha}\,. \end{array} \right. \tag{IIIa}$$

Für große Werte von i wird also unter den gegenwärtigen Annahmen $i \propto V^2$, und die numerische Berechnung von (III) zeigt, daß die Charakteristiken jetzt einen ähnlichen Verlauf in der i, V^2-Ebene haben, wie die früheren in der $i, V^{3/2}$-Ebene. Als einzige Folgerung, die wir für die vorliegende Untersuchung aus den Formeln (III) bzw. (IIIa) ziehen wollen, ergibt sich also, daß an der Grenze der Gültigkeit von (II) die Stromdichten eine Tendenz zeigen werden, stärker als mit der $^3/_2$ten Potenz von V anzusteigen. Außerdem würde eine Temperaturabhängigkeit bemerkbar werden.

Es müssen noch einige Worte über den Gültigkeitsbereich der aufgestellten Theorie gesagt werden. Nach der Seite der niedrigen Drucke ist sie nur durch die Annahme beschränkt, daß λ klein gegen x sein muß. Daher geht auch (IIa) für $\lambda = z$ nicht genau in (Ia) über, sondern unterscheidet sich dann im Hauptgliede noch durch den Faktor 0,727. (Vgl. S. 738.)

Nach der Seite höherer Drucke ist der Gültigkeit unserer Theorie durch die Bedingung $X/P > 1000$ eine Grenze gesetzt. Mit diesem Werte ist aber bereits das Gebiet erreicht, welches durch die Townsendsche Theorie völlig geklärt ist.[1])

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß nach der vorgetragenen Theorie die Stromdichten sich in einem ziemlich beträchtlichen Druckgebiet proportional $V^{3/2}$ ergeben müssen, sofern es nur gelingt — unter Vermeidung von Temperatursättigung der Glühkathode — hinreichende Stromdichten zu erreichen. Es ist also keineswegs gerechtfertigt, wie das auch Hr. Lilienfeld wiederholt betont hat, die Gültigkeit des $^3/_2$-Gesetzes als hinreichendes Kriterium für höchstes Vakuum anzusehen.

Zum Schluß wollen wir noch untersuchen, inwieweit die mitgeteilten Rechnungen zur Deutung der Versuche des Hrn. Lilienfeld beitragen können. Zunächst geht aus dem Gesagten hervor, daß die Gleichungen (II) bzw. (IIa) formal die gemessenen Charakteristiken genau so gut wiedergeben, wie die älteren Gleichungen (I) und (Ia). (Man vgl. J. § 3.) Es ist aber völlig unzulässig, die Formeln (II) heranzuziehen, solange man annimmt, daß die mittlere freie Weglänge durch den Gasdruck bestimmt ist. Da die mittleren freien Weglängen der Elektronen bei einem Druck eines mm Hg bereits von der Größenordnung $1 \cdot \mathrm{cm}^{-1}$ sind[2]), käme man schon bei Drucken von 10^{-3} mm Hg zu Werten von λ, welche die Anwendung der Formeln (II) ausschließen. Andererseits bewirkt

1) Man vgl. J. S. Townsend, a. a. O. Kap. 8.

2) A. Partzsch, Ann. d. Phys. 40. S. 157. 1913.

eine Zunahme des Gasdrucks, wenn $\lambda \infty 1/P$ gesetzt wird, wie oben (S. 738 u. 739) ausgeführt, eine Verminderung der Stromdichte bei konstantem Potential, während in dem von Hrn. Lilienfeld untersuchten Gebiet das Umgekehrte der Fall ist.

Dagegen ist bei der Form der benutzten Entladungsröhren die Annahme nicht von der Hand zu weisen, daß λ im wesentlichen durch die Weite des Rohres (außerdem vielleicht durch die negativen Ladungen selbst) bestimmt ist. Macht man diese Annahme, so wird λ von einem bestimmten Druckwerte abwärts unabhängig vom Druck. Es kann allerdings fraglich erscheinen, ob bei Berücksichtigung des Wandeinflusses unsere Theorie noch anwendbar ist, weil das Problem dann nicht mehr eindimensional ist; aber für die allgemeinen Schlußfolgerungen ist es gleichgültig, welcher Umstand den Wert der freien Weglänge bestimmt.

Bei konstantem λ wird $\bar{a}$ (bzw. $\bar{a}_2$) konstant, und auch $\bar{b}$ (bzw. $\bar{b}_2$) wird unabhängig vom Druck, wenn die sekundären Elektronen im wesentlichen durch Stoß an der Wand erzeugt werden; nur derjenige Teil der Elektronen, welche durch Stoß mit Gasmolekülen entstehen, wird mit zunehmendem Druck $\bar{b}$ vergrößern und so (genau wie nach der Theorie I und im Einklang mit der Beobachtung) den Strom für gegebene Spannung heraufsetzen.

Es erklärt sich also unter diesen Umständen nicht nur die Form der Charakteristik, sondern auch die Existenz einer Grenzcharakteristik, die unabhängig von Druck und Temperatur ist; es erklärt sich ferner die beobachtete Erwärmung der Glaswände. Denn im Gegensatz zu der früheren Theorie wird bei der gegenwärtigen die Hauptmenge der Stromenergie an die Wände abgegeben; die Energie, welche der Anode mitgeteilt wird, wächst nur $\infty \frac{dV}{dx}$ [1]) und wird daher (vgl. J. S. 154) häufig nur wenig vom Anodenabstand abhängen, wie es auch von Hrn. Lilienfeld beobachtet wurde.

1) Der Energiestrom pro Querschnitteinheit ist $n v \cdot \frac{m v^2}{2}$, also bei gegebener Stromdichte proportional dV/dx; denn nv ist proportional i [Formel (2)] und v proportional $\sqrt{\frac{dV}{dx}}$ [Formel (7)].

Endlich ergibt sich auch eine Möglichkeit, den Widerspruch zwischen dem beobachteten und errechneten Wert des Quotienten $i/V^{3/2}$ (J. S. 172/173) aufzuklären. Solange angenommen wurde, daß sekundäre Elektronen nur durch Stoß mit Gasmolekeln erzeugt werden können, war es nicht möglich, für b beträchtliche Werte einzusetzen (J. S. 173), weil die Grenzfunktion dann nur für kleine Werte von b erreicht wird, und sich sonst eine Druckabhängigkeit ergeben hätte, welche den Ergebnissen des Experiments widersprochen hätte. Wenn man aber die freie Weglänge durch die Rohrweite bestimmt sein läßt und demgemäß auch Erzeugung sekundärer Kathodenstrahlen an den Wänden zuläßt, wird sich bei abnehmendem Druck schließlich ein Zustand einstellen, bei dem auch die Erzeugung sekundärer Elektronen vom Gasdruck unabhängig wird und dennoch einen beträchtlichen Einfluß haben kann. Rechnerisch bedeutet das, daß $\bar{b}$ als konstant behandelt werden darf, ohne in seiner Größe beschränkt zu sein. Nun fällt $\bar{a}$[1]) um so kleiner aus, je größer man $\bar{b}$ wählt, so daß auf diese Weise ein Weg gegeben ist, den erwähnten Widerspruch zu beseitigen. Es erklärt sich so auch, warum bei solchen Versuchsanordnungen, bei denen die Entladung auf dem Wege zwischen den Elektroden nicht mit Glaswänden in Berührung kommt, der theoretische Wert vollständig[2]) oder doch nahezu vollständig[3]) erreicht wird.

Wenn die ausgesprochene Vermutung richtig ist, muß eine Vergrößerung des Rohrdurchmessers λ heraufsetzen und damit das Potentialgefälle für gegebene Stromdichte vermindert werden.[4]) Auf Grund der Versuche des Hrn. Lilienfeld kann dieser Punkt, wie schon bei früherer Gelegenheit betont wurde (J. S. 173), noch nicht als endgültig geklärt angesehen werden, so daß weitere Messungen in dieser Richtung wünschenswert sind.

---

1) Der Koeffizient $\bar{a}$ unterscheidet sich von dem a der früheren Arbeit nur durch einen numerischen Faktor, wenn λ konstant ist. Vgl. Formel (9) und J. Formel (9).

2) S. Dushman, Phys. Rev. (2.) **4.** S. 121. 1914; Phys. Zeitschr. **15.** S. 681. 1914.

3) W. Germershausen, Ann. d. Phys. **51.** S. 705, 847. 1916.

4) Dieser Einfluß wird um so unbeträchtlicher, je größer $\bar{b}$ ist.

Zusammenfassung.

Die früher gegebene Theorie der Hochvakuumentladung wurde durch Berücksichtigung der Elektronenweglängen nach der Seite höherer Drucke zu weiterentwickelt. Die Stromspannungscharakteristiken, die sich so ergeben, sind den früheren formal sehr ähnlich, insbesondere ergibt sich wieder als Grenzfunktion für hohe Stromdichten eine Proportionalität von i mit $V^{3/2}$; die Druckabhängigkeit ist aber jetzt eine andere. Bei Berücksichtigung der thermischen Geschwindigkeit an der Grenze des Gültigkeitsbereiches ist ein stärkeres Anwachsen der Stromdichte mit der Spannung zu erwarten.

Aus den gegebenen Rechnungen ergibt sich eine Möglichkeit, die Widersprüche zu beseitigen, welche zwischen den Versuchen des Hrn. Lilienfeld und der Theorie des Verfassers bestehen geblieben waren.

Leipzig, im November 1920.

(Eingegangen 17. Dezember 1920.)