Sur les fonctions cylindriques.

Par

N. Sonine à Varsovie.

(Extrait d'une lettre adressée à la rédaction.)

A la tête du nouveau cahier des Mathematische Annalen XXX, 3 qui vient de paraître se trouve un article de M. Schafheitlin sur la répresentation de la série hypergéometrique par une intégrale définie contenant les fonctions cylindriques. Il parait que l'auteur n'a pas pris connaissance des travaux antérieurs rélatifs au sujet qu'il traite; du moins parmi les citations contenues dans son article on ne trouve mentionnés par rapport aux fonctions cylindriques que deux mémoires de M. Weber, mais non, par exemple, les mémoires de Hankel au t. VIII des Math. Ann., ainsi que mes *Recherches sur les fonctions cylindriques* publiées au t. XVI du même Recueil. Dans ce dernier mémoire l'auteur pourrait retrouver au bas de la page 51 ses deux formules générales 51) et 52) réunies en une seule, ainsi que plusieurs autres formules particulières de son article. Notre formule

$$„\int_0^\infty J^n(ax)\, J^p(cx)\, x^{2m-n-p+1}\, dx$$

$$= \frac{2^{2m-n-p+2}\, a^{-n}\, c^{-p}}{\Pi(n-m-1)\,\Pi(p-m-1)} \int_0^a (a^2-b^2)^{n-m-1}\,(c^2-b^2)^{p-m-1}\, b^{2m+1}\, db,$$

$$a < c, \quad n > m > -1, \quad p > m > -1,$$

où l'intégrale au second membre s'exprime par

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Pi m \cdot \Pi(n-m-1)}{\Pi n}\, a^{2n} c^{2p-2m-2}\, F\Big(m-p+1,\ m+1,\ n+1,\ \frac{a^2}{c^2}\Big)“$$

exprime directement l'égalité de deux expressions intégrales de la série hypergéometrique, celle qui a été donnée par Euler et celle qui contient les fonctions cylindriques, et a été établie tout indépendamment des équations différentielles auxquelles satisfont respectivement la série hypergéometrique et les fonctions cylindriques; en effet elle a été déduite exclusivement à l'aide d'une nouvelle expression intégrale de la fonction $J^n(x)$, qui nous semble la plus avantageuse pour l'étude de cette fonction, à savoir

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(x+ri) - \frac{x^2}{2a(x+ri)}} \frac{dr}{(x+ri)^{n+1}}, \quad n > -1, \quad a > 0.$$

Il est vrai qu'en employant cette expression de la fonction $J^n(x)$ on est conduit à la condition restrictive $p > m$; mais on peut aisément s'en affranchir en divisant la formule par c^{-p} et la différentiant après par rapport à c^2 ce qui se réduit au simple remplacement de p par $p - 1$ en vertu de la formule

$$\frac{d \, . \, c^p J^p(cx)}{d \cdot c^2} = \frac{x}{2} c^{p-1} J^{p-1}(cx). \ . \ . \ .$$

Varsovie, le 24. octobre 1887.