Math. Z. 118, 34–39 (1970)
© by Springer-Verlag 1970

Subnormale Einbettung von Paaren von Gruppen

PETER SCHMID

Herrn Helmut Wielandt zum 60. Geburtstag am 19.12.1970 gewidmet

1.

1.1. *Aufgabenstellung.* Wir gehen, an eine Arbeit von Roseblade [5] anknüpfend, von folgender Fragestellung aus: Gegeben seien zwei abstrakte Gruppen H und K. Unter welchen Voraussetzungen über die Struktur der beiden Gruppen wird H von K normalisiert, wenn immer H und K als Subnormalteiler in eine gemeinsame Obergruppe eingebettet sind? Roseblade untersucht dieses Problem in dem Sonderfall, daß H und K disjunkt eingebettet sind [5, Theorem 1]. Wie Roseblade werden wir hier verlangen, daß die Einbettungen gewissen, jedoch schwächeren, Disjunktheitsforderungen genügen.

Dazu definieren wir auf der Klasse aller Gruppen die binären Relationen $\mathscr{V}$, $\mathscr{E}_n$ und $\mathscr{F}_n$ (n eine nicht-negative ganze Zahl) wie folgt: $(H, K)\in\mathscr{V}$, falls H und K bei jeder subnormalen Einbettung als Ganze vertauschbar sind; $(H, K)\in\mathscr{E}_n$, falls H von K bei jeder subnormalen Einbettung normalisiert wird, für die der Durchschnitt $H\cap K$ in $Z_n(K)$ liegt (dabei ist $Z_0(K)=1$, $Z_1(K)=Z(K)$ das Zentrum von K, allgemein $Z_n(K)$ das n-te Glied der aufsteigenden Zentralreihe von K); schließlich gelte $(H, K)\in\mathscr{F}_n$, wenn H von K normalisiert wird bei jeder subnormalen Einbettung, bei der H und K vertauschbar sind und $H\cap K\leqq Z_n(K)$ gilt. Offenbar ist $\mathscr{E}_n$ eine Teilklasse von $\mathscr{F}_n$.

Diesen Relationen stellen wir Eigenschaften gegenüber, die die Struktur der beiden gegebenen Gruppen betreffen. Die Relationen $\mathscr{W}$, $\mathscr{S}_n$, $\mathscr{A}$ seien wie folgt definiert: $(H, K)\in\mathscr{W}$, falls das Tensorprodukt $H/H'\otimes K/K'=1$; $(H, K)\in\mathscr{S}_n$, wenn jede abelsche subnormale Untergruppe von $K/Z_n(K)$, die epimorphes Bild von H ist, trivial ist. Zur Beschreibung der Relation $\mathscr{A}$ definieren wir in Anlehnung an [2]: Die Gruppe H stabilisiere eine endliche Untergruppenreihe von K nicht-trivial, falls die Stabilitätsgruppe der betreffenden Untergruppenreihe eine nicht-triviale Untergruppe besitzt, die epimorphes Bild von H ist. Es sei nun $(H, K)\in\mathscr{A}$, falls H keine endliche Untergruppenreihe von K nicht-trivial stabilisiert.

Es ist unser Ziel, den eingangs erwähnten Satz von Roseblade zu verallgemeinern. Danach gilt $\mathscr{E}_0=\mathscr{W}\cap\mathscr{S}_1$.

1.2. *Ergebnisse.* Eine Reihe von Enthaltenseinbeziehungen zwischen einigen der von uns definierten Klassen wird beschrieben in

Theorem 1. *Für alle natürlichen Zahlen $n<m$ gilt:*

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{A} \subset \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_m.$$

Die Vermutung $\mathcal{F}_0 = \mathcal{A}$ konnten wir weder beweisen noch widerlegen.

In einer früheren Arbeit zeigt Roseblade, daß zwei Gruppen H und K genau dann bei jeder subnormalen Einbettung vertauschbar sind, wenn $(H, K) \in \mathcal{W}$ gilt [4, Theoreme 1 und 3]. Es ist also $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. Darauf berufen wir uns beim Beweis unseres Hauptsatzes:

Theorem 2. *Seien n, n' nicht-negative ganze Zahlen, m eine natürliche Zahl. Es gilt:*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{W} \cap \mathcal{F}_{n'} = \mathcal{W} \cap \mathcal{A} = \mathcal{W} \cap \mathcal{S}_m.$$

Dieser Satz umfaßt [5, Theorem 1]. Ein Teil seiner Aussage ist schon in der Dissertation des Autors [6] enthalten. Zur Illustration von Theorem 2 sei als unmittelbare Folgerung erwähnt: Eine Gruppe H wird von einer nilpotenten Gruppe K genau dann bei jeder subnormalen Einbettung normalisiert, wenn das Tensorprodukt $H/H' \otimes K/K' = 1$ ist.

Beide von uns formulierten Theoreme stellen einen gewissen Zusammenhang zwischen einer vorgegebenen Gruppe und den Stabilitätsgruppen ihrer Untergruppenreihen her. Dieser Zusammenhang soll in einer späteren Arbeit untersucht werden.

1.3. *Begriffe und Bezeichnungen.* Für Untergruppen H und K einer Gruppe G sei $[H, K]$ das Erzeugnis aller Kommutatoren $[h, k] = h^{-1} k^{-1} h k$, H^K das Erzeugnis der Konjugierten H^k $(h \in H,\ k \in K)$. Höhere Kommutatorgruppen werden wie üblich eingeführt. Folgende Schreibweise wird verwandt:

$$\gamma H^m K^n = [\underbrace{H, \ldots, H}_{m}, \underbrace{K, \ldots, K}_{n}] \qquad (m>0,\ n \geqq 0),$$

mit den Konventionen $\gamma H^1 K^n = \gamma H K^n$, $\gamma H^m K^0 = \gamma H^m = [\underbrace{H, \ldots, H}_{m}]$. Die Normenreihe von H im Erzeugnis $J = \langle H, K \rangle$ ist die Reihe $J = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \cdots$, definiert durch die normalen Hüllen $H_{i+1} = H^{H_i}$. Für alle $i>0$ ist $H_i = H \gamma K H^i$. Genau dann ist H subnormal in J $(H \trianglelefteq\trianglelefteq J)$, wenn es eine nicht-negative ganze Zahl r gibt, für die $H_r = H$ ist. Die kleinste solche Zahl heißt dann der Defekt von H in J.

2. Hilfssätze

In diesem Abschnitt werden drei Hilfssätze bewiesen. Lemma 1 ist eine Teilaussage von Theorem 1. Es wird zum Beweis des dritten Hilfssatzes benötigt.

Lemma 1. *Für $n \leqq m$ ist $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_m$.*

Beweis. Um nachzuweisen, daß $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1$ ist, hat man offenbar nur folgendes zu zeigen: Ist G eine Gruppe, $A/Z(G)$ eine nicht-triviale abelsche subnormale Untergruppe von $G/Z(G)$, so gibt es eine abelsche subnormale Untergruppe $B \neq 1$ von G, die epimorphes Bild von $A/Z(G)$ ist. Die Behauptung $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_m$ $(n \leqq m)$ folgt aus $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1$ durch Übergang zu entsprechenden Faktorgruppen und mittels eines einfachen Induktionsschlusses.

Sei $A \leqq G$ wie oben vorgegeben. A ist nilpotent von einer Klasse $\leqq 2$. Wir können $Z(G) \neq 1$ annehmen, da sonst nichts zu beweisen ist. Ist A nicht-abelsch, so ergibt sich das Gewünschte mit dem Lemma von Grün [3, p. 227]: Man wähle ein Element $a \in A$, $a \notin Z(A)$. Dann wird durch $x \mapsto [a, x]$ $(x \in A)$ ein Homomorphismus von A in $Z(A)$ beschrieben, dessen Bild B nicht-trivial ist. Der Kern dieses Homomorphismus umfaßt $Z(A)$, und es ist $Z(A) \geqq Z(G)$. Folglich ist B ein epimorphes Bild von $A/Z(G)$. Überdies ist $B \trianglelefteq A \trianglelefteq\trianglelefteq G$, also $B \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Mehr Schwierigkeiten bereitet der Fall, daß A abelsch ist. Wegen $G \geqq A > Z(G)$ ist jedenfalls G nicht abelsch. Sei $A = A_0 \lhd A_1 \lhd \cdots \lhd A_r = G$ die Normenkette von A in G. Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl s derart, daß A_s nicht-abelsch ist. Es ist $s = 1$ oder $s = 2$, denn ist der Defekt $r \geqq 2$, dann ist A_2 nicht-abelsch. Sonst wäre nämlich $A \lhd A_2$ im Widerspruch zur Konstruktion der Normenkette. A_{s-1} ist jedenfalls abelsch, und sowohl A als auch $[A, A_s]$ liegen in A_{s-1}. Daher zentralisieren sich A und $[A, A_s]$.

In keinem Fall ist $[A, A_s] = 1$: Falls $s = 2$ ist, ist dies klar, da A nicht normal in A_2 ist. Wäre andererseits im Falle $s = 1$ $[A, A_1] = 1$, so wäre auch $[A^y, A_1] = 1$ für alle $y \in A_2$. Daraus folgte aber, daß A_1 sogar das Erzeugnis A^{A_2} zentralisierte. Also wäre A_1 abelsch im Widerspruch zur Vorgabe $s = 1$. Folglich gibt es ein $a \in A_s$, das nicht mit allen Elementen von A vertauschbar ist. Da $[A, A_s]$ von A zentralisiert wird, ist die Abbildung $x \mapsto [a, x]$ $(x \in A)$ ein Homomorphismus von A auf eine nicht-triviale Untergruppe B von $[A, A_s]$. Da $[A, A_s]$ abelsch und subnormal in G ist, ist $B \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Schließlich wird bei diesem Homomorphismus jedes Element von $Z(G)$ auf das neutrale Element abgebildet, folglich ist B ein epimorphes Bild von $A/Z(G)$.

Lemma 2. *Seien H und K subnormale Untergruppen von $J = \langle H, K \rangle$, sei $H \trianglelefteq H^K$ und $H \cap K \leqq Z_n(K)$ für eine natürliche Zahl n. Dann ist $H^K \cap K$ nilpotent.*

Beweis. Wir setzen $K_1 = H^K \cap K$. Da K_1 subnormal in J ist, gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $\gamma H K_1^m \leqq K_1$. Da $H \trianglelefteq H^K$ vorausgesetzt ist, ist ferner $\gamma H K_1^s \leqq H$ für jede natürliche Zahl s. Also ist $\gamma H K_1^m \leqq H \cap K_1$, nach Voraussetzung daher $\gamma H K_1^m \leqq Z_n(K)$. Damit ist $\gamma H K_1^{m+n} = 1$. Aus [1, Theorem 2] folgt $\gamma K_1^{r+1} H = 1$ für $r = (m+n)(m+n-1)/2$. K_1 ist Normalteiler von K, daher ist γK_1^{r+1} als charakteristische Untergruppe von K_1 ebenfalls normal in K. Folglich zentralisiert γK_1^{r+1} sogar die normale Hülle H^K. Wegen $K_1 \leqq H^K$ ergibt sich $\gamma K_1^{r+2} = 1$, d.h., K_1 ist nilpotent.

Lemma 3. *Seien m und n nicht-negative ganze Zahlen, r die größere der beiden Zahlen. Ist $(H, K) \in \mathcal{S}_m$ und sind H und K in eine Gruppe G subnormal* *eingebettet derart, daß* $HK=KH$ *und* $H\cap K\leqq Z_n(K)$ *gilt, dann ist* $H^K\cap K\leqq Z_r(K)$.

Beweis. Sei d der Defekt von H in $J=\langle H, K\rangle$ und $H=H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_d=J$ die Normenkette. Für $d\leqq 1$ ist $H^K=H$, daher die Behauptung wegen $r\geqq n$ richtig. Sei daher $d>1$. Für $0\leqq\delta\leqq d$ setzen wir $K_\delta=H_\delta\cap K$. Wir zeigen durch Induktion nach δ, daß $K_\delta\leqq Z_r(K)$ ist für $\delta=0,1,\dots,d-1$. Daraus folgt dann die Behauptung $K_{d-1}\leqq Z_r(K)$ des Lemmas. Da $K_0=H\cap K$ ist, ist der Induktionsanfang $\delta=0$ richtig. Sei also $0<\delta<d$ und angenommen, daß $K_{\delta-1}\leqq Z_r(K)$ ist.

Auf Grund der Voraussetzung $HK=KH$ ist $H_{\delta+1}=H_{\delta-1}K_{\delta+1}$, und daher

$$H_\delta=H_{\delta-1}^{K_{\delta+1}}.$$

Da $K_{\delta+1}\trianglelefteq\trianglelefteq H_{\delta+1}$, $H_{\delta-1}\trianglelefteq H_\delta$ und nach Induktionsvoraussetzung $H_{\delta-1}\cap K_{\delta+1}=K_{\delta-1}\leqq Z_r(K)$ ist, erfüllen $H_{\delta-1}$ und $K_{\delta+1}$ in $H_{\delta+1}$ die Voraussetzungen von Lemma 2. Folglich ist $K_\delta=H_\delta\cap K_{\delta+1}$ nilpotent.

Da nach Induktionsvoraussetzung $K_{\delta-1}\leqq Z_r(K)$ ist, ist $K_\delta Z_r(K)/Z_r(K)$ $(\cong K_\delta/K_\delta\cap Z_r(K))$ ein epimorphes Bild von $K_\delta/K_{\delta-1}$. Nun ist $K_\delta/K_{\delta-1}\cong H_\delta/H_{\delta-1}$, und letztere Gruppe wird von homomorphen Bildern von H erzeugt. Folglich wird $K_\delta Z_r(K)/Z_r(K)$ durch homomorphe Bilder von H erzeugt. Da K_δ ein nilpotenter Subnormalteiler von K ist, ist $K_\delta Z_r(K)/Z_r(K)$ ein nilpotenter Subnormalteiler von $K/Z_r(K)$. Da nach Voraussetzung $(H,K)\in\mathscr{S}_m$ ist, gilt nach Lemma 1 auch $(H,K)\in\mathscr{S}_r$. Folglich hat $K_\delta Z_r(K)/Z_r(K)$ sogar keine nilpotente Untergruppe $\neq 1$, die epimorphes Bild von H ist, wie sich aus dem Lemma von Grün [3, p. 227] ergibt. Daher ist $K_\delta\leqq Z_r(K)$.

3. Beweis von Theorem 1

3.1. Ist H eine endliche nilpotente Gruppe der Klasse $m\geqq 1$, so gilt trivialerweise $(H,H)\in\mathscr{S}_m$. Es ist jedoch $(H,H)\notin\mathscr{S}_{m-1}$. Wegen Lemma 1 ist folglich $\mathscr{S}_{m-1}$ echt in $\mathscr{S}_m$ enthalten, und es gilt $\mathscr{S}_n\subset\mathscr{S}_m$ für $n<m$.

Wir zeigen nun als nächstes $\mathscr{A}\subset\mathscr{S}_1$. Sei ein Paar von Gruppen H, K gegeben mit $(H,K)\notin\mathscr{S}_1$. Dann gibt es eine abelsche subnormale Untergruppe $A/Z(K)\neq 1$ von $K/Z(K)$, die epimorphes Bild von H ist. Da A ein nilpotenter Subnormalteiler von K ist, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $\gamma KA^n=1$ ist. Wegen $A/Z(K)\neq 1$ ist $n>1$. Identifiziert man $K/Z(K)$ mit der Gruppe der inneren Automorphismen von K, so sieht man, daß H die Subnormalreihe $K\trianglerighteq[K,A]\trianglerighteq\gamma KA^2\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq\gamma KA^n=1$ nicht-trivial stabilisiert. Also ist $(H,K)\notin\mathscr{A}$. Damit ist $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{S}_1$ gezeigt.

Seien C_2, C_4 zyklische Gruppen der Ordnungen 2 bzw. 4. Trivialerweise ist $(C_2,C_4)\in\mathscr{S}_1$. Aber C_2 ist isomorph zur Automorphismengruppe von C_4, und diese ist Stabilitätsgruppe der Kompositionsreihe von C_4. Also ist $(C_2,C_4)\notin\mathscr{A}$, und daher gilt $\mathscr{A}\subset\mathscr{S}_1$.

3.2. Um die Inklusion $\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{A}$ nachzuweisen, seien H und K nun irgendwelche Gruppen mit $(H,K)\notin\mathscr{A}$. Dann gibt es einen Epimorphismus σ von H

auf eine nicht-triviale Untergruppe N einer Stabilitätsgruppe S einer endlichen Untergruppenreihe von K. Für jede Untergruppe K_1 von K schreiben wir $[K_1, N]$ für die von allen $k^{-1}k^{\alpha}$ $(k \in K_1,\ \alpha \in N)$ erzeugte Untergruppe von K. Wegen $N \leqq S$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $\gamma KN^n = 1$ ist.

Wir bilden nun das semidirekte Produkt G von K mit H unter dem gegebenen Homomorphismus σ. Es ist $G = HK$ mit $H \cap K = 1$, $K \trianglelefteq G$, und die Wirkung von H auf K wird beschrieben durch $[k, h] = k^{-1}k^{\sigma(h)}$ $(h \in H,\ k \in K)$. Die Wirkung von H auf K entspricht also vollkommen der Wirkung von N auf K. Für jede Untergruppe K_1 von K können wir daher $[K_1, H]$ mit $[K_1, N]$ identifizieren, und es ist folglich $\gamma KH^m = \gamma KN^m$ für jede natürliche Zahl m. Wegen $\gamma KN^n = 1$ ist $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$. H ist aber nicht normal in G, denn sonst wäre $[K, H] \leqq H \cap K = 1$. Dann wäre $[K, N] = 1$, und es folgte $N = 1$. Also ist $(H, K) \notin \mathscr{F}_0$. Damit ist $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{A}$ bewiesen.

3.3. Wir haben nur noch $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{F}_0$ zu zeigen. Sei $(H, K) \in \mathscr{S}_0$. Seien ferner H und K als disjunkte Subnormalteiler in eine Gruppe eingebettet. Bei dieser Einbettung seien H und K überdies vertauschbar. Nach Lemma 3 gilt dann $H^K \cap K = 1$. Wegen $HK = KH$ ist aber $H^K = H(H^K \cap K)$. Damit ergibt sich $H^K = H$, und das bedeutet $(H, K) \in \mathscr{F}_0$.

$\mathscr{S}_0$ ist sogar echt in $\mathscr{F}_0$ enthalten. Sei nämlich K Prüfergruppe zur Primzahl p, H eine endliche p-Gruppe $\neq 1$. Dann ist $(H, K) \notin \mathscr{S}_0$. Andererseits ist $(H, K) \in \mathscr{W} \cap \mathscr{S}_1$. Man beweist nun $(H, K) \in \mathscr{F}_0$ direkt, oder indem man Theorem 2 heranzieht. Beim Beweis von Theorem 2 wird kein Gebrauch von der Enthaltenseinsbeziehung $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{F}_0$ gemacht.

4. Beweis von Theorem 2

Aus der schon zitierten Arbeit von Roseblade erhalten wir $\mathscr{W} = \mathscr{V}$ und $\mathscr{E}_0 \subseteq \mathscr{W}$ [4, Theoreme 1 und 3]. Folglich gilt $\mathscr{E}_n = \mathscr{W} \cap \mathscr{F}_n$ für jede nicht-negative ganze Zahl n. Offenbar ist $\mathscr{E}_n \subseteq \mathscr{E}_0$. Nach Theorem 1 ergeben sich damit die folgenden Inklusionen:

$$(*) \qquad \mathscr{E}_n = \mathscr{W} \cap \mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{E}_0 = \mathscr{W} \cap \mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{W} \cap \mathscr{A} \subseteq \mathscr{W} \cap \mathscr{S}_m .$$

Dabei ist $n \geqq 0$, $m \geqq 1$.

Um nachzuweisen, daß $\mathscr{W} \cap \mathscr{S}_m$ in $\mathscr{E}_n$ enthalten ist, wählen wir ein Gruppenpaar $(H, K) \in \mathscr{W} \cap \mathscr{S}_m$. H und K seien subnormal in eine Gruppe G eingebettet, so daß ihr Durchschnitt in $Z_n(K)$ liegt. Wegen $\mathscr{W} = \mathscr{V}$ ist dann $HK = KH$. Nach Lemma 3 gilt daher $H^K \cap K \leqq Z_r(K)$ für $r = \max(m, n)$. Für jede natürliche Zahl d ist $\gamma HK^d \leqq H^K$, und da $K \trianglelefteq\trianglelefteq HK$ ist, gibt es eine natürliche Zahl s, so daß $\gamma HK^s \leqq K$ ist. Damit ist $\gamma HK^s \leqq H^K \cap K \leqq Z_r(K)$, also $\gamma HK^{s+r} = 1$. Da $H \trianglelefteq\trianglelefteq HK$ ist, ist $\gamma KH^t \leqq H$ für eine geeignete natürliche Zahl t. Aus [4, Theorem 2] folgt nun $[H, K] = \gamma KH^t \cdot \gamma HK^{s+r} \leqq H$. Folglich ist $(H, K) \in \mathscr{E}_n$.

Wegen $\mathscr{W} \cap \mathscr{S}_m \subseteq \mathscr{E}_n$ gilt nun in $(*)$ überall das Gleichheitszeichen. Damit ist Theorem 2 bewiesen.

Literatur

1. Hall, P.: Some sufficient conditions for a group to be nilpotent. Illinois J. Math. **2**, 787–801 (1958).
2. – Hartley, B.: The stability group of a series of subgroups. Proc. London Math. Soc. (3), **16**, 1–39 (1966).
3. Kurosh, A. G.: The theory of groups, Vol. 2. Chelsea, New York 1960.
4. Roseblade, J. E.: The permutability of orthogonal subnormal subgroups. Math. Z. **90**, 365–372 (1965).
5. – A note on disjoint subnormal subgroups. Bull. London Math. Soc. **1**, 65–68 (1969).
6. Schmid, P.: Normalität bei Paaren subnormaler Untergruppen. Dissertation, Universität Tübingen (1970).

Dr. P. Schmid
Math. Institut der Universität
D-7400 Tübingen, Wilhelmstr. 7

(Eingegangen am 17. Juli 1970)