Ein Grenzübergang in der Theorie akustischer Wellenfelder

PETER WERNER

Vorgelegt von W. NOLL

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit knüpft an frühere Untersuchungen [2]–[4] an, in denen Existenzbeweise für einige Grundprobleme der Theorie zeitharmonischer akustischer Wellenfelder gegeben wurden. Im Rahmen der in [2] dargestellten linearisierten Theorie lassen sich akustische Wellenfelder durch eine Funktion $\Phi(\mathfrak{x}, t)$ beschreiben, die der Gleichung

$$\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{a}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{1.1}$$

genügt. Hierbei ist $\rho_0(\mathfrak{x})$ die Dichteverteilung im Ruhezustand, $c(\mathfrak{x})$ die Schallgeschwindigkeitsverteilung, a eine nichtnegative Dämpfungskonstante und $\Psi(\mathfrak{x}, t)$ das Potential einer vorgegebenen konservativen Kraftdichteverteilung. Die interessierenden physikalischen Größen, die Geschwindigkeitsverteilung $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, t)$ und die Druckverteilung $p(\mathfrak{x}, t)$ berechnen sich aus Φ durch

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \Phi \tag{1.2}$$

und

$$p - p_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - a\,\Phi + \Psi, \tag{1.3}$$

wobei p_0 der Druck im Ruhezustand ist.

Im folgenden nehmen wir an, daß die vorgegebene Kraftdichteverteilung zeitharmonisch mit der Frequenz $\omega > 0$ ist. Setzen wir

$$\Psi(\mathfrak{x}, t) = -\frac{c^2}{\omega} \operatorname{Re}\{i f(\mathfrak{x})\, e^{-i\omega t}\} \tag{1.4}$$

mit einer geeigneten komplexwertigen Funktion $f(\mathfrak{x})$ und beschränken wir uns auf die Untersuchung zeitharmonischer Wellenfelder der Form

$$\Phi(\mathfrak{x}, t) = \operatorname{Re}\{U(\mathfrak{x})\, e^{-i\omega t}\}, \tag{1.5}$$

so ergibt sich für U die Gleichung

$$\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla U\right) + \kappa^2 U = f \tag{1.6}$$

mit

$$\kappa^2 = \frac{\omega}{c^2}(\omega + i\,a). \tag{1.7}$$

Hierbei denken wir uns das Vorzeichen von κ durch

$$0 \leqq \arg \kappa(\mathfrak{x}) < \pi \tag{1.8}$$

festgelegt.

Es ist sinnvoll, sich auf Lösungen zu beschränken, die sich im Unendlichen wie „ausstrahlende" Wellen verhalten. Ist das Medium im Äußeren einer genügend großen Kugel homogen, so kann die Kennzeichnung der ausstrahlenden Lösungen mit Hilfe der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung

$$U = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\kappa\right) U = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{für } r \to \infty \tag{1.9}$$

erfolgen.

Je nach Art der vorgegebenen Materieverteilung ergeben sich verschiedenartige mathematische Problemstellungen. In [3] und [4] wurden zwei typische Aufgabenstellungen der mathematischen Akustik näher diskutiert, das Randwertproblem und das Beugungsproblem.

Randwertprobleme ergeben sich zum Beispiel bei der Untersuchung akustischer Wellenfelder, die durch die Reflexion vorgegebener einfallender akustischer Felder an ruhenden oder elastisch schwingenden festen Körpern erzeugt werden. In diesem Fall ist ein akustisches Feld im Äußeren des betrachteten Körpers zu ermitteln, dessen Normalgeschwindigkeit $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}$ auf der Randfläche des Körpers vorgegebene Werte besitzt. Nach (1.2) und (1.5) ergibt sich damit ein Neumannsches Außenraumproblem für die Schwingungsgleichung (1.6). Wie in [3] gezeigt wurde, besitzt dieses Problem eine eindeutig bestimmte Lösung U, falls ρ und c außerhalb einer genügend großen Kugel konstant sind und zusätzlich die Gültigkeit der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (1.9) verlangt wird. Neben dem hier zugrunde gelegten Modell der „harten Reflexion", das der Vorgabe der Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Randfläche entspricht, finden sich in der akustischen Literatur weitere Reflexionsmodelle, zum Beispiel das Modell der „weichen Reflexion", bei dem der Druck an der Randfläche vorzugeben ist, so daß sich nach (1.3) und (1.5) ein Dirichletsches Außenraumproblem ergibt.

Ein Beugungsproblem im Sinn von [4] – im englischen Sprachgebrauch auch besonders anschaulich als „interface problem" oder „transmission problem" bezeichnet – ergibt sich, falls zwei verschiedene akustische Medien vorliegen, die durch eine feste Grenzfläche F getrennt werden. In diesem Fall tritt zwischen den akustischen Feldern im Inneren und im Äußeren der Grenzfläche F eine Wechselwirkung auf, die physikalisch aus der Forderung resultiert, daß sich die Normalkomponente der Geschwindigkeit und der Druck bei dem Durchgang durch F stetig verhalten. Bezeichnen wir die Materialeigenschaften des äußeren Mediums mit ρ_1, c_1, a_1 und die des inneren Mediums mit ρ_2, c_2, a_2, so ergeben sich nach (1.2–5) für die gesuchte Lösung U an der Grenzfläche F die Übergangsbedingungen

$$(a_1 - i\omega)\, U_a + i\frac{c_1^2}{\omega} f = (a_2 - i\omega)\, U_i + i\frac{c_2^2}{\omega} f \tag{1.10}$$

und

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial U_a}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial U_i}{\partial n}. \tag{1.11}$$

Hierbei deuten wir durch die Indices „a" und „i" an, daß die entsprechenden Größen an der Außenseite bzw. an der Innenseite von F zu bilden sind. An die Stelle einer Randbedingung von Neumannschem oder Dirichletschem Typ treten also im Fall des Beugungsproblems die beiden Übergangsbedingungen (1.10) und (1.11), durch die die Grenzwerte der Lösung U und ihrer Normalableitung an der Außenseite und an der Innenseite der Fläche F miteinander gekoppelt werden. Nach [4] gibt es unter geeigneten Voraussetzungen über ρ, c, f und F genau eine Funktion U, die im Äußeren und im Inneren von F die Gleichung (1.6), auf F die Übergangsbedingungen (1.10–11) und im Unendlichen die Ausstrahlungsbedingung (1.9) erfüllt.

Damit haben wir für zwei wichtige Grundsituationen der Akustik mathematische Modelle gewonnen. Es entsteht die Frage, welche Beziehungen zwischen den beiden mathematischen Grundaufgaben, dem Randwertproblem und dem Beugungsproblem, bestehen. Die physikalische Vorstellung legt die Erwartung nahe, daß sich die Lösung des Randwertproblems, die physikalisch einem totalreflektierten akustischen Feld entspricht, durch einen Grenzübergang aus der Lösung des Beugungsproblems gewinnen läßt, falls man die Dämpfungskonstante a_2 des inneren Mediums gegen ∞ streben läßt. Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Diskussion dieses Grenzüberganges im Rahmen der in [3] und [4] entwickelten Existenztheorie, und zwar werden wir zeigen, daß die Lösung des Beugungsproblems für $a_2 \to \infty$ im Inneren von F gegen 0 und im Äußeren von F gegen die Lösung des Neumannschen Außenraumproblems konvergiert. Geht man also von dem Beugungsproblem aus, so wird man durch den Grenzübergang $a_2 \to \infty$ zwangsläufig zu dem Modell der harten Reflexion geführt.

Die Zielsetzung dieser Arbeit entspricht dem Wunsch, mathematische Theorien, die durch physikalische Fragestellungen motiviert sind, so weit zu entwickeln, daß die wesentlichen qualitativen Eigenschaften des physikalischen Vorgangs auch im mathematischen Modell ohne Bezug auf die physikalische Anschauung sichtbar werden. Es ist daher wünschenswert, Grenzübergänge, die durch die physikalische Anschauung nahegelegt werden, auch einer mathematischen Diskussion im Rahmen des zugrunde gelegten Modells zu unterziehen.

Um die formale Seite der durchzuführenden Rechnungen nicht zu stark zu belasten, beschränken wir uns im folgenden auf den Fall, daß ρ und c im Inneren und im Äußeren von F konstant sind. In diesem Fall geht die Gleichung (1.6) in die Helmholtzsche Schwingungsgleichung

$$\Delta U + \kappa^2 U = f \tag{1.12}$$

über. Die Übertragung der Resultate auf variable Koeffizienten ρ und c, die den Voraussetzungen in [4] genügen, bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Um den gewünschten Grenzübergang durchführen zu können, ist es erforderlich, die in [4] zum Existenzbeweis für das Beugungsproblem benutzte Argumentation so abzuändern, daß der sich asymptotisch für $a_2 \to \infty$ ergebende Integraloperator invertierbar wird. Hierzu werden wir in Analogie zu [3], § 4 noch ein Volumenpotential in den Ansatz aufnehmen, das zu einem gegenüber [4] modifizierten und für die Diskussion des Grenzübergangs besser geeigneten Integralgleichungssystem führt. In § 2 führen wir das Beugungsproblem auf das modifizierte Integralgleichungssystem zurück. In § 3 untersuchen wir das asymptotische Verhalten der in dem Integralgleichungssystem auftretenden Integraloperatoren für $a_2 \to \infty$. In § 4 wird die Diskussion des Grenzübergangs $a_2 \to \infty$ durchgeführt.

2. Aufstellung der Integralgleichungen

Wir betrachten eine dreimal stetig differenzierbare geschlossene Fläche F, die den dreidimensionalen euklidischen Raum in ein zusammenhängendes Außengebiet G_a und ein beschränktes, aus endlich vielen zusammenhängenden Komponenten bestehendes Innengebiet G_i zerlegt. G_a sei durch ein homogenes akustisches Medium M_1 mit der Dichte ρ_1, der Schallgeschwindigkeit c_1 und der Dämpfungszahl a_1 ausgefüllt. G_i sei durch ein homogenes akustisches Medium M_2 mit den entsprechenden Größen ρ_2, c_2, a_2 ausgefüllt. Wir setzen

$$\kappa_j^2 = \frac{\omega(\omega + i a_j)}{c_j^2}, \quad 0 \leq \arg \kappa < \pi \quad (j = 1, 2). \tag{2.1}$$

Die Funktion $f(\mathfrak{x})$ sei im ganzen Raum hölderstetig und verschwinde außerhalb einer genügend großen Kugel $|\mathfrak{x}| = R$. Ferner setzen wir voraus, daß f auf F hölderstetig differenzierbar im Sinn von [3], S. 36, Fußnote 7 ist.

Die Bestimmung des zeitharmonischen akustischen Wellenfelds, das durch eine Kraftdichteverteilung mit dem Potential (1.4) erzeugt wird, führt zu folgender Aufgabe:

(A) *Bestimme eine Funktion U mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *U ist stetig differenzierbar in $G_a + F$ und in $G_i + F$ und zweimal stetig differenzierbar in G_a und in G_i;*

(b) *U genügt den Gleichungen*

$$\Delta U + \kappa_1^2 U = f \quad \textit{in } G_a \tag{2.2}$$

und

$$\Delta U + \kappa_2^2 U = f \quad \textit{in } G_i; \tag{2.3}$$

(c) *U genügt auf F den Übergangsbedingungen* (1.10 – 11);

(d) *erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* (1.9).

Nach [4] besitzt Problem (A) eine eindeutig bestimmte Lösung U.

Im folgenden seien ρ_1, c_1, a_1, ρ_2, c_2 und f fest gewählt, während wir die innere Dämpfungszahl $\alpha = a_2$ als variablen Parameter ansehen. Um die Abhängigkeit von $\alpha = a_2$ zu betonen, machen wir gelegentlich von dem Index α Gebrauch.

Neben dem Beugungsproblem (A) betrachten wir das folgende Randwertproblem, das physikalisch der totalen Reflexion des in G_a durch die Kraftdichteverteilung mit dem Potential (1.4) erzeugten akustischen Feldes an der ruhenden Fläche F entspricht:

(B) *Bestimme eine Funktion V mit folgenden Eigenschaften*:

(a') *V ist stetig differenzierbar in G_a+F und zweimal stetig differenzierbar in G_a;*

(b') *V genügt in G_a der Helmholtzschen Schwingungsgleichung* (1.12);

(c') *V genügt auf F der Randbedingung*

$$\frac{\partial V}{\partial n}=0; \tag{2.4}$$

(d') *V erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* (1.9).

Das Hauptergebnis dieser Untersuchung läßt sich in folgender Weise formulieren:

Satz 1. *Es sei U_α die zu der inneren Dämpfungszahl $\alpha=a_2$ gehörende Lösung von Problem* (A). *Ferner sei V die Lösung von Problem* (B). *Dann gelten die Grenzrelationen*

$$\lim_{\alpha\to\infty} U_\alpha(\mathfrak{x})=V(\mathfrak{x}) \quad \textit{für } \mathfrak{x}\in G_a, \tag{2.5}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} U_\alpha(\mathfrak{x})=0 \quad \textit{für } \mathfrak{x}\in G_i. \tag{2.6}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in G_a und in jedem kompakten Teilbereich von G_i.

Aus dem Beweis von Satz 1 ergeben sich zusätzlich Abschätzungen für die Konvergenzgeschwindigkeit, die wir am Ende von § 4 formulieren werden (Satz 2).

In diesem Abschnitt leiten wir zunächst ein zu Problem (A) äquivalentes Integralgleichungssystem her. Wir setzen

$$\Phi_j(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i\kappa_j|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \quad (j=1,2) \tag{2.7}$$

und bilden die Raumpotentiale

$$T_1(\mathfrak{x})=-\tfrac{1}{2}\int_{G_a} f(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}} \tag{2.8}$$

und

$$T_2(\mathfrak{x})=-\tfrac{1}{2}\int_{G_i} f(\mathfrak{y})\,\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}}. \tag{2.9}$$

Es sei U die gesuchte Lösung von Problem (A). Setzen wir

$$U_1=U-T_1 \quad \text{in } G_a, \tag{2.10}$$

$$U_2=U-T_2 \quad \text{in } G_i \tag{2.11}$$

und wenden wir die Poissonsche Formel zur Bildung der zweiten Ableitungen von Volumenpotentialen auf T_1 und T_2 an, so folgt aus (2.2–3) und (2.10–11)

$$\Delta U_1+\kappa_1^2 U_1=0 \quad \text{in } G_a \tag{2.12}$$

und

$$\Delta U_2+\kappa_2^2 U_2=0 \quad \text{in } G_i. \tag{2.13}$$

Zur Bestimmung von U_1 und U_2 gehen wir von folgendem Ansatz aus:

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} U_1(\mathfrak{x}) = & \int_F \left[\lambda_1(\mathfrak{y})\, \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mu_1(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}} \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\right] dF_{\mathfrak{y}} \\ & - \tfrac{1}{2} \int_{G_i} \tau(\mathfrak{y})\, \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dV_{\mathfrak{y}}, \end{aligned}$$

$$(2.15)\qquad U_2(\mathfrak{x}) = \int_F \left[\lambda_2(\mathfrak{y})\, \Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mu_2(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}} \Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\right] dF_{\mathfrak{y}}.$$

Durch (2.14–15) lassen sich U_1 und U_2 von G_a bzw. G_i auf den ganzen Raum fortsetzen. Wir versuchen, die Flächenbelegungen λ_j, μ_j und die Volumenbelegung τ so zu wählen, daß U_1 in G_i und U_2 in G_a verschwindet. Aus dieser Forderung ergeben sich nach den Sprungrelationen der Potentialtheorie (unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen für die Flächenbelegungen) die Beziehungen

$$(2.16)\qquad U_{1a} = -2\mu_1,$$

$$(2.17)\qquad \frac{\partial}{\partial n} U_{1a} = -2\lambda_1,$$

$$(2.18)\qquad U_{2i} = 2\mu_2,$$

$$(2.19)\qquad \frac{\partial}{\partial n} U_{2i} = 2\lambda_2.$$

Setzen wir (2.10–11) und (2.16–19) in die Übergangsbedingungen (1.10–11) ein, so erhalten wir auf F die Relationen

$$(2.20)\qquad (a_1 - i\omega)(T_1 - 2\mu_1) + i\frac{c_1^2}{\omega} f = (a_2 - i\omega)(T_2 + 2\mu_2) + i\frac{c_2^2}{\omega} f$$

und

$$(2.21)\qquad \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} - 2\lambda_1\right) = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial n} + 2\lambda_2\right).$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach μ_2 und λ_2

$$(2.22)\qquad \lambda_2(\mathfrak{x}) = \beta_1 \lambda_1(\mathfrak{x}) + \delta_1(\mathfrak{x})$$

und

$$(2.23)\qquad \mu_2(\mathfrak{x}) = \beta_2 \mu_1(\mathfrak{x}) + \delta_2(\mathfrak{x})$$

mit

$$(2.24)\qquad \beta_1 = -\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

$$(2.25)\qquad \beta_2 = -\frac{a_1 - i\omega}{a_2 - i\omega} = -\frac{\omega + i a_1}{\omega + i a_2},$$

$$(2.26)\qquad \delta_1 = \frac{1}{2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} - \frac{\partial T_2}{\partial n}\right),$$

$$(2.27)\qquad \delta_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\omega + i a_2}\left[(\omega + i a_1) T_1 + \frac{f}{\omega}(c_2^2 - c_1^2)\right] - \frac{1}{2} T_2.$$

Berücksichtigen wir (2.22–23) und setzen wir $\lambda_1=\lambda$ und $\mu_1=\mu$, so geht der Ansatz (2.14–15) in

$$
\begin{aligned}
U_1(\mathfrak{x}) = &\int_F \left[\lambda(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) - \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right] dF_{\mathfrak{y}} \\
&-\tfrac{1}{2}\int_{G_i} \tau(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}},
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
U_2(\mathfrak{x}) = &\int_F [\beta_1\lambda(\mathfrak{y})+\delta_1(\mathfrak{y})]\,\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \\
&-\int_F [\beta_2\mu(\mathfrak{y})+\delta_2(\mathfrak{y})]\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

über.

Die durch (2.8–9) erklärten Volumenpotentiale T_1 und T_2 sind im ganzen Raum stetig differenzierbar, und ihre ersten Ableitungen genügen in jedem beschränkten Bereich, insbesondere auf F gleichmäßig einer Hölder-Bedingung. Hieraus, aus (2.26–27) und aus den Voraussetzungen über f folgt, daß δ_1 gleichmäßig auf F einer Hölder-Bedingung genügt und daß δ_2 hölderstetig differenzierbar auf F (im Sinn von [3], S. 36, Fußnote 7) ist. Nehmen wir an, daß λ und μ analoge Regularitätseigenschaften besitzen, so ergeben sich aus (2.28–29) mit Hilfe der in [3], § 2 zusammengestellten potentialtheoretischen Sätze auf F die Relationen

$$
\begin{aligned}
U_{1i}(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{x}) + &\int_F \left[\lambda(\mathfrak{y}) - \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\right]\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \\
&-\tfrac{1}{2}\int_{G_i} \tau(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}},
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{2a}(\mathfrak{x}) = -\beta_2\mu(\mathfrak{x}) - \delta_2(\mathfrak{x}) + &\int_F [\beta_1\lambda(\mathfrak{y})+\delta_1(\mathfrak{y})]\,\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \\
&-\int_F [\beta_2\mu(\mathfrak{y})+\delta_2(\mathfrak{y})]\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}},
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}U_{1i}(\mathfrak{x}) = \lambda(\mathfrak{x}) + &\int_F \lambda(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_i - \frac{1}{2}\int_{G_i}\tau(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}},
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}U_{2a}(\mathfrak{x}) = -\beta_1\lambda(\mathfrak{x}) - \delta_1(\mathfrak{x}) + &\int_F [\beta_1\lambda(\mathfrak{y})+\delta_1(\mathfrak{y})]\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F [\beta_2\mu(\mathfrak{y})+\delta_2(\mathfrak{y})]\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_a.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Die in (2.32) und (2.33) auftretenden Grenzwerte $[\ldots]_i$ und $[\ldots]_a$ existieren, falls μ auf F hölderstetig differenzierbar ist. Ferner folgt aus einem bekannten Satz der Potentialtheorie (vgl. [3], Lemma 7) unter der gleichen Voraussetzung über μ

$$
\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_i = \left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_a.
\tag{2.34}
$$

Aus (2.7) ergibt sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_\kappa}[\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]=O(|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^{-1}) \quad \text{für } \mathfrak{x}\to\mathfrak{y}. \tag{2.35}$$

Die Funktion

$$Q(\mathfrak{x})=\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}}\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}[\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\,dF_\mathfrak{y} \tag{2.36}$$

ist daher im ganzen Raum stetig. Hieraus und aus (2.34) folgt, falls μ hölderstetig differenzierbar auf F ist,

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}\right]_a-\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}\right]_i\\ &\qquad=\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}}\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}[\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\,dF_\mathfrak{y}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Wir wählen nun eine hölderstetige Funktion $\varphi(\mathfrak{x})$, die auf F verschwindet und in G_i positiv ist. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften kann etwa mit Hilfe von Parallelflächen konstruiert werden (vgl. [3], § 4). Wir versuchen, die Flächenbelegungen λ, μ und die Volumenbelegung τ so zu bestimmen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\beta_2\frac{\partial}{\partial n}U_{1i}-\frac{\partial}{\partial n}U_{2a}=0 \quad \text{auf } F, \tag{2.38}$$

$$U_{1i}-\bar{\beta}_2 U_{2a}=0 \quad \text{auf } F, \tag{2.39}$$

$$\Delta U_1+(\kappa_1^2+i\varphi)U_1=0 \quad \text{in } G_i. \tag{2.40}$$

Nach (2.30–33) und (2.37) führen die Bedingungen (2.38–40) zu folgenden Integralgleichungen:

$$\begin{aligned}&\lambda(\mathfrak{x})+\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\int_F\lambda(\mathfrak{y})\left[\beta_2\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\beta_1\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right]dF_\mathfrak{y}\\ &\quad+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\int_F\mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}}\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}[\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\,dF_\mathfrak{y}\\ &\quad-\frac{\beta_2}{2(\beta_1+\beta_2)}\int_{G_i}\tau(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_\mathfrak{y}=\varepsilon_1(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x}\in F),\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}&\mu(\mathfrak{x})+\frac{1}{1+|\beta_2|^2}\int_F\lambda(\mathfrak{y})[\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\beta_1\bar{\beta}_2\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\,dF_\mathfrak{y}\\ &\quad+\frac{1}{1+|\beta_2|^2}\int_F\mu(\mathfrak{y})\left[|\beta_2|^2\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right]dF_\mathfrak{y}\\ &\quad-\frac{1}{2(1+|\beta_2|^2)}\int_{G_i}\tau(\mathfrak{y})\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_\mathfrak{y}=\varepsilon_2(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x}\in F),\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\tau(\mathfrak{x})+i\,\varphi(\mathfrak{x})\left\{\int_F \lambda(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}-\int_F \mu(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} -\frac{1}{2}\int_{G_i}\tau(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}}\right\}=0 \quad (\mathfrak{x}\in G_i). \tag{2.43}$$

Hierbei berechnen sich ε_1 und ε_2 aus

$$\varepsilon_1(\mathfrak{x})=\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\left\{-\delta_1(\mathfrak{x})+\int_F \delta_1(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} -\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \delta_2(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_a\right\}, \tag{2.44}$$

$$\varepsilon_2(\mathfrak{x})=\frac{\overline{\beta}_2}{1+|\beta_2|^2}\left[-\delta_2(\mathfrak{x})+\int_F \delta_1(\mathfrak{y})\,\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} -\int_F \delta_2(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]. \tag{2.45}$$

Man beachte, daß $\beta_1+\beta_2$ nach (2.24–25) wegen

$$\operatorname{Re}(\beta_1+\beta_2)=-\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\omega^2+a_1 a_2}{\omega^2+a_2^2}<0 \tag{2.46}$$

nicht verschwindet.

Zur Diskussion der Integralgleichungen (2.41–43) betrachten wir den Banach-Raum B_1 aller auf F erklärten stetigen Funktionen λ mit der Norm

$$\|\lambda\|_1=\operatorname*{Max}_{\mathfrak{x}\in F}|\lambda(\mathfrak{x})|, \tag{2.47}$$

den Banach-Raum B_2 aller in G_i erklärten stetigen Funktionen τ, die sich stetig auf G_i+F fortsetzen lassen, mit der Norm

$$\|\tau\|_2=\operatorname*{Sup}_{\mathfrak{x}\in G_i}|\tau(\mathfrak{x})| \tag{2.48}$$

und den Produktraum $B=B_1\times B_1\times B_2$ mit der Norm

$$\|(\lambda,\mu,\tau)\|=\|\lambda\|_1+\|\mu\|_1+\|\tau\|_2. \tag{2.49}$$

Die Integralgleichungen (2.41–43) lassen sich zu einer Operatorgleichung der Form

$$(\lambda,\mu,\tau)+K(\lambda,\mu,\tau)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,0) \tag{2.50}$$

zusammenfassen. Wie in [3], § 4* ergibt sich, daß K ein vollstetiger Operator von B in sich ist.

Wir zeigen nun:

Lemma 1. *Es sei* (λ,μ,τ) *eine Lösung der Operatorgleichung* (2.50). *Ferner seien* U_1 *und* U_2 *durch* (2.28–29) *erklärt. Dann verschwindet* U_1 *in* G_i *und* U_2

* Vgl. auch die Bemerkung im Zusatz bei der Korrektur am Ende von [3].

in G_a, und die durch

(2.51) $$U=\begin{cases} U_1+T_1 & \text{in } G_a, \\ U_2+T_2 & \text{in } G_i \end{cases}$$

erklärte Funktion ist eine Lösung von Problem (A).

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von [4], Lemma 10, so daß wir uns auf eine kurze Skizzierung des Beweisgedankens beschränken können. Aus den im Anschluß an (2.29) zusammengestellten Regularitätseigenschaften von δ_1 und δ_2 folgt nach (2.44–45) mit Hilfe bekannter Sätze der Potentialtheorie (vgl. [4], Lemma 4, 6, 7), daß ε_1 gleichmäßig auf F einer Hölder-Bedingung genügt und ε_2 auf F hölderstetig differenzierbar ist. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Integralgleichungen (2.41–42), daß λ und μ gleichmäßig auf F einer Hölder-Bedingung genügen. Bei diesem Schluß wird benutzt, daß die durch (2.36) definierte Funktion $Q(\mathfrak{x})$ wegen (2.35) und einer entsprechenden Abschätzung für dritte Ableitungen gleichmäßig auf F einer Hölder-Bedingung genügt, wie die im Beweis zu [3], Lemma 16 verwendete Schlußweise zeigt. Eine zweite Anwendung von (2.42) zeigt, daß μ sogar auf F hölderstetig differenzierbar ist. Nach (2.43) ist τ hölderstetig. Aus den angeführten Eigenschaften der Belegungen λ, μ, τ ergibt sich nach [3], Lemma 7–9, daß die durch (2.28–29) erklärten Funktionen U_1 und U_2 in G_a+F und G_i+F stetig differenzierbar und in G_a und G_i zweimal stetig differenzierbar sind. Nach (2.41–43) erfüllen U_1 und U_2 die Relationen (2.38–40).

Zum Nachweis, daß U_1 in G_i und U_2 in G_a verschwindet, beachte man, daß die Funktion

(2.52) $$W=\begin{cases} U_2 & \text{in } G_a, \\ U_1 & \text{in } G_i \end{cases}$$

den Gleichungen

(2.53) $$\Delta W+\kappa_2^2 W=0 \quad \text{in } G_a$$

und

(2.54) $$\Delta W+(\kappa_1^2+i\varphi) W=0 \quad \text{in } G_i,$$

den Übergangsbedingungen

(2.55) $$W_a=\frac{1}{\beta_2} W_i \qquad \text{auf } F;$$

(2.56) $$\frac{\partial}{\partial n} W_a=\beta_2 \frac{\partial}{\partial n} W_i \quad \text{auf } F$$

und der Ausstrahlungsbedingung (1.9) mit $\kappa=\kappa_2$ genügt. Hieraus folgt durch die gleiche Schlußweise wie bei dem Beweis des Eindeutigkeitssatzes ([2], Satz 1), daß W identisch verschwindet. Nach (2.52) verschwindet daher U_1 in G_i und U_2 in G_a.

Hieraus und aus (2.28–29) ergeben sich nach den Sprungrelationen der Potentialtheorie die Beziehungen

$$(2.57)\qquad U_{1a}=-2\mu,\qquad U_{2i}=2(\beta_2\mu+\delta_2),$$
$$\frac{\partial}{\partial n}U_{1a}=-2\lambda,\qquad \frac{\partial}{\partial n}U_{2i}=2(\beta_1\lambda+\delta_1)$$

bzw. nach Elimination von λ und μ

$$(2.58)\qquad U_{2i}=-\beta_2 U_{1a}+2\delta_2,\qquad \frac{\partial}{\partial n}U_{2i}=-\beta_1\frac{\partial}{\partial n}U_{1a}+2\delta_1.$$

Setzt man in (2.58) die Ausdrücke (2.24–27) ein, so folgt, daß die durch (2.51) erklärte Funktion U auf F die Übergangsbedingungen (1.10–11) erfüllt. Die übrigen in (A) geforderten Eigenschaften von U ergeben sich unmittelbar aus (2.28–29) und den oben hergeleiteten Regularitätseigenschaften von U_1 und U_2. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Wir zeigen nun, daß die zu (2.50) gehörende homogene Operatorgleichung

$$(2.59)\qquad (\lambda,\mu,\tau)+K(\lambda,\mu,\tau)=0$$

nur die triviale Lösung $(\lambda, \mu, \tau)=(0,0,0)$ besitzt. Ist (λ, μ, τ) eine Lösung von (2.59) und sind U_1 und U_2 durch (2.28–29) erklärt, so folgt aus Lemma 1 (für $f=0$), daß

$$(2.60)\qquad U=\begin{cases} U_1 & \text{in } G_a,\\ U_2 & \text{in } G_i\end{cases}$$

eine Lösung von Problem (A) mit $f=0$ ist. Nach [2], Satz 1 besitzt Problem (A) zu vorgegebenem f höchstens eine Lösung. Hieraus folgt, daß U identisch verschwindet. Wegen (2.60) verschwindet U_1 in G_a. Nach Lemma 1 verschwindet U_1 auch in G_i. Nach den Sprungrelationen der Potentialtheorie und der Poissonschen Formel zur Differentiation von Volumenpotentialen ergeben sich aus (2.28) die Beziehungen

$$(2.61)\qquad \lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial n}U_{1i}-\frac{\partial}{\partial n}U_{1a}\right)=0\quad \text{auf } F,$$

$$(2.62)\qquad \mu=\tfrac{1}{2}(U_{1i}-U_{1a})=0\qquad \text{auf } F,$$

$$(2.63)\qquad \tau=(\Delta+\kappa_1^2)\,U_1=0\qquad \text{in } G_i.$$

Die homogene Gleichung (2.59) besitzt also nur die Lösung $(\lambda, \mu, \tau)=(0,0,0)$.

Da der Operator K vollstetig ist, besitzt die inhomogene Operatorgleichung (2.50) nach dem Fredholmschen Alternativsatz genau eine Lösung (λ, μ, τ). In Verbindung mit Lemma 1 erhalten wir damit:

Lemma 2. *Das Integralgleichungssystem* (2.41–43) *besitzt genau eine stetige Lösung* (λ, μ, τ). *Aus ihr erhalten wir durch* (2.28–29) *und* (2.51) *die – nach* [2], *Satz* 1 *eindeutig bestimmte – Lösung von Problem* (A).

Man beachte, daß das Integralgleichungssystem (2.41–43) gegenüber dem in [4] für variable Koeffizienten hergeleiteten System den Vorteil hat, daß zu seiner

Diskussion nur die Maximumnormen (2.47–49), jedoch keine Höldernormen herangezogen zu werden brauchen. Hierdurch ergeben sich Vereinfachungen bei der Diskussion des Grenzübergangs $a_2 \to \infty$.

3. Diskussion des asymptotischen Verhaltens der Integraloperatoren

In den folgenden beiden Abschnitten wollen wir zeigen, daß die in § 2 konstruierte Lösung U von Problem (A) für $\alpha = a_2 \to \infty$ gegen die Lösung V des Randwertproblems konvergiert. Als Vorbereitung diskutieren wir das Verhalten der im Integralgleichungssystem (2.41–43) auftretenden Integraloperatoren

$$M_\kappa(\mathfrak{x}) = \int_F \nu(\mathfrak{y})\, \Phi_\kappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dF_\mathfrak{y}, \tag{3.1}$$

$$N_\kappa(\mathfrak{x}) = \int_F \nu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}} \Phi_\kappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dF_\mathfrak{y}, \tag{3.2}$$

$$P_\kappa(\mathfrak{x}) = \int_F \nu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}} \Phi_\kappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dF_\mathfrak{y}, \tag{3.3}$$

$$Q_\kappa(\mathfrak{x}) = \int_F \nu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{x}} \frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}} \left[\Phi_\kappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\right] dF_\mathfrak{y} \tag{3.4}$$

mit

$$\Phi_\kappa(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \tag{3.5}$$

für $\operatorname{Im} \kappa \to \infty$. Wir setzen

$$\kappa = \sigma + i\tau \qquad (\sigma, \tau \text{ reell}) \tag{3.6}$$

und beweisen:

Lemma 3. *Zu jedem $\gamma > 0$ gibt es ein $C > 0$, so daß für alle komplexen Zahlen $\kappa = \sigma + i\tau$, die dem Sektor $\tau > \gamma|\sigma|$ der komplexen Zahlenebene angehören, und für alle $\mathfrak{x} \in F$ sowie für alle auf F erklärten stetigen Funktionen ν die Abschätzungen*

$$|M_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq \frac{C}{\tau} \|\nu\|_1, \tag{3.7}$$

$$|N_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq \frac{C}{\tau} \|\nu\|_1, \tag{3.8}$$

$$|P_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq \frac{C}{\tau} \|\nu\|_1, \tag{3.9}$$

$$|Q_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq C\tau \|\nu\|_1 \tag{3.10}$$

mit

$$\|\nu\|_1 = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{x} \in F} |\nu(\mathfrak{x})| \tag{3.11}$$

gelten.

Beweis. Es sei $(\mathfrak{x}, \delta)$ der in der Kugel $|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| < \delta$ enthaltene Teil von F. Wir hatten vorausgesetzt, daß F dreimal stetig differenzierbar im Sinn von [3], § 2 ist. Nach [3], Lemma 1 gibt es Konstanten $a>0$ und $M>0$, so daß für jedes $\mathfrak{x}\in F$ das Flächenstück $(\mathfrak{x}, a)$ in einem geeigneten Tangenten-Normalen-System mit dem Ursprung $\mathfrak{x}$ die Darstellung

$$y_3=f(y_1, y_2) \tag{3.12}$$

besitzt, wobei f dreimal stetig differenzierbar ist und die Ungleichungen

$$|f(y_1, y_2)|\leqq M(y_1^2+y_2^2), \tag{3.13}$$

$$f_{y_1}(y_1, y_2)^2+f_{y_2}(y_1, y_2)^2\leqq M(y_1^2+y_2^2), \tag{3.14}$$

$$|\mathfrak{n}(\mathfrak{x})-\mathfrak{n}(\mathfrak{y})|\leqq M|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \quad \text{für } \mathfrak{y}\in(\mathfrak{x}, a) \tag{3.15}$$

erfüllt sind. Aus (3.13) und (3.15) folgt wegen $\mathfrak{n}(\mathfrak{x})=(0, 0, 1)$ und $\mathfrak{y}-\mathfrak{x}=(y_1, y_2, f(y_1, y_2))$

$$\begin{aligned}|\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})|&=|[\mathfrak{n}(\mathfrak{y})-\mathfrak{n}(\mathfrak{x})]\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})|\\ &\leqq|\mathfrak{n}(\mathfrak{y})-\mathfrak{n}(\mathfrak{x})|\cdot|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|+|f(y_1, y_2)|\leqq 2M|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Wir beginnen mit der Abschätzung von $N_\kappa(\mathfrak{x})$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\frac{e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}=\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}-i\kappa\right) \tag{3.17}$$

gilt

$$\left|\int\limits_{F-(\mathfrak{x}, a)} v(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right|\leqq\frac{1}{2\pi}\|F\|\cdot\|v\|_1\cdot\frac{1}{a}e^{-\tau a}\left(\frac{1}{a}+|\kappa|\right) \tag{3.18}$$

($\|F\|$ = Flächeninhalt von F). Wegen $dF_{\mathfrak{y}}=\sqrt{1+f_{y_1}^2+f_{y_2}^2}\,dy_1\,dy_2$ folgt aus (3.14–15) und (3.17)

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{(\mathfrak{x}, a)} v(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right|\\ &\leqq\frac{1}{2\pi}\|v\|_1\cdot 2M\cdot\sqrt{1+Ma^2}\int\limits_{y_1^2+y_2^2\leqq a^2} e^{-\tau\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}+|\kappa|\right)dy_1\,dy_2\\ &\leqq\|v\|_1\cdot 2M\cdot\sqrt{1+Ma^2}\cdot\int\limits_0^\infty e^{-\tau\rho}(1+|\kappa|\rho)\,d\rho\\ &=\|v\|_1\cdot 2M\cdot\sqrt{1+Ma^2}\cdot\left(\frac{1}{\tau}+\frac{|\kappa|}{\tau^2}\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Die Funktion $g(\tau)=\tau^p e^{-\tau a}$ nimmt ihr Maximum an der Stelle $\tau=p/a$ an. Hieraus folgt

$$e^{-\tau a}\leqq\left(\frac{p}{a e}\right)^p\frac{1}{\tau^p} \quad \text{für } p>0 \text{ und } \tau>0. \tag{3.20}$$

Nach (3.18–20) gibt es ein $C_1>0$, so daß für alle κ mit $\tau=\operatorname{Im}\kappa>0$

$$|N_\kappa(\mathfrak{x})|\leqq C_1\|v\|_1\left(\frac{1}{\tau}+\frac{|\kappa|}{\tau^2}\right) \tag{3.21}$$

gilt. Für alle $\kappa=\sigma+i\tau$ mit $\tau>\gamma|\sigma|$ gilt

$$|\kappa|=\sqrt{\tau^2+\sigma^2}<\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma}\tau \tag{3.22}$$

und somit

$$|N_\kappa(\mathfrak{x})|\leqq\frac{C_1}{\tau}\left(1+\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma}\right)\|v\|_1\,. \tag{3.23}$$

Damit ist die Abschätzung (3.8) bewiesen. Entsprechend ergeben sich die Abschätzungen (3.7) und (3.9) für $M_\kappa(\mathfrak{x})$ und $P_\kappa(\mathfrak{x})$.

Die Herleitung der Abschätzung (3.10) für $Q_\kappa(\mathfrak{x})$ erfordert einige weitergehende Überlegungen. Wegen (3.17) gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\frac{e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}&=\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot\nabla_{\mathfrak{x}}\left[\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\,e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-\frac{i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right)\right]\\ &=e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\cdot\left\{\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-\frac{i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\,\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\left[-\frac{3}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^4}+\frac{3i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}+\frac{\kappa^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Für $\kappa=0$ ergibt sich insbesondere

$$\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}=\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{n}(\mathfrak{y})}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-3\frac{[\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})][\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})]}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^5}. \tag{3.25}$$

Nach (3.24–25) folgt in Verbindung mit (3.20) und (3.22), daß es zu jedem $\gamma>0$ ein $C_2>0$ gibt, so daß für alle $\kappa=\sigma+i\tau$ mit $\tau>\gamma|\sigma|$ und für alle $\mathfrak{x}\in F$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|\int_{F-(\mathfrak{x},a)}v(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\left[\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\right]dF_{\mathfrak{y}}\right|\\ &\quad\leqq\frac{1}{2\pi}\|F\|\cdot\|v\|_1\left\{e^{-\tau a}\left(\frac{4}{a^3}+\frac{4|\kappa|}{a^2}+\frac{|\kappa|^2}{a}\right)+\frac{4}{a^3}\right\}\leqq C_2\end{aligned} \tag{3.26}$$

gilt. Zur Diskussion des Integralanteils über $(\mathfrak{x},a)$ ist es zweckmäßig, den in (3.10) auftretenden Kern nach (3.24–25) in

$$\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\left[\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\right]=\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})+\Psi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \tag{3.27}$$

mit

$$\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\frac{1}{2\pi}\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\left[e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-\frac{i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right)-\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}\right], \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})&=\frac{1}{2\pi}[\mathfrak{n}(\mathfrak{x})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})][\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})]\\ &\quad\cdot\left\{e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\left(-\frac{3}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^5}+\frac{3i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^4}+\frac{\kappa^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}\right)+\frac{3}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^5}\right\}\end{aligned} \tag{3.29}$$

zu zerlegen. Der zu $\Psi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ gehörende Anteil läßt sich analog zu (3.19) abschätzen: Wegen (3.16) und

$$\begin{aligned}|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 &= y_1^2+y_2^2+f(y_1,y_2)^2 \leqq y_1^2+y_2^2+M^2(y_1^2+y_2^2)^2\\ &\leqq (y_1^2+y_2^2)(1+M^2a^2)\end{aligned} \tag{3.30}$$

gilt

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{(\mathfrak{x},a)} v(\mathfrak{y})\,\Psi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\Big| \leqq \|v\|_1 \frac{1}{2\pi}(2M)^2\sqrt{1+Ma^2}\\ &\cdot \int_{y_1^2+y_2^2\leqq a^2}\left[\frac{6}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}+e^{-\tau\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\left(3|\kappa|+|\kappa|^2\sqrt{1+M^2a^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)\right]dy_1\,dy_2\\ &\leqq \|v\|_1\cdot 4M^2\sqrt{1+Ma^2}\left[6a+\int_0^\infty\left(3|\kappa|\rho\, e^{-\tau\rho}+|\kappa|^2\sqrt{1+M^2a^2}\,\rho^2 e^{-\tau\rho}\right)d\rho\right]\\ &=\|v\|_1\cdot 4M^2\sqrt{1+Ma^2}\left[6a+3\frac{|\kappa|}{\tau^2}+2\sqrt{1+M^2a^2}\,\frac{|\kappa|^2}{\tau^3}\right].\end{aligned} \tag{3.31}$$

Nach (3.22) gibt es daher zu jedem $\gamma>0$ ein $C_3>0$, so daß für alle $\kappa=\sigma+i\tau$ mit $\tau>\gamma|\sigma|$ und $\tau>1$ und für alle $\mathfrak{x}\in F$ die Abschätzung

$$\Big|\int_{(\mathfrak{x},a)} v(\mathfrak{y})\,\Psi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\Big| \leqq C_3 \tag{3.32}$$

gilt.

Zur Abschätzung des entsprechenden Integrals mit dem durch (3.28) erklärten Kern $\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ setzen wir

$$R(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}-i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|-1. \tag{3.33}$$

Für $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\leqq\frac{1}{\tau}$ und $\tau>\gamma|\sigma|$ gilt

$$|\kappa|\cdot|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \leqq \frac{1}{\tau}\sqrt{\sigma^2+\tau^2} < \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma}. \tag{3.34}$$

Zu jedem $\gamma>0$ gibt es daher ein $C_4>0$, so daß für alle $\kappa=\sigma+i\tau$ mit $\tau>\gamma|\sigma|$ und für alle $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in F$ mit $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\leqq 1/\tau$

$$|R(\mathfrak{x},\mathfrak{y})| \leqq C_4|\kappa|^2|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 \tag{3.35}$$

und somit

$$\begin{aligned}&\left|e^{i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-\frac{i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right)-\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}\right|\\ &=\left|[1+i\kappa|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|+R(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-\frac{i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right)-\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}\right|\\ &=\left|\frac{\kappa^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}+R(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}-\frac{i\kappa}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right)\right|\\ &\leqq (1+C_4)\frac{|\kappa|^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}+C_4|\kappa|^3.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Hieraus folgt für $\tau>\gamma|\sigma|$ und $\tau>a^{-1}$ nach (3.28)

$$(3.37)\qquad \begin{aligned} &\int_{(\mathfrak{x},\,1/\tau)} |\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})|\,dF_{\mathfrak{y}} \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathfrak{x},\,1/\tau)} \left[(1+C_4)\frac{|\kappa|^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}+C_4|\kappa|^3\right] dF_{\mathfrak{y}} \\ &\leqq \sqrt{1+Ma^2}\cdot(1+C_4)\int_0^{1/\tau}(|\kappa|^2+|\kappa|^3\rho)\,d\rho \\ &\leqq \sqrt{1+Ma^2}\cdot(1+C_4)\left(\frac{|\kappa|^2}{\tau}+\frac{1}{2}\frac{|\kappa|^3}{\tau^2}\right). \end{aligned}$$

Wegen (3.22) gibt es daher für jedes $\gamma>0$ ein $C_5>0$, so daß für alle $\kappa=\sigma+i\tau$ mit $\tau>\gamma|\sigma|$ und $\tau>a^{-1}$

$$(3.38)\qquad \int_{(\mathfrak{x},\,1/\tau)} |\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})|\,dF_{\mathfrak{y}} \leqq C_5\,\tau$$

gilt. Für $\tau\leqq a^{-1}$ bleibt (3.38) gültig, falls wir den Integrationsbereich $(\mathfrak{x}, 1/\tau)$ durch den kleineren Bereich $(\mathfrak{x}, a)$ ersetzen. Wir betrachten nun den Fall $\tau>a^{-1}$. Für alle $\mathfrak{y}$ mit $\tau^{-1}\leqq|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\leqq a$ gilt nach (3.13)

$$(3.39)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} &\leqq |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 = y_1^2+y_2^2+f(y_1,y_2)^2 \\ &\leqq y_1^2+y_2^2+M^2(y_1^2+y_2^2)^2 \leqq (y_1^2+y_2^2)(1+M^2a^2) \end{aligned}$$

bzw.

$$(3.40)\qquad \sqrt{y_1^2+y_2^2} \geqq \frac{\beta}{\tau} \quad \text{mit } \beta=\frac{1}{\sqrt{1+M^2a^2}}.$$

Nach (3.28) und (3.40) gilt

$$(3.41)\qquad \begin{aligned} &\int_{(\mathfrak{x},a)-(\mathfrak{x},\tau^{-1})} |\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})|\,dF_{\mathfrak{y}} \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathfrak{x},a)-(\mathfrak{x},\tau^{-1})} \left[\frac{2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^3}+|\kappa|\frac{e^{-\tau|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}\right] dF_{\mathfrak{y}} \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\sqrt{1+Ma^2}\int_{\beta\tau^{-1}\leqq\sqrt{y_1^2+y_2^2}\leqq a} \left[\frac{2}{(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^3}+|\kappa|\frac{e^{-\tau\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}{y_1^2+y_2^2}\right] dy_1\,dy_2 \\ &\leqq \sqrt{1+Ma^2}\int_{\beta\tau^{-1}}^{\infty}\left(\frac{2}{\rho^2}+|\kappa|\frac{e^{-\tau\rho}}{\rho}\right)d\rho \\ &= \sqrt{1+Ma^2}\left[2\frac{\tau}{\beta}+|\kappa|\int_{\beta}^{\infty}\frac{e^{-\sigma}}{\sigma}\,d\sigma\right]. \end{aligned}$$

Nach (3.22) und (3.41) gibt es zu jedem $\gamma>0$ ein $C_6>0$, so daß für alle $\kappa=\sigma+i\tau$ mit $\tau>\gamma|\sigma|$ und $\tau>a^{-1}$

$$(3.42)\qquad \int_{(\mathfrak{x},a)-(\mathfrak{x},\,1/\tau)} |\Psi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})|\,dF_{\mathfrak{y}} \leqq C_6\,\tau$$

gilt. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (3.38) und der Bemerkung im Anschluß an (3.38), daß es zu jedem $\gamma>0$ ein $C_7>0$ gibt, so daß für alle $\kappa=\sigma+i\tau$

mit $\tau > \gamma |\sigma|$

$$\Big| \int_{(\mathfrak{x}, a)} \nu(\mathfrak{y}) \Psi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \, dF_{\mathfrak{y}} \Big| \leqq C_7 \tau \|\nu\|_1 \tag{3.43}$$

gilt. Aus (3.26–27), (3.32) und (3.43) folgt, daß es zu jedem $\gamma > 0$ ein $C_8 > 0$ gibt, so daß für alle $\kappa = \sigma + i\tau$ mit $\tau > \gamma |\sigma|$ und $\tau > 1$ und für alle $\mathfrak{x} \in F$

$$|Q_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq C_8 \tau \|\nu\|_1 \tag{3.44}$$

gilt. Andererseits hängt der durch (3.4) definierte Integraloperator $\nu \to Q_\kappa$ bezüglich der zu (2.47) gehörenden Operatornorm analytisch von κ ab, wie eine zum Beweis von [3], Lemma 18 analoge Argumentation zeigt. Wegen $Q_0(\mathfrak{x}) = 0$ gibt es daher ein $C_9 > 0$ mit

$$|Q_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq C_9 \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} |\kappa| \cdot \|\nu\|_1 \tag{3.45}$$

für alle κ mit $|\kappa| \leqq \sqrt{1+\gamma^2}/\gamma$ und alle $\mathfrak{x} \in F$. Aus $\gamma|\sigma| \leqq \tau \leqq 1$ folgt $|\kappa| \leqq \tau\sqrt{1+\gamma^2}/\gamma \leqq \sqrt{1+\gamma^2}/\gamma$ und somit $|Q_\kappa(\mathfrak{x})| \leqq C_9 \tau \|\nu\|_1$. Setzen wir $C = \operatorname{Max}(C_8, C_9)$, so gilt die Abschätzung (3.10) für alle $\kappa = \sigma + i\tau$ mit $\tau > \gamma|\sigma|$. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

4. Der Grenzübergang $a_2 \to \infty$

In diesem Abschnitt wollen wir den Grenzübergang $a_2 \to \infty$ untersuchen und die in Satz 1 formulierten Grenzrelationen beweisen. Wie in Satz 1 setzen wir $\alpha = a_2$ und verwenden den Index α, um die Abhängigkeit der auftretenden Größen von $\alpha = a_2$ zu beschreiben.

Wir schätzen zunächst den im Integralgleichungssystem (2.41–43) bzw. in der Operatorgleichung (2.50) auftretenden Operator $K = K_\alpha$ für $\alpha \to \infty$ ab. Zur Abkürzung bezeichnen wir denjenigen Integraloperator, der in der i-ten der drei Gleichungen (2.41–43) an j-ter Stelle auftritt, mit K^{ij}.

Zum Beispiel ist

$$K^{12} \mu(\mathfrak{x}) = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \int_F \mu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}} \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}} [\Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \, dF_{\mathfrak{y}}. \tag{4.1}$$

Der Operator K läßt sich mit Hilfe der Integraloperatoren K^{ij} in der Form

$$\begin{aligned} &K(\lambda, \mu, \tau) \\ &= (K^{11}\lambda + K^{12}\mu + K^{13}\tau, K^{21}\lambda + K^{22}\mu + K^{23}\tau, K^{31}\lambda + K^{32}\mu + K^{33}\tau) \end{aligned} \tag{4.2}$$

schreiben. Wegen

$$\kappa_2^2 = \frac{\omega}{c_2^2}(\omega + i\alpha) \tag{4.3}$$

gilt

$$\arg \kappa_2 > \frac{\pi}{8} \quad \text{für } \alpha > \omega. \tag{4.4}$$

Für $\alpha > \omega$ gehört also $\kappa_2 = \sigma + i\tau$ dem Sektor $\tau > \gamma|\sigma|$ mit $\gamma = \operatorname{tg}(\pi/8)$ an, so daß die in Lemma 3 zusammengestellten Abschätzungen verwendet werden können.

Nach (4.3) gilt

$$\kappa_2^2 = i\frac{\omega}{c_2^2}\alpha + O(1) \qquad \text{für } \alpha \to \infty \tag{4.5}$$

und somit

$$\kappa_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{c_2}\,\alpha^{\frac{1}{2}} + O(1) \qquad \text{für } \alpha \to \infty. \tag{4.6}$$

Nach (4.6) gibt es Konstanten A_1, A_2 mit

$$A_1\,\alpha^{\frac{1}{2}} \leqq \tau = \operatorname{Im}\kappa_2 \leqq A_2\,\alpha^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } \alpha > \omega. \tag{4.7}$$

Hieraus folgt, daß die Konstante C in Lemma 3 so gewählt werden kann, daß die Abschätzungen (3.7–10) gültig bleiben, falls man $\kappa = \kappa_2$ setzt und τ für $\alpha > \omega$ durch $\alpha^{\frac{1}{2}}$ ersetzt. Nach (3.10) gibt es daher ein $A_3 > 0$ mit

$$\left|\int_F \mu(\mathfrak{y})\,\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\,\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\,[\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) - \Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\,dF_{\mathfrak{y}}\right| \leqq A_3\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,\|\mu\|_1 \tag{4.8}$$

für alle $\alpha > \omega$ und alle $\mathfrak{x} \in F$. Hieraus und aus (2.25) folgt die Existenz einer Konstanten $C_{12} > 0$ mit

$$\|K^{12}\mu\|_1 \leqq C_{12}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\|\mu\|_1\,. \tag{4.9}$$

Entsprechend folgt aus (2.41), (3.9) und (2.25) (wegen $\beta_2 = O(\alpha^{-1})$ für $\alpha \to \infty$), daß es Konstanten C_{11} und C_{13} mit

$$\|K^{11}\lambda\|_1 \leqq C_{11}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\|\lambda\|_1 \tag{4.10}$$

und

$$\|K^{13}\tau\|_1 \leqq C_{13}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\|\tau\|_2 \tag{4.11}$$

gibt (zur Definition von $\|\tau\|_2$ vgl. (2.48)). Setzen wir

$$L^{21}\lambda(\mathfrak{x}) = \int_F \lambda(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}, \tag{4.12}$$

$$L^{22}\mu(\mathfrak{x}) = -\int_F \mu(\mathfrak{y})\,\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}, \tag{4.13}$$

$$L^{23}\tau(\mathfrak{x}) = -\tfrac{1}{2}\int_{G_i} \tau(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}}, \tag{4.14}$$

so ergibt sich entsprechend mit Hilfe von (2.42), (2.25) und Lemma 3 die Existenz von Konstanten C_{21}, C_{22}, C_{23} mit

$$\|(K^{21} - L^{21})\lambda\|_1 \leqq C_{21}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\|\lambda\|_1\,, \tag{4.15}$$

$$\|(K^{22} - L^{22})\mu\|_1 \leqq C_{22}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\|\mu\|_1\,, \tag{4.16}$$

$$\|(K^{23} - L^{23})\tau\|_1 \leqq C_{23}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\|\tau\|_2\,. \tag{4.17}$$

Die übrigen Integraloperatoren K^{31}, K^{32}, K^{33} hängen nicht von α ab. Die Konstanten C_{ij} lassen sich so wählen, daß die Abschätzungen (4.9–11) und (4.15–17) für alle $\alpha > 0$ gelten.

Die Abschätzungen (4.9 – 11) und (4.15 – 17) besagen, daß der durch (4.2) erklärte Operator $K = K_\alpha$ für $\alpha \to \infty$ gegen den durch

$$L(\lambda, \mu, \tau) = (0, L^{21}\lambda + L^{22}\mu + L^{23}\tau, K^{31}\lambda + K^{32}\mu + K^{33}\tau) \tag{4.18}$$

definierten Grenzoperator L konvergiert. Legen wir die in (2.49) eingeführte Norm zugrunde, so gilt

$$\begin{aligned} \|(K_\alpha - L)(\lambda, \mu, \tau)\| = &\|K^{11}\lambda + K^{12}\mu + K^{13}\tau\|_1 \\ &+ \|(K^{21} - L^{21})\lambda + (K^{22} - L^{22})\mu + (K^{23} - L^{23})\tau\|_1 . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Nach (4.9 – 11) und (4.15 – 17) gibt es daher ein $C > 0$, so daß für alle $\alpha > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(K_\alpha - L)(\lambda, \mu, \tau)\| &\leqq C\alpha^{-\frac{1}{2}}(\|\lambda\|_1 + \|\mu\|_1 + \|\tau\|_2) \\ &= C\alpha^{-\frac{1}{2}}\|(\lambda, \mu, \tau)\| \end{aligned} \tag{4.20}$$

gilt. Verwenden wir die zur Norm (2.49) gehörende Operatornorm

$$\|K\| = \operatorname*{Sup}_{\|(\lambda,\mu,\tau)\| = 1} \|K(\lambda, \mu, \tau)\| , \tag{4.21}$$

so läßt sich die Abschätzung (4.20) in der Form

$$\|K_\alpha - L\| \leqq C\alpha^{-\frac{1}{2}} \tag{4.22}$$

schreiben.

Wir diskutieren nun den Grenzoperator L und zeigen, daß der inverse Operator $(I + L)^{-1}$ existiert. Wie in [3], § 4* ergibt sich, daß L ein vollstetiger Operator des Banach-Raumes $B = B_1 \times B_1 \times B_2$ in sich ist. Zum Nachweis der Existenz von $(I + L)^{-1}$ genügt es daher zu zeigen, daß die homogene Gleichung

$$(\lambda, \mu, \tau) + L(\lambda, \mu, \tau) = 0 \tag{4.23}$$

nur die Lösung $(\lambda, \mu, \tau) = (0, 0, 0)$ besitzt. Das Integralgleichungssystem (4.23) ergibt sich formal aus dem System (2.59), indem man $\beta_2 = 0$ setzt und die Terme mit $\Phi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ streicht. Aus (4.18) und (4.23) folgt $\lambda = 0$. Die homogene Gleichung (4.23) ist daher nach (4.18), (4.12 – 14) und (2.43) äquivalent zu dem Integralgleichungssystem

$$\mu(\mathfrak{x}) - \int_F \mu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}} \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dF_\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\int_{G_i} \tau(\mathfrak{y})\, \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dV_\mathfrak{y} = 0 \qquad (\mathfrak{x} \in F), \tag{4.24}$$

$$\tau(\mathfrak{x}) + i\varphi(\mathfrak{x}) \left[-\int_F \mu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}} \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dF_\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\int_{G_i} \tau(\mathfrak{y})\, \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dV_\mathfrak{y} \right] = 0 \qquad (\mathfrak{x} \in G_i). \tag{4.25}$$

Es sei (μ, τ) eine zum Banach-Raum $B_1 \times B_2$ gehörende Lösung des Systems (4.24 – 25). Wie bei der Diskussion des Systems (2.41 – 43) in § 2 ergibt sich, daß

* Vgl. auch die Bemerkungen im Zusatz bei der Korrektur am Ende von [3].

μ auf F hölderstetig differenzierbar und τ in G_i hölderstetig ist. Die Funktion

$$W(\mathfrak{x}) = \int_F \mu(\mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}} \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dF_{\mathfrak{y}} + \frac{1}{2} \int_{G_i} \tau(\mathfrak{y}) \Phi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dV_{\mathfrak{y}} \tag{4.26}$$

ist daher in G_i zweimal stetig differenzierbar und in $G_i + F$ und $G_a + F$ stetig differenzierbar. Nach (4.24) gilt

$$W_i = 0 \quad \text{auf } F. \tag{4.27}$$

Nach (4.26) gilt

$$\Delta W + \kappa_1^2 W = -\tau \quad \text{in } G_i. \tag{4.28}$$

Aus (4.25) und (4.28) folgt, daß W in G_i der Differentialgleichung

$$\Delta W + (\kappa_1^2 + i\varphi) W = 0 \tag{4.29}$$

genügt. Nach (4.27) und (4.29) gilt

$$\begin{aligned} \int_F \overline{W}_i \frac{\partial W_i}{\partial n} dF &= \int_{G_i} \nabla \cdot (\overline{W} \nabla W)\, dV \\ &= \int_{G_i} [|\nabla W|^2 - (\kappa_1^2 + i\varphi)|W|^2]\, dV = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Hieraus folgt durch Übergang zum Imaginärteil

$$\int_{G_i} [\mathrm{Im}(\kappa_1^2) + \varphi] \cdot |W|^2\, dF = 0. \tag{4.31}$$

Nach (2.1) gilt $\mathrm{Im}(\kappa_1^2) \geqq 0$. Die Funktion φ hatten wir (im Anschluß an (2.37)) so gewählt, daß φ in G_i positiv ist. Hieraus folgt $\mathrm{Im}(\kappa_1^2) + \varphi(\mathfrak{x}) > 0$ für alle $\mathfrak{x} \in G_i$ und somit nach (4.31) $W = 0$ in G_i.

Nach [3], Lemma 7 gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} W_a = \frac{\partial}{\partial n} W_i = 0 \quad \text{auf } F. \tag{4.32}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Neumannsche Außenraumproblem für die Schwingungsgleichung $\Delta W + \kappa_1^2 W = 0$ folgt, daß W auch in G_a verschwindet.

Wegen

$$\mu = \tfrac{1}{2}(W_a - W_i) \tag{4.33}$$

und (4.28) gilt daher $(\mu, \tau) = 0$. Damit ist gezeigt, daß die homogene Gleichung (4.23) nur die Lösung $(\lambda, \mu, \tau) = (0, 0, 0)$ besitzt. Nach dem Fredholmschen Alternativsatz existiert daher der inverse Operator $(I + L)^{-1}$.

Mit $I + L$ ist auch $(I + L)^{-1}$ beschränkt. Zur Abschätzung von $(I + K_\alpha)^{-1}$ setzen wir

$$\alpha_0 = 4C^2 \|(I + L)^{-1}\|^2, \tag{4.34}$$

wobei C die in (4.22) auftretende Konstante ist. Für $\alpha \geqq \alpha_0$ gilt nach (4.22)

$$\begin{aligned}\|(I+L)^{-1}(K_\alpha - L)\| &\leqq \|(I+L)^{-1}\| \cdot \|K_\alpha - L\| \\ &\leqq C\,\|(I+L)^{-1}\|\,\alpha^{-\frac{1}{2}} \leqq C\,\|(I+L)^{-1}\|\,\alpha_0^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Wegen (4.35) ergibt sich für $\alpha \geqq \alpha_0$ die Neumannsche Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}(I+K_\alpha)^{-1} &= [I+L+(K_\alpha - L)]^{-1} \\ &= [(I+L)[I+(I+L)^{-1}(K_\alpha - L)]]^{-1} \\ &= [I+(I+L)^{-1}(K_\alpha - L)]^{-1}(I+L)^{-1} \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa [(I+L)^{-1}(K_\alpha - L)]^\kappa (I+L)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Aus (4.36) folgt für $\alpha \geqq \alpha_0$

$$\begin{aligned}&\|(I+K_\alpha)^{-1} - (I+L)^{-1}\| \\ &\leqq \sum_{\kappa=1}^{\infty} \|K_\alpha - L\|^\kappa \cdot \|(I+L)^{-1}\|^{\kappa+1} \\ &= \frac{\|K_\alpha - L\| \cdot \|(I+L)^{-1}\|^2}{1-\|K_\alpha - L\| \cdot \|(I+L)^{-1}\|} \leqq 2\,\|(I+L)^{-1}\|^2 \cdot \|K_\alpha - L\|.\end{aligned} \tag{4.37}$$

In Verbindung mit (4.22) ergibt sich somit die Abschätzung

$$\|(I+K_\alpha)^{-1} - (I+L)^{-1}\| \leqq 2C\,\|(I+L)^{-1}\|^2\,\alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \alpha \geqq \alpha_0. \tag{4.38}$$

Insbesondere zeigt (4.38), daß $(I+K_\alpha)^{-1}$ für $\alpha \to \infty$ bezüglich der Operatornorm (4.21) gegen $(I+L)^{-1}$ konvergiert.

Der nächste Schritt besteht in der Diskussion des Verhaltens der Lösung (λ, μ, τ) des Integralgleichungssystems (2.41–43) für $\alpha \to \infty$. Es gilt

$$(\lambda_\alpha, \mu_\alpha, \tau_\alpha) = (I+K_\alpha)^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0), \tag{4.39}$$

wobei ε_1 und ε_2 durch (2.44–45) erklärt sind. Wir untersuchen zunächst den bei der Definition von ε_1 auftretenden Integralausdruck

$$S(\mathfrak{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \delta_2(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}\right]_a. \tag{4.40}$$

Nach (2.27) gilt

$$\delta_2 = \frac{1}{\omega + i\alpha}\eta - \frac{1}{2}T_2 \tag{4.41}$$

mit

$$\eta(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2}\left[(\omega + i a_1)\,T_1(\mathfrak{x}) + \frac{1}{\omega}(c_2^2 - c_1^2) f(\mathfrak{x})\right]. \tag{4.42}$$

Wir diskutieren zunächst den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
S_1(\mathfrak{x}) &= \left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \eta(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_a \\
&= \int_F \eta(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\left[\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\right]dF_{\mathfrak{y}} \qquad (4.43)\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F \eta(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_a.
\end{aligned}
$$

Der erste Summand ist von der Form (3.4) und kann daher mit Hilfe von Lemma 3 abgeschätzt werden. Der zweite Summand ist von α unabhängig. Insgesamt folgt, daß es ein $B_1>0$ mit

$$|S_1(\mathfrak{x})| \leqq B_1\,\alpha^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } \alpha>\omega \tag{4.44}$$

gibt. Zur Diskussion von

$$S_2(\mathfrak{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial n}\int_F T_2(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}\right]_a \tag{4.45}$$

beachten wir, daß nach (2.9) und der Greenschen Formel für $\mathfrak{x}\in G_a$

$$
\begin{aligned}
\int_F T_2(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} &= \int_F \frac{\partial}{\partial n}T_2(\mathfrak{y})\cdot\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \\
&\quad+\int_{G_i}\left[T_2(\mathfrak{y})\,\Delta_{\mathfrak{y}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})-\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\cdot\Delta T_2(\mathfrak{y})\right]dV_{\mathfrak{y}} \qquad (4.46)\\
&= \int_F \frac{\partial}{\partial n}T_2(\mathfrak{y})\cdot\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}-\int_{G_i} f(\mathfrak{y})\,\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}} \\
&= \int_F \frac{\partial}{\partial n}T_2(\mathfrak{y})\cdot\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}+2T_2(\mathfrak{x})
\end{aligned}
$$

gilt. Aus (4.45−46) ergibt sich mit Hilfe der Sprungrelation für die Normalableitung des einfachen Potentials

$$S_2(\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial n}T_2(\mathfrak{x})+\int_F \frac{\partial}{\partial n}T_2(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}}}\Phi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}. \tag{4.47}$$

Das Verhalten von $\dfrac{\partial}{\partial n}T_2(\mathfrak{x})$ für $\alpha\to\infty$ läßt sich durch folgenden zu Lemma 3 analogen Satz beschreiben:

Lemma 4. *Es sei f stetig in G_i+F und T_2 das durch* (2.9) *definierte Raumpotential. Dann gibt es zu jedem $\gamma>0$ ein $C>0$, so daß für alle komplexen Zahlen $\kappa_2=\sigma+i\tau$, die dem Sektor $\tau>\gamma|\sigma|$ angehören, und für alle Punkte $\mathfrak{x}$ des dreidimensionalen Raumes R_3 die Abschätzung*

$$|\nabla T_2(\mathfrak{x})| \leqq \frac{C}{\tau}\,\|f\|_2 \tag{4.48}$$

mit

$$\|f\|_2 = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{x}\in G_i} |f(\mathfrak{x})| \tag{4.49}$$

gilt.

Der Beweis ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
|\nabla T_2(\mathfrak{x})| &\leqq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2 \int_{G_i} \left| \nabla_{\mathfrak{x}} \frac{e^{i\kappa_2|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \right| dV_{\mathfrak{y}} \\
&\leqq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2 \int_{G_i} e^{-\tau|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \left(\frac{|\kappa_2|}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} + \frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2} \right) dV_{\mathfrak{y}} \\
&\leqq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2 \int_{R_3} e^{-\tau|\mathfrak{y}|} \left(\frac{|\kappa_2|}{|\mathfrak{y}|} + \frac{1}{|\mathfrak{y}|^2} \right) dV_{\mathfrak{y}} \\
&= \|f\|_2 \int_0^\infty e^{-\tau\rho} (|\kappa_2|\rho + 1)\, d\rho = \|f\|_2 \cdot \left(\frac{1}{\tau} + \frac{|\kappa_2|}{\tau^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

und der von (3.21) zu (3.23) führenden Überlegung.

Aus (4.47–48) folgt in Verbindung mit der Abschätzung (3.9), daß es ein $B_2 > 0$ mit

$$|S_2(\mathfrak{x})| \leqq B_2 \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \alpha > 0 \tag{4.51}$$

gibt. Wegen

$$S = \frac{1}{\omega + i\alpha} S_1 - \frac{1}{2} S_2 \tag{4.52}$$

gibt es nach (4.44) und (4.51) ein $B_3 > 0$ mit

$$|S(\mathfrak{x})| \leqq B_3 \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \alpha > 0 \text{ und } \mathfrak{x} \in F. \tag{4.53}$$

Nach (2.26) und Lemma 4 gilt gleichmäßig für $\mathfrak{x} \in F$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial T_1}{\partial n} + O(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{für } \alpha \to \infty. \tag{4.54}$$

Nach (2.44), (2.24–25), (4.54), (3.9), (4.40) und (4.53) gilt gleichmäßig für $\mathfrak{x} \in F$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\mathfrak{x}) &= -\frac{1}{\beta_1} \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial T_1}{\partial n} + O(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial T_1}{\partial n} + O(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{für } \alpha \to \infty.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Entsprechend folgt aus (2.45) in Verbindung mit (2.25–27), Lemma 3 und 4 sowie einer zu (4.48) analogen Abschätzung für T_2 [vgl. auch (4.75)], daß die Abschätzung

$$\varepsilon_2(\mathfrak{x}) = O(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{für } \alpha \to \infty \tag{4.56}$$

gleichmäßig auf F gilt. Nach (4.55) und (4.56) gibt es eine von f abhängige Zahl $B_4>0$ mit

$$\left\|(\varepsilon_1,\varepsilon_2,0)-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial n},0,0\right)\right\|\leqq B_4\,\alpha^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.57}$$

wobei die Norm durch (2.49) erklärt ist. Nach (4.39) gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|(\lambda_\alpha,\mu_\alpha,\tau_\alpha)-(I+L)^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial n},0,0\right)\right\| \\
&\quad=\left\|(I+K_\alpha)^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,0)-(I+L)^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial n},0,0\right)\right\| \\
&\quad\leqq\|(I+K_\alpha)^{-1}\|\cdot\left\|(\varepsilon_1,\varepsilon_2,0)-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial n},0,0\right)\right\| \\
&\qquad+\|(I+K_\alpha)^{-1}-(I+L)^{-1}\|\cdot\left\|\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial n},0,0\right)\right\|.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Nach (4.38) und (4.57) gibt es somit ein $B_5>0$ mit

$$\left\|(\lambda_\alpha,\mu_\alpha,\tau_\alpha)-(I+L)^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial n},0,0\right)\right\|\leqq B_5\,\alpha^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.59}$$

Damit haben wir gezeigt:

Lemma 5. *Die (nach Lemma* 2 *eindeutig bestimmte) Lösung* $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha, \tau_\alpha)$ *des Integralgleichungssystems* (2.41–43) *mit* $a_2=\alpha$ *konvergiert für* $\alpha\to\infty$ *bezüglich der durch* (2.47–49) *erklärten Norm gegen die (nach den Betrachtungen im Anschluß an* (4.22) *eindeutig bestimmte) Lösung* $(\lambda^*, \mu^*, \tau^*)$ *des Integralgleichungssystems*

$$\lambda^*(\mathfrak{x})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}T_1(\mathfrak{x})\qquad(\mathfrak{x}\in F), \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
&\mu^*(\mathfrak{x})+\int_F\lambda^*(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}-\int_F\mu^*(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\int_{G_i}\tau^*(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_\mathfrak{y}=0\qquad(\mathfrak{x}\in F),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
&\tau^*(\mathfrak{x})+i\,\varphi(\mathfrak{x})\left\{\int_F\lambda^*(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}-\int_F\mu^*(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_\mathfrak{y}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dF_\mathfrak{y}\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\int_{G_i}\tau^*(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_\mathfrak{y}\right\}=0\qquad(\mathfrak{x}\in G_i).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Ferner gilt eine Abschätzung der Form

$$\|(\lambda_\alpha,\mu_\alpha,\tau_\alpha)-(\lambda^*,\mu^*,\tau^*)\|\leqq B\,\alpha^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.63}$$

wobei B *eine von* α *unabhängige Zahl ist.*

Nach Lemma 5 konvergieren die Funktionen λ_α, μ_α, τ_α für $\alpha\to\infty$ gleichmäßig auf F bzw. in G_i+F gegen λ^*, μ^*, τ^*. Die durch (2.28) erklärte Funktion $U_{1\alpha}$

konvergiert daher für $\alpha \to \infty$ gegen

$$(4.64)\qquad \begin{aligned} V_1(\mathfrak{x}) = \int_F \left[\lambda^*(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) - \mu^*(\mathfrak{y})\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right] dF_{\mathfrak{y}} \\ -\tfrac{1}{2}\int_{G_i} \tau^*(\mathfrak{y})\,\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\,dV_{\mathfrak{y}}, \end{aligned}$$

und es gilt nach (4.63) für alle $\mathfrak{x} \in G_i \cup G_a$

$$(4.65)\qquad |U_{1\alpha}(\mathfrak{x}) - V_1(\mathfrak{x})| \leqq AB\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

mit

$$(4.66)\qquad \begin{aligned} A = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{x}} \left\{ \int_F \left[|\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})| + \left|\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}}\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right| \right] dF_{\mathfrak{y}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\int_{G_i} |\Phi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y})|\, dV_{\mathfrak{y}} \right\}. \end{aligned}$$

Die übliche Schlußweise, die man bei der Herleitung der Sprungrelation für das Doppelpotential mit stetiger Belegung benutzt, zeigt, daß die Funktion

$$(4.67)\qquad G(\mathfrak{x}) = \int_F \left| \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}} \frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \right| dF_{\mathfrak{y}}$$

im ganzen Raum beschränkt ist. Hieraus folgt, daß das in (4.66) erklärte Supremum endlich ist.

Nach (2.51) und (4.65) konvergiert die Lösung U_α von Problem (A) in G_a für $\alpha \to \infty$ gegen

$$(4.68)\qquad V = V_1 + T_1,$$

und es gilt

$$(4.69)\qquad |U_\alpha(\mathfrak{x}) - V(\mathfrak{x})| \leqq AB\,\alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{x} \in G_a.$$

Wir zeigen, daß die durch (4.68) erklärte Funktion V die Lösung von Problem (B) ist. Aus den Integralgleichungen (4.60–62) folgt in üblicher Weise, daß λ^* auf F gleichmäßig hölderstetig, μ^* auf F hölderstetig differenzierbar und τ^* in G_i hölderstetig ist. Nach (4.64), (4.68) und (2.8) besitzt daher V die Eigenschaften (a′), (b′) und (d′), so daß nur noch die Randbedingung (2.4) nachzuweisen ist. Aus (4.61) und (4.64) folgt

$$(4.70)\qquad V_{1i} = 0 \quad \text{auf } F.$$

Nach (4.62) und (4.64) gilt

$$(4.71)\qquad \Delta V_1 + (\kappa^2 + i\varphi)\,V_1 = 0 \quad \text{in } G_i.$$

Analog zu (4.30–31) folgt hieraus

$$(4.72)\qquad V_1 = 0 \quad \text{in } G_i.$$

Hieraus und aus (4.64) ergibt sich mit Hilfe der Sprungrelation für die Normalableitung des einfachen Potentials und von [3], Lemma 7

$$\frac{\partial}{\partial n} V_{1a} = -2\lambda^*. \tag{4.73}$$

Nach (4.60) und (4.73) gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} V_a = \frac{\partial}{\partial n} V_{1a} + \frac{\partial}{\partial n} T_{1a} = -2\lambda^* + 2\lambda^* = 0. \tag{4.74}$$

Die Grenzfunktion $V(\mathfrak{x}) = \lim_{\alpha\to\infty} U_\alpha(\mathfrak{x})$ ist also für $\mathfrak{x}\in G_a$ Lösung von Problem (B). Damit ist die Grenzrelation (2.5) bewiesen. Die Abschätzung (4.69) zeigt, daß die Konvergenz gleichmäßig in G_a ist.

Die Grenzrelation (2.6) ergibt sich unmittelbar aus (2.9), (2.29) und (2.51). Analog zum Beweis von Lemma 4 folgt die Existenz einer Konstanten $C>0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $\kappa = \sigma + i\tau$ mit $\tau > 0$ und alle $\mathfrak{x}\in G_i$

$$|T_2(\mathfrak{x})| \leqq \frac{C}{\tau^2} \|f\|_2 \tag{4.75}$$

gilt. Es gibt daher ein $B_6 > 0$, so daß für alle $\alpha > 0$ und alle $\mathfrak{x}\in G_i$

$$|T_2(\mathfrak{x})| \leqq B_6 \alpha^{-1} \tag{4.76}$$

gilt. Aus (2.24–27), (4.59), (4.75), Lemma 4 und 5 folgt, daß es ein $B_7 > 0$ mit

$$|\beta_1 \lambda_\alpha(\mathfrak{y}) + \delta_1(\mathfrak{y})| \leqq B_7 \qquad (\alpha>0, \mathfrak{y}\in F) \tag{4.77}$$

und

$$|\beta_2 \mu_\alpha(\mathfrak{y}) + \delta_2(\mathfrak{y})| \leqq \frac{B_7}{1+\alpha} \qquad (\alpha>0, \mathfrak{y}\in F) \tag{4.78}$$

gibt. Ist $d(\mathfrak{x})$ der Abstand des Punktes $\mathfrak{x}$ von F, so erhalten wir nach (2.29) und (4.77–78) für $\mathfrak{x}\in G_i$ mit $\kappa_2 = \sigma + i\tau$

$$\begin{aligned} |U_{2\alpha}(\mathfrak{x})| &\leqq \frac{1}{2\pi} B_7 \Bigg[\int_F \frac{e^{-\tau|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} dF_{\mathfrak{y}} \\ &\quad + \frac{1}{1+\alpha} \int_F \left| n(\mathfrak{y}) \cdot \frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} e^{i\kappa_2|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2} - \frac{i\kappa_2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \right) \right| dF_{\mathfrak{y}} \Bigg] \\ &\leqq \frac{1}{2\pi} B_7 e^{-\tau d(\mathfrak{x})} \Bigg[\left(1 + \frac{|\kappa_2|}{1+\alpha}\right) \int_F \frac{dF_{\mathfrak{y}}}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \\ &\quad + \frac{1}{1+\alpha} \int_F \left| \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{y}}} \frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} \right| dF_{\mathfrak{y}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Die beiden letzten Integrale sind nach (4.67) als Funktionen von $\mathfrak{x}$ in G_i beschränkt. Hieraus und aus $|\kappa_2/\alpha| = O(\alpha^{-\frac{1}{2}})$ für $\alpha\to\infty$ folgt die Existenz einer Konstanten $B_8 > 0$ mit

$$|U_{2\alpha}(\mathfrak{x})| \leqq B_8 e^{-\tau d(\mathfrak{x})} \qquad (\alpha>0, \mathfrak{x}\in G_i). \tag{4.80}$$

Wegen (4.3) ist der Zusammenhang zwischen τ und α durch

$$\tau=\frac{\omega}{c_2}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}-1}=O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \quad \text{für } \alpha\to\infty \tag{4.81}$$

gegeben.

Insgesamt ergibt sich aus (4.69), (2.51), (4.76) und (4.79−80) die folgende Verschärfung von Satz 1:

Satz 2. *Wie in Satz* 1 *sei* U_α *die zu der inneren Dämpfungszahl* $a_2=\alpha$ *gehörende Lösung von Problem* (A) *und* V *die Lösung des Außenraumproblem* (B). *Dann gibt es eine Konstante* $C>0$, *so daß für alle* $\alpha>0$ *die folgenden Relationen gelten*:

$$|U_\alpha(\mathfrak{x})-V(\mathfrak{x})|\leqq C\alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \textit{für alle } \mathfrak{x}\in G_a, \tag{4.82}$$

$$|U_\alpha(\mathfrak{x})|\leqq C(\alpha^{-1}+e^{-\tau d(\mathfrak{x})}) \quad \textit{für alle } \mathfrak{x}\in G_i, \tag{4.83}$$

$$|U_\alpha(\mathfrak{x})-T_{2\alpha}(\mathfrak{x})|\leqq C e^{-\tau d(\mathfrak{x})} \quad \textit{für alle } \mathfrak{x}\in G_i. \tag{4.84}$$

Hierbei ist $d(\mathfrak{x})$ *der Abstand des Punktes* $\mathfrak{x}$ *von* F, $T_2(\mathfrak{x})$ *das durch* (2.9) *erklärte Raumpotential und* τ *die durch* (4.81) *gegebene Zahl.*

Nach (4.82) konvergiert U_α in G_a gleichmäßig gegen V. Nach (4.83) konvergiert U_α in jedem kompakten Teilbereich von G_i gleichmäßig gegen 0. Die Relation (4.84) besagt, daß $U_\alpha(\mathfrak{x})$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus G_i für $\alpha\to\infty$ von der gleichen Ordnung wie das Raumpotential $T_{2\alpha}(\mathfrak{x})$ verschwindet.

Literatur

1. RELLICH, F., Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u+\lambda u=0$ in unendlichen Gebieten. Jber. Dtsch. Math.-Verein. **53**, 57 (1943).
2. WERNER, P., Zur mathematischen Theorie akustischer Wellenfelder. Arch. Rational Mech. Anal. **6**, 231 (1960).
3. WERNER, P., Randwertprobleme der mathematischen Akustik. Arch. Rational Mech. Anal. **10**, 29 (1962).
4. WERNER, P., Beugungsprobleme der mathematischen Akustik. Arch. Rational Mech. Anal. **12**, 155 (1963).

Mathematisches Institut
Universität Stuttgart

(Eingegangen am 4. September 1968)