Das Analogon zu einem Satz von Cesàro über Bertrand-Kurven im Bereich der Strahlflächen.

Von

Erwin Kruppa, Wien.

(Eingelangt am 23. Juli 1949.)

Eine von Cesàro[1] behandelte Frage lautet: „*Gegeben ist eine im begleitenden Dreikant einer Raumkurve feste Gerade a. Unter welcher Bedingung beschreiben ihre Punkte beim Gleiten des Dreikants längs der Kurve Bahnkurven, die a stets rechtwinklig schneiden, und was ist die Menge aller Geraden dieser Art?" Diese Frage führt i. a. zu den Bertrand-Kurven*[2].

Im folgenden wird das Analogon zu dieser Fragestellung im Bereich der Strahlflächen behandelt. Zur Gewinnung von Analogien zwischen Raumkurven und Strahlflächen empfiehlt es sich, ein Verfahren anzuwenden, das ich an anderer Stelle[3] ausführlich dargelegt habe. Es seien u die Bogenlänge auf der Striktionslinie, $\mathfrak{e}(u)$, $\mathfrak{n}(u)$, $\mathfrak{z}(u)$ die Einsvektoren der Erzeugenden, der Zentralnormalen, der Zentraltangente. Die Richtungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{n}$ seien willkürlich wählbar und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ sollen ein Rechtssystem bilden. Wir bilden $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{z}$ auf die Einskugel ab und bezeichnen die Bogenlängen auf den Bildkurven c_1, c_3 mit u_1, bzw. u_3. Bedeuten

$$\varkappa = \frac{d\,u_1}{d\,u}, \quad \varkappa_1 = \frac{d\,u_3}{d\,u}, \tag{1}$$

---

[1] *E. Cesàro*, Vorlesungen über natürliche Geometrie (deutsch von *G. Kowalewski*) 1926, § 142.

[2] Eine auch von *Cesàro* stammende, zur obigen verwandte Frage führt zu den sogenannten *Cesàro*-Kurven. Über ihre Analoga im Bereich der Strahlflächen vgl. *E. Kruppa*, Strahlflächen als Verallgemeinerungen der *Cesàro*-Kurven, Mh. Math. 52 (1948), 323—336.

[3] *E. Kruppa*, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven, S.-B. Akad. Wiss., Wien, math nat. IIa Bd. 157 (1948). Dazu auch *G. Sannia*, Una rappresentatione intrinseca delle rigate (Giorn. Mat. (1925) 31—47. Das Verfahren läßt sich auch in die von *W. Blaschke*, Vorl. üb. Differentialgeometrie, I, § 121 entwickelte Theorie der Strahlflächen durch Normierung des Parameters einordnen.

so nennen wir $\varkappa$ die Krümmung, $\varkappa_1$ die Torsion der Strahlfläche in der Erzeugenden.

$$\varkappa_2 = \frac{d\,u_3}{d\,u_1} \tag{1a}$$

ist die konische Krümmung ihres Richtkegels. Es ist leicht einzusehen, daß für jedes u die Tangenten in den entsprechenden Punkten von c_1 und c_3 zur Zentralnormalen parallel sind. Wir können daher die Bogenlänge u_1 auf c_1 in der Richtung von $\mathfrak{n}$, die Bogenlänge u_3 auf c_3 in der entgegengesetzten Richtung wachsen lassen. Für den Richtkegel $\mathfrak{e}\,(u_1)$ gelten dann die Ableitungsgleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{e}}{du_1} = \mathfrak{n}, \quad \frac{d\mathfrak{n}}{du_1} = -\mathfrak{e} + \varkappa_2\,\mathfrak{z}, \quad \frac{d\mathfrak{z}}{du_1} = -\varkappa_2\,\mathfrak{n}. \tag{2}$$

Kennzeichnet man die Ableitungen nach u durch einen Punkt und beachtet man, daß (1) und (1a) $\varkappa_1 = \varkappa\,\varkappa_2$ ergeben, so erhält man aus (2) die Ableitungsgleichungen des begleitenden Dreibeins der Strahlfläche:

$$\dot{\mathfrak{e}} = \varkappa\,\mathfrak{n}, \quad \dot{\mathfrak{n}} = -\varkappa\,\mathfrak{e} + \varkappa_1\,\mathfrak{z}, \quad \dot{\mathfrak{z}} = -\varkappa_1\,\mathfrak{n}, \tag{3}$$

die formal mit den *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie vollständig übereinstimmen.

Es sei nun $\sigma\,(u) = \sphericalangle\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{e}$ der Winkel zwischen dem Tangentenvektor der Striktionslinie und der zugehörigen Erzeugenden, wobei der positive Drehsinn $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{e}$ durch einen rechten Winkel dreht. $\sigma\,(u)$ heiße die Striktion der Strahlfläche in der Erzeugenden u. Es ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma$; die Striktionslinie läßt sich daher darstellen durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{s}\,(u) = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\,du, \tag{4}$$

und die Strahlfläche durch

$$\mathfrak{x} = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\,du + v\,\mathfrak{e}. \tag{5}$$

mit den Ableitungsgleichungen (3).

Die zur Fragestellung von *Cesàro* analoge Frage im Bereich der Strahlflächen lautet: „*Gegeben ist eine im begleitenden Dreikant einer Strahlfläche feste Gerade a. Unter welcher Bedingung beschreiben ihre Punkte beim Gleiten des Dreikants längs der Strahlfläche Bahnkurven, die a stets rechtwinklig schneiden, und was ist die Menge aller Geraden dieser Art?*"

Eine stetige Bewegung im Raum kann in jedem Augenblick i. a. als Momentanschraubung aufgefaßt werden. Das Problem kann also auch so gestellt werden: „*Unter welcher Bedingung gehört eine im begleitenden*

Dreikant einer Strahlfläche feste Gerade beim Gleiten des Dreikantes längs der Strahlfläche stets dem Normalengewinde der jeweiligen Momentanschraubung an?"

Es sei (S; $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$) das begleitende Dreikant im Punkt S der Striktionslinie $\mathfrak{s}(u)$ einer Strahlfläche $\mathfrak{F}$ und a eine im Dreikant feste Gerade. Fassen wir es zugleich als Achsenkreuz x, y, z auf, so können wir a durch einen Punkt X, Y, Z und den Einsvektor $\mathfrak{a}$ (a_1, a_2, a_3) festlegen. Damit ist a durch

$$x = X + \lambda a_1, \ y = Y + \lambda a_2, \ z = Z + \lambda a_3 \tag{6}$$

gegeben. Der Punkt $P(x, y, z)$ von a hat im „festen Raum", dem $\mathfrak{F}$ angehört, den Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s} + x\,\mathfrak{e} + y\,\mathfrak{n} + z\,\mathfrak{z}. \tag{7}$$

Gleitet nun (S; $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$) längs $\mathfrak{F}$, so wird die Richtung der Bahntangente von P durch den gemäß (3) und (5) zu berechnenden Vektor

$$\dot{\mathfrak{x}} = (\cos\sigma - y\,\varkappa)\,\mathfrak{e} + (x\,\varkappa - z\,\varkappa_1)\,\mathfrak{n} + (\sin\sigma + y\,\varkappa_1)\,\mathfrak{z} \tag{8}$$

gegeben. Soll nun in allen Punkten der Geraden a die Bahntangente zu a normal sein, so hat man in (8) x, y, z durch (6) auszudrücken und $\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{a} = 0$ anzusetzen. Dabei fällt λ heraus und man erhält die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$a_1 \cos\sigma + a_3 \sin\sigma + (a_2 X - a_1 Y)\,\varkappa + (a_3 Y - a_2 Z)\,\varkappa_1 = 0. \tag{9}$$

Da die Gerade a als gegeben anzusehen ist, hat (9) mit den Konstanten C, C_1, K, K_1 die Form:

$$C\cos\sigma + C_1 \sin\sigma + K\,\varkappa + K_1\,\varkappa_1 = 0; \tag{10}$$
$$C : C_1 : K : K_1 = a_1 : a_3 : (a_2 X - a_1 Y) : (a_3 Y - a_2 Z)\,.$$

Die Gleichungen (10) enthalten die Antwort auf die gestellte Frage. Aus ihnen sind alle Einzelheiten zu erschließen. In ihnen ist auch als Sonderfall für $\sin\sigma = 0$ das Problem von *Cesàro* enthalten. Denn für $\sin\sigma = 0$ ist die Strahlfläche die Tangentenfläche einer Raumkurve, mit $\varkappa$, $\varkappa_1$ als Krümmung und Torsion, mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ als Einsvektoren der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen. Wir bestätigen zunächst mittels (10) die von *Cesàro* über Kurven gemachten Aussagen. (10) hat für $C \neq 0$, $\sin\sigma = 0$ i. a. die Form[4]

[4] Angeschriebene Konstante werden stets als von Null verschieden angenommen.

$$1 + k\varkappa + k_1 \varkappa_1 = 0; \tag{11}$$
$$a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \quad a_3 Y - a_2 Z = a_1 k_1.$$

Daraus ersieht man, daß die gesuchten Kurven i. a. Bertrand-Kurven sind, und daß die gesuchten Geraden das hyperbolische Strahlnetz

$$a_1 : a_2 : a_3 = X Y : (k + Y) Y : (k Z + Y Z + k_1 X)$$

mit den Brennlinien $x = 0$, $y + k = 0$ und $y = 0$, $k_1 x + k z = 0$ bilden.

Im Sonderfall $k = 0$ hat die Kurve konstante Torsion. Die gesuchten Geraden bilden jetzt das parabolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = X Y : : Y^2 : (Y Z + k_1 X)$, dessen Brennlinie die Binormale $x = 0$, $y = 0$ ist.

Für $C = 0$ hat (10) mit $\sin\sigma = 0$ die Form

$$\varkappa + k_1 \varkappa_1 = 0; \tag{12}$$
$$a_1 = 0, \quad a_3 Y - a_2 Z = a_2 X k_1.$$

Die Kurve ist daher eine Böschungslinie (Richtkegel ein Drehkegel) und die gesuchten Geraden bilden das hyperbolische Strahlennetz $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : Y : (k_1 X + Z)$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Normalebene $x = 0$ und die Erzeugende $y = 0$, $k_1 x + z = 0$ des rektifizierenden Zylinders ist.

Die Fälle $C = K_1 = 0$ und $C = K = 0$, in denen die Kurve gerade oder eben ist, können übergangen werden. Für den Fall $C = K = K_1 = 0$, in dem $a_1 = 0$, $a_2 X = 0$, $a_3 Y - a_2 Z = 0$ ist, gilt für $a_2 \neq 0$, $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : : Y : Z$ und für $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ und $Y = 0$. Demnach sind bei jeder Raumkurve zumindest die Kurvennormalen in der Normalebene und die Parallelen zur Binormalen in der rektifizierenden Ebene die Lösungen des Problems von *Cesàro*.

Im folgenden untersuchen wir die durch (10) bestimmten Strahlflächen und die zugehörigen Geraden.

I. Allgemeiner Fall:

$$c \cos\sigma + \sin\sigma + k\varkappa + k_1 \varkappa_1 = 0; \tag{13}$$
$$a_1 = c\, a_3, \quad a_2 X - a_1 Y = a_3 k, \quad a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Für $X = 0$ ist daher $c Y + k = 0$. Die gesuchten Geraden schneiden somit die Gerade f_1 mit den Gleichungen $x = 0$, $c y + k = 0$. Ebenso ergibt sich, daß sie sich auch auf die Geraden f_2 ($y = 0$, $k_1 x + k z = 0$ und f_3 ($z = 0$, $y - k_1 = 0$) stützen. Für einen Punkt von f_3 mit der Abszisse x hat die durch ihn gehende Gerade die Richtung

$$a_1 : a_2 : a_3 = c\, x : (k + c\, k_1) : x. \tag{14}$$

Die Menge der gesuchten Geraden a ist daher für $k + c\,k_1 \neq 0$, die sich auf f_1, f_2, f_3 stützende Erzeugendenschar des hyperbolischen Paraboloids

$$y\,(c\,z - x) + k_1\,x + k\,z = 0. \tag{15}$$

Im Sonderfall $k + c\,k_1 = 0$ geht (14) in $a_1 : a_2 : a_3 = c : 0 : 1$ über. Die gesuchten Geraden bilden daher ein Büschel paralleler Geraden in der Ebene $y = k_1$.

Da (13) für $\sin\sigma = 0$ in die Definitionsgleichung der *Bertrand*-Kurven übergeht, ist der Gedanke naheliegend, in den durch (13) gekennzeichneten Strahlflächen das Analogon zu den *Bertrand*-Kurven im Bereich der Strahlflächen zu erblicken. Das ist aber, wie nun näher ausgeführt werden soll, nur in dem soeben betrachteten Sonderfall $k + c\,k_1 = 0$ sinnvoll.

Wenn man nach einer Gattung von Strahlflächen fragt, die den *Bertrand*-Kurven analog sein sollen, so wird man naturgemäß von folgender Aufgabe ausgehen: „*Man untersuche, ob es zu einer gegebenen Strahlfläche* $\mathfrak{F}\,(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ *eine zweite* $\mathfrak{F}^*\,(\varkappa^*, \varkappa_1^*, \sigma^*)$ *derart gibt, daß* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}^*$ *eine gemeinsame Zentralnormalenfläche besitzen*". Ich habe diese Frage in meiner in Anmerkung 3 genannten Arbeit eingehend behandelt. Es ergibt sich:

$$\varkappa^* = \frac{\varkappa\cos\omega_0 + \varkappa_1\sin\omega_0}{\sqrt{(\cos\sigma - v_0\,\varkappa)^2 + (\sin\sigma + v_0\,\varkappa_1)^2}}, \tag{16}$$

$$\varkappa_1^* = \frac{-\varkappa\sin\omega_0 + \varkappa_1\cos\omega_0}{\sqrt{(\cos\sigma - v_0\,\varkappa)^2 + (\sin\sigma + v_0\,\varkappa_1)^2}}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}\,(\sigma^* - \omega_0) = \frac{\sin\sigma + v_0\,\varkappa_1}{\cos\sigma - v_0\,\varkappa}. \tag{18}$$

Darin bedeutet v_0 die konstante Entfernung der auf den einzelnen Zentralnormalen liegenden Zentralpunkte von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ und ω_0 den konstanten Winkel der entsprechenden Erzeugenden. Die Flächenpaare $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ zeigen demnach das Analogon zu einer charakteristischen Eigenschaft der *Bertrand*-Kurven, sie gehören aber keiner besonderen Klasse von Strahlflächen an, da zu jeder Fläche $\mathfrak{F}$ durch die Wahl von v_0, ω_0 zweifach unendlichviele Flächen $\mathfrak{F}^*$ gehören.

Dagegen erhalten wir eine Klasse von Strahlflächen $\mathfrak{F}$, die man mit vollem Recht als das Analogon zu den *Bertrand*-Kurven ansprechen kann, wenn man $\mathfrak{F}^*$ als Torse vorschreibt. Die Frage lautet dann: „*Unter welcher Bedingung existiert zu einer gegebenen Strahlfläche* $\mathfrak{F}$ *eine*

Kurve c^*, so daß die Zentralnormalfläche von $\mathfrak{F}$ die Hauptnormalenfläche von c^* ist?" Dazu hat man einfach in (18) $\sigma^* = 0 \pmod{\pi}$ zu setzen, und erhält:

$$\operatorname{tg}\omega_0 \cos\sigma + \sin\sigma - \varkappa\, v_0 \operatorname{tg}\omega_0 + \varkappa_1 v_0 = 0. \tag{19}$$

Diese Gleichung hat die Form (13)

$$c\cos\sigma + \sin\sigma + k\,\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0$$

mit $$c = \operatorname{tg}\omega_0, \quad k = -v_0 \operatorname{tg}\omega_0, \quad k_1 = v_0$$

Es ist demnach $k + c\,k_1 = 0$, d. i. aber gerade die Bedingung für den oben betrachteten Sonderfall unseres Problems[5].

(18) liefert für $\sigma = \sigma^* = 0 \pmod{\pi}$ die bekannte Bedingung für *Bertrand*-Kurven

$$v_0\varkappa - \varkappa_1 v_0 \operatorname{ctg}\omega_0 = 1. \tag{20}$$

II. $$C = 0;\ \sin\sigma + k\,\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0. \tag{21}$$

Es ist in (14) und (15) $c = 0$ zu setzen. Die gesuchten Geraden sind die Erzeugenden des gleichseitigen Paraboloids $xy - k_1 x - kz = 0$, die zur Polarebene $x = 0$ parallel sind.

III. $$C_1 = 0;\ \cos\sigma + k\,\varkappa + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{22}$$

$$a_3 = 0, \quad a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \quad -a_2 Z = a_1 k_1.$$

Die gesuchten Geraden stützen sich daher auf die Geraden f_1 ($x = 0$, $y + k = 0$), f_2 ($y = 0$, $k_1 x + k z = 0$) und auf die Ferngerade der asymptotischen Ebene $z = 0$ und gehören dem gleichseitigen Paraboloid $y z + k_1 x + k z = 0$ an.

IV. $$K_1 = 0;\ c\cos\sigma + \sin\sigma + k\,\varkappa = 0; \tag{23}$$

$$a_1 = a_3 c,\ a_2 X - a_1 Y = a_3 k,\ a_3 Y - a_2 Z = 0.$$

Die gesuchten Geraden stützen sich auf die Erzeugende $y = 0$, $z = 0$, auf die Gerade $x = 0$, $c\,y + k = 0$ und auf die Ferngerade der Ebene $x = c\,z$. Sie gehören dem hyperbolischen Paraboloid $y\,(c\,z - x) + kz = 0$ an.

V. $$K = 0;\ c\cos\sigma + \sin\sigma + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{24}$$

$$a_1 = a_3 c,\ a_2 X - a_1 Y = 0,\ a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Für $X = 0$ ist $Y = 0$ und umgekehrt. Für $Z = 0$ ist $Y = k_1$. Die gesuchten Geraden stützen sich daher auf die Zentraltangente $x = 0$,

[5] Näheres über diese Klasse von Strahlflächen in meiner in Anmerkung 3) genannten Arbeit.

$y = 0$, auf die Gerade $z = 0$, $y - k_1 = 0$ und auf die Ferngerade der Ebene $x = cz$. Sie gehören dem hyperbolischen Paraboloid $y(cz - x) + k_1 x = 0$ an.

VI. $$\cos\sigma = 0,\quad C_1 + K\varkappa + K\varkappa_1 = 0. \tag{25}$$

In diesem Fall ist die Strahlfläche die Binormalenfläche einer Raumkurve c. Die Erzeugende ist die Binormale, die Zentralnormale die Hauptnormale und die Zentraltangente die Tangente von c. Es lassen sich daher die Ergebnisse des obigen von *Cesàro* behandelten Kurvenproblems sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen.

VII. $$\varkappa_1 = 0,\quad C\cos\sigma + C_1\sin\sigma + K\varkappa = 0. \tag{26}$$

$\varkappa_1 = 0$ ist die Bedingung dafür, daß die Strahlfläche konoidal ist, d. h. eine Richtebene besitzt.

Für $C_1 \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 = 0, && c\cos\sigma + \sin\sigma + k\varkappa = 0;\\ &a_1 = c\,a_3, && a_2 X - a_1 Y = a_3 k. \end{aligned} \tag{27}$$

Die gesuchten Geraden bilden daher das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = cX : (k + cY) : X$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Ebene $x - cz = 0$ und die Gerade $x = 0$, $cy + k = 0$ sind.

Im Sonderfall $k = 0$ ist die Fläche konoidal und von konstanter Striktion. Im Sonderfall $c = 0$ liegt die Strahlfläche

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 = 0, && \sin\sigma + k\varkappa = 0;\\ &a_1 = 0, && a_2 X = k\,a_3 \end{aligned} \tag{28}$$

vor. $\sin\sigma : \varkappa$ ist der Drall einer Strahlfläche. Die Fläche ist also konoidal und von konstantem Drall. Die gesuchten Geraden bilden das parabolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : k : X$ mit der Ferngeraden der Polarebene $x = 0$ als Brennlinie.

Für $C_1 = 0$ haben wir:

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 = 0, && \cos\sigma + k\varkappa = 0;\\ &a_3 = 0, && a_2 X - a_1 Y = a_1 k. \end{aligned} \tag{29}$$

$\cos\sigma : \varkappa$ ist im Bereich der Strahlflächen das Analogon zum Krümmungsradius der Kurventheorie. Ich habe dafür die Bezeichnung „polarer Krümmungsradius" vorgeschlagen[3]. Die Flächen (29) sind also konoidal und von konstantem polaren Krümmungsradius. Die gesuchten Geraden bilden das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = X : (Y + k) : 0$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Richtebene $z = 0$ und die Polarachse $x = 0$, $y + k = 0$ sind.

Die weiteren Fälle $C = C_1 = 0$, $C = K = 0$, $C_1 = K = 0$ sind belanglos. Schließlich ist noch der Fall $C = C_1 = K = 0$ zu erledigen. Es ist $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 X = 0$. Daraus folgt $a_2 = 1$, $X = 0$. Also sind bei jeder konoidalen Fläche zumindest die Parallelen zur Zentralnormalen in der Polarebene $x = 0$ die Lösungen der Aufgabe.

VIII. $\quad C \cos\sigma + C_1 \sin\sigma = 0, \qquad K\varkappa + K_1 \varkappa_1 = 0.$

Die erste Gleichung besagt, daß die Fläche konstante Striktion hat, die zweite, daß ihr Richtkegel ein Drehkegel ist. Es ist also i. a.

$$c \cos\sigma + \sin\sigma = 0, \qquad k\varkappa + \varkappa_1 = 0;$$
$$a_1 = a_3 c, \qquad a_2 X - a_1 Y = k(a_3 Y - a_2 Z). \tag{30}$$

Die gesuchten Geraden bilden demnach das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = (kZ + X)c : (k + c)Y : (kZ + X)$, dessen Brennlinien die Ferngerade der Ebene $x = cz$ und die Erzeugende $y = 0$, $x + kz = 0$ der Zentraltorse sind, vorausgesetzt, daß $k + c \neq 0$ ist.

Für $k + c = 0$ ist $c \cos\sigma + \sin\sigma = 0$, $c\varkappa - \varkappa_1 = 0$. Die gesuchten Geraden bilden das Bündel paralleler Geraden, deren Richtung $a_1 : a_2 : a_3 = c : 0 : 1$ zur Tangente der Striktionslinie und zur Zentralnormalen normal ist.

Von den Fällen, in denen verschwindende Konstanten vorkommen, interessieren nur $K = K_1 = 0$ und $C = C_1 = 0$.

$$K = K_1 = 0; \qquad c\cos\sigma + \sin\sigma = 0; \tag{31}$$
$$a_1 = a_3 c, \qquad a_2 X - a_1 Y = 0, \qquad a_3 Y - a_2 Z = 0.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche konstanter Striktion die gesuchten Geraden zumindest die Normalen $a_1 : a_2 : a_3 = c : 0 : 1$ zur Tangente der Striktionslinie in der Zentralebene und die Geraden durch den Zentralpunkt in der Ebene $x = cz$.

$$C = C_1 = 0; \qquad k\varkappa + \varkappa_1 = 0; \tag{32}$$
$$a_1 = a_3 = 0, \qquad X = -kZ.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche, deren Richtkegel ein Drehkegel ist, die gesuchten Geraden zumindest die Parallelen zur Zentralnormalen in der Ebene $x + kz = 0$, die die Zentralnormale mit der Erzeugenden der Zentraltorse verbindet.

IX. $\quad C\cos\sigma + K\varkappa = 0, \quad C_1 \sin\sigma + K_1 \varkappa_1 = 0.$

Diese Gleichungen besagen, daß die polaren Krümmungsradien der Strahlfläche und ihrer Zentraltangentenfläche konstant sind.

Es gilt i. a.

$$\cos\sigma + k\varkappa = 0, \qquad \sin\sigma + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{33}$$
$$a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \qquad a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Die gesuchten Geraden bilden das hyperbolische Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = X(Y - k_1) : (Y + k)(Y - k_1) : (Y + k) Z$, dessen Brennlinien die Erzeugende $x = 0$, $y + k = 0$ der Polartorse der Strahlfläche und die Erzeugende $z = 0$, $y - k_1 = 0$ der Polartorse ihrer Zentraltangentenfläche sind. Von den Fällen, in denen die Konstanten zum Teil verschwinden, interessieren $C_1 = K_1 = 0$ und $C = K = 0$.

$$C_1 = K_1 = 0; \qquad \cos\sigma + k\varkappa = 0; \tag{34}$$
$$a_3 = 0, \qquad a_2 X - a_1 Y = a_1 k, \qquad a_2 Z = 0.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche mit konstantem polaren Krümmungsradius die gesuchten Geraden zumindest die Parallelen zur Erzeugenden in der Ebene $y + k = 0$ durch die Polarachse und die Strahlen des Büschels in der asymptotischen Ebene $z = 0$, dessen Scheitel die polare Krümmungsmitte $x = 0$, $y = -k$, $z = 0$ ist.

$$C = K = 0; \qquad \sin\sigma + k_1\varkappa_1 = 0; \tag{35}$$
$$a_1 = 0, \qquad a_2 X = 0, \qquad a_3 Y - a_2 Z = a_3 k_1.$$

Also sind bei jeder Strahlfläche, deren Zentraltangentenfläche konstanten Krümmungsradius besitzt, die gesuchten Geraden zumindest die Parallelen zur Zentraltangente in der Ebene $y - k_1 = 0$ durch die Polarachse der Zentraltangentenfläche und die Strahlen des Büschels in der Polarebene $x = 0$, dessen Scheitel die polare Krümmungsmitte $x = 0$, $y = k_1$, $z = 0$ der Zentraltangentenfläche ist.

X. $\quad C\cos\sigma + K_1\varkappa_1 = 0, \qquad C_1 \sin\sigma + K\varkappa = 0.$

Diese Gleichungen besagen, daß die Zentraltangentenfläche der Strahlfläche und diese selbst konstanten Drall besitzen. Es gilt i. a.

$$\cos\sigma + k_1\varkappa_1 = 0, \qquad \sin\sigma + k\varkappa = 0; \tag{36}$$
$$a_3 Y - a_2 Z = a_1 k, \qquad a_2 X - a_1 Y = a_3 k.$$

Die gesuchten Geraden bilden somit das Strahlnetz $a_1 : a_2 : a_3 = (XY - kZ) : (k k_1 + Y^2) : (YZ + k_1 X)$ mit den Brennlinien $y = \pm\sqrt{-kk_1}$, $kz = \pm x\sqrt{-kk_1}$.

Im besonderen sind die Fälle $C = K_1 = 0$ und $C_1 = K = 0$ zu behandeln.

$$C = K_1 = 0; \qquad \sin\sigma + k\varkappa = 0; \tag{37}$$
$$a_1 = 0, \qquad a_2 X = a_3 k, \qquad a_3 Y - a_2 Z = 0.$$

Daraus folgt: $a_1 : a_2 : a_3 = 0 : k : X = 0 : Y : Z$. Also sind bei den Strahlflächen konstanten Dralls die gesuchten Geraden zumindest die Erzeugenden des gleichseitigen Paraboloids $xy - kz = 0$, die zur Polarebene $x = 0$ parallel sind.

$$C_1 = K = 0; \qquad \cos\sigma + k_1 \varkappa_1 = 0; \tag{38}$$
$$a_3 = 0, \qquad a_2 X - a_1 Y = 0, \qquad -a_2 Z = a_1 k_1.$$

Daraus folgt $a_1 : a_2 : a_3 = X : Y : 0 = -Z : k_1 : 0$. Also sind bei den Strahlflächen, deren Zentraltangentenflächen konstanten Drall besitzen, die gesuchten Geraden zumindest die Erzeugenden des gleichseitigen Paraboloides $yz + k_1 x = 0$, die zur asymptotischen Ebene parallel sind.

XI. Trivialer Fall.

$$C = C_1 = K = K_1 = 0; \tag{39}$$
$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad X = 0, \quad Z = 0.$$

Daraus folgt, daß bei jeder Strahlfläche zumindest die Zentralnormale Lösung der Aufgabe ist.