Math. Z. 112, 101 – 106 (1969)

Über Koeffizientenprobleme bei Eilinien und über die Heinzsche Konstante

HANS LUDWIG DE VRIES

Herrn Karl Heinrich Weise zum 60. Geburtstag gewidmet

Im Jahre 1901 gab Hurwitz [4] mit Hilfe von Fourierreihen seinen berühmten Beweis für die Isoperimetrie des Kreises. Seien in der x, y-Ebene die Gleichungen einer stetigen, rektifizierbaren, geschlossenen Kurve $\mathscr{K}$ vom Umfang 2π gegeben durch

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqq s \leqq 2\pi.$$

Mit s ist die Bogenlänge bezeichnet. Dann existieren die Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns), \\ y &= \tfrac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos ns + d_n \sin ns). \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqq s \leqq 2\pi, \tag{1}$$

Hurwitz stellt das isoperimetrische Defizit der Kurve $\mathscr{K}$ dar als nichtnegative Funktion der Fourierkoeffizienten $a_n, b_n, c_n, d_n (n \geqq 1)$. Ferner zeigt er [5, S. 543], daß die Größen

$$a_n^2 + c_n^2, \quad b_n^2 + d_n^2, \quad a_n d_n - b_n c_n, \quad n \geqq 1,$$

Invarianten der Kurve sind. Insbesondere sind die Funktionale

$$\Phi_n(\mathscr{K}) := a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2, \quad n \geqq 1,$$

invariant gegenüber Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems und gegenüber Änderungen des Anfangspunktes $s = 0$ auf $\mathscr{K}$. Das Funktional $\Phi_1(\mathscr{K})$ hat die folgende geometrische Bedeutung. Es ist gleich der Quadratsumme der Hauptachsen der die Kurve $\mathscr{K}$ im Quadratmittel am besten approximierenden Ellipse. Spezialisiert man die Kurven $\mathscr{K}$ auf Eilinien $\mathscr{E}$ vom Umfang 2π, so ist anschaulich einleuchtend, daß $\Phi_1(\mathscr{E}) = 0$ von keiner Eilinie erreicht werden kann. Ein erster Beweis für diese Tatsache wurde von Heinz [2, S. 52] gegeben, der

$$\Phi_1(\mathscr{E}) \geqq \frac{8}{\pi} + 2 - \frac{4\pi}{3} = 0{,}357\ldots$$

nachwies. Dieser Beweis ist in der Sprache der Theorie gewisser harmonischer Abbildungen $\mathscr{S}$ abgefaßt. Im Abschnitt **2** werden wir sehen, wie die Abbildungen $\mathscr{S}$ mit den Eilinien $\mathscr{E}$ zusammenhängen. Die Zahl

$$\mu := \inf_{\mathscr{E}} \Phi_1(\mathscr{E}) \tag{2}$$

heißt in dieser Theorie die Heinzsche Konstante. Dabei ist das Infimum über alle Eilinien $\mathscr{E}$ vom Umfang 2π genommen, die in jedem Punkt genau eine Tangente besitzen derart, daß diese Tangente mit $\mathscr{E}$ keinen weiteren Punkt gemein hat. Die Kenntnis von μ ist für gewisse Abschätzungen der Gaußschen Krümmung einer Minimalfläche wichtig, s. [2, S. 55] und [3]. Die genannte Ungleichung $\mu \geqq 0{,}357\ldots$ wurde in der Folge mehrfach verbessert. Hopf und Nitsche [6] zeigten $\mu \geqq 0{,}5$, dann folgten Nitsche [7] $\mu \geqq 0{,}64$, [11] $\mu \geqq 0{,}869\ldots$ sowie Nitsche [8] $\mu \geqq 0{,}895\ldots$. *Ziel der vorliegenden Note ist es,*

$$\mu \geqq \frac{236}{27\pi} - \frac{3}{2} = 1{,}282\ldots \tag{3}$$

zu beweisen. Damit ist $1{,}282\ldots \leqq \mu \leqq 1{,}367\ldots$ gesichert, denn vom gleichseitigen Dreieck $\mathscr{D}^0$ wird $\Phi_1(\mathscr{D}^0) = 27/2\,\pi^2 = 1{,}367\ldots$ angenommen. Der Beweis von (3), s. Abschnitt **1**, beruht auf einer Ungleichung von Sachs [9] in Verbindung mit der Approximationsmethode von [11]. Unsere Vermutung, daß nämlich $\mu = 27/2\pi^2$ ist und $27/2\pi^2$ nur von $\Phi_1(\mathscr{D}^0)$ angenommen wird, konnte bisher nicht bewiesen werden. Für alle Dreiecke $\mathscr{D}$ gilt übrigens $27/2\pi^2 \leqq \Phi_1(\mathscr{D}) \leqq 16/\pi^2$, mit Gleichheit links nur für $\mathscr{D}^0$, rechts nur für die Nadel. Für alle Parallelogramme $\mathscr{P}$ ist $\Phi_1(\mathscr{P}) = 16/\pi^2$. Stets ist $\Phi_1(\mathscr{E}) \leqq 2$, mit Gleichheit nur für den Kreis. Erwähnt sei, daß die Zahl $27/2\pi^2$ schon einmal auf Grund einer Bemerkung von Richert eine Rolle gespielt hat, s. [3, S. 802]. Für die restlichen $\Phi_n(\mathscr{E})$ erhält man die Abschätzungen

$$\Phi_n(\mathscr{E}) \leqq \frac{8}{\pi n^4}, \qquad n \geqq 2. \tag{4}$$

Auch diese Ungleichungen sind nicht scharf.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir im Abschnitt **3**, daß für die Invariante

$$\Psi_2(\mathscr{E}) := a_2^2 + b_2^2$$

einer Eilinie $\mathscr{E}$ vom Umfang 2π mit der Stützfunktion

$$p(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{5}$$

die rechte Seite der Abschätzung

$$0 \leqq \Psi_2(\mathscr{E}) \leqq \tfrac{4}{9} \tag{6}$$

gilt. Das linke Gleichheitszeichen wird von einer großen und mehrfach untersuchten [1, S. 68] Klasse von Eilinien angenommen, zu der die Kurven konstanter Breite gehören, das rechte nur von der Nadel. Der Isoperimetriebeweis [10, S. 189] mittels (5) geht ebenfalls auf Hurwitz zurück, allerdings entwickelt er den Krümmungsradius $\rho(\theta)$ statt $p(\theta)$, [5, S. 522]. Für die Zahl $a_1^2+b_1^2$ stellt sich kein Problem, da sie nicht invariant ist.

1. Wir betrachten Eilinien $\mathscr{E}$ vom Umfang 2π mit der Bogenlänge s $(0\leqq s\leqq 2\pi)$, für die in jedem Punkt s eine Tangente existiert, so daß, wenn $\omega(s)$ den Winkel zwischen der x-Achse und dieser Tangente bezeichnet, die Funktion $\omega(s)$ im Intervall $[0,2\pi]$ stetig und streng monoton ist und $\omega(2\pi)=\omega(0)\pm 2\pi$ erfüllt. Dann wird $\mathscr{E}$ beschrieben durch (1) mit

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds}&=\cos\omega(s),\\ \frac{dy}{ds}&=\sin\omega(s).\end{aligned}\qquad 0\leqq s\leqq 2\pi, \tag{7}$$

Da $\mathscr{E}$ geschlossen ist, muß $\int_0^{2\pi}\cos\omega(s)\,ds=\int_0^{2\pi}\sin\omega(s)\,ds=0$ sein.

Die Ungleichung $\Phi_1\leqq 2$ mit Gleichheit nur für den Kreis folgt bekanntlich aus der Vollständigkeitsrelation für die Ableitungen,

$$2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}ds=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,\Phi_n.$$

Andererseits lassen sich mit (7) die Fourierkoeffizienten von (1) durch $\omega(s)$ ausdrücken,

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}c_n\\ d_n\end{pmatrix}=\frac{-i}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos ns\\ \sin ns\end{pmatrix}e^{i\omega(s)}\,d\omega(s),\qquad n\geqq 1,$$

so daß

$$\Phi_n=\frac{1}{\pi^2 n^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n(s-t)\cos\bigl(\omega(s)-\omega(t)\bigr)\,d\omega(s)\,d\omega(t),\qquad n\geqq 1, \tag{8}$$

wird. Wegen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos(s-t)|\,ds\,dt=8\pi$$

folgt die Ungleichung (4).

Eine einfache Abschätzung für Φ_1 erhält man folgendermaßen. Für das Trägheitsmoment

$$I:=\int_0^{2\pi}\{(x-\tfrac{1}{2}a_0)^2+(y-\tfrac{1}{2}c_0)^2\}\,ds=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n \tag{9}$$

gilt die Ungleichung von Sachs [9],

$$\frac{4\pi^3}{27}\leqq I. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (4) erhält man

$$\frac{4\pi^3}{27}\leqq\pi\Phi_1+8\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

wegen $\zeta(4)=\pi^4/90$ also

$$\Phi_1 \geqq \frac{8}{\pi}+\frac{4\pi^2}{27}-\frac{4\pi^3}{45}=1{,}252\ldots.$$

Wir verbessern diese Abschätzung. Es gelten die Beziehungen

$$0=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot\cos\big(\omega(s)-\omega(t)\big)\,d\omega(s)\,d\omega(t), \tag{11}$$

$$\frac{4}{9}\leqq-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left|\frac{s-t}{2\pi}\right|-\left|\frac{s-t}{2\pi}\right|^2\right\}^2\cdot\cos\big(\omega(s)-\omega(t)\big)\,d\omega(s)\,d\omega(t), \tag{12}$$

$$\Phi_1=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s-t)\cdot\cos\big(\omega(s)-\omega(t)\big)\,d\omega(s)\,d\omega(t). \tag{13}$$

Da nämlich

$$\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{n^4}=\frac{1}{90}-\frac{1}{3}(x-x^2)^2, \qquad 0\leqq x\leqq 1,$$

ist, ergibt sich aus (8) und (9) zunächst

$$I=-\frac{\pi^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left|\frac{s-t}{2\pi}\right|-\left|\frac{s-t}{2\pi}\right|^2\right\}^2\cos\big(\omega(s)-\omega(t)\big)\,d\omega(s)\,d\omega(t),$$

mit der Sachsschen Ungleichung also (12). Man multipliziere nun die Zeilen (11), (12), (13) resp. mit den Zahlen $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{\pi}\right)$, $\frac{32}{3}$, $-\pi$ und addiere. Mit der Abkürzung

$$F(x):=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{\pi}\right)+\frac{32}{3}(x-x^2)^2+\frac{1}{\pi}\cos 2\pi x, \qquad 0\leqq x\leqq 1,$$

erhält man

$$\frac{128}{27}-\pi\,\Phi_1\leqq-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(\left|\frac{s-t}{2\pi}\right|\right)\cos\big(\omega(s)-\omega(t)\big)\,d\omega(s)\,d\omega(t). \tag{14}$$

Wir untersuchen die Funktion $F(x)$ im Intervall $[0,1]$ auf ihre Extrema.

$x\;=$	$0, 1$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$F(x)=$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}0283\ldots$	$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{\pi}\right)=0{,}0283\ldots$	$\frac{23}{48}-\frac{3}{2\pi}=0{,}0017\ldots$
$F'(x)=$	0	0	0
$F''(x)=$	$\frac{64}{3}-4\pi=8{,}766\ldots$	$-\frac{8}{3}=-2{,}666\ldots$	$-\frac{32}{3}+4\pi=1{,}899\ldots$

Demnach hat $F(x)$ in den Punkten $0, \frac{1}{2}, 1$ Minima, in den Punkten $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ Maxima. Weitere Extrema kann $F(x)$ in $[0, 1]$ nicht besitzen, denn bei der Diskussion der Gleichung $F''(x)=0$ sieht man, daß $F(x)$ genau vier Wendepunkte hat. Also ist

$$\max_{0\leqq x\leqq 1} |F(x)| = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{\pi}\right).$$

Aus (14) folgt jetzt

$$\frac{128}{27} - \pi\Phi_1 \leqq 8\pi \cdot \max_{0\leqq x\leqq 1} |F(x)| = \frac{3\pi}{2} - 4,$$

womit (3) bewiesen ist.

Auch dieses Verfahren läßt sich verbessern. Mit der Methode von Nitsche [8] gewinnt man bei der Abschätzung des Integrals (14) noch einen Beitrag von 0,002..., erhält also $\mu \geqq 1{,}284\ldots$ (man setze bei Nitsche $k=11{,}7$), mit einer etwas anderen Methode kommt man auf $\mu \geqq 1{,}288\ldots$. Wegen der Kleinheit dieser Verbesserungen verzichten wir auf die Wiedergabe von Beweisen.

2. Das Heinzsche Lemma [2, S. 52] über harmonische Abbildungen lautet jetzt:

Die Transformation

$$\mathscr{S}: \begin{cases} X = X(x, y), \\ Y = Y(x, y), \end{cases}$$

bilde den Einheitskreis $x^2+y^2 \leqq 1$ eineindeutig und stetig auf den Einheitskreis $X^2+Y^2 \leqq 1$ ab. Es sei $X(0,0)=Y(0,0)=0$ und $X(x,y)$, $Y(x,y)$ seien harmonische Funktionen in $x^2+y^2<1$. Dann gilt die Ungleichung

$$[X_x^2 + X_y^2 + Y_x^2 + Y_y^2]_{x=y=0} \geqq \mu.$$

Dabei ist μ die durch (2) *definierte Konstante.*

Beweis. Man setze $Z(x,y) := X(x,y) + iY(x,y)$ und führe Polarkoordinaten $x = r\cos s$, $y = r\sin s$ ein. Dann ist

$$Z(r\cos s, r\sin s) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n \cos ns + \beta_n \sin ns)$$

mit Fourierkonstanten α_n, β_n. Aus den Voraussetzungen folgt, daß der Kreis $x^2+y^2=1$ durch $\mathscr{S}$ topologisch auf den Kreis $X^2+Y^2=1$ abgebildet wird. Es gibt also eine stetige, streng monotone Funktion $\omega(s)$ mit $\omega(2\pi)=\omega(0)\pm 2\pi$, $0 \leqq s \leqq 2\pi$, so daß

$$Z(\cos s, \sin s) = e^{i\omega(s)}$$

gilt. Mit dieser Funktion $\omega(s)$ ordne man der Abbildung $\mathscr{S}$ durch Integration der Gln. (7) eine Kurve $x=x(s)$, $y=y(s)$ zu. Daß sich diese Kurve schließt, folgt aus der Invarianz des Nullpunktes gegenüber der Abbildung $\mathscr{S}$,

$$\begin{aligned}&\big(x(2\pi)-x(0)\big) + i\big(y(2\pi)-y(0)\big)\\ &\quad = \int_0^{2\pi} \cos\omega(s)\,ds + i\int_0^{2\pi} \sin\omega(s)\,ds = \int_0^{2\pi} Z(\cos s, \sin s)\,ds = 0,\end{aligned}$$

daß sie eine Eilinie $\mathscr{E}$ wird, folgt aus der Monotonie von $\omega(s)$. Schließlich ist

$$[X_x^2+X_y^2+Y_x^2+Y_y^2]_{x=y=0}=|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2=\Phi_1(\mathscr{E}).$$

Auch umgekehrt gehört zu jeder Eilinie $\mathscr{E}$ mit stetiger und streng monotoner Funktion $\omega(s)$ eine harmonische Abbildung $\mathscr{S}$ der betrachteten Art, weil die Eineindeutigkeit von $\mathscr{S}$ im Inneren des Einheitskreises gewährleistet ist [8, S. 408].

3. Für den Krümmungsradius $\rho(\theta)$ einer Eilinie vom Umfang 2π gilt

$$\begin{aligned}\rho(\theta)&=\frac{ds}{d\theta}=p(\theta)+p''(\theta)\\&=1+\sum_{n=2}^{\infty}(1-n^2)(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\geqq 0.\end{aligned}$$

Also ist

$$a_2+ib_2=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}e^{i2\theta}\,ds(\theta)$$

und demnach

$$\begin{aligned}\Psi_2=a_2^2+b_2^2&=\frac{1}{9\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2(\theta-\phi)\,ds(\theta)\,ds(\phi)\\&=\frac{4}{9}-\frac{2}{9\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta-\phi)\,ds(\theta)\,ds(\phi)\leqq\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau für die Nadel, denn aus $\sin^2(\theta-\phi)\equiv 0$ folgt $\theta=\phi$ oder $\theta=\phi\pm\pi$.

Literatur

1. Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II. 1. u. 2. Aufl. Berlin: Springer 1923.
2. Heinz, E.: Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 51–56 (1952).
3. Hopf, E.: On an inequality for minimal surfaces $z=z(x,y)$. J. Rational Mech. Anal. **2**, 519–522, 801–802 (1953).
4. Hurwitz, A.: Sur le problème des isopérimètres. Math. Werke I, 490–491. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1962.
5. — Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. ibid. 509–554.
6. Nitsche, J. C. C.: On harmonic mappings. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 268–271 (1958).
7. — On the constant of E. Heinz. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. **8**, 178–181 (1959).
8. — Zum Heinzschen Lemma über harmonische Abbildungen. Arch. der Math. **14**, 407–410 (1963).
9. Sachs, H.: Über eine Klasse isoperimetrischer Probleme, 2. Mitt. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturw. R. **8**, 127–134 (1958).
10. Valentine, F. A.: Convex sets. New York-San Francisco-Toronto-London: McGraw-Hill 1964.
11. de Vries, H. L.: A remark concerning a lemma of Heinz on harmonic mappings. J. Math. Mech. **11**, 469–471 (1962).

Dr. Hans Ludwig de Vries
Max-Planck-Institut
für Physik und Astrophysik
8 München 23, Föhringer Ring 6

(Eingegangen am 25. Juni 1969)