

Die Gl. (10) geht aus (4) hervor, wenn darin k^2, λ^2 durch k'^2, ϱ ersetzt werden einschließlich des entsprechenden Anfangswertes. Daher ist die Lösung bekannt.

In (11) läßt sich die rechte Seite in eine Potenzreihe der Form $k' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot k'^{2n}$ bringen und liefert danach bei bekanntem Anfangswert w_0 die weiteren Koeffizienten w_n von W . Ebenso wie bei den anderen Reihen ist auch hier $k'^2 = |\varrho|$ nur scheinbar Konvergenzgrenze. Für $|\varrho| < k'^2$ ist zur Vermeidung des Dezimalenschwundes Reihenentwicklung nach ϱ durchgeführt.

V. Zusätze

Die Legendre Normalform ist

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda^2, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{k^2}{\lambda^2 - k^2} \cdot K(k) + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - k^2} \cdot M(\lambda^2, k).$$

Das Integral

$$N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 + \mu^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \mu^2 > 0$$

wird durch (IIId) mit $\lambda^2 = -\mu^2$ in ein Integral der Form (1) mit $k_1^2 < \lambda_1^2 < 1$ übergeführt.

VI. Zahlenbeispiel

Zur Kontrolle wurde der Fall $\lambda=0,9; k=0,8$ durchgerechnet. Mit (IIId) wird $k_1 = \frac{1}{4}$; $\lambda_1 = -\frac{41}{79}$. Hiernach wurden von (IIb) die angegebenen sechs Glieder in der ersten Form berücksichtigt. Zum Vergleich wurde auch nach (IIe) gerechnet, wofür $k_2^1 = \frac{1}{9}, \lambda_2 = \frac{170}{171}$ wird. Danach wurde mit allen Gliedern von (IIc) in der zweiten Form, wegen $\varrho_2 = \frac{1}{171} < k_2'^2$, gerechnet. Beide Rechnungen gaben übereinstimmend

$$M(0,81; 0,8) = 2,6400\,284.$$

Bei anderen Werten von k ist die gleiche Genauigkeit mit weniger Gliedern erreichbar, so daß der ungünstigste Wert gewählt wurde. Der Wert für λ wurde so gewählt, daß die Hamelsche Reihe nicht mehr konvergiert.

Eingegangen: 24. 4. 1950.

Analytische Untersuchungen und konstruktive Erweiterungen zu den graphischen Integrationsverfahren von Meißner und Grammel

Von Rudolf Ludwig in Braunschweig¹⁾

Für die graphischen Integrationsverfahren von Grammel und Meißner existierten bisher weder eine analytische Behandlung der Konstruktionen noch eine daraus sich ergebende Fehlerbetrachtung. Die analytischen Rechnungen führen für die Grammelschen Polaren zu den Verfahren mit den kleinsten Fehlern und für die Meißnerschen Linienbilder zu neuen Konstruktionen, die in einer eigenartigen Analogie zu den Grammelschen Methoden stehen und die nur mit einem Fehler in der Größenordnung des Fehlers bei der Simpsonschen Regel behaftet sind.

For the graphical methods of integration due to Grammel and Meissner, neither an analytical treatment nor a computation of the error based on the former, were existing till now. The computation leads to conclusions that keep, in the case of Grammel's polars, the errors as small as possible, and give, in the case of Meissner's line diagrams, new constructions. These are, in a particular manner, analogous to Grammel's methods, and are affected only with an error, the order of which is the same as that of Simpson's rule.

Pour la méthode graphique d'intégration de Grammel et de Meissner il n'y avait jusqu'à présent ni un traitement analytique des constructions ni une méthode pour l'évaluation d'erreurs basée sur un tel traitement. Par les opérations analytiques on obtient le procédé au moindre erreur dans le cas des polaires de Grammel et, dans le cas du diagramme de Meissner, des constructions nouvelles. Celles-ci sont remarquablement analogues aux méthodes de Meissner; l'erreur est du même ordre de grandeur que celui de la règle de Simpson.

¹⁾ Diese Arbeit und zwei demnächst erscheinende Arbeiten entstanden bei meinen wissenschaftlichen Arbeiten am Institut für Angewandte Mathematik und Darstellende Geometrie der Technischen Hochschule Braunschweig (Prof. Dr. Rehbock).

Для графических методов интегрирования Граммеля и Мейснера до сих пор еще нет ни аналитического исследования этих конструкций ни оценок погрешностей, вытекающих из такого исследования. Аналитические расчеты приводят в случае поляра Граммеля к методам с наименьшей возможной погрешностью, а в случае линейных диаграмм Мейснера к новым конструкциям, которые аналогичны методам Граммеля и которым соответствует погрешность того-же порядка, как и в случае применения правила Симпсона.

Einleitung

In den folgenden Ausführungen wird von den Arbeiten von Meißner [1] und Grammel [2], [3] über graphische Integrationsmethoden ausgegangen. Durch analytische Behandlung der Grammelschen Konstruktionen ist es erst möglich, die günstigste Art dieser Konstruktionen herzuleiten, bei denen man den Fehler abschätzen und vor allem möglichst klein machen kann. Die Vorteile dieser Konstruktionen werden dann in geeigneter Weise auf die Meißnerschen Linienbilder einer Funktion übertragen. Aus der analytischen Formulierung der Konstruktionsverfahren gehen auch praktisch verwendbare, numerische Integrationsformeln hervor. Während hier also Methoden für bestimmte Integrale behandelt werden, soll es einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben, die Verfahren auf Differentialgleichungen auszudehnen.

Das analytische Verfahren

Zum Zwecke der Fehleruntersuchung wird den geometrischen Konstruktionen die analytische Rechnung gegenübergestellt. Dabei wird ein Vektor P der Länge y und der Amplitude x in der Gaußschen Zahlenebene durch $P = ye^{ix}$ dargestellt. Je nach Zweckmäßigkeit wird im folgenden sowohl von dem Vektor P als auch von dem Punkt P als Endpunkt des Vektors gesprochen.

Für zwei Vektoren $P_1 = y_1 e^{ix_1}$ und $P_2 = y_2 e^{ix_2}$ wird das skalare Produkt eingeführt:

$$P_1 \cdot P_2 = y_1 y_2 \cos(x_1 - x_2).$$

Für den zum Vektor P_2 gehörenden Einheitsvektor e_{P_2} gilt also z.B:

$$P_1 \cdot e_{P_2} = y_1 \cos(x_1 - x_2).$$

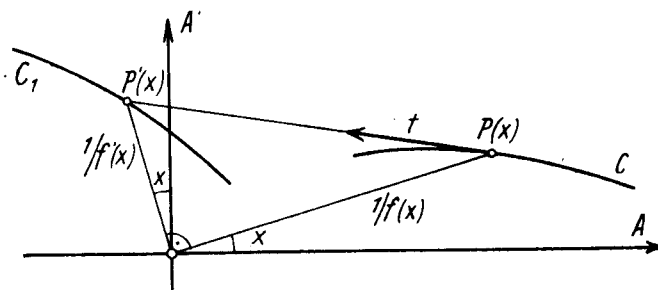


Bild 1. Grammelsche Polaren

1. Die Grammelschen Polaren

1.1. Die Darstellungen einer Funktion und ihrer Ableitungen (Bild 1)

Als Bild der Funktion $y=f(x)$ wird die Grammelsche Polare (C) definiert durch die Kurve, die der Endpunkt des von x abhängigen Vektors

$$P(x) = \frac{1}{f(x)} e^{ix} \quad (C) \quad \dots \quad (1)$$

beschreibt. In ähnlicher Weise werden die Bilder der Ableitungen von $f(x)$, die Orthopolaren (C_k), definiert:

$$P'(x) = \frac{i}{f'(x)} e^{ix} \quad (C_1) \quad \dots \quad (2),$$

$$P^{(k)}(x) = \frac{i^k}{f^{(k)}(x)} e^{ix} \quad (C_k) \quad \dots \quad (3).$$

Die Haupteigenschaft der Polaren und Orthopolaren läßt sich nach Grammel folgendermaßen aussprechen:

Satz 1: Die Tangente in einem Punkt der Polaren (C) [bzw. einer Orthopolaren (C_k)] geht durch den zugehörigen Punkt der Orthopolaren (C_1) [bzw. der darauf folgenden Orthopolaren (C_{k+1})].

„Zugehörige Punkte“ sollen stets solche genannt werden, die verschiedenen Polaren bei gleichem Argument x angehören.

Beweis: Einen Tangentialvektor $t(x)$ in einem Punkt $P(x)$ der Polaren (C) erhält man durch Differentiation des Vektors $P(x)$ nach x :

$$t(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \left(\frac{i}{f'(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) e^{ix} = \frac{f'(x)}{f(x)} (P'(x) - P(x)).$$

Daher ist

$$P(x) + \lambda t(x) = P'(x)$$

mit $\lambda = f(x)/f'(x)$, womit der Satz bewiesen ist.

1.2. Die Integration nach dem Sehnungsverfahren (Bild 2)

Bei der Grammelschen Darstellungsweise der Funktion und ihrer Ableitungen besteht das Integrationsproblem darin, aus der bekannten Orthopolaren die Polare zu konstruieren. Die gegebene Orthopolare ist also für die Funktion $f(x)$ zu zeichnen:

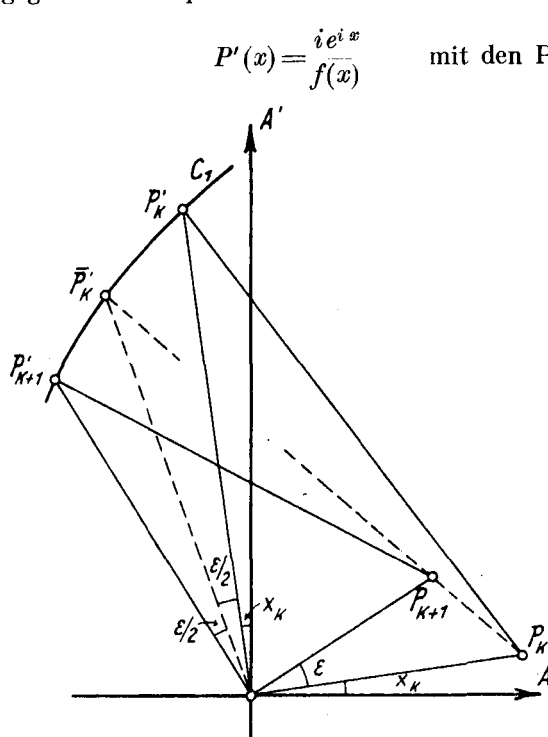


Bild 2. Grammelsches Sehnungsverfahren

$$P'(x) = \frac{i e^{i x}}{f(x)} \quad \text{mit den Punkten} \quad P'_k = \frac{i e^{i(x_k + t\varepsilon)}}{f_k},$$

wobei

$$x_k = x_0 + k\varepsilon,$$

$$f_k = f(x_k + t\varepsilon), \quad t < 0 < 1.$$

ε ist die noch näher zu erläuternde Schrittweite

des Verfahrens. Um das Integral $\int_{x_k}^{x_k + \varepsilon} f(x) dx$

näherungsweise zu bestimmen, soll aus dem Vek-

tor $P_k = \frac{e^{i x_k}}{g_k}$ der neue Vektor $P_{k+1} = \frac{e^{i(x_k + \varepsilon)}}{g_{k+1}}$

dadurch bestimmt werden, daß man auf der Sehne des Kurvenzuges fortschreitet. Aus Bild 2 folgt sofort

$$\bar{P}'_k = (1 - \lambda_1) P_k + \lambda_1 P_{k+1}.$$

Um λ_1 zu bestimmen, wird diese Vektorgleichung skalar mit $e_{P'_k}$ multipliziert, also ist:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{P}'_k \cdot e_{P'_k}}{P_{k+1} \cdot e_{P'_k}} = \frac{g_{k+1} \cos t\varepsilon}{f_k \sin \varepsilon}.$$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung:

$$g_{k+1} = g_k \frac{\cos(1-t)\varepsilon}{\cos t\varepsilon} + f_k \frac{\sin \varepsilon}{\cos t\varepsilon}.$$

Man sieht, daß nur für $t=1/2$ der Näherungswert des Integrals vom Anfangswert auf dem Vektor $P_k = \sigma e_{P_k}$, d. h. von σ unabhängig ist. Grammel spricht z. B. nur vom „Bogenmittelpunkt“ eines Schrittes, aber nicht exakt von der Winkelhalbierenden. Für $t=1/2$ gilt

$$g_{k+1} = g_k + 2 f_k \sin \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots \quad (4).$$

Reiht man n Schritte in gleicher Weise aneinander, so ergibt sich

$$g_n = g_0 + 2 [f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}] \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es ist also

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx g_n - g_0 = 2 [f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}] \sin \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots \quad (5).$$

Man kann das Verfahren noch so modifizieren, daß man die Orthopolare verzerrt, indem man aufträgt

$$P'_k = \frac{i e^{i(x_0 + k\varepsilon)}}{f(x_0 + k\varepsilon)}, \quad \text{wobei} \quad \sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n}{2}.$$

So erhält man als Integrationsformel die bekannte Maclaurinsche Regel:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h (f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}) + R_n^{(M)} \quad \dots \quad (6).$$

1.3. Die Integration nach dem Tangentenverfahren (Bild 3)

Wie in (1,2) sind die Punkte P'_k und P'_{k+1} der Orthopolaren und der Punkt P_k der Polaren bekannt. Man findet P_{k+1} , indem man auf der Tangente in P_k vorwärts geht bis zum „Halbie-

runbspunkt“ von $P_k P_{k+1}$, wie Grammel sagt, d. h. exakter bis zur Winkelhalbierenden [wie eine Rechnung ähnlich der von (1,2) zeigt] und dann in der Tangentenrichtung des gesuchten Punktes diesen erreicht.

1. Schritt:

$$P'_k = \lambda_2 \bar{P}_k + (1 - \lambda_2) P_k,$$

$$\bar{P}_k = \frac{e^{i(x_k + \frac{\varepsilon}{2})}}{f_k \cos \frac{\varepsilon}{2} + g_k \sin \frac{\varepsilon}{2}};$$

2. Schritt:

$$P'_{k+1} = \mu_1 P_{k+1} + (1 - \mu_1) P_k,$$

$$P_{k+1} = \frac{e^{i(x_k + \varepsilon)}}{g_k + (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Also liefert die Integration über ein Intervall:

$$g_{k+1} - g_k = (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2},$$

und über n Intervalle:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx g_n - g_0 = (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (7).$$

Durch eine ähnliche Modifizierung der Polaren wie in (1,2), indem man für die Schrittweite $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2}$ setzt, erhält man die bekannte Trapezregel:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + R_n^{(T)} \dots \dots \dots (8).$$

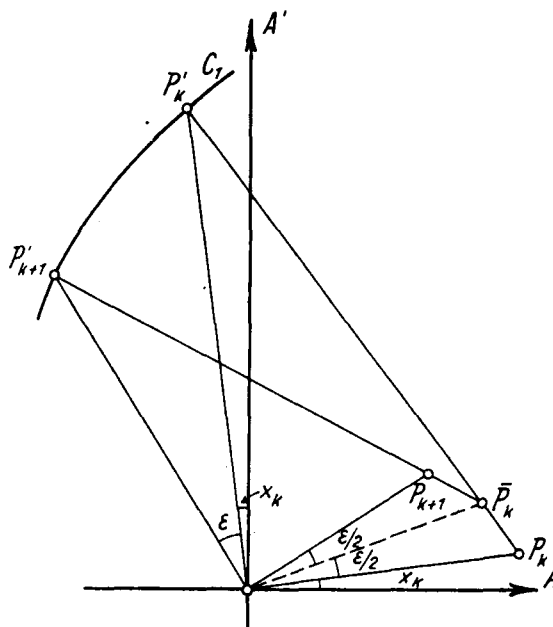


Bild 3. Grammelsches Tangentenverfahren

2. Die Meißnerschen Linienbilder

2.1. Die Darstellungen einer Funktion und ihrer Ableitungen durch Polaren und Linienbilder (Bild 4)

Die Meißnerschen Polaren unterscheiden sich von den Grammelschen dadurch, daß die Länge des Vektors gleich dem Funktionswert selbst und nicht gleich dem reziproken Wert desselben ist. Dies vereinfacht das Verfahren. Die Meißnerschen Polaren werden also durch folgende Vektoren definiert:

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= f(x) e^{ix} & (C), \\ P^{(k)}(x) &= i^k f^{(k)}(x) e^{ix} & (C_k) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

Darüber hinaus werden aber von Meißner noch die Linienbilder eingeführt, deren Punkte man durch vektorielle Addition zugehöriger Vektoren (d. h. Vektoren für dasselbe Argument x) aufeinander folgender Polaren erhält, also:

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= P(x) + P'(x) & (L), \\ Q^{(k)}(x) &= P^{(k)}(x) + P^{(k+1)}(x) & (L_k) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10).$$

Die Haupteigenschaften der Polaren und Linienbilder kann man in den folgenden drei Sätzen zusammenfassen:

Satz 2: Die Normale in einem Punkt des Polarbildes (C) [bzw. C_k] geht durch den zugehörigen Punkt des Polarbildes (C_1) [bzw. C_{k+1}] der ersten [bzw. $(k+1)$ -ten] Ableitung.

Beweis:

$$N = i \frac{dP(x)}{dx} = [-f(x) + if'(x)] e^{ix} = -P(x) + P'(x).$$

(Dies ist der bekannte Satz über die Polarsubnormale!)

Satz 3a: Die Tangente in einem Punkt $Q(x)$ des Linienbildes L (bzw. L_k) ist das Lot im Endpunkt des Vektors $P(x)$ der Polaren C (bzw. C_k) auf diesem Vektor.

Satz 3b: Das Linienbild L ist die Hüllkurve aller Lote in den Endpunkten der Vektoren P_k der Polaren C (entsprechend für L_k und C_k) auf diesem Vektor.

Beweis: Tangente des Linienbildes: $T = \frac{dQ(x)}{dx}$;
 Normale des Linienbildes: $N = iT = -[f(x) + f''(x)]e^{ix} = \varrho e_P$.

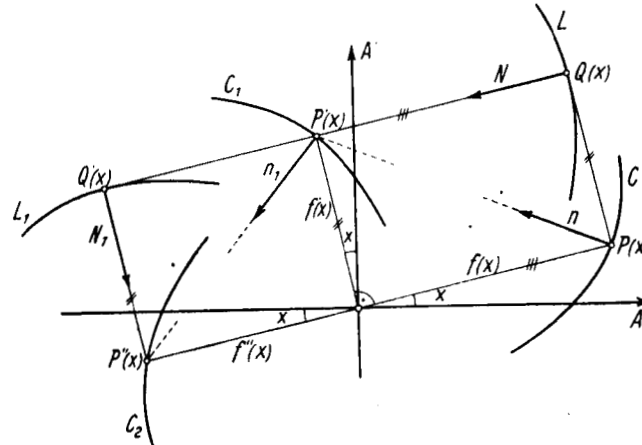


Bild 4. Meißnersche Polaren und Linienbilder

Satz 4: Der Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt des Linienbildes L (bzw. L_k) ist der zugehörige Punkt des darauf folgenden ersten [bzw. $(k+1)$ -ten] Linienbildes L_1 (bzw. L_{k+1}).

Beweis: Aus $Q(x) = [f(x) + if'(x)]e^{ix} = \xi + i\eta$ folgt nach der bekannten Formel für den Krümmungsradius ebener Kurven in Parameterdarstellung:

$$\varrho = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}{\xi \ddot{\eta} - \ddot{\xi} \eta} = f' + f''.$$

Einige Hinweise sollen noch gegeben werden über Besonderheiten im Kurvenverlauf der Polaren und Linienbilder, deren Kenntnis für Konstruktionen vorteilhaft ist.

Über die Schnittpunkte von Polaren und Linienbildern in zugehörigen Punkten gilt:

Satz 5: Polare und Linienbild haben dort gemeinsame Punkte und Tangenten, wo die erste Ableitung der Funktion verschwindet.

Beweis: Schnittpunkt von Polarbild C und Linienbild L :

$$P(x) = Q(x) = P(x) + P'(x),$$

$$\text{also } P'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(x) = 0.$$

Geometrisch sieht man leicht ein, daß beide Kurven an der betrachteten Stelle eine gemeinsame Tangente haben.

Satz 6: Das Polarbild der ersten Ableitung und das Linienbild einer Funktion schneiden sich in Punkten, für die die Funktion verschwindet.

Beweis: Schnittpunkt der 1. Polaren C_1 mit dem Linienbild L :

$$P'(x) = Q(x) = P(x) + P'(x),$$

$$\text{also } P(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f(x) = 0.$$

Aus einer Figur folgt sofort für den Schnittwinkel der beiden Kurven:

$$\text{tg } \alpha = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Eine Singularität des Linienbildes behandelt der

Satz 7: Wenn $f(x) + f''(x) = 0$ ist, so hat das Linienbild der Funktion im allgemeinen an dieser Stelle eine Spitze.

Beweis: Der Tangentenvektor $T(x)$ des Linienbildes $Q(x)$

$$T(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = i[f(x) + f''(x)] e^{ix}$$

kann verschwinden, d.h. kinematisch betrachtet, die Bahngeschwindigkeit wird Null.

2.2. Die Integration nach dem Sehnungsverfahren für Linienbilder (Bild 5)

Bei der Darstellung einer Funktion durch die Meißnerschen Polaren und Linienbilder besteht das Integrationsproblem darin, aus der 1. Polaren C_1 unter Verwendung des Linienbildes L die Polare C zu konstruieren. Hierbei wird im Gegensatz zu Meißner von dem Satz 3 über die Krümmung der Linienbilder kein Gebrauch gemacht. Solche Konstruktionen lassen sich weniger leicht analytisch bis zu praktisch brauchbaren Fehlerabschätzungen überblicken und gestatten nicht ohne weiteres die später beabsichtigten Anwendungen auf Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die hier angewandten Konstruktionen weisen eine eigentümliche Analogie zu denen von Grammel auf. Sie sind ebenso einfach, erlauben aber die direkte Ablesung der Funktionswerte ohne Berechnung reziproker Werte.

Mit den Punkten der Polaren:

$$P'_k = if_k e^{ix_k}, \quad P'_{k+1} = if_{k+1} e^{i(x_k + \varepsilon)}, \quad P_k = g_k e^{ix_k}$$

ist gleichzeitig der Punkt $Q_k = P_k + P'_k$ des Linienbildes gegeben. Den Punkt Q_{k+1} erreicht man auf der Sehne, die parallel zum mittleren

Vektor \bar{P}_k ist. Also

$$Q_{k+1} = P_{k+1} + \varrho_1 e_{P'_{k+1}} = Q_k + \sigma_1 e_{\bar{P}_k},$$

wobei ϱ_1 und σ_1 zu bestimmende Skalare sind

und $e_{\bar{P}_k} = i e^{i(x_k + \frac{\varepsilon}{2})}$ ist. Durch skalare Multiplikation obiger Vektorgleichung mit $e_{\bar{P}_k}$ findet man:

$$\varrho_1 = g_k + (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$$

und daraus

$$P_{k+1} = \left[g_k + (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right] e^{i(x_k + \varepsilon)}.$$

Es ergibt sich also wieder die Gl. (7):

$$g_{k+1} - g_k = (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt der Satz 8:

Die Integrationsmethoden nach dem Sehnungsverfahren für Linienbilder und nach dem Grammelschen Tangentenverfahren liefern die gleichen Ergebnisse, nämlich die Trapezregel¹⁾.

2.3. Die Integration nach den Tangentenverfahren für Linienbilder (Bild 6)

Entsprechend wie in Abschn. 1,3 erfolgt die Integration über ein Intervall in zwei Schritten, indem man in der Tangentenrichtung des Linienbildes bis zur „Mitte“ geht und dann in der Tangentenrichtung des gesuchten Punktes diesen erreicht. Gegeben sind also wieder P_k , P'_k , \bar{P}_k , P'_{k+1} und damit auch Q_k .

¹⁾ In der modifizierten Form nach Gl. (7).

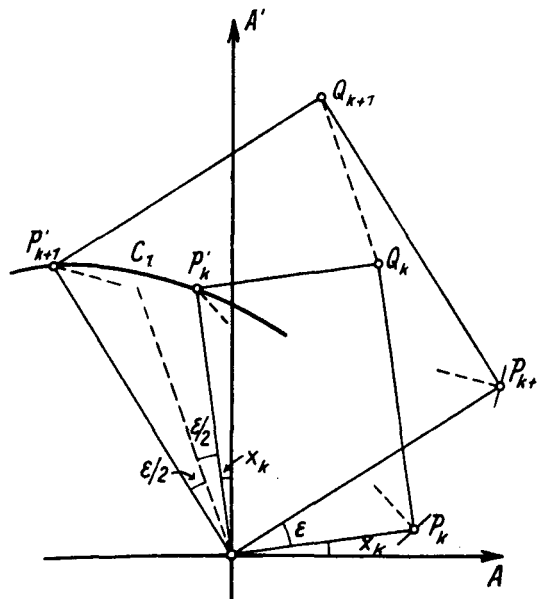


Bild 5. Sehnungsverfahren für Linienbilder

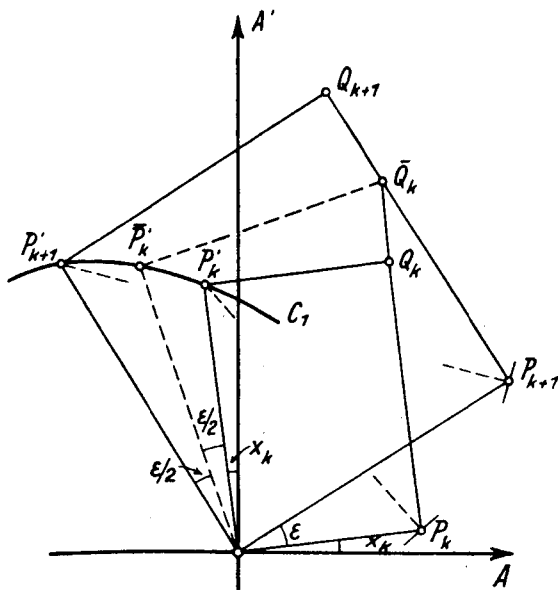


Bild 6. Tangentenverfahren für Linienbilder

1. Schritt:

$$Q_k = P_k + \varrho_2 e_{P_k'} = \bar{P}_k + \sigma_2 e_{P_k'}$$

liefert

$$\varrho_2 = \frac{1}{\cos \varepsilon/2} \left(\bar{f}_k + g_k \sin \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

2. Schritt:

$$P_{k+1}' + \varrho_3 e_{P_{k+1}'} = \bar{Q}_k + \sigma_3 e_{P_{k+1}'}$$

ergibt

$$\varrho_3 = g_k + 2\bar{f}_k \sin \frac{\varepsilon}{2} \dots (12).$$

Man erhält also Gl. (4) aus Abschn. 1,2:

$$g_{k+1} - g_k = 2\bar{f}_k \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt der Satz 9:

Die Integrationsmethoden nach dem Tangentenverfahren für Linienbilder und nach dem Grammelschen Sehnenverfahren liefern die gleichen Ergebnisse, nämlich die Maclaurinsche Regel¹⁾.

2,4. Restabschätzungen für das Sehnen- und Tangentenverfahren

Das kombinierte Sehnen-Tangentenverfahren für Linienbilder

Für das Sehnen- und Tangentenverfahren mit der Festlegung der Schrittweite durch $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2}$ bzw. $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2}$ ergeben sich die bekannten Restglieder für die Trapez- bzw. Maclaurinsche Regel:

$$\left. \begin{aligned} R^{(T)} &= -\frac{h^3}{12} f''(x_0 + \tau_1 h) & 0 < \tau_1 < 1 \\ R^{(M)} &= \frac{h^3}{24} f''(x_0 + \tau_2 h) & i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

So wie man die Simpsonsche Regel als Mittelwert aus der Trapez- und Maclaurinschen Regel herleiten kann, so sollen auch hier beide Verfahren gleichzeitig angewandt und ein Mittelwert so bestimmt werden, daß der Fehler möglichst klein wird.

Für die Schrittweite $2h$ gilt:

$$g_{k+2}^{(S)} = g_k^{(M)} + (f_{k+2} + f_k) \operatorname{tg} h,$$

$$g_{k+2}^{(T)} = g_k^{(M)} + 2f_{k+1} \sin h,$$

dabei gilt der obere Index (S) für Punkte nach dem Sehnenverfahren, (T) für Punkte nach dem Tangentenverfahren und (M) für Punkte, die gemittelt worden sind. Analog dem Vorgehen bei der Simpsonschen Regel bildet man den Mittelwert:

$$g_{k+2}^{(M)} = \frac{1}{3} (g_{k+2}^{(S)} + 2g_{k+2}^{(T)}) \dots (14),$$

oder

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx = g_{k+2}^{(M)} - g_k^{(M)} + R = \frac{1}{3} [(f_k + f_{k+2}) \operatorname{tg} h + 4f_{k+1} \sin h] + R \dots (14*).$$

Zur Bestimmung des Restes R werden die einzelnen Ausdrücke in (14*) in Taylorsche Reihen nach Potenzen von h entwickelt. Man erhält:

$$R = J^{(M)} - J = \frac{h^5}{90} [f_k^{IV} + 10f_k'' + 9f_k] + \dots,$$

$$|R| \leq \frac{h^5}{90} |f_k^{IV}(\xi) + 10f_k''(\xi) + 9f_k(\xi)|_{\max}.$$

¹⁾ In der modifizierten Form nach Gl. (4).

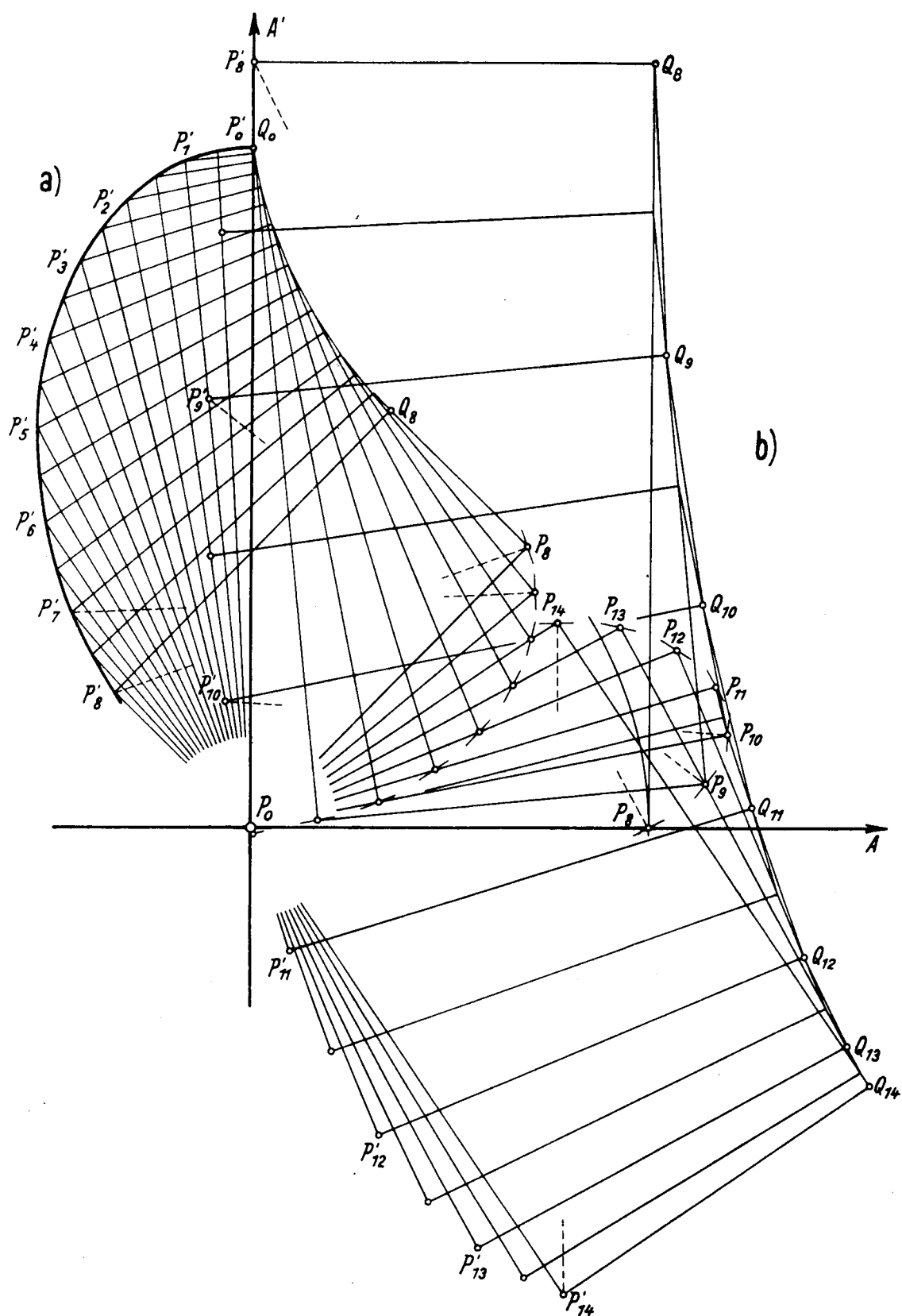


Bild 7. Beispiel $\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_x^{x/3} \frac{\sin 3t}{t} dt$

a) $0 \leq x \leq 2,4$, b) $2,4 \leq x \leq 4,2$

Der Ausdruck in der Klammer ist dabei an einer Stelle ξ innerhalb des Integrationsintervalles zu wählen. Das Ergebnis läßt sich zusammenfassen in den

Satz 10:

Bei der graphischen Integration über ein Intervall $2h$ von x_k bis x_{k+2} findet man für die Linienbilder durch das Sehnenverfahren den Punkt $P_{k+2}^{(S)}$, durch das Tangentenverfahren den Punkt $P_{k+2}^{(T)}$. Teilt man die Strecke $P_{k+2}^{(S)} P_{k+2}^{(T)}$ innerlich im Verhältnis 2:1, erhält man den neuen Näherungswert $P_{k+2}^{(M)}$, der ein Analogon zur Integration nach der Simpsonschen Regel darstellt mit dem Restglied

$$|R| \leq \frac{h^5}{90} |f^{IV}(\xi) + 10f''(\xi) + 9f(\xi)|_{\max} \quad \dots \quad (15).$$

Bei Anwendung der Grammelschen Verfahren muß man allerdings wegen der reziproken Funktionswerte die Mittelwerte numerisch bilden.

Beispiel (Bild 7): Das Sehnen-Tangenten-Verfahren soll für die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

angewandt werden und zwar für einen Bereich $0 \leq x \leq \pi$, also

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad Si \pi = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt,$$

der sog. Integral-Sinus. Eine leichte Umformung ergibt:

$$Si x = \int_0^{x/3} \frac{\sin 3t}{t} dt, \quad Si \pi = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 3t}{t} dt.$$

Gewählt wurde als Schrittweite $\varepsilon = 0,1$. Die Wertetabelle kann ohne weiteres berechnet und die Polare gezeichnet werden. Im Original wurden a) für $0 \leq \frac{x}{3} \leq 0,8$ die Einheit $e_1 = 50$ mm und b) für $0,8 \leq \frac{x}{3} \leq 1,2$ $e_2 = 200$ mm gewählt. Für b) wurde die Polare um $0,8$ gedreht und der Anfangspunkt der Integration beliebig gewählt (Verkleinerung im Bild 7 etwa $\frac{3}{4}$). Man liest aus Bild 7 ab:

$$Si 2,4 = 1,752, \quad Si \pi = 1,752 + 0,100 = 1,852.$$

Diese Werte stimmen mit den exakten Werten [4]

$$Si 2,4 = 1,7525 \quad \text{und} \quad Si \pi = 1,8519$$

gut überein ($Si \pi$ durch quadratische Interpolation aus den benachbarten Werten). Man sieht an dem Beispiel auch den Satz 5 bestätigt.

2.5. Das Sehnen-Tangenten-Verfahren für Linienbilder überein k -fach unterteiltes Intervall (Bild 8)

Ein Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+k} f(x) dx$$

soll näherungsweise graphisch ausgewertet werden in den folgenden zwei Schritten:

1. Schritt: k -seitiges Sehnenpolygon:

Nach Gl. (7) gilt

$$g_k - g_0 = (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{k-1} + f_k) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \quad \dots \quad (16).$$

2. Schritt: Polygonzug, bestehend aus dem Tangentenstück im Ausgangspunkt, $(k-2)$ -seitiges Sehnenpolygon und Tangentenstück im Endpunkt:

Nach den Gl. (7) und (12) gilt:

$$g_1 = g_0 \frac{1}{\cos h} + f_1 \operatorname{tg} h,$$

$$g_{k-1} = g_1 + (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-1} + f_{k-2}) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cos h,$$

$$g_k = g_{k-1} \cos h + f_{k-1} \sin h.$$

Daraus folgt:

$$g_k - g_0 = (f_1 + f_{k-1}) \sin h + (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-2} + f_{k-1}) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cos h \quad (17).$$

Aus den beiden Näherungswerten für das Integral

$$J_1 = (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{k-1} + f_k) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \quad (16*),$$

$$J_2 = (f_1 + f_{k-1}) \sin h + (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-2} + f_{k-1}) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cos h \quad (17*).$$

soll nun durch geeignete Mittelwertbildung

$$\bar{J} = tJ_1 + (1-t)J_2 \quad (18).$$

eine Annäherung möglichst hoher Ordnung in h erreicht werden. Die Taylorsche Reihen für den exakten Wert J und für J_1 und J_2 stimmen in den ersten beiden Gliedern, d. h. bis h^2 , überein

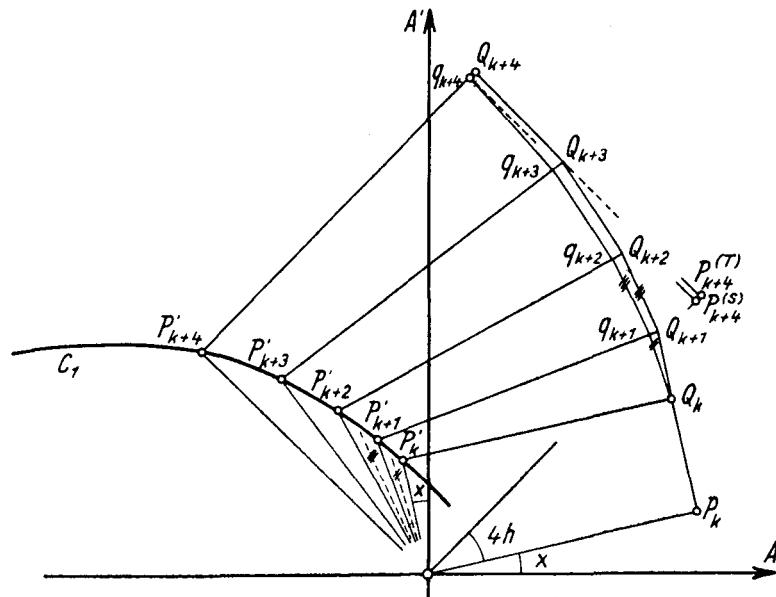


Bild 8. Sehnentangenten-Verfahren für k -fach unterteiltes Intervall ($k = 4$)

Soll in (18) auch der Koeffizient von h^3 für \bar{J} mit dem von J übereinstimmen, so muß man wählen

$$t = \frac{5k-6}{6(k-1)} \quad (19).$$

Mit diesem Wert t hat man aber zugleich erreicht, daß auch der Koeffizient von h^4 aus \bar{J} mit dem von J übereinstimmt, und das Restglied lautet:

$$R^{(k)} \leq \frac{kh^5}{720} |(5k-6)f^{IV} + 5kf'' + 6f|_{\max} \quad (20).$$

Satz 11:

Bildet man aus dem Näherungswert J_1 des Sehnepolygons und dem Näherungspolygon J_2 des Sehnentangentenpolygons den Mittelwert

$$\bar{J} = tJ_1 + (1-t)J_2$$

mit

$$t = \frac{5k-6}{6(k-1)},$$

so ist das Restglied von 5. Ordnung in h [Gl. (20)].

Tabelle der Koeffizienten t und $1-t$:

Tabelle 1

k	2	3	4	5	6
t	2/3	3/4	7/9	19/24	4/5
$1-t$	1/3	1/4	2/9	5/24	1/5

2.6. Formeln für ein numerisches Integrationsverfahren

Ersetzt man in (16*) und (17*) die trigonometrischen Funktionen durch das erste Glied ihrer Taylorreihen, also

$$\lg \frac{h}{2} \rightarrow \frac{h}{2}, \quad \sin h \rightarrow h, \quad \cos h \rightarrow 1,$$

so findet man folgende Näherungsformeln

$$\left. \begin{aligned} J_1^* &= \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{k-1} + f_k), \\ J^* &= h(f_1 + f_{k-1}) + \frac{h}{2} (f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{k-2} + f_{k-1}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (21).$$

Entsprechend Gl. (18) wird der Mittelwert

$$\bar{J}^* = t J_1^* + (1-t) J_2^* \dots \dots \dots (22)$$

gebildet. Durch eine Rechnung, die der des Abschn. 2,5 sehr ähnlich ist, findet man denselben Wert für t [Gl. (19)]:

$$t = \frac{5k-6}{6(k-1)}$$

und es lautet die allgemeine Näherungsformel

$$\bar{J}^* = \frac{h}{12(k-1)} \left\{ (5k-6)(f_0 + f_k) + (13k-12)(f_1 + f_{k-1}) + 12(k-1)(f_2 + \cdots + f_{k-2}) \right\} \dots \dots \dots (23)$$

mit dem Restglied

$$R_{(k)}^* \leq \frac{k(5k-6)}{6!} h^5 |f^{IV}|_{max} \dots \dots \dots (24).$$

Die nachfolgende Tabelle 2 enthält die vollständigen Formeln für $1 \leq k \leq 6$:

k	J_1^*	J_2^*	$J^* = \lambda J_1^* + (1-\lambda) J_2^*$	$R_{(k)}^*$
1	$\frac{h}{2} (f_0 + f_1)$	$h f_0$	—	—
2	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + f_2)$	$2 h f_1$	$\frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$	$\frac{h^5}{90} f^{IV} $
3	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)$	$\frac{3}{2} h (f_1 + f_2)$	$\frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$\frac{3h^5}{80} f^{IV} $
4	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$	$\frac{h}{2} (3f_1 + 2f_2 + 3f_3)$	$\frac{h}{18} (7f_0 + 20f_1 + 18f_2 + 20f_3 + 7f_4)$	$\frac{7h^5}{90} f^{IV} $
5	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + f_5)$	$\frac{h}{2} (3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4)$	$\frac{h}{48} [19f_0 + 53f_1 + 48(f_2 + f_3) + 53f_4 + 19f_5]$	$\frac{19h^5}{144} f^{IV} $
6	$\frac{h}{2} [f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5) + f_6]$	$\frac{h}{2} [3f_1 + 2(f_2 + f_3 + f_4) + 3f_5]$	$\frac{h}{18} [4f_0 + 11f_1 + 10(f_2 + f_3 + f_4) + 11f_5 + 4f_6]$	$\frac{h^5}{5} f^{IV} $

Diese Formeln enthalten für $k=2$ die Simpsonsche Regel und für $k=3$ eine nach Newton benannte Formel [5].

Schrifttum

- [1] E. Meißner: Graphische Analysis mittels Linienbilder einer Funktion. Zürich 1932 (Sonderabdruck aus der „Schweiz. Bau-Ztg.“)
- [2] R. Grammel: Ein Gegenstück zum Meißnerschen Verfahren der graphischen Analysis. Ingenieur-Arch. 10 (1939), S. 395—411.
- [3] Zu den Arbeiten 1 und 2 siehe auch:
E. Kamke: Differentialgleichungen und Lösungsmethoden. Bd. 1. Leipzig 1944. 3. Aufl. S. 171—172.
- [4] Jahnke-Emde: Tafeln der höheren Funktionen. 4. Auflage. S. 6—9. Leipzig 1948.
- [5] G. Kowalewski: Interpolation und genäherte Quadratur S. 60. Leipzig 1932. (Dort „Newtonsche Lieblingsformel“ genannt!)

Eingegangen 19. 6. 1950.