Fortsetzungen irreduzibler Darstellungen über beliebigen Körpern

Von

HEINZ E. BECKER

Für das Problem der Bestimmung sämtlicher irreduzibler Darstellungen einer endlichen Gruppe G über einem Körper K ist es sehr nützlich, wenn man eine Methode hat, aus irreduziblen Darstellungen von Normalteilern solche von G zu gewinnen. Die naheliegendste Methode stellt die Fortsetzung dar, die allerdings keineswegs immer durchgeführt werden kann. Eine notwendige Voraussetzung dafür ist die Invarianz der fortzusetzenden Darstellung, dabei heißt eine Darstellung R eines Normalteilers N von G invariant bezüglich G, falls für alle $g \in G$ und alle $x \in N$ gilt: $R(g^{-1}xg) \sim R(x)$.
In dieser Arbeit zeigen wir:

Satz 1. *Sei K ein beliebiger Körper, G eine endliche Gruppe und N ein Normalteiler mit Komplement in G. Dann ist jede bezüglich G invariante, irreduzible K-Darstellung von N mit zum Index $|G:N|$ teilerfremdem Grad fortsetzbar auf G.*

Wir beweisen Satz 1 in einer etwas schärferen Form (Satz 2). Dieses Ergebnis hat dann eine interessante Anwendung. Mit seiner Hilfe gelingt es uns, den Thompsonschen Satz über die Existenz normaler p-Komplemente zu verallgemeinern (Satz 3). Unser Beweis gilt auch für Thompsons Fall: $K = \mathbb{C}$.

Falls K der Körper der komplexen Zahlen ist, ist auch Satz 1 wohlbekannt, siehe Gallagher [3]. Isaacs behandelte in [6] den Fall, daß K nicht algebraisch abgeschlossen ist und Charakteristik 0 hat. Er konnte die Fortsetzbarkeit einer invarianten, irreduziblen K-Darstellung R nur unter erheblichen zusätzlichen Voraussetzungen nachweisen (z.B. falls N eine normale, nilpotente Hall-Untergruppe ist). Die Theorie des Schur Index sorgt für wesentliche Vereinfachungen, falls K Primzahlcharakteristik p hat. Fein bewies für diesen Fall in [2], daß R von einer normalen Hall-Untergruppe N fortgesetzt werden kann, wenn entweder N p-auflösbar oder der Grad von R teilerfremd zum Index $|G:N|$ ist, aber sein Beweis gilt nur für Körper mit positiver Charakteristik.

Satz 1 folgt sofort aus dem folgenden allgemeineren Ergebnis:

Satz 2. *Sei K ein beliebiger Körper, N ein Normalteiler und P eine Untergruppe von G mit $PN = G$. R sei eine bezüglich G invariante, irreduzible K-Darstellung von N mit zu $|P|$ teilerfremdem Grad. Dann ist R fortsetzbar auf G, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) *$N \cap P$ ist eine Untergruppe von N'.*

b) *$N \cap P$ liegt im Kern von R.*

Im folgenden sei stets $E = K(\sqrt[n]{1})$ ($n = |G|$), also eine endlich separable Erweiterung von K und ein Zerfällungskörper für G und N.

Dem Beweis von Satz 2 stellen wir folgende Lemmata voran:

Lemma 1. *Sei $PN = G$ und W eine G-invariante, irreduzible E-Darstellung des Normalteilers N mit* (Grad W, $|P|$) $= 1$ *und* $\det W = 1$ *auf $N \cap P$. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung W^* von W auf G mit* $\det W^* = 1$ *auf P.*

Beweis. Da W invariant ist bezüglich P, existiert zu jedem $g \in P$ eine invertierbare, lineare Abbildung S, so daß für alle $x \in N$ gilt: $W(g^{-1}xg) = S(g)^{-1}\, W(x)\, S(g)$. Für $x \in N \cap P$ sei $S(x) = W(x)$. Dann ist S eine projektive E-Darstellung von P, ihr Faktorensystem sei $c(x, y)$. Aus der Bedingung (Grad W, $|P|$) $= 1$ leitet man die Existenz einer Funktion f von P in E^* $(= E \backslash \{0\})$ her, die die Eigenschaft hat:

$$c(x, y) = f(x)\, f(y)\, f(xy)^{-1}.$$

Man erhält f durch Determinantenbildung von $S(x)\, S(y) = c(x, y)\, S(xy)$ und Multiplikation der Kozyklenidentität $c(x, y)\, c(xy, z) = c(x, yz)\, c(y, z)$ für alle $z \in P$ (siehe [4]).

Dann ist $S'(x) = f(x)^{-1}\, S(x)$ eine E-Darstellung von P, und für eine passende ganze Zahl r ist $S''(x) = [\det S'(x)^r]\, S'(x)$ eine E-Darstellung von P mit $\det S'' = 1$ auf P. Somit erhalten wir für alle $g \in N \cap P$: $\det S''(g) = \det W(g) = 1$ und $S''(g) = \alpha(g)\, W(g)$ mit $\alpha(g) \in E^*$. Einerseits folgt daraus durch Determinantenbildung $\alpha(g)^{\text{Grad}\, W} = 1$, andererseits haben wir aber $\alpha(g)^{|P|} = 1$. Also muß $S'' = W$ sein auf $N \cap P$.

Sei nun V ein Vertretersystem zu N in G mit $V \subseteq P$. Dann existiert zu jedem $x \in G$ eine eindeutige Darstellung $x = vg$ mit $v \in V$ und $g \in N$. Wir definieren

$$W^*(x) = S''(v)\, W(g).$$

Man rechnet nach, daß W^* wegen $S'' = W$ auf $N \cap P$ ein Homomorphismus ist (siehe [7]). Also ist W^* eine Fortsetzung von W auf G mit $\det W^* = 1$ auf P. Sei W' eine andere Fortsetzung von W auf G mit $\det W' = 1$ auf P. Das Lemma von Schur impliziert $W^* = \alpha W'$ mit einem linearen Charakter α von G/N. Durch Übergang zu Determinanten folgt $W^* = W'$ auf G, d.h. W^* ist eindeutig bestimmt. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Definition. Die eindeutig bestimmte Fortsetzung W^* von W auf G mit $\det W^* = 1$ auf P heißt 1-*Fortsetzung* von W.

Sei δ der Charakter von W und δ^* derjenige von W^*, $K(\delta)$ bezeichne den Körper $K(\delta(g) \mid g \in N)$ und $m_K(\delta)$ sei der Schur Index von δ bezüglich K, also die kleinste natürliche Zahl $(F : K(\delta))$, so daß W äquivalent ist zu einer F-Darstellung.

Wir benötigen noch das folgende Lemma:

Lemma 2. *Für die 1-Fortsetzung gelten folgende Aussagen:*

a) $K(\delta^*) = K(\delta)$,

b) $m_K(\delta^*) = m_K(\delta)$.

Beweis. a) Sei $\beta \in \mathrm{Gal}(E \mid K(\delta))$. Da W^β und W denselben Charakter haben, gilt $W^{*\beta}|_N = W^\beta = X W X^{-1}$ für eine invertierbare, lineare Abbildung X. Also ist $X^{-1} W^{*\beta} X$ eine Fortsetzung von W auf G. Ihre Determinante ist identisch 1 auf P, so daß wegen der Eindeutigkeit der 1-Fortsetzung gilt: $\delta^{*\beta} = \delta^*$. Somit ist $\mathrm{Gal}(E \mid K(\delta))$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gal}(E \mid K(\delta^*))$ und a) ist bewiesen.

b) Siehe [6] Lemma (2.2) für Charakteristik $K = 0$ und [1] Theorem 1.4 für Charakteristik $K > 0$.

Beweis von Satz 2. Sei χ der Charakter von R und δ der Charakter eines absolut irreduziblen Bestandteils W von R^E, dann erhalten wir ([1] Theorem 1.4):

$$\chi = m_K(\delta) \sum_{i=1}^{t} \delta^{\beta_i} \tag{1}$$

mit $\{\beta_i\}_{i=1}^t = \mathrm{Gal}(K(\delta) \mid K)$. Da χ invariant ist, operiert G als Permutationsgruppe auf den verschiedenen δ^{β_i} $(i = 1, \ldots, t)$, so daß für jedes $g \in G$ ein eindeutig bestimmter Automorphismus $\beta_j = f(g) \in \mathrm{Gal}(K(\delta) \mid K)$ existiert, mit der Eigenschaft $\delta^g = \delta^{f(g)}$. Die so definierte Abbildung f von G in $\mathrm{Gal}(K(\delta) \mid K)$ ist ein Homomorphismus mit der Trägheitsgruppe T von δ als Kern (siehe [6] Lemma (1.2)).

Also ist $|G : T|$ ein Teiler von $t = (K(\delta) : K)$ und wegen (1) ein Teiler von $\chi(1)$. Mit unserer Voraussetzung $(\mathrm{Grad}\, R, |P|) = 1$ folgt nun: $|G : T| = 1$, d.h. δ ist invariant bezüglich G.

Da jede der beiden Voraussetzungen a) und b) von Satz 2 garantiert, daß der Kern des linearen Charakters $\det W$ die Gruppe $N \cap P$ enthält, können wir W nach Lemma 1 eindeutig fortsetzen auf G.

Sei S eine irreduzible K-Darstellung von G mit der Eigenschaft, daß W^*, die 1-Fortsetzung von W, ein absolut irreduzibler Bestandteil von S^E ist. Aus der Theorie des Schur Index wissen wir dann, wie S über E zerfällt (siehe [1] Theorem 1.4):

$$S^E \sim m_K(\delta^*) \left[W^* \dotplus W^{*\beta_2} \dotplus \cdots \dotplus W^{*\beta_t} \right].$$

Falls K Primzahlcharakteristik p hat, kann man W^* in $K(\delta^*)$ realisieren ([1] Theorem 1.4) und die β_i $(i = 1, \ldots, t)$ so wählen, daß sie die Gruppe $\mathrm{Gal}(K(\delta^*) \mid K)$ durchlaufen. Vergleichen wir nun die Zerlegung von $S^E|_N$ mit der Zerlegung von R über E und berücksichtigen dabei Lemma 2, dann erhalten wir sofort: $S|_N \sim R$.

Für den Fall, daß K Charakteristik 0 hat, bekommen wir dasselbe Ergebnis, indem wir zu Charakteren übergehen und ebenfalls Lemma 2 anwenden. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Als Anwendung dieses Ergebnisses zeigen wir nun:

Satz 3. *Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper der Charakteristik* 0. *Wenn der Grad jeder nichtlinearen, irreduziblen K-Darstellung von G durch die Primzahl p teilbar ist, hat G ein normales p-Komplement.*

Für $K = \mathbb{C}$ wurde dieser Satz von John G. Thompson bewiesen [7]. Nun bauen sich die Grade der irreduziblen K-Darstellungen aus den Graden irreduzibler $\mathbb{C}$-Darstellungen folgendermaßen auf:

$$\operatorname{Grad} R = \operatorname{Grad} W \cdot m_K(W) \cdot (K(\delta) : K)$$

(R eine irreduzible K-Darstellung, W eine irreduzible $\mathbb{C}$-Darstellung mit Charakter δ). Da $(K(\delta) : K)$ Primteiler enthalten kann, die nicht in Grad W aufgehen, ist Satz 3 tatsächlich eine Verschärfung des Ergebnisses von Thompson. Man konstruiert sich leicht einfache Beispiele für Gruppen, wo zwar alle nichtlinearen, irreduziblen $\mathbb{Q}$-Darstellungen durch p teilbare Grade haben, aber nicht alle irreduziblen, nichtlinearen $\mathbb{C}$-Darstellungen.

Beweis von Satz 3. Sei $H = O^p(G)$ der minimale Normalteiler von G mit p-Faktorgruppe und P eine p-Sylowgruppe von G. Wir nehmen an

$$Q := H \cap P \neq \{1\}.$$

Dann ist $L := Q/[P, Q] \neq \{1\}$ ([5] Seite 262), und L hat einen Normalteiler U vom Index p. Vermöge der Isomorphie $L/U \cong \langle \sqrt[p]{1} \rangle$ erhalten wir einen nichttrivialen, linearen Charakter β von $Q/[P, Q]$ mit $K(\beta) = K(\sqrt[p]{1})$.

Sei χ der Charakter einer irreduziblen K-Darstellung von Q mit β als absolut irreduziblem Bestandteil. Da $m_K(\beta)$ ein Teiler von $\beta(1)$ ist, gilt: $\chi(1) = (K(\sqrt[p]{1}) : K)$. Also haben wir $p \nmid \chi(1)$ und somit $p \nmid \chi^H(1)$, denn Q ist eine p-Sylowgruppe von H.

Die Tatsache, daß β invariant bezüglich P ist, impliziert, daß auch χ und χ^H invariant bezüglich P sind. Deshalb operiert P als Permutationsgruppe auf den irreduziblen Bestandteilen (über K) von χ^H. Die Bahnen haben dabei p-Potenzlänge, so daß ein P-invarianter Bestandteil θ existieren muß, dessen Grad nicht von p geteilt wird.

Wäre θ linear, dann hätten wir $\theta|_Q = 1_Q$, denn Q ist eine Untergruppe von H'. Daraus folgte:

$$(\chi, 1_Q)_Q = (\chi, \theta|_Q)_Q = (\chi^H, \theta)_H \neq 0,$$

ein Widerspruch zu der Tatsache $\beta \neq 1_Q$.

Vermöge Satz 2 können wir θ auf G fortsetzen zu einem nichtlinearen, irreduziblen Charakter einer K-Darstellung von G, deren Grad nicht von p geteilt wird, was den Voraussetzungen von Satz 3 widerspricht. Damit haben wir bewiesen, daß $Q = \{1\}$ sein muß, also enthält G ein normales p-Komplement.

Ich danke Herrn Dr. H. Pahlings und Herrn Prof. Dr. G. Michler für hilfreiche Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

[1] B. Fein, Representations of direct products of finite groups. Pacific J. Math. **20**, 45—58 (1967).
[2] B. Fein, Extensions of group representations over fields of prime characteristic. Proc. Amer. Math. Soc. **23**, 11—13 (1969).
[3] P. X. Gallagher, Group characters and normal Hall subgroups. Nagoya Math. J. **21**, 223—230 (1962).
[4] G. Glaubermann, Correspondences of characters for relatively prime operator groups. Canad. J. Math. **20**, 1465—1488 (1968).

[5] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I. Berlin 1967.
[6] I. M. ISAACS, Extensions of group representations over non-algebraically closed fields. Trans. Amer. Math. Soc. **141**, 211—228 (1969).
[7] J. G. THOMPSON, Normal p-Complements and Irreducible Characters. J. Algebra **14**, 129—134 (1970).

Eingegangen am 5. 6. 1975

Anschrift des Autors:

Heinz E. Becker
Mathematisches Institut der Universität Gießen
Arndstraße 2
63 Gießen