Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 23, S. 273–282 (1977)

ENTSCHEIDBARKEIT DER THEORIE DER LINEAREN ORDNUNG IN L_{Q_1}

von H. HERRE und H. WOLTER in Berlin (DDR)

1. Einleitung

In [1] zeigte A. EHRENFEUCHT die Entscheidbarkeit der elementaren Theorie der linearen Ordnung. H. LÄUCHLI und J. LEONARD erhielten in [3] mit anderen Methoden das gleiche Ergebnis. Später zeigten LÄUCHLI [2] und M. RABIN [5], daß die Theorie der linearen Ordnung sogar in der monadischen schwachen Logik bzw. die der abzählbaren Modelle in der monadischen Logik 2. Stufe entscheidbar ist. S. SHELAH bewies in [6] die Unentscheidbarkeit der Theorie der Ordnung der reellen Zahlen in der 2. Stufe und damit auch die Unentscheidbarkeit der Theorie aller geordneten Mengen in dieser Logik.

Es erhebt sich nun die Frage, ob die Klasse der geordneten Mengen in den Logiken L_Q eine entscheidbare Theorie besitzt, wobei L eine elementare Logik mit einem zweistelligen Relationenzeichen für die Ordnung ist und L_Q aus L durch Hinzunahme eines Mächtigkeitsquantors Q entsteht.

Für $Q = Q_0$ (*es gibt unendlich viele, so daß ...*) folgt die Entscheidbarkeit aus den Ergebnissen in [2], denn in der schwachen Logik 2. Stufe ist Q_0 durch

$$Q_0 x\, \varphi(x) \leftrightarrow \exists X\, \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

definierbar, wobei $\varphi(x)$ ein elementarer Ausdruck und X eine Mengenvariable ist.

Für $Q = Q_1$ wird die Frage der Entscheidbarkeit in der vorliegenden Arbeit positiv beantwortet.

Die Beweisidee entspricht im wesentlichen der in [3]. Mit Hilfe gewisser Erzeugungsregeln wird eine rekursiv aufzählbare Menge M von Ordnungstypen gebildet, deren L_{Q_1}-Theorien rekursiv aufzählbar sind. Unter Verwendung von spieltheoretischen Methoden wird gezeigt, daß M in der Klasse aller geordneten Mengen bzgl. L_{Q_1} *dicht* liegt, d. h., daß eine in einer geordneten Menge erfüllbare Aussage schon in einem Element aus M erfüllt wird. Aus der Vollständigkeit von L_{Q_1} erhält man schließlich die Entscheidbarkeit der in Frage stehenden Theorie.

Die in [3] verwendeten Methoden und Ergebnisse müssen für das vorliegende Problem auf Grund der stärkeren Ausdrucksfähigkeit von L_{Q_1} an vielen Stellen stark modifiziert und verfeinert werden (vgl. [7]).

Für die metatheoretischen Betrachtungen setzen wir die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Kontinuumhypothese[1]) voraus, unabhängig davon, ob alle Axiome wirklich benötigt werden. *Kardinalzahlen* seien ordinale Anfangszahlen.

[1]) Wir benötigen nur, daß eine geordnete Menge A der Mächtigkeit ω_1 existiert, so daß auch jedes Teilintervall von A die Mächtigkeit ω_1 besitzt und daß es eine abzählbare in A dicht liegende Teilmenge gibt.

Wir wollen jetzt eine Reihe grundlegender Bezeichnungen und Definitionen angeben. Im folgenden seien A, B, C, D, S geordnete Mengen, α, β, γ Ordnungstypen und m, n, k, l, i, j natürliche Zahlen. Mit $\omega, \omega^*, \eta, \lambda, \omega_1, \omega_1^*$ bezeichnen wir der Reihe nach die Ordnungstypen der natürlichen Zahlen, der negativen ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen, der abzählbaren Ordinalzahlen, den dazu inversen Ordnungstyp. $+$ und $\cdot$ stehen für Addition und Multiplikation von Ordnungstypen.

Ist A eine geordnete Menge, $S \subseteqq A$ und $S \neq \emptyset$, dann heißt S *Segment* von A, falls für jedes $a, b \in S$ das abgeschlossene Intervall $\langle a, b\rangle$ eine Teilmenge von S ist. S heißt *beschränkt in* A, wenn S in einem abgeschlossenen Intervall von A enthalten ist. Für $a \in A$ heißen $A^{<a} = \{x \in A : x < a\}$ bzw. $A^{>a} = \{x \in A : x > a\}$ *Anfangs-* bzw. *Endstück* von A. A^* heißt *Zerlegung* (oder *splitting*) von A, wenn A^* eine geordnete Menge von paarweise disjunkten Segmenten von A ist, so daß jedes $a \in A$ einem Segment $S \in A^*$ angehört und $S \overset{*}{<} S'$, falls $x < y$ für jedes $x \in S$ und $y \in S'$, wobei $\overset{*}{<}$ die Ordnungsrelation in A^* ist. Die Elemente aus A^* heißen *Komponenten der Zerlegung.*

Im folgenden schreiben wir für den Quantor Q_1 einfach Q. Für geordnete Mengen A, B wird jetzt induktiv eine Relation $\sim_n^{\mathsf{Q}}$ eingeführt.

$A \sim_0^{\mathsf{Q}} B$, wenn A und B beliebig (auch leer) sind.

$A \sim_{n+1}^{\mathsf{Q}} B$, wenn (1) für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ und für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ existiert, so daß $A^{<a} \sim_n^{\mathsf{Q}} B^{<b}$ und $A^{>a} \sim_n^{\mathsf{Q}} B^{>b}$ und wenn

(2) für jedes $X \subseteqq A$ mit $\operatorname{card}(X) = \omega_1$ ein $Y \subseteqq B$ mit $\operatorname{card}(Y) = \omega_1$ existiert, so daß für jedes $b \in Y$ ein $a \in X$ existiert, so daß $A^{<a} \sim_n^{\mathsf{Q}} B^{<b}$ und $A^{>a} \sim_n^{\mathsf{Q}} B^{>b}$ und wenn für jedes solche $Y \subseteqq B$ ein entsprechendes $X \subseteqq A$ existiert mit den geforderten Eigenschaften

$\sim_n^{\mathsf{Q}}$ erweist sich als Äquivalenzrelation, für die es nur endlich viele Äquivalenzklassen gibt. Wenn $A \sim_n^{\mathsf{Q}} B$, dann nennen wir A und B *n-äquivalent.* Da die Isomorphie zweier Modelle ihre n-Äquivalenz nach sich zieht, genügt es für die folgenden Untersuchungen, Ordnungstypen anstelle von geordneten Mengen zu betrachten.

Für A, B gelte weiterhin: $A \equiv B$ bzw. $A \equiv_n B$, falls in A und B die gleichen Aussagen aus L bzw. die gleichen Aussagen mit höchstens n Quantoren gültig sind. Analog seien $A \equiv^{\mathsf{Q}} B$ und $A \equiv_n^{\mathsf{Q}} B$ für L_{Q} definiert. Wenn $A \equiv B$ bzw. $A \equiv^{\mathsf{Q}} B$, dann heißen A und B *elementaräquivalent* bzw. L_{Q}*-äquivalent.*

2. Definition der Menge M

Zunächst soll eine zweistellige Funktion σ (*shuffling function*) definiert werden, die auf endliche Folgen von Ordnungstypen operiert. Dazu sei λ_1^1 die Menge der irrationalen Zahlen, und für jedes m seien $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_m^m$ überabzählbare Teilmengen von λ_1^1, so daß $\bigcup_{i=1}^{m} \lambda_i^m = \lambda_1^1$ und für jedes $i, j = 1, \ldots, m$ ist $\lambda_i^m \cap \lambda_j^m = \emptyset$, falls $i \neq j$, und zwischen je zwei Elementen aus λ_i^m liegen ω_1 viele Elemente aus λ_j^m.[1])

[1]) Wir wählen manchmal für geordnete Mengen und für die entsprechenden Elementmengen (ohne Ordnung) gleiche Bezeichnungen, was aber nicht zu Verwechslungen führen wird.

η_1^1 sei die Menge der rationalen Zahlen. Analog wie oben definieren wir Teilmengen $\eta_1^n, \ldots, \eta_n^n$ von η_1^1, so daß $\bigcup_{i=1}^{n} \eta_i^n = \eta_1^1$ und für jedes $i, j = 1, \ldots, n$ ist $\eta_i^n \cap \eta_j^n = \emptyset$, falls $i \neq j$, und zwischen je zwei Elementen aus η_i^n liegt ein Element aus η_j^n.

Man überlegt sich leicht, daß es für jedes m, n solche Mengen gibt und daß auf Grund der Kontinuumhypothese[1]) alle λ_i^m die Mächtigkeit ω_1 haben. Wegen $\lambda = \lambda_1^1 \cup \eta_1^1$ liegen dann zwischen je zwei Elementen aus λ genau ω Elemente aus η_i^n $(i = 1, \ldots, n)$ und ω_1 viele Elemente aus λ_i^m $(i = 1, \ldots, m)$.

Für die folgenden Untersuchungen seien λ_i^m, η_j^n fest gewählt. Sind $F_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $F_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ endliche Folgen von Ordnungstypen, dann ist $\sigma(F_1, F_2)$ ein Ordnungstyp, der aus λ entsteht, indem jedes Element x aus λ ersetzt wird durch α_i bzw. β_j, je nachdem ob $x \in \lambda_i^m$ oder $x \in \eta_j^n$. Sind F_1 bzw. F_2 Folgen der Länge 0, dann werden in λ die Elemente aus λ_1^1 bzw. aus η_1^1 gestrichen und nur die restlichen Elemente durch die entsprechenden Ordnungstypen ersetzt. Im folgenden wollen wir voraussetzen, daß wenigstens eine der Folgen F_1, F_2 eine positive Länge besitzt. Ist F_1 von der Länge 0, dann ist $\sigma(F_1, F_2)$ offenbar die in [3] angegebene shuffling-Funktion. Aus $\sigma(F_1, F_2)$ erhält man in kanonischer Weise eine Zerlegung, deren Komponenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sind.

Mit Hilfe der σ-Funktion und gewisser anderer Operationen bilden wir die folgende Menge M. Es sei M die kleinste Menge aller Ordnungstypen, die 1 enthält und die abgeschlossen ist bzgl. der Operationen $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \omega$, $\alpha \cdot \omega^*$, $\alpha \cdot \omega_1$, $\alpha \cdot \omega_1^*$, $\sigma(F_1, F_2)$, wobei $\alpha, \beta \in M$ und F_1, F_2 endliche Folgen aus M sind.

In den nachfolgenden Untersuchungen wird gezeigt, daß jede geordnete Menge n-äquivalent ist zu einem $\alpha \in M$. Hierzu benötigen wir eine Reihe bekannter bzw. leicht zu beweisender Hilfssätze.

3. Beziehungen zwischen $\sim_n^Q$ und $\equiv_n^Q$

Es sei $\Sigma_{n,l}$ für $l \leqq n$ die Menge aller Ausdrücke aus L_Q der Gestalt $\mathsf{q}_{l+1}x_{l+1} \ldots \mathsf{q}_n x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wobei φ quantorenfrei ist und genau die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält und $\mathsf{q}_i \in \{\exists, \forall, Q, \neg Q\}$. $x_1, \ldots, x_l$ sind also in jedem Ausdruck aus $\Sigma_{n,l}$ frei.

Lemma 1. *Für geordnete Mengen A, B gilt:*

(1) *Für $l \leqq n$ und $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_l) \in A^l$, $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_l) \in B^l$ mit $a_1 < \ldots < a_l$, $b_1 < \ldots < b_l$ und für $\varphi \in \Sigma_{n,l}$ gilt: Wenn $A^{<a_1} \sim_{n-l}^Q B^{<b_1}$ und $(A^{>a_i})^{<a_{i+1}} \sim_{n-l}^Q (B^{>b_i})^{<b_{i+1}}$ für $i = 1, \ldots, l-1$ und $A^{>a_l} \sim_{n-l}^Q B^{>b_l}$, so $A \models \varphi(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow B \models \varphi(\mathfrak{b})$.*

(2) *Wenn $A \sim_n^Q B$, so $A \equiv_n^Q B$.*

(3) *Für jedes n gibt es ein m, so daß gilt: Wenn $A \equiv_m^Q B$, so $A \sim_n^Q B$.*

(3) ist allgemeiner für beliebige Relationalstrukturen endlicher Signatur richtig, wenn nur die Relation $\sim_n^Q$ etwas modifiziert wird ($\sim_n^Q$ ergibt sich dann als Spezialfall, vgl. [4] und [8]).

(1) beweist man leicht induktiv über $n - l$. (2) folgt aus (1).

---

[1]) Nur zum Nachweis der Existenz solcher Mengen λ_i^m, η_j^m haben wir die Kontinuumhypothese vorausgesetzt.

Lemma 2. *Für jedes n gibt es in der Klasse der geordneten Mengen höchstens endlich viele Äquivalenzklassen bzgl.* $\sim_n^{\mathrm{Q}}$.

Dieses Lemma gilt wiederum für beliebige Relationalstrukturen endlicher Signatur (vgl. [4] und [8]).

Lemma 3. *Es seien A^*, B^* isomorphe Zerlegungen von A bzw. B, und f sei ein Isomorphismus von A^* auf B^*. Dann gilt:*

(1) *Wenn* $S \sim_n^{\mathrm{Q}} f(S)$ *für jedes* $S \in A^*$, *so* $A \sim_n^{\mathrm{Q}} B$.

(2) *Wenn* $S \sim_n^{\mathrm{Q}} f(S)$ *für jedes* $S \in A^*$ *und jedes* n, *so* $A \equiv^{\mathrm{Q}} B$.

(1) beweist man leicht induktiv über n. Da dieser Beweis eine einfache Verallgemeinerung des entsprechenden elementaren Falls ist, soll er hier weggelassen werden (vgl. Lemma 3 in [3]). (2) folgt aus (1) und Lemma 1(2).

Lemma 4. *Die Relationen* $\sim_n^{\mathrm{Q}}$ *und* $\equiv^{\mathrm{Q}}$ *sind verträglich mit den Operationen* $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \omega$, $\alpha \cdot \omega^*$, $\alpha \cdot \omega_1$, $\alpha \cdot \omega_1^*$, $\sigma(F_1, F_2)$, *wobei* $\alpha, \beta \in M$ *und* F_1, F_2 *endliche Folgen aus* M *sind.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 3.

4. Die rekursive Aufzählbarkeit der in M erfüllbaren Aussagen aus $\mathrm{L_Q}$

Jedem Element $\alpha \in M$ wird jetzt eine natürliche Zahl $r(\alpha)$ (der *Rang* von α) zugeordnet. Es sei $M_0 = \{1\}$ und $M_{n+1} = M_n \cup \{\alpha$: Es gibt Elemente β, γ und endliche Folgen F_1, F_2 in M_n, so daß α einer der folgenden Ordnungstypen ist: $\beta + \gamma$, $\gamma + \beta$, $\beta \cdot \omega$, $\beta \cdot \omega^*$, $\beta \cdot \omega_1$, $\beta \cdot \omega_1^*$, $\sigma(F_1, F_2)\}$.

$$r(\alpha) = \min \{n : \alpha \in M_n\}.$$

Es ist klar, daß jedes $\alpha \in M$ einen Rang besitzt, daß jede natürliche Zahl als Rang auftritt und daß es zu jedem k nur endlich viele Elemente aus M mit dem Rang k gibt.

Für Elemente $\alpha, \beta \in M$ führen wir jetzt eine Relation $<\cdot$ ein: $\beta <\cdot\, \alpha$, falls ein $\gamma \in M$ und endliche Folgen $F_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $F_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ in M existieren, so daß β in F_1 oder F_2 vorkommt und α einer der Ordnungstypen $\beta + \gamma$, $\gamma + \beta$, $\beta \cdot \omega$, $\beta \cdot \omega^*$, $\beta \cdot \omega_1$, $\beta \cdot \omega_1^*$, $\sigma(F_1, F_2)$ ist, wobei $r(\beta), r(\gamma), r(\alpha_i), r(\beta_j) < r(\alpha)$. Aus dieser Definition erhält man leicht, daß $\{\beta : \beta <\cdot\, \alpha\}$ für jedes $\alpha \in M$ endlich ist.[1]

Für jedes $\alpha \in M$ erweitern wir $\mathrm{L_Q}$ durch Hinzunahme der einstelligen Relationenzeichen P_β für $\beta <\cdot\, \alpha$ und durch das zweistellige Relationenzeichen $\sim$. Die so entstandene Sprache wird mit $\mathrm{L_Q}(\alpha)$ bezeichnet.

Induktiv über die Kompliziertheit von α werden jetzt für gewisse $\alpha \in M$ Mengen Σ_α von Aussagen aus $\mathrm{L_Q}(\alpha)$ angegeben.[2] Ist $\alpha = 1$, dann sei $\Sigma_\alpha = \{\forall x \, \forall y (x = y \wedge \wedge\, x \sim x \wedge \neg x < x)\}$. Es sei $\alpha \neq 1$, und jedes $\beta \in \{\gamma : \gamma <\cdot\, \alpha\}$ besitze ein kleinstes Element. Die Menge dieser α sei M_1. Für $\alpha \in M_1$ sei $\Sigma_\alpha = \Sigma \cup \Sigma'_\alpha$, wobei Σ die Axiome der linearen Ordnung für $<$ und die der Äquivalenzrelation für $\sim$ enthält.

[1]) Führt man $<\cdot$ ohne Verwendung des Ranges ein, dann kann man nicht die Endlichkeit von $\{\beta : \beta <\cdot\, \alpha\}$ sichern. Ist z. B. $\alpha = \omega$ und $\gamma = \omega$, dann ist $\alpha = k + \gamma$ für jedes $k < \omega$ und daher $\{\beta : \beta <\cdot\, \alpha\}$ unendlich.

[2]) Die Σ_α sind Erweiterungen der entsprechenden in [3] definierten Mengen. Der besseren Übersicht wegen werden einige Aussagen nicht formalisiert angegeben.

Weiterhin gehören zu Σ:

$\forall x \forall y \forall z(x \sim y \wedge x < z < y \rightarrow x \sim z)$;

„Jedes Element gehört zu genau einem Prädikat P_β für $\beta <\cdot \alpha$, und die P_β sind nicht leer“;

„Wenn $x \sim y$, dann gehören x, y zum gleichen P_β“.

Σ'_α ist wie folgt festgelegt, wobei Ex eine Abkürzung für $\forall y(y \sim x \rightarrow x \leqq y)$ ist, d. h., E trifft auf genau die Anfangselemente der Äquivalenzklassen zu:

(E_1) Wenn $\alpha = \beta + \gamma$ und $\beta, \gamma <\cdot \alpha$, dann enthalte Σ'_α:

„$\sim$ bestimmt eine Zerlegung vom Ordnungstyp 2“;

$\forall x \forall y(x < y \wedge \neg x \sim y \rightarrow P_\beta x \wedge P_\gamma y)$.

(E_2) Wenn $\alpha = \beta \cdot \omega$ und $\beta <\cdot \alpha$, dann enthalte Σ'_α:

„$\sim$ bestimmt eine Zerlegung, deren Ordnungstyp L_Q-äquivalent ist zu ω“.[1]

(E_3) Für $\alpha = \beta \cdot \omega^*$ wird Σ'_α analog zu (E_2) definiert.

(E_4) Wenn $\alpha = \beta \cdot \omega_1$ und $\beta <\cdot \alpha$, dann enthalte Σ'_α:

„$\sim$ bestimmt eine Zerlegung, deren Ordnungstyp L_Q-äquivalent ist zu ω_1“.[1]

(E_5) Für $\alpha = \beta \cdot \omega_1^*$ wird Σ'_α analog zu (E_4) definiert.

(E_6) Wenn $\alpha = \sigma(F_1, F_2)$ und $F_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $F_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ und $\alpha_i, \beta_j <\cdot \alpha$, dann enthalte Σ'_α:

„$\sim$ bestimmt eine dicht geordnete Zerlegung ohne erstes und letztes Element“;

„Jede Äquivalenzklasse besitzt ein erstes Element“;

$$\forall x \forall y(x < y \wedge \neg x \sim y \rightarrow \bigwedge_{\gamma \in F_1 \cup F_2} \exists z(Ez \wedge x < z < y \wedge P_\gamma z));^{2)}$$

$$\forall x \forall y(x < y \wedge \neg x \sim y \rightarrow \bigwedge_{\gamma \in F_1} Qz(Ez \wedge x < z < y \wedge P_\gamma z) \wedge \bigwedge_{\gamma \in F_2} \neg Qz((Ez \wedge x < z < y \wedge P_\gamma z)).$$

Für alle $\alpha \in M_1$ ist damit eine Menge Σ_α von Aussagen aus $L_Q(\alpha)$ definiert. Ist φ eine Aussage aus L_Q und $\beta \in M$, dann sei $\varphi_\beta = \forall x(P_\beta x \rightarrow \tilde{\varphi})$, wobei $\tilde{\varphi}$ aus φ durch Relativierung aller Variablen von φ auf das Prädikat „$\ldots \sim x$“ entsteht.

Weiterhin sei $\Gamma_\alpha = \{\varphi_\beta : \varphi \in L_Q,\ \beta <\cdot \alpha \text{ und } \beta \models \varphi\}$ und T_α schließlich die Folgerungsmenge von $\Sigma_\alpha \cup \Gamma_\alpha$ für $\alpha \in M_1$. Ist A eine geordnete Menge und $\mathscr{A} = \langle A; \sim, P_{\gamma_1}, \ldots, P_{\gamma_l}\rangle$ mit $\gamma_i <\cdot \alpha$, dann heißt $\mathscr{A}$ *Erweiterung* von A.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß $\mathrm{Th}(\alpha) = \{\varphi \in L_Q : \alpha \models \varphi\}$ für jedes $\alpha \in M$ rekursiv aufzählbar ist. Dazu werden noch einige Hilfssätze benötigt.

Lemma 5. (1) *Ist* $\alpha \in M_1$ *und* $\mathscr{A} \models T_\alpha$ *und* φ *eine Aussage aus* L_Q, *dann ist* $\mathscr{A} \models \varphi \Leftrightarrow A \models \varphi$.

[1]) Dies läßt sich mit Hilfe von E ausdrücken.

[2]) Ist $F'_1 = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$ und $F'_2 = (\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$ und $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m\}$ und $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} = \{\beta'_1, \ldots, \beta'_n\}$, dann zeigt man leicht induktiv über k: $\sigma(F_1, F_2) \sim_k^Q \sigma(F'_1, F'_2)$ für jedes k. Deshalb können F_1, F_2 im folgenden als Mengen aufgefaßt werden.

(2) *Für jede geordnete Menge A vom Ordnungstyp $\alpha \in M_1$ gibt es eine Erweiterung $\mathscr{A}$, so daß $\mathscr{A} \models T_\alpha$.*

Beweis. (1) ist trivial. (2) ist für $\mathrm{card}(A) = 1$ trivial. Anderenfalls besitzt A eine Zerlegung A^* entsprechend der Bildung des Ordnungstyps $\alpha \in M_1$, so daß die Elemente von A^* Ordnungstypen γ mit $\gamma <\cdot\, \alpha$ besitzen. $\sim$ wird als Äquivalenzrelation auf A interpretiert, so daß durch $\sim$ die Zerlegung A^* definiert wird und die Äquivalenzklassen mit den Elementen aus A^* übereinstimmen. P_γ soll auf genau die Elemente der γ-Komponenten in A zutreffen. Die so erhaltene Relationalstruktur $\mathscr{A}$ ist offenbar ein Modell von T_α. q. e. d.

Lemma 6. *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

(1) *A, B sind geordnete Mengen und A^*, B^* Zerlegungen von A bzw. B und $\sim_A, \sim_B$ Äquivalenzrelationen in A bzw. B, durch welche die Zerlegungen mit den Ordnungsrelationen $<_A, <_B$ definiert werden.*

(2) *$P_1^A, \ldots, P_l^A$ bzw. $P_1^B, \ldots, P_l^B$ sind einstellige Prädikate in A^* bzw. B^*, so daß jedes Element aus A^* bzw. B^* zu genau einem der P_i^A bzw. P_i^B gehört.*

(3) *Jedes Element aus $A^* \cap P_i^A$ ist k-äquivalent zu jedem Element aus $B^* \cap P_i^B$, $i = 1, \ldots, l$.*

Dann gilt: Wenn $\mathscr{A}^* = \langle A^*; <_A, P_1^A, \ldots, P_l^A\rangle \sim_k^{\mathrm{Q}} \langle B^*; <_B, P_1^B, \ldots, P_l^B\rangle = \mathscr{B}^*$, dann ist $A \sim_k^{\mathrm{Q}} B$ und damit auch $A \equiv_k^{\mathrm{Q}} B$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht spieltheoretisch (Lipner-Vinner-Spiel, vgl. [4] und [8]). Denn nach Voraussetzung besitzt Spieler II in dem k-rundigen Spiel $\Gamma_k(\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*)$ eine Gewinnstrategie, mit deren Hilfe man leicht eine Gewinnstrategie für II in $\Gamma_k(A, B)$ konstruieren kann. q. e. d.

Lemma 7. *Ist $\alpha \in M_1$ und sind $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ Modelle von T_α, dann ist $A \equiv^{\mathrm{Q}} B$.*

Beweis. Für $A, B, A^*, B^*, P_i^A, P_i^B$ gelten die Voraussetzungen von Lemma 6. Auf Grund der Eigenschaften $(\mathrm{E}_1)-(\mathrm{E}_6)$ ist $\mathscr{A}^* \equiv^{\mathrm{Q}} \mathscr{B}^*$ und daher $\mathscr{A}^* \sim_k^{\mathrm{Q}} \mathscr{B}^*$ für jedes k. Folglich ist $A \equiv_k^{\mathrm{Q}} B$. q. e. d.

Korollar 8. *Ist $\alpha \in M_1$ und φ eine Aussage aus L_{Q}, dann ist $\varphi \in T_\alpha \Leftrightarrow \alpha \models \varphi$.*

Beweis. Es sei φ aus L_{Q}, A eine geordnete Menge des Ordnungstyps α und $\mathscr{A}$ eine Erweiterung von A, so daß $\mathscr{A} \models T_\alpha$ (A und $\mathscr{A}$ existieren nach Lemma 5(2)). Es sei zunächst $\varphi \in T_\alpha$. Nach Lemma 5(1) ist dann $A \models \varphi$, also $\alpha \models \varphi$. Es sei jetzt umgekehrt $\alpha \models \varphi$ und angenommen $\varphi \notin T_\alpha$. Da T_α eine Folgerungsmenge ist, gibt es ein Modell $\mathscr{B}$ von T_α mit $\mathscr{B} \models \neg\varphi$, also $B \models \neg\varphi$. Nach Lemma 7 ist dann $B \models \neg\varphi$ für jedes Modell $\mathscr{B}$ von T_α. Wegen $\alpha \models \varphi$ ist auch $A \models \varphi$. Nach Voraussetzung ist $\mathscr{A} \models T_\alpha$ und nach Lemma 5(1) ist $\mathscr{A} \models \varphi$. Widerspruch! q. e. d.

Lemma 9. *Für jedes $\alpha \in M$ ist* $\mathrm{Th}(\alpha)$ *rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Der Beweis wird induktiv über den Rang von α geführt. Der Fall $r(\alpha) = 0$ ist trivial. Für $r(\alpha) \leqq n$ gelte die Behauptung schon, und es sei jetzt $r(\alpha) = n + 1$. Dann ist $r(\gamma) \leqq n$ für jedes $\gamma <\cdot\, \alpha$. Folglich ist $\mathrm{Th}(\gamma)$ rekursiv aufzählbar und damit auch $\mathrm{Th}(1 + \gamma)$. Es sei $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ die Menge der Ordnungstypen in M mit $\gamma_i <\cdot\, \alpha$, also $r(\gamma_i) \leqq n$. Weiterhin sei $\gamma_i' = 1 + \gamma_i$ und α' mit Hilfe der γ_i' analog wie α definiert. Dann ist $\alpha' \in M_1$. Da L_{Q} vollständig (vgl. H. J. Keisler [9]) und

$\Sigma'_{\alpha'} \cup \Gamma_{\alpha'}$ rekursiv aufzählbar ist, sind $T_{\alpha'}$ und (nach Korollar 8) Th(α') rekursiv aufzählbar. Ist $\varphi \in L_Q$ und rel φ die Relativierte von φ auf $\neg E$, also auf die Elemente, die nicht Anfangselement einer Äquivalenzklasse sind, dann gilt offenbar: $\alpha \models \varphi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha' \models \text{rel}\, \varphi$. Folglich ist Th($\alpha$) rekursiv aufzählbar. q. e. d.

Theorem 10. *Die Menge der in Modellen aus M erfüllbaren Aussagen aus* L_Q *ist rekursiv aufzählbar.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 9 und der Tatsache, daß M rekursiv aufzählbar ist.

5. Die Entscheidbarkeit der Theorie der geordneten Mengen in L_Q

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die Aussagen, die in geordneten Mengen erfüllbar sind, schon in einem Modell aus M erfüllt werden. Wir wollen also zeigen, daß M in der Modellklasse der geordneten Mengen dicht liegt, woraus dann die Entscheidbarkeit folgt. Dazu sei k eine für den ganzen Abschnitt fest gewählte natürliche Zahl.

Eine geordnete Menge A (bzw. ein Ordnungstyp α) heißt *zulässig*, wenn es ein $\beta \in M$ gibt, so daß $A \sim_k^Q \beta$ (bzw. $\alpha \sim_k^Q \beta$).

Lemma 11. *Die Klasse der zulässigen Ordnungstypen ist abgeschlossen bezüglich der Operationen $\beta + \gamma$, $\beta \cdot \omega$, $\beta \cdot \omega^*$, $\beta \cdot \omega_1$, $\beta \cdot \omega_1^*$, $\sigma(F_1, F_2)$.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 4.

Lemma 12.[1]) *Ist A eine geordnete Menge des Konfinalitätstyps* cf(A) $= \omega_1$ *mit erstem Element und n eine natürliche Zahl, dann gibt es Elemente $a, b \in A$, so daß $A \equiv_n^Q A^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot (\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \omega_1)$.*

Beweis. Es sei $m < \omega$ und $(a_\nu)_{\nu<\omega_1}$ eine in A konfinale echt monoton wachsende Folge und $I_\nu = \{a \in A : a_{\nu-1} < a \leqq a_\nu\}$, falls ν eine Nachfolgerzahl ist und es sei $I_\nu = \{a \in A :$ für jedes $\mu < \nu$ ist $a_\mu < a \leqq a_\nu\}$, falls ν keine Nachfolgerzahl ist. Nach Lemma 2 gibt es unter den I_ν bis auf m-Äquivalenz nur endlich viele; es seien dies $I_{\nu_1}, \ldots, I_{\nu_l}$. Es sei A^* eine (durch die Segmente definierte) Zerlegung von A und $\mathscr{A}^* = \langle A^* : <^*, P_1^*, \ldots, P_l^*\rangle$, wobei $<^*$ die Ordnung in A^* ist und P_i^* auf genau die Elemente aus A^* zutrifft, die mit I_{ν_i} m-äquivalent sind. A^* besitzt den Ordnungstyp ω_1. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski (für die $\mathscr{A}^*$ entsprechende elementare Sprache) gibt es ein abzählbares elementares Teilmodell $\mathscr{B}^* = \langle B'; <', P_1', \ldots, P_l'\rangle$ von $\mathscr{A}^*$, wobei B' ein Anfangsstück von A^* ist und $<'$, P_i' die Einschränkungen von $<^*$, P_i^* auf B' sind. Offenbar ist $B = \langle \bigcup B'; <\rangle$ ein Anfangsstück von A, wobei die Ordnung von B die Einschränkung der Ordnung von A auf $\bigcup B'$ ist und cf(B) $= \omega$. Für die Theorie der Ordnung definieren wir jetzt einen neuen Quantor q: $\mathsf{q}x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Q}x(x < y \wedge \varphi(x))$. $\mathsf{q}x\varphi(x)$ ist in einer geordneten Menge A_1 erfüllt, wenn es schon eine überabzählbare nicht-konfinale Teilmenge $X \subseteqq A_1$ gibt, so daß jedes Element aus X den Ausdruck $\varphi(x)$ erfüllt. Für die Sprache L_{q} läßt sich sehr einfach das Lipner-Vinner-Spiel verallgemeinern (indem nur nicht-konfinale überabzählbare Mengen gewählt werden), so daß gilt: Wenn $A_1 \sim_m^{\mathsf{q}} A_2$, so $A_1 \equiv_m^{\mathsf{q}} A_2$. Spieltheoretisch zeigt man leicht, daß $A \sim_m^{\mathsf{q}} B$. Denn wählt Spieler I z. B. eine überabzählbare nicht-

---

[1]) Dieses Lemma ist unabhängig hiervon auch von H. P. Tuschik [10] bewiesen worden. Der dort vorgelegte Beweis ist komplizierter und von dem hier gegebenen grundlegend verschieden.

konfinale Menge $X \subseteqq A$, dann gehört schon eine überabzählbare Teilmenge X' einem der Segmente I_ν an. Also $X' \subseteqq a^*$ für ein $a^* \in A^*$. Spieler II wählt in B^* nach seiner Gewinnstrategie im Ehrenfeuchtspiel $\Gamma_m(\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*)$ ein b^* und in b^* eine überabzählbare Menge Y' (entsprechend der m-Äquivalenz von a^* und b^*). Wählt I ein $b \in Y'$, dann wählt II ein geeignetes $a \in X'$. Analog verlaufen auch die anderen Runden. Wegen $\mathrm{cf}(B) = \omega$ läßt sich B mit Hilfe des RAMSEYschen Theorems (analog wie in [3] Lemma 8) m-äquivalent ersetzen: $B \sim_m^{\mathsf{Q}} B^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot \omega$, wobei $B^{<a} = A^{<a}$ und $\langle a, b\rangle$ ein beschränktes Segment von A ist. Dann gilt offenbar auch $B \sim_m^{\mathsf{q}} A^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot \omega$. Wegen $\omega \equiv \omega + (\omega^* + \omega) \cdot \omega_1 = \Omega$ besitzt Spieler II in dem Ehrenfeuchtspiel $\Gamma_m(\omega, \Omega)$ eine Gewinnstrategie. Hieraus erhält man leicht mit Hilfe des Lipner-Vinner-Spiels für L_{q}, daß $A^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot \omega \sim_m^{\mathsf{q}} A^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot \Omega = A_1$. Also $A \sim_m^{\mathsf{q}} A_1$ und daher $A \equiv_m^{\mathsf{q}} A_1$. In geordneten Mengen des Konfinalitätstyps ω_1 ist Q mit Hilfe von q durch $\mathsf{Q}x\varphi(x) \leftrightarrow \mathsf{q}x\varphi(x) \vee \forall y\, \exists x(x > y \wedge \varphi(x))$ definierbar. Für $m = 3n$ ist dann $A \equiv_m^{\mathsf{q}} A_1$. q. e. d.

Korollar 13. *Ist* $\mathrm{cf}^*(A) = \omega_1^*$ *und besitzt* A *ein letztes Element, dann gilt Lemma* 12 *entsprechend.*

Lemma 14. *Ist* $\mathrm{cf}(A) \leqq \omega_1$ *und jedes beschränkte Segment von* A *zulässig, dann ist* A *zulässig.*

Beweis. Wir nehmen an, daß A ein erstes, aber kein letztes Element besitzt. (Wenn $\mathrm{cf}(A) < \omega$, dann folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 11 bzgl. Addition.) Hat A ein letztes, aber kein erstes Element, dann verläuft der Beweis analog. Besitzt A kein erstes und letztes Element, dann sei $A = B + C + D$, wobei B ein letztes, D ein erstes Element besitzt und C als beschränktes Segment von A zulässig ist. Hieraus erhält man dann die Behauptung. Wir nehmen folgende Fallunterscheidung vor.

1. $\mathrm{cf}(A) = \omega$. Dann gibt es (analog wie in [3], Lemma 8) Elemente $a, b \in A$, so daß $A \sim_k^{\mathsf{Q}} A^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot \omega$. Da $A^{<a}$ und $\langle a, b\rangle$ nach Voraussetzung zulässig sind, ist nach Lemma 11 auch A zulässig.

2. $\mathrm{cf}(A) = \omega_1$. Nach Lemma 12 existieren Elemente $a, b \in A$, so daß $A \equiv_n^{\mathsf{Q}} A^{<a} + \langle a, b\rangle \cdot (\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \omega_1) = A_1$, wobei $A^{<a}$ und $\langle a, b\rangle$ nach Voraussetzung zulässig sind. Wählt man n hinreichend groß (vgl. Lemma 1(3)), dann ist $A \sim_k^{\mathsf{Q}} A_1$ und damit A zulässig. q. e. d.

Theorem 15. *Jede geordnete Menge* A *ist zulässig.*

Beweis. Da für L_{Q} der absteigende Satz von LÖWENHEIM-SKOLEM (bis zu ω_1) gilt, können wir uns auf Mengen mit $\mathrm{card}(A) \leqq \omega_1$ und damit auch $\mathrm{cf}(A) \leqq \omega_1$ beschränken. Für $a, b \in A$ gelte: $a \sim b$, wenn jedes Segment von $\langle a, b\rangle$ (bzw. von $\langle b, a\rangle$, falls $b \leqq a$) zulässig ist. Dann erhält man:

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in A mit der Zerlegungseigenschaft (nach Lemma 11 bezüglich Addition).

2. Ist a^* eine Äquivalenzklasse, dann ist jedes Segment von a^* und damit auch a^* zulässig (nach Lemma 14).

3. Die durch $\sim$ definierte Zerlegung A^* von A ist dicht geordnet (d. h., wenn $a^*, b^* \in A^*$ und $a^* < b^*$, dann gibt es ein $c^* \in A^*$, so daß $a^* < c^* < b^*$. Hieraus folgt, daß 1 ein dichter Ordnungstyp ist).

Angenommen, $a^* < b^*$ und es gibt kein c^* zwischen a^* und b^*. Wir wollen zeigen, daß dann $a \sim b$ mit $a \in a^*$ und $b \in b^*$, und folglich $a^* = b^*$, im Widerspruch zu Annahme. Es sei S ein Segment von $\langle a, b\rangle \subseteqq A$. Dann sind $S \cap a^*$ und $S \cap b^*$ Segmente von a^* bzw. b^*. Nach 2. sind $S \cap a^*$, $S \cap b^*$ zulässig, und nach Lemma 11 ist $S = S \cap a^* + S \cap b^*$ zulässig; also $a \sim b$.

4. Es gibt nur eine Äquivalenzklasse in A bezüglich $\sim$.

Angenommen, es gibt Elemente $a^*, b^* \in A^*$ mit $a^* < b^*$. Nach 2. ist jedes $c^* \in A^*$ zulässig. Folglich existiert ein $\gamma \in M$, so daß $c^* \sim_k^{\mathrm{Q}} \gamma$. Nach Lemma 2 gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteqq M$, so daß jedes c^* mit $a^* < c^* < b^*$ k-äquivalent ersetzt werden kann durch ein $\gamma \in F$. Es seien jetzt a^*, b^* so gewählt, daß die entsprechende Menge F minimal wird, d. h., für jedes a_0^*, b_0^* mit $a^* \leqq a_0^* < b_0^* \leqq b^*$ ist die entsprechende Menge $F_0 = F$. Da F endlich ist, gibt es solche Elemente a^*, b^*, und da A^* dicht geordnet ist, erhält man $F \neq \emptyset$. Aus der Minimalität von F folgt, daß alle $\gamma \in F$ bis auf k-Äquivalenz in $\langle a^*, b^*\rangle$ unendlich oft vorkommen. Es seien $F_1, F_2 \subseteqq F$ und F_1 bzw. F_2 enthalten genau die Elemente aus F, die in $\langle a^*, b^*\rangle$ bis auf k-Äquivalenz ω_1 bzw. genau ω-mal vorkommen. Analog wie für F lassen sich a^*, b^* so wählen, daß zusätzlich F_2 minimal wird, wobei auch $F_2 = \emptyset$ und $F_1 = F$ sein können. Ist S^* ein Segment von $\langle a^*, b^*\rangle \subseteqq A^*$, dann gilt offenbar: Zu jedem $\gamma \in F_1$ bzw. $\gamma \in F_2$ gibt es ω_1 bzw. genau ω viele $c^* \in S^*$, so daß $c^* \sim_k^{\mathrm{Q}} \gamma$. Es sei jetzt $a \in a^*$, $b \in b^*$ und S ein Segment von $\langle a, b\rangle \subseteqq A$. Dann ist $S = S_1 + S' + S_2$, wobei S_1 bzw. S_2 Endstück bzw. Anfangsstück gewisser Äquivalenzklassen sind und S' ein Segment von Äquivalenzklassen ist. Induktiv über k zeigt man leicht $S' \sim_k^{\mathrm{Q}} \sigma(F_1, F_2)$. Da F_1 und F_2 nur zulässige Ordnungstypen enthalten, ist $\sigma(F_1, F_2)$ und damit auch S' zulässig. S_1, S_2 sind als Segmente von Äquivalenzklassen ebenfalls zulässig (wenn $S_1 = \emptyset$ oder $S_2 = \emptyset$, dann vereinfacht sich der Beweis). Folglich ist $S = S_1 + S' + S_2$ zulässig und $a \sim b$. Dies ist ein Widerspruch zu $a^* \neq b^*$. Folglich gibt es genau eine Äquivalenzklasse in A, und daher ist A zulässig.

Im folgenden sei K_0 die Klasse der geordneten Mengen und $K_0^{<\omega_1}$ bzw. $K_0^{\geqq\omega_1}$ die Teilklasse der abzählbaren bzw. der überabzählbaren Modelle. T_{Q} und T seien die Theorien von K_0 in L_{Q} bzw. in L und $T_{\mathrm{Q}}^{<\omega_1}, T_{\mathrm{Q}}^{\geqq\omega_1}$ die Theorien der entsprechenden Teilklassen. Weiterhin sei T_{Q}^d die L_{Q}-Theorie der dicht geordneten Mengen. Dann gilt:

Theorem 16. *Die Menge der in K_0 erfüllbaren Aussagen aus L_{Q} ist rekursiv aufzählbar.*

Der Beweis folgt aus den Theoremen 10 und 15.

Theorem 17. *Die Theorien $T_{\mathrm{Q}}, T, T_{\mathrm{Q}}^{<\omega_1}, T_{\mathrm{Q}}^{\geqq\omega_1}, T_{\mathrm{Q}}^d$ sind entscheidbar.*

Beweis. Auf Grund der Axiomatisierbarkeit von L_{Q} ist T_{Q} rekursiv aufzählbar. Da auch die in K_0 erfüllbaren Aussagen rekursiv aufzählbar sind, erhält man die Entscheidbarkeit von T_{Q}. Als einfache Folgerung hieraus ergibt sich die Entscheidbarkeit der anderen Theorien. q. e. d.

Literatur

[1] EHRENFEUCHT, A., Decidability of the theory of the linear ordering. AMS Notices 6, No. 3, Issue 38 (1959), 556–538.

[2] LÄUCHLI, H., A decision procedure for the weak second order theory of linear order. Contributions to Mathematical Logic, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1968.

[3] LÄUCHLI, H., and J. LEONARD, On the elementary theory of linear order. Fund. Math. **59** (1966), 109–116.
[4] LIPNER, L. D., Some aspects of generalized quantifiers. Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley 1970.
[5] RABIN, M. O., Decidability of second order theories and automata on infinite trees. Trans. AMS **149** (1969), 1–35.
[6] SHELAH, S., The monadic theory of order. Preprint.
[7] SLOMSON, A., Decision problems for generalized quantifiers – A survey. Preprint.
[8] VINNER, S., A generalization of Ehrenfeuchts game and some applications. Israel J. Math. **12** (1972), 279–298.
[9] KEISLER, H. J., Logic with the quantifier "there exist uncountably many". Annals Math. Logic **1** (1969), 1–94.
[10] TUSCHIK, H. P., On the decidability of the theory of linear order, with quantifier "there exists uncountably many". Preprint.

(Eingegangen am 15. Januar 1976)