Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

Herrn HERMANN SCHMIDT zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

HEINZ KÖNIG

Im Sommersemester 1961 habe ich in einer Vorlesung an der Technischen Hochschule Aachen die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in einer von dem klassischen Aufbau, wie er etwa in CARATHÉODORY [1] und in KAMKE [2] zu finden ist, abweichenden Darstellung vorgetragen. In der vorliegenden Arbeit soll hierüber berichtet werden. Es handelt sich vor allem um die Charakteristikentheorie und um das Cauchysche Anfangswertproblem bei Involutionssystemen aus allgemeinen (impliziten) partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Abweichungen von der klassischen Theorie beginnen bei der Definition der Jacobischen eckigen Klammer, wodurch auch der Begriff des Involutionssystems eine Abänderung erfährt. Jedem allgemeinen System wird ein charakteristisches System zugeordnet. Das ist ein autonomes Pfaffsches System, dessen Gestalt der des üblichen charakteristischen Systems zu einem expliziten System nachgebildet ist (was auf einen Zusatzterm bei der sogenannten Streifenbedingung hinausläuft). Das so erklärte charakteristische System erfüllt die Integrabilitätsbedingungen genau dann, wenn das zugehörende allgemeine System in unserem Sinne ein Involutionssystem ist. Daher kann man die Charakteristikentheorie sofort bei allgemeinen (impliziten) Involutionssystemen aufbauen. Der vorangehende, im allgemeinen nur lokal ausführbare Übergang zu einem äquivalenten expliziten System kann fortfallen.

Auf der Grundlage der Charakteristikentheorie behandeln wir alsdann das Cauchysche Anfangswertproblem bei Involutionssystemen. Wir erhalten den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für zweimal stetig differenzierbare Lösungen in globaler Fassung in dem Sinne, daß die Anfangsmannigfaltigkeit in ihrem globalen Verlauf nicht durch Bedingungen lokaler Art, wie etwa die Existenz einer einheitlichen Parameterdarstellung, eingeschränkt wird. Wir verwenden hierzu den in Abschnitt 5 aufgestellten Fortsetzbarkeitssatz für topologische Abbildungen, der auch für sich von Interesse sein dürfte.

Im letzten Abschnitt, der mehr als Anhang zu betrachten ist, behandeln wir kurz die Ausdehnung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes auf die vollständigen Systeme.

1. Autonome Pfaffsche Systeme. Die Punkte des reellen Zahlenraumes R^n werden mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet. Es sei E ein Gebiet des R^n. Wir betrachten auf E stetige Vektorfunktionen $f = (f_1, \dots, f_n)$. Wir ordnen jedem Paar von stetig differenzierbaren Vektorfunktionen f, g auf E die Klammer

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g_i - \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i \right)$$

zu. (f, g) ist eine stetige Vektorfunktion auf E. Wir haben $(f, g) + (g, f) = 0$.

Es seien $f^\alpha (\alpha = 1, \ldots, r)$ stetig differenzierbare Vektorfunktionen auf E. Wir betrachten das zugehörende autonome Pfaffsche System

$$\text{(PS)} \qquad \frac{\partial x}{\partial t_\alpha} = f^\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Das System (PS) heißt auflösbar, wenn alle Klammern (f^α, f^β) $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$ auf E verschwinden.

Unter einer Lösung des Systems (PS) verstehen wir eine stetig differenzierbare Vektorfunktion $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ auf einem Gebiet A des R^r mit $\vartheta(t) \in E$ und

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t_\alpha}(t) = f^\alpha(\vartheta(t)) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \text{ für alle } t = (t_1, \ldots, t_r) \in A.$$

Bei festem $\tau \in R^r$ ist dann $t \to \vartheta(t + \tau)$ eine Lösung auf $A - \tau$. Wenn zu jedem $\xi \in E$ eine Lösung ϑ existiert, die in einem Punkte $\tau \in A$ den Wert $\vartheta(\tau) = \xi$ annimmt, dann ist das System (PS) auflösbar.

Unter einer Stern-Lösung verstehen wir eine Lösung ϑ des Systems (PS), deren Definitionsgebiet A den Nullpunkt 0 des R^r enthält und ein Stern-Gebiet in bezug auf 0 ist. Nach dem Satz von Zorn läßt sich jede Stern-Lösung ϑ zu einer maximalen Stern-Lösung fortsetzen. Wir haben den folgenden bekannten Satz.

Satz 1. *Das System* (PS) *sei auflösbar. Dann existiert zu jedem $\xi \in E$ genau eine maximale Stern-Lösung*

$$\vartheta : \vartheta(t) = \Theta(t, \xi) \quad \textit{auf} \quad A(\xi),$$

die im Nullpunkt den Wert $\vartheta(0) = \Theta(0, \xi) = \xi$ annimmt. Der Definitionsbereich $B = \{(t, \xi) : \xi \in E, t \in A(\xi)\}$ der Vektorfunktion Θ ist ein Gebiet des R^{r+n}. Ferner ist Θ auf B stetig differenzierbar.

Wir nennen die Vektorfunktion Θ die allgemeine Lösung des Systems (PS). Der vorstehende Satz 1 läßt sich nach Adolph Mayer [4] auf die Hauptsätze der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen. Hierzu sei auf Kamke [3] Kapitel III verwiesen. Wir formulieren den wesentlichen Punkt in dem folgenden Zusatz.

Zusatz. *Es sei $\xi \in E$ und $c = (c_1, \ldots, c_r) \in R^r$. Dann ist die stetig differenzierbare Vektorfunktion*

$$\chi : \chi(s) = \Theta(sc, \xi) \quad \textit{für alle reellen } s \textit{ mit } sc \in A(\xi),$$

die auf einem offenen Intervall um dsn Nullpunkt der Zahlengeraden erklärt ist, die eindeutig bestimmte maximale Lösung des gewöhnlichen Systems

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{r} c_\alpha f^\alpha(x)$$

mit dem Anfangswert $\chi(0) = \xi$.

2. Jacobische Klammern. Die Punkte des R^{2n+1} werden nebeneinander mit $z = (z_0, z_1, \dots, z_{2n})$ und mit $z = (u, x, y) = (u, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ bezeichnet. Es sei E ein Gebiet des R^{2n+1}. Wir ordnen jeder stetig differenzierbaren Funktion F auf E den Jacobischen Gradienten

$$\operatorname{Jac} F = (F_0, F_1, \dots, F_{2n})$$

mit den Komponenten

$$(F_1, \dots, F_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n}\right),$$

$$(F_{n+1}, \dots, F_{2n}) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial F}{\partial u}, \dots, -\frac{\partial F}{\partial x_n} - y_n \frac{\partial F}{\partial u}\right),$$

$$F_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial F}{\partial y_i} - F$$

zu. $\operatorname{Jac} F$ ist eine stetige Vektorfunktion auf E. Wir haben $\operatorname{Jac} F = 0$ genau dann, wenn $F = 0$ ist.

Wir ordnen ferner jedem Paar von stetig differenzierbaren Funktionen F, G auf E die modifizierte Jacobische Klammer

$$[F, G] = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial G}{\partial y_i} - \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) + \left(F \frac{\partial G}{\partial u} - G \frac{\partial F}{\partial u}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\partial F}{\partial z_k} G_k + F \frac{\partial G}{\partial u} = \langle \operatorname{grad} F, \operatorname{Jac} G \rangle + F \frac{\partial G}{\partial u}$$

zu. $[F, G]$ ist eine stetige Funktion auf E. Wir haben $[F, G] + [G, F] = 0$. Die nachstehenden Aussagen lassen sich durch direkte Rechnung bestätigen.

Satz 2. *Es seien F, G zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf E. Dann ist*

$$\operatorname{Jac}[F, G] = (\operatorname{Jac} F, \operatorname{Jac} G).$$

Satz 3 (Jacobische Identität). *Es seien F, G, H zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf E. Dann ist*

$$[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0.$$

3. Charakteristische Systeme. Es sei E ein Gebiet des R^{2n+1}. Ein System von stetig differenzierbaren Funktionen H^α $(\alpha = 1, \dots, r)$ auf E heißt ein Involutionssystem, wenn alle Jacobischen Klammern $[H^\alpha, H^\beta]$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, r)$ auf E verschwinden. Wir haben die H^α $(\alpha = 1, \dots, r)$ im folgenden als zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf E vorauszusetzen. Unter dem zugehörenden charakteristischen System verstehen wir das autonome Pfaffsche System

$$\text{(CS)} \qquad \frac{\partial z}{\partial t_\alpha} = \operatorname{Jac} H^\alpha(z) \qquad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Die rechten Seiten sind stetig differenzierbare Vektorfunktionen auf E. Das charakteristische System (CS) ist nach Satz 2 genau dann auflösbar, wenn die Funktionen

H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ein Involutionssystem bilden. Das werden wir im folgenden voraussetzen.

Die Lösungen ϑ des charakteristischen Systems (CS) werden Charakteristiken genannt. Sie werden zumeist mit $\vartheta = (\lambda, \varphi, \psi) = (\lambda, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ bezeichnet. Wir nennen $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die zur Charakteristik ϑ gehörende Grundcharakteristik.

Wir betrachten die allgemeine Lösung

$$\Theta = (\Lambda, \Phi, \Psi) : \Theta(t, \zeta) = (\Lambda(t, \omega, \xi, \eta), \Phi(t, \omega, \xi, \eta), \Psi(t, \omega, \xi, \eta))$$
$$\text{auf } B : \zeta = (\omega, \xi, \eta) \in E,\ t \in A(\zeta) = A(\omega, \xi, \eta)$$

des charakteristischen Systems (CS). Bei festem $t \in R^r$ ist $\zeta \to \Theta(t, \zeta)$ eine stetig differenzierbare Abbildung der offenen Punktmenge

$$E_t = \{\zeta \in E : (t, \zeta) \in B\} = \{\zeta \in E : t \in A(\zeta)\} \subset E$$

in E. Wir zeigen, daß die Abbildung $\zeta \to \Theta(t, \zeta)$ eine Berührungstransformation ist. Das ist der Inhalt der im unten folgenden Satz 5 formulierten Cauchyschen Relationen.

Wir haben auf B

$$\frac{\partial}{\partial t_\beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial u} (\Theta(t, \zeta)) - \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \frac{\partial H^\beta}{\partial u} (\Theta(t, \zeta)) = \frac{\partial [H^\alpha, H^\beta]}{\partial u} (\Theta(t, \zeta)) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r).$$

Wir bilden auf B die stetig differenzierbare Funktion

$$K : K(t, \zeta) = \exp\left(-\int_0^t \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial H^\alpha}{\partial u} (\Theta(v, \zeta))\, dv_\alpha\right) = \exp\left(-\int_0^1 \sum_{\alpha=1}^r t_\alpha \frac{\partial H^\alpha}{\partial u} (\Theta(s t, \zeta))\, ds\right).$$

Dann bestehen die Relationen

$$\frac{\partial K}{\partial t_\alpha} (t, \zeta) + \frac{\partial H^\alpha}{\partial u} (\Theta(t, \zeta)) K(t, \zeta) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r) \text{ auf } B.$$

Ferner ist $K(0, \zeta) = 1$ und $K(t, \zeta) \neq 0$ auf B.

Es sei nun v eine der in t, ζ auftretenden Variablen. Da die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t_\alpha}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t_\alpha\, \partial v}$$

auf B existieren und stetig sind, davon die letztgenannten auf Grund des charakteristischen Systems, existieren auf B auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v\, \partial t_\alpha}, \text{ und es ist } \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v\, \partial t_\alpha} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t_\alpha\, \partial v} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Daher ist die Funktion

$$R : R(t, \zeta) = \frac{\partial \Lambda}{\partial v} (t, \zeta) - \left\langle \Psi(t, \zeta), \frac{\partial \Phi}{\partial v} (t, \zeta) \right\rangle$$

auf B stetig partiell differenzierbar nach den t_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$. Auf Grund der ersten $n + 1$ Gleichungen des charakteristischen Systems haben wir auf B

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t_\alpha} (t, \zeta) - \left\langle \Psi(t, \zeta), \frac{\partial \Phi}{\partial t_\alpha} (t, \zeta) \right\rangle = -H^\alpha(\Theta(t, \zeta)) \quad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Wenn wir diese Gleichungen nach v partiell differenzieren und auf der rechten Seite das charakteristische System berücksichtigen, dann erhalten wir

$$\frac{\partial R}{\partial t_\alpha}(t,\zeta) + \frac{\partial H^\alpha}{\partial u}(\Theta(t,\zeta))\, R(t,\zeta) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots,r) \text{ auf } B.$$

Hieraus folgt

$$R(t,\zeta) = K(t,\zeta)\, R(0,\zeta) \text{ auf } B.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} R(0,\zeta) &= -H^\alpha(\zeta) && \text{im Falle } v = t_\alpha && (\alpha = 1,\ldots,r),\\ R(0,\zeta) &= 1 && \text{im Falle } v = \omega, && \\ R(0,\zeta) &= -\eta_i && \text{im Falle } v = \zeta_i && (i = 1,\ldots,n),\\ R(0,\zeta) &= 0 && \text{im Falle } v = \eta_i && (i = 1,\ldots,n). \end{aligned}$$

Wir haben daher die nachstehenden Aussagen.

Satz 4. *Auf B gelten die Relationen*

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t_\alpha}(t,\zeta) - \left\langle \Psi(t,\zeta), \frac{\partial \Phi}{\partial t_\alpha}(t,\zeta)\right\rangle = -H^\alpha(\Theta(t,\zeta)) = -K(t,\zeta)\, H^\alpha(\zeta) \qquad (\alpha = 1,\ldots,r).$$

Satz 5. *Auf B gelten die Relationen*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega}(t,\zeta) - \left\langle \Psi(t,\zeta), \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(t,\zeta)\right\rangle = K(t,\zeta), \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_i}(t,\zeta) - \left\langle \Psi(t,\zeta), \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}(t,\zeta)\right\rangle = -K(t,\zeta)\,\eta_i \qquad (i = 1,\ldots,n),\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_i}(t,\zeta) - \left\langle \Psi(t,\zeta), \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(t,\zeta)\right\rangle = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n). \end{aligned}$$

Bei festem $t \in R^r$ ist also

$$d\Lambda(t,\zeta) - \langle \Psi(t,\zeta), d\Phi(t,\zeta)\rangle = K(t,\zeta)\,(d\omega - \langle \eta, d\xi\rangle) \text{ auf } E_t.$$

4. Allgemeine Systeme. Es sei E ein Gebiet des R^{2n+1}. Es seien H^α $(\alpha = 1,\ldots,r)$ stetige Funktionen auf E. Wir betrachten das zugehörende allgemeine System

$$\text{(AS)} \qquad H^\alpha(u, x, \operatorname{grad} u) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots,r).$$

Unter einer Lösung des Systems (AS) verstehen wir eine stetig differenzierbare Funktion F auf einem Gebiet U des R^n mit $(F(x), x, \operatorname{grad} F(x)) \in E$ und

$$H^\alpha(F(x), x, \operatorname{grad} F(x)) = 0 \quad (\alpha = 1,\ldots,r) \text{ für alle } x \in U.$$

Die Funktionen H^α $(\alpha = 1,\ldots,r)$ seien stetig differenzierbar auf E. Dann ist jede zweimal stetig differenzierbare Lösung F des Systems (AS) eine Lösung des Systems

$$[H^\alpha, H^\beta](u, x, \operatorname{grad} u) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1,\ldots,r).$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Funktionen H^α $(\alpha = 1,\ldots,r)$ auf E zweimal stetig differenzierbar sind und ein Involutionssystem bilden.

Der unten folgende Satz 6 sagt aus, daß jede zweimal stetig differenzierbare Lösung F des Systems (AS) aus Charakteristiken des Involutionssystems H^α $(\alpha = 1,\ldots,r)$

aufgebaut ist. Wir stellen ein Lemma voran, das in Verbindung mit Satz 1 sofort die behauptete Aussage liefert.

Lemma. *Es sei F eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Systems* (AS) *auf U. Dann ist das auf U erklärte autonome Pfaffsche System*

$$\frac{\partial x}{\partial t_\alpha} = \left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H^\alpha}{\partial y_n}\right)(F(x), x, \operatorname{grad} F(x)) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

auflösbar. Es sei φ eine Lösung dieses Pfaffschen Systems und

$$\lambda : \lambda(t) = F(\varphi(t)), \quad \psi : \psi(t) = \operatorname{grad} F(\varphi(t)) \text{ auf } A.$$

Dann ist die stetig differenzierbare Vektorfunktion $\vartheta = (\lambda, \varphi, \psi)$ auf A eine Charakteristik.

Die rechten Seiten des zu betrachtenden autonomen Pfaffschen Systems sind stetig differenzierbare Vektorfunktionen f^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ auf U. Eine einfache Zwischenrechnung unter Verwendung der Voraussetzungen über die Funktion F liefert auf U

$$(f^\alpha, f^\beta)(x) = \left(\frac{\partial [H^\alpha, H^\beta]}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial [H^\alpha, H^\beta]}{\partial y_n}\right)(F(x), x, \operatorname{grad} F(x)) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r).$$

Das ist die erste Behauptung. Die zweite Behauptung läßt sich durch direkte Rechnung bestätigen.

Satz 6. *Es sei F eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Systems* (AS) *auf U. Es sei $\vartheta = (\lambda, \varphi, \psi)$ eine Charakteristik auf A, und die Grundcharakteristik φ verlaufe in U. Wenn die Relationen*

$$F(\varphi(t)) = \lambda(t), \quad \operatorname{grad} F(\varphi(t)) = \psi(t)$$

in einem Punkte von A bestehen, dann gelten sie in allen Punkten $t \in A$.

Wir wenden uns nun den Vorbereitungen zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für das allgemeine System (AS) zu.

5. Abbildungen auf metrischen Räumen.

Lemma. *Es sei M ein metrischer Raum und T eine Teilmenge von M. Jedem $x \in T$ sei eine Umgebung $U(x)$ zugeordnet. Dann kann man jedem $x \in T$ eine Umgebung $V(x) \subset U(x)$ zuordnen, so daß gilt: Im Falle*

$$V(x) \cap V(y) \neq \emptyset \text{ für } x, y \in T$$

besteht mindestens eine der Relationen

$$V(x) \cup V(y) \subset U(x), \quad V(x) \cup V(y) \subset U(y).$$

Es sei D die auf M erklärte Metrik. Zu jedem $x \in T$ existiert ein $\delta(x) > 0$ mit $\{z : D(x, z) < \delta(x)\} \subset U(x)$. Wir setzen

$$V(x) = \left\{z : D(x, z) < \frac{1}{3}\,\delta(x)\right\}.$$

Man erkennt sofort, daß die so erklärten Umgebungen $V(x)$ das Verlangte leisten.

Satz 7. *Es seien M, N metrische Räume und Φ eine Abbildung von M in N. Ferner sei T eine Teilmenge von M. Wir setzen voraus*

(i) *Φ ist auf T topologisch;*

(ii) *zu jedem $x \in T$ existiert eine Umgebung $U(x)$, so daß Φ auf $U(x)$ topologisch und $\Phi(U(x))$ offen ist.*

Dann existiert eine Umgebung U von T, so daß Φ auf U topologisch und $\Phi(U)$ offen ist.

Wir setzen

$$H = \bigcup_{x \in T} U(x).$$

Nach (ii) ist Φ auf H stetig. Ferner hat jede offene Teilmenge A von H eine offene Bildmenge $\Phi(A)$. Denn wir haben

$$A = \bigcup_{x \in T} A \cap U(x), \quad \Phi(A) = \bigcup_{x \in T} \Phi(A \cap U(x)),$$

und $\Phi(A \cap U(x))$ ist nach (ii) offen. Wenn daher Φ auf einer offenen Teilmenge U von H umkehrbar eindeutig ist, dann ist Φ auf U topologisch. Wir verschaffen uns nun in drei Schritten eine in H enthaltene Umgebung U von T, auf der Φ umkehrbar eindeutig ist.

Erster Schritt: Wir ordnen nach dem vorstehenden Lemma jedem $x \in T$ eine Umgebung $V(x) \subset U(x)$ zu.

Zweiter Schritt: Zu jedem $x \in T$ existiert eine Umgebung $W(x) \subset V(x)$ mit

$$\Phi(W(x)) \cap \Phi(T) = \Phi(V(x) \cap T).$$

Es ist nämlich $V(x) \cap T$ eine Relativ-Umgebung von x auf T. Nach (i) ist daher $\Phi(V(x) \cap T)$ eine Relativ-Umgebung von $\Phi(x)$ auf $\Phi(T)$. Das bedeutet

$$\Phi(V(x) \cap T) = B \cap \Phi(T) = B \cap \Phi(V(x)) \cap \Phi(T),$$

worin B eine Umgebung von $\Phi(x)$ ist. Daher ist $B \cap \Phi(V(x))$ eine in $\Phi(V(x))$ und damit in $\Phi(U(x))$ enthaltene Umgebung von $\Phi(x)$. Nach (ii) erhalten wir

$$B \cap \Phi(V(x)) = \Phi(W(x)),$$

worin $W(x)$ eine in $V(x)$ enthaltene Umgebung von x ist. Die Umgebung $W(x)$ leistet das Verlangte.

Dritter Schritt: Wir ordnen jedem $x \in T$ eine Umgebung $R(x) \subset W(x)$ zu, so daß im Falle

$$\Phi(R(x)) \cap \Phi(R(y)) \neq \emptyset \text{ für } x, y \in T$$

mindestens eine der Relationen

$$\Phi(R(x)) \cup \Phi(R(y)) \subset \Phi(W(x)), \quad \Phi(R(x)) \cup \Phi(R(y)) \subset \Phi(W(y))$$

besteht. Hierzu wenden wir das Lemma auf die Teilmenge $\Phi(T)$ des Raumes N und die Umgebungen $\Phi(W(x))$ der Punkte $\Phi(x)$ von $\Phi(T)$ an. Wir erhalten zu jedem $\Phi(x)$ eine Umgebung $B(x) \subset \Phi(W(x))$. Nach (ii) ist $B(x) = \Phi(R(x))$, worin $R(x)$ eine in $W(x)$ enthaltene Umgebung von $x \in T$ ist.

Wir betrachten nun die in H enthaltene Umgebung

$$U = \bigcup_{x \in T} R(x)$$

von T. Wir zeigen, daß Φ auf U umkehrbar eindeutig ist. Es sei

$$\Phi(p) = \Phi(q) \text{ für } p, q \in U : p \in R(x), \quad q \in R(y) \text{ mit } x, y \in T.$$

Dann ist $\Phi(R(x)) \cap \Phi(R(y)) \neq \emptyset$ und daher

$$\Phi(R(x)) \cup \Phi(R(y)) \subset \Phi(W(a)),$$

worin $a = x$ oder $a = y$ ist. Insbesondere haben wir

$$\Phi(x), \Phi(y) \subset \Phi(W(a)) \cap \Phi(T) = \Phi(V(a) \cap T)$$

und daher $x, y \in V(a)$, weil Φ nach (i) auf T umkehrbar eindeutig ist. Hiernach ist $V(x) \cap V(y) \neq \emptyset$ und daher $V(x) \cup V(y) \subset U(z)$, worin $z = x$ oder $z = y$ ist. Insbesondere ist $p, q \in U(z)$ und daher $p = q$, weil Φ nach (ii) auf $U(z)$ umkehrbar eindeutig ist. Damit ist der Satz bewiesen.

6. Abbildungen auf glatten Mannigfaltigkeiten. Wir stellen zuerst die im folgenden benötigten einfachen Tatsachen aus der Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten des R^n zusammen.

Eine Punktmenge F des R^n heißt eine p-dimensionale glatte Fläche ($p = 1, \ldots, n-1$), wenn eine topologische Abbildung $\varphi : U \to F$ einer offenen Punktmenge U des R^p auf F existiert, die auf U stetig differenzierbar ist und deren Funktionalmatrix

$$D\varphi : D\varphi(u) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(u)\right)$$

in jedem Punkte $u \in U$ vom Range p ist. Jede solche Abbildung $\varphi : U \to F$ heißt eine glatte Parameterdarstellung von F. Wenn $\varphi : U \to F$ und $\psi : V \to F$ glatte Parameterdarstellungen von F sind, dann existiert eine topologische und mitsamt ihrer Inversen stetig differenzierbare Abbildung $\sigma : U \to V$, so daß

$$\varphi(u) = \psi(\sigma(u)) \text{ für alle } u \in U.$$

Es sei $x \in F$ und $x = \varphi(u) = \psi(v)$ mit $u \in U$, $v \in V$. Dann spannen die Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v_1}(v), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial v_p}(v)$$

denselben p-dimensionalen linearen Teilraum des R^n auf. Diesen Teilraum nennen wir den Tangentialraum $T(F, x)$ der p-dimensionalen glatten Fläche F im Punkte x.

Eine Punktmenge S des R^n heißt eine p-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ($p = 1, \ldots, n-1$), wenn zu jedem $x \in S$ eine Umgebung $A(x)$ existiert, derart daß $S \cap A(x)$ eine p-dimensionale glatte Fläche ist. Hiernach ist jede p-dimensionale glatte Fläche F eine p-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Eine p-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit S ist aber im allgemeinen keine p-dimensionale glatte Fläche. Das ist insbesondere immer dann der Fall, wenn S kompakt ist. Eine Teilmenge T von S ist eine p-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit genau dann, wenn sie als Durchschnitt $T = S \cap A$ von S mit einer offenen Punktmenge A des R^n darstellbar ist.

Unter dem Tangentialraum $T(S, x)$ einer p-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit S im Punkte $x \in S$ verstehen wir den gemeinsamen Tangentialraum $T(F, x)$ aller den Punkt x enthaltenden p-dimensionalen glatten Flächen $F \subset S$.

Eine Funktion f auf S heißt stetig differenzierbar, wenn zu jedem $x \in S$ eine Umgebung $A(x)$ und eine glatte Parameterdarstellung $\varphi : U(x) \to S \cap A(x)$ existiert, so daß die Funktion

$$f^{\varphi} : f^{\varphi}(u) = f(\varphi(u)) \text{ für } u \in U(x)$$

auf $U(x)$ stetig differenzierbar ist. Dann existiert auf S eine eindeutig bestimmte stetige Tangentialvektorfunktion

$$G : G(x) = \operatorname{grad}_S f(x) \in T(S, x) \text{ für } x \in S$$

mit der Eigenschaft: Wenn φ irgendeine stetig differenzierbare Abbildung einer offenen Punktmenge U des R^m in S ist, dann ist die Funktion

$$f^{\varphi} : f^{\varphi}(u) = f(\varphi(u)) \text{ für } u \in U$$

auf U stetig differenzierbar, und es ist

$$\frac{\partial f^{\varphi}}{\partial u_{\nu}}(u) = \left\langle \operatorname{grad}_S f(\varphi(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_{\nu}}(u) \right\rangle \text{ für } u \in U \qquad (\nu = 1, \ldots, m).$$

Wir nennen $G = \operatorname{grad}_S f$ den Flächengradienten der Funktion f auf S. Wenn insbesondere f auf einer Umgebung von S definiert und stetig differenzierbar ist, dann ist f auf S stetig differenzierbar, und in jedem Punkte $x \in S$ ist die Differenz $\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad}_S f(x)$ orthogonal zum Tangentialraum $T(S, x)$.

Wir leiten nun aus Satz 7 das nachstehende Ergebnis her, dessen Formulierung bereits auf die Anwendung im folgenden Abschnitt zugeschnitten ist.

Satz 8. *Es sei S eine $(n - r)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit des R^n $(r = 1, \ldots, n - 1)$ und M eine relativ-offene Teilmenge von $R^r \times S$ mit*

$$\{(0, x) : x \in S\} \subset M.$$

Ferner sei $\Phi : (t, x) \to \Phi(t, x)$ eine stetig differenzierbare Abbildung von M in den R^n. Wir setzen in allen $x \in S$ voraus

(i) *$\Phi(0, x) = x$;*

(ii) *die Vektoren $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_{\alpha}}\right)(0, x)$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ sind linear unabhängig über $T(S, x)$.*

Dann existiert eine relativ-offene Teilmenge D von M von der Form

$$D = \{(t, x) : x \in S, |t| < \delta(x)\} \text{ mit } \delta(x) > 0 \text{ auf } S,$$

so daß Φ die Teilmenge D topologisch auf eine Umgebung U von S abbildet und die inverse Abbildung Φ^{-1} auf U stetig differenzierbar ist.

Wir setzen $T = \{(0, x) : x \in S\}$. Dann ist die Voraussetzung (i) in Satz 7 erfüllt. Wir zeigen, daß auch die Voraussetzung (ii) erfüllt ist. Wir bestimmen zu jedem $x \in S$ eine Umgebung $A(x)$ und eine Nullumgebung $P(x)$ des R^r, so daß

$$P(x) \times (S \cap A(x)) \subset M$$

und $S \cap A(x) = F(x)$ eine $(n - r)$-dimensionale glatte Fläche ist. Es sei $\vartheta : D(x) \to$ $\to F(x)$ eine glatte Parameterdarstellung von $F(x)$. $D(x)$ ist eine offene Punktmenge des R^{n-r}. Wir können $0 \in D(x)$ und $\vartheta(0) = x$ annehmen. Dann ist $P(x) \times D(x)$ eine Nullumgebung des R^n und $\Theta: (t, u) \to (t, \vartheta(u))$ eine topologische und stetig differenzierbare Abbildung von $P(x) \times D(x)$ auf $P(x) \times F(x) \subset M$. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = \Phi \circ \Theta : (t, u) \to \varphi(t, u) = \Phi(t, \vartheta(u))$$

von $P(x) \times D(x)$ in den R_n. Nach (i) haben wir

$$\varphi(0, u) = \Phi(0, \vartheta(u)) = \vartheta(u) \text{ für } u \in D(x), \quad \varphi(0, 0) = x.$$

Nach (ii) ist die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} J\varphi(0,0) &= \det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(0,0), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_r}(0,0), \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(0,0), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-r}}(0,0)\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}(0,x), \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial t_r}(0,x), \frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}(0), \ldots, \frac{\partial\vartheta}{\partial u_{n-r}}(0)\right) \end{aligned}$$

von Null verschieden. Daher existieren eine Nullumgebung $P^-(x) \subset P(x)$ des R^r und eine Nullumgebung $D^-(x) \subset D(x)$ des R^{n-r}, so daß φ die Produktmenge $P^-(x) \times D^-(x)$ topologisch auf eine Umgebung $U(x)$ des Punktes $\varphi(0, 0) = x$ abbildet und die inverse Abbildung φ^{-1} auf $U(x)$ stetig differenzierbar ist. Wir haben nun

$$\vartheta : D^-(x) \to F^-(x), \quad \Theta : P^-(x) \times D^-(x) \to P^-(x) \times F^-(x),$$

worin $F^-(x)$ eine $(n - r)$-dimensionale glatte Teilfläche von $F(x)$ ist. Daher ist $P^-(x) \times F^-(x)$ eine in M relativ-offene Teilmenge von $P(x) \times F(x)$, und es ist $(0, x) \in P^-(x) \times F^-(x)$. Ferner bildet $\Phi = \varphi \circ \Theta^{-1}$ die Teilmenge $P^-(x) \times F^-(x)$ topologisch auf $U(x)$ ab, und die inverse Abbildung $\Phi^{-1} = \Theta \circ \varphi^{-1}$ ist auf $U(x)$ stetig differenzierbar.

Nach Satz 7 existiert daher eine relativ-offene Teilmenge D' von M mit

$$T \subset D' \subset \bigcup_{x \in S} P^-(x) \times F^-(x),$$

die bei der Abbildung Φ topologisch auf eine Umgebung U' von S abgebildet wird. Nach dem Vorangehenden ist die inverse Abbildung Φ^{-1} auf U' stetig differenzierbar. Wir setzen nun

$$\delta(x) = \operatorname{Sup}\{\alpha > 0 : \text{ aus } |t| < \alpha \text{ folgt } (t, x) \in D'\} \text{ für } x \in S.$$

Wir haben dann

$$T \subset D = \{(T, x) : x \in S, \ |t| < \delta(x)\} \subset D'.$$

Man erkennt ferner die Relation

$$\delta(x) \leqq \liminf_{z \to x} \delta(z) \text{ für } x \in S.$$

Hiernach ist D relativ-offen in $R^r \times S$ und daher relativ-offen in M und in D'. Wir setzen $U = \Phi(D)$. Dann leisten D und U das Verlangte.

Zusatz. *Es sei V eine Umgebung von S. Dann kann man D so wählen, daß U in V enthalten ist.*

Denn wegen der Stetigkeit der Abbildung Φ kann man von vornherein annehmen, daß $\Phi(M)$ in V enthalten ist.

7. Das Cauchysche Anfangswertproblem. Es sei E ein Gebiet des R^{2n+1}. Es seien H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf E, die ein Involutionssystem bilden $(r = 1, \ldots, n-1)$. Wir betrachten das zugehörende allgemeine System

$$\text{(AS)} \qquad H^\alpha(u, x, \operatorname{grad} u) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

und beweisen über das Cauchysche Anfangswertproblem den nachstehenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 9. *Es sei S eine zusammenhängende $(n - r)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit des R^n. Ferner sei f eine stetig differenzierbare Funktion und P eine stetig differenzierbare Vektorfunktion auf S. Wir setzen in allen $x \in S$ voraus*

(i) $(f(x), x, P(x)) \in E$;

(ii) $H^\alpha(f(x), x, P(x)) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$;

(iii) $P(x) - \operatorname{grad}_S f(x)$ *ist orthogonal zu* $T(S, x)$;

(iv) *die Vektoren* $\left(\dfrac{\partial H^\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial H^\alpha}{\partial y_n}\right)(f(x), x, P(x)) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$

sind linear unabhängig über $T(S, x)$.
Dann existiert eine zusammenhängende Umgebung U von S, derart daß das System (AS) *auf U genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung F mit den Anfangswerten*

$$F(x) = f(x), \quad \operatorname{grad} F(x) = P(x) \text{ für alle } x \in S$$

besitzt.

Zusatz. *Es sei V eine Umgebung von S. Dann kann man erreichen, daß U in V enthalten ist.*

Wir verschaffen uns zuerst eine passende zusammenhängende Umgebung U von S. Es bestehe M aus allen $(t, \xi) \in R^r \times S$ mit $(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \in B$. Dann ist M als Urbild von B bei der stetigen Abbildung $(t, \xi) \to (t, f(\xi), \xi, P(\xi))$ von $R^r \times S$ in den R^{r+2n+1} eine relativ-offene Teilmenge von $R^r \times S$. Nach (i) haben wir $(0, \xi) \in M$ für alle $\xi \in S$. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : (t, \xi) \to \varphi(t, \xi) = \Phi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))$$

von M in den R^n. Wir haben $\varphi(0, \xi) = \xi$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_\alpha}(0, \xi) = \left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H^\alpha}{\partial y_n}\right)(f(\xi), \xi, P(\xi)) \quad (\alpha = 1, \ldots, r) \text{ für } \xi \in S,$$

nach (iv) sind also die Voraussetzungen in Satz 8 erfüllt. Daher existiert eine relativ-offene Teilmenge D von M von der Form

$$D = \{(t, \xi) : \xi \in S, |t| < \delta(\xi)\} \text{ mit } \delta(\xi) > 0 \text{ auf } S,$$

so daß φ die Teilmenge D topologisch auf eine Umgebung U von S abbildet und die inverse Abbildung φ^{-1} auf U stetig differenzierbar ist. Aus dem Zusammenhang von S folgt der Zusammenhang von U. Wir zeigen, daß die Umgebung U das Verlangte leistet.

Wir beweisen zuerst die Eindeutigkeitsaussage des Satzes. Es sei F auf U eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Systems (AS) mit den vorgeschriebenen Anfangswerten auf S. Bei festem $\xi \in S$ ist

$$\vartheta : \vartheta(t) = \Theta(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \quad \text{in} \quad |t| < \delta(\xi)$$

eine Charakteristik mit in U verlaufender Grundcharakteristik. Die Relationen

$$F(\Phi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))) = \Lambda(t, f(\xi), \xi, P(\xi)),$$

$$\operatorname{grad} F(\Phi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))) = \Psi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))$$

gelten nach Voraussetzung im Punkte $t = 0$ und daher nach Satz 6 in allen Punkten t mit $|t| < \delta(\xi)$, also in allen Punkten $(t, \xi) \in D$. Nach der ersten Relation ist die Funktion F auf U eindeutig bestimmt.

Wir gehen nun an den Beweis der Existenzaussage. Wir schreiben hierzu die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : U \to D$ in der Form

$$\varphi^{-1} = (\tau, \sigma) : x \to \varphi^{-1}(x) = (t, \xi) = (\tau(x), \sigma(x)) \quad \text{für} \quad x \in U.$$

Dann ist also $x = \varphi(\tau(x), \sigma(x))$ oder

$$x = \Phi(\tau(x), f(\sigma(x)), \sigma(x), P(\sigma(x))) \quad \text{für} \quad x \in U. \tag{1}$$

Wir definieren die Funktion F auf U durch die Relation

$$F(\Phi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))) = \Lambda(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \quad \text{für} \quad (t, \xi) \in D,$$

$$F(x) = \Lambda(\tau(x), f(\sigma(x)), \sigma(x), P(\sigma(x))) \quad \text{für} \quad x \in U. \tag{2}$$

Hiernach ist F auf U stetig differenzierbar. Wir beweisen die Relation

$$\operatorname{grad} F(\Phi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))) = \Psi(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \quad \text{für} \quad (t, \xi) \in D,$$

$$\operatorname{grad} F(x) = \Psi(\tau(x), f(\sigma(x)), \sigma(x), P(\sigma(x))) \quad \text{für} \quad x \in U. \tag{3}$$

Aus (2) erhalten wir durch partielle Differentiation nach x_i $(i = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = &\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial t_\alpha}(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial x_i}(x) + \\ &+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega}(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \left\langle \operatorname{grad}_S f(\xi), \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k}(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_i}(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_k}(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \left\langle \operatorname{grad}_S P_k(\xi), \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}(x) \right\rangle \quad \text{auf} \quad U.\end{aligned}$$

Wir differenzieren ebenso (1) partiell nach x_i, multiplizieren hernach skalar mit $\Psi(t, f(\xi), \xi, P(\xi))$, subtrahieren das Ergebnis von dem vorangehenden und berücksichtigen die in Satz 4 und Satz 5 aufgestellten Cauchyschen Relationen. Dann erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) - \Psi_i(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) = K(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \left\{ - \sum_{\alpha=1}^{r} H^\alpha(f(\xi), \xi, P(\xi)) \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \left\langle \operatorname{grad}_S f(\xi) - P(\xi), \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}(x) \right\rangle \right\}.$$

Nach den Voraussetzungen (ii) und (iii) ist die geschweifte Klammer auf der rechten Seite $= 0$. Damit haben wir die Relation (3) nachgewiesen.

Auf Grund von (2) und (3) ist die Funktion F auf U zweimal stetig differenzierbar und nimmt auf S die vorgeschriebenen Anfangswerte f und P an. Wir haben ferner $(F(x), x, \operatorname{grad} F(x)) = \Theta(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) \in E$ auf U. Nach Satz 4 und Voraussetzung (ii) ist

$$H^\alpha(F(x), x, \operatorname{grad} F(x)) = H^\alpha(\Theta(t, f(\xi), \xi, P(\xi))) =$$
$$= K(t, f(\xi), \xi, P(\xi)) H^\alpha(f(\xi), \xi, P(\xi)) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \text{ auf } U.$$

Daher ist F eine Lösung des Systems (AS). Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

8. Vollständige Systeme. Es sei E ein Gebiet des R^{2n+1}. Ein System von stetig differenzierbaren Funktionen H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ auf E heißt vollständig, wenn alle Jacobischen Klammern $[H^\alpha, H^\beta]$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$ auf der gemeinsamen Nullstellenmenge

$$N(H) = \{z \in E : H^\alpha(z) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r)\}$$

verschwinden. Wir schildern sehr kurz die seit langem bekannte Methode, nach der man den im vorangehenden Abschnitt aufgestellten Existenz- und Eindeutigkeitssatz über das Cauchysche Anfangswertproblem auf den Fall der vollständigen Systeme ausdehnen kann.

Wir betrachten im folgenden Systeme von stetig differenzierbaren Funktionen H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ auf E. Das System H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ heißt normal, wenn in jedem Punkte $z \in E$ die Vektoren

$$\left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H^\alpha}{\partial y_n}\right)(z) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

linear unabhängig sind. Die Systeme H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ und K^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ werden äquivalent genannt, wenn $N(H) = N(K)$ ist. Die zugehörenden allgemeinen Systeme (AS) haben dann dieselben Lösungen.

Satz 10. *Es seien H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ und K^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ äquivalente normale Systeme. Wir haben dann die nachstehenden Aussagen.*

(i) *In jedem Punkte $z \in N(H) = N(K)$ spannen die Vektoren*

$$\left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H^\alpha}{\partial y_n}\right)(z) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial K^\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial K^\alpha}{\partial y_n}\right)(z) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

denselben r-dimensionalen linearen Teilraum des R^n auf.

(ii) *Wenn eines der beiden Systeme vollständig ist, dann ist auch das andere vollständig.*

Der entscheidende Punkt ist das folgende Lemma.

Lemma. *Es sei* $E = U \times V$, *worin* U *ein Gebiet des* R^{2n-r+1} *und* V *ein Gebiet des* R^r *ist. Ferner sei*

$$H^\alpha : H^\alpha(u, x, y) = y_\alpha - h^\alpha(u, x, y_{r+1}, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \quad \mathit{auf} \quad E,$$

worin die h^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *stetig differenzierbare Funktionen auf* U *mit*

$$(h^1, \ldots, h^r)(u, x, y_{r+1}, \ldots, y_n) \in V \quad \mathit{auf} \quad U$$

sind. Dann ist das System H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *normal. Es ist ferner vollständig genau dann, wenn es ein Involutionssystem ist.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Relationen

$$[H^\alpha, H^\beta] = [h^\alpha, h^\beta] - \frac{\partial h^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial h^\beta}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r).$$

Aus dem Lemma erhalten wir sofort den folgenden Satz.

Satz 11. *Es sei* H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *ein normales vollständiges System. Dann existiert zu jedem* $\zeta \in N(H)$ *eine in* E *enthaltene zusammenhängende Umgebung* $E(\zeta)$, *so daß das System* H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *auf* $E(\zeta)$ *zu einem normalen Involutionssystem* K^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *äquivalent ist.*

Zusatz. *Wenn die* H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *auf* E *zweimal stetig differenzierbar sind, dann sind die* K^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *auf* $E(\zeta)$ *zweimal stetig differenzierbar.*

Auf Grund der vorstehenden Ergebnisse können wir nun den Existenz- und Eindeutigkeitssatz über das Cauchysche Anfangswertproblem auf den Fall der vollständigen Systeme übertragen.

Satz 12. *Es seien* H^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf* E, *die ein vollständiges System bilden* $(r = 1, \ldots, n - 1)$. *Dann gilt Satz* 9 *mitsamt Zusatz.*

Man erkennt, daß der Beweis ein nochmaliges Aufsteigen von gewissen Umgebungen $U(\xi)$ der einzelnen Punkte $\xi \in S$ zu einer zusammenhängenden Umgebung U der Anfangsmannigfaltigkeit S erfordert. Hierzu kann man etwa das in Abschnitt 5 aufgestellte Lemma heranziehen.

Literaturverzeichnis

[1] C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Band 1: Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zweite Auflage, herausgegeben von E. Hölder. Leipzig 1956.

[2] E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Band II: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. Zweite Aufl. Leipzig 1950.

[3] E. Kamke, Differentialgleichungen. Band I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vierte Auflage. Leipzig 1962.

[4] A. Mayer, Über unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen. Math. Ann. 5, 448—470 (1872).

Eingegangen am 9. 7. 1962

Anschrift des Autors: Heinz König
Mathematisches Institut der Universität zu Köln
5 Köln-Lindenthal, Weyertal 86