

Elastische Lösung für einen Tunnel nahe der Oberfläche

Im folgenden wird eine Lösung für eine einfach gelochte Halbscheibe unter Eigengewicht auf der Grundlage der ebenen Elastizitätstheorie gegeben. Die mathematische Lösung für dieses Problem ist in der Literatur nicht bekannt geworden. Es wird eine Airysche Spannungsfunktion entwickelt, aus der Spannungen und Verformungen abgeleitet werden können. Interessanterweise stellt sich hier fast der gleiche Spannungsfaktor wie bei einem tiefliegenden Tunnel ein, wobei der absolute Wert der Spannungsspitze klein bleibt.

Für die Lösung von Problemen dieser Art wurden immer krummlinige Koordinaten verwendet. Die Arbeit mit diesen Koordinaten ist nicht jedem geläufig und wurde daher nicht oft angewendet. Hier wird ausschließlich mit vertrauten kartesischen und polaren Koordinaten gearbeitet.

Elastic solution for a tunnel near the surface. *Basing on the plane theory of elasticity a strict solution is given for a semi-plate with a hole under dead load. An Airy's stress function is developed from which all stresses and displacements can be derived. It is interesting to see that here we have almost the same stress factor as in the deep tunnel.*

For the solution of such problems curvilinear coordinates have been used. Working with these coordinates is rather difficult and has not often been used. But we only work with Cartesian and polar coordinates.

1 Einleitung

Das Gebilde „Halbebene“, geometrisch gesehen, besteht aus einem geraden und einem kreisförmigen Rand. In der Elastizitätstheorie stellt die Befriedigung der Randbedingungen die Hauptschwierigkeit dar. Man versucht, angepaßte Koordinaten einzuführen, welche die Ränder als konstante Parameter darstellen, womit die Erfüllung der Randbedingungen erleichtert wird. Im vorliegenden Fall wären die angepaßten Koordinaten die sogenannten bipolare Koordinaten, die den geraden Rand auch als Kreis mit Radius $R = \infty$ definieren. Der Nachteil dieses Weges sind die erheblichen mathematischen Schwierigkeiten einerseits, und andererseits sind spezielle Kenntnisse der konformen Abbildung erforderlich.

Da die *Boussinesqsche* Lösung für die unendliche Ebene mit geradem bzw. kreisförmigem Rand für die Einzellast bereits bekannt ist, kann man schrittweise, durch Integration, die Randbedingungen erfüllen.

Im Zuge dieser Arbeit wird eine *Airysche* Spannungsfunktion entwickelt, aus der alle Spannungen und Verformungen abgeleitet werden können.

Es wird erwähnt, daß die Lösung für dieses Problem in der Literatur nicht bekannt geworden ist. Die Lösung, die der Autor für den tiefliegenden Tunnel gefunden hat [1], wird als Anfangslösung verwendet.

Es sei noch erwähnt, daß *Schulze* [2], [3] ein Verfahren zur Berechnung mehrfach gelochter Scheiben entwickelt hat.

2 Lösung

Die Geometrie des Problems ist in Bild 1 dargestellt. Betrachtet man zunächst die Halbscheibe ohne Öffnung, welche unter Eigengewicht steht, so lauten die Spannungen in kartesischen Koordinaten:

$$\sigma_x = -\gamma\lambda(H-y)$$

$$\sigma_y = -\gamma(H-y)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{mit} \quad y = r \sin \varphi \quad (1)$$

wobei γ das Raumgewicht und λ der Seitendruckbeiwert sind.

Die Spannungen in Polarkoordinaten erhält man durch die bekannten Transformationsgleichungen [4], [5].

Die interessierenden Spannungen im Rand $r = a$ lauten:

$$\sigma_r^{(0)} = A_1 + (D - C) \sin \varphi + C \sin 3\varphi + G \cos 2\varphi$$

$$\sigma_\varphi^{(0)} = A_1 + D \sin \varphi - 2C \sin \varphi \cos 2\varphi - G \cos 2\varphi$$

$$\tau_{r\varphi}^{(0)} = -C \cos \varphi - G \sin 2\varphi + C \cos 3\varphi$$

mit

$$A_1 = -\gamma \cdot H/2(1 + \lambda), \quad G = +\gamma \cdot H/2(1 - \lambda)$$

$$C = -\gamma \cdot a/4(1 - \lambda), \quad D = +\gamma \cdot a/2(1 + \lambda) \quad (2)$$

Verlauf dieser Spannungen ist in Bild 2a dargestellt.

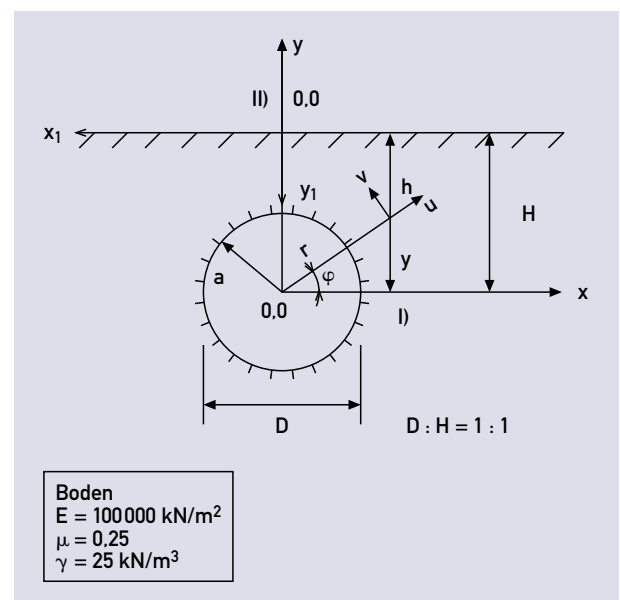


Bild 1. Kreisförmig gelochte Halbscheibe und Koordinatensysteme

Fig. 1. Semi-plate with circular hole and coordinate systems

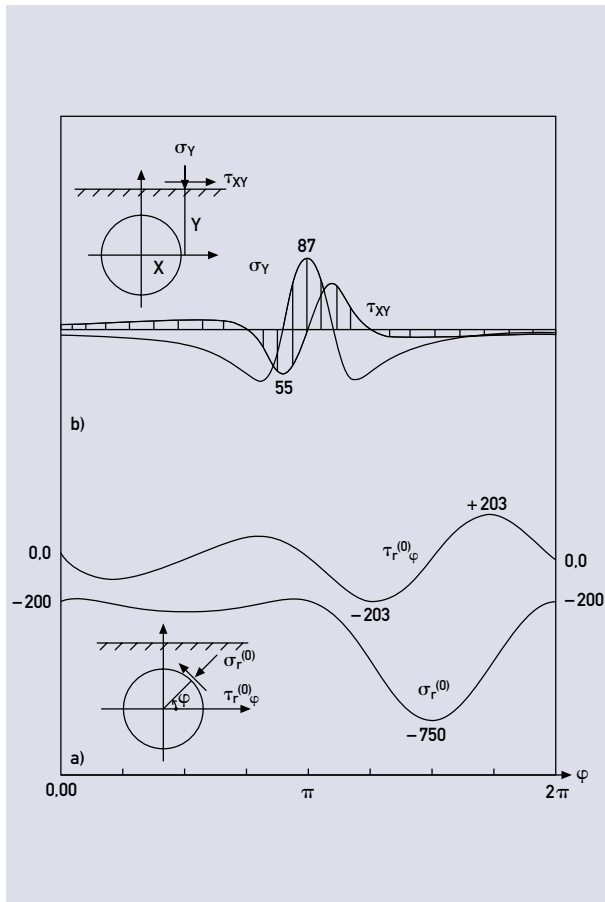


Bild 2. Randspannungen, a) am Kreisrand, b) auf geradem Rand der Halbebene

Fig. 2. Boundary stresses, a) along the circular hole, b) along the linear edges of the semi-plate

Diese Randspannungen werden durch die Überlagerung der Spannungsfunktion [1]

$$F_I = -A_1 a^2 \ln r + [B_1/r + D_1 r \ln r] \sin \varphi + 2D_1/(1-\mu) r \varphi \cos \varphi + a^2 G \left[1 - \frac{1}{2} (a/r)^2 \right] \cos 2\varphi - a^3 C \left[(1/3)(a^2/r^3) - \frac{1}{2} (1/r) \right] \sin 3\varphi$$

mit

$$B_1 = a^3/2 \left[C + (1-\mu)(D-2C)/4 \right] \\ D_1 = a(1-\mu)(D-2C)/4 \quad (3)$$

zu Null gemacht, was einfach zu verifizieren ist.

Spannungen und Verschiebungen erhält man durch die bekannten Beziehungen [5], [6]

$$\sigma_r = 1/r^2 (\partial^2 F / \partial \varphi^2) + 1/r (\partial F / \partial r) \\ \sigma_\varphi = \partial^2 F / \partial r^2 \\ \tau_{r\varphi} = -\partial / \partial r (1/r \cdot \partial F / \partial \varphi) \\ 2GU = 1/h_r \left\{ -(\partial F / \partial r) + 2\alpha [\phi_1 \cdot (\partial x / \partial r) + \phi_2 \cdot (\partial y / \partial r)] \right\} \\ 2GV = 1/h_\varphi \left\{ -(\partial F / \partial \varphi) + 2\alpha [\phi_1 \cdot (\partial x / \partial \varphi) + \phi_2 \cdot (\partial y / \partial \varphi)] \right\} \quad (4)$$

wobei

U	radiale Verschiebung
V	tangentielle Verschiebung
h_r, h_φ	Verzerrungsfaktoren
α	$2(1-1/m)$
m	Poissonzahl
G	Schubmodul
F	$\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2$ die Spannungsfunktion
ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2	harmonische Funktionen.

Wie erwähnt, macht die Spannungsfunktion F_I die Randspannungen am Kreisrand zu Null, erzeugt jedoch am geraden Rand Sekundärspannungen. Durch folgende Transformation wird die Spannungsfunktion in die kartesischen Koordinaten transformiert und die Spannungen durch die Beziehungen

$$x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \sigma_x = \partial^2 F / \partial y^2 \\ \sigma_y = \partial^2 F / \partial x^2 \\ \tau_{xy} = -\partial^2 F / \partial x \partial y \quad (5)$$

am geraden Rand ermittelt. Diese Berechnungen werden mit Hilfe eines vom Autor entwickelten Programms numerisch durchgeführt. Nun werden die Sekundärspannungen σ_y und τ_{xy} durch folgende Funktionen ersetzt:

$$\sigma_y(u) = (A u^2 + B)/(C u^4 + D) \\ \tau_{xy}(u) = u \cdot (D_1 u^2 + E)/(G u^4 + H) \quad (6)$$

mit

$$A = -1163 \quad D_1 = 30,000 \\ B = 124536 \quad E = -17979 \\ C = 0,02457 \quad G = -0,0376 \\ D = 1439 \quad H = -2343$$

Verlauf dieser Funktionen ist im Bild 2b dargestellt.

Nachdem die Randwerte am geraden Rand bekannt sind, kann die zugehörige Spannungsfunktion durch die Integration der *Boussinesq*schen Lösung gefunden werden [7], [8]. Sie lautet:

$$F_{II} = +1/\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(u)(x_1 - u) \arctg[y_1/(x_1 - u)] du - \\ -1/\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(u) \cdot y_1 \cdot \arctg[y_1/(x_1 - u)] du. \\ \sigma_y(u) \text{ und } \tau_{xy}(u) \text{ nach Gl. (6).} \quad (7)$$

Die Spannungsfunktion F_{II} macht die Sekundärspannungen am geraden Rand zu Null, erzeugt aber am Kreisrand neue Sekundärspannungen.

Wie die Berechnung zeigt, sind diese Sekundärspannungen bereits so klein, daß man die Berechnung abbrechen kann.

Transformiert man die Spannungsfunktion F_{II} in System I und addiert die beiden Spannungsfunktionen F_I und F_{II} , so erhält man die Spannungsfunk-

tion für die Halbebene mit einer Kreisöffnung unter Eigengewicht – bezogen auf Koordinatensystem I. Sie lautet:

$$\begin{aligned}
 F &= F_I + F_{II} = -A_1 a^2 \ln r + [B_1/r + D_1 r \ln r] \sin \varphi + \\
 &+ 2D_1/(1-\mu) r \varphi \cos \varphi + a^2 G \left[1 - \frac{1}{2} (a/r)^2 \right] \cos 2\varphi - \\
 &- a^3 C \left[(1/3)(a^2/r^3) - \frac{1}{2} (1/r) \right] \sin 3\varphi + \\
 &+ 1/\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(u) \cdot (x-u) \times \\
 &\times \arctg \left[(-y+H)/(x-u) \right] \cdot du - \\
 &- 1/\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(u) \cdot (-y+H) \times \\
 &\times \arctg \left[(-y+H)/(x-u) \right] \cdot du.
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \\
 y &= r \sin \varphi \text{ und } \sigma_y(u) \text{ und } \tau_{xy}(u) \\
 &\text{nach Gl. (6).}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Aus dieser Spannungsfunktion können die Spannungen und Verformungen nach Gl. (4) abgeleitet werden. Die Berechnung der Verformungen ist mit mehr Aufwand verbunden. Der Hauptanteil der Verformungen resultierend aus der Funktion F_I , kann nach *Worch* [11] sofort angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 Eu &= +A_1 \cdot a^2 \cdot (1+\mu)/r + B_1 \cdot (1+\mu)/r^2 \sin \varphi - \\
 &- D_1 \left\{ \left[2 - (1-\mu) \ln r \right] \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi \right\} + \\
 &+ 2D_1/(1-\mu) \cdot \left[-2 \ln r \sin \varphi + (1-\mu)(\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) \right] + \\
 &+ a^2 G \cdot 4/r \cos 2\varphi - a^2 G \cdot a^2 \cdot (1+\mu)/r^3 \cos 2\varphi - \\
 &- a^3 C \cdot 1/3 \cdot a^2 (1+\mu) \cdot 3/r^4 \cdot \sin 3\varphi + \\
 &+ a^3 C \cdot 1/2 [\mu + 5]/r^2 \cdot \sin 3\varphi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ev &= -B_1 \cdot (1+\mu)/r^2 \cos \varphi + D_1 \cdot \left[-(1-\mu)(1-\ln r) \cos \varphi + \right. \\
 &+ 2\varphi \sin \varphi \left. \right] + 2D_1/(1-\mu) \left[-2(\mu + \ln r) \cos \varphi - \right. \\
 &- (1-\mu) \varphi \sin \varphi \left. \right] + a^2 G (-2)(1-\mu)/r \sin 2\varphi + \\
 &+ a^2 G (-1/2) \cdot a^2 \cdot 2(1+\mu)/r^3 \sin 2\varphi - \\
 &- a^3 C \cdot 1/3 \cdot a^2 (-1)(1+\mu) \cdot 3/r^4 \cos 3\varphi - \\
 &- a^3 C \cdot (1/2) \left[(1+\mu) 3 - 4 \right] /r^2 \cos 3\varphi.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Der 2. Teil der Verformung – aus der Funktion F_{II} resultierend – kann nach Gl. (4) berechnet werden. Diese Verformungen sind vernachlässigbar klein.

3 Resultate

Im folgenden wird das Resultat einer Berechnung diskutiert. Dabei wird der Ausbruch mit dem Durchmesser $d = 20$ m in 20 m Tiefe angenommen ($D:H = 1:1$).

Der Seitendruckbeiwert wird mit $\lambda = 0,40$; die Querdehnzahl mit $\mu = 0,25$ festgelegt.

Für die Berechnung der Setzungen wird für Fels ein E-Modul von $100\,000 \text{ kN/m}^2$ angenommen.

In Bild 3 ist der Verlauf der Ringspannungen σ_φ um den Kreis dargestellt. Die Spannungserhöhung beträgt 2,59. Somit ist dies interessanterweise fast der gleiche Spannungsfaktor wie bei einem tiefer liegenden Tunnel. Der Absolutwert der Spannungen ist aber kleiner, da er von der Höhe H abhängig ist. Es herrschen noch überall Druckspannungen. Aus dem Bild ist noch ersichtlich, daß die Zugspannungen im First erst auftreten werden, wenn man mit dem Durchbruch noch näher an die Oberfläche herangeht.

Das ganze Verformungsbild ist in Bild 4 dargestellt. Der First verschiebt sich um 12 cm nach innen, die Ulme dagegen haben fast keine Verschiebung (2 mm).

Es sei angemerkt, daß auf der Geländeoberfläche auch horizontal Verschiebungen auftreten.

Verformung der Geländeoberfläche:

Die Verformung des geraden Randes kann durch eine andere Methode einfacher berechnet werden:

Die Lösung des Problems der Einzellast in der Halbebene ist mehrfach in der Literatur bekannt geworden – Bild 5; *Melan* [9], *Girkmann* [10].

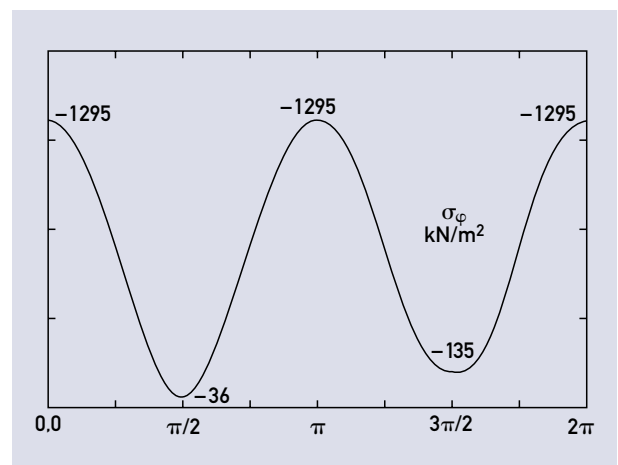


Bild 3. Verlauf der Ringspannungen um den Tunnel
Fig. 3. Ring stresses around the tunnel

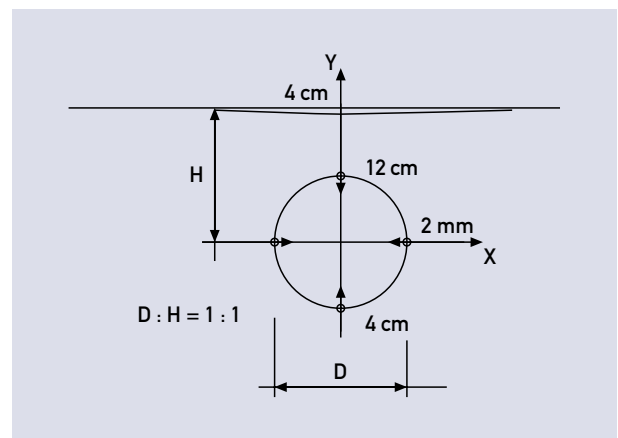


Bild 4. Verformung der Halbebene mit kreisförmiger Öffnung unter Eigengewicht.
Fig. 4. Displacement of the semi-plate with circular hole under dead load

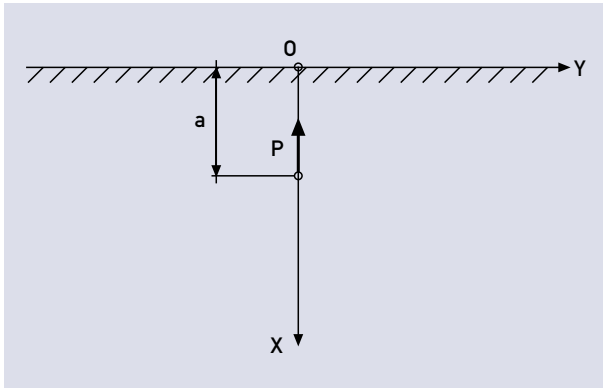


Bild 5. Halbebene mit Einzellast im Inneren
Fig. 5. Semi-plate with single force in its inner part

Nach dem *St. Venanschen* Prinzip ist die Verformung des genügend weit vom Angriffspunkt der Last liegenden Randes nur von deren Resultierenden abhängig. Daher kann das ausgebrochene Material als Einzellast betrachtet und die Verformung der Oberfläche nach *Neuber* [6] wie folgt berechnet werden:

Die Spannungsfunktion für Bild 5 nach *Melan* [9] lautet:

$$F = P/\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot y (\vartheta_1 + \vartheta_2) - (m-1)/(4m) \times \right. \\ \left. \times (x-a) \ln(r_1/r_2) - (m+1)/(2m) \cdot ax(a+x)/r_2^2 \right]$$

mit

$$\vartheta_1 = \arctg [y/(x-a)], \quad \vartheta_2 = \arctg [y/(x+a)] \\ r_1 = [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} \quad (10)$$

Die Verschiebung erhält man nach *Neuber* [6]:

$$2GU = -(\partial F/\partial x) + 2\alpha\phi_1, \quad \text{usw.} \quad (11)$$

Die Spannungsfunktion Gl. (10) muß umgewandelt werden:

$$F = \phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2$$

mit

$$\phi_1 = -P/\pi \cdot \left[(m-1)/(4m) \cdot \ln(r_1/r_2) + \right. \\ \left. + (m+1)/(2m) \cdot a(a+x)/r_2^2 \right] \\ \phi_2 = P/2\pi \cdot [\vartheta_1 + \vartheta_2] \\ \phi_0 = a(m-1)/(4m) \cdot \ln(r_1/r_2). \quad (12)$$

Die Berechnung ergibt für den maßgebenden Punkt der Oberfläche rund 4 cm.

Die Verformungen sind im Bild 4 dargestellt!

Literatur

- [1] Taheri, Z., Hazivar, W.: Elastische Lösung für einen tiefliegenden Tunnel. Bautechnik 73 (1996), Heft 5, S. 312–316.
- [2] Schulze, K. J.: Over den spanningstoestand in doorboorde platen. Diss. Delft 1941.
- [3] Schulze, K. J.: On the state of stress in perforated plates. Proc. Ned. Ak. Wet. 45 (1942), S. 233, S. 341, S. 457 und S. 524; ferner 48 (1945), S. 282 und S. 292.
- [4] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Wien; Springer 1963.
- [5] Biezeno, C. B., Grammel, R.: Technische Dynamik. Berlin, Heidelberg, New York; Springer 1971.
- [6] Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Berlin; Springer 1937.
- [7] Föppel, L.: Drang und Zwang – Dritter Band. München; Leibnitz Verlag 1947.
- [8] Vöcke, W.: Lineare Elastizität. Leipzig; VEB Fachbuchverlag 1966.
- [9] Melan, E.: Der Spannungszustand durch eine Einzelkraft im Inneren beanspruchten Halbscheibe. ZAMM Band 12, Heft 6 (Dez. 1932).
- [10] Girkmann, K.: Angriff von Einzellasten in der vollen Ebene und in der Halbebene. Ingenieur Archiv XI. Band 1940, S. 415.
- [11] Worch, G.: Elastische Scheiben. Betonkalender 1956, Berlin, München, Düsseldorf; Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.

Autor dieses Beitrages:

Dipl.-Ing. Dr. techn. Zia Taheri, Himmelhofgasse 43, A-1130 Wien