Monatshefte für Mathematik 78, 77—82 (1974)

Ein Eindeutigkeitssatz bei Funktional-Differentialgleichungen mit unendlicher Nacheilung

Von

H. Stettner[1], Graz

Herrn Prof. Dr. W. Hahn zum 60. Geburtstag gewidmet

(Eingegangen am 9. Februar 1973)

1. Wir betrachten die Funktional-Differentialgleichung (FDG) mit unendlicher Nacheilung $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$. Hale und Imaz [3] zeigten, daß die Lösungen dieser Gleichung eindeutig bestimmt sind, falls f einer Lipschitzbedingung bezüglich des zweiten Arguments genügt. In der vorliegenden Arbeit soll ein Eindeutigkeitssatz vom Kamkeschen Typ bewiesen werden. Ein entsprechendes Ergebnis für FDGen mit endlicher Nacheilung findet man bei Lakshmikantham [4]. Bei unendlicher Nacheilung treten einige Schwierigkeiten auf, die durch die Metrik des zugrunde gelegten Funktionenraumes bedingt sind. Diese Metrik geht auf Arens [1] zurück und tritt im Zusammenhang mit FDGen zuerst bei Hale [2] auf. Zur Begründung ihrer Verwendung vgl. auch Stettner [6].

2. Im folgenden sei T die reelle t-Achse. $|\cdot|$ bezeichne die euklidische Vektornorm im R^n. Unter C^∞ verstehen wir den Raum der stetigen Funktionen φ, die $(-\infty, 0]$ in den R^n abbilden. C^∞ sei mit der kompaktoffenen Topologie versehen (vgl. Arens [1]). Folgen in C^∞ sind genau dann konvergent, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von $(-\infty, 0]$ gleichmäßig konvergieren. Für $t_n \to t$ in $(-\infty, 0]$ und $\varphi_n \to \varphi$ in C^∞ gilt $\varphi_n(t_n) \to \varphi(t)$. C^∞ ist metrisierbar mit der Metrik

$$\varrho(\varphi, \varphi') := \sup\{\min(1/2^k, \|\varphi - \varphi'\|_k), k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

---

[1] Dieser Arbeit liegt ein Abschnitt aus der Habilitationsschrift des Verfassers „Anfangswertprobleme bei Funktional-Differentialgleichungen" [6] zugrunde.

wobei $\|\varphi-\varphi'\|_k := \sup_{-k-1 \leqslant t \leqslant -k} |\varphi(t)-\varphi'(t)|$. C^∞ ist mit dieser Metrik vollständig.

Sei x eine stetige Funktion, die $(-\infty, b)$ in den R^n abbildet. Unter x_t, $-\infty < t < b$, verstehen wir dann das durch

$$x_t(\theta) := x(t+\theta), \qquad -\infty < \theta \leqslant 0,$$

bestimmte Element aus C^∞.

Sei $\Omega \subset C^\infty$ offen und f ein Funktional von $\{t \in T, a \leqslant t < b\} \times \Omega$ in den R^n. Wir betrachten die *FDG mit unendlicher Nacheilung*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t).^2 \tag{1}$$

Eine Funktion $x(t) = x(a,\varphi)$, $\varphi \in C^\infty$, heißt *Lösung* von (1) mit dem Anfangswert φ zur Zeit a, wenn für ein c, $a < c \leqslant b$, 1. $x(t)$ für $-\infty < t < c$ definiert und stetig ist, 2. $x_a = \varphi$; 3. $x_t(a,\varphi) \in \Omega$ für $a \leqslant t < c$ und 4. $x(t)$ für $a \leqslant t < c$ (1) erfüllt.

Wir wollen den folgenden Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der Gleichung (1) beweisen:

Sei $g(t,z)$ nichtnegativ und stetig für $a < t < b$, $z \geqslant 0$. Für jedes c aus (a,b) gelte: $z(t) = 0$ ist die einzige auf $[a,c)$ differenzierbare Funktion, die $\dot{z}(t) = g(t,z)$ in (a,c) löst und $z(a) = \dot{z}_+(a) = 0$ erfüllt. $f(t,\varphi)$ sei auf $[a,b) \times \Omega$, $\Omega \subset C^\infty$, definiert und stetig mit Werten im R^n, und auf $(a,b) \times \Omega$ gelte

$$|f(t,\varphi) - f(t,\varphi')| \leqslant g(t, \varrho(\varphi,\varphi')). \tag{2}$$

So hat $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$, $a \leqslant t < b$, höchstens eine Lösung mit $x_a = \varphi \in \Omega$.

3. Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus. Es sei im folgenden $x(t)$ eine für $-\infty < t < b$ definierte stetige Funktion mit Werten im R^n. D^+, D_+, D^-, D_- bezeichne die bzw. rechte obere, rechte untere, linke obere, linke untere Dini-Derivierte nach t. k sei eine natürliche Zahl $\geqslant 1$ und $-\infty < t < b$.

Hilfssatz 1. Es sei $0 < D^+\|x_t\|_k$. So gilt 1. $\|x_t\|_k = |x(t-k)|$, 2. $D^+\|x_t\|_k = D^+|x(t-k)|$, und 3. $\|x_t\|_k < \|x_t\|_{k-1}$.

Beweis. h sei positiv. Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$s(t) := \sup_{-k-1 \leqslant \theta \leqslant -k} |x_t(\theta)|,$$

$$s_h(t) := \sup_{-k-1+h \leqslant \theta \leqslant -k+h} |x_t(\theta)|,$$

$$s'_h(t) := \sup_{-k \leqslant \theta \leqslant -k+h} |x_t(\theta)|.$$

[2] Bei FDGen bedeutet „·“ üblicherweise die rechtsseitige Ableitung.

Es ist $s_h(t) \leqslant \max(s(t), s_h'(t))$ und $\lim\limits_{h\to 0} s_h'(t) = |x(t-k)|$.
Aus der Voraussetzung folgt also

$$0 < \limsup_{h\to 0} (1/h)(s_h(t) - s(t)) = \limsup_{h\to 0} (1/h)(s_h'(t) - s(t)),$$

$$|x(t-k)| = \limsup_{h\to 0} s_h'(t) \geqslant s(t).$$

Andererseits ist $s(t) = \|x_t\|_k \geqslant |x(t-k)|$, woraus man 1. abliest. Mit diesem Resultat gilt weiter

$$\begin{aligned} D^+\|x_t\|_k &= \limsup_{h\to 0} (1/h)(s_h'(t) - s(t)) \\ &= \limsup_{h\to 0} (1/h)(s_h'(t) - |x(t-k)|) \\ &\geqslant \limsup_{h\to 0} (1/h)(|x(t-k+h)| - |x(t-k)|), \end{aligned}$$

also zunächst $D^+\|x_t\|_k \geqslant D^+|x(t-k)|$. Die Werte von $s_h'(t)$ werden von x für gewisse Argumente $(t-k+\theta) \in (t-k, t-k+h]$ angenommen. Sei zu festem h l_h das Maximum der betreffenden θ-Werte. Wegen der Stetigkeit von x ist dann $s_h'(t) = |x(t-k+l_h)|$ und

$$\begin{aligned} &\limsup_{h\to 0} (1/h)(s_h'(t) - |x(t-k)|) = \\ &\quad = \limsup_{h\to 0} (1/h)(|x(t-k+l_h)| - |x(t-k)|) \\ &\quad \leqslant \limsup_{h\to 0} (1/l_h)(|x(t-k+l_h)| - |x(t-k)|) \\ &\quad \leqslant \limsup_{h\to 0} (1/h)(|x(t-k+h)| - x(t-k)|). \end{aligned}$$

Daher ist auch $D^+\|x_t\|_k \leqslant D^+|x(t-k)|$. Damit ist 2. bewiesen. Wäre nun schließlich $\|x_t\|_{k-1} \leqslant \|x_t\|_k$, so wäre für hinreichend kleines h (nämlich für $h \leqslant 1$) stets

$$s_h'(t) \leqslant \|x_t\|_{k-1} \leqslant \|x_t\|_k = |x(t-k)|,$$

das heißt, die bereits oben abgeleitete Beziehung

$$0 < \limsup_{h\to 0} (1/h)(s_h'(t) - |x(t-k)|)$$

unmöglich. Also gilt auch 3.

Hilfssatz 2. 1. $x(t)$ und $x'(t)$ seien stetig für $-\infty < t < b$. So ist dort $D^+\varrho(x_t, x_t') \leqslant |D^+|x_t(0) - x_t'(0)||$. 2. Sind x und x' an der Stelle t rechtsseitig differenzierbar, so ist $D^+\varrho(x_t, x_t') \leqslant |\dot{x}_t(0) - \dot{x}_t'(0)|$.

Beweis. Aus der Definition der Metrik folgt, daß es mindestens eine natürliche Zahl k gibt, so daß

$$\varrho(x_t, x'_t) = \min(1/2^k, \|x_t - x'_t\|_k).$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

a) $1/2^k < \|x_t - x'_t\|_k$. So ist wegen der Stetigkeit von $\|x_t - x'_t\|$ in t für $\varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 hinreichend klein,

$$1/2^k < \|x_{t+\varepsilon} - x'_{t+\varepsilon}\|_k,$$

also $D^+ \min(1/2^k, \|x_t - x'_t\|_k) = 0$.

b) $1/2^k \geqslant \|x_t - x'_t\|_k$. Im Falle $k \geqslant 1$ schließen wir so: Wäre

$$D^+ \min(1/2^k, \|x_t - x'_t\|_k) = D^+ \|x_t - x'_t\|_k > 0,$$

so gälte nach Hilfssatz 1, 3. $\|x_t - x'_t\|_k < \|x_t - x'_t\|_{k-1}$, also

$$\min(1/2^k, \|x_t - x'_t\|_k) < \min(1/2^{k-1}), \|x_t - x'_t\|_{k-1}),$$

gegen die Definition von k. Im Falle $k = 0$ aber liefert eine Schlußweise analog der in Hilfssatz 1, daß aus $0 < D^+\|x_t - x'_t\|_0$ folgt

$$D^+ \|x_t - x'_t\|_0 = D^+ |x(t) - x'(t)| \leqslant |D^+ |x(t) - x'(t)||.$$

Damit ist 1. gezeigt. 2. folgt daraus unmittelbar.

Hilfssatz 3. Sind $v(t)$ und $w(t)$ stetig auf (a,c) mit Werten in R und gilt $Dv(t) \leqslant w(t)$ für eine feste Dini-Derivierte D auf (a,c) (wobei man sogar eine höchstens abzählbare Menge ausnehmen kann), so ist $D_- v(t) \leqslant w(t)$ auf ganz (a,c).

Einen Beweis dieses Hilfssatzes findet man bei LAKSHMIKANTHAM und LEELA [5].

Hilfssatz 4. $g(t,z)$ sei nichtnegativ und stetig für $a < t \leqslant c$, $z \geqslant 0$. $f(t,\varphi)$ sei auf $[a,b) \times \Omega$ definiert und stetig mit Werten im R^n. $x(t), x'(t)$ seien Lösungen von $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, welche die FDG mindestens in $(a,c]$ erfüllen. $\dot{z}(t) = g(t,z)$ habe auf (a,c) eine Minimallösung $z(t)$ mit $z(c) = \varrho(x_c, x'_c)$. Auf $(a,c] \times \Omega$ gelte (2). So folgt $0 \leqslant z(t) \leqslant$ $\leqslant \varrho(x_t, x'_t)$ aus $a < t < c$.

Beweis. Die Gleichung $\dot{z}(t) = g(t,z) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $z(c) = \varrho(x_c, x'_c)$, hat auf (a,c) die Minimallösung $z(t,\varepsilon)$. Es ist $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} z(t,\varepsilon) = z(t)$. Wir zeigen, daß in (a,c)

$$z(t,\varepsilon) \leqslant \varrho(x_t, x'_t). \tag{3}$$

Sei nämlich diese Beziehung verletzt und d die obere Grenze der t-Werte, für die $z(t,\varepsilon) > \varrho(x_t, x'_t)$. So muß wegen der Stetigkeit von z und ϱ gelten

$$z(d,\varepsilon) = \varrho(x_d, x'_d), \quad a < d \leqslant c.$$

Da es in beliebiger Nähe links von d t-Werte mit $z(t,\varepsilon) > \varrho(x_t, x'_t)$ gibt, ist dann $\dot z(d,\varepsilon) \leqslant D_- \varrho(x_d, x'_d)$. Unter Anwendung der Hilfssätze 2 und 3 erhalten wir also

$$g(d, z(d,\varepsilon)) + \varepsilon = \dot z(d,\varepsilon) \leqslant D_- \varrho(x_d, x'_d) \leqslant |\dot x(d) - \dot x'(d)| =$$
$$= |f(d, x_d) - f(d, x'_d)| \leqslant g(d, \varrho(x_d, x'_d)) = g(d, z(d,\varepsilon)),$$

was $\varepsilon > 0$ widerspricht. Somit gilt die Gleichung (3) für jedes positive ε, woraus die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Mit diesen Hilfssätzen können wir nun den eingangs aufgestellten Eindeutigkeitssatz beweisen. Es seien $x(t)$ und $x'(t)$ zwei verschiedene Lösungen von $\dot x(t) = f(t, x_t)$ mit $x_a = x'_a = \varphi$, und zwar nehmen wir an $\varrho(x_c, x'_c) \neq 0$ für ein c, $a < c < b$. So hat

$$\dot z(t) = g(t,z), \quad z(c) = \varrho(x_c, x'_c)$$

auf $(a,c]$ eine Minimallösung $z(t)$, die nach Hilfssatz 4 $0 \leqslant z(t) \leqslant$ $\leqslant \varrho(x_t, x'_t)$ für $a < t < c$ erfüllt. Wegen $\lim\limits_{t\to a} \varrho(x_t, x'_t) = \varrho(\varphi,\varphi) = 0$ ist auch $\lim\limits_{t\to a} z(t) = 0$. Wir setzen $z(a) := 0$. So ist für $a < t < c$

$$0 \leqslant \frac{z(t) - z(a)}{t-a} \leqslant \frac{\varrho(x_t, x'_t)}{t-a},$$

und unter Verwendung von Hilfssatz 2

$$0 \leqslant D_+ z(a) \leqslant D^+ z(a) \leqslant D^+ \varrho(x_a, x'_a) \leqslant |\dot x(a) - \dot x'(a)| =$$
$$= |f(a,\varphi) - f(a,\varphi)| = 0.$$

Also existiert $\dot z_+(a)$ und ist $= 0$. Nach Voraussetzung ist daher $z(t) = 0$ auf $[a,c)$, und es muß

$$0 = \lim_{t\to c^-} z(t) = z(c) = \varrho(x_c, x'_c)$$

gelten, gegen die Annahme. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Aus dem Beweis von Hilfssatz 4 sieht man, daß (2) zu

$$|f(t,\varphi) - f(t,\varphi')| \leqslant g(t, \varrho(\varphi,\varphi')), \text{ falls } \varrho(\varphi,\varphi') = |\varphi(0) - \varphi'(0)| \quad (2^*)$$

abgeschwächt werden kann.

Literatur

[1] ARENS, R. F.: A topology for spaces of transformations. Ann. of Math. **47**, 480—495 (1946).

[2] HALE, J. K.: Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. J. differential Equations **1**, 452—482 (1965).

[3] HALE, J. K., und C. IMAZ: Existence, uniqueness, continuity, and continuation of solutions for retarded differential equations. Bol. Soc. mat. Mexicana **11**, 29—37 (1966).

[4] LAKSHMIKANTHAM, V.: Some results in functional differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. India **34**, 299—306 (1964).

[5] LAKSHMIKANTHAM, V., und S. LEELA: Differential and integral inequalities. New York: Academic Press. 1969.

[6] STETTNER, H.: Anfangswertprobleme bei Funktional-Differentialgleichungen. Habilitationsschrift an der Technischen Hochschule in Graz, 1971.

Anschrift des Autors:

Dr. H. STETTNER
Institut für Mathematik II
Technische Hochschule in Graz
Kopernikusgasse 24
A-8010 Graz, Österreich