# Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale.

Von

Felix Klein in Göttingen.

---

In der im vorigen Annalenbande abgedruckten Arbeit *über Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind*, entwickele ich (pag. 133 daselbst) im Anschlusse an die Untersuchungen von Herrn Rohn u. A. einen Satz, demzufolge eine gerade Linie mit den elliptischen Coordinaten $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ sich entweder um einen festen Punkt der zu Grunde liegenden Kummer'schen Fläche dreht oder in einer festen Tangentialebene derselben fortschreitet, sofern bei irgendwie fixirten Vorzeichen die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems erfüllt sind:

$$\sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \tag{1}$$

wo $\nu = 0$, 1 zu nehmen ist und $\varphi(\lambda)$ das Product bezeichnet:

$$\varphi(\lambda) = \prod_1^6{}_i (\lambda - k_i). \tag{2}$$

Ich berühre ferner (pag. 138 daselbst, Fussnote) eine andere Deutung desselben Theorems, die sich für Differentiale von analogem Aufbau in der Dissertation des Herrn Domsch findet*) und auf deren Inhalt ich weiter unten noch genauer eingehen werde. Die folgenden Entwickelungen, die ich bei Gelegenheit zusammenstellte, haben den Zweck, die allgemeinen auf confocale Mannigfaltigkeiten zweiten Grades eines beliebig ausgedehnten Raumes bezüglichen Sätze aufzuweisen, unter welche sich die gesammten Theoreme subsumiren. Hierdurch wird, wie ich hoffe, nicht nur über die zunächst in Betracht kommenden liniengeometrischen Theoreme und eine grosse Zahl ähnlicher Beziehungen neue Klarheit verbreitet, sondern insbesondere auch unsere allgemeine Kenntniss der confocalen Mannigfaltigkeiten zweiten

---

*) 1885, cf. Grunert's Archiv, Neue Serie, Theil 2.

Grades durch Aufweisung einer merkwürdigen Gruppirung gewisser in ihnen enthaltener linearer Räume wesentlich vervollständigt. Letzteres aber erscheint um so werthvoller, als die Gruppirung der auf quadratischen Mannigfaltigkeiten enthaltenen linearen Räume immer noch wenig untersucht ist, während sie doch in verschiedenem Betracht von durchschlagender Wichtigkeit sein muss; man vergleiche die Schlussbemerkungen der hier vorangehenden Arbeit: *Ueber die Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades.* — Um die Darstellung nicht zu abstract zu gestalten, erörtere ich die zur Verwendung kommenden Schlussweisen zunächst ausführlich für den dreidimensionalen Punktraum, übertrage dieselben dann in grossen Zügen auf den Raum von beliebig vielen Dimensionen und steige schliesslich zum Falle der Liniengeometrie wieder herab. Mein Grundsatz ist dabei, im Gegensatze zu sonstigen diese Fragen betreffenden Arbeiten möglichst wenig zu rechnen, wesshalb ich denn auch in § 1 und anderwärts auf den Beweis sonst bekannter Theoreme aufs Neue eingehe.

## § 1.

### Die confocalen $F^{(2)}$ des $R_3$ und der auf sie bezügliche Fundamentalsatz.

Indem ich von der Berücksichtigung irgendwelcher metrischer Beziehungen oder Realitätsdiscussionen im Folgenden durchweg absehe, definire ich hier, was fortan eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades des dreifach ausgedehnten Punktraums genannt werden soll, durch folgende Gleichung:

$$(2)\qquad \sum_1^4{}_i \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0,$$

in der die $k_i$ irgendwie gegebene von einander verschiedene Grössen, die $x_i$ aber beliebige Tetraedercoordinaten bedeuten sollen. Als elliptische Coordinaten des Punktes $x$ bezeichne ich die Wurzeln $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ (allgemein $\lambda_\alpha$), welche (2) bei festgehaltenen $x_i$ für $\lambda$ als Unbekannte ergiebt. Schreiben wir dann:

$$(3)\qquad \varphi(\lambda) = \prod_1^4{}_i (\lambda - k_i) . (\lambda - a)(\lambda - b)$$

und verlangen das Bestehen der Abel'schen Differentialgleichungen:

$$(4)\qquad \sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

so bewegt sich der Raumpunkt $\lambda$, einem Satze zufolge, der wohl zuerst von Liouville aufgestellt wurde*) und der hier als *Fundamentalsatz* bezeichnet werden soll, *auf einer geraden Linie, welche die Flächen* $\lambda = a$ *und* $\lambda = b$ *berührt.* Aus dem in der Einleitung bemerkten Grunde und mit Rücksicht auf die Verallgemeinerungen, die ich für höhere Fälle beabsichtige, gebe ich hier zunächst einen neuen, möglichst einfachen Beweis dieses Satzes.

Mein Beweis ruht darauf, *das algebraische Gebilde, welches von der Gesammtheit der Schnittpunkte einer beliebigen Raumgeraden mit den Flächen* (2) *gebildet wird, in doppelter Weise aufzufassen.* Erstlich nehme ich, wie es am nächsten liegt, je diejenigen drei (durch die Werthe $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ des zugehörigen $\lambda$ unterschiedenen) Schnittpunkte zusammen, welche in den nämlichen Punkt der Raumgeraden fallen. Das algebraische Gebilde stellt sich dann als dreifache Ueberdeckung unserer Raumgeraden dar, wobei die drei Ueberdeckungen an denjenigen Stellen Verzweigungspunkte haben, an denen die Raumgerade der developpablen Fläche begegnet, welche den Flächen (2) gemeinsam umgeschrieben ist. Als Zahl dieser Stellen ergiebt sich auf Grund bekannter Abzählungen 8, woraus sich das Geschlecht des algebraischen Gebildes als 2 berechnet. Wir schliessen sofort, dass es zwei zugehörige überall endliche Differentiale giebt, die wir $du^{(1)}$, $du^{(2)}$ nennen wollen. Indem wir noch durch einen unteren Index 1, 2 oder 3 unterscheiden, ob wir uns in der ersten oder der zweiten oder dritten Ueberdeckung der Raumgeraden befinden (ob wir uns also die in den Differentialen vorkommende algebraische Function des Ortes, $\lambda$, gleich $\lambda_1$ oder gleich $\lambda_2$ oder $\lambda_3$ gesetzt denken wollen) haben wir in bekannter Weise bei beliebigem Fortschreiten auf der Raumgeraden:

$$(5) \qquad du_1^{(1)} + du_2^{(1)} + du_3^{(1)} = 0, \qquad du_1^{(2)} + du_2^{(2)} + du_3^{(2)} = 0,$$

Wir wenden uns jetzt zur zweiten Auffassung unseres algebraischen Gebildes. Dieselbe ruht darauf, dass wir immer diejenigen zwei Stellen desselben zusammengenommen denken, welche derselben Fläche $\lambda$ der Schaar (2) angehören. Wir erhalten so eine zweifache Ueberdeckung des Gebietes der Variabelen $\lambda$, wobei, damit das Geschlecht 2 herauskomme, 6 Verzweigungsstellen auftreten müssen, solchen Flächen zweiten Grades der Schaar (2) entsprechend, die unsere Raumgerade in zusammenfallenden Punkten treffen. Vier dieser letzteren Flächen sind a priori bekannt: es sind die doppeltzählenden Ebenen des Coordinatentetraeders der $x_i$, welche unter der Schaar (2) für $\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4$ enthalten sind; die anderen beiden (die beliebig liegen können) nennen

*) Journal des Mathématiques, sér. I, t. 12 (1847). Wegen weiterer hier anknüpfender Entwickelungen und insbesondere der einschlägigen Literatur vergl. Staude in Bd. 22 dieser Annalen (*Geometrische Deutung des Additionstheorems hyperelliptischer Integrale* etc.)

wir, um den Anschluss an die Formeln (3) und (4) zu erzielen, $\lambda = a$ und $\lambda = b$. Ich will auch die Bezeichnung $\varphi(\lambda)$ der Formel (3) wieder aufnehmen. Dann ist vermöge unserer neuen Auffassungsweise ersichtlich, dass die beiden soeben eingeführten Differentiale $du^{(1)}$, $du^{(2)}$ in folgende Form gesetzt werden können:

$$du^{(1)} = \frac{\pm d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad du^{(2)} = \frac{\pm \lambda d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}. \tag{6}$$

*Dies aber in* (5) *eingetragen ergiebt die Formeln* (4), *womit der gewünschte Beweis der letzteren erbracht ist.* In der That ist ja die „beliebige“ Raumgerade, mit der wir unseren Beweis begannen, im Verlaufe des Beweises von selbst in eine solche übergegangen, welche die Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ berührt.

Uebrigens ist leicht zu sehen, dass wir unseren Fundamentalsatz noch ein wenig strenger formuliren können. Man beachte, dass von einem beliebigen Raumpunkte aus an zwei gegebene Flächen zweiten Grades 4 gemeinsame Tangenten möglich sind, während die Differentialgleichungen (4) vermöge der in ihnen unbestimmt bleibenden Vorzeichen gerade auch 4 Fortschreitungsrichtungen vom Punkte $\lambda$ aus bestimmen. Wir wussten bisher nur, dass unsere Differentialgleichungen thatsächlich erfüllt sind, wenn wir auf einer der genannten gemeinsamen Tangenten fortschreiten; wir sehen jetzt, dass sie auch *auf keine andere Weise* erfüllt werden können. *Die gemeinsamen Tangenten der Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ sind also als Integralcurven der Differentialgleichungen* (4) *charakterisirt.* In diesem verschärften Sinne soll fortan unser Fundamentalsatz aufgefasst sein.

## § 2.

## Die erste Ausdehnung des Fundamentalsatzes.

Statt der Gleichungen (3), (4) betrachte ich jetzt einen Augenblick die folgenden:

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_1^4{}^i (\lambda - k_i), \qquad \sum_1^2{}^\alpha \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \tag{7}$$

wo in $\varphi_1(\lambda)$ die beiden in dem früheren $\varphi(\lambda)$ enthaltenen Factoren $(\lambda - a)$ und $(\lambda - b)$, die ich fortan als *willkürliche* Factoren bezeichne, weggeblieben sind und dafür nur *eine* Differentialgleichung geschrieben ist, bei der sich das Summenzeichen auf die beiden Indices 1 und 2 beschränkt, so dass $\lambda_3$ als constant zu gelten hat. Welches ist die geometrische Deutung dieses Gleichungssystems? Da wir $\lambda_3 =$ Const. gesetzt haben, so liefert die Integration von (7) jedenfalls solche Curven, die ganz auf einer, übrigens beliebigen $F^{(2)}$ unserer Schaar verlaufen. Man erkennt jetzt leicht, *dass es sich einfach nur um die geradlinigen Erzeugenden der* $F^{(2)}$ *handelt**). Der Beweis lässt sich genau so gliedern, wie beim Satze des vorigen Paragraphen. Wir haben unsere Aufmerksamkeit wieder einem einfach ausgedehnten algebraischen Gebilde zuzuwenden, nämlich demjenigen, das von den Schnittpunkten einer geradlinigen Erzeugenden unserer festen $F^{(2)}$ mit den übrigen $F^{(2)}$ der confocalen Schaar gebildet wird. Dieses Gebilde kann einmal so aufgefasst werden, dass es die gewählte Erzeugende mehrfach (und zwar doppelt) überdeckt, andererseits wieder so, dass jeder Fläche $\lambda$ zwei seiner Elemente zugeordnet werden, wobei sich Verzweigungsstellen bei $\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4$ einstellen. Der Vergleich beider Auffassungsweisen ergiebt sofort, dass die Differentialgleichung (7) beim Fortschreiten auf einer geradlinigen Erzeugenden der festen $F^{(2)}$ thatsächlich erfüllt ist. Nun bietet (7) aber ebenso viele Vorzeichencombinationen dar, als die Zahl der Erzeugenden beträgt, die auf $\lambda_3 =$ Const. durch einen beliebigen Punkt laufen. Die in Rede stehenden Erzeugenden sind also wieder auch die einzigen Curven, die der vorgeschriebenen Differentialbeziehung genügen.

Diese Betrachtung und Interpretation der Gleichungen (7) sollen hier nur vorläufige Bedeutung haben. Was wir eigentlich anstreben, ist die geometrische Integration der folgenden Gleichung:

$$(8) \qquad \sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

in der $\varphi_1(\lambda)$ dieselbe Bedeutung hat, wie in (7), die Summation über $\alpha$ aber von 1 bis 3 erstreckt ist, also sämmtliche $\lambda$ als beweglich gelten. Offenbar handelt es sich jetzt darum, dass der Punkt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf gewissen *Flächen* fortschreitet, die den Raum so erfüllen, dass durch jeden Punkt vier derselben laufen. Aus dem Umstande, dass wir es in (8) mit der Differentialgleichung des Additionstheorems des elliptischen Integrals erster Gattung zu thun haben, werden wir sofort schliessen, dass es sich um *algebraische* Flächen handelt. Aber welches ist die nähere Definition dieser Flächen? Ich sage, dass wir *Ebenen* finden und zwar keine anderen Ebenen, als *die gemeinsamen Tangentialebenen der* $F^{(2)}$ *unserer confocalen Schaar.*

Der nächstliegende Beweis dieses Satzes beruht auf einer directen Verallgemeinerung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Da es bekannt ist, dass es gemeinsame Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ giebt

---

*) Dieser Satz ist keineswegs neu; man findet ihn beispielsweise in Herrn Darboux's Buche: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873), auf welches ich hier um so lieber verweisen will, als es mannigfache Beziehungspunkte auch zu den folgenden Paragraphen des Textes darbietet.

und dass diese Ebenen eine Developpable vierter Classe umhüllen, so genügt es, zu verificiren, dass die Differentialgleichung (8) erfüllt ist, wenn wir in einer solchen Ebene, die wir als gegeben betrachten, fortschreiten. Dies aber gelingt sofort, wenn wir beachten, dass die Paare geradliniger Erzeugender, in denen eine solche Ebene von unseren confocalen $F^{(2)}$ geschnitten wird, innerhalb der Ebene eine Curve dritter Classe vom Geschlechte Eins umhüllen, zu der ein bestimmtes überall endliches Integral gehört, das wir $u$ nennen, — dass für je drei in einem Punkte der Ebene zusammenlaufende Tangenten der Curve dem Abel'schen Theoreme zufolge

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{Const.}$$

ist, — dass endlich $du$ vermöge der Beziehung der Curve auf das Gebiet der Variabelen $\lambda$ in die Form gesetzt werden kann:

$$du = \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi_1(\lambda)}}.$$

Der Unterschied dieser Betrachtung von der früheren ist ersichtlich nur der, dass jetzt eine ebene Curve zu Grunde gelegt wird, wo wir damals eine mehrfach überdeckte Gerade vor uns hatten.

Der hiermit angedeutete Beweis ist an sich so einfach wie möglich. Er setzt aber voraus, dass wir über die Existenz und Haupteigenschaften der gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ bereits unterrichtet sind, und eignet sich daher nicht für die weiterhin beabsichtigten Verallgemeinerungen, bei denen uns solche Vorkenntnisse nicht zu Gebote stehen. Ich entwickele daher hier eine andere Beweismethode, bei welcher die Existenz der gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ selbst erst aus (8) erschlossen wird.

Die neue Methode, welche ich darzulegen habe, geht davon aus, Gleichung (8) mit Gleichung (7) zu vergleichen und die für (7) gefundene Interpretation als bekannt vorauszusetzen. Gleichung (7) geht aus Gleichung (8) hervor, indem wir $\lambda_3$ constant nehmen. Wir schliessen, dass die durch (8) definirten Flächen die Eigenschaft haben, jede Fläche $\lambda_3 = \text{Const.}$, d. h. schlechthin jede $F^{(2)}$ unserer confocalen Schaar, nach Curven zu schneiden, welche (7) befriedigen, d. h. nach geradlinigen Erzeugenden zu schneiden. Unsere Fläche ist also jedenfalls vollständig durch gerade Linien überdeckt. Nun gehen aber durch jeden Raumpunkt drei $F^{(2)}$ der confocalen Schaar. *Unsere Fläche ist also sogar dreifach durch gerade Linien überdeckt.* Dann aber muss sie aus evidenten Gründen eine Ebene sein. Denn eine krumme Fläche kann nie mehr als zwei Schaaren geradliniger Erzeugender aufweisen (Hyperboloid). Wir finden also *Ebenen*, und zwar *Ebenen, welche sämmtliche $F^{(2)}$ unserer Schaar nach geraden Linien schneiden*, d. h. gemeinsame Tangentialebenen der $F^{(2)}$ unserer Schaar, w. z. b. w.

Wir müssen noch ausführen, dass mit den so definirten Ebenen sämmtliche gemeinsame Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ erschöpft sind. Dies gelingt folgendermassen. Wir betrachten irgend zwei durch einen Punkt laufende $F^{(2)}$ unserer Schaar und die zweimal zwei Erzeugenden, welche auf diesen $F^{(2)}$ durch den Punkt hindurchgehen. Soll eine gemeinsame Tangentialebene sämmtlicher confocaler $F^{(2)}$ durch den Punkt hindurch möglich sein, so muss dieselbe jede der beiden vorgenannten $F^{(2)}$ nach einer durch den Punkt hindurchlaufenden Erzeugenden schneiden, sie muss also eine der beiden durch den Punkt hindurchgehenden Erzeugenden der einen Fläche mit einer der beiden entsprechenden Erzeugenden der anderen Fläche verbinden. Die Zahl der durch den Punkt hindurchlaufenden gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ kann also nicht grösser als 4 sein, und da 4 gerade auch die Zahl der bei (8) möglichen Vorzeichencombinationen ist, so ist die geforderte Ergänzung unseres Gedankenganges erbracht:

*Durch jeden Raumpunkt hindurch gehen der Differentialgleichung* (8) *entsprechend vier Ebenen, welche geometrisch als gemeinsame Tangentenebenen der $F^{(2)}$ der confocalen Schaar charakterisirt sind.*

Es ist sehr merkwürdig, dass die Ergänzung, welche wir unserem zweiten Beweisgange hinzufügten, zu derjenigen, welche beim ersten Beweisgange nöthig war, gewissermassen complementär ist. In der That handelte es sich jetzt darum, dass geometrisch nicht mehr Ebenen einer gewissen Definition geliefert werden, als es Ebenen giebt, die der Differentialgleichung (8) genügen, während wir früher zu zeigen hatten, dass unsere Differentialgleichungen nicht etwa noch andere Integralmannigfaltigkeiten zulassen als diejenigen, deren geometrische Natur wir bereits erkannten.

## § 3.

## Die zweite Ausdehnung des Fundamentalsatzes.

Die zweite Ausdehnung, die ich dem Fundamentalsatze zu geben beabsichtige, bezieht sich auf Folgendes: es soll sich darum handeln anzugeben, wie sich die Bedeutung der Gleichungen (4) oder (8) modificirt, wenn wir in $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ statt eines oder mehrerer Factoren $(\lambda - k_i)$ *willkürliche* Factoren $(\lambda - c)$, $(\lambda - d)$, etc. einführen.

Um die so gestellte Frage in einfachster Weise zu beantworten, bediene ich mich einer geometrischen Transformation. Ich setze:

$$(9) \qquad x_i^2 = \xi_i.$$

Dann geht Gleichung (2) der confocalen Flächen zweiten Grades in folgende über:

$$\sum_1^4 {}_i \frac{\xi_i}{\lambda - k_i} = 0, \tag{10}$$

d. h. die Schaar der Flächen in die Schaar der einfach unendlich vielen Osculationsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung. Für Gleichung (4) aber, die wir in unveränderter Form hersetzen:

$$\begin{gathered} \sum_1^3 {}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \\ \left(\nu = 0, 1; \quad \varphi(\lambda) = \prod_1^4 {}_i (\lambda - k_i)\ (\lambda - a)(\lambda - b)\right), \end{gathered} \tag{11}$$

ergiebt sich nach leichter Ueberlegung*), dass sie diejenigen *Kegelschnitte* des Raumes der $\xi$ definirt, welche die Ebenen (10), die folgenden Parameterwerthen entsprechen:

$$\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4, a, b,$$

berühren. Gleichung (8) hingegen, die ich ebenfalls noch einmal herschreibe:

$$\left\{ \begin{gathered} \sum_1^3 {}_\alpha \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \\ \left(\varphi_1(\lambda) = \prod_1^4 {}_i (\lambda - k_i)\right), \end{gathered} \right. \tag{12}$$

bedeutet jetzt diejenigen *Steiner'schen Flächen*, welche zur Raumcurve dritter Ordnung (10) in der Beziehung stehen, dass sie eine beliebige Osculationsebene derselben in zwei Kegelschnitten schneiden, die vier Osculationsebenen aber, deren Parameter $\lambda$ bez. gleich $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ sind, nach Erstreckung ganzer Kegelschnitte berühren.

Der Gewinn, den wir hiernach durch die Substitution (9) erzielt haben, liegt darin, dass die Unterscheidung der Factoren $(\lambda - k_i)$ und der willkürlichen Factoren $(\lambda - a)$ etc. für die geometrische Deutung gegenstandslos geworden ist. Führen wir statt etwelcher Factoren $(\lambda - k_i)$ neue willkürliche Factoren $(\lambda - c)$ etc. ein, so ist der Erfolg augenscheinlich der, dass in den gerade ausgesprochenen Sätzen an Stelle der Ebenen $\lambda = k_i$ etc. die Ebenen $\lambda = c$ etc. zu nennen sind, während die Form der Sätze selbst völlig ungeändert bleibt. Dies legen wir jetzt zu Grunde und kehren vermöge der Transformation (9) von den

---

*) Nämlich entweder vermöge unserer Transformation aus dem Fundamentalsatze des § 1, oder auch durch Wiederholung des damaligen Beweisverfahrens an dem von den Schnittpunkten des Kegelschnitts und der Osculationsebenen (10) erzeugten algebraischen Gebildes.

$\xi_i$ zu den $x_i$ zurück. Die ursprüngliche Frage nach der Bedeutung der modificirten Differentialgleichungen im Raume der $x_i$ ist dann in folgende rein algebraische verwandelt: *Im Raume der $\xi_i$ ist ein Kegelschnitt gegeben* (der selbstverständlich mit der Raumcurve dritter Ordnung (10) sechs Osculationsebenen gemein hat) *oder auch eine Steiner'sche Fläche, welche zur Raumcurve dritter Ordnung in der oben bezeichneten Beziehung steht* (die der Raumcurve eingeschrieben ist, wie man kurz sagen könnte): *es soll entschieden werden, welche Bilder Kegelschnitt und Steiner'sche Fläche im Raume der $x_i$ finden.*

Ich will das Resultat, welches sich unmittelbar darbietet, hier nur für den Fall aussprechen, dass sämmtliche Factoren $(\lambda - k_i)$ durch willkürliche Factoren ersetzt worden sind. Dabei benenne ich eine Fläche oder eine Curve oder auch Punktsystem als *symmetrisch*, wenn die zugehörige algebraische Definition bei irgend welchen Vorzeichenänderungen der $x_i$ ungeändert bleibt. Wir haben dann folgende Sätze:

I. *Sei*

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)(\lambda - f),$$

*dann werden die Differentialgleichungen:*

$$\sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1) \tag{13}$$

*durch symmetrische Curven achter Ordnung integrirt, welche die Flächen $\lambda = a, b, c, d, e, f$ je achtmal in beziehungsweise symmetrisch gelegenen Punkten berühren.*

II. *Sei*

$$\varphi_1(\lambda) = (\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)(\lambda - f).$$

*Die Integralflächen der Differentialgleichung:*

$$\sum_1^3{}_\alpha \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0 \tag{14}$$

*sind dann symmetrische Flächen achter Ordnung, welche jede $F^{(2)}$ der confocalen Schaar in einem Paare symmetrischer Curven achter Ordnung durchsetzen, die Flächen $\lambda = c, d, e, f$ aber nach Erstreckung je einer solchen Curve berühren.*

Wie nun entstehen aus diesen Curven und Flächen die speciellen, die wir in § 1 und 2 fanden? Die Sache ist selbstverständlich elementar, und so mag es genügen, hier nur das Resultat der betr. Ueberlegung mitzutheilen. So lange in $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ der Factor $\lambda - k_i$ noch nicht vorhanden ist, wird die Coordinatenebene $x_i = 0$ von der symmetrischen Curve oder Fläche achter Ordnung gewissermassen *senkrecht* geschnitten, d. h. so geschnitten, dass die Tangente der Curve bez. die Tangentialebene der Fläche durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Coordinatentetraeders hindurchläuft. Dies kann nicht völlig aufhören zu gelten, wenn auch einer der Factoren von $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ in $(\lambda - k_i)$ übergeht, während dann doch gleichzeitig die Curve oder Fläche achter Ordnung die Ebene $x_i = 0$ berühren soll. Die Folge ist, dass die 8 Schnittpunkte der Curve mit der Ebene in *4 Doppelpunkte* zusammenrücken und die Schnittcurve achter Ordnung der Fläche mit der Ebene in eine *Doppelcurve vierter Ordnung* übergeht (während Curve wie Fläche nach wie vor symmetrisch bleiben). Man denke sich dies jetzt bei sämmtlichen 4 Coordinatenebenen gleichzeitig eintretend. Dann ist die Folge, wie man sofort sieht, dass die Curve oder Fläche in ein symmetrisches Aggregat von 8 linearen Bestandtheilen *zerfällt*, also die Curve in 8 Gerade, die Fläche in 8 Ebenen, die aus einer Geraden bez. Ebene durch die Vorzeichenwechsel der $x_i$ hervorgehen. Und nun ist die Beziehung zu den Sätzen der § 1 und 2 ohne weiteres ersichtlich: wir haben damals je nur von *einer* dieser acht geraden Linien oder Ebenen gesprochen, insofern wir keinen Anlass hatten, auch noch die anderen Linien etc. zu betrachten, die aus der ersten Geraden durch die Vorzeichenwechsel der $x_i$ entstehen. Dem entspricht auch, dass wir statt der achtmaligen Berührung der Curve achter Ordnung mit gewissen Flächen zweiten Grades in § 1 nur eine je einmalige Berührung der in Betracht kommenden geraden Linie und der Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ fanden, etc. etc. —

Ich habe hier gleich die beiden äussersten Fälle einander gegenübergestellt, dass nämlich an den Producten $\varphi(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)$ entweder keiner der Factoren $\lambda - k_i$ oder alle diese Factoren betheiligt sind. Es hat keinen Zweck, die verschiedenen möglichen Zwischenfälle hier einzeln aufzuzählen. Ich will hier nur den Fall hervorheben, dass in $\varphi(\lambda)$ drei der Factoren $(\lambda - k_i)$ und also noch drei willkürliche Factoren enthalten sind. Die Integralcurven des allgemeinen Falles zerfallen dann in Kegelschnitte, welche nur auf der einen der vier Coordinatenebenen senkrecht stehen (in dem eben erwähnten Sinne), während sie gleichzeitig drei $F^{(2)}$ der confocalen Schaar je zweimal berühren*).

## § 4.

## Uebergang zu Räumen von $(n-1)$ Dimensionen.

Indem wir jetzt statt des gewöhnlichen Punktraums einen Raum von $(n-1)$ Dimensionen, $R_{n-1}$, einführen, versuchen wir die Entwickelungen der § 1 und 2 auf diesen allgemeineren Fall zu übertragen. Eine gleiche Uebertragung ist natürlich ebensowohl bei den Betrachtungen

*) Man sehe diesen Satz bei Darboux, l. c. —

des § 3 statthaft; wir unterlassen sie aber, da sie keinerlei besondere Schwierigkeit darbietet und eine blosse Häufung in ihrer Allgemeinheit doch unanschaulicher Theoreme nicht unser Zweck sein kann. Auf den Inhalt des § 3 kommen wir vielmehr erst zurück, wenn wir später die für beliebiges $n$ erhaltenen Resultate am Falle der Liniengeometrie, der $n = 6$ entspricht, wieder specialisiren.

Als Ausgangsgleichung für unsere neue Betrachtung werden wir, der Gleichung (3) entsprechend, die folgende hinstellen:

$$\sum_1^n {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \tag{15}$$

vermöge deren jedem Raumpunkte $x$ im Ganzen $(n-1)$ *elliptische* Coordinaten

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ (allgemein } \lambda_\alpha)$$

zugeordnet werden. Wir wollen dabei sagen, dass jede einzelne Gleichung (15) eine *quadratische Mannigfaltigkeit von* $(n-2)$ *Dimensionen*, $M_{(n-2)}^{(2)}$, bestimmt. Den Buchstaben $M$ mit ähnlicher Stellung zweier Indices verwenden wir später allgemein zur Bezeichnung irgend welcher algebraischer Mannigfaltigkeiten nach Ordnung und Dimension. Insbesondere *lineare* in $R_{n-1}$ einbegriffene Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir kurzweg mit dem Buchstaben $R$, wobei wir die Dimensionen wieder durch einen rechts unten beigefügten Index markiren (z. B. $R_\varrho$)*).

Wenn wir jetzt zunächst das Analogon zum Fundamentalsatze des § 1 aufstellen wollen**), so werden wir vor Allem dem Producte der $n$ jetzt a priori gegebenen Factoren

$$\prod_1^n {}_i (\lambda - k_i)$$

noch $(n-2)$ willkürliche Factoren zufügen, die

$$(\lambda - a_\varkappa)$$

heissen sollen $(\varkappa = 1, 2, \ldots, (n-2))$, so dass ein Ausdruck $\varphi(\lambda)$ entsteht, der folgendermassen lautet:

$$\varphi(\lambda) = \prod_1^n {}_i (\lambda - k_i) \cdot \prod_1^{n-2} {}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa). \tag{16}$$

Wir construiren dann die Differentialgleichungen:

---

*) Dies ist dieselbe Bezeichnungsweise, deren ich mich in der vorangehenden Abhandlung bediene.

**) Die Ausdehnung des Fundamentalsatzes auf beliebig viele Dimensionen findet sich schon in einer Arbeit von Schläfli, die von 1849 datirt ist und 1852 in Crelle's Journal t. 43 veröffentlicht wurde.

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3), \tag{17}$$

und finden durch genau dasselbe Schlussverfahren, das wir in § 1 anwandten, den folgenden ersten Satz:

I. *Die Gleichungen* (17) *werden durch diejenigen* $\infty^{n-2}$ $R_1$ *integrirt, welche die* $(n-2)$ *beliebig vorgegebenen* $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda = a_1, \ \lambda = a_2, \ \ldots, \ \lambda = a_{n-2}$$

*berühren, und von denen durch jeden Raumpunkt* $2^{n-2}$ *hindurchgehen.*

Diese Zahl $2^{n-2}$ ist zunächst durch die Zahl der in (17) möglichen Vorzeichencombinationen gegeben; wir bestimmen sie algebraisch, indem wir die $(n-2)$ Kegel zweiter Ordnung, die sich vom beliebig gewählten Raumpunkte aus an die $(n-2)$ $M_{(n-2)}^{(2)}$ legen lassen, zum gemeinsamen Schnitt bringen. Dass beidemal dieselbe Zahl resultirt, ist in der Form, die wir Satz I ertheilt haben, bereits ausgesprochen.

Wir fahren nun fort, wie in § 2 zu Anfang, indem wir von den in $\varphi(\lambda)$ auftretenden willkürlichen Factoren zwei weglassen, also etwa schreiben:

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_{1}^{n}{}_{i} (\lambda - k_i) \cdot \prod_{1}^{n-4}{}_{\varkappa} (\lambda - a_\varkappa) \tag{18}$$

und nun nur $(n-3)$ Differentialgleichungen bilden, bei denen wir eines der $\lambda$, also etwa $\lambda_{n-1}$, als constant voraussetzen:

$$\sum_{1}^{n-2}{}_{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-4). \tag{19}$$

Wir finden:

II. *Durch jeden Punkt der einzelnen* $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda_{n-1} = \text{Const.}$$

*laufen den Gleichungen* (19) *entsprechend* $2^{n-3}$ *in der* $M_{(n-2)}^{(2)}$ *enthaltene* $R_1$, *welche geometrisch dadurch charakterisirt sind, dass sie die* $(n-4)$ *beliebig vorgegebenen* $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda = a_1, \ \lambda = a_2, \ \ldots, \ \lambda = a_{n-4}$$

*berühren.*

Die Gesammtzahl der so auf der einzelnen $M_{(n-2)}^{(2)}$ (bei festgehaltenen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$) bestimmten $R_1$ beträgt $\infty^{n-3}$. Was die Zahl $2^{n-3}$ angeht, so erhalten wir dieselbe algebraisch, indem wir die ausgezeichnete $M_{(n-2)}^{(2)}$ [deren Gleichung $\lambda_{n-1} = \text{Const.}$ ist] mit ihrer Tangentialebene in dem gerade ausgewählten Punkte und übrigens den $(n-4)$ Kegeln zweiter Ordnung schneiden, die sich vom genannten Punkte aus an die Mannigfaltigkeiten $\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$ legen lassen.

Jetzt ist deutlich, dass wir den Schritt, der von (16) und (17) zu (18) und (19) führt, und der darin besteht, dass wir zwei der willkürlichen in $\varphi(\lambda)$ enthaltenen Factoren wegwerfen und dafür die Zahlenreihen, welche die Indices $\alpha$ und $\nu$ in den Differentialgleichungen durchlaufen, je um eine Einheit kürzen, — für grössere $n$ mehrere Mal wiederholen können. Ich will annehmen, dass dieser Schritt bereits $\varrho$-mal ausgeführt sei, wo $\varrho \leqq \left[\frac{n-2}{2}\right]$ sein wird. An Stelle des in (16) eingeführten $\varphi(\lambda)$ erhalten wir dann:

$$(20)\qquad \varphi_\varrho(\lambda) = \prod_1^n {}^i (\lambda - k_i) \cdot \prod_1^{n-2-2\varrho} {}^{\varkappa} (\lambda - a_\varkappa),$$

an Stelle der Differentialgleichungen (17) aber die $(n-2-\varrho)$ Differentialgleichungen:

$$(21)\qquad \sum_1^{n-1-\varrho} {}^{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho).$$

Der zugehörige Satz aber, der die Sätze I und II als specielle Fälle unter sich begreift, wird folgendermassen lauten:

III. *Auf der* $M^{2\varrho}_{n-\varrho-1}$, *welche irgend* $\varrho$ *Mannigfaltigkeiten unseres confocalen Systems:*

$$(21\text{ b})\qquad \lambda_{n-1} = C_1,\ \lambda_{n-2} = C_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho$$

*gemeinsam ist, verlaufen den Differentialgleichungen* (21) *entsprechend durch jeden Punkt* $2^{n-2-\varrho}$ $R_1$, *die geometrisch unter den übrigen* $R_1$ *der genannten Mannigfaltigkeit dadurch definirt sind, dass sie die* $n-2-2\varrho$ $M^{(2)}_{(n-2)}$:

$$\lambda = a_1,\ \lambda = a_2, \ldots, \lambda = a_{n-2-2\varrho}$$

*berühren.*

Die Gesammtzahl der hier (bei festen $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2-2\varrho}$) in Betracht kommenden $R_1$ ist $\infty^{n-\varrho-2}$.

Die Aufstellung der Sätze I, II, III erfolgt auf Grund der früheren Betrachtungen ohne Schwierigkeit. Es ist nun aber die Frage, ob wir, an sie anknüpfend, so weiterschliessen können, wie in § 2 geschah, ob wir also zu mehrfach ausgedehnten linearen Räumen von erkennbarer geometrischer Eigenschaft geführt werden, wenn wir den Index $\alpha$ in den Formeln (17), (19), (21) gleichförmig von 1 bis $n-1$ laufen lassen und die so entstehenden Differentialgleichungen integriren. Dass dies in der That der Fall ist, wollen wir im folgenden Paragraphen zeigen.

## § 5.

## Ausdehnung der Sätze des vorigen Paragraphen.

In welcher Richtung die Ausdehnung der Sätze des vorigen Paragraphen zu suchen ist, dürfte nach dem Gesagten bereits erkennbar sein. Wenn wir in den Differentialgleichungen (21) die Summation nach $\alpha$ nicht von 1 bis $(n-1-\varrho)$, sondern von 1 bis $(n-1-\varrho+\sigma)$ ausdehnen, wo $\sigma$ irgend eine Zahl $\leqq \varrho$ ist, also schreiben:

$$(22) \qquad \sum_{1}^{n-1-\varrho+\sigma} {}^{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (\nu - 3 - \varrho), \qquad n$$

während, den Gleichungen (21b) entsprechend,

$$(23) \qquad \lambda_{n-1} = C_1, \; \lambda_{n-2} = C_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho+\sigma} = C_{\varrho-\sigma}$$

gesetzt sein soll, so werden wir bei Integration der neuen Differentialgleichungen von jedem Punkte der durch (23) vorgestellten $M_{n-1-\varrho+\sigma}^{2(\varrho-\sigma)}$ auslaufend $2^{n-1-\varrho+\sigma}$ ganz in dieser Mannigfaltigkeit enthaltene algebraische $M_{\sigma+1}$ (überhaupt also auf der durch (23) vorgestellten Mannigfaltigkeit $\infty^{n-2-\varrho}\, M_{\sigma+1}$) erhalten. Von diesen $M_{\sigma+1}$ wissen wir zunächst nur, dass sie jedes Aggregat von weiter zutretenden $\sigma$ Mannigfaltigkeiten $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$(24) \qquad \lambda_{n-\varrho+\sigma-1} = C_{\varrho-\sigma+1}, \ldots, \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho$$

dem Satze III des vorigen Paragraphen zufolge (wie aus Vergleichung der Differentialgleichungen hervorgeht) nach lauter solchen $R_1$ schneiden, welche die an dem Ausdrucke $\varphi_\varrho(\lambda)$ ausgezeichnet betheiligten Mannigfaltigkeiten

$$(25) \qquad \lambda = a_1, \; \lambda = a_2, \ldots, \lambda = a_{n-2-2\varrho}$$

berühren (wobei alle in (24) enthaltene berührende $R_1$ dieser Art zur Verwendung gelangen). *Hieraus wollen wir schliessen, dass die* $M_{\sigma+1}$ *selber linear (also* $R_{\sigma+1}$*) sind, — dass sie jede einzelne der zutretenden Mannigfaltigkeiten* (24) *nach einem Paare linearer Räume* ($R_\sigma$) *schneiden, welche zusammenfallen, wenn man als zutretende Mannigfaltigkeit insbesondere eine der* (25) *wählt, — dass ferner ausser den* $R_{\sigma+1}$, *die* (24) *genügen, keine anderen* $R_{\sigma+1}$ *derselben geometrischen Definition existiren.* Wir mögen in diesem Satze der Zahl $\sigma$ insbesondere den Maximalwerth $\varrho$ ertheilen. *Dann soll es also den Differentialgleichungen entsprechend:*

$$(26) \qquad \sum_{1}^{n-1} {}^{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho)$$

*von jedem Punkte des* $R_{n-1}$ *auslaufend* $2^{n-2}\, R_{\varrho+1}$ *(i. e. im Ganzen* $\infty^{n-2-\varrho}\, R_{\varrho+1}$*) geben, welche jede unserer confocalen Mannigfaltigkeiten* *nach einem Paare von $R_\varrho$ schneiden, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn man eine der Mannigfaltigkeiten* (25) *herannimmt; zugleich soll es keine anderen $R_{\varrho+1}$ dieser Eigenschaft geben als die durch* (26) *gefundenen.*

Man bemerke, dass wir aus dem letztausgesprochenen Satze den vorangehenden, auf beliebiges $\sigma$ bezüglichen und darum scheinbar allgemeineren sofort wieder ableiten können. Denn wenn der Schnitt eines der in Rede stehenden $\infty^{n-2-\varrho}$ $R_{\varrho+1}$ mit jeder der confocalen Mannigfaltigkeiten in lineare Bestandtheile zerfällt, so geschieht nothwendig das Gleiche mit dem Schnitte, den $R_{\varrho+1}$ mit beliebig vielen, gleichzeitig in Betracht gezogenen confocalen Mannigfaltigkeiten gemein hat. Nun repräsentirt jeder durch (22), (23) definirte $R_{\sigma+1}$, wie durch Vergleichung der Differentialgleichungen (22), (26) hervorgeht, nur den einzelnen der $2^{\varrho-\sigma}$ linearen Bestandtheile, die in dem hiermit bezeichneten Sinne durch Zusammenstellung eines geeigneten $R_{\varrho+1}$ mit den Mannigfaltigkeiten (23) definirt wird (wie denn auch die Zahl der $R_{\sigma+1}$ und $R_{\varrho+1}$ beidemal dieselbe, nämlich $\infty^{n-2-\varrho}$, ist). Daher ist deutlich, dass der Schnitt des $R_{\sigma+1}$ mit beliebig zutretenden weiteren confocalen Mannigfaltigkeiten genau ebenso in lineare Bestandtheile zerfallen muss, wie der Schnitt des $R_{\varrho+1}$. Der auf beliebiges $\sigma$ bezügliche Satz ist also in der That ein specieller Fall des zu (26) gehörigen, und wir werden den letzteren als den zusammenfassenden Ausdruck des durch unsere Ueberlegungen für den Raum von beliebig vielen Dimensionen abzuleitenden Resultates betrachten dürfen.

Was den Beweis der somit formulirten Sätze betrifft, so führe ich ihn genau entsprechend zu den Ueberlegungen des § 2. Es handelt sich vor Allem darum, einzusehen, dass unsere $M_{\sigma+1}$ *linear* sein müssen (also $R_{\sigma+1}$ sind). In dieser Hinsicht gingen wir in § 2 davon aus, dass eine Fläche nicht öfter als zweimal von geraden Linien überdeckt sein kann, ohne eben zu sein. In der That werden die geraden Linien, welche durch einen Flächenpunkt laufen, der Tangentialebene im Flächenpunkte und der im Punkte osculirenden Fläche zweiten Grades gemeinsam sein, und ihre Zahl kann also nur dann $> 2$ sein, wenn die Tangentialebene ein Bestandtheil der genannten Fläche zweiten Grades ist, was bei einer gekrümmten Fläche nur in einzelnen Punkten denkbar ist. Ich formulire dementsprechend für mehr Dimensionen den folgenden Grundsatz:

*Eine $M_{\sigma+1}$ ist linear (also ein $R_{\sigma+1}$), wenn von jedem Punkte der $M_{\sigma+1}$ mehr als zwei der $M_{\sigma+1}$ angehörige Räume $R_\sigma$ auslaufen.*

Wir beachten jetzt, dass der von uns zu beweisende Hauptsatz in Folge der Theoreme des § 4 jedenfalls für $\sigma = 0$ richtig ist (die dort durch die Differentialgleichungen definirte $M_1$ ist ein $R_1$). Wir werden also annehmen, derselbe sei überhaupt bereits für $\sigma = \sigma'$ bewiesen, und werden dann zeigen, dass er für $\sigma = \sigma' + 1$ ebenfalls gilt. Dieser Beweis aber gelingt unmittelbar in Folge des formulirten Grundsatzes (den wir hier als richtig acceptiren, ohne ihn weiter zu begründen). Die $M_{\sigma+1}$, die wir durch Integration von (22) erhalten, liegt den Formeln (23) entsprechend auf $\varrho - \sigma$ confocalen Mannigfaltigkeiten, wo $\varrho \leqq \left[\frac{n-2}{2}\right]$; durch jeden Punkt der $M_{\sigma+1}$ gehen also noch weitere $(n-1-\varrho+\sigma)$ confocale Mannigfaltigkeiten, eine Zahl, die für $n \geqq 4$ jedenfalls grösser als 2 ist. Nun aber schneidet jede dieser weiteren confocalen Mannigfaltigkeiten längs einer durch unseren Punkt hindurchlaufenden $M_\sigma$, die nach Voraussetzung linear ist. Unsere $M_{\sigma+1}$ hat also die Eigenschaft, dass von jedem ihrer Punkte aus mehr als zwei in ihr enthaltene $R_\sigma$ auslaufen, und also ist sie nach unserem Grundsatze selbst linear ($= R_{\sigma+1}$), was zu beweisen war.

Was die übrigen Punkte unserer Behauptungen angeht, so erledigen wir sie ebenfalls nach dem Vorbilde der in § 2 gegebenen Entwickelungen.

Zunächst ist zu zeigen, dass die $R_{\sigma+1}$, welche jede einzelne confocale Mannigfaltigkeit, wie wir jetzt wissen, nach zwei $R_\sigma$ schneiden, die Mannigfaltigkeiten (25) speciell nach solchen zwei $R_\sigma$ treffen, die zusammenfallen. Wieder nehmen wir an, der Satz sei für kleinere Werthe von $\sigma$ bewiesen (wie er es für $\sigma = 0$ ja in der That ist). Dann haben also die sämmtlichen $R_\sigma$, welche aus $R_{\sigma+1}$ durch die confocalen Mannigfaltigkeiten ausgeschnitten werden (und die $R_{\sigma+1}$, wie wir wissen, mehrfach überdecken), die Eigenschaft, jene beiden $R_\sigma$, in denen $R_{\sigma+1}$ einer Mannigfaltigkeit (25) begegnet, in einem Paare zusammenfallender $R_{\sigma-1}$ zu treffen, woraus gewiss folgt, dass die beiden $R_\sigma$, welche aus $R_{\sigma+1}$ durch die einzelne Mannigfaltigkeit (25) ausgeschnitten werden, zusammenfallen. (Auf gleiche Weise zeigt man, dass die beiden $R_\sigma$, nach denen eine confocale Mannigfaltigkeit, die nicht zu den (25) gehört, unserer $R_{\sigma+1}$ begegnet, allgemein zu reden *nicht* coïncidiren).

Wir behaupten ferner, dass es keine anderen $R_{\sigma+1}$ derselben, uns nun bekannten geometrischen Definition giebt, als diejenigen, die aus unseren Differentialgleichungen entspringen. Auch diese Behauptung ist für $\sigma = 0$ (und zwar durch algebraische Abzählung) bewiesen, so dass wir abermals nur zu zeigen brauchen, dass sie für $\sigma = \sigma' + 1$ gilt, wenn sie für $\sigma = \sigma'$ zutrifft. Wir denken uns irgend einen $R_{\sigma+1}$ gegeben, der, auf den confocalen Mannigfaltigkeiten (23) gelegen, die übrigen confocalen Mannigfaltigkeiten in der hier nicht noch einmal zu nennenden Weise durchsetzt. Derselbe wird ein System linearer Differentialgleichungen befriedigen, das wir für einen Augenblick folgendermassen schreiben wollen:

$$(27)\qquad \sum_{1}^{n-1-\varrho+\sigma} M_\alpha^{(\nu)} \cdot d\lambda_\alpha = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho).$$

Nun wird unser $R_{\sigma+1}$ nach Voraussetzung von jeder zutretenden confocalen Mannigfaltigkeit in zwei $R_\sigma$ von kanonischer Definition durchsetzt, d. h. in zwei $R_\sigma$, welche den Differentialgleichungen genügen, die aus (22) hervorgehen, wenn man bei der Summation einen der angegebenen Werthe von $\alpha$ überspringt. Dies aber heisst nichts Anderes, als dass aus (27) durch Nullsetzen eines beliebigen der $d\lambda_\alpha$ immer dasselbe System linearer Differentialgleichungen entstehen soll, wie aus den mit den richtigen Vorzeichen genommenen Formeln (22), was nicht anders möglich ist, als wenn für die gegebenen $R_{\sigma+1}$ die Gleichungen (27) bei geeigneter Wahl der Vorzeichen mit den Gleichungen (22) gleichbedeutend sind, was zu beweisen war.

## § 6.

### Verification des gerade gegebenen Beweises.

Der Beweis, den ich im vorigen Paragraphen erbrachte, dürfte bei manchem Leser vielleicht darum auf Schwierigkeiten stossen, weil ich das von mir benutzte Theorem der mehrdimensionalen Geometrie ohne weitere Erläuterung hingestellt habe. Ich will also nicht unterlassen, meine Schlüsse, soweit sie geometrisch waren (also mit Ausnahme des letzten, wesentlich algebraischen) auch noch durch Rechnung zu verificiren, wobei ich nur insofern an meinem bisherigen Entwickelungsgange festhalte, als ich mich nach wie vor auf die Theoreme des § 4 stütze.

Die Sache ist einfach folgende. Das allgemeine Integral der Gleichungen (26) (die ich hier allein in's Auge fasse, da ihre Betrachtung genügt, wie wir früher sahen) ist bekanntermassen durch Nullsetzen einer Matrix von $(n-\varrho+1)$ Verticalreihen und $(2n-2)$ Horizontalreihen gegeben:

$$(28)\qquad \left|\begin{array}{llllll}
\lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-2}\cdots 1 & \lambda_1^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} & \lambda_1^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} & \cdots & \sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} \\
\lambda_2^{n-1} & \lambda_2^{n-2}\cdots 1 & \lambda_2^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} & \lambda_2^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} & \cdots & \sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-2}\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mu_1^{n-1} & \mu_1^{n-2}\cdots 1 & \mu_1^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} & \mu_1^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} & \cdots & \sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} \\
\mu_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mu_{n-1}^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|;$$

hier sind $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ Integrationsconstanten. Es handelt sich jetzt darum, aus dieser Matrix die von uns aufgestellten Theoreme abzuleiten.

Erstlich wollen wir zeigen, dass die durch diese Matrix dargestellte algebraische $M_{\varrho+1}$ im Raume der $x$ linear ist. Wir wissen zunächst nur, nach § 4, dass wenn wir

$$\lambda_{n-1} = C_1,\ \lambda_{n-2} = C_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho \tag{29}$$

setzen und selbstverständlich die dann in der Matrix vorkommenden Quadratwurzeln:

$$\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)},\ \sqrt{\varphi_\varrho(C_2)}, \ldots, \sqrt{\varphi_\varrho(C_\varrho)} \tag{30}$$

irgendwie fixiren, dass dann das Verschwinden der Matrix eine auf den Mannigfaltigkeiten gelegene lineare Mannigfaltigkeit von einer Dimension (einen $R_1$) vorstellt. Aber eben hieraus können wir unseren Schluss machen. Zu den Gleichungen (29) können nämlich die Vorzeichen (30) im Ganzen auf $2^\varrho$ Weisen hinzugewählt werden. Andererseits ist die $M_{n-1-\varrho}$, welche durch die Gleichungen (29) dargestellt wird, als Schnitt von $\varrho$ Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung selber von der Ordnung $2^\varrho$. Die durch (28) vorgestellte $M_{\varrho+1}$ hat hiernach die Eigenschaft eine $M_{n-1-\varrho}$ von der Ordnung $2^\varrho$ nach $2^\varrho$ $R_1$ zu schneiden. Dies aber heisst *nach dem Bezout'schen Theoreme*, dass $M_{\varrho+1}$ selber linear, $= R_{\varrho+1}$ ist.

Ferner zeigen wir, dass der Schnitt des $R_{\varrho+1}$ mit einer beliebigen confocalen Mannigfaltigkeit

$$\lambda_{n-1} = C_1,$$

aus zwei $R_\varrho$ besteht. Es werden zwei getrennte Mannigfaltigkeiten, weil wir wieder in der Hand haben, für $\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_{n-1})}$ in unsere Matrix $+\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)}$ oder $-\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)}$ einzutragen, — und jede dieser Annahmen führt zu einer linearen Mannigfaltigkeit, d. h. zu einem $R_\varrho$, weil die Hinzunahme fester Werthe von $\lambda_{n-2}, \ldots, \lambda_{n-\varrho}$ und der zu ihnen gehörigen Quadratwurzeln, wie soeben, je einen $R_1$ ergiebt.

Endlich, dass die beiden $R_\varrho$, in denen unsere $R_{\varrho+1}$ eine der Mannigfaltigkeiten

$$\lambda = a_\varkappa$$

durchsetzt, zusammenfallen, folgt einfach daraus, dass $\varphi_\varrho(a_\varkappa)$ verschwindet und also in diesem Falle der Unterschied, der durch die Vorzeichenwahl von $\sqrt{\varphi_\varrho}$ eingeführt wird, verschwindet.

## § 7.

## Besondere Betrachtung der Verhältnisse auf der einzelnen $M^{(2)}_{(n-2)}$.

Im Interesse der liniengeometrischen Anwendungen, die ich beabsichtige, erläutere ich hier noch besonders den Fall der im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze, in welchem $\sigma = \varrho - 1$ genommen ist und also *eine* elliptische Coordinate constant gesetzt wird:

(31) $$\lambda_{n-1} = C_1.$$

Wir haben dann die Differentialgleichungen:

(32) $$\sum_1^{n-2}{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho)$$

und hierzu den Satz, den ich mit I benennen will:

I. *Auf der Mannigfaltigkeit* (31) *verlaufen durch jeden Punkt* $2^{n-3}$ *Räume* $R_\varrho$, *welche geometrisch dadurch definirt sind, dass sie alle anderen confocalen Mannigfaltigkeiten nach Paaren von Räumen* $R_{\varrho-1}$ *schneiden, welch' letztere für die besonderen Mannigfaltigkeiten*

$$\lambda = a_1, \; \lambda = a_2, \ldots, \lambda = a_{n-2\varrho-2}$$

*zusammenfallen. Diese* $R_\varrho$ *sind die Integrale der Differentialgleichungen* (32).

Ich wünsche diesen Satz mit der allgemeinen Theorie der auf einer $M^{(2)}_{n-2}$ enthaltenen linearen Räume*) in Verbindung zu setzen.

Erstlich machen wir eine gewisse Abzählung. Der genannten Theorie zufolge enthält eine $M^{(2)}_{n-2}$ Räume $R_\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-2}{2}\right]$ und zwar von der einzelnen Art je $\infty^{\frac{1}{2}(\varrho+1)(2n-3\varrho-4)}$. Räume aller dieser Arten treten auch in Satz I auf. Ihre Anzahl berechnet sich dabei folgendermassen. Halten wir die $(n-2\varrho-2)$ Grössen $a_\varkappa$ fest, so überdecken die zugehörigen $R_\varrho$ die $M^{(2)}_{(n-2)}$ endlichfach, die Zahl der $R_\varrho$ ist also $\infty^{n-2-\varrho}$. Denken wir uns jetzt auch noch die $a_\varkappa$ beweglich, so kommen wir auf $\infty^{2n-3\varrho-4}\, R_\varrho$. Diese Zahl stimmt nur dann mit der vorher angegebenen, wenn $\varrho = 1$. Wir können hiernach folgendermassen sagen:

II. *Durch die in* I *auftretenden* $R_\varrho$ *werden sämmtliche* $R_1$, *die auf* (31) *vorhanden sind, erschöpft, keineswegs aber die sonstigen mehrfach ausgedehnten* $R$.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall eines geraden $n$ und setzen $\varrho = \frac{n-2}{2}$. Der Ausdruck $\varphi_\varrho(\lambda)$ enthält dann überhaupt keine will-

*) Vergl. in dieser Hinsicht insbesondere Segre: Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Atti di Torino, Memorie, 1884, sowie verschiedene Angaben und Bemerkungen in meiner eigenen hier vorangehenden Abhandlung.

kürlichen Factoren mehr, was diesem Falle sein besonderes Interesse verleiht. Andererseits weiss man, dass die $R_{\frac{n-2}{2}}$, die (für gerades $n$) auf einer $M_{n-2}^{(2)}$ vorhanden sind, in zwei gleichberechtigte Classen zerfallen, so zwar dass die $R_{\frac{n-2}{2}}$ der einzelnen Classe sich continuirlich an einander anschliessen, nirgends aber einen Uebergang zu den $R_{\frac{n-2}{2}}$ der anderen Classe haben (das einfachste Beispiel geben die beiden Erzeugendensysteme eines Hyperboloids). Mit Rücksicht hierauf behaupte ich:

III. *Die* $2^{n-3}$ *Räume* $R_{\frac{n-2}{2}}$, *welche* $\left(\text{\textit{für gerades} } n \text{ \textit{und} } \varrho = \frac{n-2}{2}\right)$ *dem Satze* I *entsprechend von einem beliebigen Punkte der* $M_{(n-2)}^{(2)}$ *auslaufen, vertheilen sich gleichförmig auf die beiden in Rede stehenden Classen, so zwar, dass immer solche zwei* $R_{\frac{n-2}{2}}$ *zu verschiedenen Classen gehören, deren Differentialgleichungen* (32) *sich durch eine ungerade Zahl von Zeichenwechseln unterscheiden. Diejenigen dem Satze I genügenden* $R_{\frac{n-2}{2}}$, *welche derselben Classe angehören, bilden je ein irreducibeles Ganzes.*

Was den Beweis angeht, so wollen wir die übrigens bekannte Bemerkung vorausschicken, dass eine gerade Zahl von Zeichenwechseln der Coordinaten $x_i$ jede der beiden auf unserer $M_{(n-2)}^{(2)}$ (31) gelegenen Classen von $R_{\frac{n-2}{2}}$ ungeändert lässt, eine ungerade Zahl aber sie vertauscht. Wir müssen jetzt ferner die Formeln heranziehen, welche die Coordinaten $x_i$ mit den elliptischen Coordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ verknüpfen. Dieselben lauten bekanntlich, unter $\sigma$ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\sigma x_i = \sqrt{\frac{(\lambda_1 - k_i)(\lambda_2 - k_i) \cdots (\lambda_{n-1} - k_i)}{\varphi'_{\frac{n-2}{2}}(k_i)}}, \tag{34}$$

wo

$$\varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda) = (\lambda - k_1)(\lambda - k_2) \ldots (\lambda - k_n),$$

oder besser, da wir die Quadratwurzeln aus den einzelnen Factoren $(\lambda_\alpha - k_i)$ sogleich unabhängig von einander betrachten müssen:

$$\sigma x_i = \frac{\sqrt{\lambda_1 - k_i} \cdot \sqrt{\lambda_2 - k_i} \cdots \sqrt{\lambda_{n-1} - k_i}}{\sqrt{\varphi'_{\frac{n-2}{2}}(k_i)}}. \tag{34b}$$

Hiermit stellen wir nun die Differentialgleichungen (32) für $\varrho = \frac{n-2}{2}$ zusammen; wir wollen dieselben in der entsprechenden Form schreiben:

$$(35) \quad \sum_1^{n-2} {}^{\alpha} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha - k_1}\,\sqrt{\lambda_\alpha - k_2}\cdots\sqrt{\lambda_\alpha - k_n}} = 0, \quad \left(\nu = 0, 1, \cdots, \frac{n-4}{2}\right).$$

Wir denken uns jetzt zunächst, indem wir die sämmtlichen $\lambda_\alpha$ festhalten, eine dieser Differentialgleichungen fixirt, etwa diejenige, die lauter $+$ Zeichen aufweist, und fragen, durch welche Vorzeichenänderungen der Quadratwurzeln $\sqrt{\lambda_\alpha - k_i}$ wir von ihr zu den übrigen hingelangen. Da in (35) immer $n$ der genannten Quadratwurzeln mit einander multiplicirt sind, so kann dies in jedem Falle auf eine grosse Zahl verschiedener Weisen geschehen. Unabhängig von dieser Willkür finden wir aber offenbar, da $n$ gerade ist, folgenden Satz:

*Die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die wir an den $\sqrt{\lambda_\alpha - k_i}$ anbringen müssen, ist gerade oder ungerade, je nachdem wir von der anfänglichen Differentialgleichung zu einer solchen mit einer geraden oder ungeraden Anzahl von Minuszeichen übergehen wollen.*

Wie nun verhalten sich hierbei die Ausdrücke $\sigma x_i$ (34b)? Ein jeder derselben enthält von den in Betracht kommenden Factoren $\sqrt{\lambda_\alpha - k_i}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, (n-2))$ wieder eine gerade Zahl. Daher folgt (bei aller Unbestimmtheit im Einzelnen):

*Die $x_i$ erfahren eine gerade oder ungerade Zahl von Zeichenwechseln, je nachdem wir bei der anfänglichen Differentialgleichung eine gerade oder ungerade Zahl von Vorzeichenänderungen anbringen.*

Dies aber heisst in der That, nach der vorausgeschickten Bemerkung, dass die $R_{\frac{n-2}{2}}$, welche zu verschiedenen Vorzeichencombinationen in (35) gehören, dann und nur dann von derselben Classe sind, wenn die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die von dem einen Systeme von Differentialgleichungen zum anderen hinüberführen, gerade ist, w. z. b. w.

Wir prüfen jetzt unsere Angabe über die *Irreducibilität* der von unseren $R_{\frac{n-2}{2}}$ erzeugten Gebilde. Von einer bestimmten Anfangslage aus lassen wir das Element $x$ auf der Mannigfaltigkeit $\lambda_{n-1} = C_1$ (31) irgend welchen Weg beschreiben, durch welchen es schliesslich zu seiner Anfangslage zurückkehrt, und sehen zu, wie sich dabei die verschiedenen Systeme von Differentialgleichungen (35) permutirt haben mögen. Wir wollen dies in der Weise bewerkstelligen, dass wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}$ als die eigentlichen Veränderlichen betrachten, die dann ihrerseits sich wegen (34b) so bewegen müssen, dass nicht nur sie selbst, sondern auch die Producte

$$\sqrt{\lambda_1 - k_i} \cdot \sqrt{\lambda_2 - k_i} \cdots \sqrt{\lambda_{n-2} - k_i}$$

(bis auf einen etwa bei allen simultan eintretenden und auf den Proportionalitätsfactor $\sigma$ zu rechnenden Zeichenwechsel) zu ihren Anfangswerthen zurückkehren. Wir fragen, welche Zeichenwechsel dabei in (35) auftreten mögen. Offenbar kann dies nur eine gerade Zahl von Zeichenwechseln sein, wir können aber auch jede vorgegebene Art von Zeichenwechseln, deren Anzahl gerade ist, wirklich erzielen. Hierin liegt, was über die Irreducibilität gesagt wurde.

## § 8.

## Anwendung auf Liniengeometrie.

Die Anwendung der vorhergehenden Ueberlegungen auf Liniengeometrie betrifft selbstverständlich, wie in der Einleitung in Aussicht genommen, die Theorie der „confocalen" Liniencomplexe zweiten Grades, welche in bekannter Weise durch das Gleichungssystem

$$(36) \qquad \sum_1^6{}_i \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \quad \sum_1^6{}_i x_i^2 = 0$$

dargestellt werden (wo sich die zweite Gleichung aus der ersten ergiebt, indem man $\lambda = \infty$ setzt). Wir haben hier für $n = 6$, $C_1 = \infty$ ganz die Prämissen des vorigen Paragraphen. Die Elemente der ausgezeichneten $M_{(4)}^{(2)}$, die durch $\lambda_5 = \infty$ gegeben ist, nennen wir *gerade Linien*, ihre $R_1$ *Strahlbüschel*, die beiden Arten der ihr angehörigen $R_2$ beziehungsweise *Strahlenbündel* und *Geradenfelder*. Der einzelne durch (36) gegebene Complex zweiten Grades hat mit einem Strahlbüschel, allgemein zu reden, zwei Strahlen gemein, mit einem Strahlenbündel einen Kegel zweiter Ordnung, mit einem Geradenfeld eine Curve zweiter Classe.

Wir recurriren jetzt auf Satz I des vorigen Paragraphen und haben sofort, indem wir zunächst $\varrho = 1$ setzen:

I'. *Jede Raumgerade gehört acht Strahlbüscheln an, die dadurch definirt sind, dass sie mit jedem von zwei vorgegebenen Complexen*

$$\lambda = a_1, \quad \lambda = a_2$$

*zwei zusammenfallende Strahlen gemein haben. Diese Strahlbüschel sind die Integrale der Differentialgleichungen*

$$(37) \qquad \sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

*wo*

$$\varphi(\lambda) = \prod_1^6{}_i (\lambda - k_i) \cdot \prod_1^2{}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa).$$

Hierzu beachte man, dass, Satz II des vorigen Paragraphen zufolge, jedes Strahlbüschel von zweien der confocalen Complexe in dem erwähnten Sinne berührt wird, dass also, bei geeigneter Annahme von $a_1$, $a_2$, jedes Strahlbüschel des Raumes seine Darstellung durch (37) findet.

Wir setzen ferner in Satz I des vorigen Paragraphen $\varrho = 2$, ziehen gleichzeitig Satz III heran und erhalten das Theorem von der *Gemeinsamkeit der Singularitätenfläche* unserer Complexe. In der That haben wir:

I″. *Jede Raumgerade gehört vier Strahlenbündeln und vier Geradenfeldern an, welche die Eigenschaft haben, mit jedem der confocalen Complexe einen in zwei Strahlenbüschel zerfallenden Kegel zweiter Ordnung, bez. eine in zwei Strahlenbüschel zerfallende Curve zweiter Classe gemein zu haben. Diese Bündel bez. Felder sind durch folgende Differentialgleichungen definirt:*

$$\sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1), \tag{38}$$

*wo*

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_1^6{}_i (\lambda - k_i)$$

*gesetzt ist und sich die verschiedenen Vorzeichencombinationen auf die Bündel und Felder in der erläuterten Weise vertheilen. Die Fläche der Bündelmittelpunkte und die von den Felderebenen umhüllte Fläche sind irreducibel.*

Hier sind nun die Differentialgleichungen (38) keine anderen, als die von Hrn. Rohn aufgestellten, auf die in der Einleitung Bezug genommen wurde. Der Unterschied unserer jetzigen Entwickelung gegenüber der von Hrn. Rohn gegebenen oder auch gegenüber meiner eigenen, im vorigen Annalenbande enthaltenen (Ueber Configurationen etc.) ist dabei der, dass jetzt nicht, wie dort, die Existenz der gemeinsamen Singularitätenfläche unserer Complexe bereits als bekannt angesehen und nur die Richtigkeit der Differentialgleichungen bewiesen wird, dass vielmehr die Existenz der gemeinsamen Singularitätenfläche selbst aus den Differentialgleichungen erschlossen wird. Freilich bleibt bei unserem jetzigen Gedankengange ein wichtiger Punkt noch unerledigt, *dass nämlich die Fläche der singulären Punkte mit der*

*Fläche der singulären Ebenen identisch ist;* ich werde im folgenden Paragraphen hierauf zurückkommen. —

Haben wir so den Anschluss an die ersten Sätze erreicht, die zu Beginn dieser Mittheilung vorangestellt wurden, so gelingt jetzt ohne Schwierigkeit auch der Uebergang zu dem eben dort genannten Theoreme des Hrn. Domsch. Wir haben zu dem Zwecke an die Entwickelungen des § 3 anzuknüpfen, wobei wir uns aber darauf beschränken wollen, nur einen der Factoren $\lambda - k_i$, nämlich $\lambda - k_6$, durch einen willkürlichen Factor $\lambda - a_3$ zu ersetzen und diese Aenderung auch nur an den Differentialgleichungen (37) anzubringen. Wir erhalten so die Gleichungen:

$$(39) \quad \sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_1^5{}_i (\lambda_\alpha - k_i) \cdot \prod_1^3{}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

deren geometrische Interpretation verlangt wird. Nach den Erläuterungen des § 3 wird es sich jedenfalls darum handeln, dass die Raumgerade $x$ eine einfach ausgedehnte quadratische Mannigfaltigkeit, d. h. eine Regelschaar durchläuft, welche ungeändert bleibt, wenn man $x_6$ im Vorzeichen ändert. Letztere Eigenschaft aber lässt sich auf Grund bekannter liniengeometrischer Entwickelungen geometrisch kurz dahin ausdrücken, dass die Erzeugenden unserer Regelschaar paarweise in Bezug auf den Complex $x_6 = 0$ als conjugirte Polaren zusammengehören, oder auch, was dasselbe ist, dass die conjugirte Regelschaar, d. h. die zweite Erzeugung des von unserer Regelschaar überdeckten Hyperboloids, dem Complexe $x_6 = 0$ angehört. Im Uebrigen wird, in Uebereinstimmung mit § 3, unsere Regelschaar die drei Complexe $\lambda = a_1$, $\lambda = a_2$, $\lambda = a_3$ je zweimal berühren, d. h. mit jedem einzelnen derselben statt vier getrennter Strahlen zweimal zwei zusammenfallende Strahlen gemein haben. Wir finden das Theorem:

II. *Von jeder Raumgeraden aus erstrecken sich acht Regelschaaren, welche die drei vorgegebenen Complexe $\lambda = a_1$, $\lambda = a_2$, $\lambda = a_3$ je zweimal berühren und dabei die Eigenschaft haben, dass die von ihnen überdeckten Hyperboloide vermöge ihrer zweiten Erzeugung dem Complexe $x_6 = 0$ angehören. Diese Regelschaaren sind analytisch durch die Differentialgleichungen* (39) *definirt.*

Der hiermit gewonnene Satz steht dem von Hrn. Domsch gegebenen sehr nahe, aber er ist mit ihm noch nicht identisch. Hr. Domsch operirt überhaupt nicht, wie wir hier, mit beliebigen Raumgeraden, sondern immer nur mit den Geraden eines bestimmten der sechs linearen Fundamentalcomplexe, sagen wir mit den Geraden von $x_1 = 0$. Dies hat zufolge, dass von den vier elliptischen Coordinaten der Raumgeraden eine (etwa $\lambda_1$) den constanten Werth $k_1$ bekommt und aus der Reihe der Veränderlichen ausscheidet. Ich will der besseren Uebersicht halber die ganze Reihe der hier entstehenden Sätze anführen. Formel (37) findet ihr Analogon, indem wir schreiben:

$$(40)\qquad \sum_2^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_2^6{}_i (\lambda_\alpha - k_i)\cdot(\lambda_\alpha - a_1)}} = 0, \qquad (\nu = 0,\ 1),$$

(wo neben fünf Factoren $(\lambda - k_i)$ jetzt ein willkürlicher, $(\lambda - a_1)$, vorhanden ist), was uns von jeder geraden Linie des Complexes $x_1 = 0$ auslaufend *vier diesem Complexe angehörige Strahlbüschel ergiebt, welche den beliebig angenommenen Complex $\lambda = a_1$ je einfach berühren.* Formel (38) scheidet aus dem Vergleich aus, weil in (40) unter der Quadratwurzel überhaupt nur ein willkürlicher Factor vorhanden ist und also nicht zwei weggelassen werden können, wie es der Fortschritt von (37) zu (38) verlangt.

Das Gegenbild zu Formel (39) gewinnen wir, indem wir den in (40) auftretenden Factor $(\lambda - k_6)$ überall durch $(\lambda - a_2)$ ersetzen, unter $a_2$ eine willkürliche Grösse verstanden. Wir haben dann die Differentialgleichungen:

$$(41)\qquad \sum_2^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_2^5{}_i (\lambda_\alpha - k_i)\cdot \prod_1^2{}_\varkappa (\lambda - a_\varkappa)}} = 0, \qquad (\nu = 0,\ 1),$$

*und finden* ihnen entsprechend *von jeder Linie des Complexes $x_1 = 0$ auslaufend vier dem Complexe $x_1 = 0$ angehörige Regelschaaren, welche die beliebig vorgegebenen Complexe $\lambda = a_1$ und $\lambda = a_2$ je zweimal berühren und deren conjugirte Regelschaaren dem Complexe $x_6 = 0$ angehören.* Dies aber ist der Domsch'sche Satz.

## § 9.

## Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche.

Als besten Gewinn der vorangehenden Erörterungen betrachte ich, dass sich eine naturgemässe Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche für den Fall hyperelliptischer Functionen höheren Geschlechtes darbietet. Die Kummer'sche Fläche erscheint im Vorhergehenden als der Inbegriff der $\infty^2$ Strahlenbündel, bez. $\infty^2$ Geradenfelder, welche den hyperelliptischen Differentialgleichungen vom Geschlechte 2 genügen:

$$(42)\qquad \sum_1^4{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0,\ 1),$$

wo $\varphi(\lambda)$ das Product $\prod_1^6{}_i (\lambda - k_i)$ bezeichnet. Ist nun $p > 2$ gegeben, so werden wir entsprechend $n = 2p + 2$ wählen $\left(\text{so dass } p = \frac{n-2}{2} \text{ ist}\right)$, zunächst eine der elliptischen Coordinaten constant setzen:

$$(43)\qquad \lambda_{n-1} = C_1$$

und nun die Differentialgleichungen hinschreiben:

$$(44)\qquad \sum_1^{n-2}{}_\alpha \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad (\nu = 0,\ 1, \cdots, (p-1)),$$

wo $\varphi(\lambda) = \prod_1^n{}_i (\lambda - k_i)$ zu nehmen ist. *Die irreducibelen Mannigfaltigkeiten von zweimal* $\infty^p$ $R_p$, *welche die Mannigfaltigkeit* (43) *nach Satz* II *und* III *des* § 7 *den Differentialgleichungen* (44) *entsprechend enthält, erscheinen uns als die Verallgemeinerungen der das eine Mal von Punkten gebildeten und das andere Mal von Ebenen umhüllten Kummer'schen Fläche.* An die Stelle der Zahl 4, welche Ordnung und Classe der Kummer'schen Fläche angiebt, tritt dabei die Zahl $2^{n-4}$. —

Hier nun wird es unabweisbar, zu discutiren, warum die von den Punkten gebildete und die von den Ebenen umhüllte Kummer'sche Fläche identisch sind. Wir werden den Beweis hierfür liefern müssen, indem wir von den elliptischen Liniencoordinaten $\lambda$ und den Differentialgleichungen (42) ausgehen, und zusehen, was die Uebertragung derselben Ueberlegung auf den Fall grösserer Dimensionenzahl liefert.

Der in Aussicht genommene Beweis gestaltet sich jedenfalls am einfachsten, indem wir aus (42) zeigen, dass alle Linien, für welche zwei $\lambda$ einander gleich werden (also etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ ist), gleichzeitig die von den singulären Punkten gebildete Kummer'sche Fläche und die von den singulären Ebenen umhüllte Kummer'sche Fläche berühren. Dies aber gelingt folgendermassen. Ich will, um unnöthige Unbestimmtheiten zu vermeiden, mir die Differentialgleichungen (42) hier so geschrieben denken, dass die Terme mit $d\lambda_1$ das $+$ Zeichen haben. Setzen wir dann, indem $\lambda_2 = \lambda_1$ genommen ist, $\varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_1)$, so werden vier der acht zu unterscheidenden Systeme von Differentialgleichungen lauten

$$(45\text{a})\qquad \frac{(d\lambda_1 + d\lambda_2)\cdot \lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_3 \cdot \lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} \pm \frac{d\lambda_4 \cdot \lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} = 0, \quad (\nu = 0,\ 1),$$

vier andere aber folgendermassen:

$$(45\,\mathrm{b})\quad \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\cdot\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_3\cdot\lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} \pm \frac{d\lambda_4\cdot\lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1).$$

Die vier Systeme der einen und der anderen Art vertheilen sich dabei gleichförmig auf die singulären Punkte und die singulären Ebenen, welche die Gerade $\lambda$ trägt: denn unter den Gleichungssystemen (45a) und (45b) sind gleichförmig zwei mit einer geraden und zwei mit einer ungeraden Zahl von Minuszeichen. Nun sage ich, — und darin liegt unser Beweis, — *dass von den Gleichungen* (45b) *immer diejenigen beiden, welche durchaus entgegengesetzte Vorzeichen haben, in ihrer geometrischen Bedeutung zusammenfallen* (so dass also die Gleichungen (45b) nicht zwei auf der Geraden $\lambda$ befindliche Punkte und zwei durch sie hindurchgehende Ebenen vorstellen, sondern nur einen auf ihr befindlichen (doppeltzählenden) Punkt und eine durch sie hindurchgehende (doppeltzählende) Ebene). — In der That, ob ich beispielsweise schreibe:

$$0 = \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\,\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_3\cdot\lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} + \frac{d\lambda_4\cdot\lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} \qquad (\nu = 0, 1)$$

oder

$$0 = \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\,\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} - \frac{d\lambda_3\cdot\lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} - \frac{d\lambda_4\cdot\lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} \qquad (\nu = 0, 1),$$

kommt geometrisch auf dasselbe hinaus. Denn die eine Gleichung geht aus der anderen hervor, wenn ich $\lambda_1$ mit $\lambda_2$ vertausche, und dies ist eine für die geometrische Deutung irrelevante Operation. —

Wir wiederholen jetzt dieselbe Ueberlegung an den Differentialgleichungen (44). Wieder spalten wir die $2^{n-3}$ Systeme von Differentialgleichungen, die in (44) eingeschlossen sind (und die sich auf $2^{n-4}$ Systeme der einen Art und $2^{n-4}$ der anderen Art nach der Zahl der Minuszeichen vertheilen), für $\lambda_1 = \lambda_2$ in $2^{n-4}$, welche den Term $\frac{d\lambda_1 + d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}\cdot\lambda_1^\nu$, und in ebensoviele, welche den Term $\frac{d\lambda_1 - d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}\cdot\lambda_1^\nu$ enthalten. Von letzteren erschliessen wir dann, dass sie paarweise zu demselben doppeltzählenden $R_p$ gehören. Wir haben also folgenden Satz, in welchem wir die gewünschte Verallgemeinerung erblicken, wenn er auch der Form nach von dem ursprünglich für die Kummer'sche Fläche aufgestellten Theoreme zunächst sehr verschieden erscheint:

*Während sich von einem beliebigen Punkte unserer Mannigfaltigkeit* (43) *aus* $2^{n-4}$ *getrennte* $R_p$ *der einen und ebensoviele* $R_p$ *der anderen Art erstrecken, die beziehungsweise den Differentialgleichungen* (44) *genügen, fallen für solche Punkte von* (43), *für welche zwei* $\lambda$ *einander gleich sind,* $2^{n-5}$ *der genannten* $R_p$ *der einen Art und ebensoviele der* *anderen Art zu* $2^{n-6}$ *doppeltzählenden* $R_p$ *der einen, bez. der anderen Art zusammen.*

Ich unterlasse es, diesen Satz noch weiter zu verfolgen, insbesondere auch solche Punkte von (43) in Betracht zu ziehen, für welche mehrere $\lambda$ einander gleich werden*), will aber den Wunsch nicht unterdrücken, dass dies von anderer Seite geschehen möge. Was den Fall $n = 4$ angeht, so findet man die betreffenden Verhältnisse in Bd. V dieser Annalen, p. 295—296, auseinandergesetzt.

Göttingen, im October 1886.

---

*) Durch Hrn. Bertini bin ich vor längerer Zeit auf eine Unrichtigkeit in meiner alten Arbeit „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades" (Math. Ann. t. 2) [derselben Arbeit, in der die nun wieder benutzten confocalen Liniencomplexe zweiten Grades eingeführt wurden] aufmerksam gemacht worden, die ich bei dieser Gelegenheit verbessern will. In Nr. 4 daselbst (p. 202) ist die Definition der allgemeinen Liniencoordinaten in unrichtiger Weise mit gewissen Momenten in Verbindung gesetzt worden, indem ich nämlich bei der Berechnung der Momente bestimmte Factoren vernachlässigte, die nicht weggelassen werden dürfen, auch wenn man nur die Verhältnisse der Momente in Betracht ziehen will. Ich kann den Leser nur bitten, den Eingang der genannten Nr. 4 bis zum Schluss des cursiv gedruckten Satzes einfach durchzustreichen. Desgleichen muss der Satz modificirt werden, mit welchem Nr. 1 meiner Arbeit über „die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten" beginnt (Bd. II dieser Annalen, p. 366).

F. Kl.