*Potential Analysis* **2**: 187–194, 1993.



# Un théorème de convergence presque-sûre pour des familles subordonnées à un semi groupe discret

CHEVALLIER NICOLAS
*Université de Mulhouse, 4 Rue des Frères Lumiére, Mulhouse, France.*

(Reçu: 30 septembre 1992; accepté: 25 janvier 1993)

**Résumé.** Soit $P$ une contraction positive de $L^1$. *On dit qu'une suite* $(Q_n)_n$ d'opérateurs positifs, est subordonnée à $P$ si

$$Q_0 = \mathrm{Id}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n P \geqslant Q_{n+1}.$$

On se donne une suite double d'opérateurs $(Q_{n,k})$ telle que pour chaque entier $k$ la famille $(Q_{n,k})_n$ soit subordonnée à $P$. On pose $W^k f = \Sigma_{n=0}^{\infty} Q_{n,k} f$ et on montre un résultat de convergence presque-sûre pour les quotients de la forme $W^k f / W^k g$.

**Abstract.** Let $P$ be a positive contraction of $L^1$, we say that a sequence $(Q_n)_n$ of positive operators is subordinated to $P$ if

$$Q_0 = \mathrm{Id}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n P \geqslant Q_{n+1}.$$

Let $(Q_{n,k})$ be a double sequence of operators such that for each integer $k$ the sequence $(Q_{n,k})_n$ is subordinated to $P$. We prove a result of almost everywhere convergence for the quotients $W^k f / W^k g$, where $W^k f = \Sigma_{n=0}^{\infty} Q_{n,k} f$.

**Mathematics Subject Classifications (1991).** 28DXX, 47A35.

**Mots clés.** Convergence presque-sûre, lemme maximal, théorème ergodique, contraction positive.

## 1. Introduction

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-fini et $P$ une contraction positive de $L^1(\mu)$. Mokobodzki a introduit dans [1] la notion de famille subordonnée à $P$. On dit qu'une suite d'opérateurs positifs $(Q_n)_n$ est subordonnée à $P$ si les conditions suivantes sont vérifiées

$$Q_0 = \mathrm{Id}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n P \geqslant Q_{n+1}.$$

Mokobodzki a démontré, dans le cas continu, une version du lemme de Hopf adaptée aux familles subordonnées. Il a aussi démontré, dans le cas où $P$ est sous-markovien, un théorème de convergence presque-sûre pour les quotients de sommes partielles d'une famille subordonnée. Sa démonstration du lemme de Hopf repose sur la théorie du potentiel. Ici on donne dans le cas discret une démonstration simple et directe du lemme de Hopf: elle est basée sur la méthode du schéma de remplissage dont il est bien connue qu'elle est équivalente à la méthode des réduites en théorie discrète du potentiel. En s'inspirant d'un énoncé de Roth [2], on étend le théorème de convergence presque-sûre de Mokobodzki au cas d'une suite de familles subordonnées. Pour ce théorème de convergence presque-sûre on utilise aussi l'hypothèse $P$ sous-markovien. Un exemple montre que cette hypothèse est nécessaire.

## Le lemme de Hopf pour une famille subordonnée

Les deux lemmes de ce paragraphe s'inspirent du travail de Mokobodzki. Le Lemme 1 est une version du lemme maximal de Hopf. Le Lemme 2 permet d'appliquer le Lemme 1 aux familles subordonnées. Les démonstrations sont basées sur le schéma de remplissage. On note $U$ l'opérateur défini sur $L^1$ par $Uf = P(f^+) - f^-$.

LEMME 1. (1) *$(U^n f)^-$ converge en décroissant vers une fonction $\phi$ quand $n$ tend vers l'infini.*
(2) *L'ensemble $[U^n f \geqslant 0]$ croît avec $n$.*
(3) $\int (f + \phi)\, d\mu \geqslant 0$.
(4) $\int_{[\phi=0]} f\, d\mu \geqslant 0$.

*Démonstration.* On a $(Uf)^- \leqslant f^-$, donc la suite $(U^n f)^-$ décroît vers $\phi$, et l'ensemble $[U^n f \geqslant 0]$ croît.

Comme $P$ est une contraction on a

$$\int Uf\, d\mu = \int (Pf^+ - f^-)\, d\mu \leqslant \int (f^+ - f^-)\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

La suite $(\int U^n f\, d\mu)$ est donc décroissante. Or

$$\int (f + \phi)\, d\mu \geqslant \int (f - U^n f)\, d\mu + \int (\phi - (U^n f)^-)\, d\mu,$$

en passant à la limite on obtient $\int (f + \phi)\, d\mu \geqslant 0$.

De plus, comme $[\phi > 0] \subset [f^- > 0]$ et $\phi \leqslant f^-$, on a $\int_{[\phi=0]} f\, d\mu \geqslant 0$.

LEMME 2. *Soit $(Q_k)_k$ une famille subordonnée.*
(1) *Pour $f \in L^1$, notons $W_n f = \Sigma_{k=0}^n Q_k f$. On a pour tout $f$ de $L^1$ et tout $n$ de $\mathbb{N}$*

$$W_n f \leqslant U^n f \text{ sur } [U^n f < 0].$$

(2) *$[W_n f \geqslant 0]$ est inclus dans $[U^n f \geqslant 0]$ et donc dans $[\phi = 0]$.*

*Démonstration.* (1) Raisonnons par récurrence.

- $W_0 f = f = U^0 f$.
- $W_{n+1} f = W_{n+1} f^+ - W_{n+1} f^-$.

Comme la suite $(Q_n)$ est subordonnée à $P$, on a $W_{n+1} \leqslant \mathrm{Id} + W_n P$. D'où

$$W_{n+1}f \leqslant f^+ + W_n Pf^+ - W_{n+1}f^- = f^+ - Q_{n+1}f^- + W_n(Pf^+ - f^-)$$
$$= f^+ - Q_{n+1}f^- + W_n Uf.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $W_n(Uf)$, on obtient

$$W_{n+1}f \leqslant f^+ - Q_{n+1}f^- + U^{n+1}f \quad \text{sur} \quad [U^{n+1}f < 0].$$

Or $[U^{n+1}f < 0]$ est inclus dans $[f^- > 0]$, d'où $f^+ = 0$ sur $[U^{n+1}f < 0]$. Finalement on trouve $W_{n+1}f \leqslant U^{n+1}f$ sur $[U^{n+1}f < 0]$.

(2) D'aprés (1) on a $[U^nf < 0] \subset [W^nf < 0]$, donc $[U^nf \geqslant 0] \supset [W^nf \geqslant 0]$. Or $[U^nf \geqslant 0] \subset [\phi = 0]$ donc $[W^nf \geqslant 0] \subset [U^nf \geqslant 0] \subset [\phi = 0]$.

## 2. Enoncé et démonstration du théorème de convergence presque-sûre

HYPOTHÈSES ET NOTATIONS. (1) $P$ est une contraction positive de $L^1$ telle que pour toute fonction $f$ de $L^1 \cap L^\infty$ on ait $\|Pf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
(2) On se donne une suite double d'opérateurs $(Q_{n,k})$ telle que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la famille $(Q_{n,k})_n$ soit subordonnée à $P$.
(3) On note $W_{n,k}f = \Sigma_{p=0}^{n} Q_{p,k}f$, et $W^kf = \Sigma_{n=0}^{\infty} Q_{n,k}f$. On suppose que pour chaque $f$ positive de $L^1$ et chaque $k \in \mathbb{N}$ la série $\Sigma_{n=0}^{\infty} Q_{n,k}f$ est presque sûrement convergente.
(4) Soit $g$ une fonction positive de $L^1$, appelons $A$ l'ensemble $[g > 0]$ et $C$ l'ensemble $[g > 0] \cap [\liminf_{k\to\infty} W^kg = \infty]$.

REMARQUE. Soit $f$ une fonction positive de $L^1$. Pour montrer que le rapport $W^kf/W^kg$ converge sur une partie de $A$, quand $k$ tend vers l'infini, il suffit de montrer que le rapport $W^k(f+g)/W^kg$ converge sur cette partie de $A$. On peut donc supposer $f > 0$ sur $A$. On fera cette hypothèse dans toute la suite de ce paragraphe.

LEMME 3. *On a* $0 < \liminf_{k\to\infty}(W^kf/W^kg) \leqslant \limsup_{k\to\infty}(W^kf/W^kg) < +\infty$ *presque partout sur* $A$.

*Démonstration.* Ce lemme est une conséquence classique du lemme de Hopf.

Soit $\lambda > 0$. Evaluons la mesure de l'ensemble $E_\lambda = \Sigma_{k=0}^{\infty}[W^kf > \lambda W^kg] \cap A$. Pour montrer que $\limsup_{k\to\infty}(W^kf/W^kg) < +\infty$ presque partout sur $A$, il suffit de prouver que $\mu([\cap_{\lambda>0} E_\lambda]) = 0$. Soit $F = f - \lambda g$ et $\Phi$ la limite quand $n$ tend vers l'infini de $(U^nF)^-$ (cf. Lemme 1). D'après le Lemme 2 on a $E_\lambda \subset [\Phi = 0]$. De plus, d'après le Lemme 1, on a

$$\int_{[\Phi=0]} F\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0,$$

donc

$$\int_{E_\lambda \cup [F>0]} F\,\mathrm{d}\mu = \int_{E_\lambda \cup [F>0]} (f-\lambda g)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0,$$

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu - \int_{E_\lambda \cup [F>0]} \lambda g\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_\lambda \cup [F>0]} (f-\lambda g)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0,$$

$$\int_{E_\lambda} g\,\mathrm{d}\mu \leqslant (1/\lambda)\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu.$$

D'où

$$\mu\left(\left[\bigcap_{\lambda>0} E_\lambda\right]\right) = 0.$$

L'autre inégalité se démontre de la même manière.

La suite est une adaptation de la méthode du schéma de remplissage. Les étapes sont celles indiquées par Krengel dans [4]. Le Lemme 4 remplace le lemme de Chacon–Ornstein. Sa démonstration est basée sur le principe de Banach de Roth [3]; c'est là que l'on utilise l'hypothèse $P$ sous-markovian. Les démonstrations des lemmes suivants sont de simples transpositions des preuves usuelles. Nous les avons indiquées pour que la démonstration du théorème de convergence presque-sûre soit complète. Notons que les Lemmes 1 et 2 sont utiles pour démontrer le Lemme 7.

LEMME 4. *Soient $h$ et $s$ deux fonctions positives de $L^1$. La suite $(W^k(h-Ph)/W^k s)_k$ tend presque partout vers* 0 *sur* $[\lim W^k s = +\infty] \cap [s > 0]$.

Avant de démontrer le Lemme 4, énonçons le principle de Banach de Roth.

*Soit $X$ un ensemble et $\mathscr{N}$ une famille de parties de $X$ telle que*

(*a*) *$\mathscr{N}$ soit stable par réunion dénombrable,*

(*b*) *$A \in \mathscr{N}$ et $B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathscr{N}$.*

*Les éléments de $\mathscr{N}$ sont les parties négligeables de $X$.*

*Soit L l'espace vectoriel des classes modulo $\mathscr{N}$ de fonctions réelles définies sur $X$. Si $(T_n)$ est une suite d'opérateurs positifs de $L^1$ dans L et si E est un sous-espace dense de $L^1$ vérifiant*

(*i*) *$\forall f \in E$, $(T_n f)$ converge $\mathscr{N}$ presque-partout,*

(*ii*) *$\forall f \in L^1$, $\limsup_{n\to\infty}$, $T_n f < \infty$ $\mathscr{N}$ presque-partout,*

*alors pour tout $f$ de $L^1$, $(T_n f)$ converge $\mathscr{N}$ presque-partout.*

*De plus si pour tout $f$ de $E$, $(T_n f)$, converge vers* 0 *$\mathscr{N}$ presque-partout, alors pour tout $f$ de $L^1(T_n f)$ converge vers* 0 *$\mathscr{N}$ presque-partout.*

Nous allons utiliser ce résultat avec $X = [\lim W^k s = +\infty] \cap [s > 0]$ et $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties $\mu$ négligeables.

*Démonstration du Lemme* 4. (1) Montrons que l'opérateur $h$ donne $(W^k(Ph-h)+h)/W^k s$ est positif.

Soit $h$ une fonction positive de $L^1$. On a

$$W^k(Ph-h)+h=\sum_{n=0}^{\infty}(Q_{n,k}P-Q_{n+1,k})h.$$

Or $(Q_{n,k}P-Q_{n+1,k})h \geqslant 0$, donc $W^k(Ph-h)+h \geqslant 0$.

(2) $E=L^1 \cap L^\infty$ est dense dans $L^1$.

(3) Montrons que $\lim_{k\to\infty}(W^k(Ph-h)+h)/W^k s=0$ pour tout $h$ de $L^1 \cap L^\infty$.

Soit $0 \leqslant h \leqslant 1$. Il est bien connu qu'un opérateur positif de $L^1$ qui contracte la norme $L^\infty$ des fonctions de $L^1 \cap L^\infty$ s'étend à $L^\infty$. On peut donc appliquer les opérateurs $P$ et $Q_{n,k}$ à la fonction 1. Pour $N \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{N}(Q_{n,k}P-Q_{n+1,k})h \leqslant \sum_{n=0}^{N}(Q_{n,k}P-Q_{n+1,k})1 \leqslant \sum_{n=0}^{N}(Q_{n,k}-Q_{n+1,k})1 \leqslant 1.$$

Donc $0 \leqslant W^k(Ph-h)+h \leqslant 1$, et $\lim_{k\to\infty}(W^k(Ph-h)+h)/W^k s=0$ sur $[\lim_{k\to\infty} W^k s=+\infty] \cap [s>0]$.

(4) D'après le lemme précédent, pour toute fonction $h$ de $L^1$, on a $\limsup_{k\to\infty}(W^k(Ph-h)+h)/W^k s) < +\infty$ sur $[\lim_{k\to\infty} W^k s=+\infty] \cap [s>0]$.

Ces quatre propriétés permettent de conclure grâce à la version du principe de Banach de Roth.

LEMME 5. *Soient $r$ et $s$ deux fonctions positives de $L^1$ telles que $g=r+s$. Posons $g_1=r+Ps$. Pour $\gamma>1$ on a*

$$C \cap \left[\limsup_{k\to\infty} W^k(f-g)>0\right] \subset C \cap \left[\limsup_{k\to\infty} W^k(\gamma f-g_1)>0\right].$$

*Démonstration.* On a $W^k(\gamma f-r-Ps)=W^k(f-g)+W^k((\gamma-1)f+s-Ps)$. Or d'après le Lemme 4 on a

$$\lim_{k\to\infty} W^k(s-Ps)/W^k f=0 \text{ sur } C,$$

donc

$$\liminf_{k\to\infty} W^k((\gamma-1)f+s-Ps) \geqslant 0 \text{ sur } C.$$

D'où

$$\limsup_{k\to\infty} W^k(\gamma f-g_1) \geqslant \limsup_{k\to\infty} W^k(f-g) \text{ sur } C.$$

NOTATIONS. (1) Si $r$ est une fonction positive de $L^1$, $D^n(r)$ désigne
pour $n = 1$, l'ensemble des fonctions $s$ de $L^1$ telles qu'il existe deux fonctions positives de $L^1$, $r_1$ et $r_2$ vérifiant $r = r_1 + r_2$ et $s = r_1 + Pr_2$,
pour $n \geqslant 1$, l'ensemble des fonctions $s$ de $L^1$ telles qu'il existe une fonction $s'$ vérifiant $s' \in D^1(r)$ et $s \in D^{n-1}(s')$.
(2) Pour $H \in \mathscr{A}$ on note $\Psi_H^n r = \sup\{\int_H s\,d\mu, s \in D^n(r)\}$, $\Psi_H r = \sup_n \Psi_H^n r = \lim_{n\to\infty} \Psi_H^n r$.

COROLLAIRE 6. *Si $\gamma > 1$ et si $g' \in D^n(g)$, alors on a*

$$C \cap \left[\limsup_{k\to\infty} W^k(f-g) > 0\right] \subset C \cap \left[\limsup_{k\to\infty} W^k(\gamma f - g') > 0\right].$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $\gamma = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$ et $\gamma_i > 1$.

LEMME 7. *Soient $r$ et $s$ deux fonctions positives de $L^1$. Notons $h = r - s$, $E_k = [W^k h > 0]$, et $E = \cup_{k=0}^{\infty} E_k$. Pour $H \subset E$ on a $\Psi_H r \geqslant \int_H s\,d\mu$.*

*Démonstration.* (1) Montrons tout d'abord que l'on a $U^n h = r_n - s$ avec $r_n \in D^n(r)$.

- $r_0 = r$,
- si $r_n$ est construit, alors $t_n = r_n - (U^n h)^+ \geqslant 0$ et $(U^n h)^- = -U^n h + (U^n h)^+ = s - t_n$

donc $U^{n+1}h = P(r_n - t_n) - (s - t_n) = r_{n+1} - s$ avec $r_{n+1} = P(r_n - t_n) + t_n$.
(2) Posons $H_n = H \cap (\cup_{k=0}^{\infty} [W_{n,k} h > 0])$ et $K_n = \cup_{m \leqslant n} H_m$.

Comme $[W^k h > 0] \subset \cup_{n=0}^{\infty} [W_{n,k} h > 0]$, la réunion croissante des $K_n$ est $H$. D'après le deuxièmement du Lemme 1 les ensembles $[U^n h \geqslant 0]$ sont croissants, donc en utilisant le deuxièmement du Lemme 2 on obtient $K_n \subset [U^n h \geqslant 0]$. Ainsi $\int_{K_n} (r_n - s)\,d\mu \geqslant 0$ et $\Psi_{K_n} r \geqslant \int_{K_n} s\,d\mu$. En passant à la limite croissante on obtient $\Psi_H r \geqslant \int_H s\,d\mu$.

LEMME 8. *Si $H \subset [\limsup_{k\to\infty} W^k(f-g) > 0] \cap C$, alors $\Psi_H f \geqslant \Psi_H g$.*

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $g_1 \in D^n(g)$. D'après le Corollaire 6, pour $\gamma > 1$, on a $H \subset [\limsup_{k\to\infty} W^k(\gamma f - g_1) > 0]$. Donc, d'après le Lemme 7, on a $\Psi_H(\gamma f) \geqslant \Psi_H^n g$. En faisant tendre $\gamma$ vers 1 et $n$ vers l'infini, on en déduit $\Psi_H f \geqslant \Psi_H g$.

THÉORÈME 9. *$W^k f / W^k g$ converge presque sûrement sur $C$ quand $k$ tend vers l'infini.*

*Démonstration.* Soient $l^+ = \limsup_{k\to\infty} W^k f / W^k g$, $l^- = \liminf_{k\to\infty} W^k f / W^k g$ et $\alpha < \beta \in \mathbb{Q}$. Appelons $H = [l^- < \alpha < \beta < l^+] \cap C$. On a

$$H \subset \left[\limsup_{k\to\infty} W^k(f - \beta g) > 0] \cap [\limsup_{k\to\infty} W^k(\alpha g - f) > 0\right] \cap C.$$

D'où $\Psi_H f \geqslant \beta \Psi_H g$ et $\Psi_H f \leqslant \alpha \Psi_H g$. Or $g > 0$ sur $H$ et $\Psi_H g \geqslant \int_H g\,d\mu$, donc $\mu(H) = 0$.

REMARQUE. En s'inspirant des hypothèses du Théorème 1 de [2], on pourrait avoir la convergence presque-sûre de $W^k f/W^k g$ sur $[g > 0]$ au lieu de $C$. Cependant, en se limitant à $C$ on peut identifier la limite de $W^k f/W^k g$. Cette limite ne dépend que de $P$ et elle sera la même pour toute suite de familles subordonnées à $P$ telle $W^k g$ tende vers $\infty$ sur $C$. En effet, pour tout $k$, la suite $(P^n)_{n\leqslant k}$ prolongée par 0, est une famille subordonnée à $P$ et $\lim_{k\to\infty}\Sigma_{n=0}^k P^n g = +\infty$ sur $C$. Ainsi, en intercalant les familles $(P^n)_{n\leqslant k}$ entre les familles $(Q_{n,k})_k$ on obtient

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} P^n f\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{k} P^n g\right) = \lim_{k\to\infty} W^k f/W^k g \text{ sur } C. \tag{1}$$

Comme $C$ est inclus dans la partie conservative de $P$, (1) permet d'identifier la limite $W^k f/W^k g$ quand $k$ tend vers l'infini. Cette limite est le quotient de deux espérances conditionnelles par rapport à la tribu des ensembles invariants de $P$ (cf. [5] et [6]). Dans le cas où $C = \Omega$ on a simplement

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} P^n f\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{k} P^n g\right) = \lim_{k\to\infty} W^k f/W^k g = E(f\,|\,\mathscr{C})/E(g\,|\,\mathscr{C})$$

où $\mathscr{C}$ désigne la tribu des ensembles invariants par $P$.

UN EXEMPLE DE FAMILLE SUBORDONNÉE. Soit $(\phi_n)$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives plus petites que 1. Appelons $M_n$ l'opérateur de multiplication par $\Phi_n$. La famille $Q_n = M_n P^n$ est subordonnée à $P$, et si $\Sigma_{n=0}^{\infty}\|\phi_n\|_\infty < \infty$ la famille $(Q_n)$ est sommable. On peut ainsi retrouver les sommes partielles et les sommes d'Abel du semi-groupe $(P^n)$.

DEUX EXEMPLES DE DIVERGENCE SANS L'HYPOTHÈSE $P$ SOUS-MARKOVIEN. On se place sur l'espace $\{1,2\}$, ces deux points ayant même masse. Les fonctions sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et les opérateurs des matrices carrées d'ordre 2.

On prend $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, et $Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On a $P^2 = P$, $QP = P$ et $P \geqslant Q$. Si $Q_0 = \mathrm{Id}$ et si $Q_n$ égale $P$ ou $Q$ pour $n \geqslant 1$, la famille $(Q_n)$ est subordonnée à $P$. Choisissons $g = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. On a $W_n g(1) = n + 1$, $W_n g(2) = 0$, $W_n f(1) =$ cardinal de l'ensemble des $q \leqslant n$ tels que $Q_q = P$, $W_n f(2) = 1$. Soit $(q_m)_m$ une suite d'entiers telle $(q_{m+1}/q_m)$ tende vers l'infini quand $m$ tend vers l'infini.

(1) En posant $Q_0 = \mathrm{Id}$, $Q_n = P$ si $q_{2m} < n \leqslant q_{2m+1}$, $Q_n = Q$ si $q_{2m+1} < n \leqslant q_{2m+2}$, on a

$$\limsup_{k\to\infty} W_k f(1)/W_k g(1) = 1 \text{ et } \liminf_{k\to\infty} W_k f(1)/W_k g(1) = 0.$$

(2) On peut ausi construire une suite de familles subordonnées $(Q_{n,k})$ telle que pour chaque $n$ fixé, $Q_{n,k}$ tende vers vers $P$ en croissant quand $k$ tend vers l'infini et telle que

$$\limsup_{k\to\infty} W^k f(1)/W^k g(1) = 1 \text{ et } \liminf_{k\to\infty} W^k f(1)/W^k g(1) = 0.$$

Construisons cette suite par récurrence:
- $Q_{0,0} = \mathrm{Id}$, $Q_{n,0} = 0$ pour $n \geqslant 1$.
- Pour chaque $k \geqslant 1$ la famille $(Q_{n,k})_n$ est nulle à partir d'un certain rang.
  Si $k = 2m$ on pose $Q_{n,k} = Q_{n,k-1}$ si $n \leqslant q_m$, $Q_{n,k} = Q$ si $q_m \leqslant n \leqslant q_{m+1}$, $Q_{n,k} = 0$ si $n > q_{m+1}$.
  Si $k = 2m + 1$ on pose $Q_{n,k} = P$ si $0 < n \leqslant q_{m+1}$, $Q_{n,k} = 0$ si $n > q_{m+1}$.

## References


1. Mokobodzki, G.: Maximal inequalities and potential theory, *"Potential theory" ICTP 90*, Gruyter, 1990.
2. Roth, J. P.: Convergence presque-partout de quotients de potentiels, *C. R. Acad. Sci. Paris I* **312** (1991), 213–216.
3. Roth, J. P.: Théorèmes de convergence presque-partout, *C. R. Acad. Sci. Paris I* **312** (1991), 51–54.
4. Krengel, U.: *Ergodic Theorems*, de Gruyter, Studies in Mathematics, 1985.
5. Chacon, R.: Identification of the limit of operator averages, *J. Math. Meca* **11** (1962), 961–968.
6. Neveu, J.: Sur le théorème ergodique ponctuel, *C. R. Acad. Sci. Paris* **252** (1961), 1554–1556.