

zu genügen. Mit $\tau = 0,315$ erhält man dann nach (11) die Schranke

$$\|x - x_1\| \leq 0,0362,$$

wenn man noch beachtet, daß die Bedingung 2) des Satzes wegen $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$ stets erfüllt ist.

Literatur

- [1] J. W. SCHMIDT und H. SCHOENHEINZ, Fehlerschranken zum Differenzenverfahren unter ausschließlicher Benutzung verfügbarer Größen, Arch. Rational Mech. Anal. **10**, (1962) S. 311–322.
 [2] J. SCHRÖDER, Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung, Arch. Math. **7** (1956), S. 471–484.

Verfasser: Dr. JOCHEN W. SCHMIDT, Technische Universität Dresden, Institut für Angewandte Mathematik

J. ALBRECHT

Zur Fehlerabschätzung beim Gesamt- und Einzelschrittverfahren für lineare Gleichungssysteme¹⁾

Bei der iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme¹⁾

$$x = T x + r$$

in Gesamtschritten gemäß

$$x^{k+1} = T x^k + r \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

oder in Einzelschritten gemäß

$$x^{k+1} = T_L x^{k+1} + T_R x^k + r \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

gilt nach dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen [5], [11] unter der hinreichenden Konvergenzbedingung

$$\|T\| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \|(E - T_L)^{-1} T_R\| < 1$$

die Fehlerabschätzung

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{k+1} - x^k\|$$

bzw.

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \frac{\|(E - T_L)^{-1} T_R\|}{1 - \|(E - T_L)^{-1} T_R\|} \|x^{k+1} - x^k\|$$

und nach dem BROUWERSCHEN Fixpunktsatz [9] unter den Voraussetzungen

$$0 \leq z^k; \quad |x^{k+1} - x^k| \leq \{E - |T|\} z^k$$

bzw.

$$0 \leq z^k; \quad |x^{k+1} - x^k| \leq \{E - (E - |T_L|)^{-1} |T_R|\} z^k$$

die Fehlerabschätzung

$$|x^{k+1} - x| \leq |T| z^k$$

bzw.

$$|x^{k+1} - x| \leq (E - |T_L|)^{-1} |T_R| z^k.$$

Zur Definition der Vektornorm $\|v\|$ und der Vektoren z^k werden im folgenden ein zum Spektralradius ϱ der Matrix²⁾

$$|T| \quad \text{bzw.} \quad (E - |T_L|)^{-1} |T_R|$$

gehöriger positiver Eigenvektor α sowie die gemäß

$$|T| \alpha^l = \alpha^{l+1} \quad \text{bzw.} \quad (E - |T_L|)^{-1} |T_R| \alpha^l = \alpha^{l+1} \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

(mit $\alpha^0 > 0$, z. B.³⁾ $\alpha^0 = e$) erzeugten positiven iterierten α^l herangezogen. Dadurch gelingt es, die bekannten Fehlerabschätzungen von COLLATZ [3] bzw. SASSENFELD [8] zum Gesamtschrittverfahren bzw.

Einzelschrittverfahren und deren Verbesserungen von SCHRÖDER [9] zu verallgemeinern und neue Fehlerschranken aufzustellen; es zeigt sich, daß mit dem BROUWERSCHEN Fixpunktsatz genauere Ergebnisse erzielt werden als mit dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen. Alle diese Fehlerabschätzungen geben jedoch, wie aus Beispielen hervorgeht, die Größenordnung des Fehlers im allgemeinen nur dann richtig wieder, wenn in T der nichtnegative Teil T^+ überwiegt, wenn sich also $T = T^+ + T^-$ und $|T| = T^+ - T^-$ nicht wesentlich voneinander unterscheiden.

1. Fehlerabschätzungen mit dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen

Durch die Definition

$$\|v\| = \max_i \frac{|v_i|}{\alpha_i}$$

wobei²⁾

$$|T| \alpha = \varrho \alpha \quad (\text{Gesamtschrittverfahren})$$

bzw.

$$(\varrho |T_L| + |T_R|) \alpha = \varrho \alpha \quad (\text{Einzelschrittverfahren})$$

und

$$0 < \varrho, \quad 0 < \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ist, wird die Vektornorm $\|v\|$ soweit der jeweiligen Iterationsmatrix T bzw. $(E - T_L)^{-1} T_R$ angepaßt, daß der Wert der ihr zugeordneten Matrixnorm [6]

$$\|T\| = \varrho(|T|)$$

bzw.

$$\|(E - T_L)^{-1} T_R\| \leq \|(E - |T_L|)^{-1} |T_R|\| = \varrho((E - |T_L|)^{-1} |T_R|)$$

ausfällt. Für nichtnegative Matrizen $T = |T|$ geht also die hinreichende Konvergenzbedingung des Fixpunktsatzes für kontrahierende Abbildungen

$$\varrho(|T|) < 1 \quad \text{bzw.} \quad \varrho((E - |T_L|)^{-1} |T_R|) < 1$$

in die bekannte notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung

$$\varrho(T) < 1 \quad \text{bzw.} \quad \varrho((E - T_L)^{-1} T_R) < 1$$

über.

Beweis.

Beim Gesamtschrittverfahren ist

$$\|T\| = \max_{\|v\|=1} \|T v\| = \max_{\|v\|=1} \left\{ \max_i \frac{\left| \sum_{j=1}^n t_{ij} v_j \right|}{\alpha_i} \right\}.$$

Unter der Voraussetzung $\|v\| = 1$ und wegen

$$\sum_{j=1}^n |t_{ij}| \alpha_j = \varrho \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gilt für jedes i gleichmäßig die Abschätzung

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^n t_{ij} v_j \right|}{\alpha_i} \leq \frac{\sum_{j=1}^n |t_{ij}| \alpha_j \frac{|v_j|}{\alpha_j}}{\alpha_i} \leq \frac{\left\{ \sum_{j=1}^n |t_{ij}| \alpha_j \right\} \|v\|}{\alpha_i} = \varrho,$$

also auch

$$\max_i \frac{\left| \sum_{j=1}^n t_{ij} v_j \right|}{\alpha_i} \leq \varrho$$

und damit zunächst

$$\|T\| \leq \varrho(|T|).$$

Da jedoch für jeden Index $i = i_0$ [beliebig, aber festgewählt; $t_{ij} = |t_{ij}| \exp(i \varphi_j^{(i)})$ ($j = 1, 2, \dots, n$)]

¹⁾ Die Koeffizientenmatrix T wird (ohne Einschränkung der Allgemeinheit [2]) als nichtzerfallend vorausgesetzt.

²⁾ Eine nichtzerfallende, nichtnegative Matrix besitzt nach FROBENIUS [7] einen positiven Eigenwert ϱ („Maximalwurzel“), der dem Betrage nach von keinem der anderen Eigenwerte dieser Matrix übertroffen wird, und dazu einen Eigenvektor α mit positiven Komponenten.

³⁾ Alle Komponenten von e sind 1.

ein Vektor $v^{(i_0)} = (\alpha_j \exp(-i \varphi_j^{(i_0)}))$ [mit $\|v^{(i_0)}\| = 1$] angebbar ist, für den

$$\frac{\sum_{j=1}^n t_{ij} v_j^{(i_0)}}{\alpha_{i_0}} = \frac{\sum_{j=1}^n |t_{ij}| \alpha_j}{\alpha_{i_0}} = \varrho,$$

also auch

$$\max_i \frac{\left| \sum_{j=1}^n t_{ij} v_j^{(i_0)} \right|}{\alpha_i} = \varrho$$

ausfällt, ist

$$\|T\| = \varrho(\|T\|).$$

Beim Einzelschrittverfahren verläuft der Beweis ähnlich; im Gegensatz zum Gesamtschrittverfahren steht das Gleichheitszeichen aber (im allgemeinen) nur bei nichtnegativen Matrizen $T = |T|$:

$$\begin{aligned} \|(E - T_L)^{-1} T_R\| &\leq \|(E - |T_L|)^{-1} |T_R|\| \\ &= \varrho \|(E - |T_L|)^{-1} |T_R|\|. \end{aligned}$$

Die bisher gewonnenen Ergebnisse haben vorwiegend theoretische und weniger praktische Bedeutung, denn im allgemeinen sind weder der Spektralradius ϱ noch der zugehörige Eigenvektor α bekannt. Zu ihrer Berechnung muß vielmehr ein weiteres (von $\alpha^0 = e$ ausgehendes)³⁾ Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \alpha^{l+1} &= |T| \alpha^l && \text{(Gesamtschrittverfahren)} \\ \text{bzw.} &&& (l = 0, 1, 2, \dots) \\ \alpha^{l+1} &= |T_L| \alpha^{l+1} + |T_R| \alpha^l && \text{(Einzelschrittverfahren)} \end{aligned}$$

angesetzt werden, dessen (positive) Iterationsfolge $\{\alpha^l\}$ gegen die Gestalt des Eigenvektors α strebt und bei dem nach einem Einschließungssatz von L. COLLATZ [4], [2] monotonen Verhalten der Quotienten

$$M_l = \max_i \frac{\alpha_i^{l+1}}{\alpha_i^l}$$

herrscht:

$$M_0 \geq M_1 \geq \dots \geq M_l \geq M_{l+1} \geq \dots \geq \varrho.$$

Es ist deshalb naheliegend, bei der Definition der Vektornorm nicht die Gewichte α_i , sondern die Gewichte α_i^l zu verwenden (l fest):

$$\|v\| = \max_i \frac{|v_i|}{\alpha_i^l};$$

der Wert der zugeordneten Matrixnorm ist⁴⁾ dann

$$\|T\| = M_l$$

bzw.

$$\|(E - T_L)^{-1} T_R\| \leq \|(E - |T_L|)^{-1} |T_R|\| = M_l.$$

(Beim Einzelschrittverfahren steht das Gleichheitszeichen (im allgemeinen) wieder nur bei nichtnegativen Matrizen $T = |T|$.) Unter der Voraussetzung

$$\alpha^{l+1} < \alpha^l \quad \text{d. h.} \quad M_l < 1$$

⁴⁾ Die beim Gesamtschrittverfahren unter der Voraussetzung $\|v\| = 1$ vorgenommene Abschätzung

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^n t_{ij} v_j \right|}{\alpha_i^l} \leq \frac{\sum_{j=1}^n |t_{ij}| \alpha_j^l \frac{|v_j|}{\alpha_j^l}}{\alpha_i^l} \leq \frac{\left\{ \sum_{j=1}^n |t_{ij}| \alpha_j^l \right\} \|v\|}{\alpha_i^l} = \frac{\alpha_i^{l+1}}{\alpha_i^l} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ergibt (ebenso wie die entsprechende Abschätzung beim Einzelschrittverfahren) jetzt nicht mehr für jedes i dieselbe Schranke.

lautet also die Fehlerabschätzung

$$\boxed{|x_i^{k+1} - x_i| \leq \alpha_i^l \frac{M_l}{1 - M_l} \max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j^l} \quad (i = 1, 2, \dots, n)}$$

Sie enthält für $l = 0$ (also für $\alpha_j^0 = 1$) die von COLLATZ [3] bzw. SASSENFELD [8] aufgestellten Fehlerabschätzungen zum Gesamt- bzw. Einzelschrittverfahren als Spezialfall.

2. Fehlerabschätzungen mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz

Die beiden Voraussetzungen des von SCHRÖDER [9] aus dem BROUWERSchen Fixpunktsatz gewonnenen Einschließungssatzes werden (mit den bisherigen Bezeichnungen und Bedingungen, insbesondere $\varrho < 1$ und $\alpha^{l+1} < \alpha^l$ (l fest)) durch die Vektoren

$$z^k = \frac{1}{1 - \varrho} \left(\max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j} \right) \alpha$$

und

$$z^k = \left(\max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j^l - \alpha_j^{l+1}} \right) \alpha^l$$

befriedigt, wie sich durch Einsetzen sofort bestätigt. Im ersten Falle ergibt sich so dieselbe Fehlerabschätzung wie mit dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen, nämlich

$$\boxed{|x_i^{k+1} - x_i| \leq \frac{\varrho}{1 - \varrho} \left(\max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j} \right) \alpha \quad (k = 0, 1, 2, \dots);}$$

im zweiten Falle dagegen eine bessere Fehlerabschätzung, nämlich

$$\boxed{|x_i^{k+1} - x_i| \leq \left(\max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j^l - \alpha_j^{l+1}} \right) \alpha_i^{l+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).}$$

[Beweis: Aus

$$\alpha_j^{l+1} \leq M_l \alpha_j^l \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

folgt

$$\frac{1}{\alpha_j^l - \alpha_j^{l+1}} \leq \frac{1}{(1 - M_l) \alpha_j^l} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

und damit

$$\begin{aligned} &\left(\max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j^l - \alpha_j^{l+1}} \right) \alpha_i^{l+1} \\ &\leq \frac{M_l}{1 - M_l} \left(\max_j \frac{|x_j^{k+1} - x_j^k|}{\alpha_j^l} \right) \alpha_i^l \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Für $l = 0$ (also für $\alpha_j^0 = 1$) enthält diese Abschätzung die von SCHRÖDER [9] erzielten Verschärfungen der bereits erwähnten Schranken von COLLATZ bzw. SASSENFELD als Spezialfall.

Andere zur Fehlerabschätzung geeignete Vektoren z^k berechnet SCHRÖDER ebenfalls durch ein (ähnliches) zusätzliches Iterationsverfahren [10].

Wiederum andere Ergebnisse, nämlich obere und untere Schranken für die Lösung, erhält man bei monotoner Matrix $T = T^+$ oder $T = T^-$ aus einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge [2] (und zwar ohne zusätzliche Iteration); Beispiele zeigen, daß diese Fehlerabschätzungen außerordentlich scharf sind.

3. Beispiele

1. In vielen linearen Gleichungssystemen $x = Tx + r$, die beim Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mit Differentialgleichungen auftreten, ist „fast jede“ Zeilensumme der Matrix $|T|$ gleich 1. Beim Gesamtschrittverfahren wird also (zumindest) $M_0 = 1$ bzw. $\alpha^1 \leq \alpha^0$; beim Einzelschrittverfahren fällt dagegen (bereits) $M_0 < 1$ bzw. $\alpha^1 < \alpha^0$ aus, wenn die finiten Gleichungen zuerst in den unmittelbar am Rande gelegenen Gitterpunkten durchlaufen werden, dann in deren (weiter nach innen liegenden) Nachbarnpunkten usw.

2. Beim Gesamtschrittverfahren zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,3 x_2 + 0,2 x_3 - 0,1 x_4 + 1,6 \\ x_2 &= -0,2 x_1 + 0,4 x_3 - 0,3 x_4 + 2,5 \\ x_3 &= 0,1 x_1 - 0,5 x_2 + 0,2 x_4 + 1,8 \\ x_4 &= -0,3 x_1 + 0,2 x_2 - 0,4 x_3 + 3,5 \end{aligned}$$

erhält man (ausgehend von $x_i^0 = 0$, $\alpha_i^0 = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$)) u. a.:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
x_i	1	2	1,5	3
x_i^3	1,047	2,052	1,521	3,048
x_i^4	0,9838	1,9846	1,4883	2,9879
$ x_i^4 - x_i $	0,0162	0,0154	0,0117	0,0121
$\left(\max_j \frac{ x_j^4 - x_j^3 }{\alpha_j^4 - \alpha_j^3} \right) \alpha_i^{l+1}$	$l = 0$ 0,4044	0,6066	0,5392	0,6066
	$l = 1$ 0,4108	0,5609	0,5451	0,5372
	$l = 2$ 0,2622	0,3655	0,3398	0,3592
	$l = 3$ 0,2772	0,3844	0,3645	0,3735
	$l = 7$ 0,2759	0,3830	0,3611	0,3733

Da sich die Iterationsmatrix T bei diesem Beispiel beträchtlich von $|T|$ unterscheidet, übertreffen die Fehlerschranken ($l = 0, 1, \dots$) die Fehler erheblich; die besten Schranken ergeben sich hier für $l = 2$.

Literatur

- [1] J. ALBRECHT, Monotone Iterationsfolgen und ihre Verwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme, Num. Math. **3** (1961), S. 345–358.
- [2] J. ALBRECHT, Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge, Num. Math. **4** (1962), S. 196–208.
- [3] L. COLLATZ, Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme, ZAMM **22** (1942), S. 357 bis 361.
- [4] L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949, 466 S.
- [5] L. COLLATZ, Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis, ZAMP **4** (1953), S. 327–357.
- [6] V. N. FADDEVA, Computational Methods of Linear Algebra, New York 1959, 252 S.
- [7] G. FROBENIUS, Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1912, 456–477.
- [8] H. SASSENFELD, Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungen, ZAMM **31** (1951), S. 92–94.
- [9] J. SCHRÖDER, Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen mit dem BROUWERschen Fixpunktsatz, Arch. Rat. Mech. Anal. **3** (1959), S. 28–44.
- [10] J. SCHRÖDER, Computing error bounds in solving linear systems, Mathematics of Computation **16** (1962), S. 323–337.
- [11] J. WEISSINGER, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, Math. Nachr. **8** (1952), S. 193–212.

Verfasser: Dr. JULIUS ALBRECHT, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67–69

H. WENZEL

Bestimmung des Querschnittkernes von Balken mittels der Vektor- und Tensorrechnung

1. Einleitung

Die Bestimmung des Querschnittkernes von Balken gehört zum Bestand jeder Vorlesung über Technische Mechanik für Bauingenieure. Dabei werden zunächst die Hauptträgheitsrichtungen und die Hauptträgheitsmomente auf zeichnerischem oder rechnerischem Wege bestimmt ([1], S. 208–209; [2], S. 361, S. 341; [3], S. 125–127). Die folgenden Untersuchungen kommen ohne diese Vorarbeit aus. Es wird gezeigt, wie sich mittels der Vektor- und Tensorrechnung Formeln ergeben, die zur Theorie der Querschnittkern-Bestimmung gehören. Man erhält die Endergebnisse, ohne vorher die Hauptträgheitsrichtungen und die Hauptträgheitsmomente bestimmen zu müssen.

2. Formulierung des Ergebnisses

Bei einem Balken betrachten wir einen senkrecht zur Balkenachse geführten Querschnitt E . Den zu E gehörigen Kern K kann man folgendermaßen erhalten (Bild 1):

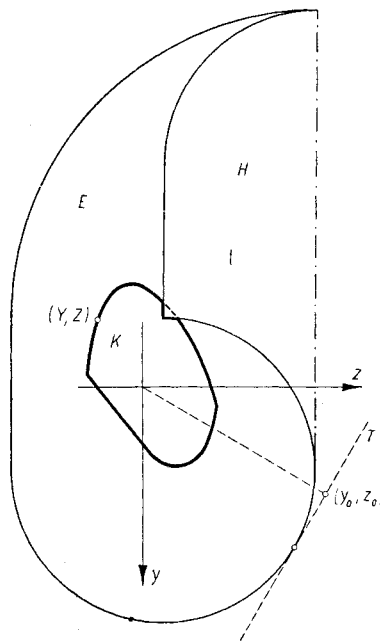


Bild 1.

- Man bestimmt den Flächeninhalt F und den geometrischen Schwerpunkt von E , läßt den Ursprung eines kartesischen y, z -Systems mit dem Schwerpunkt zusammenfallen und ermittelt die Flächen- und Zentrifugalmomente

(1)

$$J_y = \iint_E z^2 df, \quad J_z = \iint_E y^2 df, \quad J_{yz} = J_{zy} = \iint_E zy df.$$

- Falls E nicht bereits ein konvexer Bereich H ist, bildet man die konvexe Hülle H von E .
- Vom Rand des Bereiches H betrachtet man sämtliche Tangenten T . Ecken denke man sich hierbei durch geeignete kleine Kreisbögen ersetzt, deren Radien dann gegen 0 streben. Auf jedes T fällt