Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome.

Von

Artur Rosenthal in München.

Hilbert hat in seinen Grundlagen der Geometrie*) ein System von sechs Kongruenzaxiomen aufgestellt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, *daß sich dieses System der Kongruenzaxiome wesentlich vereinfachen läßt: es sollen nämlich* mit Hilfe der übrigen Kongruenzaxiome, unter Hinzuziehung von Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen, *das fünfte Kongruenzaxiom, sowie Teile des ersten und vierten bewiesen werden.* Die so bewiesenen Sätze brauchen dann natürlich beim Aufbau der Geometrie nicht mehr als Axiome vorausgesetzt zu werden.

Das fünfte Hilbertsche Kongruenzaxiom lautet:

„III 5. Wenn ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ sowohl dem Winkel $\sphericalangle(h', k')$ als auch dem Winkel $\sphericalangle(h'', k'')$ kongruent ist, so ist auch der Winkel $\sphericalangle(h', k')$ dem Winkel $\sphericalangle(h'', k'')$ kongruent, d. h. wenn

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$$

ist, so ist auch stets

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')."$$

Das erste Kongruenzaxiom ist bei Hilbert folgendermaßen formuliert:

„III 1. [a] Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets *einen und nur einen* Punkt B' finden, sodaß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

[b] Jede Strecke ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets:

$$[1] \quad AB \equiv AB \qquad \text{und} \qquad [2] \quad AB \equiv BA."$$

---

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1909, S. 9—12. — Alle Angaben des folgenden beziehen sich auf diese (neueste) Auflage.

Analog das vierte Kongruenzaxiom:

„III 4. [a] Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' *einen und nur einen* Halbstrahl k', sodaß der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle(h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle(h', k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen:

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

[b] Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets

$$[1]\quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k) \qquad \text{und} \qquad [2]\quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h).\text{“}$$

Wie die von mir in [ ] beigesetzten Zeichen andeuten, zerfallen die Axiome III 1 bez. III 4 in je zwei verschiedene Teile III 1a und III 1b bez. III 4a und III 4b. Der Teil b läßt sich dabei ersichtlich noch in zwei weitere Teile zerspalten: nämlich III 1 b_1 und III 1 b_2 bez. III 4 b_1 und III 4 b_2. Aber auch der Teil a ist*) in zwei weitere Teile zu zerlegen, indem man *„einen und nur einen“* in 1) *„mindestens einen“* (III 1 a_1 bez. III 4 a_1) und 2) *„höchstens einen“* (III 1 a_2 bez. III 4 a_2) spaltet.

Wie wir sehen werden, ergibt sich die Eindeutigkeit der Streckenkongruenz (III 1 a_2) ohne weiteres mit Hilfe der Eindeutigkeit der Winkelabtragung (III 4 a_2), wogegen das Umgekehrte sich als nicht möglich erweist. Ferner folgt III 1 b_1 als unmittelbare Konsequenz aus den übrigen Teilen von III 1 und III 2. Die Grundlage endlich des Beweises von III 4 b_1 und III 5 besteht in der Erkenntnis, daß es möglich ist, die Kongruenzsätze *ohne* Zuhilfenahme von III 4 b_1 und III 5 herzuleiten.

Noch ein Wort über das Symbol der Kongruenz: Um die genaue Unterscheidung von $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ und $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h, k)$**) zu erleichtern, führen wir statt des Zeichens „$\equiv$“ das Zeichen einer gerichteten Kongruenz: „$\rightarrow$“ ein, sodaß $\sphericalangle(h, k) \rightarrow \sphericalangle(h', k')$ bedeutet: der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ ist dem Winkel $\sphericalangle(h', k')$ kongruent.

Ferner bezeichnen wir die *vollständige* Gerade, von der h ein Halbstrahl ist, mit $\bar{h}$; der andere Halbstrahl von $\bar{h}$ heiße dann h_1.

---

*) Ähnlich, wie es beim Parallelenaxiom geschieht; vgl. Hilbert, a. a. O. S. 20.

**) Analog für Strecken.

§ 1.

Einige Hilfssätze über Verknüpfungs- und Anordnungstatsachen.

Hilfssatz a: Ein Punkt A gehört dann und nur dann dem *Innern* des Winkels $\sphericalangle(h, k)$ an, wenn A nicht auf h oder k (einschließlich Scheitelpunkt O) liegt, und wenn in der Ebene des Winkels (h, k) sowohl A und k auf derselben Seite von $\bar{h}$, als auch A und h auf derselben Seite von $\bar{k}$ liegen. Alle diesen Bedingungen nicht genügenden und nicht auf h oder k (einschließlich O) gelegenen Punkte gehören dem *Äußern* des Winkels $\sphericalangle(h, k)$ an.

Beweis: Es handelt sich darum, nachzuweisen, daß das Gebiet der die Bedingungen des Hilfssatzes a erfüllenden Punkte identisch mit dem Gebiete ist, das Hilbert*) als das Innere des Winkels $\sphericalangle(h, k)$ bezeichnet hat.

Nach Hilberts Satz 6**) teilt jede Gerade $\bar{a}$ eine sie enthaltende Ebene α in zwei Gebiete, sodaß die Punkte gleichen Gebietes durch Strecken verbunden werden, welche die Gerade $\bar{a}$ nicht treffen, während Strecken, welche Punkte verschiedener Gebiete verbinden, die Gerade $\bar{a}$ treffen. Demnach werden durch zwei Gerade $\bar{h}$ und $\bar{k}$ einer Ebene α die nicht auf $\bar{h}$ und $\bar{k}$ liegenden Punkte von α in die vier folgenden Klassen eingeteilt: $H = K$; $H = K_1$; $H_1 = K$; $H_1 = K_1$. Dabei bezeichne H bez. H_1 diejenigen Punkte, welche auf derselben Seite von $\bar{h}$ liegen, wie die Halbstrahlen k bez. k_1; ferner K bez. K_1 diejenigen Punkte, welche auf derselben Seite von $\bar{k}$ liegen wie h bez. h_1. Die Klasse $H = K$ stellt also die Gesamtheit derjenigen Punkte dar, welche den Bedingungen unseres Hilfssatzes a genügen.

Aus Satz 6 folgt nun unmittelbar: Die Punkte einer und derselben Klasse werden miteinander durch Strecken verbunden, die weder $\bar{h}$ noch $\bar{k}$ treffen und ganz der betreffenden Klasse angehören. Punkte zweier verschiedener Klassen können nur durch Streckenzüge verbunden werden, die mindestens eine der beiden Geraden $\bar{h}$ und $\bar{k}$ treffen. Punkte zweier Nachbarklassen, d. h. Klassen, die nur in bezug auf *einen* Buchstaben verschiedene Indices besitzen, werden durch Strecken verbunden, die einen Punkt der durch jenen Buchstaben bezeichneten Geraden enthalten; und zwar gehört dieser

*) Grundlagen, S. 10/11; Erklärung. — Wie dort angedeutet, besteht diese „Erklärung" eigentlich aus einem Satze und aus Definitionen. Der oben gegebene Beweis für den Hilfssatz a bildet zugleich einen Beweis für den in der Hilbertschen Erklärung enthaltenen Satz. — Übrigens wäre es vielleicht zweckmäßig, den Hilfssatz a als Definition für das Innere eines Winkels zu betrachten, und dann die Hilbertsche Erklärung als Satz abzuleiten; an dem oben gegebenen Beweis brauchte man zu diesem Zwecke nichts Wesentliches zu ändern.

**) Grundlagen, S. 6/7.

Punkt demjenigen Halbstrahl dieser Geraden an, welcher den gleichen Index wie der den beiden Nachbarklassen gemeinsame Buchstabe besitzt. Punkte zweier Gegenklassen (d. h. zweier Klassen, die sich bezüglich der Indices *beider* Buchstaben unterscheiden) werden durch Strecken verbunden, die mit jeder der beiden Geraden $\bar{h}$ und $\bar{k}$ einen Punkt gemein haben; und zwar enthält eine solche Verbindungsstrecke entweder den Schnittpunkt O von $\bar{h}$ und $\bar{k}$ oder zwei voneinander verschiedene Punkte R und S, einen auf $\bar{h}$ und einen auf $\bar{k}$. Wenn im letzteren Fall in einer Klasse die beiden Buchstaben H und K gleichen bez. verschiedenen Index besitzen, so gehören die Punkte R und S Halbstrahlen mit verschiedenem bez. gleichem Index an.*)

Aus all dem geht hervor, daß die Klasse $H=K$ ausgezeichnet ist; denn die Punkte dieser und nur dieser Klasse werden mit allen Punkten irgend einer anderen Klasse durch Strecken verbunden, die einen Punkt auf den Halbstrahlen h oder k (einschließlich O) besitzen. Wir bezeichnen nun die Punkte der Klasse $H=K$ durch A, während wir die drei anderen Klassen (einschließlich der Punkte von h_1 und k_1) zu einer einzigen neuen Klasse zusammenfassen, deren Elemente wir B nennen. Die Punkte A sind dann gegenüber den Punkten B dadurch ausgezeichnet, daß nach dem obigen die Verbindungsstrecke zweier Punkte A keinen Punkt von h, k (einschließlich O) enthält, also auch ganz dem Gebiete der Punkte A angehört, während es Punkte B gibt, die nicht durch eine Strecke, welche keinen Punkt von h, k enthält, verbunden werden können. Letzteres ergibt sich sofort in folgender Weise: Man verbinde irgend zwei Punkte R und S, von denen der erste auf dem Halbstrahl h, der zweite auf dem Halbstrahl k gelegen ist, durch eine Gerade $\bar{a}$ (I1). Nach II2 existiert mindestens ein Punkt B_1 auf $\bar{a}$ so, daß S zwischen R und B_1 liegt, und ebenso mindestens ein Punkt B_2 auf $\bar{a}$ so, daß R zwischen S und B_2 liegt. Aus Satz 4**) folgt dann, daß R und S zwischen B_2 und B_1 liegen. Da nun nach unserer Definition die Punkte B_1 und B_2 zur Klasse der Punkte B gehören, so ergibt sich, daß, wie behauptet, die Verbindungsstrecke gewisser Punkte B notwendig Punkte von h, k enthält. — Dagegen können alle Punkte B miteinander durch Streckenzüge (es genügen Züge, die aus zwei Strecken bestehen) verbunden werden, die keinen Punkt von h, k (einschließlich O) enthalten. Denn man kann von irgend einer der drei Klassen $H=K_1$; $H_1=K$; $H_1=K_1$ zu jeder andern von ihnen gelangen, indem man höchstens zweimal zu einer Nachbarklasse übergeht und dabei jedesmal einen Buchstaben mit Index 1 festhält.

*) Dies ergibt sich am einfachsten durch doppelte Anwendung des für die Nachbarklassen Erhaltenen.

**) Grundlagen, S. 6.

Demnach besitzen die Punkte A bez. B alle Eigenschaften, die in der Hilbertschen Erklärung von den inneren bez. äußeren Punkten des Winkels $\sphericalangle(h, k)$ gefordert werden. q. e. d.

Aus Hilfssatz a folgt unmittelbar

Hilfssatz b: Wenn Punkt R auf h und Punkt S auf k liegt und es liegt Punkt A zwischen R und S, so liegt A innerhalb $\sphericalangle(h, k)$. —

Hilfssatz c: Wenn *ein* Punkt (A) eines von O ausgehenden Halbstrahls a im Innern des Winkels der beiden von O ausgehenden Halbstrahlen h und k liegt, so liegen *alle* Punkte von a im Innern des Winkels $\sphericalangle(h, k)$.

Beweis: Nach I 2 hat $\bar{a}$ mit $\bar{h}$ und $\bar{k}$ nur den Punkt O gemein. Nach der ersten Erklärung auf S. 7 der Grundlagen liegt O niemals zwischen zwei Punkten von a. Also kann, da A innerhalb $\sphericalangle(h, k)$ liegt, nach der Erklärung S. 10/11 der Grundlagen kein anderer Punkt von a dem Äußern des Winkels (h, k) angehören. q. e. d.

Hilfssatz d: Wenn *ein* Punkt (B) eines von O ausgehenden Halbstrahls a im Äußern des Winkels der beiden von O ausgehenden Halbstrahlen h und k liegt, so liegen *alle* Punkte von a im Äußern des Winkels (h, k).

Beweis: Angenommen, es läge ein Punkt A von a im Innern von $\sphericalangle(h, k)$, so würden nach Hilfssatz c alle Punkte von a im Innern von $\sphericalangle(h, k)$ liegen, was der Voraussetzung widerspricht. q. e. d.

Hilfssatz e: Bilden die Halbstrahlen h und k, welche von O ausgehen, einen Winkel, in dessen Innern der von O ausgehende Halbstrahl a liegt, so trifft a jede Strecke RS, deren Endpunkte R und S bezüglich auf h und k liegen, in einem im Innern dieser Strecke gelegenen Punkt.

Beweis: Man wähle Punkt T auf der Geraden $\bar{k}$ so, daß O zwischen S und T liegt, (II 2) (d. h. man wähle T auf k_1) und ziehe die von $\bar{a}, \bar{h}, \bar{k}$ verschiedene Gerade TR (I 1, 2). Nun wende man auf Dreieck TRS und die durch O gehende Gerade $\bar{a}$ das Axiom II 4 an; darnach muß die Gerade $\bar{a}$, da sie nicht durch R hindurchgeht (I 2), entweder TR oder RS in einem innern Punkt treffen. Nun liegen alle Punkte der Strecken TR und RS mit dem Halbstrahl a auf der gleichen Seite von $\bar{k}$ (Hilfssatz a und Satz 6); also kann der fragliche Schnittpunkt nicht auf a_1, sondern nur auf a liegen. Da nun jeder zwischen T und R gelegene Punkt dem Äußern des Winkels (h, k) angehört (Hilfssatz a und Satz 6), so kann der ganz im Innern des Winkels (h, k) liegende Halbstrahl a keinen Punkt mit der Strecke TR gemein haben; also hat der Halbstrahl a einen Punkt mit der Strecke RS gemein. q. e. d.

Hilfssatz f: Haben die derselben Ebene angehörenden Geraden $\bar{h}, \bar{k}, \bar{l}$ den Punkt O gemeinsam und liegen die Halbstrahlen h und k auf der gleichen Seite der Geraden $\bar{l}$, so liegt entweder h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ oder k innerhalb $\sphericalangle(h, l)$.

Beweis: Es liegt h entweder innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ oder innerhalb $\sphericalangle(k, l_1)$ (Hilfssatz a) und ebenso k entweder innerhalb $\sphericalangle(h, l)$ oder innerhalb $\sphericalangle(h, l_1)$. Nun kann nicht gleichzeitig h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ und k innerhalb $\sphericalangle(h, l)$ liegen. Denn wenn h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ liegt, so wähle man auf k einen Punkt K, auf l einen Punkt L; dann existiert nach Hilfssatz e ein Schnittpunkt H von h mit der Strecke KL; also liegt K außerhalb der Strecke HL (II 3) und deshalb (nach Hilfssatz a) K außerhalb $\sphericalangle(h, l)$; daher (nach Hilfssatz d) k außerhalb $\sphericalangle(h, l)$. Es liegt also *entweder* h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ und k innerhalb $\sphericalangle(h, l_1)$ *oder* k innerhalb $\sphericalangle(h, l)$ und h innerhalb $\sphericalangle(k, l_1)$. q. e. d.

Hilfssatz g: Wenn die in derselben Ebene gelegenen Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ einen innern Punkt A gemein haben, so liegen die Halbstrahlen h und k auf der gleichen Seite der Geraden $\bar{l}$.

Beweis: Nach Hilfssatz a liegt h und ebenso k auf der gleichen Seite von $\bar{l}$ wie Punkt A. q. e. d.

Hilfssatz h: Haben die derselben Ebene angehörenden Geraden $\bar{h}, \bar{k}, \bar{l}$ den Punkt O gemeinsam und liegen die Halbstrahlen h und k auf der gleichen Seite der Geraden $\bar{l}$, so haben die Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ sicher einen inneren Punkt gemeinsam.

Beweis: Nach Hilfssatz f liegt entweder h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ oder k innerhalb $\sphericalangle(h, l)$. Im ersteren Fall liegt (nach den im Beweis von Hilfssatz f benutzten Bezeichnungen) Punkt H zwischen K und L. Man wähle einen Punkt M innerhalb der Strecke HL (II 2); dann liegt M nach Satz 4 auch innerhalb der Strecke KL. Also liegt nach Hilfssatz b der Punkt M gleichzeitig innerhalb $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$. — Wenn anderenfalls k innerhalb $\sphericalangle(h, l)$ liegt, so vertausche man im vorstehenden die Buchstaben h und k. q. e. d.

Hilfssatz i: Wenn die in derselben Ebene gelegenen Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ keinen Punkt gemeinsam haben, so liegen die Halbstrahlen h und k auf verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{l}$.

Beweis: Angenommen h und k lägen auf der gleichen Seite von $\bar{l}$, dann hätten $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ nach Hilfssatz h sicher einen Punkt gemeinsam, was der Voraussetzung widersprechen würde. q. e. d.

Hilfssatz k: Haben die derselben Ebene angehörenden Geraden $\bar{h}, \bar{k}, \bar{l}$ den Punkt O gemeinsam und liegen die Halbstrahlen h und k auf verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{l}$, so haben die $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ keinen inneren Punkt gemeinsam.

Beweis: Angenommen, $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ hätten einen inneren Punkt gemeinsam, so würde aus Hilfssatz g folgen, daß h und k auf der gleichen Seite der Geraden $\bar{l}$ liegen würden, was der Voraussetzung widerspräche. q. e. d.

Hilfssatz l: Wenn die in derselben Ebene gelegenen Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben, so haben auch ihre Nebenwinkel $\sphericalangle(h_1, l)$ und $\sphericalangle(k_1, l)$ mindestens einen inneren Punkt gemeinsam.

Beweis: Aus Hilfssatz g ergibt sich, daß h und k auf der gleichen Seite von $\bar{l}$ liegen. Dann liegen (nach Satz 6 und der ersten Erklärung S. 7 der Grundlagen) auch h_1 und k_1 auf *einer* Seite von $\bar{l}$. Daher folgt aus Hilfssatz h unsere Behauptung. q. e. d.

Hilfssatz m: Wenn die derselben Ebene angehörenden Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ keinen inneren Punkt gemeinsam haben, so haben auch ihre Nebenwinkel $\sphericalangle(h_1, l)$ und $\sphericalangle(k_1, l)$ keinen inneren Punkt gemeinsam.

Beweis: Aus Hilfssatz i ergibt sich, daß h und k auf verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{l}$ liegen. Dann liegen (nach Satz 6 und der ersten Erklärung S. 7 der Grundlagen) auch h_1 und k_1 auf verschiedenen Seiten von $\bar{l}$. Deshalb folgt aus Hilfssatz k, daß $\sphericalangle(h_1, l)$ und $\sphericalangle(k_1, l)$ keinen inneren Punkt gemeinsam haben. q. e. d.

Hilfssatz n: Wenn die der gleichen Ebene angehörenden Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ keinen Punkt gemeinsam haben, so liegt entweder l oder l_1 innerhalb $\sphericalangle(h, k)$.

Beweis: Nach Hilfssatz i liegen h und k auf verschiedenen Seiten von $\bar{l}$. Man wähle Punkt H auf h und Punkt K auf k, und ziehe die von h und k verschiedene Gerade HK (I 1, 2); dann existiert nach Satz 6 ein Punkt L, der auf $\bar{l}$ und zwischen H und K liegt. Dieser Punkt L ist verschieden vom Scheitel O der betrachteten Winkel (I 2). Also liegt Punkt L entweder auf Halbstrahl l oder auf Halbstrahl l_1; deshalb liegt (nach Hilfssatz b und c) entweder l oder l_1 innerhalb $\sphericalangle(h, k)$. q. e. d.

Hilfssatz o: Wenn die der gleichen Ebene angehörenden Winkel $\sphericalangle(h, l)$ und $\sphericalangle(k, l)$ keinen Punkt gemeinsam haben, so liegt l entweder innerhalb $\sphericalangle(h, k)$ oder innerhalb $\sphericalangle(h_1, k_1)$.

Beweis: Nach Hilfssatz n liegt entweder l oder l_1 innerhalb $\sphericalangle(h, k)$. Wir haben also nur zu zeigen, daß im letzteren Fall l innerhalb $\sphericalangle(h_1, k_1)$ liegt: Nach Hilfssatz a liegen l_1 und h auf derselben Seite von $\bar{k}$; also (nach Satz 6 und der ersten Erklärung S. 7 der Grundlagen) auch l und h_1 auf *einer* Seite von $\bar{k}$; das Analoge gilt bei Vertauschung von h und k; also liegt dann (nach Hilfssatz a) die Halbgerade l innerhalb $\sphericalangle(h_1, k_1)$. q. e. d.

§ 2.

Beweis von III 1 $\mathfrak{a}_2$ und III 1 $\mathfrak{b}_1$.

Wir wollen zunächst III 1 $\mathfrak{a}_2$ beweisen (unter Zuhilfenahme der Kongruenzaxiome III 1 $\mathfrak{a}_1$, 4 $\mathfrak{a}_1$, 4 $\mathfrak{a}_2$, 6):

Angenommen es wäre gleichzeitig $AB \rightarrow A'B'$ und $AB \rightarrow A'B''$, wobei die voneinander verschiedenen Punkte B' und B'' auf dem gleichen von A' begrenzten Halbstrahl a' liegen sollen. Man nehme irgend einen nicht mit A und B auf einer Geraden liegenden Punkt C*) und verbinde C mit A und mit B durch je eine Gerade (I 1). Durch $\bar{a}'$ lege man irgend eine Ebene α' (I 4, 6) und bestimme in α' auf irgend einer Seite von $\bar{a}'$ einen von A' ausgehenden Strahl c' so, daß

$$\sphericalangle (BAC) \rightarrow \sphericalangle (a', c')$$

ist (III 4 $\mathfrak{a}_1$). Nun bestimme man auf dem Halbstrahl c' einen Punkt C' so, daß

$$AC \rightarrow A'C'$$

ist (III 1 $\mathfrak{a}_1$), und verbinde C' mit B' und mit B'' durch je eine Gerade (I 1); diese Geraden sind voneinander und von $\bar{a}'$ und $\bar{c}'$ verschieden (I 2). Nach dem Hilbertschen Satz 6**) liegen die Punkte B' und B'' und also auch die von C' nach B' bez. B'' laufenden Halbstrahlen in der Ebene α' auf der gleichen Seite der Geraden $\bar{c}'$. Wenden wir jetzt das Axiom III 6 auf die Dreiecke BAC und $B'A'C'$ bez. $B''A'C'$ an, so erhalten wir

$$\sphericalangle (ACB) \rightarrow \sphericalangle (A'C'B')$$

und

$$\sphericalangle (ACB) \rightarrow \sphericalangle (A'C'B''),$$

was unter Berücksichtigung von Hilfssatz a einen Widerspruch gegen III 4 $\mathfrak{a}_2$ bedeutet. Also ist die obige Voraussetzung unzulässig. q. e. d.

Es liegt hier nahe die Frage aufzuwerfen, ob sich nicht umgekehrt unter der Voraussetzung der Eindeutigkeit der Streckenkongruenz (III 1 $\mathfrak{a}_2$) die Eindeutigkeit der Winkelkongruenz (III 4 $\mathfrak{a}_2$) beweisen läßt. Daß dies *nicht möglich* ist, zeigt unmittelbar die Betrachtung der folgenden Geometrie: Man lasse den Streckenbegriff ungeändert und definiere „Kongruenz der Winkel" dadurch, daß man jeden Winkel jedem beliebigen Winkel „kongruent" sein läßt. Dann sind, wie man ohne weiteres sieht, *alle* Hilbertschen Axiome erfüllt, *außer* III 4 $\mathfrak{a}_2$; dieses Axiom ist also von allen übrigen unabhängig und unbeweisbar. Wenn man auf die Erfüllung

*) Um im Hilbertschen Axiomensystem auf die Existenz von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten schließen zu können, muß man (wenn man nicht eine allgemeine Forderung an die Beschaffenheit von Axiomensystemen hinzunehmen will) das Verknüpfungsaxiom I 8 in der folgenden Weise ergänzen: I 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene *oder in einer Geraden* gelegene Punkte. — Vgl. auch E. H. Moore, Trans. Am. Math. Soc. 3 (1902), S. 144. **) a. a. O. S. 6/7.

von III 5 verzichtet, das ja ohnedies weiter unten bewiesen wird und deshalb aus der Reihe der Axiome zu entfernen ist, so lassen sich leicht noch zahlreiche andere Unabhängigkeitsbeweise für III 4a_2 angeben; z. B.: Es möge alles wie in der gewöhnlichen Geometrie sein; nur möge es gewisse (endliche oder unendliche Anzahl oder ausnahmslos) ausgezeichnete Ebenen geben, für welche jeder Winkel jedem beliebigen Winkel der *gleichen* ausgezeichneten Ebene „kongruent“ ist; *oder* es möge jeder Winkel einer ausgezeichneten Ebene jedem Winkel jeder davon *verschiedenen* ausgezeichneten Ebene „kongruent“ sein; u. dgl.*)

Nachdem III 1a_2 ohne Zuhilfenahme von III 1b_1 hergeleitet worden ist, können wir nun diesen Satz III 1a_2 zum *Beweis des Axioms* III 1b_1 benutzen:

Nach III 1a_1 existiert sicher ein Punkt B' der Art, daß

$$AB \rightarrow AB'$$

ist und B' auf dem durch B bestimmten von A ausgehenden Halbstrahl liegt. Angenommen nun, es wären B und B' voneinander verschieden. Nach III 1b_2 ist

$$AB \rightleftarrows BA;$$

also nach III 2

$$AB' \rightleftarrows BA.$$

Aus den beiden letzten Relationen folgt, wenn wir $\leftarrow$ ins Auge fassen, ein Widerspruch gegen III 1a_2. Also ist unsere Annahme unmöglich. q. e. d.

Die drei folgenden Paragraphen bilden die Vorbereitung und Grundlage zum Beweise von III 4b_1 und III 5. Da im Vorstehenden die Beweise von III 1a_2 und III 1b_1 *ohne* Zuhilfenahme von III 4b_1 und III 5 geführt wurden, so dürfen im folgenden die *Sätze* III 1a_2 und III 1b_1 benutzt werden.

§ 3.

Der erste Kongruenzsatz.

Erster Kongruenzsatz für Dreiecke: Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \rightarrow A'B', \quad AC \rightarrow A'C', \quad \sphericalangle BAC \rightarrow \sphericalangle B'A'C'$$

*) In ähnlich einfacher Weise läßt sich auch zeigen, daß III 1a_1 bez. III 4a_1 von allen übrigen Hilbertschen Axiomen unabhängig ist. Unabhängigkeitsbeweis für III 1a_1: Man nenne zwei Strecken „kongruent“, wenn sie (im gewöhnlichen Sinn) gleiche Länge besitzen und wenn sie außerdem parallelen bez. identischen Geraden angehören; alles übrige bleibe ungeändert. — Unabhängigkeitsbeweis für III 4a_1: Man nenne zwei Winkel „kongruent“, wenn sie (im gewöhnlichen Sinn) gleich sind und wenn sie außerdem parallelen bez. identischen Ebenen angehören; alles übrige bleibe ungeändert.

gelten, so gelten auch die Kongruenzen

$$BC \rightarrow B'C', \quad \sphericalangle ABC \rightarrow \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle ACB \rightarrow \sphericalangle A'C'B'.\text{*)}$$

Beweis:**) Nach III 6 ist

$$\sphericalangle ABC \rightarrow \sphericalangle A'B'C' \text{ und } \sphericalangle ACB \rightarrow \sphericalangle A'C'B'.$$

Es ist also nur noch zu beweisen, daß $BC \rightarrow B'C'$ ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir einen von C' verschiedenen Punkt D' auf dem von B' ausgehenden und C' enthaltenden Halbstrahl der Geraden $B'C'$ so bestimmen, daß $BC \rightarrow B'D'$ ist (III $1a_1$). Man verbinde ferner A' mit D' durch eine (von $A'C'$ verschiedene) Gerade (I 1, 2). Aus $AB \rightarrow A'B'$ folgt nach III $1b_2$ und III 2: $BA \rightarrow B'A'$. Wendet man nun auf Dreieck ABC und Dreieck $A'B'D'$ das Axiom III 6 an, so erhält man

$$\sphericalangle BAC \rightarrow \sphericalangle B'A'D';$$

es ist aber nach Voraussetzung

$$\sphericalangle BAC \rightarrow \sphericalangle B'A'C'.$$

Dies wäre (unter Berücksichtigung von Hilfssatz a) ein Widerspruch gegen Axiom III $4a_2$. Also muß $BC \rightarrow B'C'$ sein. q. e. d.

In analoger Weise wird (ebenfalls mit Hilfe der Kongruenzaxiome III $1a_1$, $1b_2$, 2, $4a_2$, 6) der *zweite* Dreieckskongruenzsatz bewiesen, den wir jedoch für das folgende nicht benötigen werden.

Mit Hilfe des ersten Kongruenzsatzes ergibt sich sofort:

Hilfssatz A: Aus

$$\sphericalangle (h, k) \rightarrow \sphericalangle (h', k')$$

folgt

$$\sphericalangle (k, h) \rightarrow \sphericalangle (k', h').$$

Beweis: Es sei A bez. A' der Scheitel von $\sphericalangle (h, k)$ bez. $\sphericalangle (h', k')$; man wähle auf h bez. k den Punkt B bez. C und bestimme auf h' bez. k' den Punkt B' bez. C' so, daß $AB \rightarrow A'B'$ und $AC \rightarrow A'C'$ (III $1a_1$).

---

*) Hier und im folgenden werden die Sätze nur so ausgesprochen und bewiesen, daß die *Winkelkongruenzen* nur *einseitig* gelten. Nur in dieser Form lassen sich die Sätze hier (ohne III 5 und III $4b_1$) beweisen und nur in dieser Form werden sie zum Beweise von III 5 und III $4b_1$ benötigt. Also wird z. B. hier nur gezeigt, daß $\sphericalangle ABC \rightarrow \sphericalangle A'B'C'$ gilt; daß $\sphericalangle ABC \leftarrow \sphericalangle A'B'C'$ ist, ergibt sich dann nachträglich mit Hilfe von III 5, wenn der Beweis für letzteren Satz erbracht ist. — Bei *Streckenkongruenzen* dagegen dürften wir immer statt „$\rightarrow$" auch „$\rightleftarrows$" setzen; denn aus III $1b_1$ und III 2 *oder* aus III $1b_2$ und III 2 folgt: Wenn $AB \rightarrow A'B'$, so ist auch $A'B' \rightarrow AB$.

**) Der Beweis für den ersten Kongruenzsatz ist auch in den Grundlagen, S. 14, gegeben. Doch ist dort von III 5 Gebrauch gemacht; deshalb muß der Beweis hier wiederholt werden.

Man verbinde B mit C und B' mit C' durch je eine Gerade (I 1). Dann ist nach dem ersten Kongruenzsatze

$$\sphericalangle ACB \rightarrow \sphericalangle A'C'B'$$

und

$$BC \rightarrow B'C'.$$

Ferner folgt aus

$$AC \rightarrow A'C' \quad \text{und} \quad BC \rightarrow B'C'$$

nach III 1 b_2 und III 2:

$$CA \rightarrow C'A' \quad \text{und} \quad CB \rightarrow C'B'.$$

Also ergibt sich nach III 6

$$\sphericalangle CAB \rightarrow \sphericalangle C'A'B'$$

d. h.

$$\sphericalangle (k, h) \rightarrow \sphericalangle (k', h'). \quad \text{q. e. d.}$$

§ 4.

Beweis von Hilberts Satz 14.

Hilbert hat für seinen Satz 12 in den Grundlagen (S. 15/16) selbst den Beweis durchgeführt, so daß hier nicht mehr darauf eingegangen zu werden braucht. Es möge nur daran erinnert werden, daß man zum Beweis des Satzes 12 von den Kongruenzaxiomen und -sätzen verwenden muß: den ersten Kongruenzsatz, ferner III 1 a_1, 1 b_2, 2, 3, 6.*) Also ist auch der Beweis des Satzes 12**) von III 5 und III 4b unabhängig.

Besonders wichtig ist Hilberts Satz 14***), sowohl für das hier folgende, als auch an sich (denn er ist das Analogon zu Axiom III 3). Der Satz 14 lautet:

Es seien einerseits h, k, l und andererseits h', k', l' je drei von einem Punkte ausgehende und je in einer Ebene gelegene Halbstrahlen: wenn dann die Kongruenzen

$$\sphericalangle (h, l) \rightarrow \sphericalangle (h', l') \quad \text{und} \quad \sphericalangle (k, l) \rightarrow \sphericalangle (k', l')$$

erfüllt sind, *und wenn* $\sphericalangle (h, l)$ *mit* $\sphericalangle (k, l)$ *und* $\sphericalangle (h', l')$ *mit* $\sphericalangle (k', l')$ *gleichzeitig entweder Punkte gemeinsam haben oder keine Punkte gemeinsam haben*, so ist stets auch

$$\sphericalangle (h, k) \rightarrow \sphericalangle (h', k').$$

---

*) Man erhält zunächst nur:

$$\sphericalangle DBC \rightarrow \sphericalangle D'B'C',$$

woraus dann nach Hilfssatz A folgt:

$$\sphericalangle CBD \rightarrow \sphericalangle C'B'D'.$$

**) Ebenso auch Hilberts Satz 13 (S. 16/17), der jedoch im folgenden nicht benötigt wird.

***) Grundlagen, S. 17.

Die kursiv gedruckten Worte im Ausspruch dieses Satzes *fehlen* bei Hilbert. Es ist jedoch klar, daß *ohne* diese Ergänzung der Satz 14 allgemein gar *nicht richtig* ist.

Beweis von Satz 14 (nachdem dieser, wie angegeben, ergänzt worden ist):

Man hat naturgemäß zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es haben $\sphericalangle(h, l)$ mit $\sphericalangle(k, l)$ sowie $\sphericalangle(h', l')$ mit $\sphericalangle(k', l')$ *keine* Punkte gemeinsam. Dann gibt es nach Hilfssatz o nur zwei Möglichkeiten: entweder liegt l innerhalb $\sphericalangle(h, k)$ oder innerhalb $\sphericalangle(h_1, k_1)$; ebenso liegt l' entweder innerhalb $\sphericalangle(h', k')$ oder innerhalb $\sphericalangle(h_1', k_1')$. Man hat deshalb im Fall a) zwei Unterfälle zu unterscheiden:

1. Der Halbstrahl l liegt innerhalb des Winkels $\sphericalangle(h, k)$. Nach Hilfssatz n liegt l' oder l_1' innerhalb $\sphericalangle(h', k')$. Man wähle nun auf h den Punkt H und auf k den Punkt K, ziehe die von $\bar{h}, \bar{k}, \bar{l}$ verschiedene Gerade $\bar{a} = HK$ (I 1, 2); dann trifft (nach Hilfssatz e) der Halbstrahl l die Gerade $\bar{a}$ in einem zwischen H und K gelegenen Punkt L.

Nunmehr bestimme man auf h' den Punkt H' so, daß $OH \rightarrow O'H'$ (III 1 a_1);*)
ferner „ „ „ l' „ „ L' „ „ $OL \rightarrow O'L'$ („);
„ „ „ „ k' „ „ K' „ „ $OK \rightarrow O'K'$ („).

(NB! Man weiß dann noch nicht, daß H', L', K' auf *einer* Geraden liegen.) Nun verbinde man H' mit L' durch eine Gerade (I 1); dann ist nach dem ersten Kongruenzsatz

$$HL \rightarrow H'L'; \quad \sphericalangle OHL \rightarrow \sphericalangle O'H'L'; \quad \sphericalangle OLH \rightarrow \sphericalangle O'L'H'.$$

Sodann verbinde man L' mit K' durch eine Gerade (I 1); dann ist ebenfalls nach dem ersten Kongruenzsatz

$$KL \rightarrow K'L'; \quad \sphericalangle OKL \rightarrow \sphericalangle O'K'L'; \quad \sphericalangle OLK \rightarrow \sphericalangle O'L'K'.$$

Betrachtet man nun die Verlängerung von $H'L'$ über L' hinaus, so ist nach Satz 12 der von l' mit dieser Verlängerung gebildete Winkel $\leftarrow$ Nebenwinkel von $\sphericalangle OLH$, d. h. $\leftarrow \sphericalangle OLK$. Man beweist jetzt noch, daß die Verlängerung von $H'L'$ über L' hinaus und die Strecke $L'K'$ auf der gleichen Seite von $\bar{l}'$ liegen: Nach Hilfssatz i nämlich liegen die Halbstrahlen h' und k' auf verschiedenen Seiten von $\bar{l}'$; daher liegen auch die Strecken $H'L'$ und $L'K'$ auf verschiedenen Seiten von $\bar{l}'$ (Satz 6). Da nun $H'L'$ und seine Verlängerung über L' hinaus auf verschiedenen Seiten von $\bar{l}'$ liegen (Satz 6), so ergibt sich in der Tat, daß die Verlängerung von $H'L'$ über L' hinaus und die Strecke $L'K'$ auf der gleichen Seite von $\bar{l}'$ liegen. — Hieraus und aus der zuletzt erhaltenen Winkelrelation folgt nun (unter Berücksichtigung von Hilfssatz a) nach III 4 a_2,

*) O bez. O' bezeichne die Schnittpunkte von $\bar{h}, \bar{k}, \bar{l}$ bez. $\bar{h}', \bar{k}', \bar{l}'$.

daß $L'K'$ identisch ist mit der Verlängerung von $H'L'$ über L' hinaus, d. h. daß K' mit H' und L' auf *einer* Geraden $\bar{a}'$ liegen; und zwar liegt L' zwischen H' und K'*) und (nach Satz 4) haben die Strecken $H'L'$ und $L'K'$ (ebenso wie HL und LK) keinen Punkt gemeinsam. Nun ergibt sich nach III 3 (unter Berücksichtigung von III 1 b_2 und III 2):

$$HK \to H'K'.$$

Da aus $OH \to O'H'$ (nach III 1 b_2 und III 2)

$$HO \to H'O'$$

folgt, so erhält man jetzt nach III 6:

$$\sphericalangle HOK \to \sphericalangle H'O'K'.$$

Damit ist der Fall a_1) bewiesen.

2. Der Halbstrahl l liege innerhalb $\sphericalangle(h_1, k_1)$. Aus Satz 12 folgt nun, daß wegen

$$\sphericalangle(h, l) \to \sphericalangle(h', l') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(k, l) \to \sphericalangle(k', l')$$

auch

$$\sphericalangle(h_1, l) \to \sphericalangle(h_1', l') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(k_1, l) \to \sphericalangle(k_1', l')$$

ist. Aus Hilfssatz m folgt ferner, daß $\sphericalangle(h_1, l)$ mit $\sphericalangle(k_1, l)$ und $\sphericalangle(h_1', l')$ mit $\sphericalangle(k_1', l')$ keinen Punkt gemeinsam haben. Hiermit ist der Fall a_2) auf den Fall a_1) zurückgeführt, d. h. aus Fall a_1) folgt jetzt

$$\sphericalangle(h_1, k_1) \to \sphericalangle(h_1', k_1').$$

Nun wende man noch den Scheitelwinkelsatz an, d. h. den Satz: Wenn $\sphericalangle(h, k) \to (h', k')$, so ist auch $\sphericalangle(h_1, k_1) \to \sphericalangle(h_1', k_1')$.**) Dann erhält man

$$\sphericalangle(h, k) \to \sphericalangle(h', k').$$

Hiermit ist auch Fall a_2) bewiesen.

b) Es haben $\sphericalangle(h, l)$ mit $\sphericalangle(k, l)$ und $\sphericalangle(h', l')$ mit $\sphericalangle(k', l')$ *Punkte gemeinsam*. Nach Hilfssatz g liegen h und k auf derselben Seite von $\bar{l}$ und ebenso h' und k' auf derselben Seite von $\bar{l}'$. Dann liegt nach Hilfssatz f entweder h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$ oder k innerhalb $\sphericalangle(h, l)$ und ebenso entweder h' innerhalb $\sphericalangle(k', l')$ oder k' innerhalb $\sphericalangle(h', l')$. Man kann nun über die Bezeichnung immer so verfügen, daß man den zwischen den

---

*) Man kann nunmehr, schärfer als vorhin, zeigen, daß l' selbst immer innerhalb $\sphericalangle(h', k')$ liegt: Denn man weiß jetzt (Hilfssatz b), daß der Punkt L' des Halbstrahls l' innerhalb $\sphericalangle(h', k')$ liegt; dann liegt aber (nach Hilfssatz c) l' selbst ganz innerhalb $\sphericalangle(h', k')$.

**) Aus $\sphericalangle(h, k) \to \sphericalangle(h', k')$ folgt nach Satz 12:

$$\sphericalangle(k, h_1) \to \sphericalangle(k', h_1');$$

hieraus ergibt sich, wiederum nach Satz 12:

$$\sphericalangle(h_1, k_1) \to \sphericalangle(h_1', k_1').$$

beiden anderen ungestrichenen Halbstrahlen liegenden Halbstrahl mit h bezeichnet; also: h innerhalb $\sphericalangle(k, l)$. Jetzt wähle man K auf k und L auf l und ziehe die Gerade $KL = \bar{a}$ (I 1); dann existiert nach Hilfssatz e ein Punkt H auf h, der auf $\bar{a}$ zwischen K und L liegt. Nun bestimme man auf k' bez. h' bez. l' die Punkte K' bez. H' bez. L' so, daß

$$OK \rightarrow O'K'; \quad OH \rightarrow O'H'; \quad OL \rightarrow O'L' \quad (\text{III } 1\,\mathrm{a}_1).$$

(NB! Zunächst wissen wir natürlich nicht, ob K', H', L' auf *einer* Geraden liegen.) Man ziehe die Geraden $H'L'$, $K'L'$ und $H'K'$ (I 1). Dann ist nach dem ersten Kongruenzsatz

$$HL \rightarrow H'L'; \quad \sphericalangle\, OLH \rightarrow \sphericalangle\, O'L'H'; \quad \sphericalangle\, OHL \rightarrow \sphericalangle\, O'H'L';$$

ferner nach dem gleichen Satze

$$KL \rightarrow K'L'; \quad \sphericalangle\, OLK \rightarrow \sphericalangle\, O'L'K'; \quad \sphericalangle\, OKL \rightarrow \sphericalangle\, O'K'L'.$$

Nun ist $\sphericalangle\, OLH$ identisch mit $\sphericalangle\, OLK$, da H und K (nach der ersten Erklärung S. 7 der Grundlagen) auf dem gleichen Halbstrahl von $\bar{a}$ liegen. Da ferner H' und K' (als Punkte von h' bez. k') auf derselben Seite von $\bar{l}'$ liegen, so folgt (unter Berücksichtigung von Hilfssatz a) aus III $4\,\mathrm{a}_2$, daß die von L' ausgehenden Halbstrahlen $L'H'$ und $L'K'$ identisch sein müssen, daß also H' und K' auf demselben von L' ausgehenden Halbstrahl liegen; d. h. L' liegt außerhalb der Strecke $H'K'$ auf der Geraden $\bar{a}'$, welche die drei Punkte L', H', K' enthält. Aus

$$LH \rightarrow L'H' \quad \text{und} \quad LK \rightarrow L'K' \quad (\text{III } 1\,\mathrm{b}_2, 2)$$

folgt nunmehr nach III $1\,\mathrm{a}_1$, $1\,\mathrm{a}_2$, 3, daß

$$HK \rightarrow H'K' \text{*)}$$

also (III $1\,\mathrm{b}_2$, 2) auch:

$$KH \rightarrow K'H'.$$

Es folgt hieraus mittels des Satzes 9**) nachträglich schärfer, daß H' zwischen L' und K', also auch (Hilfssatz b und c) h' innerhalb $\sphericalangle(l', k')$ liegt.

Da nach dem obigen und III $1\,\mathrm{b}_2$, 2

$$KO \rightarrow K'O'$$

---

*) Es läßt sich nämlich sehr leicht der folgende Hilfssatz beweisen:

Wenn auf einer Geraden $\bar{a}$ der Punkt B zwischen A und C, ferner auf einer Geraden $\bar{a}'$ der Punkt A' außerhalb B' und C' liegt, wenn außerdem $AB \rightarrow A'B'$ und $AC \rightarrow A'C'$ ist, so ist auch $BC \rightarrow B'C'$.

Beweis: Angenommen es wäre *nicht* $BC \rightarrow B'C'$. Dann könnte man einen von A', B' und C' verschiedenen Punkt C'' finden, sodaß B' zwischen A' und C'' liegt und $BC \rightarrow B'C''$ (III $1\,\mathrm{a}_1$). Nach Satz 4 haben die Strecken AB und BC, ebenso $A'B'$ und $B'C''$ keinen Punkt gemeinsam; also ist nach III 3: $AC \rightarrow A'C''$. Da ferner A' außerhalb $B'C''$ liegt (II 3), sowie (nach Voraussetzung) außerhalb $B'C'$, so liegen C' und C'' in $\bar{a}'$ auf der gleichen Seite von A'. Dann ist aber $AC \rightarrow A'C'$ und $AC \rightarrow A'C''$ ein Widerspruch gegen III $1\,\mathrm{a}_2$; also muß $BC \rightarrow B'C'$ sein.

**) Grundlagen, S. 13.

und da ferner nach dem obigen

$\sphericalangle\, OKH$ (identisch mit $\sphericalangle\, OKL$) $\rightarrow \sphericalangle\, O'K'H'$ (identisch mit $\sphericalangle\, O'K'L'$),

so ist nach III 6

$$\sphericalangle\, KOH \rightarrow \sphericalangle\, K'O'H', \quad \text{d. h.} \quad \sphericalangle\, (k, h) \rightarrow \sphericalangle\, (k', h'),$$

woraus nach Hilfssatz A folgt, daß auch

$$\sphericalangle\, (h, k) \rightarrow \sphericalangle\, (h', k').$$

Hiermit ist auch Fall b), also unser ganzer Satz bewiesen.

§ 5.

Beweis des dritten Kongruenzsatzes.

Dritter Kongruenzsatz für Dreiecke: Wenn in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \rightarrow A'B'; \quad BC \rightarrow B'C'; \quad CA \rightarrow C'A'$$

gelten, so ist auch

$$\sphericalangle\, ABC \rightleftarrows \sphericalangle\, A'B'C'; \quad \sphericalangle\, BCA \rightleftarrows \sphericalangle\, B'C'A'; \quad \sphericalangle\, CAB \rightleftarrows \sphericalangle\, C'A'B'.$$

Beweis: Man trage an $A'C'$ nach der dem Punkt B' entgegengesetzten Seite den Winkel $\sphericalangle\, C'A'X'$ an, sodaß $\sphericalangle\, CAB \rightarrow \sphericalangle\, C'A'X'$ ist (III $4a_1$); man bestimme sodann auf dem neuen Schenkel $A'X'$ den Punkt B'' (der, weil auf der anderen Seite von $A'C'$ gelegen, von B' verschieden ist) so, daß $AB \rightarrow A'B''$ (III $1a_1$); dann folgt, da nach Voraussetzung $AB \rightarrow A'B'$, daß nach III 2

$$A'B' \rightleftarrows A'B''$$

ist. Zieht man noch die Gerade $C'B''$ (I 1), so ergibt sich ferner (unter Berücksichtigung von III $1b_2$, 2) nach dem ersten Kongruenzsatz

$$\sphericalangle\, ACB \rightarrow \sphericalangle\, A'C'B''; \quad \sphericalangle\, ABC \rightarrow \sphericalangle\, A'B''C'; \quad CB \rightarrow C'B''$$

und aus letzterem nach III $1b_2$, 2:

$$C'B' \rightleftarrows C'B''.$$

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden:

a) B'' liegt auf einem der Halbstrahlen $B'A'$ oder $B'C'$, welche die Schenkel des Winkels $\sphericalangle\, A'B'C'$ bilden. B'' kann dann natürlich nur auf *einem* der beiden Halbstrahlen liegen (I 2). Z. B. möge B'' mit A' und B' auf einer Geraden liegen; dann ist $B'C'B''$ gleichschenklig. Nach dem Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*) ergibt sich also

---

*) Voraussetzung: In einem Dreieck ABC: $BA \rightleftarrows BC$.

Beweis des Basiswinkelsatzes: Nach III $4b_2$ ist $\sphericalangle\, ABC \rightleftarrows \sphericalangle\, CBA$; hieraus und aus der Voraussetzung folgt nach III 6: $\sphericalangle\, BAC \rightleftarrows \sphericalangle\, BCA$. q. e. d.

$$\sphericalangle C'B'B'' \rightleftarrows \sphericalangle C'B''B'$$

d. h.

$$\sphericalangle C'B'A' \rightleftarrows \sphericalangle C'B''A',$$

d. i. nach Hilfssatz A

$$\sphericalangle A'B'C' \rightleftarrows \sphericalangle A'B''C'.$$

Genau dasselbe ergibt sich, wenn B'' mit C' und B' auf einer Geraden liegt.

b) B'' liegt *nicht* auf einem Schenkel des Winkels $\sphericalangle A'B'C'$. Man verbinde nun B'' mit B' durch eine von den Seiten der Dreiecke $A'B'C'$ und $A'B''C'$ verschiedene Gerade (I 1). Dann sind die Dreiecke $B'A'B''$ und $B'C'B''$ gleichschenklig; also folgt nach dem Basiswinkelsatz:

$$\sphericalangle A'B'B'' \rightleftarrows \sphericalangle A'B''B' \quad \text{und} \quad \sphericalangle C'B'B'' \rightleftarrows \sphericalangle C'B''B'.$$

Wir haben nun nachzuweisen, daß $\sphericalangle A'B'B''$ mit $\sphericalangle C'B'B''$ und $\sphericalangle A'B''B'$ mit $\sphericalangle C'B''B'$ *gleichzeitig* entweder Punkte gemeinsam haben oder keine Punkte gemeinsam haben. B'' liegt entweder innerhalb $\sphericalangle A'B'C'$ oder außerhalb.

Wenn B'' innerhalb $\sphericalangle A'B'C'$ liegt, so liegt nach Hilfssatz c auch der Halbstrahl $B'B''$ innerhalb. Dann existiert nach Hilfssatz e ein Punkt D', welcher der Geraden $B'B''$ und der Strecke $A'C'$ gemeinsam ist. Nach Satz 6 liegen nun die von B', B'' nach C' laufenden Halbstrahlen auf der entgegengesetzten Seite der Geraden $B'B''$ wie die nach A' laufenden Halbstrahlen. Also folgt nach Hilfssatz k, daß $\sphericalangle A'B'B''$ mit $\sphericalangle C'B'B''$ und $\sphericalangle A'B''B'$ mit $\sphericalangle C'B''B'$ gleichzeitig keinen Punkt gemeinsam haben.

Wenn andererseits B'' außerhalb $\sphericalangle A'B'C'$ liegt, so liegen nach Hilfssatz d auch alle Punkte von $B'B''$ außerhalb dieses Winkels. Da nun B' und B'' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'C'$ liegen, so hat (nach Satz 6) die Strecke $B'B''$ mit der Geraden $A'C'$ einen Punkt D' gemeinsam, der nach dem eben gesagten außerhalb $\sphericalangle A'B'C'$, also (Hilfssatz b) außerhalb der Strecke $A'C'$ liegen muß. Daher liegen die Punkte A' und C' auf derselben Seite der Geraden $B'B''$, also auch die Strecken $B'A'$, $B'C'$, $B''A'$, $B''C'$ alle auf derselben Seite der Geraden $B'B''$ (Satz 6). Daher haben jetzt nach Hilfssatz h $\sphericalangle A'B'B''$ mit $\sphericalangle C'B'B''$ und $\sphericalangle A'B''B'$ mit $\sphericalangle C'B''B'$ gleichzeitig Punkte gemeinsam.

Nunmehr können wir auf die letztgenannten Winkel den Satz 14 anwenden und finden, *genau wie im Fall* a),

$$\sphericalangle A'B'C' \rightleftarrows \sphericalangle A'B''C'.$$

Machen wir nun in den Dreiecken $A'B'C'$ und $A'B''C'$ (unter Berücksichtigung von III 1 b_2, 2) von dem Axiom III 6 Gebrauch, so ergibt sich

$$\sphericalangle B'A'C' \rightleftarrows \sphericalangle B''A'C',$$

und hieraus nach Hilfssatz A

$$\sphericalangle C'A'B' \rightleftarrows \sphericalangle C'A'B''.$$

Angenommen nun, es wäre *nicht* $\sphericalangle CAB \to \sphericalangle C'A'B'$. Dann könnte man (auf derjenigen Seite von $A'C'$, auf welcher $A'B'$ liegt) einen von $A'B'$ verschiedenen Halbstrahl $A'Z'$ so bestimmen, daß $\sphericalangle CAB \to \sphericalangle C'A'Z'$ ist (III $4a_1$); man bestimme nun Punkt B_0' auf Halbstrahl $A'Z'$ so, daß $AB \to A'B_0'$ ist (III $1a_1$); ferner verbinde man B_0' mit C' durch eine Gerade (I 1). Nach dem ersten Kongruenzsatz folgt nun aus den Dreiecken CAB und $C'A'B_0'$, daß $CB \to C'B_0'$ ist. Nunmehr sind nach III $1b_2$, 2 von den beiden Dreiecken $A'B_0'C'$ und $A'B''C'$, welche die gemeinsame Seite $A'C'$ haben und deren andere Eckpunkte B_0' und B'' auf verschiedenen Seiten von $A'C'$ liegen, die drei Seiten einander kongruent, sodaß man genau wie oben nunmehr schließen kann:

$$\sphericalangle C'A'B_0' \rightleftarrows \sphericalangle C'A'B''.$$

Da nach dem früheren auch

$$\sphericalangle C'A'B' \rightleftarrows \sphericalangle C'A'B''$$

ist, so ergibt sich nach III $4a_2$ ein Widerspruch. Also muß

$$\sphericalangle CAB \to \sphericalangle C'A'B'$$

sein. Dann folgt aber nach III 6 auch

$$\sphericalangle ACB \to \sphericalangle A'C'B' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ABC \to \sphericalangle A'B'C'.$$

Da ferner aus

$$AB \to A'B', \quad BC \to B'C', \quad CA \to C'A'$$

nach III $1b_2$, 2 folgt, daß

$$A'B' \to AB, \quad B'C' \to BC, \quad C'A' \to CA$$

ist, so ergibt sich durch Wiederholung sämtlicher Schlüsse, daß auch

$$\sphericalangle C'A'B' \to \sphericalangle CAB; \quad \sphericalangle A'C'B' \to \sphericalangle ACB; \quad \sphericalangle A'B'C' \to \sphericalangle ABC.$$

q. e. d.

§ 6.

Beweis der „Axiome“ III 5 und III $4b_1$.

Wir beweisen zuerst das „*Axiom*“ III 5.

Voraussetzung: $\sphericalangle(h,k) \to \sphericalangle(h',k')$ und $\sphericalangle(h,k) \to \sphericalangle(h'',k'')$.

Beweis: Man trage auf den Schenkeln h, k; h', k'; h'', k'' von den Scheitelpunkten A; A'; A'' aus beziehungsweise die Strecken AB, AC; $A'B'$, $A'C'$; $A''B''$, $A''C''$ ab, sodaß

$$AB \to A'B'; \quad AC \to A'C',$$
$$AB \to A''B''; \quad AC \to A''C''$$

ist (III 1 a_1). Hieraus folgt nach III 2

$$A'B' \rightleftarrows A''B''; \quad A'C' \rightleftarrows A''C''.$$

Man ziehe nun die Geraden BC, $B'C'$, $B''C''$ (I 1). Dann ist nach dem ersten Kongruenzsatz

$$BC \rightarrow B'C'; \quad BC \rightarrow B''C'';$$

hieraus nach III 2

$$B'C' \rightleftarrows B''C''.$$

Nach dem dritten Kongruenzsatz folgt nunmehr

$$\sphericalangle B'A'C' \rightleftarrows \sphericalangle B''A''C''$$

d. h.

$$\sphericalangle (h', k') \rightleftarrows \sphericalangle (h'', k''). \quad \text{q. e. d.}$$

Den so (*ohne* Zuhilfenahme von III 4 b_1) hergeleiteten Satz III 5 können wir nunmehr zum Beweise von III 4 b_1 benutzen*); dieser Beweis ist genau analog dem in § 2 gegebenen Beweis für III 1 b_1.

Beweis von III 4 b_1: Der fragliche Winkel sei $\sphericalangle (h, k)$, dessen Scheitel O heißen möge. Nach III 4 a_1 existiert in der Ebene des Winkels $\sphericalangle (h, k)$ sicher ein von O ausgehender Halbstrahl k' der Art, daß k' auf der durch k bestimmten Seite der Geraden $\bar{h}$ liegt und daß

$$\sphericalangle (h, k) \rightarrow \sphericalangle (h, k')$$

ist. Angenommen nun, es wären die Halbstrahlen k und k' voneinander verschieden. Nach III 4 b_2 ist

$$\sphericalangle (h, k) \rightleftarrows \sphericalangle (k, h);$$

also nach Satz III 5

$$\sphericalangle (h, k') \rightleftarrows \sphericalangle (k, h).$$

Aus den beiden letzten Relationen folgt, wenn wir $\leftarrow$ ins Auge fassen, ein Widerspruch gegen III 4 a_2. Also ist unsere Annahme unmöglich. q. e. d.

*) Man könnte natürlich leicht einen anderen Beweis angeben, der nicht von III 5 selbst, sondern vom dritten Kongruenzsatz Gebrauch macht.