Théorème sur trois continus.

Par **Casimir Kuratowski** à Lwów.

Je vais prouver dans cette note le théorème suivant:

Théorème. A, B et C étant trois continus situés sur le plan et tels que $A+B+C$ est une coupure[1]) entre deux points p et q, tandis que ni $A+B$, ni $A+C$, ni $B+C$ n'est une coupure entre ces points, on a $ABC=0$[2]).

1. J'aurai récours dans la démonstration à un théorème de Janiszewski et à deux lemmes que j'établirai tout-à-l'heure.

D'après le théorème de Janiszewski [généralisé[3])], si X et Y sont deux ensembles fermés dont un au moins est borné et dont le produit est un continu, si ni X ni Y n'est un $\mathfrak{S}_{(p,q)}$, $X+Y$ n'en est un nonplus.

Lemme 1. F et D étant deux ensembles fermés et bornés, dont D est un continu, tels que $F+D$ est un $\mathfrak{S}_{(p,q)}$, l'ensemble $F-D$ contient un ensemble connexe S tel que $D+S$ est un $\mathfrak{S}_{(p,q)}$.

Démonstration. La propriété „d'être un ensemble fermé qui est un $\mathfrak{S}_{(p,q)}$ contenant D" étant inductive[4]), $F+D$ contient un ensemble J irréductible par rapport à cette propriété. L'ensemble $S=J-D$ est l'ensemble cherché.

En effet, dans le cas contraire, on aurait $S=M+N$, M et N étant deux ensembles séparés non-vides. Par conséquent, les ensembles $D+M$ et $D+N$ sont deux ensembles fermés satisfaisant aux formules:

---

1) Un ensemble X est dit une „coupure entre p et q", ou en symboles: un $\mathfrak{S}_{(p,q)}$, lorsque tout continu qui unit p et q passe par X et les points p et q sont situés en dehors de X.

2) Pour le cas, où $A+B+C$ est une frontière commune à deux régions, ce théorème fut prouvé par M. Knaster; je m'en suis servi (de ce cas particulier) dans la démonstration du théorème „fondamental" de ma note „Sur la structure des frontières communes à deux régions", Fund. Math., XII, p. 29.

3) Prace mat.-fiz., 26 (1913).

4) C'est-à-dire qu'elle appartient au produit de toute suite d'ensembles décroissants jouissants de cette propriété. D'après un théorème de M. Brouwer, tout ensemble jouissant d'une propriété inductive qui implique que l'ensemble est fermé contient un ensemble irréductible par rapport à cette propriété (c'est-à-dire, que ce dernier ensemble jouit de cette propriété tandis qu'aucun de ses vrais sous-ensembles ne la possède).

(1) $$D+M \neq J \neq D+N$$

(2) $$(D+M)(D+N)=D.$$

Selon (1), ni $D+M$, ni $D+N$ n'est un $\mathfrak{S}_{(p,\,q)}$, donc, selon (2) et le théorème de Janiszewski, $(D+M)+(D+N)$ n'en est un nonplus. Mais ceci est impossible, car $(D+M)+(D+N)=J$ et J est un $\mathfrak{S}_{(p,\,q)}$.

Lemme 2. *A, B et C étant trois continus bornés tels que 1°: $A+B+C$ est un $\mathfrak{S}_{(p,\,q)}$, 2°: ni $A+C$, ni $B+C$ n'est un $\mathfrak{S}_{(p,\,q)}$, — il existe, pour chaque point a de C, un arc simple ax tel qu'on peut remplacer C par ax dans 1° et 2°.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que

(3) $$A+B \text{ n'est pas un } \mathfrak{S}_{(p,\,q)},$$

car, en cas contraire, ax est un arc arbitraire suffisamment petit.

En vertu de 2°, il existe deux continus L et M qui unissent p et q et que

(4) $$L(A+C)=0=M(B+C).$$

Il résulte de là que $(L+M)\,C=0$; il existe, par conséquent, une courbe simple fermée (même une ligne polygonale) F qui coupe le plan entre les continus $L+M$ et C. Soit R celle des deux régions en lesquelles F coupe le plan qui contient C. On a donc:

(5) $$C \subset R$$

(6) $$(L+M)\,\overline{R}=0\ ^{5)},$$

d'où, selon (4): $L(A+\overline{R})=0=M(B+\overline{R})$, ce qui prouve que

(7) $$\text{ni } A+\overline{R} \text{ ni } B+\overline{R} \text{ n'est un } \mathfrak{S}_{(p,\,q)}.$$

Je dis que

(8) $$A+B+F \text{ est un } \mathfrak{S}_{(p,\,q)}.$$

Soit, en effet, X un continu qui unit p à q. Si $X(A+B)=0$, on conclut de 1° que $XC \neq 0$, d'où en raison de (5): $XR \neq 0$. Or, X, comme continu ayant des points communs avec R ainsi qu'avec le complémentaire de R (puisque R ne contient pas p), X a des points communs avec la frontière de R, c'est-à-dire avec F.

La proposition (8) est ainsi établie.

En vertu du théorème de Janiszewski, on conclut de 1° et 2° que le produit $(A+C)(B+C)$ n'est pas un continu, donc que $AB \neq 0$. Il résulte de là que $A+B$ est un continu. On peut donc,

---

[5]) $\overline{R}$ désigne l'ensemble composé de R et de ses points limites.

en tenant compte de (8), substituer, dans le lemme 1, $A+B$ à la place de D.

On en conclut l'existence d'un ensemble connexe S tel que $S \subset F-(A+B)$ et que

$$(9) \qquad A+B+S \text{ est un } \mathfrak{S}_{(p,\, q)}.$$

L'ensemble F, comme frontière de la région R, est contenu dans $\bar{R}$, donc, selon (7), F n'est pas un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$. Il en résulte, en vertu de (3) et (8), que le produit $(A+B)F$ n'est pas un continu; il ne peut donc être ni vide ni composé d'un seul point. Par conséquent, S diffère de la courbe simple fermée F de deux points au moins. Il existe donc un arc xy de cette courbe tel que

$$(10) \qquad S \subset xy.$$

Unissons a à y par un arc ay situé dans $R+y$. Soit ax l'arc composé de ay et yx. On a donc $ax < \bar{R}$, d'où selon (7), ni $A+ax$, ni $B+ax$ n'est un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$; d'autre part, $A+B+ax$ est un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$, en raison de (9) et (10).

2. Démonstration du théorème.

Nous allons démontrer d'abord le théorème pour le cas où A, B et C sont bornés.

Supposons, contrairement à la thèse du théorème, qu'il existe un point a tel que

$$(11) \qquad a \subset ABC.$$

Selon le lemme 2, il existe un arc ax tel que:

$$(12) \qquad A+B+ax \text{ est un } \mathfrak{S}_{(p,\, q)}$$

$$(13) \qquad \text{ni } A+ax, \text{ ni } B+ax \text{ n'est un } \mathfrak{S}_{(p,\, q)}.$$

Soit b le premier point de l'arc ax (rangé de a à x) tel que

$$(14) \qquad A+B+ab \text{ est un } \mathfrak{S}_{(p,\, q)}.$$

Un tel point existe, car la propriété d'être un arc ax assujetti à la condition (12) est inductive.

En posant dans le lemme 1: $F=ab$ et $D=A+B$, on en conclut que l'ensemble $ab-(A+B)$ contient un ensemble connexe S tel que $A+B+S$ est un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$. Soit $a_1 b_1$ le plus petit arc extrait de ab qui contient S; on a donc

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b.$$

De plus: $b_1 = b$, car, autrement, l'ensemble $A + B + ab_1$ ne serait pas (conformément à la définition de b) un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$, tandisque $A + B + S \subset A + B + ab_1$, et $A + B + S$ est un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$.

Or, soit d un point intérieur de l'arc $a_1 b$. Donc

(15) $$A + B + ad \text{ n'est pas un } \mathfrak{S}_{(p,\, q)}.$$

D'autre part, selon la définition de l'arc $a_1 b_1$, on a $db \subset S + b$ et, comme $S(A + B) = 0$, il vient:

(16) $$db\,.\,(A + B) \subset b,$$

ce qui prouve que l'ensemble $db\,.\,(A + B)$ se réduit à un seul point (à moins qu'il ne soit vide), il est donc contenu soit dans A, soit dans B. Par raison de symétrie, on peut supposer que

(17) $$db\,.\,(A + B) \subset A.$$

Or, considérons les deux ensembles: $A + B + ad$ et $A + ab$. On a: $(A + B + ad)\,(A + ab) = (A + ad + B)\,(A + ad + db) =$
$$= A + ad + B\,.\,db,$$
ce qui, selon (17), est égal à $A + ad$ et, comme d'après (11), a appartient à A, $A + ad$ est un continu.

En appliquant aux ensembles $A + B + ad$ et $A + ab$ le théorème de Janiszewski, en tenant compte de (13) et (15), on en conclut que leur somme, c'est-à-dire, l'ensemble $A + B + ab$ n'est pas un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$. Mais ceci contredit la proposition (14).

Notre théorème est ainsi établi dans l'hypothèse que A, B et C sont bornés.

Dans le cas où cette hypothèse n'est pas réalisée, on transforme le plan par une inversion ayant pour pôle un point situé en dehors de $A + B + C + p + q$. En tenant compte du fait que la propriété d'être un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$ fermé reste invariante lorsque on ajoute le pôle à l'ensemble transformé[6]), on est ramené au cas où A, B et C sont bornés.

On voit, en même temps, que lorsque tous les trois ensembles A, B et C sont non-bornés, leurs images ont toujours le pôle pour point d'accumulation, même dans le cas où $ABC = 0$. On arrive ainsi au corollaire suivant, dû à M. Knaster:

Corollaire. *A, B et C étant trois continus non-bornés situés sur le plan, si $A + B + C$ est un $\mathfrak{S}_{(p,\, q)}$, l'un des trois ensembles $A + B$, $A + C$ ou $B + C$ en est un aussi.*

---

[6]) Cf. Fund. Math., V, p. 32 (note de M. Knaster et moi).

(Eingegangen: 6. VII. 1928.)