Über die räumliche Verteilung der Sterne.

Von *E. Hertzsprung.*

Eine erneute eingehende Behandlung des im Titel erwähnten Problems hat vor kurzem H. v. Seeliger [1]) gegeben, und von J. C. Kapteyn [2]) liegen Interpolationsformeln vor, welche zum Teil von derselben Form wie die unten mitgeteilten sind.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist nur, einige Betrachtungen an möglichst einfache Formeln zu knüpfen, welche jedenfalls in großen Zügen die Abzählungsresultate in bezug auf die Anzahl der Sterne mit den Kapteynschen mittleren Parallaxen für Sterne verschiedener Größe vereinbar erscheinen lassen.

Annahmen.

1. Es gibt keine merkliche Extinktion des Lichtes im Weltraum.

2. Unser Sternsystem bildet einen kugelförmigen Haufen, in dessen Mitte sich die Sonne befindet.

3. Die Abnahme der Dichte von der Mitte des Haufens aus geschieht nach der Formel:

$$\log \frac{D_\pi}{D_\infty} = -\left(\frac{0''00135}{\pi}\right)^2$$

oder:

$$D_\pi = D_\infty \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0''0029}{\pi}\right)^2}$$

wo D_π die Dichte bei der Parallaxe π ist.

[Diese Formeln können auch geschrieben werden:

$$\log \frac{D_r}{D_0} = -\left(\frac{r}{740}\right)^2$$

oder:

$$D_r = D_0 \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{345}\right)^2}$$

wo D_r die Dichte im Abstande r von der Mitte ist. Einheit für r ist der Abstand, welcher einer Parallaxe von 1″ entspricht.]

4. Die auf eine Parallaxe von 1″ reduzierten Größen der Sterne, im folgenden absolute Größen genannt, verteilen sich nach dem Gaußschen Fehlergesetze so, daß der Mittelwert $+7^m7$, und die mittlere Abweichung davon $\pm 3^m0$ beträgt.

[Die Häufigkeitsfunktion der Helligkeit i ergibt sich hieraus in der Bezeichnung von Seeliger zu:

$$\varphi(i) = 14.86 \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log i + 4.52}{1.2}\right)^2}$$

wobei $i = 1$ für einen Stern der absoluten Größe 0 (das ist etwa unsere Sonne) gesetzt ist.]

5. Die Zahl der Sterne bis 10^m beträgt 570000.

ad 1. Dies ist die einfachste Annahme, welche zu verlassen sich keine Notwendigkeit gezeigt hat.

ad 2. Es wird also die Milchstraße vorläufig nicht berücksichtigt, was bei einer Untersuchung, welche sich nur mit den Hauptzügen der Sternverteilung beschäftigt, in Übereinstimmung mit Seeliger, geschehen kann.

ad 3. In Worten heißt diese Annahme, daß der Logarithmus der Dichte eine Funktion zweiten Grades des Abstandes von der Mitte des Systems ist. Dies ist die einfachste Annahme, welche bei endlicher Gesamtzahl der Sterne die erforderliche Abnahme der Dichte von der Mitte des Haufens aus im ganzen darstellt. Die Konstante wurde im Einklang mit den übrigen Annahmen und mit den Beobachtungen festgesetzt.

ad 4. Die Annahme der Verteilung der absoluten Größen der Sterne nach dem Gaußschen Fehlergesetze ist naheliegend. Die Wahl der Konstanten geschah unter den eingangs gemachten Annahmen aus den unten mitgeteilten Beobachtungen.

ad 5. Diese Zahl wurde so gewählt, daß die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Sternzahlen durchgehend möglichst gut wurde.

Vergleich der Folgerungen mit den Beobachtungen.

Tabelle 1 enthält den Vergleich zwischen Kapteyns mittleren Parallaxen für Sterne verschiedener scheinbarer Größe und den nach obenstehenden Annahmen durch graphische Quadratur ermittelten Werten. Es sind sowohl die Parallaxen selbst verglichen als auch die auf eine Parallaxe von 1″ reduzierten oder absoluten Sterngrößen. Als berechneter Mittelwert ist immer der graphisch ermittelte Wert angegeben, ober- und unterhalb dessen gleich große Anzahlen liegen. Man könnte diesen Wert, im Gegensatz zu dem Mittelwerte im gewöhnlichen Sinne, den *Mittewert* nennen.

Tabelle 1.

Scheinbare Sterngröße	Mittlere absolute Sterngröße beob. $m + 5\log\pi(K)$	Mittlere absolute Sterngröße ber.	Diff.	Mittlere Parallaxe $\pi(K)$	Mittlere Parallaxe $\pi_{ber.}$
0^m7	-4^m35	-4^m68	$+0^m33$	0″0977	0″0841
2.7	−4.38	−4.53	+0.15	0.0385	0.0357
4.0	−4.44	−4.29	−0.15	0.0205	0.0219
5.0	−4.16	−4.01	−0.15	0.0147	0.0158
6.0	−3.45	−3.66	+0.21	0.0129	0.0117
7.0	−3.25	−3.22	−0.03	0.0089	0.0090
8.5	−2.50	−2.46	−0.04	0.0063	0.0064
10.5	−1.23	−1.20	−0.03	0.0045	0.0046
12.4		+0.14			0.0035
14.4		+1.77			0.0030
16.4		+3.41			0.0025

In Tabelle 2 sind die beobachteten und berechneten Anzahlen von Sternen bis zu verschiedenen Größen verglichen.

[1]) A. N. 4359 Bd. 182, S. 229 und Abh. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl. Bd. 25, 3. Abh.
[2]) A. J. 566, Vol. 24, p. 115.

Tabelle 2.

Scheinbare Sterngröße	Logarithmus der Zahl der Sterne bis zur Größe m beob.	ber.	Diff.
1^m5	1.31	1.09	+0.22
2.5	1.83	1.69	+0.14
3.75	2.45	2.42	+0.03
4.75	2.96	3.00	−0.04
5.75	3.50	3.56	−0.06
6.75	4.01	4.11	−0.10
7.5	4.39	4.51	−0.12
9.2	5.27	5.37	−0.10
11.16	6.22	6.27	−0.05
13.90	7.43	7.33	+0.10
14.84	7.69	7.64	+0.05

Die in den Tabellen 1 und 2 unter »beob.« angeführten Zahlen sind der letzten Arbeit von Seeliger entnommen.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung ist in Tabelle 1 befriedigend, während dies für Tabelle 2 nicht ganz gesagt werden kann. Der Gang in den Differenzen Tabelle 2, Spalte 4 ist aber hinreichend klein genug, um von einer Übereinstimmung in den Hauptzügen reden zu dürfen. —

Wir wollen jetzt einige weitere Folgerungen aus den oben gemachten Annahmen ziehen, welche zu prüfen von besonderem Interesse ist.

Wenn man die Sterne einer bestimmten scheinbaren Größe ins Auge faßt und fragt, welches die relative Häufigkeit der verschiedenen absoluten Größen unter diesen Sternen sei, so erhält man das in Tabelle 3 zum Ausdruck gebrachte Bild. Als mittlere absolute Größe ist wie oben der Wert genommen, ober- und unterhalb dessen gleich große Anzahlen liegen. Die mittleren Abweichungen vom Mittelwert sind in Tabelle 3 in analoger Weise dadurch bestimmt, daß, wie beim Gaußschen Fehlergesetze, je 0.1587 der ganzen Anzahl ober- resp. unterhalb der durch die mittleren Abweichungen gegebenen Werte liegen sollen.

Tabelle 3.

Scheinbare Sterngröße	Mittlere absolute Sterngröße	Mittl. Abweichungen von der mittleren absoluten Sterngröße	
0^m	-4^m7	$+2^m9$	-3^m0
3	−4.5	+2.7	−2.95
6	−3.7	+2.2	−2.6
9	−2.2	+1.7	−2.1
12	−0.2	+1.35	−1.65
15	+2.3	+1.1	−1.2

Die mittleren Abweichungen vom Mittel der absoluten Größen ergeben sich also für die scheinbar schwächeren Sterne bedeutend kleiner als für die scheinbar helleren und zwar wären die Unterschiede zwischen den absoluten Größen der Sterne der scheinbaren Größe 13 nur etwa halb so groß wie die entsprechenden Unterschiede für die mit bloßem Auge leicht sichtbaren Sterne. Die letzterwähnten Sterne ergeben sich in der absoluten Größe ebenso verschieden, wie oben unter der Annahme 4 für sämtliche Sterne angenommen war, nämlich mit einer mittleren Abweichung vom Mittel von $\pm 3^m$.

Diese Folgerung läßt sich nun aber noch an einem ganz andersartigen Beobachtungsmaterial prüfen. Wieviel nämlich die mit bloßem Auge leicht sichtbaren Sterne unter sich an absoluter Größe verschieden sind, kann man mit Hilfe der Sterne, für welche Radialgeschwindigkeit und Eigenbewegung bekannt sind, in der folgenden Weise ermitteln.

Wenn die Radialgeschwindigkeit ϱ, die Richtung im Raume und scheinbare Größe μ der Eigenbewegung eines Sternes bekannt sind, ist damit auch seine Parallaxe π bestimmt.

Stellt man jede Richtung im Raume durch einen Punkt der Himmelskugel dar, so wird der Punkt, welcher die Richtung im Raume der Eigenbewegung eines Sternes repräsentiert, der Zielpunkt des Sternes genannt. Der Winkelabstand des Sternes von seinem Zielpunkte sei mit φ bezeichnet. Zur Bestimmung der Parallaxe hat man dann:

$$\pi = 4.76 \frac{\mu}{\varrho} \cot \varphi \tag{1}$$

wo μ in Bogensekunden jährlich und ϱ in km pro Sekunde gemessen wird.

Wir werden jetzt die hier plausible Annahme machen, daß die räumlichen Richtungen der Eigenbewegungen willkürlich sind, d. h., daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zielpunkt eines Sternes unbekannter Bewegung innerhalb eines gewissen Gebietes des Himmels liegt, proportional der Fläche dieses Gebietes ist. Für die Hälfte aller Sterne wird dann der Abstand von ihrem Zielpunkte zwischen den Grenzen $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ und $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ liegen.

Wir können deshalb sagen, daß die Wahrscheinlichkeiten gleich sind dafür, daß die wirkliche Parallaxe eines Sternes mehr oder weniger beträgt als der Wert, welchen wir aus Formel (1) berechnen, indem φ, je nach dem Vorzeichen von ϱ, gleich $90^\circ \pm 30^\circ$ angenommen wird. Dasselbe gilt folglich für die aus:

$$m_{\text{scheinbar}} + 5 \log \pi_{\text{für } \varphi = 90^\circ \pm 30^\circ} = m + 5 \log \frac{\mu}{\varrho} + 2^m2$$

berechnete absolute Größe des Sternes.

Wir können aber auch die relativen Häufigkeiten der Abweichungen zwischen den wirklichen absoluten Größen und den für $\varphi = 90^\circ \pm 30^\circ$ berechneten bestimmen. Diese Differenz, wirkliche minus berechnete absolute Größe, beträgt nach Formel (1):

$$5 \log \left(4.76 \frac{\mu}{\varrho} \cot \varphi\right) - 5 \log \left(4.76 \frac{\mu}{\varrho} \cot 60^\circ\right)$$

oder:

$$5 \log \cot \varphi + 1^m19 .$$

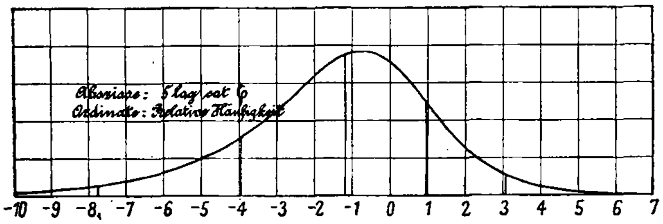
Infolge der gleichmäßigen Verteilung der Zielpunkte über die Himmelskugel sind alle Werte von $\cos \varphi$ zwischen $+1$ und -1 gleich häufig.

Wenn wir deshalb als Abszisse $5 \log \cot \varphi$ auftragen, haben wir zur Bestimmung der Ordinaten h der relativen Häufigkeiten:

$$h \cdot d(5 \log \cot \varphi) = {}^1/_2\, d(\cos \varphi)$$

woraus:

$$h = \frac{1}{10 \log e} \sin^2 \varphi \cos \varphi .$$



Die Figur zeigt, daß diese Häufigkeitsverteilung der Differenzen zwischen wirklichen und für $\varphi = 90^\circ \pm 30^\circ$ berechneten absoluten Größen der des Gaußschen Fehlergesetzes ähnlich ist. Nur ist eine Unsymmetrie in dem Sinne vorhanden, daß große negative Differenzen

$$m_{\text{abs., wirkl.}} - m_{\text{abs., berechn.}}$$

häufiger sind als große positive.

Die Werte von $5 \log \cot \varphi$, welche den mittleren Abweichungen vom Mittewert entsprechen, werden, wie oben beschrieben, aus $\varphi = \arccos 0.1587 = 80\overset{\circ}{.}9$ und $\varphi = \arccos(1 - 0.1587) = 32\overset{\circ}{.}7$ zu bezw. $5 \log \cot \varphi = 0^{m}96$ und $-3^{m}97$ berechnet. In der Figur sind diejenigen Ordinaten eingezeichnet, welche den Mittewert und das Einfache und Doppelte der mittleren Abweichungen repräsentieren. Da der Mittewert von $5 \log \cot \varphi$ gleich $5 \log \cot 60^\circ = -1^{m}19$ ist, werden die beiden mittleren Abweichungen davon bezw. $0^{m}96 + 1^{m}19 = 2^{m}15$ und $-3^{m}97 + 1^{m}19 = -2^{m}78$. Ihr Produkt 6.0 kann als Quadrat derjenigen mittleren Abweichung zwischen wirklicher und berechneter absoluter Größe gelten, welche durch die falsche Annahme verursacht wird, daß alle Sterne sich $90^\circ \pm 30^\circ$ von ihrem Zielpunkte befinden.

Wenn wir deshalb unter dieser Annahme ($\varphi = 90^\circ \pm 30^\circ$) für jeden Stern seine absolute Größe aus Radialgeschwindigkeit und scheinbarer Eigenbewegung berechnen, begehen wir einen mittleren Fehler von $\pm\sqrt{6.0} = \pm 2^{m}45$.

Das Quadrat der mittleren Abweichung vom Mittel, welches die für $\varphi = 90^\circ \pm 30^\circ$ berechneten absoluten Größen für eine Sterngruppe zeigt, ist dann um 6.0 größer als das Quadrat, welches sich ergeben würde, falls die wahren Zielpunktsabstände bei der Berechnung der absoluten Größen verwendet worden wären.

Das Resultat der für 145 helle Sterne unter Annahme von $\varphi = 90^\circ \pm 30^\circ$ berechneten absoluten Größen gibt Tabelle 4 [1]).

Tabelle 4.

Scheinbare Sterngröße	Zahl der Sterne	Absolute Sterngröße $\varphi = 90^\circ \pm 30^\circ$ angenommen: Mitte m_0	mittl. Abweich. bei m_{+1}	mittl. Abweich. bei m_{-1}	Quadrat der mittleren Abweichung $(m_0 - m_{+1})(m_0 - m_{-1})$
heller als 3^m	67	$-6^{m}4$ [2])	$-1^{m}8$	$-10^{m}7$	19.8
von 3^m bis 4^m	78	-4.9	-1.3	-8.3	12.3

Für Sterne heller als 3^m wird demnach das Quadrat der mittleren Abweichung vom Mittel der wirklichen absoluten Sterngrößen gleich $19.8 - 6.0 = 13.8 = (\pm 3^{m}7)^2$ und für die Sterne zwischen 3^m und 4^m gleich $12.3 - 6.0 = 6.3 = (\pm 2^{m}5)^2$ in leidlicher Übereinstimmung mit dem nach obenstehendem zu erwartenden Werte $9 = (\pm 3^m)^2$.

Nach Tabelle 1 werden die Sterne mit abnehmender scheinbarer Helligkeit absolut dunkler.

Dies läßt erwarten, daß sie gleichzeitig auch im Mittel gelblicher werden. Wenn man nämlich die Sterne betrachtet, für welche eine meßbare Parallaxe gefunden wurde, so findet man [3]), daß die Spektren oder Farben durchgehend um so gelblicher werden, je dunkler die absolute Größe des Sternes ist. Von den l. c. [3]) erwähnten Ausnahmen sind einige durch neuere Bestimmungen weggefallen [4]) und einige bisher unbekannte Spektren absolut dunkler Sterne sind hinzugekommen. Diese sind alle in Übereinstimmung mit dem gesagten mit Ausnahme von AOe 17415-16, welcher das Spektrum *F* haben soll, obwohl seine absolute Größe sich zu $+6^m$ berechnet.

Da man bekanntlich auch absolut helle gelbe Sterne (α Bootis, α Tauri, α Orionis usw.) kennt, wird die allgemeine Abhängigkeit zwischen Farbe und absoluter Größe der Sterne dahin beschränkt, daß es für jede absolute Größe eine gewisse maximale Weißheit gibt, worüber erheblich hinausgehende Ausnahmen recht selten sind. Diese maximale Weißheit nimmt mit Dunklerwerden der absoluten Größe ab.

Jedenfalls darf man aus einem allgemeinen Gelblicherwerden der Sterne mit abnehmender scheinbarer Helligkeit nicht auf Extinktion des Lichtes im Weltraum schließen.

Potsdam, 1910 Juni. *E. Hertzsprung.*

---

[1]) Bei der Zusammenstellung der Radialgeschwindigkeiten ist mir ein von Herrn Prof. Ludendorff freundlichst zur Verfügung gestelltes Verzeichnis sehr nützlich gewesen.

[2]) Dieser Wert stimmt nicht besonders gut mit dem aus Kapteyns Parallaxen abgeleiteten $-4^{m}4$. Der Unterschied rührt vielleicht daher, daß die Kapteynschen Zahlen nicht ganz, wie hier, den Mittewert repräsentieren, ober- und unterhalb dessen gleich große Anzahlen liegen. — Berücksichtigung von Unsicherheit in der Bestimmung der Eigenbewegungen würde den Unterschied noch vergrößern können.

[3]) Zur Strahlung der Sterne II. Zeitschr. f. wiss. Phot. Bd. 5, S. 86. 1907.

[4]) Grb 1646, Spektr. F 8 (früher A?); GZ 5^h243, G 5 (früher A); Lal 43492, G (früher A?).

---

(308) Polyxo. Correction de l'éphéméride (B. A. 27.180): 1910 Juin $-1^m 35^s$ $0'.0$. *M. Giacobini.*

(478) Tergeste. Correction de l'éphéméride (B. A. 27.179): 1910 Juin $-1^m 5^s$ $-0'.3$. *M. Giacobini.*