REMBS, E.
Math. Annalen, Bd. 127, S. 251—254 (1954).

Verbiegbarkeit konvexer Kalotten.

Von
EDUARD REMBS in Berlin.

Von W. SÜSS stammt die folgende Fragestellung: Kann eine konvexe Kalotte, deren Rand Lichtgrenzkurve ist, so verbogen werden, daß der Rand Lichtgrenzkurve bleibt? Für Parallelbeleuchtung und infinitesimale Verbiegbarkeit habe ich die Frage beantwortet [1]. Die Kalotte ist bei dieser Nebenbedingung starr. Das entsprechende Ergebnis für endliche Verbiegbarkeit hat dann K. P. GROTEMEYER [2] erzielt. Ich will nun die Starrheit bei Zentralbeleuchtung beweisen[1]).

1. Ich nehme an, es sei eine Eifläche gegeben, die vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus beleuchtet wird, und der Nullpunkt liege außerhalb der Fläche. Wir denken uns diese längs der Lichtgrenzkurve aufgeschnitten und untersuchen die Verbiegbarkeit einer der beiden Kalotten, in welche die Fläche zerfällt, gleichviel welche. $\mathfrak{x}$ sei der Ortsvektor der Kalotte, ξ ihr Normalenvektor. Am Rande muß

$$(\mathfrak{x} \cdot \xi) = 0 \tag{1}$$

sein. Nun soll der Rand Lichtgrenzkurve bei der infinitesimalen Verbiegung

$$\mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{z}$$

bleiben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann ich fordern, daß auch nach der Verbiegung die Spitze des Randlichtkegels im Nullpunkt liegt. Gegebenenfalls betrachtet man statt der vorgelegten Verbiegung eine solche, die sich von ihr um eine geeignete infinitesimale Verschiebung unterscheidet.

Man bezeichne mit $\mathfrak{y}$ den Drehvektor der Verbiegung. Der Normalenvektor ξ von $\mathfrak{x}$ geht in

$$\xi + t(\mathfrak{y} \times \xi)$$

über. Unsere Aufgabe kann also so formuliert werden, daß am Rande die in t linearen Glieder von

$$(\mathfrak{x} + t\,\mathfrak{z})\,(\xi + t(\mathfrak{y} \times \xi))$$

verschwinden sollen, d. h. es muß am Rande

$$(\mathfrak{z} + (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}))\,\xi = 0$$

sein. Der Vektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{z} - (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}) \tag{2}$$

heißt der Verschiebungsvektor der infinitesimalen Verbiegung. Indem wir ihn

[1]) Ein ganz andersartiger Beweis wird im Arch. d. Math. erscheinen.

benutzen, erhalten wir die Randbedingung in der Form

(3) $$(\mathfrak{r}\,\xi) = 0\,.$$

Um die Unmöglichkeit einer Verbiegung der genannten Art nachzuweisen, soll die Fläche betrachtet werden, die den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ hat. R. SAUER hat sie als Verschiebungsriß bezeichnet. $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{r})$ seien die Randkegel der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}$, gebildet aus den Ortsvektoren der Randpunkte. Man überträgt noch die Normalenvektoren ξ von $(\mathfrak{x})$ in den Nullpunkt. Dadurch erhält man den „Normalenkegel" (ξ). Er ist wegen (1) und (3) polarreziprok in der absoluten Polarität unseres Bündels sowohl zu $(\mathfrak{x})$ als zu $(\mathfrak{r})$. *Demnach fallen die Randkegel* $(\mathfrak{x})$ *und* $(\mathfrak{r})$ *zusammen*, natürlich diese Kegel in ganzer Ausdehnung, nicht die durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}$ bestimmten Abschnitte.

2. Die Bedingung dafür, daß $\mathfrak{x} + t\,\mathfrak{z}$ eine infinitesimale Verbiegung von $\mathfrak{x}$ sein soll, lautet

(4) $$d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z} = 0\,.$$

Der Drehvektor $\mathfrak{y}$ ist durch die Gleichung

(5) $$d\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}$$

definiert, und daraus läßt sich bekanntlich folgern:

(6) $$\mathfrak{y}_u = \alpha\,\mathfrak{x}_u + \beta\,\mathfrak{x}_v\,,\ \mathfrak{y}_v = \gamma\,\mathfrak{x}_u + \delta\,\mathfrak{x}_v\,,\ \alpha + \delta = 0\,.$$

Die Bestimmung von α, β, γ führt auf das Gleichungssystem

(7) $$L\,\gamma - 2\,M\,\alpha - N\,\beta = 0,$$

(8) $$\begin{cases} \alpha_v - \gamma_u = \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\gamma - 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\alpha - \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\beta, \\ \alpha_u + \beta_v = \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\gamma - 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\alpha - \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\beta. \end{cases}$$

Nun ergibt sich aus (2) wegen (5)

$$d\mathfrak{r} = (\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y}),$$

d. i.

(9) $$\mathfrak{r}_u = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}_u\,,\ \mathfrak{r}_v = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}_v$$

und daher mit Benutzung von (6)

(10) $$\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v)\,\mathfrak{x} = (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)\,(\mathfrak{x}\,\xi)\,\sqrt{E\,G - F^2}\,\mathfrak{x}\,.$$

Also hat der Normalenvektor von $\mathfrak{r}$ überall, wo er nicht verschwindet, die Richtung des Ortsvektors von $\mathfrak{x}$ im zugehörigen Flächenpunkt. Singuläre Stellen auf $\mathfrak{r}$ treten erstens da auf, wo $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 0$ ist. Solche Stellen liegen aber nach COHN-VOSSEN isoliert. Außerdem sind wegen $(\mathfrak{x} \cdot \xi) = 0$ alle Randpunkte des Verschiebungsrisses singuläre Punkte. In einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes mit $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 0$, sowie in einem genügend kleinen an ein Randbogenstück unserer Fläche anschließenden Teil des Flächeninnern weichen aber alle Normalen und Tangentialebenen beliebig wenig voneinander ab. In beiden Arten singulärer Punkte existiert daher eine Grenzlage der Tangentialebene, unabhängig von der Art der Annäherung gegen den singulären Punkt, die ich auch Tangentialebene nennen will, und für die Randpunkte von $\mathfrak{r}$ fallen deren Normalen mit den Randvektoren von $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{r}$ zusammen. *Der durch die Tangentialebenen des Randes von* $\mathfrak{r}$ *bestimmte Randstreifen muß dann aber sphärisch sein,* da die Ebenen die Erzeugenden des Kegels senkrecht schneiden. Sie könnten insbesondere alle durch den Nullpunkt gehen. Es ist also die Frage, ob man durch einen solchen geschlossenen sphärischen Streifen eine Fläche legen kann, die Verschiebungsriß einer konvexen Kalotte ist.

3. *Der Verschiebungsriß einer konvexen Kalotte hat in regulären Punkten negative Krümmung.* Der Normaleneinheitsvektor ist gleich $\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2}}$. Daraus und mit Hilfe der Formeln (9) und (6) kann man daher die Fundamentalgrößen 2. Ordnung bestimmen. Man findet

$$\frac{\beta(\mathfrak{x}\xi)\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2}}, \quad -\frac{\alpha(\mathfrak{x}\xi)\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2}}, \quad -\frac{\gamma(\mathfrak{x}\xi)\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2}}.$$

Andererseits ist nach (10)

$$(\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v)^2 = (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^2\,(\mathfrak{x}\,\xi)^2\,\mathfrak{x}^2\,(E\,G - F^2)\,.$$

Die Krümmung ist also wegen $\delta = -\alpha$ einfach

$$(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^{-1}\,(\mathfrak{x}^2)^{-2},$$

und bei positiv gekrümmter Ausgangsfläche $\mathfrak{x}$ ist $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma < 0$, solange es sich um reguläre Punkte handelt.

Danach kann die Fläche $\mathfrak{r}$ *jedenfalls nicht überall im Innern denselben Abstand vom Nullpunkt haben wie am Rande,* also mit einer Kugelkalotte identisch sein. Es müßten Punkte größerer, also auch solche größter Entfernung vom Nullpunkt existieren. Das können zwar wegen der negativen Krümmung keine regulären Punkte sein; das Verhalten in singulären Punkten aber muß noch untersucht werden. Ich behaupte, *daß auch in singulären Punkten keine maximale Entfernung bestehen kann.*

4. Wir nehmen im Widerspruch zur Behauptung an, daß doch ein Punkt der genannten Art vorkäme. Für ihn müssen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ und Normalenvektor $\mathfrak{x}$ zusammenfallen, die beiden zusammengehörigen Punkte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}$ müßten auf derselben Geraden durch den Nullpunkt liegen. Diese nehme ich als z-Achse und nenne die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ jetzt x, y, z. Die z-Achse ist gewiß nicht Tangente der Kalotte. Ich nehme für eine gewisse Umgebung von $x = y = 0$ die Fläche $\mathfrak{x}$ in der Form an

$$\mathfrak{x} = (x, y, z\,(x, y))\,.$$

Dann kommt meine Behauptung darauf hinaus, daß die dritte Komponente ϱ von $\mathfrak{r}$ für $x = y = 0$ kein Extremum hat. Die dritte Komponente von $\mathfrak{z}$ nenne ich ζ, die beiden ersten von $\mathfrak{y}$ werden dann ζ_y und $-\zeta_x$ in Übereinstimmung mit (5), und für ϱ erhält man aus (2)

$$\varrho = \zeta - x\,\zeta_x - y\,\zeta_y\,. \tag{11}$$

Den Gleichungen (6) entnimmt man noch die Werte

$$\gamma = \zeta_{yy}\,, \alpha = \zeta_{xy}\,, \beta = -\,\zeta_{xx}\,.$$

Ferner mögen, wie üblich, die zweiten Ableitungen von $z(x, y)$ mit r, s, t bezeichnet werden. Dann liefern die Gleichungen (7) und (8) übereinstimmend die übrigens bekannte Gleichung

$$r\,\zeta_{yy} - 2\,s\,\zeta_{xy} + t\,\zeta_{xx} = 0\,. \tag{12}$$

Man denke sich nun ζ nach x, y entwickelt und betrachte die Glieder niedrigster Ordnung dieser Entwicklung mit $n \geqq 2$. Substitution in (12) zeigt, daß die von diesen Gliedern gebildete Form wegen $r\,t - s^2 > 0$ indefinit sein muß. Nach (11) stimmen aber wegen des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen die fraglichen Entwicklungsglieder von ζ und ϱ bis auf einen unwesentlichen konstanten Faktor überein. Lineare Glieder treten in der Entwicklung von ϱ nicht auf. *Also kann ϱ für $x = y = 0$ kein Extremum haben.*

Literatur.

[1] Rembs E.: Zur Verbiegung von Flächen im Großen, Math. Zeitschrift **56**, 271—279 (1952). [2] Grotemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist, Math. Zeitschrift **58**, 272—280 (1953).

(Eingegangen am 29. Juni 1953.)