Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe

Memoria 1ª di GUSTAVO SANNIA (a Modena)

INTRODUZIONE

1. La *geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe* ([1]), fondata da HALPHEN ([2]), ha ricevuto da WILCZYNSKI ([3]) un più sistematico sviluppo. In questa Memoria e in una successiva la presenterò sotto una veste nuova e con nuovi risultati, ricostruendola con un procedimento che, pur accostandosi a quello del WILCZYNSKI, è più *intrinseco*, quindi consente uno studio più approfondito e con maggiore semplicità di mezzi.

Costruirò due *metriche proiettive* differenti, una (generale) per le curve *non appartenenti a un complesso lineare* ed una per le rimanenti ([4]); ma le svilupperò contemporaneamente, e, mercè opportune convenzioni, con un solo algoritmo. Questo algoritmo è tale che permette di studiare sistematicamente insieme con ogni *curva* v (varietà ∞^1 di punti) anche *la sviluppabile* v (varietà degli ∞^1 suoi piani osculatori) e senza nuovi calcoli; ciò è importante, perchè sembra che, solo considerando la v in tale duplice modo, sia possibile di caratterizzare geometricamente molti enti che si presentano spesso analiticamente definiti, come i tetraedri D, Δ, F (§ 4), O, Ω (§ 6), che qui compaiono per la prima volta, insieme con *le formole di Frenet-Serret proiettive* (§ 4), *il punto* S *e il piano* σ (n.° 37), ecc..

([1]) Le curve *piane* saranno qui escluse. Di esse ho già trattato in un precedente lavoro recante un titolo analogo (Rend. della R. Accad. dei Lincei: vol. XXXI, serie 5ª, 2° sem., pagg. 450-454 e 503-506; vol. XXXII, serie 5ª, 1° sem., pagg. 17-19 e 432-434). Come mi ha fatto rilevare L. BERWALD, tale lavoro ha varî punti di contatto con la Sua Nota *Zur proiectiven Differentialgeometrie der Ebene.* (Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung B. 30, pag. 110).

([2]) *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Oeuvres, t. II, pag. 352).

([3]) *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Cap. XIII e segg. (Teubner, Leipzig, 1906).

([4]) *Escluse però le cubiche sghembe* che si presentano come *linee di lunghezza nulla* in ambedue le metriche.

Supporrò che la curva v sia definita da *equazioni parametriche*

$$x^{(r)} = x^{(r)}(u), \quad (r = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

essendo le $x^{(r)}$ coordinate proiettive omogenee di un suo punto generico P rispetto a un sistema fisso di riferimento.

Nella definizione delle funzioni (1) ([5]) è dunque insito un fattore di proporzionalità $h = h(u)$ *arbitrario*; ma io lo fisserò poi con legge *intrinseca* (cioè indipendente dalla scelta del sistema di riferimento e del parametro u) ed *invariante per collineazioni* (cioè che è la stessa per P e per il punto omologo di ogni curva collineare a v). Questa *normalizzazione* delle coordinate omogenee è uno dei capisaldi della nuova trattazione ([6]); come anche l'uso del *Calcolo differenziale assoluto con una variabile* ([7]) che ha il merito di introdurre nei calcoli *soltanto funzioni che sono invarianti per ogni trasformazione del parametro* u (le sole cioè che hanno interesse).

2. Ecco in succinto in che consiste. Con qualche legge corrisponda ad una funzione f di u una funzione $\bar{f}$ di $\bar{u}$: se per *ogni* trasformazione $u = u(\bar{u})$ si ha $f du^n = \bar{f} d\bar{u}^n$ (per un certo intero n) dico che f è *un covariante di ordine* n, che indico con f_n. (Se $n = 0$, f è *invariante*). È evidente che $f_n + g_n$, $f_n h_m$, $f_n : h_m$ sono covarianti di ordine n, $n + m$, $n - m$ rispettivamente.

Così, se al coefficiente a_1 di un differenziale

$$A = a_1 du \tag{2}$$

si fa corrispondere quello del trasformato $\bar{a}_1 d\bar{u}$ di A mediante $u = u(\bar{u})$, a_1 è covariante di ordine 1, quindi a_1^n di ordine n. Se ad ogni funzione f si fa corrispondere la trasformata, ogni funzione è covariante di ordine 0 (invariante), e la sua derivata prima f' è covariante di ordine 1, che perciò indico pure con f_1; ma *non* sono covarianti le derivate successive f'', f''',....

Per ovviare a ciò, introduco nei calcoli, invece delle derivate ordinarie $f^{(n)}$, le *derivate covarianti* f_n *rispetto ad un differenziale* (2) (perchè sono covarianti) definite dalle

$$f_{n+1} = f_n' - nSf_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \; S = a_1' : a_1). \tag{3}$$

([5]) Che supporrò finite e continue con tutte le derivate che compariranno nei calcoli. In seguito (a partire dal n.° 10) le indicherò più semplicemente con x', x'', x''', x^{IV}. Cfr. ([23]).

([6]) Che perciò è da porsi accanto a quella ben nota del FUBINI della geometria delle varietà *a più di una dimensione*.

([7]) Che ho esposto in una Nota degli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LXII, 1922, pag. 293.

Le ordinarie $f^{(n)}$ non sono che le f_n formate *rispetto al differenziale* du $(a_1 = 1)$.

La derivazione covariante si applica ad un covariante che sia funzione *razionale* di altri covarianti, *con le stesse regole della derivazione ordinaria.* Ed in tale operazione *la funzione* a_1 *va trattata come una costante,* essendo $a_2 = a_1' - Sa_1 = 0$.

Le f_n si esprimono linearmente con le $f^{(n)}$, e viceversa; così:

(4) $$\begin{cases} f' = f_1, \quad f'' = f_2 + Sf_1, \quad f''' = f_3 + 3Sf_2 - (S^2 + S')f_1, \\ f^{\text{IV}} = f_4 + 6Sf_3 + (7S^2 + 4S')f_2 + (S^3 + 3SS' + S'')f_1, \ldots \end{cases}$$

§ 1. **Arco e curvature proiettivi.**

3. Supporremo sempre che la curva v sia *priva di piani osculatori stazionarî,* e quindi che *non sia piana* (nell'arco che si considera), e perciò che il *wronskiano* delle (1) non sia nullo:

(5) $$w = |\, xx'x''x''' \,| \neq 0 \ \text{(8)}.$$

Allora, fissato che sia (con qualche legge) il fattore h (n.° 1), le (1) costituiranno un sistema fondamentale di soluzioni di una ben determinata equazione differenziale del tipo

(6) $$f^{\text{IV}} + 4\beta f''' + 6\gamma f'' + 4\delta f' + \varepsilon f = 0,$$

ove

(7) $$\begin{cases} 4\beta = -\,|\, xx'x''x^{\text{IV}} \,| : w, \quad 6\gamma = |\, xx'x'''x^{\text{IV}} \,| : w, \\ 4\delta = -\,|\, xx''x'''x^{\text{IV}} \,| : w, \quad \varepsilon = |\, x'x''x'''x^{\text{IV}} \,| : w. \end{cases}$$

Viceversa, ogni equazione del tipo (6) definisce, coi suoi sistemi fondame tali di soluzioni, una curva v e tutte le sue collineari, ossia individua una cu *a meno di una collineazione* (come è noto), il che basta per la Geom proiettiva. Però non vi è corrispondenza biunivoca tra le equazioni del e i sistemi di curve collineari dello spazio, dipendendo la (6) dall arbitraria di u e di h.

---

(8) Il 1° membro indica il determinante di 4° ordine le cui orizzontali si ottengono ponendovi per x le funzioni (1) successivamente. Analogo significato hanno i simboli analoghi che compaiono in altre formole, come le (7) e (7').

4. Per ovviare a ciò, incominciamo con l'introdurre in (6), al posto delle $f^{(n)}$, le f_n prese rispetto ad un differenziale (2) *arbitrario*, mediante le (4). Otteniamo così l'equazione

$$f_4 + 4b_1 f_3 + 6c_2 f_2 + 4d_3 f_1 + e_4 f = 0, \tag{6'}$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} & b_1 = \beta + \frac{3}{2}S, \quad c_2 = \gamma + 2S\beta + \frac{1}{6}(7S^2 + 4S'), \\ & d_3 = \delta + (S^2 + S')\beta + \frac{3}{2}S\gamma + \frac{1}{4}(S^3 + 3SS' + S''), \quad e_4 = \varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Tutti i termini di (6′) *sono covarianti di ordine* 4, *essendo i coefficienti covarianti di ordine* 1, 2, 3, 4 *rispettivamente.*

Ciò risulta dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} & w = |xx_1x_2x_3|, \\ & 4b_1 = -|xx_1x_2x_4| : w, \quad 6c_2 = |xx_1x_3x_4| : w, \\ & 4d_3 = -|xx_2x_3x_4| : w, \quad e_4 = |x_1x_2x_3x_4| : w \text{ [9]}. \end{aligned}\right. \tag{7'}$$

La primitiva (6) è contenuta nella (6′) per $A = du$ ossia $a_1 = 1$ (n.° 2).

La (6′) *ha carattere invariantivo* rispetto alle trasformazioni del parametro u. [Non così la (6)]. Essa però dipende dai due elementi arbitrarii h e A: *normalizzandoli*, cioè fissandoli con legge intrinseca ed invariante per collineazioni, perverremo ad una *equazione normale*, in corrispondenza biunivoca con la curva v (e le sue collineari).

5. Anzitutto, se si pone

$$f = \lambda x, \tag{9}$$

con

$$\lambda = ce^{-\int b_1 du} = ce^{-\int \beta du} : a_1^{\frac{3}{2}} \text{ [10]}, \tag{10}$$

---

[9] Analoghe alle (5) e (7). Si noti che $|x_p x_q x_r x_s|$ è covariante di ordine $p+q+r+s$; inoltre che, quando le (1) si sottopongono ed una sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti di modulo $M \neq 0$ (collineazione non degenere) esso si moltiplica per M; infine che, per le (4) è

$$|xx_1x_2x_3| = |xx'x''x'''| = w,$$

sicchè $|xx_1x_2x_3|$ è un covariante di ordine 6 *che è indipendente da* A (ma dipende da h). Infine per la detta sostituzione i coefficienti (7′) di (6′) non si alterano e perciò sono *invarianti per collineazioni.*

[10] Alla costante c converrà dare un valore immaginario puro quando $a_1 < 0$ (se si è e si vuol restare nel campo reale).

la (6') diventa

$$x_4 + 6p_2x_2 + 4q_3x_1 + r_4x = 0, \tag{11'}$$

con coefficienti che valgono

$$\begin{cases} p_2 = c_2 - b_1^2 - b_2, \quad q_3 = d_3 - 3b_1c_2 + 2b_1^3 - b_3, \\ r_4 = e_4 - 4b_1d_3 + 6(b_1^2 - b_2)c_2 - 3b_1^4 + 6b_1^2b_2 + 3b_2^2 - b_4, \end{cases} \tag{12}$$

e sono perciò covarianti dell'ordine espresso dal rispettivo indice.

Tali coefficienti non dipendono da h (*ma solo da* A) ([11]).

6. Esaminiamo come essi variano al variare di A. Sia

$$y^{\mathrm{IV}} + 6\pi y'' + 4\chi y' + \rho y = 0 \tag{11}$$

la (11') corrispondente ad $A = du$ (quindi a derivate ordinarie). Poichè essa non è che una delle infinite forme che può assumere la (6) variando h, si deve poterla trasformare nella (11') operando come si è fatto sulla (6): si perviene così ad un'equazione del tipo (6'), con

$$b_1 = \frac{3}{2}S, \quad c_2 = \pi + \frac{1}{6}(7S^2 + 4S'), \quad d_3 = \chi + \frac{3}{2}\pi S + \frac{1}{4}(S^3 + 3SS' + S''), \quad e_4 = \rho, \tag{13}$$

giusta le (8); e poi alla (11'), nella quale, poichè per la (3) è

$$\begin{gathered} b_2 = \frac{3}{2}(S' - S^2), \quad b_3 = \frac{3}{2}(S'' - 4SS' + 2S^3), \\ b_4 = \frac{3}{2}(S''' - 7SS'' - 4S'^2 + 18S^2S' - 6S^4), \end{gathered} \tag{14}$$

i coefficienti avranno, giusta le (12), i valori

$$\begin{cases} p_2 = \pi + \frac{5}{2}(S^2 - 2S'), \quad q_3 = \chi - 3S\pi + \frac{5}{4}(3SS' - S'' - S^3), \\ r_4 = \rho - 6S\chi + 9(3S^2 - 2S')\pi + \frac{3}{16}(27S^4 - 108S^2S' + 36S'^2 + 48SS'' - 8S'''). \end{cases} \tag{15}$$

([11]) Come è facile vedere. Cfr. la dimostrazione dell'analogo risultato di loc. cit. ([1]), n. 4.

Le (15) *mostrano come variano i coefficienti di* (11′) *variando* A (quindi S) ([12]).

Se ne deducono dei covarianti *indipendenti da* A. Così, dalla 2ª e dalla

(16) $$p_3 = p_2' - 2Sp_2 = \pi' - 2S\pi + 5(3SS' - S'' - S^3),$$

segue che $q_3 - \frac{3}{2}p_3 = \chi - \frac{3}{2}\pi'$; or poichè i due membri sono formati con la stessa legge, uno con A e i coefficienti di (11′) e l'altro con du e i coefficienti di (11), si conclude che:

(17) $$\theta_3 = q_3 - \frac{3}{2}p_3 = \chi - \frac{3}{2}\pi'$$

è un covariante di 3° ordine indipendente da A (oltre che da h) ([13]).

Poi, dalle (15) e (16), si deducono, derivando covariantemente, i covarianti

$$p_4 = \pi'' - 5S\pi' + 2(3S^2 - S')\pi + \frac{5}{6}s, \qquad q_4 = \chi' - 3S\pi' - 3S\chi + 3(3S^2 - S')\pi + \frac{5}{4}s$$

(ove s è un certo polinomio in $S, S', \ldots.$), i quali, combinati linearmente con p_2^2 ed r_4 (15) (con coefficienti tali da eliminare $S, S', \ldots.$), dànno *il covariante di 4° ordine*

(18) $$\vartheta_4 = r_4 - 2q_4 + \frac{6}{5}p_4 - \frac{81}{25}p_2^2 = \rho - 2\chi' + \frac{6}{5}\pi'' - \frac{81}{25}\pi^2$$

che è indipendente da A (oltre che da h) ([14]).

([12]) Dalla 1ª segue che alla (11′) si può dar la forma

(a) $$x_4 + 4q_3x_1 + r_4x = 0,$$

se si sceglie per S (da cui si deduce a_1, quindi A, con una quadratura) una soluzione qualunque dell'*equazione di Riccati* $S' = \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{5}\pi$. Che se poi si cambia la variabile u col porre $a_1du = d\bar{u}$, essa si trasforma in altra dello stesso tipo, ma nelle derivate ordinarie rispetto a $\bar{u}$,

(a') $$x^{\mathrm{IV}} + 4\chi x' + \rho x = 0$$

e che è detta *forma canonica di Laguerre-Forsyth* della (6) (da WILCZYNSKI, che ne ha fatto uso sistematico). Però essa *non* ha carattere invariantivo come la (a).

([13]) *Anche da* h, perchè i coefficienti di (11′), coi quali è formato θ_3, non dipendono da h (n.° 5).

([14]) Lo si dimostra come per θ_3.

7. Dunque per normalizzare A (n.° 4) basta assumere in esso

(19) $$a_1 = \sqrt[3]{\theta_3} \qquad \text{o} \qquad (19') \quad a_1 = \sqrt[4]{|\vartheta_4|},$$

purchè risulti $a_1 \neq 0$ lungo l'arco di v che si considera, affinchè la (3) sia applicabile.

In ambo i casi la corrispondente equazione (11') sarà la richiesta *equazione normale* (n.° 4). Un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito dalle coordinate (1) di un punto generico P di v (o di una sua collineare) ma *col fattore di proporzionalità* h *fissato* ([15]) in modo intrinseco e invariante per collineazioni: le diremo *coordinate normali* di P.

A sarà il differenziale di una funzione $\sigma(u)$ definita (a meno di una costante additiva) in modo intrinseco e invariante per collineazioni: diremo $\sigma(u) - \sigma(u_0)$ *lunghezza proiettiva* dell'arco di v limitato dai punti corrispondenti ai valori u_0 e u del parametro.

Le assunzioni (19) e (19') conducono a due *metriche proiettive* diverse; ma, poichè l'ordine massimo delle derivate delle (1) da cui dipendono θ_3 e ϑ_4 è evidentemente minore in θ_3 (cfr. n.° 9), e d'altra parte dev'essere $a_1 \neq 0$, è naturale applicare:

1ª) La prima metrica (19) ad ogni curva lungo la quale non sia identicamente $\theta_3 = 0$, cioè che *non appartenga a un complesso lineare*, e limitatamente ad archi privi di punti (isolati) nei quali sia $\theta_3 = 0$, ossia nei quali *il complesso lineare osculatore è surosculatore* ([16]).

([15]) A prescindere da un fattore *numerico* (perciò senza importanza) che è la costante c di (10).

([16]) Per ora dimostriamo solo che: *se in* P *è* $\theta_3 = 0$, *ivi il complesso lineare osculatore di* v *è surosculatore.* Da tale teorema e dal reciproco (che risulterà poi da una formola del n.° 27) segue che: *l'identità* $\theta_3 = 0$ *caratterizza le curve appartenenti a un complesso lineare.*

Per la dimostrazione si può supporre che l'equazione a cui soddisfanno le (1) sia la (a') di ([12]), che scriveremo

(a'') $$x_4 + 4\chi x_1 + \rho x = 0,$$

convenendo che le derivate covarianti siano fatte rispetto a du (n.° 2).

L'equazione lineare in coordinate di retta $ap^{(1,2)} + ... = 0$ del complesso lineare osculatore di v in P è quella che è soddisfatta dalle ordinate $p^{(i,k)} = x^{(i)}x_1^{(k)} - x^{(k)}x_1^{(i)}$ della tangente di v in P e dalle loro derivate $p_1^{(i,k)}, ..., p_4^{(i,k)}$ dei primi 4 ordini. Ora, derivando successivamente ed eliminando sempre le derivate quarte delle $x^{(r)}$ mediante la (a''), si perviene ad una espressione del tipo $a\chi + bp_1^{(i,k)} + cp^{(i,k)}$ per $p_5^{(i,k)}$, e se ne deduce che, se $\chi = 0$ [cioè se $\theta_3 = 0$, per la (18) applicata ad (a'')], anche le $p_5^{(i,k)}$ soddisfanno la stessa equazione, e perciò che il complesso è surosculatore.

2ª) La seconda metrica (19′) *solo alle curve appartenenti a un complesso lineare, escluse le cubiche sghembe* ([17]).

In ambedue le metriche diremo *curvature proiettive* (*prima* e *seconda*) di v in P gli invarianti

$$I = \frac{3}{5} p_2 : a_1^2, \quad J = \vartheta_4 : a_1^4, \tag{20}$$

il secondo dei quali varrà sempre ± 1 *nella* 2ª *metrica.*

Avvertenza. D'ora in poi le derivate covarianti si intenderanno sempre fatte rispetto all'*elemento lineare proiettivo* $d\sigma = a_1 du$, ove a_1 ha il valore (19) o (19′).

E poichè $\theta_3 = a_1^3$ o $\theta_3 = 0$ (rispettivamente nelle due metriche) *nella derivazione covariante* θ_3 *dovrà esser trattata come una costante* (n.° 2).

8. Riassumiamo il procedimento da seguire per calcolare gli enti $d\sigma$, I e J di una v definita da equazioni parametriche (1).

Scelto ad arbitrio un differenziale $A \equiv (2)$, si costruisca l'equazione (6′), alle derivate covarianti rispetto ad A, a cui soddisfanno le (1), per es. mediante le (7′); poi l'equazione (11′) mediante le (12); indi si calcolino θ_3 e ϑ_4 mediante le (17) e (19) (prime espressioni); poi si costruisca l'elemento $d\sigma = a_1 du$, calcolando a_1 mediante la (19) (se $\theta_3 \neq 0$) o la (19′) (se $\theta_3 = 0$, $\vartheta_4 \neq 0$), ed I e J mediante le (20). Infine per ottenere le coordinate normali dei punti di v, si moltiplichino quelle date (1) per λ dato dalla (10) (prima espressione).

Se, in particolare, si assume du come differenziale A: si costruirà l'equazione alle derivate ordinarie (6) a cui soddisfanno le (1); poi la (11), i cui coefficienti varranno

$$\begin{gathered} \pi = \gamma - \beta^2 - \beta', \quad \chi = \delta - 3\beta\gamma + 2\beta^3 - \beta'', \\ \rho = \varepsilon - 4\beta\delta + 4\beta^2\gamma - 6\beta'\gamma - 3\beta^4 + 6\beta^2\beta' + 3\beta'^2 - \beta''' \text{ ([18])}; \end{gathered} \tag{21}$$

indi θ_3 e ϑ_4 mediante le (17) e (18) (seconde espressioni); ecc.

([17]) Perchè: *una cubica sghemba è caratterizzata dalle identità* $\theta_3 = 0$, $\vartheta_4 = 0$.

Infatti, supposto che l'equazione a cui soddisfano le (1) sia la (a') di ([12]), si ha $\theta_3 = \chi$, $\vartheta_4 = \rho - 2\chi'$, per le (17) e (18): quindi solo se $\theta_3 = \vartheta_4 = 0$ è $\chi = \rho = 0$ e perciò la (a') ammette il sistema di soluzioni $x^{(1)} = u$, $x^{(2)} = u^2$, $x^{(3)} = u^3$, $x^{(4)} = 1$ al quale corrisponde la più generale cubica sghemba, riferita a un opportuno sistema di riferimento. [Come è noto; cfr. n.° 27, a)].

([18]) Infatti le (6′) e (11′) nell'ipotesi $A = du$ si riducono alle (6) e (11), quindi le relazioni (12) si riducono alle (21).

9. Da questo ultimo processo si deduce quale è l'*ordine massimo* m delle derivate *ordinarie* rispetto ad u delle coordinate omogenee *qualunque* (non normalizzate) (1) dalle quali dipendono i covarianti e gli invarianti fondamentali considerati.

Scrivendo in parentesi ciascuno di essi e il corrispondente valore di m, si trova: $(\beta, 4)$, $(\gamma, 4)$, $(\delta, 4)$, $(\varepsilon, 4)$ per le (8); poi $(\pi, 5)$, $(\chi, 6)$, $(\rho, 7)$ per le (21); quindi $(\theta_3, 6)$, $(\vartheta_4, 7)$ per le (17) e (18); poi $(a_1, 6 \text{ o } 7)$ [19] per le (19) e (19'); quindi $(S, 7 \text{ o } 8)$ per la (3); poi $(p_2, 8 \text{ o } 9)$ per le (15); e infine, per le (20), si conclude che

$$(a_1,\ 6 \text{ o } 7), \quad (I,\ 8 \text{ o } 9), \quad (J,\ 7 \text{ o } 0) \text{ [20]}. \tag{22}$$

§ 2. **Teorema fondamentale. Equazioni intrinseche.**

10. Date le (1), sappiamo (n.° 8) calcolare $d\sigma$, I e J. Ora è importante che, viceversa, dati $d\sigma = a_1 du$, $I = I(u)$ e $J = J(u)$, possiamo ritrovare le (1).

Allora infatti possiamo calcolare successivamente p_2, p_3, p_4 dalla prima delle (20), q_3 e q_4 dalla (17), e r_4 dalla (18) e dalla seconda delle (20):

$$\left\{\begin{aligned} & 6p_2 = 10a_1^2 I, \quad 6p_3 = 10a_1^2 I_1, \quad 6p_4 = 10a_1^2 I_2, \\ & q_3 = \theta_3 + \frac{3}{2} p_3 = \theta_3 + \frac{5}{2} a_1^2 I_1, \quad q_4 = \frac{5}{2} a_1^2 I_2, \\ & r_4 = a_1^4 J + 3a_1^2 I_2 + 9a_1^4 I_2. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Sostituendo in (11'), si ha l'equazione

$$x_4 + 10a_1^2 I x_2 + 2(5a_1^2 I_1 + 2\theta_3)x_1 + (a_1^4 J + 3a_1^2 I_2 + 9a_1^4 I^2)x = 0 \tag{24}$$

che, integrata, dà le (1) normalizzate. Si ha così il teorema:

Un differenziale $d\sigma = a_1 du$ $(a_1 \neq 0)$ *e due funzioni* $I(u)$ *e* $J(u)$ [21] *individuano (a meno di una collineazione) una curva* v, *per la quale essi sono rispettivamente l'elemento lineare e le curvature proiettivi; si ottengono le coordinate normali di un punto generico* P *di* v *espresse mediante* u, *prendendo quattro soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (normale)*

$$x_4 + 10a_1^2 I x_2 + 2(5a_1^2 I_1 + 2\theta_3)x_1 + a_1^4 K x = 0, \tag{25}$$

---

[19] Il 1° numero si riferisce alla 1ª metrica e il 2° alla 2ª.

[20] Si ricordi che nella seconda metrica J è costante (n.° 7).

[21] *Arbitrarii*; però $J = \pm 1$ nella 2ª metrica.

ove

$$K = J + 3\frac{I_2}{a_1^2} + 9I^2 \quad (^{22}). \tag{26}$$

e θ_3 *vale* a_1^3 *o* 0 *secondo che si applica la* 1ª *o la* 2ª *metrica.*

Ne segue che: *Ogni « invariante proiettivo » di* v *è un covariante di ordine zero formato con* θ_3, a_1, I *e* J (*o* K) *e le derivate covarianti di* I *e* J (*o* K) *rispetto a* $d\sigma = a_1 du$; *e, viceversa, ogni tale covariante è un invariante proiettivo.*

In particolare, per $u = \sigma$, quindi $a_1 = 1$, I e J diventano funzioni di σ, e si ha che: *una curva* v *è individuata (a meno di una collineazione) dalle sue « equazioni intrinseche proiettive »* $I = I(\sigma)$, $J = J(\sigma)$; *si ottengono le coordinate normali di un suo punto generico* P *espresse mediante* σ *prendendo quattro soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (normale)*

$$x_4 + 10Ix_2 + 2(5I_1 + 2\theta_3)x_1 + Kx = 0, \tag{27}$$

ove

$$K = J + 3I_2 + 9I^2 \tag{28}$$

e θ_3 *vale* 1 *o* 0 *secondo che si considera la* 1ª *o la* 2ª *metrica* ([23]).

Inoltre: *gli invarianti proiettivi di* v *sono le funzioni (arbitrarie) di* σ, I, J (*o* K) *e delle derivate ordinarie di* I *e* J (*o* K) *rispetto a* σ ([24]).

11. *Si ha*

$$|xx_1x_2x_4| = 0 \tag{29}$$

in coordinate normali; queste si possono supporre tali che risulti

$$|xx_1x_2x_3| = a_1^3, \tag{30}$$

ed allora è

$$10a_1^8 I = |xx_1x_3x_4|, \quad a_1^{10}K = |x_1x_2x_3x_4|, \tag{31}$$

ed una collineazione è rappresentata da una sostituzione lineare omogenea unimodulare.

([22]) L'introduzione di questo *terzo* (dopo I e J) *invariante* K in luogo di J semplifica molte formule; tuttavia non sarebbe opportuno sostituirlo a J come curvatura di v (cioè come fondamentale); perchè, espresso mediante le coordinate (1) e loro derivate ordinarie rispetto a u, *dipende da derivate di ordine superiore a quelle dalle quali dipende* J, *e precisamente è* (K, 10 o 11) (con le notazioni del n.° 9).

([23]) Qui le derivate sono *ordinarie*, perchè covarianti rispetto a du (n.° 2); *tuttavia noi conserviamo la notazione covariante. E così in tutto il seguito.* Ed allora potremo anche indicare con x', x'', x''', x^{IV} le coordinate (1) di P e con ξ', ξ'', ξ''', ξ^{IV} quelle di π.

([24]) Si osserverà che *qui gli invarianti* (proiettivi) *di* v *si formano come nella geometria ordinaria.* Non così nelle precedenti trattazioni, citate in ([2]) e ([3]).

La (29) segue dalla prima delle (7′) applicata a (25). Poichè il suo 1° membro è la derivata covariante del covariante di 6° ordine $| xx_1x_3x_3 |$ ([25]), la si può scrivere $\frac{d}{du} | xx_1x_2x_3 | - 6S | xx_1x_2x_3 | = 0$; sostituendo ad S il suo valore (3) ed integrando, se ne deduce $| xx_1x_2x_3 | = ca_1^6$ ossia la (30), se si rende uguale a 1 la costante c moltiplicando le coordinate normali per il fattore numerico $\sqrt[4]{c}$. Le (31) seguono poi dalla (30) e dalle (7′) applicate a (25). Infine, che le collineazioni siano rappresentate da sostituzioni *unimodulari*, risulta dal fatto che, applicando una sostituzione rappresentante una collineazione, il 1° membro di (30) si moltiplica per il modulo della stessa, mentre che il 2° (che gli è uguale) deve rimanere inalterato.

Osservazione. Le (26), (30) e (31) permettono di esprimere $d\sigma$, I, J e K mediante le coordinate omogenee *normalizzate* e loro derivate *covarianti rispetto a* $d\sigma$. Il *massimo* ordine n di tali derivate è sempre *minore* del numero m considerato nel n.° 9; perchè, scrivendo in parentesi quadra ciascun elemento e il corrispondente valore di n, si ha

(32) $$[a_1, 4], \quad [I, 4], \quad [K, 4], \quad [J, 5 \text{ o } 0].$$

§ 3. Considerazioni duali.

12. Consideriamo *la sviluppabile* v di cui cioè la curva v è spigolo di regresso, e siano

(33) $$\xi^{(r)} = \xi^{(r)}(u) \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

le sue equazioni parametriche, essendo le $\xi^{(r)}$ coordinate omogenee del piano osculatore π di v in P.

π è il piano dei punti $P \equiv (x), (x'), (x'')$ o anche, per le (4), quello dei punti $(x), (x_1), (x_2)$ ([26]); quindi le $\xi^{(r)}$ sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna di (30): *noi li assumeremo uguali a tali complementi algebrici divisi per* a_1^3 ([27]), e diremo che sono *normali* quando tali sono le $x^{(r)}$ (e così sempre supporremo).

([25]) Poichè un determinante è una funzione *razionale* (intera) dei suoi elementi, la sua derivata covariante si forma come quella ordinaria (n.° 2).

([26]) Qui e in seguito, scrivendo in parentesi una espressione contenente la lettera x, vogliamo indicare il punto le cui coordinate sono i valori che l'espressione assume per $x = x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$. Idem per ξ (piano).

([27]) Così diventano covarianti di ordine zero (invarianti).

Tali coordinate normali di π costituiranno un sistema fondamentale di soluzioni di una certa equazione differenziale lineare nelle derivate covarianti rispetto a $d\sigma$, che è facile costruire. Per definizione è

$$(34) \qquad a_1^3 \xi^{(1)} = - \mid x x_1 x_2 \mid \text{ (}^{28}\text{)};$$

derivando covariantemente quattro volte ed eliminando sempre x_4 mediante la (25), si deducono analoghe espressioni per $a_1^3\xi_1^{(1)},\ldots,\ a_1^3\xi_4^{(1)}$, dalle quali, eliminando i determinanti del tipo $\mid x_p x_q x_r \mid$, si trova l'equazione richiesta a cui soddisfa $\xi^{(1)}$ (e così $\xi^{(2)},\ldots,\ \xi^{(4)}$). E si conclude che:

Le coordinate normali del piano π *della sviluppabile* v [*il cui spigolo di regresso è la curva* v *definita da* $d\sigma = a_1 du$, $I(u)$ *e* $J(u)$] *sono quattro soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione*

$$(35) \qquad \xi_4 + 10 a_1^2 I \xi_2 + 2(5a_1^2 I_1 + 2\theta_3)\xi_1 + a_1^4 K \xi = 0 \text{ (}^{29}\text{)}.$$

Si osservi che: (35) *differisce da* (25) *solo per lo scambio di* θ_3 *in* $-\theta_3$, *e perciò coincide con* (25) *solo quando* v *appartiene a un complesso lineare* (2ª metrica).

E inoltre che: *l'annullarsi dell'invariante* K *caratterizza le varietà* v *le coordinate normali dei cui punti* P *e piani* π *sono le «non omogenee»*. Perchè solo se $K = 0$ le (25) e (35) ammettono la soluzione 1.

13. *Tra le* $x^{(r)}$ *e le* $\xi^{(r)}$ *(e loro derivate covarianti) passano le relazioni:*

$$(36) \qquad \Sigma x\xi = 0, \quad \Sigma x \xi_1 = \Sigma x_1 \xi = 0, \quad \Sigma x \xi_2 = \Sigma x_1 \xi_1 = \Sigma x_2 \xi = 0,$$

$$(37) \qquad - \Sigma x \xi_3 = \Sigma x_1 \xi_2 = - \Sigma x_2 \xi_1 = \Sigma x_3 \xi = a_1^3,$$

$$(38) \qquad \Sigma x \xi_4 = \Sigma x_1 \xi_3 = \Sigma x_2 \xi_2 = \Sigma x_3 \xi_1 = \Sigma x_4 \xi = 0,$$

$$(39) \qquad \Sigma x_2 \xi_3 = - \Sigma x_3 \xi_2 = 10 a_1^5 I, \quad \Sigma x_3 \xi_3 = 4 a_1^3 \theta_3 \text{ (}^{30}\text{)}.$$

L'ultima uguaglianza di ciascun gruppo (36) e (37) segue dalla definizione delle $\xi^{(r)}$ (n.° 12); le altre seguono dall'ultima e da quelle che si ottengono derivando tutte le relazioni del gruppo precedente. Poi, derivando le (37), si ha

$$\Sigma x_1 \xi_3 + \Sigma x \xi_4 = \Sigma x_2 \xi_2 + \Sigma x_4 \xi_3 = \Sigma x_3 \xi_1 + \Sigma x_2 \xi_2 = \Sigma x_4 \xi + \Sigma x_3 \xi_1 = 0;$$

---

[28] In questo breve calcolo indichiamo con $\mid x_p x_q x_r \mid$ il determinante di 3° ordine le cui orizzontali si ottengono ponendo successivamente $x = x^{(2)},\ x^{(3)},\ x^{(4)}$.

[29] Che nel caso $u = \sigma (a_1 = 1)$ si riduce alla *aggiunta* di (25).

[30] In generale $\Sigma x_p \xi_q$ sta per $x_p^{(1)} \xi^{(1)}_q + \ldots + x_p^{(4)} \xi^{(4)}_q$. E così in seguito per simboli analoghi.

ma per le (25), (36) e (37) è $\Sigma x_4 \xi = 0$, quindi si hanno le (38). E così via ([31]).

14. Se si interpretano le (33) come coordinate di un punto $\overline{P}$, e quindi le (1) come coordinate di un piano $\overline{\pi}$, si ha una nuova varietà $\overline{v}$ (luogo di $\overline{P}$ e inviluppo di $\overline{\pi}$) che è *duale* di v.

Ora, poichè le (25) e (35), alle quali soddisfanno le (1) e (33) rispettivamente, differiscono solo per lo scambio di θ_3 in $-\theta_3$, e quindi coincidono solo se $\theta_3 = 0$, è chiaro che *v e $\overline{v}$ hanno uguali curvature ed elementi lineari uguali o opposti secondo che appartengono o non a un complesso lineare; quindi solo una* v *appartenente a un complesso lineare (coincide con* $\overline{\text{v}}$ *ossia) è autoduale* ([32]).

Avvertenza. Noi però nel seguito intenderemo la dualità in altro senso; cioè: converremo di riferirci *sempre alla stessa* v (e non a v e a $\overline{v}$) considerata o come luogo di punti P o come inviluppo di piani π; e di ogni ente sussidiario che introdurremo per lo studio della curva v considereremo l'ente duale (in senso ordinario) *ma relativo alla sviluppabile* v (e non $\overline{v}$). Questa *pseudo-dualità* coincide con l'ordinaria solo quando v appartiene a un complesso lineare (2ª metrica).

Le sole formole di cui faremo uso sono le (25), (35) e quelle del n.° 13; ora, poichè il sistema costituito da tali formule non si altera *cambiando* θ_3 *in* $-\theta_3$, *scambiando le coordinate di punto con quelle di piano e cambiando il segno alle une o alle altre*, da ogni equazione o espressione che otterremo potremo dedurre senz'altro la *duale* (nel senso spiegato) operando gli stessi cambiamenti (l'ultimo dei quali il più spesso non avrà alcun effetto e si potrà omettere) ([33]).

([31]) Sussistono poi formule analoghe a quelle del n.° 11 e nelle sole ξ (ma coi secondi membri cambiati di segno).

([32]) Ciò è confermato dal calcolo; perchè se si cercano per la $\overline{v}$ gli elementi $\overline{\theta}_3$, $\overline{\theta}_4$, $\overline{I}$, $\overline{J}$ analoghi a quelli di v, si trova che è $\overline{\theta}_3 = -\theta_3$, $\overline{\vartheta}_4 = \vartheta_4$, $\overline{I} = I$, $\overline{J} = J$.

E il calcolo si esegue col procedimento esposto nel n.° 8, nel quale converrà assumere $A = d\sigma$ e supporre che le (33) siano state già normalizzate come nel n.° 12; perchè allora l'equazione del tipo (11') (che, giusta il detto procedimento, si deve anzitutto costruire) è la (35) già nota.

([33]) Siamo partiti dalla considerazione della *curva* v e siamo pervenuti alla *sviluppabile* v. Se avessimo operato in senso inverso (cioè se in quanto precede avessimo considerato le x come le coordinate di piano e le ξ come coordinate di punto) saremmo stati condotti agli stessi $d\sigma$, I e J, solo che saremmo stati indotti a chiamarli *elemento angolare* e *curvature* (proiettivi) della *sviluppabile* v; dunque nulla di essenzialmente diverso avremmo trovato.

§ 4. **Tetraedro fondamentale. Formole di Frenet-Serret proiettive.**

15. Quando le coordinate di $P \equiv (x)$ sono normali, i punti $P_1 \equiv (x_1)$, $P_2 \equiv (x_2)$, $P_3 \equiv (x_3)$ risultano individuati in modo intrinseco ([34]) ed invariante per collineazioni ([35]); inoltre essi non sono complanari con P, per la (30). Dunque: P, P_1, P_2, P_3 sono vertici di un *tetraedro* D *definito in modo intrinseco e invariante per collineazioni.* Lo diremo *tetraedro normale* della curva v in P.

Supponendo $u = \sigma$, le coordinate di P_1, P_2, P_3 sono le derivate ordinarie di quelle di P, P_1, P_2 rispettivamente, quindi: *in* D *lo spigolo* $\mathrm{PP_1}$ *e la faccia* $\mathrm{PP_1P_2}$ *sono la tangente e il piano osculatore* π *di* v *in* P, *lo spigolo* $\mathrm{P_1P_2}$ *e la faccia* $\mathrm{P_1P_2P_3}$ *sono la tangente e il piano osculatore in* $\mathrm{P_1}$ *alla curva luogo di* $\mathrm{P_1}$ (variando P su v), *lo spigolo* $\mathrm{P_2P_3}$ *è la tangente in* $\mathrm{P_2}$ *alla curva luogo di* $\mathrm{P_2}$.

Dualmente: *I piani* $\pi \equiv (\xi)$, $\pi_1 \equiv (\xi_1)$, $\pi_2 \equiv (\xi_2)$, $\pi_3 \equiv (\xi_3)$ *sono le facce di un tetraedro* Δ *(tetraedro normale* della *sviluppabile* v in π*) definito in modo intrinseco e invariante per collineazioni; lo spigolo* $\pi\pi_1$ *è la generatrice della sviluppabile* v *in* π *(ossia la tangente alla curva* v *in* P*), il punto* $\pi\pi_1\pi_2$ *è* P, *lo spigolo* $\pi_1\pi_2$ *è la generatrice della sviluppabile descritta da* π_1 *e tocca lo spigolo di regresso nel vertice* $\pi\pi_1\pi_2$, ecc.

I due tetraedri D *e* Δ *hanno a comune: i due vertici* $\mathrm{P} \equiv \pi\pi_1\pi_2$ *e* $\mathrm{P_1} \equiv \pi_1\pi_2\pi_3$, *le due facce* $\pi \equiv \mathrm{PP_1P_2}$ *e* $\pi_1 \equiv \mathrm{P_1P_2P_3}$, *i due spigoli* $\mathrm{PP_1} \equiv \pi\pi_1$ *e* $\mathrm{PP_2} \equiv \pi\pi_2$.

Ciò segue dalla definizione stessa oppure dalle (36), (37) e (38).

16. Da D e Δ (fra loro duali) deduciamo un terzo tetraedro F che ha il vantaggio di essere *autoduale.*

F *abbia i due vertici* P, $\mathrm{P_1}$ *e le due facce* π, π_1 *(e quindi gli spigoli* $\mathrm{PP_1} \equiv \pi\pi_1$, $\mathrm{PP_2} \equiv \pi\pi_2$*) comuni a* D *e a* Δ, *e poi:*

1°) *Come terzo vertice il coniugato armonico di* $\mathrm{P} \equiv (\mathrm{x})$ *rispetto a* $\mathrm{P_2} \equiv (\mathrm{x_2})$

([34]) Perchè le loro coordinate, divise per a_1, a_1^2, a_1^3 rispettivamente, sono covarianti di ordine 0 (invarianti).

([35]) Poichè le loro coordinate sono *cogredienti* a quelle di P per ogni sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti (collineazione).

e al punto $PP_2 \cdot \pi_3$, *e che è* $P_n \equiv (5a_1^2 Ix + x_2)$. Perchè $PP_2 \cdot \pi_3 \equiv (10a_1^2 Ix + x_2')$, le sue coordinate dovendo essere del tipo $(ax + bx_2)$ con a, b tali che risulti $\Sigma(ax + bx_2)\xi_3 = 0$ ossia (n.° 13) $-a + 10a_1^3 Ib = 0$.

2°) (Dualmente) *come terza faccia il piano* $\pi_\nu \equiv (5a_1^2 I\xi + \xi_2)$ *coniugato armonico di* π *rispetto a* π_2 *e al piano* $\pi\pi_2 \cdot P_3$.

3°) *Come quarto vertice il punto comune ai piani* $\pi_1 \equiv (\xi_1)$, $\pi_\nu \equiv (5a_1^2 I\xi + \xi_2)$ *e al coniugato armonico di* $\pi \equiv (\xi)$ *rispetto a* $\pi_3 \equiv (\xi_3)$ *e al piano* $\pi\pi_3 \cdot P_3$, *e che è* $P_b \equiv (2\theta_3 x + 5a_1^2 Ix_1 + x_3)$. Infatti $\pi\pi_3 \cdot P_3 \equiv (4\theta_3\xi - \xi_3)$, perchè le sue coordinate debbono essere del tipo $(a\xi + \xi_3)$ con a, b tali che risulti $\Sigma(a\xi + \xi_3)x_3 = 0$ ossia (n.° 13) $a + 4\theta_3 b = 0$; quindi il detto coniugato armonico sarà $(2\theta_3\xi - \xi_3)$, che incontra π_1 e π_ν appunto in P_b, come si può verificare.

4°) (Dualmente) *come quarta faccia il piano* $\pi_\beta \equiv (-2\theta_3\xi + 5a_1^2 I\xi_1 + \xi_3)$ *dei punti* P_1, P_n *e del coniugato armonico di* P *rispetto a* P_3 *e al punto* $PP_3 \cdot \pi_3$.

Il tetraedro F *così definito è invariante* (per collineazioni come D e Δ, e) *per dualità.* Lo diremo *tetraedro fondamentale* di v in P (o in π) assegnandogli il posto che nella geometria ordinaria ha il *triedro fondamentale.*

Tra i suoi spigoli uscenti da P, quello che passa per il vertice P_1 (o P_t come anche scriveremo) è *la tangente* a v in P; noi diremo *normale principale* e *binormale (proiettive)* quelli passanti rispettivamente per i vertici P_n e P_b.

Tra le facce passanti per P, la $\pi \equiv PP_tP_n$ è *il piano osculatore* di v in P; noi diremo *piano normale* e *piano rettificante (proiettivi)* le rimanenti $\pi_\nu \equiv PP_nP_b$ e $\pi_1 \equiv PP_tP_b$ che indicheremo anche con π_τ. Diremo inoltre che è *una normale (proiettiva)* di v in P ogni retta appartenente a P e a π_ν.

17. Le coordinate omogenee dei vertici P, P_t, P_n, P_b e delle facce π, π_τ, π_ν, π_β di F risultano dal n.° 16. Dividendole per potenze opportune di a_1, si ottengono le seguenti coordinate omogenee *normalizzate*

$$(40)\qquad \begin{cases} (x), \quad \left(t = \dfrac{x_1}{a_1}\right), \quad \left(n = 5Ix + \dfrac{x_2}{a_1^2}\right), \quad \left(b = 2\dfrac{\theta_3}{a_1^3}x + 5I\dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_3}{a_1^3}\right), \\ (\xi), \quad \left(\tau = \dfrac{\xi_1}{a_1}\right), \quad \left(\nu = 5I\xi + \dfrac{\xi_2}{a_1^2}\right), \quad \left(\beta = -2\dfrac{\theta_3}{a_1^3}\xi + 5I\dfrac{\xi_1}{a_1} + \dfrac{\xi_3}{a_1^3}\right), \end{cases}$$

le quali sono intrinseche e invarianti per collineazioni [36].

---

[36] Qui t sta per $(t^{(1)}, \ldots, t^{(4)})$, ove $t^{(r)} = \dfrac{x_1^{(r)}}{a_1}$, ecc. Ciò d'accordo con [26].

Osservazione. *Il tetraedro* D (Δ) *dipende dalle derivate 1^e^, 2^e^ e 3^e^ covarianti delle* x *(delle* ξ*).* Giusta le (40), F *dipende anche dalle derivate 4^e^ delle* x *(o delle* ξ*);* perchè I ne dipende, per la 1^a^ delle (31) [37].

18. *Le derivate prime (e quindi le successive) covarianti delle coordinate normalizzate* (40) *dei vertici di* F *sono combinazioni lineari delle coordinate stesse:*

$$(41)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1 t, \quad t_1 = a_1(n - 5Ix), \quad n_1 = \left(5I_1 - 2\dfrac{\theta_3}{a_1^2}\right)x + a_1 b, \\ b_1 = (25I^2 - K)a_1 x - \left(5I_1 + 2\dfrac{\theta_3}{a_1^2}\right)t - 5a_1 In. \end{cases}$$

Idem per le facce:

$$(42)\qquad \begin{cases} \xi_1 = a_1 \tau, \quad \tau_1 = a_1(\nu - 5I\xi), \quad \nu_1 = \left(5I_1 + 2\dfrac{\theta_3}{a_1^2}\right)\xi + \alpha_1 \beta, \\ \beta_1 = (25I^2 - K)a_1 \xi - \left(5I_1 - 2\dfrac{\theta_3}{a_1^2}\right)\tau - 5a_1 I\nu. \end{cases}$$

---

(37) ***Di tetraedri che (come F) siano definiti in modo intrinseco e invariante per collineazioni, abbiano i vertici e le facce comuni di D e Δ, e siano autoduali ve ne sono infiniti.***

Supponendo per semplicità $u = \sigma$, quindi $a_1 = 1$, i vertici e le facce di uno qualunque di essi debbono essere del tipo

$$(x),\ (x_1),\ (ax + x_2),\ (bx + cx_1 + x_3); \quad (\xi),\ (\xi_1),\ (\alpha\xi + \xi_2),\ (\beta\xi + \gamma\xi_1 + \xi_3),$$

ove le a, b, c indicano tre invarianti proiettivi di v calcolati in P, cioè (n.° 10) tre funzioni della costante θ_3 (che vale 1 o 0) e delle funzioni I, J, I_1, J_1, I_2, J_2,... calcolate per $\sigma = 0$ (se, come è lecito, si assume P come origine degli archi σ su v); le α, β, γ indicano gli invarianti duali, cioè (n.° 15, *osserv.*) che se deducono cambiandovi θ_3 in $-\theta_3$.

Imponendo che ciascun vertice appartenga a tre delle facce si trova (in virtù delle formole del n.° 13, con $a_1 = 1$) che tali invarianti debbono soddisfare le condizioni

$$a + \gamma - 10I = 0, \quad \alpha + c - 10I = 0, \quad \beta - b + 4\theta_3 = 0;$$

e queste (come subito si riconosce) si soddisfano nel modo più generale assumendo

$$a = 5I + M + \theta_3 N, \quad b = L + 2\theta_3, \quad c = 5I - M + \theta_3 N$$

(e per α, β, γ i valori duali), *ove L, M, N sono tre invarianti proiettivi autoduali, quindi funzioni pari di θ_3 e qualunque di I, J, I_1, J_1,...*

Che se poi si vuole che il tetraedro dipenda (come F) dalle derivate dei soli primi quattro ordini delle x (o delle ξ) bisogna prendere *L, M, N funzioni di θ_3, I e J soltanto* (per l'osserv. del n.° 11).

Fra i tetraedri siffatti abbiamo prescelto F come *fondamentale*, perchè è quello la cui definizione si presenta più semplice: analiticamente, perchè corrisponde a $L = M = N = 0$: geometricamente, perchè si deduce da D e Δ con sole costruzioni di quarti armonici (n.° 16).

In particolare, per $u = \sigma$, si hanno *le formole di Frenet-Serret proiettive:*

$$(43)\qquad \begin{gathered} x_1 = t, \quad t = n - 5Ix, \quad n_1 = (5I_1 - 2\theta_3)x + b, \\ b_1 = (25I^2 - K)x - (5I_1 + 2\theta_3)t - 5In, \end{gathered}$$

$$(44)\qquad \begin{gathered} \xi_1 = \tau, \quad \tau_1 = \nu - 5I\xi, \quad \nu_1 = (5I_1 + 2\theta_3)\xi + \beta, \\ \beta_1 = (25I^2 - K)\xi - (5I_1 - 2\theta_3)\tau - 5I\nu. \end{gathered}$$

Per il carattere invariantivo delle (41) e (42) (tra loro duali) basta dimostrare le (43). Ed infatti, dalle (40) con $a_1 = 1$, si ha

$$(45)\qquad x_1 = t, \quad x_2 = n - 5Ix, \quad x_3 = b - 2\theta_3 x - 5It,$$

per cui la (27) diventa

$$(46)\qquad x_4 = (25I^2 - K)x - 2(5I_1 + 2\theta_3)t - 10In,$$

poi, derivando la (45), si ha

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} & x_2 = t_1, \quad x_3 = n_1 - 5I_1 x - 5Ix_1 = n - 5I_1 x - 5It, \\ & x_4 = b_1 - 2\theta_3 x_1 - 5I_1 t - 5It_1 = b_1 - (5I_1 + 2\theta_3)t - 5It_1. \end{aligned} \right.$$

Dalle (45), (46) e (47) seguono facilmente le (43).

19. *Fra le coordinate normalizzale* (40) *dei vertici e delle facce di* F *passano le relazioni:*

$$(48)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \Sigma\xi x = \Sigma x\tau = \Sigma x\nu = \Sigma t\xi = \Sigma t\tau = \Sigma t\beta \\ & = \Sigma n\xi = \Sigma n\nu = \Sigma n\beta = \Sigma b\tau = \Sigma b\nu = \Sigma b\beta = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(49)\qquad -\Sigma x\beta = \Sigma t\nu = -\Sigma n\tau = \Sigma b\xi = 1,$$

$$(50)\qquad |\, xtnb \,| = 1, \quad |\, \xi\tau\nu\beta \,| = -1.$$

Essendo invariantive, basta dimostrarle per $u = \sigma\,(a_1 = 1)$. Allora le (48) si ottengono dalle (36) e (38), sostituendovi per $x_1, \dots, x_4$ i valori (45) e (46) e per $\xi_1, \dots, \xi_4$ i valori duali ([38]). Allo stesso modo dalle (37) con $a_1 = 1$ seguono le (49). Infine la 1ª (per es.) delle (50) si verifica sostituendo i valori (40) con $a_1 = 1$ di x, t, n, b nel determinante primo membro e tenendo conto di (30).

([38]) Del resto le (48) esprimono l'appartenersi di vertici e facce di T.

20. Osservazione. *Si può supporre per semplicità che il parametro* u *sia l'arco* σ (quindi $a_1 = 1$ e $\theta_3 = 1$ o 0), e allora le derivate, fin qui covarianti rispetto a $d\sigma$, si riducono a derivate ordinarie rispetto a σ (39).

Ma è importante osservare che poi, quando si voglia, *si può subito e in modo semplicissimo ripristinare la generalità del parametro* u (40). Ed invero ogni espressione (sempre invariante) o uguaglianza (sempre tra invarianti) che otterremo per $u = \sigma$ sarà formata con le funzioni I, J (o K), x, t, n, b, ξ, τ, ν, β e loro derivate rispetto a σ; e per ripristinare in essa la generalità del parametro u, basterà: *dividere* θ_3 *per* a_1^3 *e ogni derivata di ordine* n *per* a_1^n, *ed inoltre « pensare » che la derivata stessa sia* (non più ordinaria rispetto a σ, ma) *covariante rispetto a* $d\sigma = a_1 du$.

21. Insieme con una curva v si possono considerare quante si vogliono curve o sviluppabili definite *intrinsecamente* e *proiettivamente*, immaginandole generate da punti o piani mobili (con P su v) e definiti in tal modo. Tali sono i vertici (le facce) di D, Δ, F e in generale tale è *ogni punto (piano) le cui coordinate siano combinazioni lineari di quelli dei vertici (delle facce) di* F *con coefficienti invarianti proiettivi qualunque* (n.° 10) (41).

In particolare, si può definire e studiare *la sviluppabile rettificante (polare) proiettiva* come inviluppo del primo rettificante π_τ (normale π_ν). Poi la sviluppabile generata da una normale proiettiva mobile (n.° 16), scelta con legge opportuna, e il cui spigolo di regresso si dirà *una evoluta proiettiva* di v; e si constata che la legge di scelta dipende da una *equazione di Riccati*, sicchè *nota una evoluta proiettiva tutte le altre si hanno con quadrature, e lungo* v *è costante il birapporto delle tangenti a quattro evolute;* e si constata inoltre che *ogni evoluta giace sulla sviluppabile polare.*

L'analogia di questi risultati con altri ben noti della geometria ordinaria è evidente; ma per brevità non insistiamo su di essi.

---

(39) Cfr. (23).

(40) Non così quando si adopera il Calcolo ordinario. È questo un altro (cfr. la fine del n.° 1) dei meriti del Calcolo assoluto.

(41) Non così semplice e immediata è la formazione di punti (piani) siffatti nelle precedenti trattazioni, citate in (2) e (3).