ZAMM 59, 373–379 (1979)

KARL REICHMANN

Ein hinreichendes Kriterium für die Durchführbarkeit des Intervall-Gauss-Algorithmus bei Intervall-Hessenberg-Matrizen ohne Pivotsuche

Es wird eine Klasse von Intervall-Hessenberg-Matrizen angegeben, bei der der Intervall-Gauss-Algorithmus ohne Pivotsuche durchführbar ist. Anschließend wird gezeigt, daß unter einigen schwachen Voraussetzungen an die Maschinenrundung diese Eigenschaft auch bei der Berechnung mit einem Komputer erhalten bleibt. Das Kriterium wird mit zwei bekannten Kriterien von Alefeld und Herzberger bzw. Barth und Nuding verglichen.

A class of interval-Hessenberg matrices is defined where the interval-Gaussian algorithm is feasible without pivoting. Subsequently it is demonstrated that under some weak assumptions on rounding this property is maintained when using a computer. The criterion is compared with two known criteria of Alefeld and Herzberger, Barth and Nuding, respectively.

Определяется класс интервал-матриц Гессенберга, для которого работает интервал-алгоритм Гаусса без пивотизации. Дальше, показывается, что при некоторых слабых предположениях об округулении это свойство сохраняется и при счете на ЭВМ. Критерий сравняется с двумя известными критериями Алефельда-Герцбергера и Барта-Нудинга.

1. Fragestellung

Es sei $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ eine reelle $n \times n$-Intervallmatrix (Definition in Abschnitt 2), deren Elemente $A \in [A]$ alle regulär seien, und $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ sei ein reeller $n \times 1$-Intervallvektor. Betrachten wir zunächst ein lineares Intervall-Gleichungssystem der Form:

$$[A] \cdot \{x\} = [b] .$$

Gesucht ist die Menge der Vektoren $\{x\} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\ A \in [A] \text{ und } b \in [b]\}$. Die Lösungsmenge $\{x\}$ kann nur für kleine Werte von n mit vertretbarem Aufwand explizit berechnet werden (s. OETTLI [8]).

Man begnügt sich damit, für sie einen Intervallvektor $[x]$ mit $[x] \supseteq \{x\}$ zu berechnen. Einen solchen liefert z. B. die intervallmäßige Durchführung des Gauss-Algorithmus. Beim Intervall-Gauss-Algorithmus (im folgenden mit I. G. A. abgekürzt) wird die Intervallmatrix [A] schrittweise auf eine obere Dreiecksmatrix transformiert. Dies gelingt nur dann, wenn in jedem Eliminationsschritt wenigstens ein Koeffizient der Restmatrix die Null nicht enthält, andernfalls bricht der Algorithmus ab. Um solche Koeffizienten zu finden, und davon einen ganz bestimmten, *Pivot* genannt, auszuwählen, sind bei Intervallmatrizen verschiedene Vorschriften bekannt (s. HEBGEN [4] und WONGWISES [10]).

Im Gegensatz zu reellen regulären Matrizen, bei denen der Gauss-Algorithmus bekanntlich immer durchführbar ist, ist bei Intervallmatrizen die zentrale Frage des Abbruchs bisher noch nicht geklärt.

Bei gerundeter Rechnung auf der UNIVAC 1108 mit 8-ziffriger Dezimalrechnung zeigt Wongwises [10] in vielen Beispielen, daß der I. G. A. bei regulärer Punktmatrix A i. a. für $n \geqq 35$ abbricht. In Anbetracht dieser Tatsachen treten nun zwei Fragen auf:

1. Gibt es wenigstens einige Klassen von Intervallmatrizen, bei denen ein Abbruch vermieden werden kann?
2. Unter welchen Voraussetzungen an die Maschinenarithmetik bleibt diese Eigenschaft auch bei gerundeter Rechnung erhalten?

In dieser Arbeit werden wir eine neue Klasse von Intervall-Hessenberg-Matrizen angeben, bei der der I. G. A. nicht abbricht und auch Frage 2 zufriedenstellend gelöst werden kann.

2. Bezeichnungen und Definitionen

Mit $[a] = [\underline{a}, \overline{a}] := \{a \in \mathbb{R}: \underline{a} \leqq a \leqq \overline{a}\}$, $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ ... seien reelle, abgeschlossene und beschränkte Intervalle bezeichnet, $I\langle \mathbb{R} \rangle$ sei die Menge der abgeschlossenen und beschränkten Intervalle über $\mathbb{R}$. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Intervallen ist im Sinne von MOORE [6] zu verstehen und wird mit $+, -, \cdot, /$ bezeichnet.

Seien $\underline{A}$, $\overline{A}$ zwei $n \times n$-Matrizen mit $\underline{A} \leqq \overline{A}$, d. h. $\underline{a}_{ij} \leqq \overline{a}_{ij}$, $i, j = 1(1)n$. Dann verstehen wir unter dem *Matrixintervall* $[A]$ die Menge der $n \times n$-Matrizen $[A] = [\underline{A}, \overline{A}] := \{A : \underline{A} \leqq A \leqq \overline{A}\}$. Eine *Intervallmatrix* dagegen betrachten wir als Element aus dem Produktraum $(I\langle \mathbb{R} \rangle)^{n^2}$. Wir können jede Intervallmatrix $[A]$ als Matrixintervall und umgekehrt auffassen. Im folgenden werden wir beide Begriffe nebeneinander benützen. In Anlehnung an RIS [9] definieren wir:

Definition 2.1:

a) $\operatorname{mag}[a] := \max\limits_{a \in [a]} |a| = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$ als *Betrag* von $[a]$,

b) $$\operatorname{mig}[a] := \min_{a \in [a]} |a| = \begin{cases} \underline{a} & \text{falls } \underline{a} > 0 \\ -\overline{a} & \text{falls } \overline{a} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als *Kleinheit* von $[a]$, oder *kleinster Abstand von* $[a]$ *zur Null*,

c) $\operatorname{sign}[a] := \begin{cases} +1 & \text{falls } \underline{a} > 0 \\ -1 & \text{falls } \overline{a} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

als *Vorzeichen* von $[a]$,

d) $\sigma[a] := \begin{cases} +1 & \text{falls } \underline{a} \geqq 0 \\ -1 & \text{falls } \overline{a} \leqq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

für $[a] \neq [0, 0]$ als *erweitertes Vorzeichen* von $[a]$.

Wenn wir mit einem Komputer arbeiten, steht uns nur eine endliche Menge von Gleitkommazahlen $M_L \subset \mathbb{R}$ zur Verfügung. Ein beliebiges $m \in M_L$ habe die Gestalt: $m := \pm\, 0.\, a_1 a_2 \dots a_L \cdot b^p$, dabei heißen $L \in \mathbb{N}$ die *Mantissenlänge*, $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die *Basis* (i. a. 2 oder 10), $a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ die *Mantissenziffern* und $p \in \mathbb{Z}$ der *Exponent* der Gleitkommazahl m. Der Exponent p soll im Folgenden keinen weiteren Beschränkungen unterliegen. Wir betrachten also weder Exponentenunter- noch Exponentenüberlauf. Um beliebige reelle Zahlen durch Maschinenzahlen zu approximieren, benötigen wir eine *Rundung*. Wir definieren (ALEFELD und HERZBERGER [1], KULISCH [5]):

Definition 2.2:

a) Eine Abbildung rd: $\begin{cases} \mathbb{R} \to M_L \\ x \mapsto \operatorname{rd}(x) \end{cases}$ heißt *Rundung*, wenn

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x \leqq y \Rightarrow \operatorname{rd}(x) \leqq \operatorname{rd}(y)\,,$$

b) eine Rundung heißt *optimal*, wenn

$$\forall\, x \in M_L : \operatorname{rd}(x) = x\,,$$

c) eine Rundung rd↓ heißt *nach unten gerichtet*, wenn

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \operatorname{rd}{\downarrow}(x) \leqq x\,,$$

eine Rundung rd↑ heißt *nach oben gerichtet*, wenn

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \operatorname{rd}{\uparrow}(x) \geqq x\,.$$

Bemerkung: Haben wir eine nach unten gerichtete Rundung rd↓, so erhalten wir durch die Definition $\operatorname{rd}{\uparrow}(x) := -\operatorname{rd}{\downarrow}(-x)$ eine nach oben gerichtete Rundung, vorausgesetzt die Maschinenzahlen liegen symmetrisch zur Null (s. [1] S. 48).

Mit nach unten und nach oben gerichteten Rundungen kommen wir auf natürliche Weise zu einer Maschinen-Intervall-Arithmetik.

Definition 2.3: $\mathbb{I}\langle M_L\rangle \subset \mathbb{I}\langle \mathbb{R}\rangle$ sei die Menge der abgeschlossenen und beschränkten Intervalle mit Eckpunkten aus M_L.

$$\tilde{+}, \simeq, \tilde{\cdot}, \tilde{/} : \begin{cases} \mathbb{I}\langle \mathbb{R}\rangle \times \mathbb{I}\langle \mathbb{R}\rangle \mapsto \mathbb{I}\langle M_L\rangle \\ ([a], [b]) \mapsto [a]\ \tilde{+}, \simeq, \tilde{\cdot}, \tilde{/}\ [b]\,, \end{cases}$$

wobei im Falle der Division $0 \notin [b]$ vorausgesetzt ist.

a) $[a] \tilde{+} [b] := [\operatorname{rd}{\downarrow}(\underline{a} + \underline{b}),\ \operatorname{rd}{\uparrow}(\overline{a} + \overline{b})]\,,$

b) $[a] \simeq [b] := [\operatorname{rd}{\downarrow}(\underline{a} - \overline{b}),\ \operatorname{rd}{\uparrow}(\overline{a} - \underline{b})]\,,$

c) $[a] \tilde{\cdot} [b] := [\operatorname{rd}{\downarrow}(\min\{\underline{a}\cdot\underline{b},\ \overline{a}\cdot\underline{b},\ \underline{a}\cdot\overline{b},\ \overline{a}\cdot\overline{b}\}),\ \operatorname{rd}{\uparrow}(\max\{\underline{a}\cdot\underline{b},\ \underline{a}\cdot\overline{b},\ \overline{a}\cdot\underline{b},\ \overline{a}\cdot\overline{b}\})]\,,$

d) $[a] \tilde{/} [b] := [\operatorname{rd}{\downarrow}(\min\{\underline{a}/\underline{b},\ \overline{a}/\underline{b},\ \underline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\overline{b}\}),\ \operatorname{rd}{\uparrow}(\max\{\underline{a}/\underline{b},\ \overline{a}/\underline{b},\ \underline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\overline{b}\})]\,.$

Eine so erzeugte Maschinen-Intervall-Arithmetik heißt *optimal*, wenn rd↑ und rd↑ optimal sind.

3. Die Kriterien von ALEFELD und HERZBERGER bzw. BARTH und NUDING

Satz 3.1: *Wenn* $[A]$ *eine streng diagonaldominante Intervallmatrix ist, dann ist der* I. G. A. *ohne Spalten- oder Zeilenvertauschungen durchführbar.*

Dabei heißt eine Intervallmatrix *streng diagonaldominant*, wenn:

$$\operatorname{mig}[a_{ii}] > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \operatorname{mag}[a_{ij}]\,, \quad i = 1(1)\,n\,.$$

Beweis: s. ALEFELD, HERZBERGER [1], S. 225–230.

Bemerkung: Die Frage, ob eine vorgegebene Intervallmatrix streng diagonaldominant ist, kann in n Abfragen überprüft werden. Dies ist natürlich für die praktische Anwendung des Kriteriums wichtig.

Satz 3.2: *Sei* $[A]$ *ein M-Matrixintervall* (Definition und Eigenschaften s. BARTH, NUDING [3]). *Für ein solches Matrixintervall ist der* I. G. A. *ohne Spalten- oder Zeilenvertauschungen durchführbar.*

Beweis: s. BARTH-NUDING [3].

Bemerkung: Es ist i. a. schwierig, für ein gegebenes Matrixintervall nachzuweisen, daß es ein M-Matrixintervall ist.

Anmerkung: Zwischen den in Satz 3.1 und Satz 3.2 angegebenen Klassen besteht ein enger Zusammenhang. In einer neueren Arbeit konnte ALEFELD [2] eine Obermenge von Intervallmatrizen angeben, für die der I. G. A. nicht abbricht und in der die obigen beiden Klassen enthalten sind.

Es tritt nun die Frage auf, ob der I. G. A. bei streng diagonaldominanten Intervallmatrizen oder M-Matrixintervallen rundungsfehlerstabil ist. Dazu wollen wir zunächst diesen Begriff präzisieren.

Definition 3.3: Gegeben seien eine Maschinen-Intervall-Arithmetik und eine Klasse von Intervallmatrizen, bei denen der I. G. A. theoretisch nicht abbricht. Wir nennen den I. G. A. *rundungsfehlerstabil*, wenn er für diese Klasse auch bei näherungsweiser Rechnung mit der Maschinen-Intervall-Arithmetik und bei gleicher Pivotwahl nicht abbricht.

Satz 3.4: *Der I. G. A. ist für M-Matrixintervalle und streng diagonaldominante Intervallmatrizen selbst bei optimaler Maschinen-Intervall-Arithmetik* nicht *rundungsfehlerstabil.*

Beweis: *ein Gegenbeispiel*, Dezimalsystem mit $L = 2$. Wir vereinbaren:

$$\begin{cases} \text{für } y = -0.a_1a_2a_3\ldots\cdot 10^p : \mathrm{rd}\uparrow(y) := -0.a_1a_2\cdot 10^p\,, \\ \text{für } y = 0.a_1a_2\ldots\cdot 10^p : \mathrm{rd}\uparrow(y) := \begin{cases} 0.a_1a_2\cdot 10^p, & \text{falls } a_3 = a_4 = \ldots = 0 \text{ ist} \\ (0.a_1a_2 + 0.01)\cdot 10^p\,, & \text{sonst} \end{cases} \\ \mathrm{rd}\downarrow(y) := -\mathrm{rd}\uparrow(-y) \text{ für alle } \forall\, y \in R\,. \end{cases}$$

Dies sind optimale Rundungen. Wir betrachten die Intervallmatrix

$$[A] := \begin{pmatrix} [\;0.14, & 0.20] & [-0.13, 0.00] & [-0.99\cdot 10^{-2}, 0.00] \\ [-0.13, & 0.00] & [\;0.14, 0.20] & [-0.99\cdot 10^{-2}, 0.00] \\ [-0.99\cdot 10^{-2}, & 0.00] & [-0.13, 0.00] & [\;0.14 \quad 0.20] \end{pmatrix}$$

$[A]$ ist M-Matrixintervall und eine streng diagonaldominante Intervallmatrix, d. h. die Voraussetzungen von Satz 3.1 und Satz 3.2 sind erfüllt.

Im Folgenden bezeichnen wir die durch den I. G. A. transformierten Koeffizienten mit $[a'_{ij}]$. Dann liefert der erste Eliminationsschritt mit obiger Rundung und dem Pivot $[a_{11}]$:

$$\begin{aligned} [a'_{22}] &= [0.14, 0.20] \simeq (([-0.13, 0.00] \tilde{\cdot} [-0.13, 0.00]) \,\tilde{/}\, [0.14, 0.20]) \\ &= [0.14, 0.20] \simeq ([0.00, 0.17\cdot 10^{-1}] \,\tilde{/}\, [0.14, 0.20]) \\ &= [0.14, 0.20] \simeq [0.00, 0.13] = [0.10\cdot 10^{-1}, 0.20]\,, \\ [a'_{23}] &= [-0.20\cdot 10^{-1}, 0.00], [a'_{32}] = [-0.14, 0.00]\,,\ [a'_{33}] = [0.13, 0.20]\,. \end{aligned}$$

Entsprechend gibt der zweite Eliminationsschritt (Pivot $[a'_{22}]$):

$$\begin{aligned} [a'_{33}] &= [0.13, 0.20] \simeq (([-0.14, 0.00] \tilde{\cdot} [-0.20\cdot 10^{-1}, 0.00]) \,\tilde{/}\, [0.10\cdot 10^{-1}, 0.20]) \\ &= [0.13, 0.20] \simeq ([0.00, 0.28\cdot 10^{-2}] \,\tilde{/}\, [0.10\cdot 10^{-1}, 0.00]) \\ &= [0.13, 0.20] \simeq [0.00, 0.28] = [-0.15, 0.20]\,. \end{aligned}$$

Da $0 \in [a'_{33}]$ bricht der I. G. A. ab.

4. Kriterium bei Intervall-Hessenberg-Matrizen

Eine Intervall-Hessenberg-Matrix hat die folgende Gestalt

$$[A] := \begin{vmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & [a_{13}] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & [a_{23}] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [a_{2n}] \\ 0 & [a_{32}] & [a_{33}] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [a_{3n}] \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & & & & 0 & [a_{n-1,n-2}] & [a_{n-1,n-1}] & & & [a_{n-1,n}] \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & [a_{n,n-1}] & & & [a_{nn}] \end{vmatrix}$$

Spezielle Hessenbergmatrizen sind *Intervall-Tridiagonalmatrizen*. Dies sind Intervall-Hessenberg-Matrizen, für die zusätzlich gilt:

$$[a_{ij}] = [0, 0]\,,\quad \text{für } j = i + 2(1)\,n \text{ und } i = 1(1)\,n-2\,.$$

Um eine Intervall-Hessenberg-Matrix auf eine obere Dreiecksmatrix zu transformieren, müssen die Intervalle $[a_{i,i-1}]$, $i = 2(1)n$ eliminiert werden. Dabei ändern sich im i-ten Schritt nur die Koeffizienten $[a_{ij}]$, $j = i(1)\,n$. Für die geänderten Koeffizienten $[a_{ij}]$, wir bezeichnen sie mit $[a'_{ij}]$, gelten die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} [a'_{1j}] &= [a_{1j}], j = 1(1)n\,, \\ [a'_{ij}] &= [a_{ij}] - [a_{i,i-1}]\cdot[a'_{i-1,j}] \,/\, [a'_{i-1,i-1}]\,,\ j = i(1)\,n, i = 2(1)\,n\,, \end{aligned}$$

dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß $0 \notin [a'_{ii}]$, $i = 1(1)\,n-1$.

Unser Kriterium setzt bestimmte Vorzeichenverteilungen der Intervall-Hessenberg-Matrix voraus. Wir wollen zunächst die wesentliche Idee an einem Beispiel verdeutlichen.

Es sei $[A] := \begin{pmatrix} [1,2] & [-1, -1/2] \\ [3,4] & [\ 1,\ 2\ ] \end{pmatrix}$.

Nach Elimination von $[a_{21}]$ erhält man:

$$[a'_{22}] = [1,2] - [3,4] \cdot [-1, -1/2] \,/\, [1,2] = [1,2] - [-4, -3/2] \,/\, [1,2] = [7/4, 6]\,.$$

Die Vorzeichenverteilung der Matrix $[A] = \begin{pmatrix} (+ & -) \\ (+ & +) \end{pmatrix}$ bewirkt, daß zu $[a_{22}]$ etwas mit demselben Vorzeichen wie $[a_{22}]$ addiert wird, $[a'_{22}]$ also sicher kein Nullintervall wird. Dieser Gedanke liegt dem folgenden Satz zugrunde.

Satz 4.1 (Kriterium): *Es sei $[A]$ eine Intervall-Hessenberg-Matrix mit $[a_{i+1,i}] \neq [0,0]$, $i = 1(1)\,n-1$ und* $\operatorname{sign}[a_{ii}] \neq 0$, $i = 1(1)\,n$. Der I. G. A. *ist ohne Spalten- oder Zeilenvertauschungen durchführbar, wenn die Koeffizienten der Matrix für jedes i und j ($1 \leqq i \leqq n-1$ und $i+2 \leqq j \leqq n$) je eine, und damit genau eine, der unter* (1) *und* (2) *genannten Bedingungen erfüllen.*

(1) I) $[a_{i,i+1}] = [0,0] \Rightarrow [a_{k,i+1}] = [0,0],\ k = i-1(-1)\,1$,

II) $[a_{i,i+1}] \neq [0,0] \Rightarrow \operatorname{sign}[a_{ii}] \cdot \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}] = -\sigma[a_{i+1,i}] \cdot \sigma[a_{i,i+1}]$,

(2) I) $[a_{i+1,j}] = [0,0] \Rightarrow [a_{k,i+1}] = [0,0],\ k = i(-1)\,1$,

II) $[a_{i+1,j}] \neq [0,0],\ [a_{ij}] = [0,0] \Rightarrow [a_{kj}] = [0,0],\ k = i-1(-1)\,1$,

III) $[a_{i+1,j}], [a_{ij}] \neq [0,0] \Rightarrow \operatorname{sign}[a_{ii}] \cdot \sigma[a_{i+1,j}] = -\sigma[a_{i+1,i}] \cdot \sigma[a_{ij}]$.

Beweis: Wir benötigen zunächst einen Hilfssatz:

Hilfssatz 4.2: *Es gelten die folgenden Implikationen*:

a) $\operatorname{sign}[a] = -\sigma[b] \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sign}([a] - [b]) = \operatorname{sign}[a]$,

b) $\sigma[a] = -\sigma[b] \neq 0 \Rightarrow \sigma([a] - [b]) = \sigma[a]$,

c) $\sigma[a] \cdot \sigma[b] \neq 0 \Rightarrow \sigma([a] \cdot [b]) = \sigma[a] \cdot \sigma[b]$,

d) $0 \notin [b],\ \sigma[a] \,/\, \operatorname{sign}[b] \neq 0 \Rightarrow \sigma([a] \,/\, [b]) = \sigma[a]/\operatorname{sign}[b]$.

Der *Beweis* dieses Hilfssatzes kann leicht durch Fallunterscheidungen erbracht werden und soll hier übergangen werden.

Der *Beweis von Satz* 4.1 erfolgt mit vollständiger Induktion. Wir zeigen:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \operatorname{sign}[a'_{ii}] = \operatorname{sign}[a_{ii}]\,. \\ 2.\ \text{a) wenn } [a_{ij}] = [0,0] \text{ für } i+1 \leqq j \leqq n \Rightarrow [a'_{ij}] = [0,0]; \\ \quad\ \text{b) wenn } [a_{ij}] \neq [0,0] \text{ für } i+1 \leqq j \leqq n \Rightarrow \sigma[a'_{ij}] = \sigma[a_{ij}] \end{array}\right\} i = 1(1)\,n$$

$i = 1$: $[a'_{1j}] = [a_{1j}],\ j = 1(1)\,n \Rightarrow$

1. $\operatorname{sign}[a'_{11}] = \operatorname{sign}[a_{11}]$.

2. a) wenn $[a_{1j}] = [0,0] \Rightarrow [a'_{1j}] = [0,0]$;

b) wenn $[a_{1j}] \neq [0,0] \Rightarrow \sigma[a'_{1j}] = \sigma[a_{1j}]$.

$i \to i+1$:

1. Fall 1: Es sei $[a_{i,i+1}] = [0,0]$

$\Rightarrow [a'_{i,i+1}] = [0,0]$ nach Induktionsvoraussetzung

$\Rightarrow [a'_{i+1,i+1}] = [a_{i+1,i+1}] - [0,0] \cdot [a_{i+1,i}] \,/\, [a'_{ii}] = [a_{i+1,i+1}]$

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a'_{i+1,i+1}] = \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}]$.

Fall 2: Es sei $[a_{i,i+1}] \neq [0,0]$

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a_{ii}] \cdot \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}] = -\sigma[a_{i,i+1}] \cdot \sigma[a_{i+1,i}]$

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a'_{ii}] \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}] = -\sigma[a'_{i,i+1}] \cdot \sigma[a_{i+1,i}]$

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}] = -\sigma([a'_{i,i+1}] \cdot [a_{i+1,i}] \,/\, [a'_{ii}])$

mit Hilfssatz 4.2

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a'_{i+1,i+1}] = \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}]$ mit Hilfssatz 4.2 a).

2. Fall 1: Es sei $[a_{i+1,j}] = [0,0]$,

$\Rightarrow [a_{ij}] = [0,0]$, Voraussetzung von Satz 4.1,

$\Rightarrow [a'_{ij}] = [0,0]$, nach Induktionsvoraussetzung,

$\Rightarrow [a'_{i+1,j}] = [a_{i+1,j}] - [0,0] = [a_{i+1,j}] = [0,0]$.

Fall 2: Es sei $[a_{i+1,j}] \neq [0,0]$ und $[a_{ij}] = [0,0]$,

$\Rightarrow [a'_{ij}] = [0,0]$, nach Induktionsvoraussetzung,

$\Rightarrow [a'_{i+1,j}] = [a_{i+1,j}] - [0,0] = [a_{i+1,j}]$,

$\Rightarrow \sigma[a'_{i+1,j}] = \sigma[a_{i+1,j}]$.

Fall 3: Es sei $[a_{i+1,j}]$ und $[a_{ij}] \neq [0, 0]$,

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a_{ii}] \cdot \sigma[a_{i+1,j}] = -\sigma[a_{i+1,i}] \cdot \sigma[a_{ij}]$ nach Voraussetzung,

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a'_{ii}] \cdot \sigma[a_{i+1,j}] = -\sigma[a_{i+1,i}] \cdot \sigma[a'_{ij}]$ Induktionsvoraussetzung,

$\Rightarrow \sigma[a_{i+1,j}] = -\sigma([a_{i+1,i}] \cdot [a'_{ij}] / [a'_{ii}])$ mit Hilfssatz 4.2,

$\Rightarrow \sigma[a'_{i+1,j}] = \sigma[a_{i+1,j}]$ mit Hilfssatz 4.2 a).

Bemerkung: Es läßt sich leicht überprüfen, ob eine vorgegebene Intervall-Hessenberg-Matrix die Bedingungen von Satz 4.1 erfüllt. Man sieht sofort, daß die folgenden 5×5-Matrizen den Voraussetzungen von Satz 4.1 genügen ($+ \triangleq \operatorname{sign}[a_{ii}] = \sigma[a_{ij}] = +1$, $- \triangleq \operatorname{sign}[a_{ii}] = \sigma[a_{ij}] = -1$):

$$\begin{pmatrix} + & + & + & + & + \\ - & + & + & + & + \\ 0 & - & + & + & + \\ 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - & - & - \\ - & + & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & - & 0 & + \\ + & + & + & 0 & - \\ 0 & + & - & 0 & + \\ 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ 0 & + & + & - & + \\ 0 & 0 & - & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix}.$$

Für Intervall-Tridiagonalmatrizen kann Satz 4.1 spezialisiert werden zu:

Korollar 4.3: *Es sei* $[A]$ *eine Intervall-Tridiagonalmatrix mit*

$$[a_{i+1,i}] \neq [0, 0]\; i = 1(1)\, n-1 \text{ und } \operatorname{sign}[a_{ii}] \neq 0,\; i = 1(1)\, n.$$

Wenn ihre Koeffizienten für jedes i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ *genau eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllen, dann ist der* I. G. A. *ohne Spalten- oder Zeilenvertauschungen durchführbar.*

I) $[a_{i,i+1}] = [0, 0]$;

II) $\operatorname{sign}[a_{ii}] \cdot \operatorname{sign}[a_{i+1,i+1}] = -\sigma[a_{i+1,i}] \cdot \sigma[a_{i,i+1}]$.

Beweis: Sonderfall von Satz 4.1. Man beachte: Eine der Bedingungen 2I) oder 2II) ist bei einer Intervall-Tridiagonalmatrix für $j \geqq i+2$ stets erfüllt.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} + & - & 0 & 0 & 0 \\ + & + & - & 0 & 0 \\ 0 & + & + & - & 0 \\ 0 & 0 & + & + & - \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & - & + & 0 & 0 \\ 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & + & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & + & + & 0 & 0 \\ 0 & + & - & - & 0 \\ 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & + & + & 0 & 0 \\ 0 & + & - & + & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Intervall-Tridiagonalmatrizen mit der gleichen Vorzeichenverteilung wie sie die oben stehende erste Matrix von links besitzt, werden von NICKEL [7, S. 25] untersucht. Auf die Frage der Durchführbarkeit des I. G. A. wird dort nicht explizit eingegangen.

Im Gegensatz zu streng diagonaldominanten Intervallmatrizen bzw. M-Matrixintervallen kann bei der in Satz 4.1 spezifizierten Klasse — unter einigen schwachen Voraussetzungen an die Maschinen-Intervall-Arithmetik — die Rundungsfehlerstabilität gewährleistet werden.

Wir betrachten im Folgenden gerichtete Rundungen $\mathrm{rd}\!\downarrow$ bzw. $\mathrm{rd}\!\uparrow$, die den folgenden sechs Bedingungen genügen:

(4.4.1) $\forall\; a, b \in M_L : a \cdot b \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\downarrow(a \cdot b) \geqq 0$,

(4.4.2) $\forall\; a, b \in M_L : a \cdot b \leqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\uparrow(a \cdot b) \leqq 0$,

(4.4.3) $\forall\; a, b \in M_L, b \neq 0 : a/b \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\downarrow(a/b) \geqq 0$,

(4.4.4.) $\forall\; a, b \in M_L, b \neq 0 : a/b \leqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\uparrow(a/b) \leqq 0$,

(4.4.5) $\forall\; a, b \in M_L : b \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\uparrow(a - b) \leqq a$,

(4.4.6) $\forall\; a, b \in M_L : b \leqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\downarrow(a - b) \geqq a$.

Wie man leicht sieht, erfüllen optimale gerichtete Rundungen die Bedingungen (4.4.1.) — (4.4 6).

Hilfssatz 4.5: *Wenn* $\mathrm{rd}\!\downarrow$ *und* $\mathrm{rd}\!\uparrow$ *die Bedingungen* (4.4.1) — (4.4.6) *erfüllen, dann gilt für alle* $[a] \in I\langle M_L\rangle$:

a) $[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [0, 0] = [0, 0]$,

b) $0 \notin [a] : [0, 0] \mathbin{\tilde{/}} [a] = [0, 0]$,

c) $[a] \mathbin{\tilde{-}} [0, 0] = [a]$.

Beweis: Wir zeigen nur a), die Aussagen b) und c) werden entsprechend bewiesen.

$$[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [0, 0] = [\mathrm{rd}\!\downarrow(\min\{\underline{a} \cdot 0, \bar{a} \cdot 0\}), \mathrm{rd}\!\uparrow(\max\{\underline{a} \cdot 0, \bar{a} \cdot 0\})]$$

$$\left.\begin{matrix} \underline{a} \cdot 0 \geqq 0 \\ \bar{a} \cdot 0 \geqq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \min\{\underline{a} \cdot 0, \bar{a} \cdot 0\} \geqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\!\downarrow(\min\{\underline{a} \cdot 0, \bar{a} \cdot 0\}) \geqq 0 \text{ nach (4.4.1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{a}\cdot 0 \leqq 0\\ \bar{a}\cdot 0 \leqq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \max\{\underline{a}\cdot 0, \bar{a}\cdot 0\} \leqq 0 \Rightarrow \mathrm{rd}\uparrow(\max\{\underline{a}\cdot 0, \bar{a}\cdot 0\}) \leqq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leqq \mathrm{rd}\downarrow(\min\{\underline{a}\cdot 0, \bar{a}\cdot 0\}) \leqq \mathrm{rd}\uparrow(\max\{\underline{a}\cdot 0, \bar{a}\cdot 0\}) \leqq 0 \text{ nach (4.4.2)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rd}\downarrow(\min\{\underline{a}\cdot 0, \bar{a}\cdot 0\}) = \mathrm{rd}\uparrow(\max\{\underline{a}\cdot 0, \bar{a}\cdot 0\}) = 0\,.$$

(Diese Eigenschaften werden auch von Kulisch [5] S. 382 bewiesen).

Hilfssatz 4.6: *Wenn* rd↓ *und* rd↑ *die Bedingungen* (4.4.1) — (4.4.6) *erfüllen, dann gilt für alle* $[a], [b] \in I\langle M_L\rangle$:

a) $\operatorname{sign}[a] = -\sigma[b] \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sign}([a] \simeq [b]) = \operatorname{sign}[a]$,

b) $\sigma[a] = -\sigma[b] \neq 0 \Rightarrow \sigma([a] \simeq [b]) = \sigma[a]$.

c) $\sigma[a]\cdot\sigma[b] \neq 0 \Rightarrow \sigma([a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b]) = \sigma[a]\cdot\sigma[b]$,

d) $0 \notin [b], \sigma[a] / \operatorname{sign}[b] \neq 0 \Rightarrow \sigma([a] \mathbin{\tilde{/}} [b]) = \sigma[a] / \operatorname{sign}[b]$.

Beweis: Wir zeigen wieder nur a). Aussagen b), c) und d) entsprechend.

Fall 1: $\operatorname{sign}[a] = -\sigma[b] = +1 \Rightarrow 0 < \underline{a} \leqq \bar{a}\,,\ \underline{b} \leqq \bar{b} \leqq 0$

$\Rightarrow \mathrm{rd}\downarrow(\underline{a} - \bar{b}) \geqq \underline{a} > 0$, wegen (4.4.6);

$\Rightarrow \operatorname{sign}([a] \simeq [b]) = +1 = \operatorname{sign}[a]$

Fall 2: $\operatorname{sign}[a] = -\sigma[b] = -1 \Rightarrow \underline{a} \leqq \bar{a} < 0\,,\ \bar{b} \geqq \underline{b} \geqq 0$

$\Rightarrow \mathrm{rd}\uparrow(\bar{a} - \underline{b}) \leqq \bar{a} < 0$, wegen (4.4.5)

$\Rightarrow \operatorname{sign}([a] \simeq [b]) = -1 = \operatorname{sign}[a]$.

Wir kommen nun zum angekündigten Satz über die Rundungsfehlerstabilität des I. G. A.

Satz 4.7: *Die Koeffizienten* $[a_{ij}]$ *der Intervall-Hessenberg-Matrix seien aus* $I\langle M_L\rangle$ *und mögen sämtliche Bedingungen von Satz* 4.1 *erfüllen. Für die gerichteten Rundungen* rd↓ *und rd*↑ *gelte* (4.4.1) — (4.4.6). *Dann ist der* I. G. A. *bei der von* rd↓ *und rd*↑ *gemäß* (2.3) *erzeugten Maschinen-Intervall-Arithmetik rundungsfehlerstabil.*

Beweis: Der Beweis verläuft wörtlich wie in Satz 4.1. Statt $-$, $\cdot$, $/$ ist dort überall $\simeq$, $\tilde{\cdot}$, $\tilde{/}$ zu setzen. Sämtliche zum Beweis benötigten Hilfsmittel sind in den Hilfssätzen (4.5) und (4.6) bereitgestellt.

Wie Korollar 4.3 folgt wieder:

Korollar 4.8: *Die Koeffizienten* $[a_{ij}]$ *der Intervall-Tridiagonalmatrix* $[A]$ *seien aus* $I\langle M_L\rangle$ *und mögen sämtliche Bedingungen von Korollar* 4.3 *erfüllen. Für die gerichteten Rundungen rd*↓ *und* rd↑ *gelte* (4.4.1) — (4.4.6). *Dann ist der* I. G. A. *bei der von* rd↓ *und* rd↑ *gemäß* (2.3) *erzeugten Maschinen-Intervall-Arithmetik rundungsfehlerstabil.*

Bemerkung: Es ist nun zu fragen, ob sich dieses Vorzeichenkriterium (Satz 4.1) auf vollbesetzte Matrizen ausdehnen läßt. Leider ist dies **nicht** möglich. Dies zeigt schon das folgende Beispiel einer vollbesetzten 3×3-Intervallmatrix:

$$\text{Es sei } [A] := \begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & [a_{13}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & [a_{23}] \\ [a_{31}] & [a_{32}] & [a_{33}] \end{pmatrix} \text{ alle } [a_{ij}] \neq 0\,,\ i, j = 1(1)\,3\,.$$

Wenn wir nun versuchen, die Vorzeichen der Koeffizienten $[a_{ij}]$ so festzulegen, daß zu einem Intervall $[a_{ij}] \geqq 0$ ein Intervall $\geqq 0$ addiert wird und umgekehrt, so kommen wir auf die folgenden fünf Bedingungen:

$$\operatorname{sign}[a_{11}]\cdot\operatorname{sign}[a_{22}] = -\sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{21}],$$
$$\operatorname{sign}[a_{11}]\cdot\operatorname{sign}[a_{33}] = -\sigma[a_{13}]\cdot\sigma[a_{31}]\,,$$
$$\operatorname{sign}[a_{11}]\cdot\sigma[a_{23}] = -\sigma[a_{13}]\cdot\sigma[a_{21}]\,,$$
$$\operatorname{sign}[a_{11}]\cdot\sigma[a_{32}] = -\sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{31}]\,,$$
$$\operatorname{sign}[a_{22}]\cdot\operatorname{sign}[a_{33}] = -\sigma[a_{23}]\cdot\sigma[a_{32}]\,.$$

Daraus folgt nun aber:

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}[a_{11}] &= -\sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{21}] / \operatorname{sign}[a_{22}]\\ &= \sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{21}]\cdot\operatorname{sign}[a_{33}] / \sigma[a_{23}]\cdot\sigma[a_{32}]\\ &= -\sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{21}]\cdot\sigma[a_{31}]\cdot\sigma[a_{13}] / \sigma[a_{23}]\cdot\sigma[a_{32}]\cdot\operatorname{sign}[a_{11}]\\ &= \sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{21}]\cdot\sigma[a_{31}]\cdot\sigma[a_{13}]\cdot\sigma[a_{32}] / \sigma[a_{23}]\cdot\sigma[a_{32}]\cdot\sigma[a_{12}]\cdot\sigma[a_{31}]\\ &= \sigma[a_{21}]\cdot\sigma[a_{13}] / \sigma[a_{23}] = -\operatorname{sign}[a_{11}]\end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{sign}[a_{11}] = 0$ Widerspruch!

Literatur

1 ALEFELD, G.; HERZBERGER, J., Einführung in die Intervallrechnung, Reihe Informatik/12, Bibliographisches Institut 1974.
2 ALEFELD, G., Über die Durchführbarkeit des Gaußschen Algorithmus bei Gleichungen mit Intervallen als Koeffizienten, Computing, Suppl. 1, 15–19 (1977).
3 BARTH, W.; NUDING, E., Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen, Computing **12**, 117–125 (1974).
4 HEBGEN, M., Eine scaling-invariante Pivotsuche für Intervallmatrizen, Computing **12**, 99–106 (1974).
5 KULISCH, U., Grundlagen des numerischen Rechnens, Reihe Informatik/19, Bibliographisches Institut (1976).
6 MOORE, R. E., Intervallanalyse, (deutsche Übersetzung von MOORE, Interval Analysis) R. Oldenburg Verlag, München, Wien 1969.
7 NICKEL, K., Die Überschätzung des Wertebereichs einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendung auf lineare Gleichungssysteme, Computing **18**, 15–36 (1977).
8 OETTLI, W., On the solution Set of a linear system with inaccurate coefficients, Siam J. Numer. Analysis **2**, 291–299 (1965)
9 RIS, F. N., Tools for the analysis of interval arithmetic, 'Interval Mathematics', ed. by K. NICKEL, Lecture Notes in Computer Science **29**, 75–98, Springer Verlag 1975.
10 WONGWISES, P., Experimentelle Untersuchungen zur numerischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen mit Fehlererfassung, Dissertation, Int. Ber. des Inst. für prakt. Math. 75/1 Universität Karlsruhe 1975.

Eingereicht: 20. 12. 1977, revidierte Fassung: 19. 6. 1978

Anschrift: KARL REICHMANN, Universität Freiburg, Institut für Angewandte Mathematik, D-78 Freiburg, Hermann-Herder-Str. 10, BRD