Omomorfismi fra grafi e grafi moltiplicativi.

di Francesco Speranza

Alla memoria di Guido Castelnuovo, nel primo centenario della nascita.

Sunto. - *Si studiano vari tipi di omomorfismi fra grafi aventi un arbitrario numero di vertici per ciascun elemento: si studiano poi le relazioni fra gli omomorfismi d'un grafo moltiplicativo in un altro e quelli fra i grafi soggiacenti.*

1. - Studieremo qui le relazioni intercorrenti fra le nozioni di omomorfismo d'un grafo orientato in un altro e di omomorfismo di un grafo moltiplicativo in un altro. Solitamente un omomorfismo fra grafi viene definito come un'opportuna applicazione dell'insieme dei vertici del primo nell'insieme dei vertici del secondo: per meglio collegarci alla nozione di omomorfismo fra grafi moltiplicativi, ci riferiremo qui agli *omomorfismi generalizzati* che sono applicazioni di tutto un grafo in un altro (precisando le relazioni con gli omomorfismi nel senso solito). Anzi, definiremo e studieremo gli omomorfismi relativi ai grafi con un numero qualsiasi di vertici per ciascun simplesso (n. 2). Passeremo poi a considerare (n. 3) la struttura algebrica di grafo moltiplicativo (a ciascuno dei quali *soggiace* un grafo orientato di tipo solito), ed osserveremo come, dato un grafo orientato G, fra tutti i grafi moltiplicativi cui esso soggiace si possa stabilire una relazione d'ordine parziale, che ammette sempre un elemento minimo $G^\flat$ e, sotto certe ipotesi (verificate, fra l'altro, dai grafi semplici), un elemento massimo $G\#$. Nel n. 4, infine, dopo aver osservato che un omomorfismo fra grafi moltiplicativi non dà necessariamente luogo ad un omomorfismo generalizzato fra i grafi soggiacenti, e viceversa, proveremo che ciò accade se e solo se l'omomorfismo è un neofuntore. Inoltre, dato un grafo moltiplicativo, un omomorfismo generalizzato del grafo soggiacente in un altro (per il quale sia definito $G\#$) definisce canonicamente in questo una struttura algebrica di grafo moltiplicativo. In ogni caso, poi, un omomorfismo generalizzato d'un grafo orientato G in un altro $\widehat{G}$ definisce un neofuntore di $G^\flat$ in $\widehat{G}^\flat$, e, se $G\#$ e $\widehat{G}\#$ esistono, e la suriezione che lo definisce è biiettiva, un neofuntore di $G\#$ in $\widehat{G}\#$.

Nel seguito, diremo *grafo* un grafo orientato e *singramma* un grafo non orientato. Lo pseudoprodotto di due suriezioni a, b prese in tale ordine s'indicherà con ba ([5], p. 22), e la restrizione d'una applicazione $f: U_f \to U'_f$, ad un sottoinsieme A di U_f, con f_A.

2. - Siano $i, j, \ldots$ degli indici variabili in un insieme J.

DEF. 2.1. - Si dirà *insieme di retrazioni su A* un insieme di suriezioni K^i d'una classe A su una sua sottoclasse tali che

$$K^i(A) = K^j(A) \quad (\forall (i, j) \in J \times J),$$

e $K^i_{K^i(A)}$ sia l'applicazione identica.

TEOR. 2.1. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme $\{K^i\}$ di suriezioni definite su una classe A sia un insieme di retrazioni è che sia*

$$K^i K^j = K^j \qquad (\forall (i, j) \in J \times J)$$

Infatti, se $\{K^i\}$ è un insieme di retrazioni,

$$K^j(x) \in K^j(A) = K^i(A) \quad \text{e} \quad K^i K^j(x) = K^j(x) \qquad (\forall x \in A)$$

Viceversa, se vale quest'ultima, $\forall y \in K^j(A)$ consideriamo un x tale che $y = K^j(x)$; allora

$$K^i(y) = K^i K^j(x) = K^j(x) = y.$$

Perciò $y \in K^i(A)$, e $K^j(A) \subseteq K^i(A)$. Scambiando i con j, si conclude che

$$K^j(A) = K^i(A):$$

la restrizione $K^i_{K^i(A)}$ è poi identica.

DEF. 2.2. - Diremo *grafo* $[G, \alpha^i]$ una classe G dotata d'un insieme $\{\alpha^i\}$ di retrazioni.

Gli elementi di $G_0 = \alpha^i(G)$ si diranno i *vertici* di G, i rimanenti simplessi (o spigoli, se $J = \{1, 2\}$); gli $\alpha^i(f)$ si diranno vertici (o estremi) di f. Due grafi per i quali i relativi insiemi J abbiano la medesima potenza si diranno del *medesimo tipo*. I grafi orientati ordinari (multigrafi secondo BERGE [1]) si hanno allorchè J è costituito di due elementi (cfr. in particolar modo [6] e [7]).

La struttura di grafo è ovviamente una struttura matematica, nel senso di [2]. Gli insiemi privilegiati sono $(f, \alpha^i(f))$, per ogni $f \in G$. Ogni insieme può essere dotato della struttura di grafo.

DEF. 2.3. - Due grafi del medesimo tipo e sulla medesima classe, $[G, \alpha^i]$ e $[G, \widehat{\alpha}^i]$ si diranno *equivalenti a meno delle orientazioni*, se, $\forall f \in G$, esiste una biiezione z_f di J in sè tale che

$$\alpha^i(f) = \alpha^{z_f(i)}(f)$$

Fissato G ed il tipo del grafo, la relazione così definita è una relazione d'equivalenza; le sue classi d'equivalenza si diranno grafi non orientati, o *singrammi*, e s'indicheranno con (G, α^i). Si diranno elementi (o, in particolare, vertici o simplessi) del singramma gli elementi (rispettivamente i vertici o i simplessi) dei grafi ad esso relativi.

Quando non v'è luogo a confusione, il grafo $[G, \alpha^i]$ s'indicherà con G, ed il singramma (G, α^i) con (G).

DEF. 2.4. - *Grafo subordinato* al grafo $[G, \alpha^i]$ è un grafo del medesimo tipo $[G', \alpha'^i]$, tale che $G' \subseteq G$, $\alpha'^i = \alpha^i{}_{G'}$; allora si ha pure $\alpha^i(G') \subseteq G'$.

Si dirá poi che il singramma (G', α'^i) è subordinato a (G, α^i) allorchè uno dei suoi grafi è subordinato ad uno dei grafi di (G, α^i).

DEF. 2.5. - Diremo *omomorfismo generalizzato* d'un grafo $[G, \alpha^i]$ in un grafo del medesimo tipo $[\widehat{G}, \widehat{\alpha}^i]$ un insieme $\Psi = (\widehat{G}, \underline{\Psi}, G)$, dove $\underline{\Psi}$ è una suriezione di G su una sottoclasse di $\widehat{G}$ tale che

$$\underline{\Psi}\alpha^i = \widehat{\alpha}^i\underline{\Psi}.$$

Si dirà che $\underline{\Psi}$ definisce Ψ. Per semplicità, $\underline{\Psi}(x)$ si scriverà anche $\Psi(x)$ e si dirà immagine di x in Ψ. Per i grafi ordinari, cfr. [5], p. 235, e [6], p. 148.

Diremo *omomorfismo generalizzato* d'un singramma (G, α^i) in un altro del medesimo tipo un insieme $((\widehat{G}), \underline{\Psi}, (G))$, dove $\underline{\Psi}$ è una suriezione di G su $\underline{\Psi}(G) \subseteq \widehat{G}$ che definisce un omomorfismo generalizzato d'uno dei grafi del primo in uno di quelli del secondo; vale a dire, $\forall f \in G$, esiste una biiezione $z_f(i)$ tale che

$$\underline{\Psi}(\alpha^i(f)) = \widehat{\alpha}^{z_f(i)}(\underline{\Psi}(f))$$

Le proposizioni del presente numero valgono tanto per i grafi che per i singrammi (si osservi che un omomorfismo generalizzato d'un grafo in un altro induce in modo naturale un omomorfismo generalizzato fra i relativi singrammi): noi daremo gli enunciati e le dimostrazioni per i primi (essi si trasportano, con lievi modificazioni, ai secondi).

TEOR. 2.2. - *In un omomorfismo generalizzato* (di G in $\widehat{G}$) *le immagini dei vertici sono vertici.* $\underline{\Psi}(G)$ *è un grafo subordinato a* $\widehat{G}$.
Infatti

$$\underline{\Psi}(G_0) = \underline{\Psi}(\alpha^i(G)) = \widehat{\alpha}^i(\underline{\Psi}(G)) \subseteq \widehat{G}_0.$$

I vertici di $\underline{\Psi}(f)(\forall f \in G)$ sono anch'essi contenuti in $\underline{\Psi}(G)$, quindi $\{\widehat{\alpha}^i_{\underline{\Psi}(G)}\}$ è un insieme di retrazioni su $\underline{\Psi}(G)$.

TEOR. 2.3. - *Se, in un omomorfismo generalizzato, un vertice* $\widehat{e} \in \widehat{G}$ *è immagine d'un simplesso* $f \in G$, *esso è immagine anche dei vertici di* f. *Ogni vertice di* $\underline{\Psi}(G)$ *è immagine d'un vertice almeno di* G.

Se

$$\widehat{e} = \widehat{\alpha}^i(g) = \Psi(f),$$

si ha

$$\Psi(\alpha^j(f)) = \widehat{\alpha}^j(\Psi(f)) = \widehat{\alpha}^j(\widehat{\alpha}^i(g)) = \widehat{\alpha}^i(g) = \widehat{e},$$

(cfr. teor. 2.1), il che prova l'asserto.

TEOR. 2.4. – *In un omomorfismo generalizzato* Ψ, *la controimmagine d'un vertice di* $\underline{\Psi}(G)$ *è un grafo subordinato a* G.

Infatti, considerato un $\widehat{e} \in \Psi(G_0)$, per ogni f tale che $\Psi(f) = \widehat{e}$, anche $\Psi(\alpha^i(f)) = \widehat{e}$ (teor. 2.3). Ciò prova che $\{ \alpha^i{}_{\Psi^{-1}(\hat{e})} \}$ è un insieme di retrazioni su $\Psi^{-1}(\widehat{e})$: per $\alpha'^i = \alpha^i_{\Psi^{-1}(\hat{e})}$, le condizioni della def. 2.4 sono verificate.

TEOR. 2.5. – *In un insieme* M *di grafi del medesimo tipo, la relazione «esiste un omomorfismo generalizzato di* G *su* $\widehat{G}$*» è una relazione di preordine* (la locuzione «*su*» sta ad indicare che $\underline{\Psi}(G) = \widehat{G}$).

La relazione è riflessiva, in quanto l'applicazione identica definisce un omomorfismo generalizzato di un grafo su se stesso. Inoltre, essa è transitiva, poichè, dati due omomorfismi generalizzati, Ψ di G su $\widehat{G}$ e Φ di $\widehat{G}$ su $\widetilde{G}$ abbiamo:

$$\underline{\Psi}\alpha^i = \widehat{\alpha}^i\underline{\Psi}, \ \underline{\Phi}\widehat{\alpha}^i = \widetilde{\alpha}^i\underline{\Phi},$$

e queste si possono scrivere

$$\underline{\Psi}_{G_0} \circ \alpha^i = \widehat{\alpha}^i \circ \underline{\Psi}, \ \underline{\Phi}_{\widehat{G}_0} \circ \widehat{\alpha}^i = \widetilde{\alpha}^i \circ \underline{\Phi},$$

da cui

$$(\underline{\Phi\Psi})\alpha^i = (\underline{\Phi} \circ \underline{\Psi})_{G_0} \circ \alpha^i = \underline{\Phi}_{\widehat{G}_0} \circ \underline{\Psi}_{G_0} \circ \alpha^i = \underline{\Phi}_{\widehat{G}_0} \circ \widehat{\alpha}^i \circ \underline{\Psi} = \widetilde{\alpha}^i \circ \underline{\Phi} \circ \underline{\Psi} = \widetilde{\alpha}^i(\underline{\Phi\Psi}).$$

TEOR. 2.6. – *Ogni omomorfismo generalizzato biiettivo è un isomorfismo della struttura di grafo.*

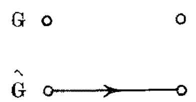
Un omomorfismo generalizzato biiettivo di G su $\widehat{G}$ fa corrispondere ad ogni vertice di $G(\widehat{G})$ un vertice di $\widehat{G}(G)$ (teor. 2.2). Ad un simplesso corrisponde quindi un simplesso, ed ai vertici di questo i vertici del corrispondente. Abbiamo quindi un isomorfismo della struttura matematica di grafo.

DEF. 2.6. – Diremo *omomorfismo di* ORE d'un grafo G in un grafo $\widehat{G}$ un'applicazione φ di G_0 in $\widehat{G}_0$ tale che, per ogni applicazione q di J in G_0 per la quale esista un $f \in G$ con $\alpha^i(f) = q(i)$, esista un $\widehat{f} \in \widehat{G}$ con $\widehat{\alpha}^i(\widehat{f}) = \varphi(q(i))$ (cioè, se gli elementi d'un sottoinsieme di G_0 sono vertici d'un elemento di G, le loro immagini in φ sono ordinatamente i vertici d'un elemento di $\widehat{G}$).

Diremo *omomorfismo forte* un omomorfismo di ORE φ tale che, per ogni applicazione $\widehat{q}$ di J in $\varphi(G_0)$ per la quale esista un $\widehat{f}$ con $\widehat{\alpha}^i(\widehat{f}) = \widehat{q}(i)$, si possa trovare almeno un $f \in G$ con $\varphi(\alpha^i(f)) = \widehat{q}(i)$ (cioè, se gli elementi $\widehat{e}^i$ d'un sottoinsieme di $\varphi(G_0)$ sono i vertici d'un elemento, v'è un elemento di G i cui vertici hanno per corrispondenti, ordinatamente, gli $\widehat{e^i}$).

Definizioni analoghe (cfr. def. 2.5) si possono dare per i singrammi (per quelli ordinari — $J = \{1,2\}$ — cfr. [9], pp. 83 e 149).

ESEMPI - 1) La proiezione verticale dei vertici del primo grafo ordinario rappresentato qui sotto su quelli del secondo è un omomorfismo di ORE, non forte.



2) Un omomorfismo secondo DIRAC d'un singramma ordinario G su un altro $\widehat{G}$ ([3], [8]) si può caratterizzare come un omomorfismo forte connesso ([9], p. 85).

DEF. 2.7. - Diremo *semplice* un grafo tale che l'applicazione $\alpha : G \to G_0^J$ definita da

$$\alpha(f) = (\alpha^i(f))$$

sia iniettiva (vale a dire, ogni elemento è completamente individuato dai suoi vertici). Un singramma si dirà semplice se i relativi grafi sono tutti semplici.

Se un grafo è semplice, non si può affermare che lo sia il relativo singramma: perchè ciò accada, occorre che non esistano coppie di elementi a, b con

$$\alpha^i(a) = \alpha^{z(i)}(b),$$

essendo $z : J \to J$ una biiezione. Per i singrammi ordinari, cfr. [4], [8].

TEOR. 2.7. - *Se* $(\widehat{G}, \underline{\Psi}, G)$ *è un omomorfismo generalizzato,* $\underline{\Psi}_{G_0}$ *è un omomorfismo di* ORE. *Dato un omomorfismo di* ORE φ *del grafo* G *nel grafo semplice* $\widehat{G}$, *esiste uno ed un solo omomorfismo generalizzato* Ψ *di* G *in* $\widehat{G}$ *tale che* $\varphi = \underline{\Psi}_{G_0}$.

1) Se gli e^i sono ordinatamente i vertici di f, abbiamo

$$\Psi(e^i) = \Psi(a^i(f)) = \widehat{\alpha}^i(\Psi(f)),$$

cioè gli $\Psi(e^i)$ sono i vertici di $\Psi(f) : \underline{\Psi}_{G_0}$ è un omomorfismo di ORE.

2) Viceversa, dato un omomorfismo di ORE φ, per ogni f con $e^i = \alpha^i(f)$ v'è un $\widehat{f}$ tale che $\widehat{\alpha}^i(\widehat{f}) = \varphi(e^i)$; esso è unico, essendo $\widehat{G}$ semplice. Se $(\widehat{G}, \underline{\Psi}, G)$ è un omomorfismo generalizzato per cui $\underline{\Psi}_{G_0} = \varphi$, dev'essere

$$\Psi(x) = \varphi(x)\ (\forall\, x \in G_0), \quad \Psi(x) = \widehat{x}\ (\forall\, x \in G - G_0).$$

Viceversa, se queste sono verificate abbiamo:

$$\underline{\Psi}(\alpha^i(f)) = \varphi(e^i) = \widehat{\alpha^i}(\underline{\Psi}(f)),$$

vale a dire, $\underline{\Psi}$ definisce un omomorfismo generalizzato la cui restrizione a G_0 è φ.

TEOR. 2.8. - *Se* $\underline{\Psi}$ *è un omomorfismo generalizzato di* G *su* $\widehat{G}$ (vale a dire, se $\underline{\Psi}(G) = \widehat{G}$), *la sua restrizione a* G_0 *è un omomorfismo forte.*

Infatti, considerati degli elementi $\widehat{e^i} \in \widehat{G}_0$ tali che $\widehat{e^i} = \widehat{\alpha^i}(\widehat{f})$, v'è almeno un $f \in G$ con

$$\underline{\Psi}(f) = \widehat{f}.$$

Inoltre,

$$\underline{\Psi}(\alpha^i(f)) = \widehat{\alpha^i}(\underline{\Psi}(f)) = \widehat{e^i},$$

e $\varphi = \underline{\Psi}_{G_0}$ è forte. Si osservi che, invece, un omomorfismo di ORE suriettivo non è necessariamente forte.

ESEMPI - 1) In un piano proiettivo reale sia data una conica C non degenere e dotata di punti reali. Si ottiene una struttura di singramma ordinario nella regione R_C non interna a C associando a ciascun punto di essa i suoi tangenziali su C. Il singramma è semplice, e due vertici sono sempre adiacenti. Dato un singramma analogo $R_{C'}$, un omomorfismo di ORE è una qualunque applicazione φ di C in C', ed esso risulta sempre un omomorfismo secondo DIRAC. φ individua sempre un omomorfismo generalizzato di R_C in $R_{C'}$: esso è definito dalla mappa ψ tale che $\psi(x) = \varphi(x)$ per $x \in C$, mentre, se $x \notin C$, $\psi(x)$ è l'intersezione delle tangenti a C' nei punti corrispondenti (in φ) ai tangenziali di x.

2) Sia S uno spazio lineare su un campo γ [10], e sia S' la classe delle sue rette e dei suoi punti. Associando ad ogni punto di S' sè stesso, e ad ogni retta i suoi punti, si dota S' della struttura di grafo (J è dato da γ completato con l'elemento ∞). Una collineazione fra due spazi lineari [10] definisce un isomorfismo dei grafi relativi.

3. Le leggi di composizione che qui consideriamo non sono necessariamente ovunque definite. Se una di esse è simboleggiata da $\circ$, il prodotto di due elementi a, b (nell'ordine) si indicherà con $b \circ a$.

DEF. 3.1. - Un grafo moltiplicativo ([5], [6]) è un insieme G dotato d'una legge di composizione, tale che ogni $a \in G$ ammetta un solo elemento neutro destro (sinistro) $\alpha(a)$ ($\beta(a)$), in modo che

1) $a \circ \alpha(a)$, $\beta(a) \circ a$ sono definiti (se e è elemento neutro, ed $f \circ e$ ($e \circ g$) è definito, esso vale $f(g)$).

2) Se $b \circ a$ è definito, $\alpha(b) = \beta(a)$, $\alpha(b \circ a) = \alpha(a)$, $\beta(b \circ a) = \beta(b)$.

Il grafo moltiplicativo s'indicherà con $[G^\circ, \alpha, \beta]$, o semplicemente con G°, se non v'è pericolo di confusione. $[G, \alpha, \beta]$ è un grafo (orientato), che si dice soggiacente a G° ([6], prop. 2). D'ora in poi, per grafo s'intenderà un grafo con $J = \{1, 2\}$.

Dato un grafo G, ogni grafo moltiplicativo cui G è soggiacente si dirà *compatibile con* G. Scriveremo G_0° in luogo di $\alpha(G) = \beta(G)$.

TEOR. 3.1. - *Nell'insieme dei grafi moltiplicativi compatibili con un dato grafo* G, *la relazione così definita*:

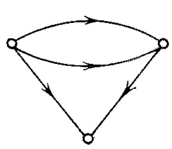
« $G^\circ \leq G^\cdot$ *significa che, quando* $b \circ a$ *è definito, lo è pure* $b \cdot a$, *e* $b \circ a = b \cdot a$ »
è una relazione d'ordine parziale.

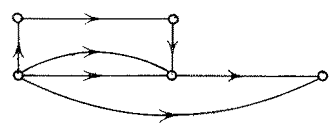
Si verifica infatti facilmente che la relazione è transitiva, che $G^\circ \leq G^\circ (\forall G^\circ)$ e che se $G^\circ \leq G^\cdot$, $G^\cdot \leq G^\circ$, allora $G^\cdot = G^\circ$.

Ci proponiamo di studiare i grafi per i quali la relazione $\leq$ ammette massimo. A questo scopo, consideriamo anzitutto la pseudodistanza di due vertici e, e' del grafo: essa è il minimo numero $d(e, e')$ di spigoli che può avere un arco orientato di estremi e, e' ($d(e, e')$ non è definita, se e' non è accessibile da e; per i singrammi, cfr. [9], [11]).

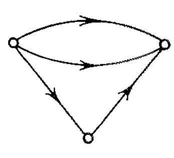
DEF. 3.2. - Diciamo *quasi semplice* un grafo privo di cappi tale che, per ogni insieme $\{a_k\}$ di spigoli a vertici coincidenti, nel grafo $G - \{a_k\}$ subordinato a G non si abbia $d(\alpha^1(a_k), \alpha^2(a_k)) = 2$.

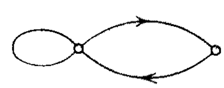
In altri termini, se si toglie un insieme di spigoli ad estremi coincidenti, non dev'essere possibile andare dal primo al secondo estremo di questi con due soli spigoli. Ogni grafo semplice è ovviamente quasi semplice. I grafi illustrati qui sotto sono quasi semplici





mentre questi altri non lo sono





Ogni grafo subordinato ad un grafo quasi semplice è quasi semplice.

TEOR. 3.2. - *La relazione* $\leq$ *ammette sempre un elemento minimo* $G^{\flat}$; *se* G *è quasi semplice, esiste pure un elemento massimo* $G^{\sharp}$.

In ogni grafo moltiplicativo compatibile con G i vertici debbono comportarsi da elementi neutri; quello dotato della legge di composizione (definita in [6], p. 4):

«$\forall e \in G_0$, $e \flat e = e$; $\forall f \in G - G_0$, $f \flat \alpha^1(f) = f = \alpha^2(f) \flat f$; in tutti gli altri casi il prodotto non è definito»

precede necessariamente tutti i grafi moltiplicativi compatibili con G.

Dato un grafo quasi semplice G, consideriamo la legge di composizione così definita:

«$b \# a$ è definito solo se esiste un c con $\alpha^1(b) = \alpha^2(a)$, $\alpha^1(c) = \alpha^1(a)$, $\alpha^2(c) = \alpha^2(b)$. Si pone allora $b \# a = c$ [se $a \in G_0 (b \in G_0)$, come c si sceglie $b(a)$]» (si osservi che, per le ipotesi fatte su G, non possono esistere due elementi c soddisfacenti alle condizioni poste).

Ovviamente, $G\#$ è un grafo moltiplicativo cui soggiace G; inoltre, se in un grafo moltiplicativo compatibile con G esiste il prodotto $b \circ a$, esso coincide con $b \# a$. Dunque $G\#$ è massimo per la relazione $\leq$.

4. - Def. 4.1. - Siano G°, $\widehat{G}^{\cdot}$ due grafi moltiplicativi; *un omomorfismo* di G° in $\widehat{G}^{\cdot}$ è l'insieme $\Phi = (\widehat{G}^{\cdot}, \underline{\Phi}, G^\circ)$ dove $\underline{\Phi}$ è una suriezione di G su una sottoclasse di $\widehat{G}$ tale che, se $b \circ a$ è definito, lo è pure $\underline{\Phi}(b) \cdot \underline{\Phi}(a)$ e

$$\underline{\Phi}(b) \cdot \underline{\Phi}(a) = \underline{\Phi}(b \circ a) \qquad \text{([6], def. 2.2).}$$

Un *neofuntore* di G° in $\widehat{G}^{\cdot}$ è un omomorfismo di G° in $\widehat{G}^{\cdot}$ tale che $\underline{\Phi}(G^\circ_0) \subseteq \widehat{G}^{\cdot}_0$ ([6], def. 2.3: in [5] i neofuntori sono detti omomorfismi).

Si dice che $\underline{\Phi}$ definisce l'omomorfismo Φ, e si scrive anche $\Phi(x)$ in luogo di $\underline{\Phi}(x)$.

Studiamo ora sotto quali condizioni, dato un omomorfismo Φ fra grafi moltiplicativi, $\underline{\Phi}$ definisce un omomorfismo generalizzato Ψ fra i grafi soggiacenti (diremo che Φ definisce Ψ); e, viceversa, quando, dato un omomorfismo generalizzato Ψ d'un grafo in un altro, $\underline{\Psi}$ definisce un omomorfismo Φ fra grafi moltiplicativi con essi compatibili (ciò dipende non solo dai grafi ma anche dalle relative leggi di composizione: diremo ancora che Ψ definisce Φ).

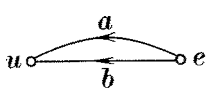
Teor. 4.1. - *Vi sono omomorfismi fra grafi moltiplicativi che non definiscono omomorfismi generalizzati fra i grafi soggiacenti.* Viceversa, *un omomorfismo generalizzato fra i grafi soggiacenti non definisce sempre un omomorfismo fra due grafi moltiplicativi.*

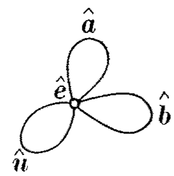
1) Si considerino i grafi moltiplicativi definiti dalle tabelle seguenti:

	a	b	u	e
a				a
b				b
u	a	b	u	
e				e

	$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{u}$	$\widehat{e}$
$\widehat{a}$			$\widehat{b}$	$\widehat{a}$
$\widehat{b}$				$\widehat{b}$
$\widehat{u}$	$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{u}$	$\widehat{u}$
$\widehat{e}$	$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{u}$	$\widehat{e}$

(se nell'orizzontale di y e nella verticale di x è scritto z, va letto $y \circ x = z$). Ad essi soggiacciono i grafi





Posto

$$\varphi(x) = \widehat{x} \; (x = a, \; b, \; u, \; e)$$

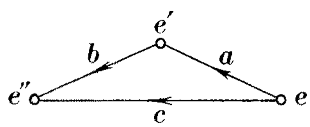
$(\widehat{G}^{\cdot}, \; \varphi, \; G^{\circ})$ è un omomorfismo, ma $(\widehat{G}, \; \varphi, \; G)$ non è un omomorfismo generalizzato (infatti $\varphi(u)$ non è un vertice, mentre u lo è).

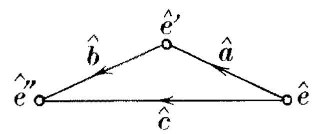
2) Si considerino i grafi moltiplicativi definiti dalle tabelle seguenti:

	a	b	c	e	e'	e''
a				a		
b	c				b	
c				c		
e				e		
e'	a				e'	
e''		b	c			e''

	$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{c}$	$\widehat{e}$	$\widehat{e'}$	$\widehat{e''}$
$\widehat{a}$				$\widehat{a}$		
$\widehat{b}$					$\widehat{b}$	
$\widehat{c}$				$\widehat{c}$		
$\widehat{e}$				$\widehat{e}$		
$\widehat{e'}$	$\widehat{a}$				$\widehat{e'}$	
$\widehat{e''}$		$\widehat{b}$	$\widehat{c}$			$\widehat{e''}$

cui soggiacciono i grafi





Posto

$$\varphi(x) = \widehat{x}\,(x = a,\ b,\ c,\ e,\ e',\ e'')$$

$(\widehat{G}, \varphi, G)$ è un isomorfismo fra i grafi soggiacenti, ma $(\widehat{G}^{\cdot}, \varphi, G^{\circ})$ non è un omomorfismo; infatti $b \circ a$ è definito, ma non lo è $\widehat{b} \cdot \widehat{a}$.

TEOR. 4.2. - *Dati due grafi moltiplicativi G°, $\widehat{G}^{\cdot}$ ed un omomorfismo Φ di G° in $\widehat{G}^{\cdot}$, condizione necessaria e sufficiente affinchè Φ definisca un omomorfismo generalizzato di G in $\widehat{G}$ è che esso sia un neofuntore.*

Se $(\widehat{G}, \underline{\Phi}, G)$ è un omomorfismo generalizzato di G in $\widehat{G}$, allora dev'essere $\Phi(G_0) \subseteq \widehat{G}_0$ (teor. 2.2), e quindi Φ è un neofuntore.
Viceversa, se Φ è un neofuntore, allora

$$\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f)),\ \beta(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$$

([6], prop. 15), e quindi definisce un omomorfismo generalizzato di G in $\widehat{G}$.

COR. - *Un isomorfismo d'un grafo moltiplicativo su un altro definisce un isomorfismo fra i grafi soggiacenti.*

Infatti un isomorfismo fra due grafi moltiplicativi è un neofuntore ([6], prop. 19, cor.): basta quindi applicare la proprietà or ora dimostrata.

TEOR. 4.3. - *Ogni grafo moltiplicativo compatibile con un grafo $[G, \alpha, \beta]$ quasi semplice è associativo,* vale a dire, se esistono i prodotti $c \circ (b \circ a)$, $(c \circ b) \circ a$, essi sono uguali.

Se $b \in G_0$, l'asserto è ovvio. Se $a \in G_0$, i due prodotti valgono rispettivamente $c \circ b$, $(c \circ b) \circ \alpha(b) = c \circ b$; e analogamente se $c \in G_0$. Se a, b, c sono spigoli, $\alpha(a)$ e $\beta(c)$ sono gli estremi (rispettivamente iniziale e finale) dell'arco costituito dagli spigoli $b \circ a$ e c, e quindi, per ipotesi, v'è al più uno spigolo del quale essi sono i vertici. Poichè in G° essi sono elementi neutri tanto di $c \circ (b \circ a)$ che di $(c \circ b) \circ a$, questi coincidono.

TEOR. 4.4. - *Dato un grafo moltiplicativo $[G^{\circ}, \alpha, \beta]$ ed un omomorfismo generalizzato Ψ di $[G, \alpha, \beta]$ su un grafo quasi semplice $[\widehat{G}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$, viene indotta in $\widehat{G}$ la legge di composizione*

«1) $\widehat{b} \circ \widehat{a}$ è definito se vi sono un a_k ed un b_h tali che $\Psi(a_k) = a$, $\Psi(b_h) = \widehat{b}$, e che $b_h \circ a_k$ sia definito; allora $\widehat{b} \circ \widehat{a} = \Psi(b_h \circ a_k)$

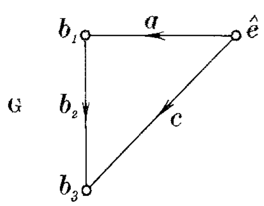
2) Se $\widehat{b} \in \widehat{G}_0 (\widehat{a} \in \widehat{G}_0)$ come $b_h(a_k)$ si assuma un vertice (v. teor. 2. 3)».
$[\widehat{G}^{\circ}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$ è un grafo moltiplicativo associativo, e Ψ definisce un neofuntore di G° su $\widehat{G}^{\circ}$.

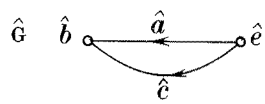
Innanzitutto, $\Psi(b_h \circ a_k)$ esiste, ed è univocamente determinato da a, b; infatti, se $\widehat{a} \in \widehat{G}_0, \Psi(b_h \circ a_k) = \Psi(b_h) = \widehat{b}$ è ben individuato (e così pure se $\widehat{b} \in \widehat{G}_0$). Altrimenti, essendo in ogni caso $\widehat{\alpha}(\Psi(b_h \circ a_k)) = \Psi(\alpha(b_h \circ a_k)) = \Psi(\alpha(a_k)) = \widehat{\alpha}(\Psi(a_k)) = \widehat{\alpha}(\widehat{a})$, $\widehat{\beta}(\Psi(b_h \circ a_k)) = \widehat{\beta}(\widehat{b})$, $\widehat{\beta}(\widehat{a}) = \Psi(\beta(a_k)) = \Psi(\alpha(b_h)) = \widehat{\alpha}(\widehat{b})$ (per le coppie k, h tali che $b_h \circ a_k$ sia definito), gli estremi di $\Psi(b_h \circ a_k)$ sono $\widehat{\alpha}(\widehat{a})$, $\widehat{\beta}(\widehat{b})$; questi sono pure gli estremi (iniziale e finale) dell'arco costituito da $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, e quindi $\Psi(b_h \circ a_k)$ è individuato perfettamente da a, b.

Si osservi poi che $\widehat{a} \circ \widehat{\alpha}(\widehat{a})$, $\widehat{\beta}(\widehat{a}) \circ \widehat{a}$ sono definiti [infatti lo sono $a_k \circ \alpha(a_k)$, $\beta(a_k) \circ a_k$]; inoltre, se $\widehat{f} \circ \widehat{\alpha}(\widehat{a})$ [$\widehat{\alpha}(\widehat{a}) \circ \widehat{f}$, o $\widehat{f} \circ \widehat{\beta}(\widehat{a})$, o $\widehat{\beta}(\widehat{a}) \circ \widehat{f}$] è definito, vale $\widehat{f}$ Se poi $\widehat{a} \circ \widehat{\varepsilon} = \widehat{a}$, si ha $\widehat{\alpha}(\widehat{\varepsilon}) = \widehat{\alpha}(\widehat{a} \circ \widehat{\varepsilon}) = \widehat{\alpha}(\widehat{a}) = \widehat{\beta}(\widehat{\varepsilon})$; essendo $\widehat{G}$ quasi semplice, $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\alpha}(\widehat{a})$ (e analogamente se $\widehat{\varepsilon} \circ \widehat{a} = \widehat{a}$). $\widehat{\alpha}(\widehat{a})$ e $\widehat{\beta}(\widehat{a})$ sono quindi i soli elementi neutri componibili con $\widehat{a}$. Inoltre, $\widehat{\alpha}(\widehat{b} \circ \widehat{a}) = \widehat{\alpha}(\Psi(b_h \circ a_k)) = \widehat{\alpha}(\widehat{a})$, $\widehat{\beta}(\widehat{b} \circ \widehat{a}) = \widehat{\beta}(\widehat{b})$.

$[\widehat{G}^o, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$ è dunque un grafo moltiplicativo che, per il teor. 4.3, risulta associativo. $(\widehat{G}^o, \underline{\Psi}, G^o)$ è un omomorfismo che definisce un omomorfismo generalizzato di G su $\widehat{G}$, e quindi è un neofuntore (teor. 4.2).

OSSERVAZIONE 1. – La sola 1) è sufficiente a definire $\widehat{G}^o$ se $\widehat{G}$ è semplice; altrimenti può non esserlo.





Ad esempio, considerati i grafi quasi semplici G, $\widehat{G}$ rappresentati qui sopra (essendo $G^o = G\#$) e l'omomorfismo generalizzato Ψ definito da

$$\underline{\Psi}(a) = \widehat{a}, \ \underline{\Psi}(b_h) = \widehat{b}, \ \underline{\Psi}(c) = \widehat{c}, \ \underline{\Psi}(e) = \widehat{e},$$

sono definiti sia $b_1 \circ a$ che $b_2 \circ a$, ma

$$\Psi(b_1 \circ a) \neq \Psi(b_2 \circ a).$$

La 2) si può sostitituire con la

2') Se $\widehat{b} \in \widehat{G}_0$, o $\widehat{a} \in \widehat{G}_0$, $\widehat{b} \circ \widehat{a}$ è definito se lo è $\widehat{b} \flat \widehat{a}$, e $\widehat{b} \circ \widehat{a} = \widehat{b} \flat \widehat{a}$.

OSSERVAZIONE 2. – Se $\Psi(G) \neq \widehat{G}$, si può ugualmente definire, ferme restando le altre ipotesi, la seguente legge di composizione $\perp$:

«Se $(\widehat{a}, \widehat{b}) \in \Psi(G) \times \Psi(G)$, $\widehat{b} \perp \widehat{a}$ è definito se lo è $\widehat{b} \circ \widehat{a}$, e $\widehat{b} \perp \widehat{a} = \widehat{b} \circ \widehat{a}$ (pensando $\widehat{a}, \widehat{b} \in \Psi(G)$)»;

«Se $(\widehat{a}, \widehat{b}) \notin \Psi(G) \times \Psi(G)$, $\widehat{b} \perp \widehat{a}$ è definito se lo è $\widehat{b} \mathfrak{b} \widehat{a}$, e $\widehat{b} \perp \widehat{a} = \widehat{b} \mathfrak{b} \widehat{a}$». $[\widehat{G}^{\perp}, \alpha, \beta]$ è un grafo moltiplicativo associativo, e $(\widehat{G}^{\perp}, \underline{\Psi}, G^{\circ})$ è un neofuntore.

OSSERVAZIONE 3. - Se G° è una categoria ([6], def. 11), non si può dire altrettanto di $[\widehat{G}^{\circ}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$, nonostante valga la proprietà associativa. Considerati infatti i grafi

$$G \quad e''' \xleftarrow{\;b\;} e'' \qquad e' \xleftarrow{\;a\;} e \qquad\qquad \widehat{G} \quad \hat{e}^{*} \xleftarrow{\;\hat{b}\;} \hat{e}' \xleftarrow{\;\hat{a}\;} \hat{e}$$

la suriezione

$$\underline{\Psi}(x) = x \; (x = a, b, e, e'), \quad \underline{\Psi}(e'') = \widehat{e'}, \quad \underline{\Psi}(e''') = \widehat{e}^{*}$$

definisce un omomorfismo generalizzato di G su $\widehat{G}$; però, mentre $G^{\mathfrak{b}}$ è una categoria, il grafo moltiplicativo indotto da $\underline{\Psi}$ (cioè $\widehat{G}^{\mathfrak{b}}$) non lo è.

OSSERVAZIONE 4. - Dato un grafo moltiplicativo G° (o, in particolare, una categoria o un gruppoide — [6], def. 15 —) un isomorfismo fra G e un altro grafo $\widehat{G}$ induce, secondo la 1) del teor. 4.4, una legge di composizione $(\circ)$ in $\widehat{G}$; $\widehat{G}^{\circ}$ è allora un grafo moltiplicativo (o, rispettivamente, una categoria o un gruppoide) isomorfo a G°.

TEOR. 4.5. - *Dati due grafi* $[G, \alpha, \beta]$, $[\widehat{G}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}]$, *sia* $(\widehat{G}, \underline{\Psi}, G)$ *un omomorfismo generalizzato. Allora* $(\widehat{G}^{\mathfrak{b}}, \underline{\Psi}, G^{\mathfrak{b}})$ *è un neofuntore. Se* G, $\widehat{G}$ *sono quasi semplici, e* $\underline{\Psi}$ *è biiettiva,* $(\underline{\Psi}(G)^{\#}, \underline{\Psi}, G^{\#})$ *è un isomorfismo, e* $(\widehat{G}^{\#}, \underline{\Psi}, G^{\#})$ *un neofuntore.*

Infatti, $b \mathfrak{b} a$ è definito solo se $b = \beta(a)$, oppure $a = \alpha(b)$. Se per fissare le idee vale la prima uguaglianza, si ha

$$\Psi(b) = \Psi(\beta(a)) = \widehat{\beta}(\Psi(a)),$$

e quindi è definito

$$\Psi(b) \mathfrak{b} \Psi(a) = \Psi(a) = \Psi(b \mathfrak{b} a).$$

e analogamente nell'altro caso. Perciò $(\widehat{G}^{\mathfrak{b}}, \underline{\Psi}, G^{\mathfrak{b}})$ è un omomorfismo, anzi, per il teor. 4. 2, un neofuntore.

Se $\underline{\Psi}$ è biiettiva, essa definisce un isomorfismo di G su $\underline{\Psi}(G)$ (teor. 2.6). Se G, $\widehat{G}$ (e quindi anche $\underline{\Psi}(G)$) sono quasi semplici, data in G la legge di composizione $\#$, $\underline{\Psi}$ induce in $\underline{\Psi}(G)$ la legge di composizione $\#$; e $(\underline{\Psi}(G)^{\#}, \underline{\Psi}, G^{\#})$ è un isomorfismo (Oss. 4). Allora $(\widehat{G}^{\#}, \underline{\Psi}, G^{\#})$ è un neofuntore.

Se invece $\underline{\Psi}$ non è biiettiva, può accadere che $\underline{\Psi}$ non definisca un omomorfismo di $\overline{G}\#$ in $\widehat{G}\#$: ad esempio, considerati i grafi G, $\widehat{G}$ e la suriezione $\underline{\Psi}$ di cui all'Oss. 1, $\underline{\Psi}$ non definisce un omomorfismo, poichè

$$\underline{\Psi}(b_2 \# a) = \underline{\Psi}(c) \neq \underline{\Psi}(a) = \underline{\Psi}(b_2) \# \underline{\Psi}(a).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1962.

[2] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, chap. 4, Hermann, Paris, (cfr. pure *Fascicule de résultats*).

[3] G. A. DIRAC, *A contraction theorem for abstract graphs*, « Math. Ann., » *144*, 93-96 (1961).

[4] ——, *Homomorphism theorems for Graphs*, « Math. Ann. », *153*, 69-80 (1964).

[5] C. EHRESMANN, *Structures quotient*, « Comm. Math. Helv. », *38*, 219-283 (1964).

[6] ——, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965, (le definizioni e le proposizioni citate si trovano salvo avviso diverso nel cap. I).

[7] M. HASSE, *Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide*, « Math. Nach. », *22*, 255-250 (1960).

[8] A. M. GHIRLANDA, *Osservazioni sulle caratteristiche dei grafi o singrammi*, « Ann. Univ. Ferrara, N. S. », sez. VII, *9*, 93-106 (1964).

[9] O. ORE, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc., Providence 1962.

[10] B. SEGRE, *Lectures on modern Geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[11] K. WAGNER, *Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung*, « Math. Ann. », *141*, 433-451 (1960).