

abhängig von den Dimensionen des Resonators. Die Fig. 8 zeigt den Einbau des Hartmannschen Generators in eine einfache Laboratoriumsapparatur. Zu beiden Seiten des Schallgenerators sind Röhren von 1 Meter Länge und 30 mm Durchmesser angebracht, die durch verschiebbare Stempel so abgestimmt werden können, daß akustische Resonanz eintritt. In der Nähe der Stempel befinden sich zwei Ansätze, durch die das Aerosol einströmt. Beim Einschalten des Generators wird das Aerosol stark koaguliert und ausgeschieden, so daß der Nebel bereits in der Hälfte des Rohres verschwunden ist. Auf dem Rohrboden sammeln sich bei längerem Betrieb größere Mengen des abgeschiedenen Schwebstoffes an. Diese Apparatur erwies sich auch als besonders zweckmäßig für Demonstrationsversuche<sup>10)</sup>. Es ließen sich bereits mit dieser einfachen Anordnung nicht unerhebliche Aerosolmengen von ihren Schwebeteilchen befreien. Bei Benutzung beider Rohre konnten z. B. 200 Liter pro Minute von  $\text{NH}_4\text{Cl}$ -Nebeln gereinigt werden. Über nephelometrische Messungen des Ausscheidungsgrades in strömenden Nebeln wird in der nächsten Mitteilung berichtet werden, da hier nur ein vorläufiger Überblick über den Prozeß der schnell verlaufenden akustischen Koagulation gegeben werden sollte.

#### Zusammenfassung.

1. Aerosole können durch Schall- und Ultraschallwellen schnell koaguliert und ausgefällt

<sup>10)</sup> Die Apparatur wurde zuerst in einem Experimentalvortrag von E. Hiedemann im Haus der Technik in Essen am 13. November 1935 vorgeführt.

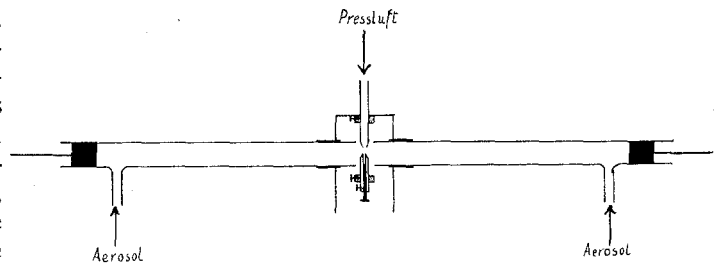


Fig. 8. Versuchsanordnung für strömende Gase mit Hartmann'schem Generator.

werden. Dabei erwies sich das Frequenzgebiet zwischen 5 und 50 kHz als besonders günstig.

2. Das Verhalten der suspendierten Teilchen im Schallfeld wird mittels mikrophotographischer und mikrokinematographischer Aufnahmen untersucht. Die Aggregation findet im Gasraum statt.

3. Die Teilchenvergrößerung im Schallfeld wird durch Fallzeitmessungen und Lichtabsorptionsmessungen bestimmt. Die Ergebnisse der beiden Methoden stimmen größenordnungsmäßig überein und zeigen, daß eine Vergrößerung der Schwebeteilchen auf das Mehrhundertfache leicht erreicht werden kann.

4. Bei größeren Schallintensitäten lassen sich auch aus schnell strömenden Aerosolen die Schwebeteilchen ausfällen.

\* \* \*

Die Firma Carl Zeiss-Jena ermöglichte uns in dankenswerter Weise die Ausführung von Messungen mit dem Zeiss'schen Nephelometer mit Pulfrich-Photometer.

Der Helmholtz-Gesellschaft sind wir für die Bereitstellung von Mitteln zu besonderem Dank verpflichtet.

## Strukturmechanik zähelastischer Continua, I.

Ein Beitrag zur hydrodynamischen Theorie der anomalen Turbulenz. <sup>(1)</sup>

Von H. Umstätter.

(Eingegangen am 11. Februar 1936.)

(Zur Zeit Zentrallaboratorium der „Astra Romana“ A. G. Raffinerie Ploesti, Rumänien.)

Vor ungefähr zwei Jahren wurden von Wo. Ostwald <sup>(2)</sup> und seiner Schule anomale Turbulenzerscheinungen experimentell untersucht. Es wurde hierbei festgestellt, daß gewisse kolloide Systeme wie Ammoniumoleat, Gummiarabikum, Kongorot, Baumwollgelb u. a., die bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten nicht mehr das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz erfüllen und nach Wo. Ostwald als strukturviskose Flüssigkeiten bezeichnet werden, schon bei auffallend geringen Reynoldszahlen turbulent werden,

d. h. einen mit wachsendem Geschwindigkeitsgefälle zunehmenden Strömungswiderstand aufweisen. Diese Flüssigkeiten können die Eigenschaft der anomalen Turbulenz so ausgeprägt zeigen, daß eine Proportionalität zwischen Druckdifferenz und Ausflußzeit, wie sie das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz verlangt <sup>(3)</sup>, überhaupt nicht mehr festgestellt werden kann. Mit anderen Worten, der sogenannte Hagen-Poiseuille'sche Bereich schrumpft zu einem so engen Gebiet zusammen, daß das ganze System sich

nur in einem einzigen Punkt als Newton'sches Kontinuum verhält. Letzteres ist da der Fall, wo die Druck-Zeitkurve aus dem Strukturgebiet in das Turbulenzgebiet übergeht.

Diese Tatsachen haben zu der Vermutung Anlaß gegeben <sup>(1)</sup>, daß die Strukturviskosität, die eine stete Begleiterscheinung der anomalen Turbulenz ist, eine der wesentlichen Ursachen auch der normalen Turbulenz sei. Diese Ausführungen trugen indessen nur einen programmatischen Charakter und waren eine Parallele zu Ergebnissen der kinetischen Gastheorie. Es soll nun auf dem Wege einer strengeren hydrodynamischen Darstellung der Beweis für die Berechtigung dieser Auffassung erbracht werden.

Die Turbulenz ist gekennzeichnet durch das Ablösen von Wirbeln an der Begrenzung der Flüssigkeit unter bestimmten hnlichkeitsbedingungen <sup>(2)</sup>. Diese Wirbel können nach Helmholtz niemals in der Flüssigkeit selbst entstehen oder endigen, sondern ihr Ursprung und Ende liegt stets in der Grenzschicht. Es ist daher paradox, daß die kritische Strmungsbedingung oder Reynoldszahl, bei der eine laminare Strömung in eine turbulente übergeht, nun in erster Reihe doch von der Struktur der Flüssigkeit und nicht von der Rauigkeit der Wand abhängt. Es wird daher im folgenden versucht, ausgehend von den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen, zu Beziehungen zu gelangen, die die Eigenschaften des Kontinuums mit der Struktur des Systems verknüpfen. Nach obigem Sachverhalt ist es naheliegend, daß die Hydrodynamik nur dann eine Lösung verspricht, wenn sie für das Kon-

tinuum auch eine Struktur postuliert. Zu diesem Zwecke gehen wir zunächst von dem idealen Kontinuum aus und nehmen für dieses nacheinander Eigenschaften an, die einem realen, chemisch-physikalisch definierten System zukommen. Als solche Eigenschaften kommen zunächst Viskosität und Elastizität in Betracht.

Die ideale Flüssigkeit ist charakterisiert durch die Kontinuitätsbedingung <sup>(12)</sup>:

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0,$$

worin  $x, y, z$ , die drei Raumrichtungen  $u, v, w$ , die in diesen Richtungen gemessenen Geschwindigkeitsgradienten nach den drei Raumrichtungen oder die Divergenz gleich Null sein muß, wenn kein Quellgebiet entstehen soll. Letzteres ist in einer inkompressiblen Flüssigkeit der Fall. Erfährt das Flüssigkeitselement eine Beschleunigung, die beim Fortschreiten in den drei Raumrichtungen in Erscheinung tritt, so sind die totalen Beschleunigungen gegeben durch folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} du/dt &= \partial u/\partial t + u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z \\ dv/dt &= \partial v/\partial t + u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y + w\partial v/\partial z \\ dw/dt &= \partial w/\partial t + u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit der Dichte der Flüssigkeit, so erhält man gem dem Grundgesetz der Mechanik:

$$P = m \cdot dv/dt,$$

wonach Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, die Kräfte pro Volumeneinheit. Letztere müssen der Differenz aus der von außen auf jedes Flüssigkeitselement wirkenden Schwerkraft und dem hydrodynamischen Druck gleich sein:

$$\begin{aligned} \rho \, du/dt &= \rho (\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z) = X - \partial p/\partial x \\ \rho \, dv/dt &= \rho (\partial v/\partial t + u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y + w\partial v/\partial z) = Y - \partial p/\partial y \\ \rho \, dw/dt &= \rho (\partial w/\partial t + u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z) = Z - \partial p/\partial z. \end{aligned}$$

Diese Euler'schen Bewegungsgleichungen geben Aufschluß über die Änderung des gesamten Strömungsfeldes einschließlich der Wirbelströmungen. Indessen sind für die weiteren Betrachtungen vorerst nur die stationären Laminarstrmungen interessant. Die Größen  $x, y, z$  sind hierbei meist Kräfte von der Art der Schwerkraft, können sich aber ganz allgemein auch von irgend einem anderen Potential ableiten. In sehr vielen Fällen können diese Kräfte vernachlässigt werden, da sie gegen die hydrodynamischen Kräfte in der Flüssigkeit klein sind. Für stationäre Strömungen fallen außerdem auch noch die lokalen Beschleunigungsglieder heraus, so daß sich diese Gleichungen wie folgt vereinfachen lassen:

$$\begin{aligned} -\partial p/\partial x &= \partial p_{xx}/\partial x + \partial p_{xy}/\partial y + \partial p_{xz}/\partial z \\ -\partial p/\partial y &= \partial p_{xy}/\partial x + \partial p_{yy}/\partial y + \partial p_{yz}/\partial z \\ -\partial p/\partial z &= \partial p_{xz}/\partial x + \partial p_{yz}/\partial y + \partial p_{zz}/\partial z. \end{aligned} \quad (1)$$

Im folgenden werden nun nacheinander drei Fälle untersucht, in denen dem Kontinuum die drei wichtigsten Eigenschaften zugeschrieben werden, und zwar:

1. Das Kontinuum bestehe aus trger Masse, so daß die Spannungen durch Trägheitskräfte verursacht erscheinen, wenn sie beschleunigt wird.

2. Das Kontinuum bestehe aus inkompressibler aber gegen Scheerung elastischer Substanz, so daß die Spannungen bei Schubverformung in Erscheinung treten (Hooke'sches System).

3. Das Kontinuum bestehe aus einem System mit innerer Reibung, so daß die Spannungen

erst bei dauernder Tangentialverschiebung mit endlicher und konstanter Geschwindigkeit bemerkbar werden (Newton'sches System).

Für den ersten Fall können wir auf die Euler'schen Bewegungsgleichungen zurückgreifen und all jene Glieder aussondern, die nicht einer Tangentialverschiebung in der x-, z-Ebene entsprechen. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \cdot \frac{du}{dt} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \cdot \frac{dw}{dt}. \end{aligned}$$

Setzt man nach einer Definition der Dynamik für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial l}{\partial t} \\ v &= \frac{\partial r}{\partial t} \\ w &= \frac{\partial s}{\partial t} \end{aligned}$$

so erhält man für:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

zieht man nur eindimensionale Strömungen in Betracht, dann bleibt nur eine der drei Gleichungen übrig, und man darf an Stelle der partiellen die totalen Differentialquotienten setzen. Somit wird:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho \frac{d^2 l}{dt^2}. \quad (2)$$

Diese Formel ist der Ausdruck des d'Alembert'schen Prinzips, wonach man die Trägheitswiderstände als Volumkräfte einführen darf.

Für den zweiten Fall wollen wir annehmen, die Spannungen seien von der Art der Scheerelastizität, so daß die lokalen Beschleunigungsglieder wieder wegfallen und man auf die vereinfachten Euler'schen Bewegungsgleichungen (1) zurückgreifen kann. Man kann hierbei voraussetzen, daß das Hooke'sche Gesetz der Scheerelastizität gilt. Letzteres wird nur bei hinreichend kleinen Verformungen zutreffen. In diesen Fällen kann man die Hooke'sche Definitionsgleichung ansetzen:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= E \cdot \frac{\partial l}{\partial x} + E \cdot \frac{\partial l}{\partial x} \\ p_{yy} &= E \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + E \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \\ p_{zz} &= E \cdot \frac{\partial s}{\partial z} + E \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \\ p_{xy} &= E \cdot \frac{\partial l}{\partial y} + E \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ p_{xz} &= E \cdot \frac{\partial l}{\partial z} + E \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \\ p_{yz} &= E \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + E \cdot \frac{\partial s}{\partial y}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ansätze in die vereinfachten Euler'schen Bewegungsgleichungen für stationäre Strömungen ein, so erhalten wir die elastodynamischen Gleichungen für sehr geringe Verformungen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= E (\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial z^2}) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= E (\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}) \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= E (\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}). \end{aligned}$$

Auch hier interessieren zunächst nur Tangentialverschiebungen in der x-, z-Ebene, so daß wieder all jene Glieder abgesondert werden können, die nicht einer Verschiebung in dieser Ebene entsprechen. So verbleiben demnach folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= E \cdot \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= E \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Für eindimensionale Verformungen bleibt wieder nur eine der Gleichungen übrig, und es darf an Stelle des partiellen der totale Differentialquotient gesetzt werden:

$$-\frac{dp}{dx} = E \cdot \frac{d^2 l}{dy^2}. \quad (3)$$

Unter Berücksichtigung der Formel (2) erhält man eine Wellengleichung von der Form:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{E \cdot d^2 l}{\rho \cdot dy^2}, \quad (4)$$

oder in der bekannteren Form:

$$dy/dt = \sqrt{E/\rho}. \quad (5)$$

Diese Beziehung sagt aus, daß sich bei einer eindimensionalen elastischen Schubverformung die Störung mit endlicher Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene der Tangentialverschiebung in Form einer kompressionslosen Scheerungswelle fortpflanzt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich der Quadratwurzel aus der Scheerelastizität durch Dichte. Diese Beziehung spielt eine gewisse Rolle in der Theorie der Erdbebenwellen und stimmt formell überein mit der Newton'schen Beziehung zwischen Schallgeschwindigkeit und Volumelastizität durch Dichte. Da die Scheerelastizität um vieles kleiner ist als die Volumelastizität, so ist in Flüssigkeiten auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Scheerungswelle geringer als die des Schalles. Ergänzend muß hinzugefügt werden, daß es sich hier um die Fiktion einer reibungslosen Flüssigkeit mit Formelastizität handelt, die es in der realen Welt nur mit sehr geringer Näherung gibt, der man sich aber bei beliebig kleinen Verformungen mit möglichst geringer Verformungsgeschwindigkeit nähern kann.

Bei dem dritten Fall wird nun angenommen, daß die Kräfte erst bei dauernder Verformung mit merklicher Geschwindigkeit als Reibungskräfte in Erscheinung treten. Mit anderen Worten, wir nehmen als Erfahrungsgrundlage ein Newton'sches Kontinuum an. Wir substituieren, da es sich hier wieder um stationäre Strömungen handelt, die vereinfachten Euler'schen Bewegungsgleichungen (1) durch die nach der Newton'schen Definitionsgleichung für die innere Reibung gebildeten Ansätze.

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= \eta (\partial u / \partial x + \partial u / \partial x) \\
 p_{yy} &= \eta (\partial v / \partial y + \partial v / \partial y) \\
 p_{zz} &= \eta (\partial w / \partial z + \partial w / \partial z) \\
 p_{xy} &= \eta (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \\
 p_{xz} &= \eta (\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) \\
 p_{yz} &= \eta (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y)
 \end{aligned}$$

und nach Substitution erhält man: die Navier—Stockes'schen Reibungsgleichungen (4):

$$\begin{aligned}
 -\partial p / \partial x &= \eta (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2) \\
 -\partial p / \partial y &= \eta (\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 + \partial^2 v / \partial z^2) \\
 -\partial p / \partial z &= \eta (\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 + \partial^2 w / \partial z^2).
 \end{aligned}$$

Sondert man auch hier wieder all jene Glieder aus, die nicht einer Tangentialverschiebung in der x-, z-Ebene entsprechen, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 -\partial p / \partial x &= \eta \partial^2 u / \partial y^2 \\
 -\partial p / \partial y &= 0 \\
 -\partial p / \partial z &= \eta \partial^2 w / \partial y^2
 \end{aligned}$$

oder beim Übergang auf eindimensionale Strömung und den totalen Differentialquotienten:

$$-\partial p / \partial x = \eta d^2 u / dy^2. \quad (6)$$

Setzt man hierin statt:

$$u = dl / dt,$$

so erhält man eine Gleichung:

$$-\partial p / \partial x = \eta \frac{d \cdot d^2 l}{dt \cdot dy^2}, \quad (7)$$

in der wir das Auftreten eines Extremalwertes (d/dt) der Zeit gewärtigen. Vollzieht man den Übergang zur Dynamik, indem wir auch diese Beziehung mit Formel (2) verknüpfen so erhält man:

$$d^2 l / dt^2 = \frac{\eta \cdot d^2 l \cdot d}{\rho \cdot dy^2 \cdot dt}. \quad (8)$$

Setzt man für den Quotienten aus innerer Reibung zur Dichte die kinematische Viskosität

$$\eta / \rho = \mu \quad (9)$$

und statt des Extremalwertes der Zeit die Strukturkonstante

$$dt / d = \tau, \quad (10)$$

die wir Relaxationsdauer nennen wollen, so erhält man auch hier eine Wellengleichung von der Form:

$$dy / dt = \sqrt{\mu / \tau}. \quad (11)$$

Daraus geht hervor, daß auch in Newton'schen Systemen die Reibungsstorungen sich mit endlicher Geschwindigkeit senkrecht zur Richtung der Tangentialverschiebung ausbreiten und nicht unvermittelt in die Ferne übertragen werden. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich der Quadratwurzel aus der kinematischen Viskosität durch die Relaxationszeit. Damit kommt die eingangs gekennzeichnete Verknüpfung der hydrodynamischen Theorie mit den Struktur-

eigenschaften der Materie zum Ausdruck. Die Erfahrung lehrt nun, daß es Newton'sche Systeme zwar mit größerer Näherung gibt als Hooke'sche Systeme, doch ist es nur eine Frage der Meßgenauigkeit, inwiefern sich ein Kontinuum noch als rein Newton'sches System erweist. In der Klasse der kolloiden Systeme zeigt fast jedes Kontinuum eine gewisse Flieelastizitat (9). Daraus geht hervor, daß auch die rein Newton'schen Systeme nur Idealformen der Materie darstellen, die sich mit allerdings großer Näherung in der Welt der realen stofflichen Systeme vorfinden. Wollte man an Hand der Gleichungen (3) und (7) durch eine eingeprägte Verformung und Vermessung der hierbei auftretenden Kraft die Frage entscheiden, ob das in Frage stehende Kontinuum ein Hooke'sches oder ein Newton'sches System ist, so gelänge dies nicht, da sich in beiden Fällen die gleichen inneren Spannungen ergeben würden. Wir müssen daher beide Eigenschaften von dem in Frage stehenden System voraussetzen, wenn die Theorie allgemeine Gültigkeit haben soll. Indem wir also Gleichung (3) und (7) einander gleichsetzen, folgt:

$$\frac{\eta \cdot d^2 l}{\tau \cdot dy^2} = \frac{E \cdot d^2 l}{dy^2}$$

die fundamentale Maxwell'sche Beziehung (5):

$$E \cdot \tau = \eta, \quad (12)$$

wonach die Viskosität nichts anderes ist als das Produkt aus Scheerelastizität mal Relaxationszeit. Während Maxwell diese Beziehung als besondere Hypothese zu seiner Relaxationstheorie eingeführt hat, ergibt sie sich hier als Konsequenz einer rein hydrodynamischen Betrachtungsweise. Diese Formel läßt verstehen, warum so viele Flüssigkeiten trotz annähernd gleicher Viskosität sich dennoch so verschieden verhalten können. Eine hohe Viskosität kann verursacht sein durch eine hohe Scheerelastizität bei geringer Relaxationszeit, in diesem Falle haben wir ein Hooke'sches Kontinuum, ist dagegen die Elastizität gering und die Relaxationszeit groß, dann haben wir typisch plastische Stoffe vor uns, (18), ist ferner die Elastizität gering und die Relaxationszeit sehr gering, so haben wir ein Newton'sches Kontinuum und so fort. Systeme, die sowohl Elastizität als auch Relaxationszeit in meßbarem Maße aufweisen, wollen wir in den folgenden Betrachtungen als Maxwell'sche Systeme bezeichnen.

Die Gleichung (12) zeigt den engen Zusammenhang zwischen Viskosität und Elastizität, wonach jede Flüssigkeit, überhaupt jedes Kontinuum, welches innere Reibung besitzt, auch

eine gewisse Scheerelastizität haben muß. Damit ist zwangsläufig auch eine Elastizitätsgrenze verbunden <sup>(8)</sup>. Der Nachweis dieser Streckgrenze ist für kolloide Farbsuspensionen unter anderen Pryce-Jones gelungen <sup>(7)</sup>.

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf stationäre Verformungen. Im folgenden werden noch die quasistationären Spannungszustände behandelt, die für die weitere Entwicklung der Theorie von Bedeutung sind. Wir gehen hierbei von den bekannten Maxwell'schen Ansätzen aus und stellen die Spannung zunächst für rein elastische Kontinua dar <sup>(5)</sup>. Danach ist die zeitliche Spannungsänderung gegeben durch:

$$dF/dt = E \cdot ds/dt,$$

worin F Spannung, s Verformung und t die Zeit bedeuten.

Ist das System außerdem noch viskos, dann ist die zeitliche Änderung der Schubspannung kleiner, und zwar:

$$dF/dt = E \cdot ds/dt - F/\tau,$$

worin außer bekannten Größen  $\tau$  die Relaxationszeit bedeutet. Integriert man für konstante Verformung, d. h. für  $ds/dt = 0$ , dann ist:

$$\ln F - \ln C = -t/\tau$$

oder

$$F = C \cdot e^{-t/\tau}. \quad (13)$$

Die Formel sagt aus, daß die in einem zähelastischen System durch eine Schubverformung hervorgerufene Tangentialspannung nach Ablauf einer gewissen Zeit verschwunden ist. Die Zeit, die vergeht, bis diese Spannung auf den e-ten Teil ihres Wertes absinkt, entspricht der Relaxationsdauer. Die Relaxationszeit hat demnach den Sinn einer spontanen Entspannungsdauer. Integriert man die Maxwell'sche Gleichung dagegen für konstante Geschwindigkeit, so erhält man:

$$F = E \cdot \tau \cdot ds/dt + C \cdot e^{-t/\tau}, \quad (14)$$

den zeitlichen Verlauf der zähelastischen Tangentialspannungen bei Schubverformungen mit konstanter Geschwindigkeit. Danach sind die Spannungen im Anfang der Bewegung ein Maximum und sinken exponentiell auf einen zeitlich konstanten Endwert, die stationäre Spannung, ab. Das Produkt  $E \cdot \tau$  ist nach Gleichung (12) nichts anderes als die Viskosität des Systems. Die Größe C muß als additive Konstante ebenfalls die Dimension einer Schubspannung haben. Um zu einer geeigneten Indizierung dieser beiden Spannungen zu gelangen setzen wir t einmal gleich 0 und einmal gleich  $\infty$ , man erhält dann:

$$\begin{aligned} F_0 &= E \cdot \tau \cdot ds/dt + C \\ F_\infty &= E \cdot \tau \cdot ds/dt \\ \frac{F_0 - F_\infty}{F_0 - F_\infty} &= C \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante entspricht demnach der Differenz aus der Anfangsspannung und der Stationärspannung. Dividiert man diese Gleichung durch die konstante Verformungsgeschwindigkeit  $ds/dt$ , so erhält diese die Dimension einer Viskosität und man erhält

$$(\eta_0 - \eta_\infty) \cdot ds/dt = C$$

und nach Substitution der Gleichung (14).

$$\eta_t = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \cdot e^{-t/\tau}. \quad (15)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Viskosität in Maxwell'schen Systemen zeitabhängig ist, und zwar klingt diese von einem maximalen Anfangswert auf einen stationären Endwert nach einer Exponentialfunktion ab. Die zeitliche Veränderlichkeit der Viskosität wird nach Freundlich und Péterfy Thixotropie genannt <sup>(7)</sup>. Wie weit diese in Erscheinung tritt, hängt ganz von dem Werte der Relaxationsdauer und der Differenz  $(\eta_0 - \eta_\infty)$  ab. Thixotropie ist daher nur bei kolloiden Systemen mit langer Relaxationsdauer merklich, jedoch keine Besonderheit dieses Zustandes, sondern eine allgemeine Eigenschaft zähelastischer Systeme. Die Thixotropie wird zweckmäßig mit Apparaten gemessen, bei denen die Viskositätsmessung nicht auf eine Zeit, sondern auf eine Kraftmessung zurückgeführt wird <sup>(7)</sup>, wobei Momentwerte der Viskosität gemessen werden <sup>(6)</sup>. Bemerkenswert ist, daß durch die Zeitabhängigkeit der Viskosität sich auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Scherungswelle zeitlich ändert, und zwar von einem höheren Anfangswert exponentiell sich einem Stationärwert nähert. Setzen wir statt der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$dy/dt = c \quad (16)$$

und differenziert den Maxwell'schen Ansatz noch einmal, so erhält man

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{E \cdot d^2 S}{dt^2} - \frac{dF}{dt \cdot \tau}$$

und daraus wegen (16)

$$\frac{d^2 F \cdot c^2}{dy^2} = \frac{E \cdot d^2 S \cdot c^2}{dy^2} - \frac{dF \cdot c}{\tau \cdot dy}$$

Formt man die Beziehung (8) in der Weise um, daß auf jeder Seite nur dimensionslose Größen stehen, so erhält man:

$$d^2 l/dy = \frac{dy \cdot dl}{\mu \cdot dt}$$

Diese Zahlen pflegt man nach ihrem Entdecker Reynolds'sche Zahlen zu nennen <sup>(14)</sup>.

Wir können daher, indem wir statt  $S = l$  schreiben, folgendes ansetzen

$$Re = \frac{v \cdot dy}{\mu} = d^2 S / dy, \quad (17)$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2 F}{dy^2} = \frac{E \cdot Re \cdot c}{dy} - \frac{dF}{\tau \cdot dy},$$

und wegen Gleichung (2) auf ähnliche Weise

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = - \frac{E \cdot dp}{\rho \cdot dx} - \frac{dF}{\tau \cdot dt}.$$

Die beiden letzten Gleichungen integriert ergeben

$$dF/dt = - \frac{E \cdot dp \cdot \tau}{\rho \cdot dx} - \frac{F}{\tau}$$

und

$$\frac{dF \cdot c}{dy} = E \cdot Re \cdot c - F/\tau$$

durch Subtraktion

$$E \cdot Re \cdot c = - \frac{E \cdot dp \cdot \tau}{\rho \cdot dx}.$$

Setzt man für  $-dp/dx = \rho \cdot d \cdot dl/dt^2$ , so erhält man die einfache Beziehung:

$$Re = v/c, \quad (18)$$

wonach die Reynoldszahlen nichts anderes darstellen als das Verhältnis der Verformungsgeschwindigkeit zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der kompressionslosen Scheerungswelle. Es ist nun zweckmäßig, hierbei eine Abschätzung der Reynoldszahlen als Funktion der Zeit vorzunehmen. Wenn sich die Reibung mit endlicher Geschwindigkeit über den Querschnitt ausbreitet und die innere Reibung zeitabhängig ist, so folgt, daß der Beginn der Zeitrechnung in jeder folgenden Lamelle zu einem späteren Zeitpunkte datiert, d. h. die von der Wand weiter entfernten Lamellen werden den Stationärwert erst später erreichen als die der Wand näher gelegenen Schichten. Oder, daß zu einem gegebenen Zeitpunkt die wandnahen Schichten eine geringere innere Reibung aufweisen als die weiter im Kern der Strömung gelegenen Schichten. Da einer geringeren Viskosität eine geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht, folgt, daß sich die Welle in der Wandschicht langsamer ausbreitet als in dem Kern, da andererseits jede Welle sich stets so ausbreitet, daß sie eine gegebene Entfernung in der kürzesten Zeit zurücklegt (Fermat), folgt, daß die Welle den längsten Weg in demjenigen Teil des Kontinuums zurücklegen wird, wo sie am raschesten vorwärts kommt<sup>(10)</sup>. Das ist der Kern der Strömung. Da nun laut Gleichung (8) die Richtung der Fortpflanzung

stets senkrecht zur Richtung der Tangentialverschiebung stehen muß, folgt eine anomale nicht-lineare Geschwindigkeitsverteilung, wonach das Geschwindigkeitsgefälle in der Wandschicht größer ist als im Kern. Daraus folgt aber, daß die Reynoldszahlen in Maxwell'schen Systemen stets an der Wand ein Maximum sein müssen. Was andererseits bedeutet, daß diese auch stets dort zuerst kritisch werden und sich die Wirbel nur von der Wand ablösen können.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Turbulenzbedingungen trotz dieser Konsequenz doch von den Eigenschaften der Begrenzungsfläche unabhängig sind und in erster Reihe von der Struktur des Kontinuums abhängen. Zu diesem Zwecke gehen wir aus von Gleichung (14) und betrachten die Spannung in einem Zeitpunkte  $t$  und einem beliebig kleinen Zeitpunkte  $dt$  früher und um die gleiche Dauer  $dt$  nachher. Indem wir auch hier wieder für

$$c = dy/dt$$

setzen, erhält man

$$F_{t+dy} = \frac{\eta_{\infty} \cdot dS \cdot c}{dy} + C \cdot e^{-(ct+dy)/cr}$$

und

$$F_{t+dy} = \frac{\eta_{\infty} \cdot dS \cdot c}{dy} + C \cdot e^{-(ct-dy)/cr},$$

die Differenz der beiden Spannungen ist

$$dF' = C \cdot e^{-ct/cr} \cdot e^{dy/cr} - C \cdot e^{-ct/cr} \cdot e^{-dy/cr},$$

das ist <sup>(15)</sup>

$$dF' = C \cdot e^{-t/\tau} \cdot 2 \cdot \sinh \cdot dy/cr$$

oder

$$dF' = (\eta_0 - \eta_{\infty}) v \cdot e^{-t/\tau} \cdot 2 \cdot \sinh dy/cr, \quad (19)$$

daraus geht hervor, daß in Maxwell'schen Systemen intralaminare Schubspannungsdifferenzen auftreten können, die der Thixotropie  $(\eta_0 - \eta_{\infty})$  proportional sind und mit der Geschwindigkeit linear anwachsen. Diese werden am gröſsten sein, wenn

$$dy/cr = \pi/4$$

oder ein ungeradzahliges Vielfaches desselben ist, da der Sinus hyperbolicus für diese Werte unbestimmte Maxima aufweist. Diese intralaminaren Schubspannungsdifferenzen werden bestrebt sein, die Lamellen quer zu verformen. Dieser Querverformung wirkt die Fliefestigkeit der Lamelle entgegen. Ist die intralaminale Schubspannungsdifferenz gleich oder größer als die Schubfestigkeit der Lamelle, dann wird diese querverformt und die Strömung wird turbulent. Die Turbulenzbedingung ist daher gegeben durch die Gleichung

$$E \cdot \sigma = (\eta_0 - \eta_{\infty}) v \cdot e^{-t/\tau} \cdot 2 \cdot \sinh dy/cr, \quad (20)$$

worin  $\sigma$  die Fließ- oder Streckgrenze des Systems bedeutet.

In Verbindung mit Formel (18) liefert diese Gleichung folgendes Ergebnis:

$$Re_k = \frac{E \cdot \rho \cdot e^{t/\tau}}{(\eta_0 - \eta_\infty) c \cdot 2 \cdot \sinh dy/c\tau} \quad (21)$$

wobei  $Re_k$  die kritische Reynoldszahl darstellt. Hieraus ergibt sich, daß die wesentliche Ursache der Turbulenz die Strukturviskosität bzw. das thixotrope Verhalten der Maxwell'schen Systeme ist, denn die kritische Reynoldszahl liegt um so niedriger, je größer die Differenz zwischen Anfangs- und Stationärviskosität ist. So erklärt sich die Tatsache, daß die kolloiden Systeme, die ausgeprägt thixotrop sind, anomal niedrige kritische Reynoldszahlen aufweisen. Andererseits kann man aus der Tatsache, daß es keine Flüssigkeit gibt, die nicht turbulent zu fließen vermochte, folgern, daß jedes Kontinuum bis zu einem gewissen Grade strukturviskos bzw. thixotrop ist. Es kommt daher auch jeder realen Flüssigkeit eine endliche Streckgrenze zu. Da die kritische Reynoldszahl nach obiger Gleichung auch zeitabhängig ist, und zwar im Laufe der Zeit exponentiell zunimmt, so folgt, daß stets der erste Augenblick für das Eintreten der Turbulenz entscheidend ist. So kommt es, daß die kritischen Reynoldszahlen Minimalwerte sind, unterhalb welchen man unter keinen Umständen Turbulenz herbeiführen kann; ob jedoch oberhalb dieser charakteristischen Reynoldszahlen wirklich Turbulenz eintritt, hängt noch von besonderen Umständen ab. Als solche kommen nach obiger Formel die Argumente der hyperbolischen Sinusfunktion in Betracht, da letztere diskrete Maxima aufweist und somit auch für die Reynoldszahlen diskrete Minima fordert. Da nach dem Fermat'schen Prinzip für jede Art von Wellen<sup>(10)</sup>

$$\int dy/c = \text{Minimum}$$

sein soll, folgt, daß die Zeit, die vergeht, bis die Scheerungswelle eine Lamelle durchreißt, so kurz als möglich ist. Somit ist auch dieser Wert ein Extremalwert, der in einem ganz bestimmten charakteristischen Verhältnis zur Relaxationszeit steht. Dieses Verhältnis ist in den Wandschichten größer als in den Kernschichten, so daß die Reynoldszahlen stets in den Wandschichten zuerst kritisch werden. Daraus ergibt sich, daß die Wirbel nur an der Wand entstehen können, obwohl ihre Entstehung von der Beschaffenheit derselben unabhängig ist.

Diese Ausführungen geben im wesentlichen eine hinreichende Erklärung für das paradoxe

Verhalten turbulenter Strömungen. Indessen geben sie auch manches neue Rätsel auf. Insbesondere würden die Eigenwerte der Wellengleichung interessieren<sup>(17)</sup>, die auf rein hydrodynamischer Grundlage schon wegen mathematischer Schwierigkeiten kaum zu ermitteln sind. Es soll daher in späteren Mitteilungen auch eine wellenmechanische Fassung dieser Theorie gegeben werden, die noch weitere strukturmechanisch interessante Zusammenhänge aufdeckt<sup>(11)</sup>. Wünschenswert wäre es ferner, wenn die Grundlage dieser Theorie, das ist die Maxwell'sche Spannungsgleichung (14), experimentell direkt bestätigt werden könnte.

#### Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß sich Tangentialstörungen in Maxwell'schen Systemen mit endlicher Geschwindigkeit in Form einer kompressionslosen Scheerungswelle senkrecht zur Ebene der Tangentialverformung ausbreiten. Die Ursache dieses Nahwirkungseffektes liegt in dem Auftreten eines Extremalwertes der Zeit, der eine charakteristische Strukturkonstante darstellt. Diese sogenannte Relaxationszeit bestimmt auch das elastische, plastische und thixotrope Verhalten der zähelastischen Systeme. Sie bewirkt, daß jede zähelastische Verformung auch bei konstanter Verformungsgeschwindigkeit einen quasistationären Spannungszustand hervorruft. Während dieses Zustandes treten zwischen den Schichten intralaminare Schubspannungsdifferenzen auf, die, wenn sie die Schubfestigkeit der Lamellen überschreiten, zu einer Querverformung derselben Anlaß geben. Die Turbulenzbedingung ist daher gegeben durch das Verhältnis der Schubfestigkeit der Lamellen zur intralaminaren Schubspannungsdifferenz. Da in letztere unter anderem auch die Thixotropie eingeht, so ist als wesentliche Ursache der Turbulenz das strukturviskose Verhalten Maxwell'scher Systeme zu betrachten.

\* \* \*

Herrn Prof. Dr. Wo. Ostwald, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit zurückzuführen ist, fühle ich mich zu Danke verpflichtet.

#### Literaturverzeichnis.

1. H. Umstätter, Kolloid-Beih. 7, H. 3 (1935).
2. Wo. Ostwald, Kolloid-Z. 68, 212 (1934).
3. Joos, Theoretische Physik (Leipzig 1934).
4. Petrov, Reynolds, Sommerfeld, Michell, Ostwald's Klassiker Nr. 218.
5. J. Cl. Maxwell, Philos. Mag. J. Sci. (1868), 133.

6. Philippoff, Z. Physik **35**, 883 (1934).
7. Pryce-Jones, J. Oil and Colour Chem. **5**, No. 171 (1934).
8. M. Reiner, Kolloid-Z. **54**, 175 (1931).
9. Wo. Ostwald und Föhre, Kolloid-Z. **45**, 166 (1928).
10. A. Haas, Atomtheorie (Berlin—Leipzig 1933).
11. P. Debye, Struktur der Materie, Leipziger Vorträge (Leipzig 1933).
12. Eucken, Jakob, Chemie-Ingenieur (Leipzig 1933).
13. E. Hatschek, Viskosität der Flüssigkeiten (Dresden 1930).
14. Grimsehl, Physik (Leipzig—Berlin 1923).
15. A. Walthers, Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen (Berlin 1928).
16. L. Ubbelohde, Erdöl u. Teer **11**, H. 9 (1935).
17. Wien, Harms, Bd. Wellenlehre und Ultraschall (Leipzig 1934).
18. Wolarowitsch, Tolstoi, Viskosität und Plastizität, Kolloid-Z. **73**, 92 (1935).

## Über das Strömen der strukturviskosen Stoffe.

[Zur Theorie der Strukturviskosität II.<sup>1)</sup>]

Von W. Philippoff.

(Eingegangen am 25. Februar 1936.)

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, Abt. Hess.)

### I. Einleitung.

In den vorangehenden Mitteilungen<sup>2)</sup> über die Strukturviskosität bzw. über die Zähigkeit der anomal fließenden organischen Kolloide ist für die Messung eine „laminare stationäre“ Strömung als unbedingt notwendig vorausgesetzt worden. Obwohl „laminare Strömung“ von normalen zähen Flüssigkeiten ein geläufiger Begriff ist, ist sie bei den anomal fließenden Kolloiden bisher nicht eingehend genug behandelt worden. Verschiedene Bearbeiter dieses Gebietes wie M. Reiner<sup>3)</sup>, W. Kroepelin<sup>4)</sup>, K. Weissenberg und B. Rabinowitsch<sup>5)</sup>, R. Eisenschitz<sup>6)</sup> u. a. haben entweder ihre Existenz vorausgesetzt oder sind nur unvollkommen auf den Nachweis dieser Strömungsart bei Kolloiden eingegangen.

Da die besonders interessierenden hochmolekularen organischen Stoffe fast ausschließlich anomal fließen<sup>7)</sup>, werden im folgenden die für diese Kolloide in Betracht kommenden Strömungsformen einer erneuten kritischen Betrachtung unterzogen. Es wird zunächst die in Frage stehende Theorie zusammenfassend dargestellt und anschließend das Versuchsmaterial herausgestellt, das einerseits für eine experimentelle Prüfung dieser Theorie geeignet ist und das ander-

seits eine Entscheidung über die bei diesen Kolloiden in Betracht kommenden Strömungsformen herbeiführt. Dabei wird das hierfür im Schrifttum zur Verfügung stehende Versuchsmaterial durch eigene Versuche ergänzt.

Die Untersuchung hat gezeigt, daß die folgende Theorie auch für die extremsten Fälle anomalen Fließens gültig ist. Man ist damit endgültig von den Versuchsbedingungen unabhängig geworden und kann sich in der weiteren Entwicklung dieses Gebietes ohne weiteres der Erforschung der Ursachen für das anomale Fließen zuwenden.

Da zwischen den verschiedenen Autoren gewisse Unstimmigkeiten über die zweckmäßigste Darstellungsweise der veränderlichen Zähigkeit bestehen, ist im folgenden auch die Frage behandelt worden, wie die verschiedenen Darstellungsweisen miteinander zusammenhängen.

### II. Entwicklung der Theorie.

a) Die Strömung der idealen Flüssigkeit. Bevor zur Betrachtung der „laminaren“ Strömung übergegangen wird, ist es zweckmäßig, die notwendigen Begriffe von Grund auf zu entwickeln<sup>8)</sup>, wobei wir mit dem einfachsten Fall, der idealen Flüssigkeit, beginnen.

Flüssigkeiten sind Körper, die keine definierte Form besitzen und die Fähigkeit des Fließens zeigen. Bei einer idealen Flüssigkeit entsteht Fließen als verlustloser Ausgleich der potentiellen Energie der Lage und der kinetischen Energie. Keine weiteren Kräfte sollen voraussetzungsgemäß auftreten. Alle Eigenschaften sind durch eine einzige Materialkonstante, nämlich die

<sup>1)</sup> I. Mitteilung: W. Philippoff, Kolloid-Z. **71**, 1 (1935).

<sup>2)</sup> Vgl. auch W. Philippoff, Physik. Z. **35**, 883, 1900 (1934).

<sup>3)</sup> M. Reiner, Kolloid-Z. **39**, 80 (1926); **43**, 1, 72 (1927); **44**, 9 (1928); **50**, 199 (1930).

<sup>4)</sup> W. Kroepelin, Z. physik. Chem., Abt. A **149**, 291 (1930).

<sup>5)</sup> B. Rabinowitsch, Z. physik. Chem., Abt. A **145**, 1 (1929); R. Eisenschitz u. B. Rabinowitsch, Ber. dtsch. chem. Ges. **64**, 2522 (1931).

<sup>6)</sup> R. Eisenschitz, Kolloid-Z. **64**, 184 (1933).

<sup>7)</sup> W. Philippoff und K. Hess, Z. physik. Chem., Abt. B **31**, 237 (1936).

<sup>8)</sup> Vgl. dazu die zusammenfassende Darstellung (M. Lagally) im Handbuch der Physik Bd. VII (Berlin 1927).