Zur mathematischen Theorie der Verzweigung von Wechselstromkreisen mit Inductanz.

Von **E. Kobald** in Leoben.

Die allgemeinen Differentialgleichungen, durch welche der Verlauf der durch Stromesschwankungen inducierten elektrischen Ströme für ein beliebig verzweigtes Netz von linearen Leitern dargestellt wird, hat Helmholtz[1]) in einer Arbeit vom Jahre 1851 aufgestellt. Dieselben sind für die Theorie der veränderlichen Ströme, welche seither eine so eminente Wichtigkeit erlangt haben, von ähnlicher fundamentaler Bedeutung wie die entsprechenden Kirchhoff'schen Gesetze für den Gleichstrom.

Das specielle Problem der Parallelschaltung von beliebig vielen inductiven Wechselstromzweigen — jedoch mit Außerachtlassung der gegenseitigen Induction — wurde zuerst von Rayleigh[2]) unter der Annahme eines sinusartigen Verlaufes der elektromotorischen Kraft, für welche in der Folge die Abkürzung E. M. K. gebraucht werden soll, behandelt. Eine Ergänzung hiezu hat J. J. Thomson[3]) gegeben, indem er ebenfalls unter der Annahme einer einfachen, harmonischen E. M. K. die Aufgabe auch unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induction der einzelnen Zweige auf einander löste. Hiebei kommt es auf die Auflösung eines Systems von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung mit constanten Coefficienten aber mit einem im Allgemeinen veränderlichen rechten Theile an. Diese gestaltet sich dann am einfachsten, wenn die rechte Seite wie in den beiden vorerwähnten Fällen eine Exponentialfunction ist. Das gedachte System von Differentialgleichungen lässt sich durch eine Gleichung von höherer Ordnungszahl ersetzen und es ist nicht ohne Interesse, dieselbe für den Fall einer beliebigen E. M. K. thatsächlich zu bilden. Im Folgenden soll jedoch nur der praktisch wichtigste Specialfall behandelt werden, wo die gegenseitige Induction der einzelnen Zweige aufeinander nicht in Betracht gezogen wird.

Im unverzweigten Theile des Stromkreises sei eine veränderliche E. M. K. E thätig, welche daselbst den Strom J hervorruft; der Ohm'sche Widerstand und der Selbstinductionscoefficient

---

[1]) Wissenschaftliche Abhandlungen. I. Bd. S. 436.

[2]) Phil. Mag. 1886.

[3]) Recent Researches in Electricity an Magnetism. p. 518.

dieses Theiles seien R und L. Die Anzahl der Zweige, welche einander parallel geschaltet sind, sei n; dieselben mögen durch die Indices $1, 2, \ldots, n$ von einander unterschieden werden. Für den k^{ten} Zweig sei der Ohm'sche Widerstand, seine Inductanz und dessen Strom zur Zeit t, beziehungsweise r_k, L_k, i_k. Man bezeichne ferner mit e die Spannungsdifferenz zur Zeit t zwischen den beiden Knotenpunkten, an welche sämmtliche Zweige angeschlossen sind. Setzt man alle Selbstinductionscoefficienten als constant voraus und sieht man, wie schon oben bemerkt wurde, von der gegenseitigen Induction der Zweige ab, so hat man die Gleichungen:

$$E = e + JR + L\frac{dJ}{dt} \tag{1}$$

$$e = r_k i_k + L_k \cdot \frac{d i_k}{dt} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

$$J = i_1 + i_2 + \ldots + i_n\,. \tag{3}$$

Da von den veränderlichen Größen nur die E. M. K. E gegeben ist, so ist es zweckmäßig, die Größen $e, i_1, \ldots i_n$ zu eliminieren und für den Strom J die früher erwähnte Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welche als die Stromgleichung bezeichnet werden möge, herzuleiten.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left|\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{r_k}{L_k}, \\ \varepsilon_k &= \frac{e}{L_k} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

so ergibt sich aus (2):

$$\varepsilon_k = \alpha_k i_k + \frac{d i_k}{dt}$$

$$\alpha_k \varepsilon_k = \alpha_k^2 i_k + \alpha_k \frac{d i_k}{dt} = \alpha_k^2 i_k + \frac{d\varepsilon_k}{dt} - \frac{d^2 i_k}{dt^2}$$

$$\alpha_k^2 \varepsilon_k = \alpha_k^3 i_k + \alpha_k \frac{d\varepsilon_k}{dt} - \frac{d^2\varepsilon_k}{dt^2} + \frac{d^3 i_k}{dt^3}$$

$$\alpha_k^3 \varepsilon_k = \alpha_k^4 i_k + \alpha_k^2 \frac{d\varepsilon_k}{dt} - \alpha_k \frac{d^2\varepsilon_k}{dt^2} + \frac{d^3\varepsilon_k}{dt^3} - \frac{d^4 i_k}{dt^4}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_k^{n-1}\varepsilon_k = \alpha_k^n \cdot i_k + \alpha_k^{n-2}\frac{d\varepsilon_k}{dt} - + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-1}\varepsilon_k}{dt^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{d^n i_k}{dt^n}.$$

In allen diesen Gleichungen denke man sich nun in Bezug auf den Index k von 1 bis n summiert; man erhält dann mit Rücksicht auf Gleichung (3):

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^0\, i_k - J \\
\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k\, i_k + \frac{dJ}{dt} \\
\sum_{k=1}^{k=n} \left(\alpha_k\, \varepsilon_k - \frac{d\varepsilon_k}{dt}\right) &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^2\, i_k - \frac{d^2 J}{dt^2} \\
\sum_{k=1}^{k=n} \left(\alpha_k^2\, \varepsilon_k - \alpha_k \frac{d\varepsilon_k}{dt} + \frac{d^2\varepsilon_k}{dt^2}\right) &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^3\, i_k + \frac{d^3 J}{dt^3} \\
&\;\vdots
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\sum_{k=1}^{k=n} \left(\alpha_k^{n-1} . \varepsilon_k - \alpha_k^{n-2} \cdot \frac{d\varepsilon_k}{dt} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}\varepsilon_k}{dt^{n-1}}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^n\, i_k + (-1)^{n-1} \frac{d^n J}{dt^n}.
$$

Diese Gleichungen denke man sich nun beziehungsweise mit den Factoren $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ multipliciert und zu einander addiert; die unbestimmten Multiplicatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bestimme man derart, dass die n linearen Gleichungen bestehen:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{array}{l}
1 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_1^2 + \cdots + \lambda_n \alpha_1^n = 0 \\
\quad\vdots \\
1 + \lambda_1 \alpha_k + \lambda_2 \alpha_k^2 + \cdots + \lambda_n \alpha_k^n = 0\,. \\
\quad\vdots \\
1 + \lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \alpha_n^2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^n = 0
\end{array}
\right.
$$

In der so entstehenden neuen Gleichung kommen dann auf der rechten Seite die Summen, welche die Theilströme $i_1, \ldots i_n$ enthalten, nicht mehr vor. Auf diese Weise erhält man die Gleichung:

$$
\lambda_n \frac{d^n J}{dt^n} - \lambda_{n-1} \frac{d^{n-1} J}{dt^{n-1}} + - \cdots + (-1)\, \lambda_1^{n-1} \frac{dJ}{dt} + (-1)^n J =
$$

$$
(7a)\quad
\begin{aligned}
&= \lambda_n \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{d^{n-1}\varepsilon_k}{dt^{n-1}} - \alpha_k \frac{d^{n-2}\varepsilon_k}{dt^{n-2}} + - \cdots + (-1)^{n-1} \alpha_k^{n-1} \varepsilon_k\right) - \\
&- \lambda_{n-1} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{d^{n-2}\varepsilon_k}{dt^{n-2}} - \alpha_k \frac{d^{n-3}\varepsilon_k}{dt^{n-3}} + - \cdots + (-1)^{n-2} \alpha_k^{n-2} \varepsilon_k\right) + \\
&\;\vdots \\
&+ (-1)^{n-2} \lambda_2 \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{d\varepsilon_k}{dt} - \alpha_k \varepsilon_k\right) + (-1)^{n-1} \lambda_1 \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k\,.
\end{aligned}
$$

Ordnet man die rechte Seite der Gleichung (7a) nach der Ordnungszahl der Ableitungen von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, so ergibt sich:

$$\lambda_n \frac{d^n J}{d t^n} - \lambda_{n-1} \frac{d^{n-1} J}{d t^{n-1}} + \cdots + (-1)^{n-1} \lambda_1 \frac{d J}{d t} + (-1)^n J =$$

(7)
$$\sum_{k=1}^{k=n} \Big\{ \lambda_n \frac{d^{n-1} \varepsilon_k}{d t^{n-1}} - (\alpha_k \lambda_n + \lambda_{n-1}) \frac{d^{n-2} \varepsilon_k}{d t^{n-2}} +$$

$$+ (\alpha_k^2 \lambda_n + \alpha_k \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2}) \frac{d \varepsilon_k^{n-3}}{d t^{n-3}} - + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \left(\alpha_k^{n-1} \lambda_n + \alpha_k^{n-2} \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1 \right) \varepsilon_k \Big\} .$$

Um die Gleichung für den Strom J in der endgiltigen Form zu erhalten, sind in die letzten Gleichungen für die Größen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ und deren Ableitungen nach (4) und (1) die Werte

$$\varepsilon_k = \frac{E}{L_k} - \frac{R}{L_k} J - \frac{L}{L_k} \frac{d J}{d t} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

eingesetzt zu denken. Da es nicht die geringste Schwierigkeit hat die erwähnte Gleichung thatsächlich zu bilden, dieselbe aber andererseits nicht mehr so übersichtlich ist wie die Gleichung (7), so möge davon abgesehen werden, diese wirklich anzuschreiben. Die gesuchte Stromgleichung ist eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, deren rechte Seite jedoch eine aus der gegebenen E. M. K. E und deren Ableitungen zusammengesetzte Function von t ist.

Um die gestellte Aufgabe vollständig zu lösen, erübrigt noch zu zeigen, wie die unbestimmten Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, welche durch das Gleichungssystem (6) definiert sind, zu ermitteln sind Zu dem Ende betrachten wir die algebraische Gleichung n^{ten} Grades

$$\lambda_n \alpha^n + \lambda_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \alpha + 1 = 0,$$

in welcher α als die Unbekannte und die Größen λ als die gegebenen Coefficienten derselben angesehen werden mögen. Die Wurzeln derselben sind dann offenbar nichts anderes, als die früher betrachteten Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Hieraus folgt sofort, dass die Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mittelst der bekannten elementaren symmetrischen Functionen der Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ausgedrückt werden können. Man erhält also für diese die Werte:

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

(8)
$$\lambda_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$$

$$\lambda_{n-2} = (-1)^{n-2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \alpha_n}{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} + \cdots}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = -\left(\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Schließlich mögen noch die Formeln mitgetheilt werden, welche als die Auflösungen der Gleichungen (1), (2), (3) in dem besonderen Falle eines sinusartigen Verlaufes der E. M. K. resultieren.

Betrachtet man die dem Netze aufgedrückte E. M. K. als gegeben, so kann nach der gemachten Annahme gesetzt werden:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} E = \sqrt{2} \,.\, E_0 \sin(pt) \\ J = \sqrt{2} \;\; J_0 \sin(pt - \varphi_0) \\ i_k = \sqrt{2} \,.\, J_k \sin(pt - \varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bedeuten E_0, J_0 und J_k die Werte der effectiven E. M. K., des Hauptstromes und des Stromes im k^{ten} Zweige; die Winkel φ_0 und φ_k sind die Phasenverschiebungen dieser Ströme, während die Zahl p durch die Gleichung:

$$\text{Periodenzahl} = \frac{p}{2\pi}.$$

definiert ist. Man führe nun die Bezeichnungen ein:

$$\rho_0 = \sqrt{R^2 + p^2 L^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{pL}{R}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n) \begin{cases} \rho_k = \sqrt{r_k^2 + p^2 L_k^2} \\ \operatorname{tg} \alpha_k = \dfrac{p L_k}{r_k} \end{cases}.$$

Die Spannungsdifferenz e sei dargestellt durch die Gleichung:

$$\text{(9a)} \qquad e = e_0 \sin(pt - \psi).$$

Dann ist zunächst:

$$\text{(10)} \qquad e_0 = J_1 \rho_1 = J_2 \rho_2 = \cdots = J_n \rho_n =$$
$$= \sqrt{E_0^2 + J_0^2 \rho_0^2 - 2 E_0 J_0 \rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha_0)}.$$

$$\text{(11)} \qquad \psi = \varphi_1 - \alpha_1 = \varphi_2 - \alpha_2 = \cdots = \varphi_n - \alpha_n.$$

$$(12) \qquad E_0 = J_0 \rho_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{e^{\alpha_0 i}}{\rho_0} + \frac{e^{\alpha_1 i}}{\rho_1} + \cdots + \frac{e^{\alpha_n i}}{\rho_n}\right)\left(\frac{e^{-\alpha_0 i}}{\rho_0} + \frac{e^{-\alpha_1 i}}{\rho_1} + \cdots + \frac{e^{-\alpha_n i}}{\rho_n}\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_1 i}}{\rho_1} + \cdots + \frac{e^{\alpha_n i}}{\rho_n}\right)\left(\frac{e^{-\alpha_1 i}}{\rho_1} + \cdots + \frac{e^{-\alpha_n i}}{\rho_n}\right)}}.$$

$$(13) \quad E_0 = J_k \rho_k \cdot \rho_0 \sqrt{\left(\frac{e^{\alpha_0 i}}{\rho_0} + \frac{e^{\alpha_1 i}}{\rho_1} + \cdots + \frac{e^{\alpha_n i}}{\rho_n}\right)\left(\frac{e^{-\alpha_0 i}}{\rho_0} + \frac{e^{-\alpha_1 i}}{\rho_1} + \cdots + \frac{e^{-\alpha_n i}}{\rho_n}\right)}.$$

$$(14) \qquad \operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi_k) = \frac{\sum_{m=1}^{m=n} \frac{\sin(\alpha_m - \alpha_k)}{\rho_m}}{\sum_{m=1}^{m=n} \frac{\cos(\alpha_m - \alpha_k)}{\rho_m}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Die mitgetheilten Gleichungen zeigen, dass sich z. B. die Klemmenspannung eines Wechselstromgenerators bei inductiver Belastung aus der E. M. K. desselben und seinem inductiven Spannungsabfalle — abgesehen von dem Spannungsverbrauche zufolge des Ohm'schen Widerstandes und von den Ankerrückwirkungen — nur annäherungsweise berechnen lässt.

Die Formeln (10), (12) und (13) nehmen im Falle eines unveränderlichen Gleichstromes die bekannte für die Stromtheilung geltende Form an.