

Subharmonische Resonanzen und Oberwellenmodulations- effekte in einem Gemenge von optisch gepumpten Atom- kernen unter dem Einfluß von linear-polarisierten magne- tischen Wechselfeldern¹⁾

Von U. CAPPELLER und H. G. WEBER

Mit 11 Abbildungen

Herrn Prof. Dr. Wolter zum 60. Geburtstag gewidmet.

Abstract

The dynamical equation is solved for an optically pumped spin system under the influence of a static and alternating circularly or linearly polarized magnetic field by a recursive numerical method. The results are graphically represented for a special set of parameters.

Einleitung

Die unter dem Einfluß von magnetischen Gleich- und Wechselfeldern in einem atomaren Spinsystem resultierenden Resonanzphänomene sind in ihren verschiedenen Erscheinungsformen oft experimentell untersucht und theoretisch behandelt worden; sie können sowohl unter stationären Bedingungen (Elektronenspinresonanz [1], Kerninduktion [2], magnetische Resonanzen im Grundzustand eines optisch gepumpten Systems [3–10]) als auch unter nicht stationären Bedingungen (magnetische Resonanzen in optisch oder durch Elektronenstoß angeregten Atomen [11], Atomstrahlresonanzen [2], kernmagnetische Resonanzen in strömenden Flüssigkeiten [12–15]) beobachtet werden.

In allen diesen Fällen lassen sich die auftretenden Phänomene vergleichsweise leicht übersehen, wenn das magnetische Wechselfeld einen Drehfeld- (Zirkularpolarisations-) Charakter aufweist. Durch eine „Transformation auf das mitrotierende System“ läßt sich in einem solchen Falle immer leicht ein allgemeiner Überblick über die möglichen Erscheinungen gewinnen. Dieser Überblick behält auch dann noch seine Bedeutung, wenn das Wechselfeld eine andere Polarisation, z. B. eine lineare Polarisation, aufweist, sofern das atomare System — bei hinreichend kleiner Amplitude des Wechselfeldes — zwischen zwei Relaxations-Umklapp-Prozessen nur selten Übergänge zwischen Zuständen

¹⁾ Im Auszug vorgetragen vor dem Fachausschuß Hochfrequenzphysik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft auf der Frühjahrstagung 1969.

mit verschiedener magnetischer Quantenzahl ausführt. Die zu beobachtenden Erscheinungen können in einem solchen Falle in guter Näherung dadurch gedeutet werden, daß man von den beiden in einem linear-polarisierten Feld enthaltenen Zirkularpolarisationskomponenten immer nur die Komponente mit dem richtigen Drehsinn („resonante Komponente“) in die Betrachtungen miteinbezieht und die andere („nicht resonante“) Komponente vernachlässigt.

Diese Betrachtungsweise ist aber nicht mehr zulässig, wenn die Amplitude des (linearpolarisierten) Wechselfeldes solche Werte annimmt, bei denen die eben genannte Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist [5, 6, 9, 10, 16]. In dem atomaren System resultieren unter diesen Umständen Resonanzphänomene einer völlig anderen Art, als bei der Einwirkung eines zirkular-polarisierten Magnetfeldes oder auch eines nur schwachen allgemein polarisierten Magnetfeldes beobachtet werden. Von diesen Phänomenen sollen hier nur die amplitudenabhängige Verschiebung der Hauptresonanz (BLOCH-SIEGERT-Shift), das Auftreten von subharmonischen Resonanzen und das in dieser Arbeit weiter unten nach ausführlicher zu behandelnde Auftreten von charakteristischen Oberwellen-Modulationseffekten, erwähnt werden²⁾ [vgl. dazu auch 5, 6, 9–22].

Diese sowohl im stationären als auch im nichtstationären Fall bei einem Nicht-Zirkularpolarisations-Charakter des Wechselfeldes stets mehr oder weniger ausgeprägt auftretenden Effekte, sind in der Literatur nicht immer einheitlich behandelt worden [23]. Der Deutung im Rahmen einer klassischen Behandlung des Wechselfeldes [24–29] und seiner Wechselwirkung mit dem atomaren System stehen andere Deutungen gegenüber, in denen die beobachteten Erscheinungen als „Mehr-Quanten-Emissions- und Absorptions-Effekte“ interpretiert werden [30, 31].

Bei dieser Sachlage erscheint es angebracht, den Problemkreis der magnetischen Resonanz erneut aufzugreifen und sowohl im Rahmen einer klassischen Behandlung des Wechselfeldes als auch im Rahmen einer quantenelektrodynamischen Behandlung des Wechselfeldes darzustellen.

Die vorliegende Arbeit bringt den ersten Teil dieses Programms. Ihre Ergebnisse zeigen — am Beispiel der hier im Zusammenhang dargestellten magnetischen Resonanz-Erscheinungen in optisch gepumpten ^{201}Hg — wie abhängig

²⁾ Die hier weiter unten zu behandelnden Erscheinungen sind bisher z.T. unbeachtet geblieben, da es bei den bislang untersuchten Resonanzeffekten (Kerninduktionsuntersuchungen, Elektronenspinresonanz usw.) im allgemeinen üblich ist, zur Erzeugung der atomaren (bzw. nuklearen) Polarisation zunächst einmal ein möglichst starkes Gleichfeld H_0 zu verwenden ($H_0 \sim k \text{ Oe}$); dann aber ist es bei der dann zumeist hohen ZEEMAN-Frequenz aus technischen Gründen nicht mehr möglich, in den Wechselfeldern die zur Beobachtung der nichtlinearen Effekte notwendigen Feldstärken zu erreichen.

Diese experimentelle Beschränkung entfällt, wenn die „Orientierung“ des atomaren Systems nicht mehr durch ein starkes statisches Magnetfeld, sondern durch einen optischen Pumpprozeß vorgenommen wird.

Die für magnetische Resonanzuntersuchungen erforderliche ZEEMAN-Aufspaltung kann in einem solchen Falle mit statischen Magnetfeldern von (1...50) Oe erreicht werden. Den dann nur niedrigen ZEEMAN-Frequenzen (3...30) khz im Falle der Kernresonanz entsprechend, können hier die zur Beobachtung der „nichtlinearen Effekte“ erforderlichen Wechselfelder leicht erreicht werden.

Eine gleich günstige Situation liegt auch dann vor, wenn — wie bei den Kernresonanz-Untersuchungen an strömenden Flüssigkeiten [12–14] — der Ort für die Orientierung der Kerne (mit einem starken statischen Magnetfeld: $\sim k \text{ Oe}$) von dem Ort, an dem die Kernresonanz-Untersuchungen vorgenommen werden (mit einem schwachen statischen Magnetfeld: $\sim \text{Oe}$), räumlich getrennt ist.

von der Polarisation des einwirkenden Wechselfeldes in einem solchen Gemenge die verschiedensten Resonanzphänomene resultieren und wie das Ausmaß der Phänomene von den jeweiligen experimentellen Bedingungen und den für das atomare System charakteristischen Kenngrößen (gyromagnetisches Verhältnis, Relaxationszeitkonstanten usw.) abhängt.³⁾

Dabei ist es in einem gewissen Sinne überraschend, daß die eben angeführten Erscheinungen insgesamt allein schon aus der in dieser Arbeit benutzten klassischen Behandlung des Wechselfeldes resultieren und nicht etwa in irgend einer Form an die „Quantenstruktur“ des Wechselfeldes gebunden sind. Entscheidend für das Auftreten der oben herausgestellten Phänomene ist vielmehr lediglich der Polarisationscharakter des Wechselfeldes.

Diesem Sachverhalt entsprechend soll in der vorliegenden Arbeit im Hinblick auf die zu behandelnden Erscheinungen auch nicht — wie sonst vielfach üblich — von „Mehr-Quanteneffekten“, sondern lediglich von „amplitudenabhängigen Resonanzverschiebungen, subharmonischen Resonanzen u.ä.“ gesprochen werden.

Die Berechtigung hierzu wird sich auch aus der nachfolgenden [32], von einem quantenelektrodynamischen Ansatz ausgehenden Arbeit zu dem hier behandelten Problemkreis ergeben.

2. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen

Wirkt auf ein optisch gepumptes Gemenge⁴⁾ von atomaren Systemen (Kernspin I , Drehimpuls der Atomhülle $J = 0$) ein Magnetfeld der Form

$$\vec{\mathfrak{H}} = (H_x = H_1 f_x(t), \quad H_y = H_1 f_y(t), \quad H_z = H_0) \quad (2.1)$$

mit

$$f_x(t) = \cos \alpha \cos \omega t \quad f_y(t) = \sin \alpha \cos (\omega t + \varphi)$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \quad \omega > 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2} \quad (2.1a)$$

ein, so resultieren in dem Gemenge zeitabhängige Änderungen seiner Orientierungsstruktur, die von der Intensität, Richtung und Polarisation des Pumplichtes, den Relaxationszeitkonstanten des Gemenges bei seiner Wechselwirkung mit der Umgebung sowie von der Stärke und dem Polarisationscharakter des magnetischen Wechselfeldes abhängen.

Für die zeitliche Entwicklung des statistischen Operators ϱ_{At} zur Beschreibung der Orientierungsstruktur des Gemenges gilt unter diesen Umständen

$$i\hbar \frac{d}{dt} \varrho_{At} = [\mathcal{H}, \varrho_{At}] + i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \varrho_{At} \right)_{\text{incoh.}}, \quad (2.2)$$

wobei der erste Summand mit

$$\mathcal{H} = -\gamma_K \mu_0 \vec{\mathfrak{H}} \cdot \vec{J} \hbar = -\gamma_K \mu_0 \hbar (J_z \cdot H_z + J_x H_x(t) + J_y H_y(t)) \quad (2.3)$$

(γ_K : gyromagnetischer Faktor)

³⁾ Bezüglich der experimentellen Überprüfung der hier behandelten Resonanzphänomene vgl. H. G. WEBER, Diss. Marburg 1971.

⁴⁾ Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf die Verhältnisse bei optisch gepumptem Hg. Hier ist im Grundzustand der Elektronenhülle $J = 0$; die Orientierungsstruktur des atomaren Systems „Hg-Atome“ ist in diesem Fall nur durch die Orientierungsstruktur der Hg-Kerne bestimmt.

den Einfluß der magnetischen Gleich- und Wechselfelder auf die Bewegung von ϱ_{At} angibt und der zweite Summand die zeitliche Änderung von ϱ_{At} beschreibt, die unter der Einwirkung der inkohärent ablaufenden Pump- und Relaxationsprozesse resultiert.

Die soeben aufgestellte Beziehung geht bei einer Darstellung des Operators ϱ_{At} durch die Standard-Irreduzibel-Tensor-Operatoren $U_{K\kappa}(I)$ für den Spin I in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Irreduzibel-Tensorkomponenten $\varrho_{K\kappa}$ von ϱ_{At} über [33]. Mit

$$U_{K\kappa}(I) = \sum_{MM'} (-)^{I-M'} |IM\rangle \cdot \langle IM \ I - M' | K\kappa \rangle \langle IM' | \quad (2.4)$$

wird

$$\begin{aligned} \varrho_{At}(t) = \sum_{K\kappa} \varrho_{K\kappa}^*(t) U_{K\kappa}(I) \quad K = 0, 1, 2, \dots, 2I \\ -K \leq \kappa \leq K \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit

$$\varrho_{K\kappa}^* = (-)^{\kappa} \varrho_{K-\kappa}; \quad \varrho_{00} = \frac{1}{\sqrt{2I+1}}.$$

Damit aber folgt aus (2.3) bei Beachtung des Kommutators für die $U_{K\kappa}$ in der Form von (vgl. [34])

$$[J_0, U_{K\kappa}] = \kappa U_{K\kappa}; \quad [J_{\pm}, U_{K\kappa}] = \sqrt{K(K+1) - \kappa(\kappa \pm 1)} U_{K\kappa \pm 1}, \quad (2.6)$$

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y; \quad J_0 = J_z \quad (2.7)$$

sogleich die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho_{K\kappa} = -i\varepsilon\omega_0 \kappa \varrho_{K\kappa} \\ - i\varepsilon \frac{\omega_1}{2} \left\{ \sqrt{K(K+1) - \kappa(\kappa+1)} f_+(t) \varrho_{K\kappa+1} \right. \\ \left. + \sqrt{K(K+1) - \kappa(\kappa-1)} f_-(t) \varrho_{K\kappa-1} \right\} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \varrho_{K\kappa} \right)_{\text{incoh.}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hierbei sind zur Abkürzung die Größen

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega_0 = \gamma_K H_0 \mu_0 \quad \varepsilon = \text{sign } \gamma_K \\ \varepsilon\omega_1 = \gamma_K H_1 \mu_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

sowie als Zeitfunktionen die Größen

$$f_{\pm}(t) = \frac{1}{H_1} (H_x \mp iH_y) = f_x(t) \mp i f_y(t) \quad (2.10)$$

eingeführt worden. Für H_0 und H_1 soll stets $H_0 > 0$ bzw. $H_1 > 0$ gelten; die z -Achse des Koordinatensystems sei in die Richtung der statischen Komponente des Magnetfeldes gelegt.

Mit dieser Vereinbarung sind die Größen ω_0 und ω_1 als grundsätzlich positive Größen eingeführt. Das Vorzeichen der physikalischen Größe „gyromagnetischer Faktor“ findet sich in dem Faktor ε wieder.

Schließlich sei hinsichtlich der inkohärenten Einflüsse, denen die Bewegung der $\varrho_{K\kappa}(t)$ unterliegt, noch das Folgende vorausgesetzt:

1. Das Pumplicht wird unpolarisiert längs der z -Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems eingestrahlt; seine Wirkung ist für den hier betrachteten Fall des ^{201}Hg ($I = 3/2$) durch eine Nachbildungsrate P für die Orientierungskomponente ϱ_{20} zu beschreiben.

2. Die orientierende Wirkung des statischen Magnetfeldes — sie würde zu einer BOLTZMANN-Verteilung und damit zu allen möglichen Orientierungsstufen $K \leq 2I$ führen — kann gegenüber derjenigen des Pumplichtes vernachlässigt werden.

3. Die Relaxationsprozesse der verschiedenen Orientierungsstufen sind voneinander entkoppelt; die Relaxation (Relaxationskonstanten $\tau_{K\kappa}$) führt zur Isotropie hin.⁵⁾

4. Ein Einfluß des magnetischen Gleich- und Wechselfeldes auf die Atome im „Zwischenzustand des optischen Pumpprozesses“ kann vernachlässigt werden.

Unter diesen Umständen sind die inkohärenten Einflüsse, denen die Bewegung von $\varrho_{K\kappa}$ unterliegt, zusammenfassend durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \varrho_{K\kappa}\right)_{\text{incoh.}} = P \delta_{K,2} \delta_{\kappa,0} - \frac{1}{\tau_{K\kappa}} \varrho_{K\kappa} \quad (2.11)$$

zu beschreiben [8, 27]. Das zu lösende Differentialgleichungssystem nimmt damit endgültig die Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho_{K\kappa} = & P \delta_{K,2} \delta_{\kappa,0} - \frac{1}{\tau_{K\kappa}} \varrho_{K\kappa} - i\varepsilon \omega_0 \kappa \varrho_{K\kappa} \\ & - i\varepsilon \frac{\omega_1}{2} \left\{ \sqrt{K(K+1) - \kappa(\kappa+1)} f_+(t) \varrho_{K\kappa+1} \right. \\ & \left. + \sqrt{K(K+1) - \kappa(\kappa-1)} f_-(t) \varrho_{K\kappa-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

an.

In den Lösungen $\varrho_{K\kappa}(t)$ dieses Differentialgleichungssystems wird der Bewegungszustand des Kerngemenges vollständig beschrieben. Aus den Größen $\varrho_{K\kappa}(t)$ kann für jede durch einen Meßoperator Q zu beschreibende Messung an dem Gemenge der Erwartungswert $\langle Q \rangle$ nach

$$\langle Q \rangle = \text{Sp}(\varrho \cdot Q) = \sum_{K\kappa} \varrho_{K\kappa} Q_{K\kappa}^* \quad (2.13)$$

hergeleitet werden, wobei die $Q_{K\kappa}$ die Irreduzibel-Tensor-Komponenten von Q in der $U_{K\kappa}(I)$ -Basis bezeichnen.

Schließlich sei im Hinblick auf die hier zu diskutierenden Lösungen von (2.12) noch die folgende Beschränkung eingeführt:

Die Lösungen $\varrho_{K\kappa}(t)$ beschreiben — abhängig von den speziellen Werten der physikalischen Parameter (P , $\tau_{K\kappa}$, ε , ω_0 und ω_1) sowie vom Polarisationscharakter des Magnetfeldes und dessen zeitlichem Verlauf — eine große Mannigfaltigkeit von Bewegungszuständen. Von dieser Mannigfaltigkeit sollen hier nur die in stationären Wechselfeldern resultierenden Bewegungszustände betrachtet werden. Bei dieser Beschränkung vereinfacht sich die Lösung des vorliegenden Gleichungssystems wesentlich. Aus der speziellen Form der Inho-

⁵⁾ Die $\tau_{K\kappa}$ werden sowohl durch die Einflüsse der Umgebung als auch durch den Pumpprozeß bestimmt. Vgl. [8].

mogenität für das System folgt nämlich sofort, daß stationär stets

$$\varrho_{K\kappa} = 0 \quad \text{außer für } K = 2$$

gilt⁶⁾. Lediglich das Teilsystem der Gleichungen mit $K = 2$ und $-2 \leq \kappa \leq +2$ braucht in diesem Falle explizit gelöst zu werden.

Darüber hinaus sollen in der vorliegenden Arbeit auch nur die beiden Grenzfälle genauer betrachtet werden, daß das Wechselfeld zirkular- bzw. linear-polarisiert ist. Das Typische im magnetischen Resonanzverhalten eines atomaren Spinsystems wird in diesen beiden Grenzfällen in hinreichendem Maße deutlich werden.

3. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen für den Fall eines zirkular-polarisierten Wechselfeldes

Um einen Überblick über die Mannigfaltigkeit der Lösungen des Differentialgleichungssystems (2.-12) für die $\varrho_{2\kappa}$ zu erhalten, sei zunächst einmal der vergleichsweise einfache Fall betrachtet, daß das magnetische Feld zirkular-polarisiert ist. Ein solches Feld wird im Rahmen der oben eingeführten Feldcharakterisierung durch

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.-1a)$$

mit

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \begin{cases} \text{Rechts-} \\ \text{Links-} \end{cases} \text{Polarisation} \quad (3.-1b)$$

beschrieben. In diesem Falle wird demnach

$$f_{\pm}(t) = \frac{e^{\pm i\omega t}}{\sqrt{2}}, \quad (3.-2)$$

$$s = \pm 1 \quad \text{für } \begin{cases} \text{Rechts-} \\ \text{Links-} \end{cases} \text{Polarisation} \quad (3.-2a)$$

Das Gleichungssystem (2.-12) für die $\varrho_{K\kappa}$ nimmt unter diesen Umständen für $I = 3/2$ (Fall des ^{201}Hg ; Pumpen im unpolarisierten Licht; vgl. oben) die folgende Form an⁷⁾:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho_{20} &= P - \frac{1}{\tau_0} \varrho_{20} - \frac{i\omega_1 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{3/2} (\varrho_{21} e^{i\omega t} + \varrho_{2-1} e^{-i\omega t}), \\ \frac{d}{dt} \varrho_{21} &= -\frac{1}{\tau_1} \varrho_{21} - i\omega_0 \varepsilon \varrho_{21} - \frac{i\omega_1 \varepsilon}{\sqrt{2}} (\varrho_{22} e^{i\omega t} + \sqrt{3/2} \varrho_{20} e^{-i\omega t}), \\ \frac{d}{dt} \varrho_{22} &= -\frac{1}{\tau_2} \varrho_{22} - 2i\omega_0 \varepsilon \varrho_{22} - \frac{i\omega_1 \varepsilon}{\sqrt{2}} \varrho_{21} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.-3)$$

⁶⁾ Für ϱ_{00} gilt stets: $\varrho_{00} = \frac{1}{\sqrt{2I+1}}$; vgl. (2-5).

⁷⁾ Der einfacheren Schreibweise wegen ist $\tau_{2\kappa} \rightarrow \tau_{\kappa}$ gesetzt worden.

Dieses Gleichungssystem kann für den stationären Fall mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \varrho_{20}(t) &= a_0(\omega), \\ \varrho_{21}(t) &= a_1(\omega) e^{-is\omega t}, \\ \varrho_{22}(t) &= a_2(\omega) e^{-i2s\omega t} \end{aligned} \quad (3.-4)$$

(Transformation auf das „mitrotierende Koordinatensystem“) unmittelbar gelöst werden. Beim Einsetzen von (3.-4) in (3.-3) folgt unter Beachtung von (2.-5)

$$a_0 = P\tau_0 - \frac{i\omega_1\varepsilon}{\sqrt{2}}\tau_0\sqrt{3/2}(a_1 - a_1^*), \quad (3.-5a)$$

$$\left(i(\varepsilon\omega_0 - s\omega) + \frac{1}{\tau_1}\right)a_1 = -\frac{i\omega_1\varepsilon}{\sqrt{2}}(a_2 + \sqrt{3/2}a_0), \quad (3.-5b)$$

$$\left(2i(\varepsilon\omega_0 - s\omega) + \frac{1}{\tau_2}\right)a_2 = -\frac{i\omega_1\varepsilon}{\sqrt{2}}a_1, \quad (3.-5c)$$

woraus sich mit den Abkürzungen

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \geq 0; \quad q = \frac{\omega_1}{\omega_0} > 0; \quad \delta_i = \frac{1}{\omega_0\tau_i} \quad (3.-6)$$

bei Beachtung von $\varepsilon^2 = 1$ unmittelbar⁸⁾

$$a_0(\eta) = P\tau_0 \left[1 + \frac{q^2}{2\delta_1\delta_2} \frac{\delta_1}{\delta_0} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^*} \right) \right]^{-1} \quad (3.-7)$$

$$a_1(\eta) = -i\sqrt{3/4} \frac{q}{\delta_1} \varepsilon \frac{a_0(\eta)}{N(\eta)}, \quad (3.-8)$$

$$a_2(\eta) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{q}{\delta_2} \varepsilon \frac{1}{\frac{2i(\varepsilon - s\eta)}{\delta_2} + 1} \cdot a_1(\eta) \quad (3.-9)$$

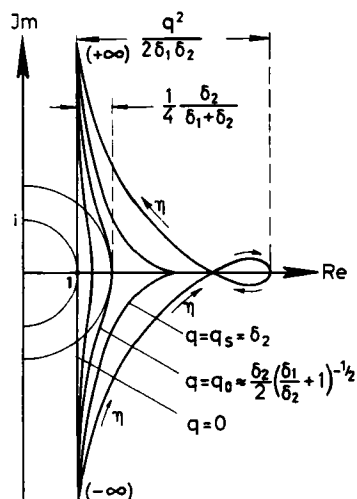


Abb. 1. Der Verlauf von $N(\eta)$ in der komplexen-Zahlen-ebene für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$. (Für $q = q_0$ — siehe Text — wird der Grenzfalle erreicht, für den $|N(\eta)|$ über einen größeren η -Bereich hin konstant bleibt)

⁸⁾ Die Formeln (3.-7 bis 3.-10) entsprechen den auch schon in [8] für den gleichen Fall hergeleiteten Formeln.

mit

$$N(\eta) = i \frac{\varepsilon - s\eta}{\delta_1} + 1 + \frac{q^2}{2\delta_1\delta_2} \left\{ 2i \frac{\varepsilon - s\eta}{\delta_2} + 1 \right\}^{-1} \quad (3.-10)$$

ergibt. Die entscheidende Größe für die Frequenzabhängigkeit der a_i ist demnach die Größe $N(\eta)$, sie ist für verschiedene Werte des Parameters q in Abb. 1 dargestellt. Man erkennt eine Kurvenschar, deren Einzelkurven für kleine Werte von q jeweils bei $\eta = 1$ zu einem Minimalwert von $|N(\eta)|$ führen. (Die Kreise $|z| = \text{const}$ berühren die Kurven $N(\eta)$ nur in dem Punkt $\eta = 1$). Für größere Werte von q ($q > q^0$; $q^0 = \frac{\delta_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + 1 \right)^{-1/2}$) werden dagegen die Kurven $N(\eta)$ bei zwei Werten von η ($\eta = 1 \pm \Delta\eta(q)$) von den Kreisen $|z| = \text{const}$ berührt⁹⁾; hier nimmt $|N(\eta)|$ für zwei Werte von η einen Minimalwert an.

Die Kurvenschar $N(\eta)$ ist in der nebenstehenden Figur den Verhältnissen bei ^{201}Hg entsprechend (sign $\gamma_K = -1$) für den Fall $\varepsilon = s = -1$ aufgezeichnet. Ein negativer Wert von $\varepsilon = \text{sign } \gamma_K$ führt – wie ersichtlich nur für $s = -1$, d.h. für ein links-polarisiertes Magnetfeld, zu einem „Resonanzverhalten“.

Der andere Resonanzfall ($\varepsilon = s = +1$; „Resonanz für rechts-zirkularpolarisiertes Wechselfeld“) würde in der Abb. 1 nur die Laufrichtung von η ändern.

Daneben müssen auch noch die „antiresonanten“ Fälle

$$\varepsilon = -s = +1 \quad \text{und} \quad \varepsilon = -s = -1$$

betrachtet werden. Die diesen Fällen zugeordneten Kurven für $N(\eta)$ sind die Fortsetzung der Kurven in Abb. 1 für negative Werte von η ; sie führen zu

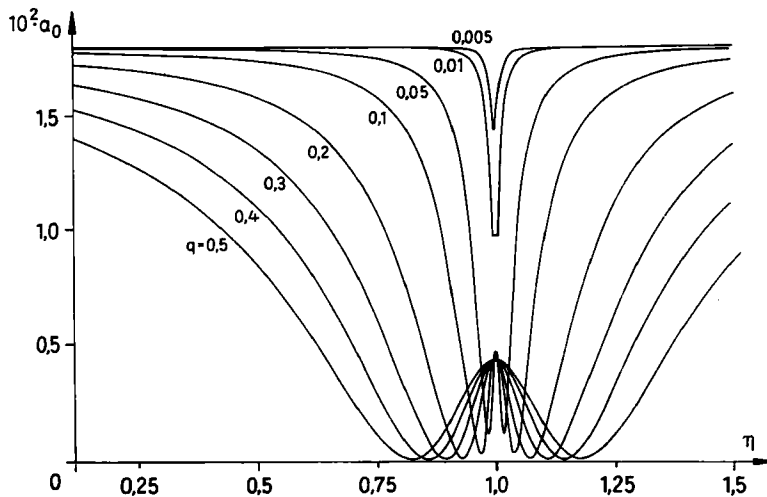


Abb. 2. Frequenzabhängigkeit von $a_0(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$. Die Einsattelung der Resonanzabschwächung tritt erst ab $q = q_0$ (siehe Text) auf (hier $q_0 \approx 0,005$). Die Kurven sind mit den für einen optischen Pump-Prozeß typischen Werten $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 10^{-2}$ s, $\omega_0 = 10^4$ s $^{-1}$; $P = 1,8$ s $^{-1}$, d.h. für $\delta_0 = \delta_{1,2} = 10^{-2}$; gezeichnet

⁹⁾ $\Delta\eta(q)$ ist eine in analytisch wenig übersichtlicher Weise von den Parametern δ_0 , δ_1 und δ_2 abhängige Funktion der Variablen q .

keinem Minimum von $N(\eta)$ und damit zu keinem Resonanzverhalten in den Größen a_0, a_1, a_2 .

Da nun (vgl. (3.-7)) ein Minimalwert von $|N(\eta)|$ zu einem Minimalwert von $a_0(\eta)$ führt, ist für $a_0(\eta)$ ein Kurvenverlauf zu erwarten, der für kleine Werte von q zu einem Minimum von a_0 bei $\eta = +1$ führt; bei größeren Werten von q ($q > q^0$) wird ein Minimum jeweils bei $\eta = 1 \pm \Delta\eta(q)$, das heißt bei zwei Werten von η symmetrisch zu $\eta = 1$, angenommen.

Dieser Kurvenverlauf ist in Abb. 2 aufgetragen. Man erkennt, wie die durch den Pumpprozeß erreichte Gleichgewichtsausrichtung $a_0 = P\tau_0$ für kleine Werte von q bei der Resonanzfrequenz $\eta = +1$ in einem von q abhängenden Maße geschwächt wird, und wie sich dann bei größeren q -Werten die Stellen der maximalen Schwächung nach $\eta = 1 \pm \Delta\eta(q)$ hin verschieben.

Im einzelnen läßt sich zum Verlauf der Kurvenschar noch folgendes sagen: Der Ordinatenwert des Resonanzpunktes $\eta = 1$ ist für große Werte von q ($q^2 \gg \delta_1 \delta_2$) von q unabhängig; es gilt

$$a_0(1) = P\tau_0 (1 + 3 \delta_1/\delta_0)^{-1}.$$

Für kleine Werte von q ($q^2 \ll \delta_1 \delta_2$) gilt dagegen

$$a_0(1) = P\tau_0 \left(1 + \frac{3q^2}{2\delta_0\delta_2}\right)^{-1}.$$

Ein weiterer typischer Formparameter ist für kleine q -Werte ($q^2 \ll \delta_1 \delta_2$) die Halbwertsbreite der Resonanzabschwächung: von a_0 ; sie wird nur durch δ_1 bestimmt.

Für große q -Werte ist dagegen der Kurvenverlauf wesentlich durch die Lage der beiden Sättigungsminima bei $\eta = 1 \pm \Delta\eta(q, \tau_0, \tau_1, \tau_2)$ charakterisiert.

In jedem Falle wird die maximale Einsattelung der Resonanzabschwächung bei $\eta = 1$ erreicht. Eine von der Wechselfeldamplitude H_1 (bzw. q) abhängende Frequenzverschiebung des Resonanzpunktes tritt bei der Einwirkung eines zirkulärpolarisierten Feldes auf das Kerngemenge nicht auf; die hiervon abweichenden Verhältnisse für den Fall eines linear polarisierten Wechselfeldes werden weiter unten noch ausdrücklich herauszustellen sein.

Ein dem Verlauf von $a_0(\eta)$ entsprechendes Verhalten findet sich in den Ortskurven für die $a_1(\eta)$ und $a_2(\eta)$ wieder; sie sind in den Abb. 3 a) und b) in einer halblogarithmischen Weise dargestellt derart, daß die Phasenwinkel jeweils direkt, die Amplituden jedoch in einer logarithmischen Darstellung nach

$$A_1 = \frac{a_1}{|a_1|} \log_{10} \frac{|a_1|}{10^{-6}} \quad \text{bzw.} \quad A_2 = \frac{a_2}{|a_2|} \log_{10} \frac{|a_2|}{10^{-6}}$$

aufgetragen sind¹⁰⁾.

Man erkennt für die Frequenzabhängigkeit von $a_1(\eta)$ einen Verlauf, der im wesentlichen — in Übereinstimmung mit (3.-8) — den Verlauf von $(N(\eta))^{-1}$, um den Faktor ($-i$) gedreht, widerspiegelt. Der Schlenker bei $\eta \sim 1$ gibt die Schleife von $N(\eta)$ in Abb. 1 wieder; er sollte bei kleineren Werten von q verschwinden.

¹⁰⁾ a_1 und a_2 Werte mit einer Amplitude $\leq 10^{-6}$ sind in den Abbildungen nicht wiedergegeben; sie können bei der für die Amplituden gewählten Darstellung nur bei einer doppelten Überdeckung der Zeichenebene aufzeichnet werden.

Auf der anderen Seite wird der Schlenker für größere Werte von q immer größer; bei Werten von $q > 0,05$ tritt ein Hin- und Herpendeln der Phase von a_1 um einen Winkel von $\approx \frac{\pi}{2}$ auf. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß der Schlenker für $q \approx 0,05$ auf einen η -Bereich von $0,991 \leq \eta \leq 1,009$ beschränkt bleibt, auf der anderen Seite aber bei größeren q -Werten sich über einen bedeutend größeren Frequenzbereich $0,92 \leq \eta \leq 1,08$ erstreckt. Die mit dem Schlenker verbundene Änderung der Amplitude von a_1 um etwa den Faktor 10 bei $\eta \approx 1$ (man beachte den Schnitt der Ortskurve mit den Kreisen $|a_1| = 10^{-4}$ und $|a_1| = 10^{-3}$) entspricht der Einsattelung der $a_0(\eta)$ -Kurven bei den entsprechenden q -Werten.

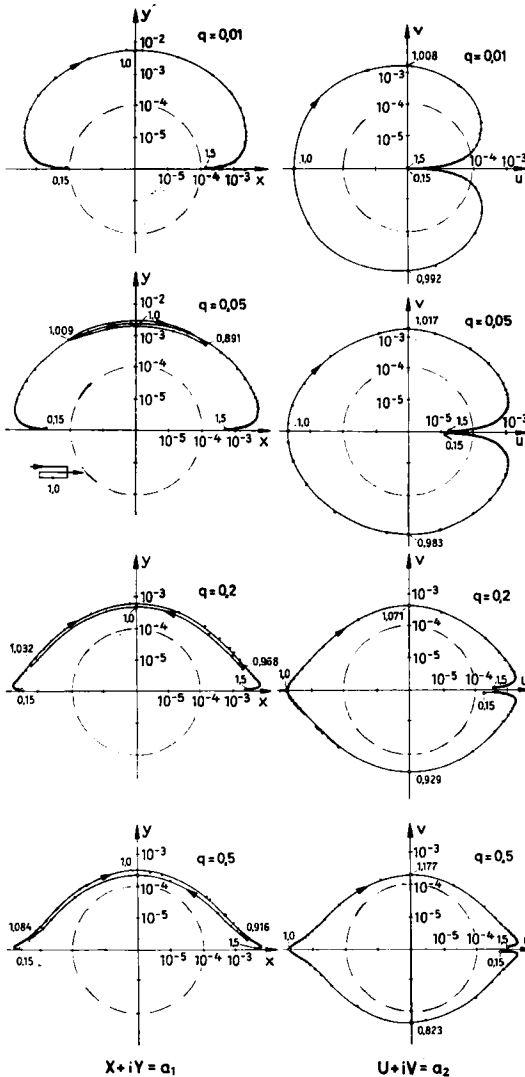


Abb. 3. Ortskurven von $a_1(\eta)$ und $a_2(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$ (bez. der halblogarithmischen Darstellung vgl. Text; bez. der gewählten Zeitkonstanten vgl. Abb. 2)

Für den Verlauf der $a_2(\eta)$ -Kurven gilt demgegenüber das Folgende: Die Beziehung (3.-9) ergibt nach einfacher Umrechnung

$$a_2(\eta) = -\sqrt{3/8} \frac{q^2}{\delta_1 \delta_2} P \tau_0 \left\{ \left(2i \frac{1-\eta}{\delta_2} + 1 \right) \left(i \frac{1-\eta}{\delta_1} + 1 \right) + \frac{q^2}{2\delta_1 \delta_2} \cdot \left[1 + 2i(1-\eta) \delta_0 \frac{3}{2} \left(1 + \frac{N}{N^*} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (3.-12)$$

Die Größe $a_2(\eta)$ ist demnach für kleine Werte von q ($q^2 \ll \delta_1 \delta_2$) im wesentlichen durch

$$a_2(\eta) \approx -\sqrt{3/8} \frac{q^2}{\delta_1 \delta_2} P \tau_0 \frac{1}{\left(2i \frac{1-\eta}{\delta_2} + 1 \right) \left(i \frac{1-\eta}{\delta_1} + 1 \right)} \quad (3.-13)$$

vorgegeben. Der Nenner dieses Ausdrucks ergibt als Ortskurve in der komplexen Zahlenebene dargestellt eine in Richtung der negativ reellen Achse offene Parabel, der Ausdruck (3.-13) dementsprechend unter Beachtung des (—) Vorzeichens in (3.-13) die in Abb. 3 b) dargestellte herzförmige Kurve. Für größere Werte von q wird der Parabel der Ausdruck

$$\frac{q^2}{2\delta_1 \delta_2} \left[1 + 2i(1-\eta) \delta_0 \frac{3}{2} \left(1 + \frac{N}{N^*} \right) \right]$$

additiv überlagert; er führt symmetrisch zu $\eta = 1$ zu einer Aufweitung der Parabel und einer Streckung in Richtung der reellen Achse. Dies macht sich im Verlauf der $a_2(\eta)$ -Kurven in der in Abb. 3 b) deutlich zunehmenden Anspitzung der Kurven bemerkbar.

Darüber hinaus ist wieder zu beachten, wie bei kleinen Werten von q der Bereich mit $|a_2(\eta)| \gtrsim 10^{-3}$ auf den Frequenzbereich $0,99 \leq \eta \leq 1,01$ beschränkt bleibt und sich — ähnlich wie bei den $a_1(\eta)$ -Kurven — auch wiederum erst bei größeren Werten von q auf einen größeren Bereich von η (symmetrisch zu $\eta = 1$) ausweitet.

Im übrigen gilt auch hier wieder, daß die Einzelheiten — und hierbei insbesondere die η -Beifferung der Kurven zu verschiedenen q -Werten — von den speziell vorliegenden Werten der P , τ_0 , τ_1 und τ_2 und ihrem Verhältnis untereinander abhängen.

4. Die Resonanzerscheinungen unter dem Einfluß eines linear-polarisierten Wechselfeldes

4.1. Das Differentialgleichungssystem und das Verfahren zu seiner Lösung

Für den Fall eines nach der x -Richtung linear-polarisierten Wechselfeldes wird in (2.-1 a) $\alpha = 0$ und somit

$$f_+(t) = f_-(t) = \cos \omega t; \omega > 0. \quad (4.1-1)$$

Das Differentialgleichungssystem (2.-12) für die $q_{2\kappa}$ nimmt in diesem Falle die Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_{20} &= P - \frac{1}{\tau_0} q_{20} & -i\omega_1 \varepsilon \sqrt{3/2} \cos \omega t (q_{21} + q_{2-1}) \\ \frac{d}{dt} q_{21} &= -\frac{1}{\tau_1} q_{21} - i\omega_0 \varepsilon q_{21} & -i\omega_1 \varepsilon \cos \omega t (q_{22} + \sqrt{3/2} q_{20}) \\ \frac{d}{dt} q_{22} &= -\frac{1}{\tau_2} q_{22} - 2i\omega_0 \varepsilon q_{22} & -i\omega_1 \varepsilon \cos \omega t q_{21} \end{aligned} \quad (4.1-2)$$

an. Dieses System kann nicht mehr wie oben (3.-4) durch einen einfachen Transformationsansatz gelöst werden. Die stationären Lösungen des Systems können jedoch nach dem FLOQUET-Theorem immer in der Form

$$\begin{aligned}\varrho_{20}(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{20}^{(n)} e^{i\omega n t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(0)} e^{i\omega n t}, \\ \varrho_{21}(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{21}^{(n)} e^{i\omega n t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n^{(1)} + i\beta_n^{(1)}) e^{i\omega n t}, \\ \varrho_{22}(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{22}^{(n)} e^{i\omega n t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n^{(2)} + i\beta_n^{(2)}) e^{i\omega n t}\end{aligned}\quad (4.1-3)$$

mit

$$\alpha_{-n}^{(0)} = \alpha_n^{(0)*}; \quad \alpha_{-n}^{(1)} = \alpha_n^{(1)*}; \quad \beta_{-n}^{(1)} = \beta_n^{(1)*}; \quad \text{usw.}$$

angesetzt werden.

Geht man mit diesem Ansatz in das Gleichungssystem (4.1-2) ein und benutzt die oben eingeführten Abkürzungen

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad q = \frac{\omega_1}{\omega_0}; \quad \delta_i = \frac{1}{\omega_0 \tau_i},$$

so folgt:

$$(i\eta n + \delta_0) \alpha_n^{(0)} = \frac{P}{\omega_0} \delta_{n,0} + \sqrt{\frac{6}{2}} \frac{q\varepsilon}{2} (\beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n+1}^{(1)}), \quad (4.1-6a)$$

$$(i\eta n + \delta_1) \alpha_n^{(1)} = +\varepsilon \beta_n^{(1)} + \frac{q\varepsilon}{2} (\beta_{n-1}^{(2)} + \beta_{n+1}^{(2)}), \quad (4.1-6b)$$

$$(i\eta n + \delta_1) \beta_n^{(1)} = -\varepsilon \alpha_n^{(1)} - \frac{q\varepsilon}{2} (\alpha_{n-1}^{(2)} + \alpha_{n+1}^{(2)} + \sqrt{3/2} (\alpha_{n-1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(0)})), \quad (4.1-6c)$$

$$(i\eta n + \delta_2) \alpha_n^{(2)} = +2\varepsilon \beta_n^{(2)} + \frac{q\varepsilon}{2} (\beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n+1}^{(1)}), \quad (4.1-6d)$$

$$(i\eta n + \delta_2) \beta_n^{(2)} = -2\varepsilon \alpha_n^{(2)} - \frac{q\varepsilon}{2} (\alpha_{n-1}^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)}). \quad (4.1-6e)$$

Aus diesem Gleichungssystem wird der Koeffizient $\alpha_n^{(0)}$ eliminiert, indem in Gl. (4.1-6c) $\alpha_{n-1}^{(0)}$ und $\alpha_{n+1}^{(0)}$ durch die aus Gl. (4.1-6a) folgenden Größen ersetzt werden.

Unter Benutzung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}D_q^{(n)} &= \frac{3q^2}{4} \left(\frac{1}{i\eta(n+1) + \delta_0} + \frac{1}{i\eta(n-1) + \delta_0} \right), \\ \sigma_n^{(-)} &= \frac{1}{i\eta(n-1) + \delta_0}, \\ \sigma_n^{(+)} &= \frac{1}{i\eta(n+1) + \delta_0}\end{aligned}\quad (4.1-7)$$

läßt sich das Ergebnis wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} i\eta n + \delta_1 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & i\eta n + \delta_1 + D_q^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\eta n + \delta_2 & -2\varepsilon \\ 0 & 0 & 2\varepsilon & i\eta n + \delta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_n^{(1)} \\ \beta_n^{(1)} \\ \alpha_n^{(2)} \\ \beta_n^{(2)} \end{pmatrix} \\
 &= -\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{P \cdot q}{\omega_0 \delta_0} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{n-1}^{(1)} \\ \beta_{n-1}^{(1)} \\ \alpha_{n-1}^{(2)} \\ \beta_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^{(1)} \\ \beta_{n+1}^{(1)} \\ \alpha_{n+1}^{(2)} \\ \beta_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} \\
 &- \frac{3}{4} q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n^{(-)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{n-2}^{(1)} \\ \beta_{n-2}^{(1)} \\ \alpha_{n-2}^{(2)} \\ \beta_{n-2}^{(2)} \end{pmatrix} - \frac{3}{4} q^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n^{(+)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{n+2}^{(1)} \\ \beta_{n+2}^{(1)} \\ \alpha_{n+2}^{(2)} \\ \beta_{n+2}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.1-8)
 \end{aligned}$$

Zur weiteren Behandlung des Gleichungssystems werden noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_n^{(1)} \\ \beta_n^{(1)} \\ \alpha_n^{(2)} \\ \beta_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.1-9)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \quad Q_n^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n^{(\pm)} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (4.1-10)$$

$$R_n^{(1)} = \begin{pmatrix} i\eta n + \delta_1 & -\varepsilon \\ +\varepsilon & i\eta n + \delta_1 + D_q^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (4.1-11)$$

$$R_n^{(2)} = \begin{pmatrix} i\eta n + \delta_2 & -2\varepsilon \\ +2\varepsilon & i\eta n + \delta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.1-12)$$

Damit geht das Gleichungssystem (4.1-8) in folgendes System über:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} R_n^{(1)} & 0 \\ 0 & R_n^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \end{pmatrix} \\
 &= -\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{P \cdot q}{\omega_0 \delta_0} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{J} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} X_{n-1}^{(1)} \\ X_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{n+1}^{(1)} \\ X_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} \right\} \\
 &- \frac{3q^2}{4} \begin{pmatrix} Q_n^{(-)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{n-2}^{(1)} \\ X_{n-2}^{(2)} \end{pmatrix} - \frac{3q^2}{4} \begin{pmatrix} Q_n^{(+)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{n+2}^{(1)} \\ X_{n+2}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.1-13)
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann in zwei getrennte Systeme aufgespalten werden.

$$R_n^{(1)} X_n^{(1)} = - \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \frac{P \cdot q}{\omega_0 \delta_0} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \mathcal{J} + \frac{q}{2} R (X_{n-1}^{(2)} + X_{n+1}^{(2)}) - \frac{3q^2}{4} \{ Q_1^{(-)} X_{n-2}^{(1)} + Q_n^{(+)} X_{n+2}^{(1)} \}. \quad (4.1-14)$$

$$R_n^{(2)} X_n^{(2)} = \frac{q}{2} \cdot R (X_{n-1}^{(1)} + X_{n+1}^{(1)}). \quad (4.1-15)$$

Setzt man nun Gl. (4.1-15) in Gl. (4.1-14) ein, so ist damit die allgemeine Rekursionsformel für die $X_n^{(1)}$ hergeleitet.

$$R_n^{(1)} X_n^{(1)} = - \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \frac{P \cdot q}{\omega_0 \delta_0} (\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \cdot \mathcal{J} + \frac{q^2}{4} R (R_{n-1}^{(2)})^{-1} R (X_{n-2}^{(1)} + X_n^{(1)}) + \frac{q^2}{4} R (R_{n+1}^{(2)})^{-1} R (X_n^{(1)} + X_{n+2}^{(1)}) - \frac{3q^2}{4} (Q_n^{(-)} X_{n-2}^{(1)} + Q_n^{(+)} X_{n+2}^{(1)}). \quad (4.1-16)$$

Aus den Lösungen von (4.1-16) können rückwärts nach Gl. (4.1-15) und (4.1-6a) alle anderen interessierenden Größen also $\alpha_n^{(0)}$, $\alpha_n^{(2)}$, $\beta_n^{(2)}$ hergeleitet werden.

An dem Gleichungssystem (4.1-16) erkennt man, daß das Rekursionssystem in zwei Systeme, eines für gerade Werte von n und eines für ungerade Werte von n zerfällt. Das System für die geraden Werte von n ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit der Lösung $X_n^{(1)} = 0$ für $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. Lediglich das Rekursionssystem für die ungeraden Werte von n kann wegen der Inhomogenität für $n = \pm 1$ in nichttrivialer Weise gelöst werden.

4.2. Das numerische Verfahren zur Lösung des Rekursions-Systems für die FOURIER-Koeffizienten

Um die Lösungen des Rekursionssystems 4.1-16 explizit anzugeben, muß für die verschiedenen Werte der Parameter — und hier insbesondere für die verschiedenen Werte von ω — jeweils ein unendlich-dimensionales lineares Gleichungssystem gelöst werden. Hierzu wurde das folgende auf einer Rechenmaschine programmierte, numerische Näherungsverfahren benutzt:

Die Gln. (4.1-16) bilden für $n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm n_0$ unter Vernachlässigung der Terme $\pm(n_0 + 2)$ ein lineares Gleichungssystem in den $n_0 + 1$ Unbekannten $X_n^{(1)}$ bzw. in den $2(n_0 + 1)$ Unbekannten $\alpha_n^{(1)}$, $\beta_n^{(1)}$ mit $n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm n_0$. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert abhängig von n_0 verschiedene Näherungswerte $X_1^{(n, n_0)}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_0$) für die Lösungsvektoren $X_1^{(n)}$. Dabei werden — zumindest für kleine Werte von q — die $X_1^{(n, n_0)}$ für $n_0 \geq n$ gegen die $X_1^{(n)}$ konvergieren.

Die Konvergenz dieses Verfahrens wurde in Abhängigkeit von n_0 und q getestet. Für $q \leq 0,5$ sind die Abweichungen der für verschiedene Werte n_0 , ($n_0 \geq 5$), erhaltenen Lösungen kleiner als 1% für fast alle η -Werte. Ausgenom-

men sind lediglich die Stellen der subharmonischen Resonanzen (s. unten). An diesen η -Stellen ($\eta = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$) wird eine Übereinstimmung von etwa 10% erreicht. Die weiter unten beschriebenen Ergebnisse wurden in der Näherung $n_0 = 9$ berechnet.

4.3. Die Ergebnisse einer numerischen Lösung des Rekursions-Systems für die in einem optisch gepumpten ^{201}Hg -Atomgemenge typischen Betriebsverhältnisse

Setzt man die schon oben (Kap. 3) benutzten für das optischen Pumpen von ^{201}Hg typischen Werte

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 10^{-2} \text{ s} & \omega_0 &= 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\ \tau_1 &= 10^{-2} \text{ s} & P &= 1,8 \text{ s}^{-1} \\ \tau_2 &= 10^{-2} \text{ s}\end{aligned}$$

in die Beziehungen (4.1-2) und (4.1-3) ein, so resultieren daraus die im folgenden zusammengestellten Werte für die FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{2n}^{(n)}$ bzw. $\varrho_{2n}^{(-n)}$ der Irreduzibel-Tensor-Komponenten.

4.3-1 Die Frequenzabhängigkeit von $\varrho_{20}^{(0)}$.

Die Größe $\varrho_{20}^{(0)}$ ist eine reelle Größe; ihre Frequenzabhängigkeit ist in Abb. 4 aufgetragen. Die für die verschiedenen q -Werte geltenden Kurven zeigen in ihrer Grundstruktur den gleichen Verlauf wie die Kurven in Abb. 2. Zusätzlich dazu beobachtet man in den hier wiedergegebenen Kurven noch zwei weitere Erscheinungen:

a) die Frequenzverschiebung des Resonanzpunktes (das Maximum der Einsattelung liegt nicht bei $\eta = 1$),

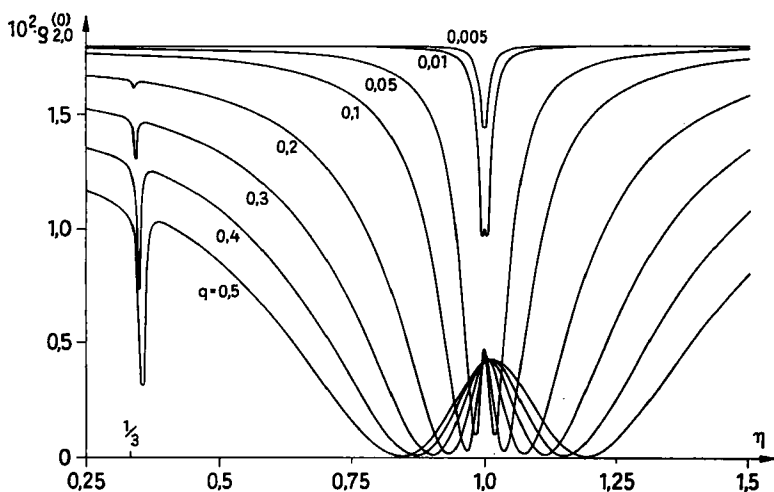


Abb. 4. Frequenzabhängigkeit von $\varrho_{20}^{(0)}(\eta)$ für verschiedene Parameter $q = H_1/H_0$. Bezüglich der Zeitkonstanten vgl. Abb. 2

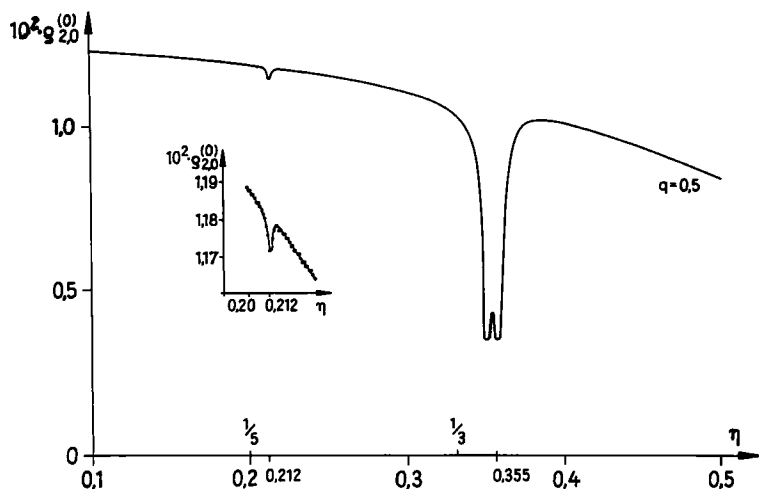


Abb.5. Frequenzabhängigkeit von $\varrho_{20}^{(0)}(\eta)$ für $q = 0,5$ im Bereich der subharmonischen Resonanzen. Die Resonanz bei $\eta \approx 1/5$ ist als Einsatz in die Abb. nochmals im größeren Maßstab aufgetragen

b) bei $\eta \sim \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ usw. treten subharmonische Resonanzen auf (von den subharmonischen Resonanzen ist hier nur die zweite bei $\eta \sim \frac{1}{3}$ wiedergegeben).

In der Erscheinung a) spiegelt sich das als BLOCH-SIEGERT-Shift bekannte Phänomen, in der Erscheinung b) das üblicherweise als „Drei-Quanten-Übergang“ bezeichnete Phänomen wider. In höherer spektraler Auflösung dargestellt zeigen dabei auch die subharmonischen Resonanzen den für den Spin $I = 3/2$ typischen Verlauf (Abb.5); es handelt sich demnach auch bei den subharmonischen Resonanzen — ebenso wie bei der Hauptresonanz — um keine einfache Resonanzerscheinung mit dem dafür typischen Kurvenverlauf, sondern um eine kompliziertere Erscheinung [35].

Auf die darüber hinaus in dieser Figur deutlich werdende vierte subharmonische Resonanz bei $\eta \sim 1/5$ sei hingewiesen.

4.3-2 Die Frequenzabhängigkeit der FOURIER-Koeffizienten

$\varrho_{20}^{(2)}$ und $\varrho_{20}^{(4)}$

In den FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{20}^{(2)}$ und $\varrho_{20}^{(4)}$ — die höheren FOURIER-Koeffizienten sind um einen Faktor $\sim 10^3$ kleiner — wird der Sachverhalt beschrieben, daß die Tensorkomponente ϱ_{20} hier — im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der Einwirkung eines zirkularpolarisierten Wechselfeldes (Kap. 3) — mit den Frequenzen 2ω und 4ω zeitlich moduliert ist. Die Frequenzabhängigkeit der (komplexen) Zahlen $\varrho_{20}^{(2)}$ und $\varrho_{20}^{(4)}$ ist in der schon in Kap. 3 erläuterten Weise in den Abb.6 a) und b) aufgetragen.

Man erkennt, bei kleinen Werten von q für $\varrho_{20}^{(2)}$ eine Frequenzabhängigkeit, die in ihren Grundzügen dem Verlauf von $a_1(\eta)$ (vgl. Abb.3) weitgehend ähn-

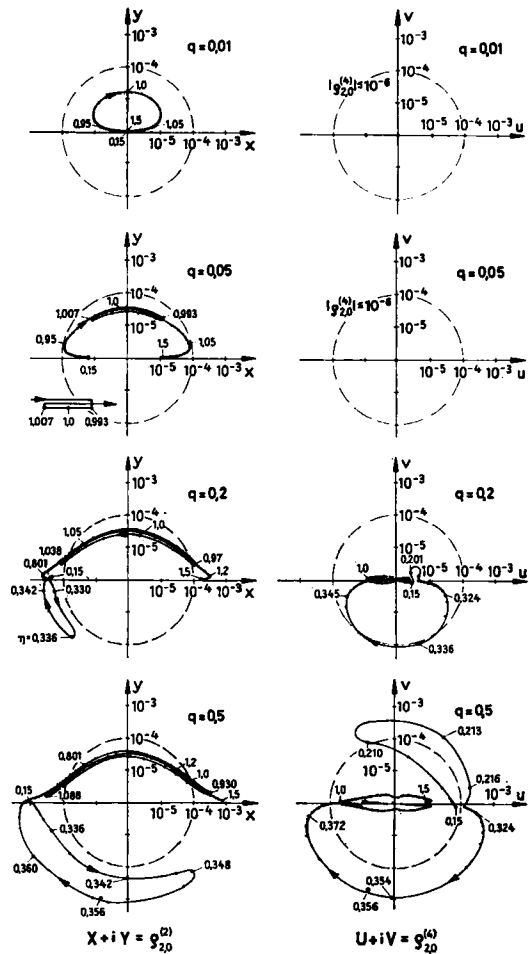


Abb. 6. Ortskurven von $g_{20}^{(2)}(\eta)$ und $g_{20}^{(4)}(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$. Bezüglich der gewählten halblogarithmischen Darstellung vgl. Seite 368. Bezüglich der Zeitkonstante vgl. Abb. 2

lich ist, wie es mit der Näherungslösung $g_{21}^{(-1)} \sim a_1$ auch aus (4.1-2) direkt herzuleiten ist.

Für größere q -Werte tritt bei $\eta \sim 1/3$ eine Resonanzschleife (subharmonische Resonanz von $g_{20}^{(2)}$) auf. Darüber hinaus sollten bei $\eta \sim 1/5, 1/7$ usw. weitere ähnliche Resonanzerscheinungen auftreten.

Demgegenüber tritt die Resonanz bei $\eta \sim 1$ im Verlauf von $g_{20}^{(4)}$ nicht auf¹¹⁾. Resonanzen werden hier vielmehr — und dies auch erst bei höheren q -Werten — nur bei den Frequenzen $\eta \sim 1/3, 1/5, 1/7$ (und andeutungsweise auch noch bei der Frequenz $2/5$) sichtbar.

¹¹⁾ $g_{20}^{(4)}$ hat für $q \sim 0,01$ und $q = 0,05$ bei den hier benutzten Werten für die physikalischen Parameter (P, τ_0, τ_1 und τ_2) einen Wert $\leq 10^{-6}$ und kann dementsprechend (vgl. die Fußnote auf Seite 367) hier nicht mehr dargestellt werden.

4.3.3 Das Frequenzverhalten der FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{21}^{(\pm n)}$

Die FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{21}^{(\pm n)}$ (vgl. Abb. 7 und 8) zeigen für $\pm n$ ein unterschiedliches Verhalten. Hierin spiegelt sich der oben (vgl. 3.-10) schon angemerkte Sachverhalt wider, daß von den in einem linear-polarisierten Wechselfeld enthaltenen zirkular-polarisierten Wechselfeldern $e^{\pm i\omega t}$ primär immer nur das eine zu Resonanzerscheinungen führt. In dem hier betrachteten Beispielfall (Resonanzen am optisch gepumpten ^{201}Hg mit $\text{sign } \gamma_K = \varepsilon = -1$) findet sich dementsprechend das Resonanzverhalten primär nur in den FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{21}^{(+1)}$ und $\varrho_{21}^{(+3)}$ wieder.

Der FOURIER-Koeffizient $\varrho_{21}^{(+1)}$ gibt dabei im wesentlichen den Verlauf von $a_1(\eta)$ (vgl. Abb. 3) wieder; als zusätzlicher Effekt ist eine ausgeprägte q -abhän-

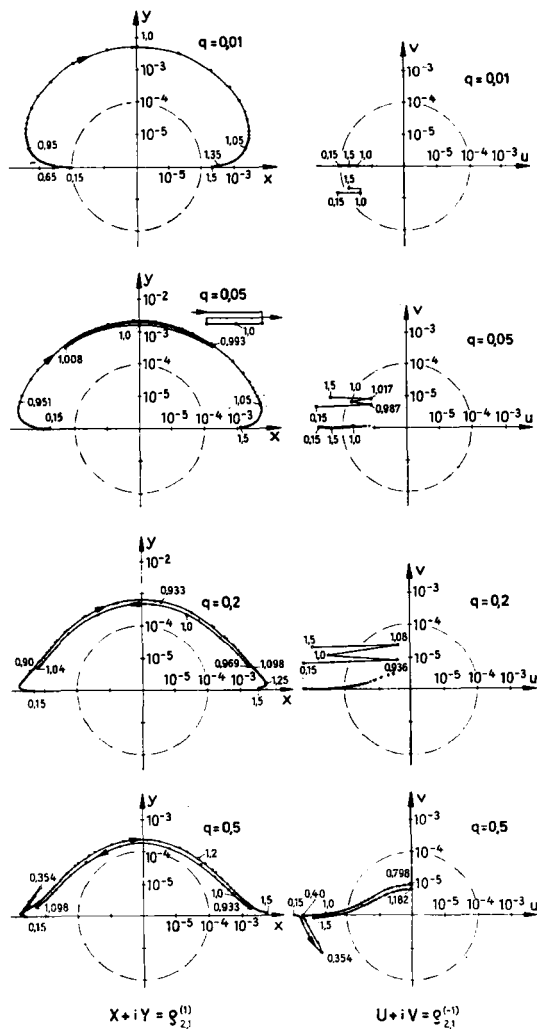


Abb. 7. Ortskurven von $\varrho_{21}^{(1)}(\eta)$ und $\varrho_{21}^{(-1)}(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$

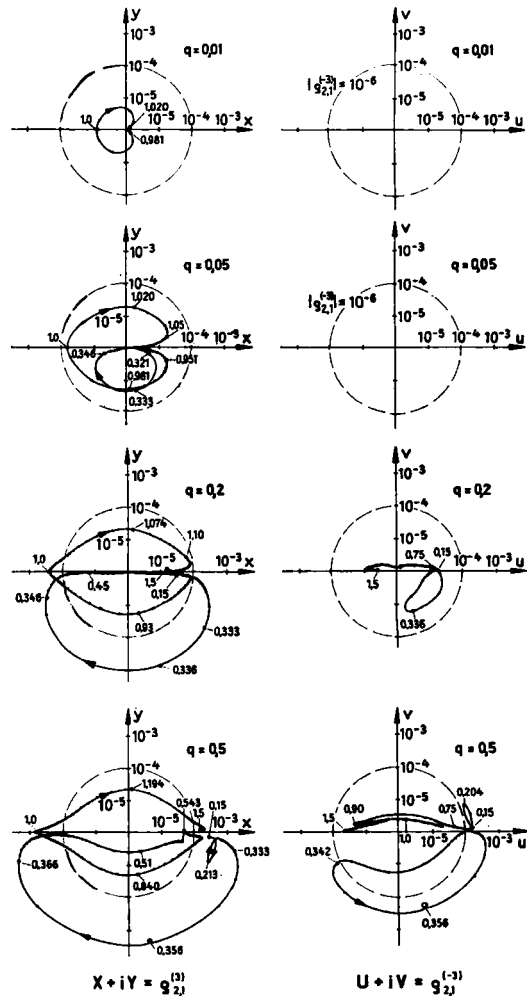


Abb. 8. Ortskurven von $\varrho_{21}^{(3)}(\eta)$ und $\varrho_{21}^{(-3)}(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = q = H_1/H_0$

gige Verlagerung des Kurvenpunktes für $\eta = 1$ (ein wieder der BLOCH-SIEGERT-Shift entsprechender Effekt) sowie eine bei $\eta \sim 1/3$ für $q > 0,2$ sich ausbildende Resonanzschleife zu beachten.

Demgegenüber ist im Verlauf von $\varrho_{21}^{(-1)}$ das geradezu komplementäre Verhalten zu beachten. Hier sind für kleine Werte von q keine Besonderheiten zu erkennen. (Antiresonanzverhalten von $\varrho_{21}^{(-1)}$). Erst bei größeren Werten von q werden — dem Verlauf von $\varrho_{20}^{(0)}$ entsprechend (vgl. Abb. 4) — zwei Resonanzminima angenommen. Darüber hinaus tritt bei $\eta \sim 1/3$ wieder die die subharmonische Resonanz kennzeichnende Resonanzschleife auf.

Für die FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{21}^{(+3)}$ und $\varrho_{21}^{(-3)}$ lassen sich ähnlich einfache Interpretationen nicht mehr finden. Das hier zutage tretende Resonanzverhal-

ten kann allenfalls als eine Art von Zusammenfassung der in den FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{22}^{(2)}$ und $\varrho_{21}^{(1)}$ zutage tretenden Resonanzerscheinungen gelten.

4.3.4 Das Frequenzverhalten der FOURIER-Koeffizienten $\varrho_{22}^{(\pm n)}$

Unter den FOURIER-Koeffizienten der Irreduzibeltensorkomponente $\varrho_{22}(t)$ fällt zunächst die Existenz eines Koeffizienten $\varrho_{22}^{(0)}$ (Abb. 9) besonders auf. Ein von Null verschiedener Wert dieses Koeffizienten — $\varrho_{22}^{(0)}$ ist im allgemeinen eine frequenzabhängige komplexe Größe — bedeutet, daß das Kerngemenge unter der Einwirkung eines linear-polarisierten magnetischen Wechselfeldes selbst im Zeitmittel nicht mehr nach der z -Achse orientiert ist. Abhängend von der Frequenz η und dem Vorzeichenfaktor ε wird vielmehr von dem Kerngemenge unter der Einwirkung des magnetischen Wechselfeldes eine Orientierung angenommen, bei der die Achse des ($K=2$)-Ausrichtungs-(alignment)-Ellipsoides nach Maßgabe des $\varrho_{22}^{(0)}$ Wertes aus der z -Achse herausgedreht ist, obwohl der optische Pumpprozeß zu einer Ausrichtung nach der z -Achse führt, (vgl. die Voraussetzungen in Kap. 2). Im übrigen gilt für $\varrho_{22}^{(0)}(\eta)$ in Überein-

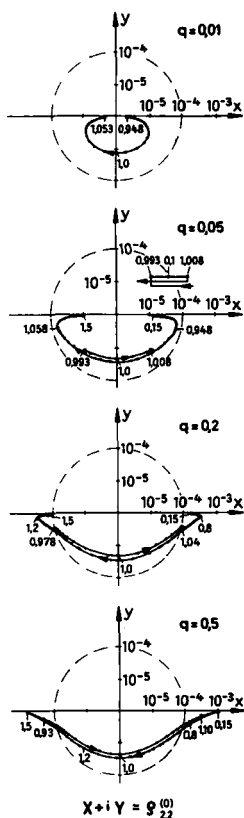


Abb. 9. Ortskurven von $\varrho_{22}^{(0)}(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$

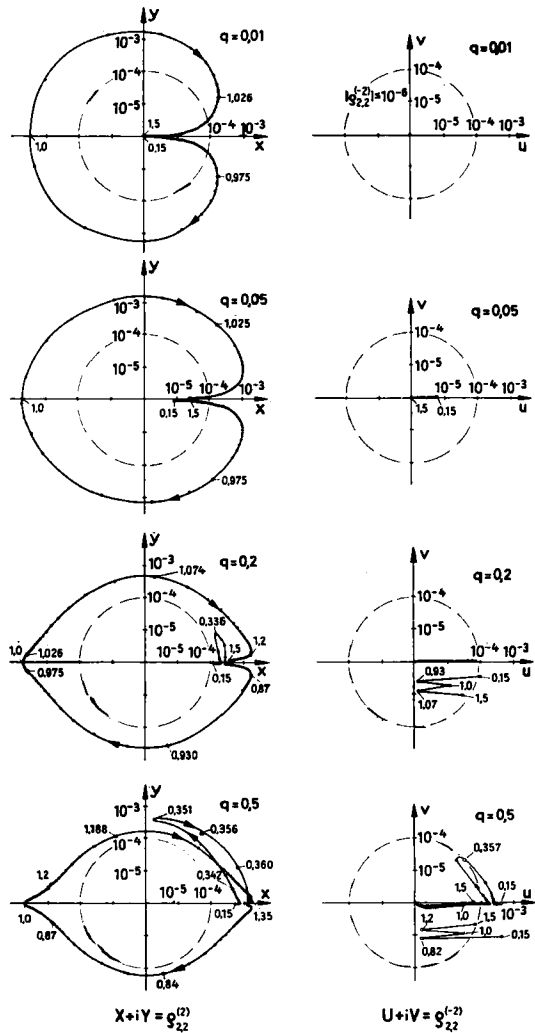


Abb. 10. Ortskurven von $\varrho_{22}^{(2)}(\eta)$ und $\varrho_{22}^{(-2)}(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$

stimmung mit (4.1-2), daß sein Verlauf im wesentlichen durch $\varrho_{21}^{(-1)}$ vorgegeben ist.

Für die anderen FOURIER-Koeffizienten (vgl. Abb. 10 und Abb. 11) gilt folgende Bemerkung:

In dem Verlauf von $\varrho_{22}^{(+2)}$ spiegelt sich — in Übereinstimmung mit den Ausführungen am Eingang von 4.3-2 — zunächst einmal der Verlauf von $a_2(\eta)$ (vgl. Abb. 3), ergänzt durch das subharmonische Resonanzverhalten bei $\eta \sim 1/3$, wider. $\varrho_{22}^{(-2)}$ hat demgegenüber — ähnlich wie $\varrho_{21}^{(-1)}$ — einen wesentlich komplizierteren, durch die Überlagerung von verschiedenen Einflüssen vorgegebenen

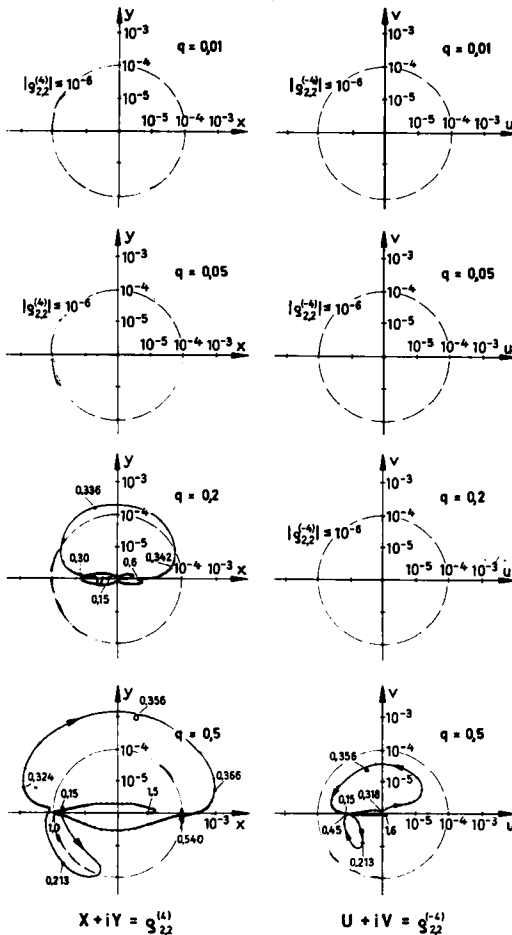


Abb.11. Ortskurven von $\varrho_{21}^{(4)}(\eta)$ und $\varrho_{21}^{(-4)}(\eta)$ für verschiedene Werte des Parameters $q = H_1/H_0$

Verlauf. Auf die für verschiedene Werte von q sich beachtlich ändernde Größenordnung von $|\varrho_{22}^{(-2)}|$ sei hingewiesen.

Der Verlauf von $\varrho_{22}^{(\pm 4)}$ zeigt diese starke Abhängigkeit von q in einem noch weiter verstärkten Maße. Die Größe nimmt einen von Null verschiedenen Wert nur noch an den Stellen der subharmonischen Resonanzen $\eta \sim 1/3$ bzw. $\eta \sim 1/5$ an.

5. Zusammenfassung

Die vorstehend durchgeführten Überlegungen und die daraus resultierenden Figuren zeigen, daß unter dem Einfluß eines hinreichend starken linear-polarisierten magnetischen Wechselfeldes in einem optisch — (mit unpolarisiertem Licht) — gepumpten Kerngemenge komplizierte zeitliche Änderungen seiner Orientierungsstruktur resultieren. Die dabei auftretenden Erscheinungen sind

in der vorliegenden Arbeit für einen bestimmten, typischen Satz der physikalischen Parameter (P , τ_0 , τ_1 und τ_2) diskutiert; sie dürften für andere Werte der physikalischen Parameter ein quantitativ anderes Ausmaß annehmen, qualitativ aber immer ein ähnlich typisches Verhalten in den besonders herausgestellten Merkmalen zeigen. Desgleichen sollten ähnliche Erscheinungen auch für andere Spinwerte und andere Polarisierungen des Pumplichtes oder auch andere Richtungsverhältnisse und andere Polarisierungen des H_1 -Wechselfeldes zu erwarten sein.

In jedem Falle aber sind — und dies sei hier noch einmal ausdrücklich betont — die hier im Zusammenhang miteinander behandelten Erscheinungen (BLOCH-SIEGERT-Shift, subharmonische Resonanzen, Oberwellenmodulationseffekte usw.) wesentlich an das Zusammenwirken der Magnetfeld-Spin-Wechselwirkung mit den Relaxationsprozessen gebunden. Ohne die Relaxationsprozesse sind die hier behandelten Effekte nicht existent; sie sind in ihrem Ausmaß sogar jeweils an eine bestimmte Rangfolge der verschiedenen Relaxationsprozesse gebunden.

Literaturverzeichnis

- [1] PAKE, G. E., Paramagnetic resonance, W. A. Benjamin, New York 1962.
SLICHTER, C. P., Principles of magnetic Resonance, Harper & Row New York 1963.
HECHT, H. G., Magnetic Resonance spectroscopy, J. Wiley & Sons, INC New York 1967.
- [2] RAMSEY, N. F., Molecular beams, Oxford 1956.
ABRAGAM, A., The Principles of Nuclear Magnetism., Oxford 1961.
- [3] BROSSEL, J., B. CAGNAC et A. KASTLER, J. Phys. **15** (1954) 6.
- [4] MAGERIE, J., et J. BROSSEL, C. R. Acad. Sci. (Paris) **241** (1955) 373.
- [5] WINTER, J. M., C. R. Acad. Sci. (Paris) **241** (1955) 6, 375.
- [6] WINTER, J. M., Ann. Phys. Paris **4**, (1959) 745.
- [7] KASTLER, A., J. opt. Soc. Amer. **47** (1957) 460.
- [8] CAGNAC, B., Ann. Phys., Paris **6** (1961) 467.
- [9] COHEN-TANNOUDJI, C., S. HAROCHE, C. R. Acad. Sci. (Paris) **261** (1965) 5400, **262 B** (1966) 37, 268, **264 B** (1967) 626.
- [10] HAROCHE, S., Thèse de 3-ième cycle, Paris 1967.
- [11] BAUMANN, M., and E. JACOBSON, Z. Phys. **212** (1968) 32.
- [12] WILKING, S., Z. Phys. **157** (1959) 384.
- [13] WILKING, S., Z. Phys. **157** (1959) 401.
- [14] WILKING, S., Z. Phys. **173** (1963) 490.
- [15] WILKING, S., Z. Phys. **173** (1963) 509.
- [16] BLOCH, F., u. A. SIEGERT, Phys. Rev. **57** (1940) 522.
- [17] CAPPELLER, U., u. L. DELLIT, Ann. Phys. **21** (1968) 318.
- [18] CAPPELLER, U., u. L. DELLIT, Proc. OPaLS-Conference Warschau 1968 p. 393...402.
- [19] DELLIT, L., Inaugural-Dissertation: Marburg 1969.
- [20] DODD, J. N., and G. W. SERIES, Proc. roy. Soc. **263 A** (1961) 353.
- [21] BARRAT, J. P., Proc. roy. Soc. **263 A** (1961) 371.
- [22] FRANZEN, W., P. B. NEWELL and D. S. EDMONDS, Jr., Phys. Rev. **170** (1968) 17.
- [23] SERIES, G. W., „Coherence effects in the interaction of radiation with atoms in “Physics of the on- and two electron atoms” (Proc. of the A. Sommerfeld memorial meeting Munich 1969) North Holland Publ. Comp. 1969.
- [24] SALWEN, H., Phys. Rev. **99** (1955) 1247.
- [25] RAMSEY, N. F., Phys. Rev. **100** (1955) 1191.
- [26] HACK, N. N., Phys. Rev. **104** (1956) 84.
- [27] D'YAKONOV, M. I., Soviet Phys. JETP **20** (1965) 1484, (JETP **47**, (1964) 2213.
- [28] SHIRLEY, J. H., Phys. Rev. **138 B** (1965) 979.
- [29] DEDERICHS, P. H., and G. LEIBFRIED: Z. Phys. **184** (1965) 521.
- [30] POLONSKY, N., and C. COHEN-TANNOUDJI, J. Phys. Paris **26** (1965) 409.

- [31] COHEN-TANNOUDJI, C., and S. HAROCHE, J. Phys., Paris **30** (1969) 125.
- [32] CAPPELLER, U., erscheint demnächst.
- [33] FANO, U., Rev. mod. Phys. **29**, (1957) 74.
- [34] FANO, U., u. G. RACAH, Irreducible tensorial sets, Academic Press Inc. New York 1959.
- [35] BLOCH, F., u. I. I. RABI, Rev. mod. Phys. **17** (1945) 237.

Marburg/Lahn, Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 12. Januar 1971.

Anschr. d. Verf.: Prof. Dr. U. CAPPELLER und Stud.-Ref. H. G. WEBER
Physikal. Inst. d. Univ. Marburg
BRD-355 Marburg/Lahn, Renthof 5