Opérateurs de projection en théorie des primitives aréolaires bornées.

Memoria di N. Teodorescu (a Bucarest)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - *On donne des propriétés générales des primitives aréolaires bornées et l'on met en évidence dans leur représentation intégralé deux opérateurs de projection: C de Cauchy et T de Pompeiu.*

§ 1. Introduction.

La notion de primitive aréolaire est intimement lieé à celle de dérivée aréolaire, due à D. Pompeiu [1] et dont nous avons développé la théorie dans une serie de travaux à commencer par notre Thèse [2] de 1931.

Dans cette théorie nous avons, le premier, considéré l'opération de dérivation aréolaire, comme une opération fonctionnelle indépendante de celle de dérivation partielle. C'est, à certains points de vue, une notion apparentée à celle de dérivée généralisée introduite quelques années plus tard par S. L. Sobolev, mais elle conserve aussi un caractère local spécifique qui lui assure aussi une autre signification. C'est bien cette signification de dérivée au sens de Lebesgue que nous avons relevée dans notre Thèse [2].

Des recherches récentes de I. N. Vekua, nous ont conduit à reprendre la théorie de la dérivée aréolaire, afin de la développer davantage et de mettre en évidence les rapports très étroits entre cette notion et celle de dérivée généralisée, introduite par I. N. Vekua [3] qui en constitue à certains points de vue une extension, mais non pas complète, comme nous l'avons montré récémment [4]. Cependant, la parenté entre ces deux notions est tellement intime qu'elle a conduit à de nombreux rapprochements entre les résultats réalisés et à l'utilisation d'un instrument de calcul et de représentation fondamental commun, mis en évidence aussi par D. Pompeiu, notamment l'intégrale

$$(1) \qquad g(\zeta) = T\varphi = -\frac{1}{\pi}\int_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega.$$

On y suppose généralement le domaine Δ borné, la fonction $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$, donc sommable sur Δ, le point v décrit Δ et ζ est un point fixe et arbitraire du plan complexe.

Il est vrai que l'intégrale (1) avait été utilisée maintes fois avant POMPEIU, par exemple par POINCARÉ et BELTRAMI, mais c'est lui qui, le premier, a su attirer l'attention sur les propriétés surprenantes de cette intégrale. Ainsi, par exemple, en supposant $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$ et borné, il a remplacé Δ par l'ensemble parfait de mesure non nulle E obtenu en retranchant d'un rectangle un domaine en forme de croix et répétant indéfiniment l'opération sur les rectangles restants.

La fonction $g(\zeta)$ est alors continue dans tout le plan complexe et analytique aux points extérieurs à E. C'est donc un exemple de fonction analytique uniforme continue sur l'ensemble E de ses points singuliers [5]. Plus tard, en donnant la formule de représentation intégrale des fonctions f de classe $C^1(\Delta)$, la seule envisagée par lui au point de vue de la théorie de la dérivée aréolaire, il y retrouve la même intégrale (1) avec $\varphi(v)$ continue et égale à la dérivée aréolaire $\frac{Df}{D\omega}$ de f. On a notamment:

$$f(\zeta) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int_{\Delta} \frac{\frac{Df}{D\omega}}{v-\zeta}\, d\omega \tag{2}$$

pour $\zeta \in \Delta$, où $h(\zeta)$ est une fonction holomorphe dans Δ [1].

Or, c'est cette formule, convenablement étendue, qui s'est avérée fondamentale tant dans nos travaux que dans ceux de I. N. VEKUA. D'ailleurs, la classe $C_{\bar{z}}$ des fonctions à dérivée aréolaire continue dans Δ, étudiée par I. N. VEKUA dans son premier travail de 1952, où il rencontre pour la première fois la dérivée aréolaire dans l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles du type elliptique [6], coïncide avec celle des *fonctions holomorphes* (α), introduites par nous en 1935 dans [2]; voir aussi [7]. Ne connaissant pas nos travaux, il y retrouve la plupart des résultats que nous avions établis à ce sujet et en obtient aussi d'autres qu'il applique à une étude très importante des problèmes aux limites pour le système envisagé.

La formule (2) permet de remonter de la dérivée aréolaire à la fonction même; elle met donc en évidence une opération inverse, analogue à l'obtention de la primitive d'une dérivée, comme nous l'avons déjà remarqué dans notre thèse [2] et dans d'autres travaux ultérieurs [8], [9]. Ce fut d'ailleurs le point essentiel de la théorie que nous avons développée sur la dérivée aréolaire. En effet, si le système de CAUCHY-RIEMANN

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 2A; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 2B \tag{3}$$

avec A, $B \in C^0(\Delta)$, admet un système de solutions P, $Q \in C^1(\Delta)$, on peut le représenter par la formule (2) en posant

$$(3') \qquad P + iQ = f(z)\,; \quad z = x + iy\,; \quad A + iB = \varphi$$

$$(3'') \qquad \frac{Df}{D\omega} = \varphi$$

où

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{Df}{D\omega} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]$$

représente l'expression de la dérivée aréolaire de f au sens restreint considéré par D. POMPEIU pour les fonctions f de classe $C^1(\Delta)$, appelées aussi *polygènes* dans cette théorie.

Mais, le système (3) s'admet généralement pas de solutions de classe $C^1(\Delta)$ pour A et B continus sans plus.

L'idée de notre thèse [2] *consistait précisément à substituer au système* (3) *une équation fonctionnelle permettant de trouver toute fonction* $f(z) \in C^0(\Delta)$ *dont la dérivée aréolaire* $\varphi(v) \in C^0(\Delta)$ *soit donnée arbitrairement; en d'autres termes de trouver, selon l'acception en usage aujourd'hui, des solutions généralisées, ou faibles, du système de Cauchy-Riemann.*

Il s'agissait en même temps de donner une signification à ces solutions, car ce ne fut que plus tard que la notion de solution généralisée fût introduite par le travaux de M. Picone, K. Friedrichs et surtout de S. L. Sobolev. Or, cette signification résulta du fait que l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\delta} \varphi(v)\,d\omega = 0$$

constitue une extension du système (3) de CAUCKY-RIEMANN.

En effet, en supposant le contour γ simple, rectifiable et fermé, limitant le domaine $\delta \subset \Delta$ avec Δ borné, la relation (5) a lieu pour tout couple (γ, δ) arbitraire dans Δ, si f est une solution polygène de (3″) avec $\varphi \in C^0(\Delta)$. Par conséquent, résoudre l'équation fonctionnelle (5), où $\varphi \in C^0(\Delta)$ est donné et $f \in C^0(\Delta)$ est l'inconnue, revient à trouver les solutions d'une extension du système (3) de CAUCHY-RIEMANN.

Or, nous avons démontré que l'équation (5) *admet toujours des solutions et que celles-ci sont toutes données par une formule de la forme* (2), où à $\dfrac{Df}{D\omega}$ il faut substituer φ. Les fonctions, ainsi définies, ont été appelée par nous *fonctions holomorphes* (α). Elles n'ont généralement pas de dérivées partielles du premier ordre continues, ne vérifient donc pas le système (3), mais l'équation fonctionnelle (5).

Cette extension du système de Cauchy-Riemann non homogène est d'ailleurs très naturelle, car elle est du type des relations globales résultant des théorémes généraux de Cauchy de la mécanique des milieux continus, à savoir les théorèmes de la résultante générale et du moment résultant, comme nous l'avons mis en évidence [2], [8].

Ce fut une idée analogue qui conduisit I. N. VEKUA [6] en 1952 à introduire la classe $C_{\bar{z}}$ coïncidant avec celle de nos fonctions holomorphes (α), voir [10]. En substituant ensuite, – dans des travaux ultérieurs, – à la dérivée aréolaire une dérivée généralisée au sens de SOBOLEV, coïncidant d'ailleurs avec celle-là pour une vaste classe de fonctions, il dut substituer à l'équation (5) une équation du type

$$\int\limits_{\Delta}\left[f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \varphi g\right] d\omega = 0. \tag{6}$$

Si $f \in L_1(\Delta)$ et $\varphi \in L_1(\Delta)$ vérifient (6) pour tout $g \in C^1(\Delta)$, nul à l'extérieur d'un compact $\Delta_g \subset \Delta$, il appelle φ *la dérivée généralisée de f par rapport à $\bar{z}$* en posant

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} f = f_{\bar{z}}. \tag{6'}$$

Dans ce cas f est, à son tour, appelée *$\bar{z}$-primitive de* φ [3].

Or, il arrive que *ces-primitives sont aussi représentables par une formule du type* (2) *de* POMPEIU, que nous avions déja étendue aux fonctions holomorphes (α), ainsi qu'à la classe beaocoup plus large des *primitives aréolaires bornées* [2] dont nous allons nous occouper dans ce travail et qui sont à leur tour des $\bar{z}$-primitives.

La parenté entre les travaux de I. N. VEKUA sur ce sujet et les nôtres est donc naturelle étant due, tant au point de départ commun, qu'aux notions fondamentales et aux instruments de représentation utilisés. L'équation (6) constitue une extension de (5), comme on peut le montrer tout au moins pour les primitives aréolaires bornées. En ce qui concerne le cas où $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$ n'est pas borné, nous ne savons pas jusqu'à présent si les solutions de (3) sont toujours représentables par une formule du type (2), par consequent si elles sont des $\bar{z}$-primitives. Nous avons étudié récemment ces fonctions que nous avons appelées *primitives aréolaires* [9], en montrant entre autres que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient représentables par une formule du type* (2) *est que l'intégrale* (1) *de Pompeiu* *soit une fonction continue de* ζ *dans* Δ. Or, si $\varphi(v) \in L^p(\Delta)$ avec $p \leq 2$, la fonction $T\varphi$ n'est généralement pas continue, comme l'a montré I. N. VEKUA [3]. Par conséquent, pour $\varphi \in L^1(\Delta)$, les primitives aréolaires, donc les solutions de (3), pourraient ne pas rentrer dans le classe des $\bar{z}$-primitives. D'ailleurs, la dérivée généralisée ne contient la dérivée aréolaire comme un cas particulier que sous certaines conditions, car il existe des *fonctions monogènes* (α), donc douées de dérivées aréolaires, même sommables dans Δ, qui ne sont pas des primitives aréolaires. Celles-ci, n'étant pas représentables par une formule du type (2) ne sauraient être des $\bar{z}$-primitives [9].

Il s'ensuit la nécessité de développer indépendamment la théorie des primitives aréolaires, comme nous l'avons déjà fait dans [9] *et particulièrement celle des primitives aréolaires bornées,* ce que nous faisons dans d'autres travaux récents tout en utilisant les importants résultats établis par I. N. VEKUA pour les $\bar{z}$-primitives.

L'objet du présent travail est de présenter quelques propriétés fondamentales des primitives aréolaires bornées en tant que primitives aréolaires représentables par une formule intégrale et surtout de mettre en évidence la présence des opérateurs de projection dans l'espace linéaire de ces fonctions. En effet, l'opérateur T de POMPEIU a ce caractère et la formule (2) conduit à une décomposition de l'espace considéré en somme directe de deux sous espaces linéaires, ce qui constitue une propriété remarcable de l'opérateur T. A cet opérateur est associé, dans le cas des domaines limités par des contours simples, fermés et rectifiables en nombre fini, l'opérateur C de CAUCHY qui intervient dans la représentation intégrale des fonctions holomorphes.

§ 2. Dérivée et primitive aréolaires.

Afin de préciser les idées et de faciliter la lecture de ce qui va suivre, nous allons donner quelques définitions et résultats, que nous estimons nécessaires.

DÉFINITION 1. – *La fonction* $f(z)$, *définie et continue dans le voisinage* V_{z_0} *du point* z_0 *du plan complexe, admet une dérivée aréolaire en* z_0 *si à tout* $\varepsilon > o$ *on peut faire correspondre un* $r > o$ *tel que pour tout contour* γ, *simple rectifiable et fermé, limitant un domaine* δ, *appartenant à une famille régulière au point* z_0 *et contenu dans la cercle* $C_r(z_0)$ *de rayon* r *et centré en* z_0, *on ait :*

$$\left| \frac{\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_\gamma f(z)dz}{\text{mes. } \delta} - \varphi(z_0) \right| < \varepsilon \tag{7}$$

le nombre $\varphi(z_0)$ *étant indépendant de la famille* (γ, δ). *Dans ces conditions, nous appellerons dérivée aréolaire de* $f(z)$ *en* z_0 *le nombre*

$$\varphi(z_0) = \left(\frac{Df}{D\omega}\right)_{z_0} = \lim_{\gamma \to z_0} \frac{\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz}{\text{mes. } \delta} \tag{7'}$$

et la fonction $f(z)$ *sera appelée monogène* (α) *ou aréolairement monogène en* z_0.

Cette définition, qui précise celle de POMPEIU, est *locale*, ne faisant intervenir que les propriétés de $f(z)$ dans un voisinage V_{z_0} assez réduit de z_0. La limite est entendue sur la famille régulière *quelconque* (γ, δ) lorsque γ se resserre indéfiniment autour de z_0.

La fonction $f(z) \in C^0(V_{z_0})$ étant supposée donnée, la fonction de domaine

$$F(\delta) = \frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz \tag{8}$$

est une fonctionnelle de γ à valeurs complexes et il en sera de même du rapport

$$\frac{F(\delta)}{\text{mes. } \delta}. \tag{8'}$$

Par conséquent, la relation (7) définit la convergence d'une suite numerique complexe, ce qui précise le sens de la formule (7').

DÉFINITION 2. – *La conjuguée de la dérivée aréolaire de la conjuguée* $\bar{f}(z)$ *sera appelée codérivée aréolaire (ou dérivée moyenne) de* $f(z)$ *en* z_0. *Nous allons poser :*

$$\left(\frac{Df}{D\bar{\omega}}\right)_{z_0} = \overline{\left(\frac{D\bar{f}}{D\omega}\right)}_{z_0} = -\lim_{\gamma \to z_0} \frac{\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz}{\text{mes. } \delta} \tag{9}$$

et $f(z)$ *sera appelée comonogène* (α) *en* z_0.

L'existence de la dérivée aréolaire en z_0 n'implique pas celle de la codérivée au même point.

PROPOSITION 1. – *Toute fonction* $f(z) \in C^1(V_{z_0})$ *admet des dérivées aréolaire et moyenne en* z_0 *et l'on a :*

$$\tag{9}\begin{aligned}\left(\frac{Df}{D\omega}\right)_{z_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)_{z_0} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]_{z_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\Big|_{z_0}\\ \left(\frac{Df}{D\bar{\omega}}\right)_{z_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_0} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]_{z_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\Big|_{z_0}\end{aligned}$$

Nous allons considérer surtout des fonctions $f(z) \in C^0(\Delta)$ où Δ est un domaine, en raison de la proposition suivante:

PROPOSITION 2. – *L'ensemble de définition de toute fonction $f(z)$ monogène (α) contient un ensemble ouvert sur lequel $f(z)$ est continue.*

Evidemment, si $f(z)$ est définie dans Δ, elle peut être monogène (α) seulement sur une partie E de Δ et dans ce cas nous dirons qu'elle est monogène (α) sur E.

TÉORÈME 1. – *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$, monogène (α) dans un domaine Δ, soit holomorphe dans Δ, est que sa dérivée aréolaire $\varphi(z) = \dfrac{Df}{D\omega}$ soit partout nulle dans Δ.*

Ce théoreme, établi déjà par POMPEIU, sous la forme suivante:

"*Une fonction continue de z, dont la dérivée aréolaire est nulle en chaque point, est holomorphe*", établit les rapports entre les fonctions monogènes (α) dans Δ et les fonctions holomorphes dans le même domaine: ces dernières se comportent comme les constantes par rapport à la derivation ordinaire.

PROPOSITION 3. – *Si la fonction de domaine $F(\delta)$ peut être prolongée à tout ensemble e mesurable inclus dans Δ, la dérivée aréolaire de $f(z)$ coïncide en chaque point de monogénéité (α) de $f(z)$ avec la dérivée de* LEBESGUE *de la fonction d'ensemble $F(e)$.*

Cela justifie la définition suivante de la dérivée aréolaire:

DÉFINITION 3. – *La dérivée aréolaire de $f(z) \in C^0(V_{z_0})$ au point z_0 est la dérivée de* LEBESGUE *de la fonction de domaine $F(\delta)$ sur toute famille (γ, δ) régulière en z_0.*

Si l'on prend en particulier une famille d'intervalles carrés ω centrés en z_0, on obtient pour la dérivée aréolaire la signification de *dérivée symétrique de* DE LA VALLÉE POUSSIN de la fonction $F(\omega)$.

Cette définition, qui met en évidence le rôle de la fonction de domaine $F(\delta)$, nous permet de donner à la dérivée aréolaire la signification qui permet de mettre en jeu les instruments modernes de la théorie des fonctions réelles est de l'analyse fonctionnelle.

Considérons tout d'abord le cas où la fonction d'ensemble F est définie sur une famille élémentaire d'intervalles supérieurement ouverts, inclus dans un intervalle fermé I du plan complexe.

En supposant $F(\omega)$ absolument continue sur la famille $\{\omega\}$, comme c'est une fonction additive, elle sera aussi complètement additive. Par conséquent, elle pourra être étendue à tous les ensembles $e \subset I$ par une fonction complètement additive et absolument continue $F(e)$, telle que $F(e) = F(\omega)$ pour $e = \omega$.

Nous allons supposer en plus Δ borné. Si $f(z) \in C^0(\Delta)$, il nous sera toujours possible d'inclure Δ dans un intervalle bidimensionnel fermé I. En prenant $f(z) \equiv o$ dans $I - \Delta$, la fonction $F(\omega)$ sera définie pour tout $\omega \subset I$, bien que $f(z)$ ne soit pas partout continue sur I. On aura alors la proposition suivante :

Théorème 2. - *Si pour $f(z) \in C^0(\Delta)$, avec Δ borné, la fonction d'intervalle*

$$F(\omega) = \frac{1}{2i}\int_{\lambda} f(z)dz, \tag{10}$$

définie sur une famille élémentaire $\{(\omega, \lambda)\}$ d'intervalles supérieurement ouverts, inclus dans l'intervalle fermé I, est absolument continue:

1) *$F(\omega)$ est prolongeable à tout domaine $\delta \subset \Delta$, limité par un contour simple rectifiable et fermé γ, par la fonction de domaine*

$$F(\delta) = \frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz. \tag{10'}$$

2) *A lieu la relation*

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz) - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = o \tag{11}$$

où $\varphi(v) \in L^1(I)$, presque partout finie dans I, est définie par la relation

$$F(e) = \int_{e} \varphi(v)d\omega \tag{12}$$

soit

$$\varphi(v) = \lim_{e \to v} \frac{F(e)}{\text{mes. } e} \tag{12'}$$

sur tout e mesurable inclus dans I.

3) *$f(z)$ est presque partout monogène (α) dans Δ et l'on a*

$$\frac{Df}{D\bar{\omega}} = \varphi$$

presque partout dans Δ.

C'est une proposition fondamentale pour la théorie des primitives aréolaires, car elle met en évidence tout d'abord le fait que $f(z)$ est monogène (α) presque partout dans Δ, ce qui permet d'en trouver la dérivée aréolaire à l'aide de la famille d'intervalles (ω, λ) où l'on connaît l'expression (10) de $F(e)$.

Aussitôt $\varphi(v)$ déterminée, on a par formule (12) l'extension $F(e)$ de $F(\omega)$ à tout $e \subset \Delta$.

Ensuite, on a par la formule (10') l'extension de $F(\omega)$ à tout domaine $\delta \subset \Delta$, limité par un contour γ simple, rectifiable et fermé. Enfin, on met en évidence l'équation fonctionnelle (11) qui étend celle de CAUCHY pour les fonctions holomorphes.

THÉORÈME 3. - *Si* $f(z) \in C^0(\Delta)$, *avec* Δ *borné et* $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$ *satisfont à la relation*

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\delta \varphi(v)\,d\omega = 0 \tag{13}$$

pour tout couple $(\gamma, \delta) \subset \Delta$, *la fonction* $f(z)$ *est presque partout monogène* (α) *dans* Δ *et l'on a*

$$\frac{Df}{D\omega} = \varphi$$

presque partout dans Δ.

Dans l'énoncé de ce théorème il suffit de supposer la relation (13) remplie seulement pour tout couple (ω, λ) formé par un intervalle ω et son contour λ:

$$\int_\lambda f(z)dz - \int_\omega \varphi(v)\,d\omega = 0 \tag{13'}$$

En effet on peut établir que (13') conduit à (13), en suivant le raisonnement du théorème 2 où l'on établit le relation (11).

DÉFINITION 3. - *Toute fonction* $f(z) \in C^0(\Delta)$ *avec* Δ *borné, telle que l'intégrale*

$$F(\omega) = \frac{1}{2i}\int_\lambda f(z)dz$$

étendue au contour λ *de tout intervalle* $\omega \subset \Delta$ *soit une fonction absolument continue de l'intervalle* ω, *sera appelée primitive aréolaire dans* Δ.

L'ensemble des primitives aréolaires dans Δ *sera désigné par* $\mathcal{S}_\alpha(\Delta)$.

On peut caractériser les primitives aréolaires de $\mathcal{S}_\alpha(\Delta)$ par la proposition suivante.

THÉORÈME 4. - *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f(z) \in C^0(\Delta)$, *avec* Δ *borné, soit une primitive aréolaire dans* Δ, *est qu'il existe* *une fonction* $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$ *telle que la relation*

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0 \tag{13}$$

ait lieu pour tout couple $(\gamma, \delta) \subset \Delta$.

Dans ce cas, $f(z)$ *est presque partout monogène* (α) *dans* Δ *et admet comme dérivée aréolaire* $\varphi(v)$ *presque partout dans* Δ.

Cette proposition, qui est une synthèse des théorèmes 2 et 3, caractérise les primitives aréolaires par l'équation fonctionnelle (13). Elle constitue l'extension aux primitives aréolaires du théorème de CAUCHY-MORERA pour les fonctions holomorphes.

Initialement, dans [4] et [9] nous avons introduit la notion de primitive aréolaire par une définition fondée sur le théorème 4, à savoir:

DÉFINITION 3'. – *La fonction* $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$ *sera appelée aréolairement sommable, s'il existe une fonction* $f(z) \in C^0(\Delta)$ *telle que la relation* (13) *ait lieu pour tout couple* $(\gamma, \delta) \subset \Delta$. *Dans ce cas,* $f(z)$ *sera appelée primitive aréolaire de* $\varphi(v)$ *dans* Δ.

Les deux définitions 3 et 3' sont équivalentes en raison des théorèmes 2 et 3, mais la définition 3 a l'avantage de caractériser les primitives aréolaires intrinséquement, sans avoir recours à leurs dérivées aréolaires. En revanche, la définition 3' expliqne mieux le terme primitive aréolaire, car elle nous fait remonter de $\varphi(v)$ a $f(z)$.

La proposition suivante met en évidence le rôle des fonctions holomorphes en théorie des primitives aréolaires:

PROPOSITION 3. – *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0 \tag{13}$$

dans $\mathcal{S}_\alpha(\Delta)$ *est de la forme:*

$$f(\zeta) = h(\zeta) + f_0(\zeta); \quad (\zeta \in \Delta) \tag{14}$$

où $f_0(\zeta)$ *est une solution particulière et* $h(\zeta)$ *une fonction holomorphe arbitraire dans* Δ.

DÉMONSTRATION – Si l'équation (13) doit être résolue dans $\mathcal{S}_\alpha(\Delta)$, il faut que $f(z) \in C^0(\Delta)$ et $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$, en vertu des définitions 3 et 3'. Par conséquent, si elle admet une solution $f_0(\zeta) \in \mathcal{S}_\alpha(\Delta)$, il faudra avoir

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f_0(z)\,dz - \int_{\delta}\varphi(v)\,d\omega = 0$$

pour tout couple $(\gamma, \delta) \subset \Delta$. En retranchant cette identité de (13), on déduit:

$$\int_\gamma [f(z) - f_0(z)]dz = 0.$$

Puisque $f(\zeta) - f_0(\zeta) \in C^0(\Delta)$, ce sera une fonction holomorphe $h(\zeta)$ en vertu du théorème de MORERA, d'où la relation (14).

OBSERVATION 1. - Les fonctions polygènes dans Δ, donc de classe $C^1(\Delta)$, ainsi que les fonctions holomorphes (α), sont des primitives aréolaires, car elles satisfont à l'équation fonctionnelle (5), avec $\varphi(v) \in C^0(\Delta)$, qui est un cas particulier de (13). Or, pour ces fonctions on dispose de la formule de représentation intégrale (2) qui est bien de la forme (14) avec

$$f_0(\zeta) = g(\zeta) = T\varphi$$

ce qui met en évidence l'intégrale $T\varphi$, *donnée par* (1), *comme solution particulière possible même dans le cas général des primitives aréolaires* [11].

Dans un domaine Δ, *que nous allons supposer toujours borné* dans ce qui suit, la proposition suivante, qui précise les conditions où cela a lieu, est particulièrement importante [9]:

THÉORÈME 5. - *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f \in \mathcal{S}_\alpha(\Delta)$ *puisse être représentée par la formule intégrale*

$$f(\zeta) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega \tag{15}$$

où $\varphi = \dfrac{Df}{D\omega} \in L_1(\Delta)$ *et* $h(\zeta)$ *est holomorphe dans* Δ, *est que l'intégrale*

$$g(\zeta) = T_\Delta\varphi = -\frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega$$

soit une fonction continue de ζ *dans* Δ.

OBSERVATION 2. - Il s'ensuit qu'un examen du comportement de $T\varphi = g(\zeta)$ s'impose. Or, à ce sujet, on dispose tout d'abord d'une observation de I. N. VEKUA [3] qui montre sur un exemple que si $\varphi \in L^p(\Delta)$, avec $p \leq 2$, l'intégrale (16) peut être discontinue en tant que fonction de $\zeta \in \Delta$. Si, par contre $p > 2$, il montre que $g(\zeta)$ est continue.

De toute façon, la représentation intégrale (15) n'est possible que pour les primitives aréolaires, ce qui résultera de la proposition suivante:

THÉORÈME 6. - *Si une fonction* $f(\zeta) \in C^0(\Delta)$ *est représentable pour* $\zeta \in \Delta$ *par une formule de la forme* (15), *avec* $\varphi(v) \in L^1(\Delta)$, *elle est une primitive aréolaire dans* Δ.

DÉMONSTRATION - Puisque $f(\zeta) \in C^0(\Delta)$ et $h(\zeta) \in C^0(\Delta)$, il en sera de même de $T\varphi$. Or, dans ce cas, le raisonnement qui conduit à la démonstration du théorème 5, montre que l'on aura :

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} g(z)dz - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0 \tag{17}$$

pour tout couple $(\gamma, \delta) \subset \Delta$. Par l'application du théorème 4, on en déduit que $g(\zeta)$ est bien une primitive aréolaire dans Δ.

Or, de (15) on tire la relation suivante, en intégrant de long de γ:

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma} h(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma} g(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma} g(\zeta)d\zeta$$

d'où

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0$$

en tenant compte de (17). Le même théorème 4 montre alors que

$$f(\zeta) \in \mathcal{S}_{\alpha}(\Delta)$$

OBSERVATION 3. - *Il n'est pourtant pas prouvé jusqu'à présent que, réciproquement, toute primitive aréolaire admette la représentation intégrale* (15). Cela reviendrait, en vertu du théorème 5, à montrer que la relation (13) implique la continuité de $g(\zeta)$. Il suffirait de montrer que (13) implique (6), car dans ce cas f serait une $\bar{z}$-primitive au sens de VEKUA et elle serait alors représentable par une formule du type (15).

§ 3. Primitives aréolaires bornées.

La remarque de VEKUA sur la continuité de $T\varphi$ met en évidence des des classes très larges de fonctions φ pour lesquelles $g(\zeta) = T\varphi$ est une fonction continue. D'ailleurs, le comportement de cette fonction a, comme nous l'avons souligné, été étudié en premier lieu par D. POMPEIU.

Ensuite, nous avons mis en évidence le caractère höldérien de la continuité de $g(\zeta) = T\varphi$ si $\varphi(v)$ est borné et intégrable LEBESGUE [8]. C'est bien ce cas que nous examinerons de plus près dans ce qui suit.

DÉFINITION 4. - *Toute fonction $f(z) \in \mathcal{S}_{\alpha}(\Delta)$, primitive aréolaire d'une fonction $\varphi \in L^1(\Delta)$ et bornée dans Δ, sera dénommée primitive areolaire à dérivée bornée ou, plus brièvement, primitive aréolaire bornée dans Δ.*

Dans ce qui suit, il convient d'introduire des notations spéciales pour les différents espaces fonctionnels qui interviennent dans le développement des idées.

NOTATIONS 1. – *L'ensemble des fonctions* $\varphi(z) \in L^1(\Delta)$, *bornées dans* Δ, *sera désigné par* $\widetilde{L}^1(\Delta)$ *et celui des primitives aréolaires à dérivées* $\varphi \in \widetilde{L}^1(\Delta)$ *par* $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha(\Delta)$.

Remarquons que $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha(\Delta)$ et $\widetilde{L}^1(\Delta)$ sont des sous espaces des espaces linéaires $\mathcal{S}_\alpha(\Delta)$, respectivement $L^1(\Delta)$.

THÉORÈME 7 – *Si* $\varphi \in \widetilde{L}^1(\overline{\Delta})$, *avec* Δ *borné, la fonction*

$$g(\zeta) = T\varphi = -\frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega \tag{16}$$

a les propriétés suivantes:

1°) *est continue dans tout le plan complexe* ζ

2°) *est höldérienne sur* $\overline{\Delta}$

3°) *est holomorphe à l'extérieur de* $\overline{\Delta}$

4° *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta - \int_\delta \varphi(v)\,d\omega = 0. \tag{17}$$

OBSERVATION 4. – Les points 1°) et 3°) de ce théorème ont été établis par D. POMPEIU. Les points 2°) et 4°) ont été établis par nous [8].

En ces dernières années l'intégrale $T\varphi$ de POMPEIU a été utilisée aussi par I. N. VEKUA [3] et L. BERS [12] qui l'ont considérée aussi comme fondamentale.

Par exemple. – I. N. VEKUA démontre la proposition suivante:

Si $f \in L^p(\overline{\Delta})$ *avec* $p > 2$ *et* Δ *borné, la fonction* $g(\zeta) = T_\Delta\varphi$ *satisfait aux* conditions suivantes:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &|\,g(\zeta)\,| \leq M_1 \,\|\,\varphi\,\|_{L^p} \\ &|\,g(\zeta_2) - g(\zeta_0)\,| \leq M_2 \,\|\,\varphi\,\|_{L^p}\, |\,\zeta_2 - \zeta\,|^{\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{p-2}{2} \end{aligned}$$

où ζ_1 *et* ζ_2 *sont des points arbitraires du plan,* M_1 *et* M_2 *sont des constantes,* M_1 *dépendant de* p *et de* Δ *et* M_2 *seulement de* p.

$T_\Delta\varphi$ *est un opérateur complètement continu qui applique* $L^p(\overline{\Delta})$ *dans* $C^\alpha(\Delta)$ *avec* $\alpha = \dfrac{p-2}{2}$ *et* $p > 2$.

Il examine de très près les propriétés de l'opérateur T_Δ appliqué à différents espaces fonctionnels, particulièrement à $C(\overline{\Delta})$ et à $L^\infty(\overline{\Delta})$. Dans ces deux derniers cas, on a des propositions analogues où la seconde inégalité (18) est remplacée par une inégalité de la forme :

$$(18') \qquad |\, g(\zeta_2) - g(\zeta_1) \,| \leq M_2 \,\| \varphi \| \cdot |\, \zeta_2 - \zeta_1 \,| \log \frac{2d}{|\, \zeta_2 - \zeta_1 \,|}$$

et la première par

$$|\, g(\zeta) \,| \leq M_1 \,\| \varphi \| \,.$$

Les normes $\| \varphi \|$ correspondent respectivement aux espaces considérés, M_1 et M_2 sont des constantes indépendantes de ζ, ζ_1, ζ_2 et d est le diamètre du domaine Δ.

Notre théorème 7 correspond au cas de $\varphi \in L^\infty(\Delta)$, comme nous allons le préciser plus loin. Il a été établi par nous dans [8] en 1932, en trouvant aussi une condition de la forme (18'), que nous avons cependant ramenée aussitôt à une condition de HÖLDER d'exposant α arbitraire entre 0 et 1.

D'ailleurs *nous avons été le premier à mettre en évidence et à utiliser le caractère höldérien de $T\varphi$ et généralement des fonctions qui apparaissent en théorie de la dérivée areólaire, à partir de notre thèse de 1931.* Le mérite de I. N. VEKUA est très remarcable et consiste en une étude systèmatique de l'opérateur T_Δ et de la fonction $g(\zeta) = T_\Delta \varphi$ dans le langage de l'analyse fonctionnelle et ses résultats sont, dans tous les cas, analogues aux précédents, c'est-à-dire à ceux de notre théorème 7. Il nous est très agréable de constater, généralement, que, bien qu'il n'ait pas connu nos travaux, I. N. VEKUA a dans ses recherches, suivi la même ligne directrice que nous, en mettant souvent en lumière les même points saillants de la théorie.

NOTATIONS 2. - *Nous allons désigner par R^2 le plan euclidien qui sera aussi noté par Z, lorsqu'il sera considéré comme plan complexe.*

L'ensemble des fonctions holomorphes dans Δ sera désigné par $\mathcal{H}(\Delta)$ et celui des fonctions de $\mathcal{H}(\Delta)$ continues sur $\bar{\Delta}$ par $\mathcal{H}_c(\bar{\Delta})$.

Ceci posé, on a les propositions suivantes:

THÉORÈME 8. - *Pour tout $\varphi \in \widehat{L}^1(\bar{\Delta})$, la fonction $g(\zeta) = T_\Delta \varphi$ est une primitive aréolaire dans tout le plan complexe Z et :*

1°) $g(\zeta) = T\varphi \in \widehat{\mathcal{S}}_\alpha(Z)$

2°) $g(\zeta) = T\varphi \in \mathcal{H}_c(\overline{Z - \bar{\Delta}})$

3°) $\dfrac{Dg}{D\omega} = \begin{cases} \varphi(\zeta) & \text{presque partout dans } \bar{\Delta} \\ 0 & \text{partout dans } Z - \bar{\Delta}. \end{cases}$

DÉMONSTRATION - Posons

$$(20) \qquad \psi(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta) & \text{si } \zeta \in \bar{\Delta} \\ 0 & \text{si } \zeta \in \complement \bar{\Delta} \end{cases}$$

et soit $\Omega \supset \Delta$ un compact. Considérons alors

$$g_\Omega(\zeta) = T_\Omega\psi = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\psi(v)}{v-\zeta}\,d\omega = T_\Delta\varphi \tag{20'}$$

et appliquons la relation (17) à tout couple $(\gamma, \delta) \subset \Omega$.

On aura

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta - \int_\delta \psi(v)d\omega = 0$$

en vertu de (20'). La théorème 4 conduit alors à la conclusion que $g(\zeta) \in \mathcal{S}_\alpha(\Omega)$ et comme Ω est arbitraire dans Z, on aura $g(\zeta) \in \mathcal{S}_\alpha(Z)$. Mais en même temps, en vertu du même théorème 4, on aura:

$$\frac{Dg}{D\omega} = \psi(\zeta)$$

presque partout dans Ω. En tenant aussi compte de (20), on en déduit $\frac{Dg}{D\omega} = \varphi(v)$ presque partout dans $\bar{\Delta}$ et ensuite:

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0$$

pour tout γ qui ne contient aucun point de $\bar{\Delta}$. En vertu du théorème de MORERA, on en tire $g(\zeta) \in \mathcal{H}(\complement\bar{\Delta})$. Mais, puisque $\overline{g(\zeta) \text{ est}}$ nul à l'infini en vertu du théorème 7, il s'ensuit aussi que $g(\zeta) \in \mathcal{H}_c(Z - \bar{\Delta})$, vu que $g(\zeta)$, est continue dans tout le plan complexe Z.

THÉORÈME 9. - *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $g(\xi) = T_\Delta\varphi$, *avec* $\varphi \in \widehat{L}^1(\bar{\Delta})$, *soit holomorphe dans* Δ *est que* $\varphi = 0$ *presque partout dans* Δ *et par suite* $T\varphi \equiv 0$.

DÉMONSTRATION - La condition est nécessaire, car $g(\zeta) \in \widehat{\mathcal{S}}_\alpha(\bar{\Delta})$ en vertu du théorème 8 et satisfait par conséquent à la relation (20'').

Si $T\varphi \in \mathcal{H}(\Delta)$, il faudra avoir

$$\int_\delta \varphi(v)d\omega = 0$$

pour tout $\delta \subset \Delta$ et par conséquent, $\varphi(v) = 0$ presque partout dans Δ. La condition est évidemment suffisante, car $\varphi = 0$ presque partout dans Δ implique $T\varphi \equiv 0$ dans tout le plan complexe Z, par conséquent $T\varphi \in \mathcal{H}(\Delta)$ car la fonction identiquement nulle est holomorphe dans Z.

Théorème 10. – *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f(z) \in C^0(\Delta)$ *soit un élément de* $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\widehat{\Delta})$ *est qu'elle soit de la forme :*

$$f(\zeta) = h(\zeta) + T\varphi = h(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_\Delta \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega \tag{21}$$

avec

$$\varphi(v) \in \widehat{L}^1(\overline{\Delta}) \quad \textit{et} \quad h(\zeta) \in \mathcal{H}_c(\overline{\Delta}).$$

Dans ce cas, la décomposition (21) *est unique et*

$$\varphi = \frac{Df}{D\omega} \tag{21'}$$

presque partout dans Δ.

Démonstration – La condition est nécessaire en vertu du théorème 5. Car si $f \in \widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ et si $T_\varphi \in C^0(\overline{\Delta})$, a lieu la formule (21).

Or, pour tout $\varphi \in \widehat{L}^1(\overline{\Delta})$, la fonction $T\varphi$ est continue en vertu du théorème 7, non seulement dans Δ, mais dans tout le plan Z.

La condition est aussi suffisante, car on aura bien

$$\frac{1}{2i} \int_\gamma f(z)\, dz - \int_\delta \varphi(v)\, d\omega = 0$$

pour tout couple $(\gamma, \delta) \subset \Delta$, par l'application du théorème 8, où

$$\frac{Df}{D\omega} = \frac{Dh}{D\omega} + \frac{D}{D\omega} T\varphi = \varphi$$

presque partout dans Δ, en vertu du même théorème et de la linéarité de l'opérateur $\dfrac{D}{D\omega}$.

Supposons maintenant une seconde décomposition

$$f(\zeta) = h_1(\zeta) + T\varphi_1.$$

En la retranchant membre à membre de (21), on aura :

$$h(\zeta) - h_1(\zeta) = T\varphi_1 - T\varphi = T(\varphi_1 - \varphi)$$

d'où $\varphi_1 - \varphi = 0$ presque partout dans Δ, en vertu du théorème 9. Il s'ensuit :

$$h_1(\zeta) \equiv h(\zeta) \quad \text{et} \quad T\varphi_1 \equiv T\varphi$$

sur $\overline{\Delta}$, donc l'unicité de la décomposition (21).

Théorème 11. - (*d'existence des primitives aréolaires bornées dans* $\overline{\Delta}$).
L'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0 \tag{22}$$

pour tout couple (γ, δ) *tracé dans* $\overline{\Delta}$ *borné, avec* $\varphi(v) \in \widehat{L}^1(\overline{\Delta})$ *donné arbitrairement et* $f(z) \in C^0(\Delta)$ *inconnu, a toujours une solution de la forme*

$$f(\zeta) = h(\zeta) + T_\Delta \varphi \tag{22'}$$

avec

$$h(\zeta) \in \mathcal{H}_c(\overline{\Delta}).$$

L'ensemble de ses solutions est l'espace $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ *des primitives aréolaires bornées sur* $\overline{\Delta}$.

Démonstration - Par l'application du théorème 8, l'équation (22) admet pour tout $\varphi \in \widehat{L}^1(\overline{\Delta})$ une solution particulière de la forme $T_\Delta\psi$. Soit $f(\zeta) \in C^0(\overline{\Delta})$ une solution de (22). En retranchant de cette relation celle qu'on obtient en remplaçant $f(\zeta)$ par $T_\Delta\psi$, on obtient l'équation

$$\int_{\gamma} [f(z) - T_\Delta\varphi]\, dz = 0$$

d'où par l'application du théorème de Morera

$$f(\zeta) = h(\zeta) + T_\Delta\varphi.$$

Puisque $f(\zeta) \in C^0(\overline{\Delta})$, il faut que $h(\zeta) \in \mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$. Par conséquent, toute solution de (22) doit avoir la forme (22').

En appliquant le théorème 10, on conclut que toute solution de (22) est une primitive aréolaire bornée et réciproquement.

Enfin, puisque l'expression (21) existe pour tout $\varphi \widehat{L}^1(\overline{\Delta})$ et tout $h \in \mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$, l'équation (22) admet toujours des solutions de la forme (22') et seulement de cette forme.

Théorème 12. - (*d'unicité des primitives aréolaires bornées dans* $\overline{\Delta}$).
Si Δ *est un domaine borné limité par un contour* Γ *simple, rectifiable et fermé, l'équation*

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0$$

avec $\varphi \in \widehat{L}^1(\Delta)$ *donné et* $f \in C^0(\Delta)$, *admet une solution unique (à deux constantes près) satisfaisant sur* Γ *à une condition de la forme*

$$\mathcal{R}e[(\alpha - i\beta)f] \equiv \alpha P + \beta Q = \gamma \tag{23}$$

où α, β, γ *sont des fonctions continues du point* $z \in \Gamma$.

Cette solution est une primitive aréolaire bornée dans $\overline{\Delta}$.

DÉMONSTRATION. - *Posons*

$$g(\zeta) = T_\Delta \varphi = P_0 + iQ_0; \quad h(\zeta) = p + iq. \tag{23'}$$

En vertu du théorème 11, l'équation (22) admet des solutions $f \in \widehat{\mathcal{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ pour tout $\varphi \in \widehat{L}^1(\overline{\Delta})$ et seulement des solutions dans cet espace.

En tenant compte de (22') et de (23'), la relation (23) peut s'écrire

$$\mathcal{R}e[(\alpha - i\beta)h] \equiv \alpha p + \beta q = \gamma - \alpha P_0 - \beta Q_0$$

où $\gamma - \alpha P_0 - \beta Q$ est une fonction continue connue de $z \in \Gamma$.

Le problème est ainsi ramené à la détermination de la fonction $h(\zeta) \in \mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$ par un problème de RIEMANN-HILBERT, qui admet une solution unique à deux constantes près.

OBSERVATION 5. - Le cas général d'un contour Γ formé d'un nombre fini de courbes fermées simples $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. lisses et sans points communs, Γ_0 en contenant toutes les autres, peut aussi être envisagé en faisant usage des résultats de D. A. KVESELOVA sur le problème de RIEMANN-HILBERT [13] et de I. N. VEKUA [6] qui a traité le problème aux limites (23) pour le système,

$$\frac{Df}{D\omega} = Af + B\bar{f} + C$$

à coefficients A, B et terme libre C continus.

On retombe évidemment sur le système de CAUCHY-RIEMANN pour $A = B = C = O$.

Toutes les considérations précédentes s'appliquent au cas particulier des fonctions holomorphes (α).

DÉFINITION 5. - *Nous allons appeler fonction holomorphe* (α) *dans* Δ *toute primitive aréolaire à dérivée aréolaire continue dans* Δ *et l'ensemble de ces fonctions sera désigné par* $\mathcal{H}_\alpha(\Delta)$.

Si $f \in C^0(\overline{\Delta})$ *est un élément de* $\mathcal{H}_\alpha(\Delta)$ *à dérivée aréolaire* $\dfrac{Df}{D\omega} = \varphi(z) \in C^0(\Delta)$, *nous dirons que* f *est holomorphe* (α) *dans* Δ *et désignerons l'ensemble de ces fonctions par* $\mathcal{H}_\alpha(\bar{\Delta})$.

La classe $C_{\bar{z}}(\Delta)$ étudiée par I. N. VEKUA [6] coïncide avec $\mathcal{H}_\alpha(\bar{\Delta})$. En ce qui concerne les fonctions de $\mathcal{H}_c(\bar{\Delta})$, on a la proposition suivante :

THÉORÈME 12'. – (*d'existence et d'unicité des fonctions holomorphes* (α) *dans* $\bar{\Delta}$).

Si Δ *est un domaine borné, l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz - \int_\delta \varphi(v)d\omega = 0 \tag{22}$$

pour tout couple (γ, δ) *tracé dans* $\bar{\Delta}$, *avec* $\varphi(v) \in C^0(\bar{\Delta})$ *donné arbitrairement et* $f(z) \in C^0(\bar{\Delta})$ *inconnu, admet toujours une solution de la forme*

$$f(\zeta) = h(\zeta) + T_\Delta\varphi \tag{22'}$$

avec $h(\zeta) \in \mathcal{H}_c(\bar{\Delta})$.

On a partout dans Δ

$$\frac{Df}{D\omega} = \varphi$$

et l'ensemble des solution est l'espace $\mathcal{H}_\alpha(\bar{\Delta})$.

Si Δ *est limité par contour* Γ *simple, rectifiable et fermé, et que* $f(z)$ *satisfasse sur* Γ *à une condition de la forme*

$$\mathcal{R}e[(\alpha - i\beta)f] \equiv \alpha P + \beta Q = \gamma \tag{23}$$

où α, β, γ *sont des fonctions continues du point* $z \in \Gamma$, *la solution est unique (à deux constantes près).*

DÉMONSTRATION. – Toute fonction continue dans Δ borné étant bornée, et sommable, on est ramené au théorème 11. La solution étant une primitive aréolaire bornée dans $\bar{\Delta}$, à dérivée aréolaire $\varphi(v)$ continue dans $\bar{\Delta}$, est donc une fonction holomorphe (α) en vertu de la définition 5.

Il est facile de se rendre compte, par l'application du théorème de la moyenne, que le rapport (8') converge en tout point $z_0 \in \Delta$ et sur toute famille régulière (γ, δ) vers $\varphi(z_0)$; par conséquent, on aura $\frac{Df}{D\omega} = \varphi$ en tout point de Δ.

Enfin, par l'application du théorème 12', on met en évidence l'unicité de la solution assujettie à la condition (23).

§ 4. Opérateurs de projection et primitives aréolaires bornées.

L'expression (22′) des primitives aréolaires bornées conduit à une décomposition de l'espace $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ en somme directe de deux de ses sous espaces et met en évidence l'existence d'opérateurs de projection dans cet espace.

DÉFINITION 5. – *La fonction* $f \in \widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$ *étant représentée par la formule*

$$f(\zeta) = h(\zeta) + T\varphi, \tag{22'}$$

nous allons appeler $h(\zeta)$ *composante holomorphe ou résiduelle et* $T\varphi$ *composante caractéristique de* f.

La decomposition (22′) *de* f *en composantes* $(h, T\varphi)$ *sera appellée caractéristique ou canonique.*

A cette décomposition en correspond une autre de l'espace $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$.

NOTATIONS 3. – *Désignons par* $\widehat{\mathfrak{T}}(\overline{\Delta})$ *l'ensemble des composantes caractéristiques des éléments de* $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$.

Ce sera un sous espace linéaire de $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$ ainsi que $\mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$ et l'on aura la proposition suivant:

THÉORÈME 13. – *L'espace* $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$ *est la somme directe*

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta}) = \mathcal{H}_c(\overline{\Delta}) \otimes \widehat{\mathfrak{T}}(\overline{\Delta}) \tag{24}$$

de ses sous espaces linéaires $\mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$ et $\widehat{\mathfrak{T}}(\overline{\Delta})$.

DÉMONSTRATION. – En vertu du théorème 10, on a la décomposition caractéristique (21) de tout $f \in \widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$, avec $h \in \mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$ et $T\varphi \in \widehat{\mathfrak{T}}(\overline{\Delta})$. Mais, en vertu du théorème 9 les sous espaces linéaires $\mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$ et $\widehat{\mathfrak{T}}(\overline{\Delta})$ n'ont en commun que l'élément nul. Par conséquent, à (21) correspond la décomposition (24) de $\widehat{\mathfrak{F}}_\beta(\overline{\Delta})$.

OBSERVATION 6. – Cette proposition peut être rattachée comme un cas particulier, à une remarque de I. N. VEKUA [3], conçernant, les primitives des dérivées généralisées (6), avec $\varphi \in L^1(\overline{\Delta})$, donnée sons démonstration.

En effet, on peut démontrer que si $\varphi \in \widehat{L}^1(\Delta)$, elle est en même temps une dérivée aréolaire, selon notre définition, sa primitive étant une primitive aréolaire bornée.

L'importance du théorème 13 consiste en ce qu'il attire l'attention sur l'existence d'un opérateur de projection dans $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$, par suite de sa décomposition en somme directe du type (24), ce que nous ferons ci-après.

D'ailleurs, la même proprieté s'étend immédiatement au cas des dérivées généralisées, avec des conséquences que nous étudierons dans un travail ultérieur.

Théorème 14. - *Les opérateurs linéaires*:

$$T\frac{D}{D\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{\Delta}\frac{\frac{D}{D\omega}}{v-\zeta}\,d\omega \tag{25}$$

et

$$C=1-T\frac{D}{D\omega} \tag{25'}$$

sont deux opérateurs de projection associés définis sur $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\bar{\Delta})$ *et à valeurs sur sur* $\widehat{\mathfrak{C}}(\bar{\Delta})$, *respectivement* $\mathcal{H}_c(\bar{\Delta})$ *et la formule la décomposition caractéristique des éléments* $f\in\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\bar{\Delta})$ *se met sous la forme :*

$$f=\left(C+T\frac{D}{D\omega}\right)f \tag{26}$$

en tout point de $\bar{\Delta}$.

Démonstration. - Soit f un élément arbitraire de $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$ et calculons

$$\left(T\frac{D}{D\omega}\right)^2 f=T\frac{D}{D\omega}\left(T\frac{D}{D\omega}f\right).$$

Puisque

$$\frac{D}{D\omega}T\varphi=\varphi$$

presque partout dans Δ, pour tout $\varphi\in\widetilde{L}^1(\Delta)$, on aura

$$\left(T\frac{D}{D\omega}\right)^2 f=T\frac{D}{D\omega}T\left(\frac{D}{D\omega}f\right)=T\frac{D}{D\omega}f.$$

Par conséquent :

$$\left(T\frac{D}{D\omega}\right)^2=T\frac{D}{D\omega}$$

ce qui montre que $T\frac{D}{D\omega}$ est un opérateur de projection défini sur $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$. Puisque tout $\varphi\in\widehat{L}^1(\bar{\Delta})$ est la dérivée aréolaire d'une infinité d'éléments f de

$\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$, tout $T\varphi$ pourra se mettre sous la forme $T\dfrac{D}{D\omega}f$ Par suite, $T\dfrac{D}{D\omega}$ applique $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ sur $\widehat{\mathfrak{C}}(\overline{\Delta})$.

En posant

$$T\frac{D}{D\omega}=\Pi,\ \ 1-T\frac{D}{D\omega}=1-\Pi=\Pi^*, \tag{27}$$

il est devenu manifeste que $1-T\dfrac{D}{D\omega}$ est bien l'opérateur de projection associé à $T\dfrac{D}{D\omega}$.

Cet opérateur applique à son tour $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ sur $\mathfrak{H}_c(\overline{\Delta})$, car tout $h\in\mathfrak{H}_c(\overline{\Delta})$, est la composante holomorphe (résiduelle) d'une infinité d'éléments f de $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$.

Enfin ces deux opérateurs sont applicables aux fonctions $f\in\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ même aux points frontière de Δ, car la formule de décomposition (26) est valable en tout point de $\overline{\Delta}$.

Considérons maintenant le cas où Δ est limité par un contour Γ formé d'un nombre fini de courbes simples, fermées et rectifiables, sans points communs deux à deux. Il nous sera possible de donner une expression explicite de l'opérateur C en utilisant la proposition suivante :

LEMME 1. - *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(z)$ définie sur un contour Γ formé d'un nombre fini de courbes simples, fermées et rectifiables, sans points communs deux à deux, limitant un domaine Δ, représente les valeurs d'une fonction holomorphe $h(\zeta)\in\mathfrak{H}_c(\overline{\Delta})$ sur Γ est*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-\zeta_1}\,dz=0 \tag{28}$$

pour tout point ζ_1 extérieur à $\overline{\Delta}$.

DÉMONSTRATION. - Cette proposition est un cas particulier d'une proposition analogue concernant les fonctions holomorphes (α), que nous avons établie dans notre Thèse [2], dans le cas d'un seul contour simple, rectifiable et fermé Γ, notamment.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(z)$ représente les valeurs d'une fonction holomorphe (α), dont la dérivée aréolaire est $\varphi\in C^0(\Delta)$, sur un contour simple, fermé et rectifiable Γ, est :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-\zeta_1}\,dz-\frac{1}{\pi}\int_\Delta\frac{\varphi(v)}{v-\zeta_1}\,d\omega=0 \tag{28'}$$

pout tout point ζ_1 extérieur à $\overline{\Delta}$.

Il suffit de prendre $\varphi(v) \equiv O$ pour obtenir la relation (28) et de remarquer qu'on peut facilement réduire le cas du contour Γ du lemme 1 à celui d'un contour simple, fermé et rectifiable (et réciproquement).

Observation 7. - La condition (28') se remène, comme l'avons montré dans [2], [7], à une infinité de relations de la forme suivante :

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} z^n f(z)dz - \int_{\Delta} v^n \varphi(v)d\omega = 0. \tag{29}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Dans le cas particulier des fonctions holomorphes de l'espace $\mathcal{H}_c(\overline{\Delta})$, on a $\varphi(v) \equiv 0$ et les relations (29) deviennent

$$\int_{\Gamma} z^n f(z)dz = 0. \tag{29'}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné dans [2] on retrouve ainsi un résultat de Walsh, sous une forme étendue et par une méthode différente, car on élimine la restriction qui imposait à $f(z)$ d'être lipschitzienne [17].

En ces dernières années, les conditions (29') ont été beaucoup du type étendues par L. Amerio [15], et G. Fichera [16] qui considérent le cas où $f(z)$ est seulement sommable le long du contour Γ, formé d'un nombre fini de courbes simples, fermées et à courbure bornée. Ces résultats peuvent être déduits de l'extension de notre condition (28) à ce cas. Voir aussi un travail récent de Maria Pia Colautti [17].

Théorème 15. - *Toute primitive aréolaire $f \in \widehat{\mathfrak{F}}_x(\overline{\Delta})$ est représentable en tout point $\zeta \in \Delta$ par une formule de la forme :*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_{\Delta} \frac{\dfrac{D\omega}{Df}}{v-\zeta}\,d\omega \tag{30}$$

si l'on suppose Δ limité par un contour Γ formé d'un nombre fini de courbes simples, formées et rectifiables, sans points communs deux à deux.

Démonstration. - En appliquant la formule (22') de décomposition caractéristique et en tenant compte du fait qu'elle est applicable en tout point de $\overline{\Delta}$, on aura aux points z de Γ

$$\lim_{\zeta \to z} h(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} f(\zeta) - \lim_{\zeta \to z} T\varphi$$

d'où

$$h(z) = f(z) - T\varphi. \tag{31}$$

Par l'application de la formule intégrale de CAUCHY à $h(\zeta) \in \mathcal{H}_c(\bar{\Delta})$, on en déduit :

$$h(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z) - \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - z}}{z - \zeta} \, dz \,. \tag{31'}$$

Mais

$$- \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - z} \, d\omega \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{Df}{D\omega}$$

représente les valeurs sur Γ de la fonction $T\varphi$ holomorphe à l'extérieur de Γ. Par suite, puisque $\zeta \in \Delta$ est extérieur au domaine d'holomorphie de cette fonction, on aura, en vertu du lemme 1 :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{- \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - z} \, d\omega}{z - \zeta} \, dz = 0 \tag{32}$$

La formule (31') deviendra donc :

$$h(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} \, dz \tag{33}$$

et représentera la composante holomorphe de $f \in \mathcal{S}_\alpha(\Delta)$ à l'aide des valeurs de f sur Γ.

En tenant compte de (32), la formule de décomposition caractéristique (22') se ramène immédiatement à la forme (30).

OBSERVATION 8. – La formule de représentation intégrale (30) a été établie par nous, par une méthode différente dans notre Thèse [2]. Elle constitue l'extension de la formule analogue de POMPEIU, valable pour les fonctions polygènes.

C'est cette même formule, qui s'avère fondamentale en théorie de la dérivée aréolaire qui est amplement utilisée par I. N. VEKUA [6] pour la représentation des fonctions de la classe $C_{\bar{z}}$ (Δ), c'est-à-dire de nos fonctions holomorphes (α) dans Δ. Ensuite, dans son livre [3], il étend, la formule (22') au cas des dérivées généralisées et à son tour en fait la formule fondamentale de ses travaux de ces dernières années.

Nous croyons opportun de souligner que, bien que la formule de POMPEIU fût établie dans un cas particulier et qu'elle puisse être rattachée à la théorie du potentiel dans le plan, c'est dans l'idée même qu'elle contient que réside l'essor ultérieur de la théorie de la dérivée et des primitives aréolaires.

Quant à notre formule (30), elle constitue une représentation de la solution généralisée du système de CAUCHY-RIEMANN non homogène (3) à second membre borné et intégrable antérieure même à l'introduction de ce terme en théorie des équations aux dérivées partielles.

THÉORÈME 16. - *Si le domaine Δ borné est limité par un contour Γ formé d'un nombre fini de courbes simples, rectifiables et fermées, sans points communs deux à deux, l'opérateur de projection C peut se mettre en tout point $\zeta \in \Delta$ sous la forme*

$$C = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{*}{z - \zeta}\, dz \tag{34}$$

où le signe $*$ indique l'emplacement de la fonction représentant les valeurs de $f \in \mathfrak{F}_\alpha(\overline{\Delta})$ sur Γ.

DÉMONSTRATION. - L'opérateur C ayant la forme (25') en tout point de $\overline{\Delta}$, soient $f \in \widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$ et $\zeta \in \Delta$ un point intérieur à $\overline{\Delta}$. On aura:

$$Cf = f(\zeta) - T\frac{D}{D\omega} f = h(\zeta)$$

en vertu de la formule de décomposition (22'). Mais, en tenant compte de la formule de représentation (30), on en tire

$$Cf = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz$$

pour tout $f \in \widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\overline{\Delta})$, ce qui prouve la formule (34).

THÉORÈME 17. - *Aux points z_0 de la frontière Γ du domaine Δ, les opérateurs de projection C et $T\frac{D}{D\omega}$ sont prolongés par des expressions de la forme suivante, ne faisant intervenir que les valeurs de $f \in \widehat{\mathfrak{F}}(\overline{\Delta})$ sur Γ:*

$$Cf\Big|_{z_0} = \lim_{\zeta \to z_0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz \tag{35}$$

$$T\frac{D}{D\omega} f\Big|_{z_0} = f(z_0) - \lim_{\zeta \to z_0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz.$$

DÉMONSTRATION. - La formule (22') de décomposition caractéristique étant valable en tout point de $\bar{\Delta} = \Delta + \Gamma$, on aura

$$h(z_0) = f(z_0) - T \frac{D}{D\omega} f \Big|_{z_0} \tag{36}$$

en vertu de (31), en tout point $z_0 \in \Gamma$. D'autre part, par l'application de la formule de représentation (30), où f et $T \dfrac{D}{D\omega} f$ sont continus même sur Γ, on aura:

$$\lim \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(z_0) - T \frac{D}{D\omega} f \Big|_{z_0} \tag{36'}$$

De (36) et de (36'), on tire aussitôt (35) et (35'), compte tenant de (34) et de la formule de décomposition (22').

§ 5. **Conclusions.**

Les primitives aréolaires bornées sont, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, les solutions $f(z)$ continues dans Δ de l'équation fonctionnelle (22) où $\varphi(v)$ est supposé borné et intégrable LEBESGUE dans $\bar{\Delta}$.

La théorie de ces fonctions, que nous avons développée en partie dès 1931, est la théorie des fonctions de la forme

$$f(\zeta) = h(\zeta) + T\varphi.$$

Elle est donc fondée sur la décomposition caractéristique et notamment sur les propriétés des fonctions $T\varphi$ avec $\varphi \in \widehat{L}^1(\bar{\Delta})$. Dans le présent travail nous avons mis en évidence le caractère d'opérateur de projection de l'opérateur de linéaire $T \dfrac{D}{D\omega}$. Dans le cas des domaines Δ limités par des contours Γ formés d'un système de courbes simples, fermées et rectifiables en nombre fini, l'opérateur C de CAUCHY est à son tour un opérateur de projection associé à $T \dfrac{D}{D\omega}$.

Cela nous permettra, dans un autre travail, de normer d'une manière naturelle l'espace linéaire $\widehat{\mathfrak{F}}_\alpha(\Delta)$ par la norme

$$\| f \|_{\mathfrak{F}_\alpha(\bar{\Delta})} = \| h \|_{C^0(\bar{\Delta})} + \| T \| \; \| \varphi \|_{L^\infty(\bar{\Delta})}$$

où $\| T \|$ signifie la norme de l'opérateur linéaire continu T et de montrer que l'espace de BANACH ainsi organisé est complet.

Les résultats concernant le caractère d'opérateur de projection des opérateurs $T\dfrac{D}{D\omega}$ et C s'étendent sans difficulté aux $\bar{z}$ — primitives de I. N. VEKUA qui sont des extensions des primitives aréolaires bornées, dont les propriétés sont des conséquences de leur représentation intégrale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. POMPEIU, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*, « Rendiconti Palermo » t. 33, 1912, t. 35, 1913.

[2] N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications physiques*, (Thèse) Paris Gauthiers Villars 1931.

[3] I. N. VEKUA, *Obobschnnye analititcheskie funktzii (Fonctions analytiques généralisées)* Moskwa 1959.

[4] N. TEODORESCU, *Primitiva areolară locală si derivata generalizată (Primitive aréolaire locale et dérivée généralisée)*, « Com. Acad. Rep. Pop. Romine », t. IX, No 8, 1959.

[5] D. POMPEIU, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, (Thèse) « Annales de Toulouse », vol. 7 1905.
Voir aussi: *Opera matematică (Oeuvre mathématique)*, Edition de l'Académie de la R. P. R. 1959.

[6] I. N. VEKUA, *Sistemy differentzialnyh uravnenii pervogo poriadka ellipticeskogo tipa i granitchnye zadatchi s primeneniem k teorii obolotchek (Systèmes d'équatioas différentielles du premier ordre du type elliptique et problèmes aux limites avec des applications à la théorie des membranes)*, « Mat. Sbornik », vol. 31, No 2, 1952.

[7] N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire*, « Ann. Rumaines de Math. », Cahier 3, 1936.

[8] — —, *Sur l'emploi de conditions globales en Mécanique*, « Annali di Matematica », Serie IV, vol. XI, 1932.

[9] — —, *Dérivée et primitive aréolaires*, « Annali di Matematica », Serie IV, vol. XLIV, 1960.

[10] — —, *Functiile olomorfe* (α) *si functiile de clasa* $C_{\bar{z}}$, *(Fonctions holomorphes* (α) *et fonctions de classe* $C_{\bar{z}}$, « Com. Acad. Rep. Pop. Romine », t. X, No 6, 1960.

[11] — —, *Fonctions holomorphes* (α) *et leurs représentation par polynomes aréolaires*, *Actes, du Colloque sur le traitement numérique des équations différentielles, intégrales, etc.* Roma 1960.

[12] L. BERS, *Theory of pseudo-analytic fonctions*, New York 1953.

[13] D. A. KVESELOVA, *Problème de Riemann-Hilbert pour un domaine multiplement connexe* (en russe), « Soobsci, AN Gruz, SSR, vol. VI, No 8. 1945.

[14] E. WALSH. *Sur les valeurs limites d'une fonction analytique*, « C. R. Acad. Sci », Paris t. 178.

[15] L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*, « Rend. Istituto Lombardo », vol. 78, 1944-45.

[16] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, « Ist. Mat. Trieste », vol. I, 1954.

[17] MARIA PIA CALAUTTI, *Sul problema di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - \lambda c u = f$ *in un dominio piano a contorno angoloso*, « Mem. Acad. Sci. Torino », Serie 3, Tomo 4, 1959.