Arch. Math., Vol. 46, 240–249 (1986)

0003-889X/86/4603-0240 $ 3.50/0

Über die isotrope Diskrepanz von Folgen

Von

Gerhard Larcher

Für eine Punktfolge $\omega := x_1, x_2, \ldots, x_N$ im s-dimensionalen Einheitswürfel I^s wird die gewöhnliche Diskrepanz $D_N(\omega)$ von ω definiert durch

$$D_N(\omega) = \sup_Q \left| \frac{A_N(Q)}{N} - \lambda(Q) \right|.$$

Dabei wird das Supremum über alle achsenparallelen, rechts halboffenen Teilquader Q genommen, $A_N(Q)$ bezeichnet die Anzahl der in Q liegenden Punkte von ω und λ das Lebesguemaß.

Die isotrope Diskrepanz $J_N(\omega)$ von ω ist definiert durch

$$J_N(\omega) = \sup_C \left| \frac{A_N(C)}{N} - \lambda(C) \right|.$$

Dabei wird jetzt das Supremum über alle konvexen Teilmengen von I^s genommen. Natürlich ist stets $D_N(\omega) \leqq J_N(\omega)$. Andrerseits gilt mit einer nur von s abhängigen Konstanten c_s (siehe [2], [5]):

$$(*) \qquad J_N(\omega) \leqq c_s \cdot (D_N(\omega))^{1/s}.$$

Während die gewöhnliche Diskrepanz sehr eingehend untersucht worden ist, sind für die isotrope Diskrepanz nur vereinzelte Resultate bekannt (siehe etwa [2], [4], [6], [7]). Die Abschätzung der isotropen Diskrepanz für spezielle Folgen ist hauptsächlich nur über die Abschätzung von D_N und mit Hilfe von (*) erreicht worden.

Etwa erhält man mit dieser Methode für die in dieser Arbeit behandelten Beispiele:

(a) Für die s-dimensionale Hammersleyfolge:

$$N \cdot D_N = O((\log N)^{s-1}) \rightarrow N^{1/s} \cdot J_N = O((\log N)^{1-1/s}).$$

(b) Für die s-dimensionale Haltonfolge:

$$N \cdot D_N = O((\log N)^s) \rightarrow N^{1/s} \cdot J_N = O((\log N)).$$

(c) Für die Folge $\left(\frac{k}{N}, \{k\alpha\}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

Sind $a_1, a_2, \ldots$ die Kettenbruchkoeffizienten und $q_1, q_2, \ldots$ die Näherungsnenner von α, sowie $q_{r(N)} \leqq N < q_{r(N)+1}$ dann ist:

$$N \cdot D_N = O\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right) \to N^{1/2} \cdot J_N = O\left(\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^{1/2}\right).$$

Offensichtlich strebt der rechte Term der letzten Abschätzung für alle irrationalen α gegen unendlich.

(d) Für die Folge $(\{k\alpha_1\}, \ldots, \{k\alpha_s\})$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$:

Für alle $\varepsilon > 0$ ist nach [8] für fast alle $\underline{\alpha}$:

$$N \cdot D_N = O((\log N)^{s+1+\varepsilon}) \quad \text{und damit} \quad N^{1/s} \cdot J_N = O((\log N)^{1+1/s+\varepsilon}).$$

Mit Hilfe einer einfachen Überlegung (Satz) lassen sich die Abschätzungen für diese Beispiele auf direktem Weg verbessern. Zaremba [9] hat gezeigt, daß der Exponent $\frac{1}{s}$ in (*) bestmöglich ist. Obwohl die folgenden Abschätzungen nahelegen, daß die Ungleichung auf andere Weise eine Verbesserung zuläßt, kann man aber doch zeigen, daß zumindest für $s = 2$ die Ungleichung, abgesehen von der Konstanten, bestmöglich ist.

An dieser Stelle möchte der Autor dem Referenten sehr herzlich für die wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge danken.

Im folgenden sei für $x, y \in \mathbb{R}^s$ $m(x, y)$ der gewöhnliche euklidische Abstand von x und y, weiters $d(x, y) := \min_{z \in Z^s} m(x, y + z)$ und für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^s$ sei $d(B) := \sup_{x, y \in B} d(x, y)$. Konstante c_i sind im folgenden nur von der Dimension s abhängig.

Satz. *Seien $\omega := x_1, x_2, \ldots, x_N$ eine endliche Punktfolge in I^s, $B := \{B_1, \ldots, B_n\}$ eine Menge meßbarer Teilmengen von I^s mit $N \cdot \lambda(B_i) = k_i \in \mathbb{N}$ und $\lambda(B_i \cap B_j) = 0$ für $i \neq j$, $U := \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $k := \sum_{i=1}^{n} k_i = N \cdot \lambda(U)$, und $\bar{\omega} := x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ eine k-elementige Teilfolge von ω. Ω sei die Indexmenge $\Omega := \{i_1, \ldots, i_k\}$, φ: $\Omega \to B$ surjektiv, sodaß für jedes j die Anzahl der Urbilder von B_j gleich k_j ist, weiters: $v_j := \max_{x \in \varphi^{-1}(B_j)} \inf_{y \in B_j} d(x, y)$, $d_j := d(B_j)$, $\sigma_j = d_j + v_j$ und $0 := \sigma_{j_0} \leqq \sigma_{j_1} \leqq \ldots \leqq \sigma_{j_n} := \sigma$, dann gilt: Es gibt Konstante $c_1 = c_1(s)$ und $c_2 = c_2(s)$, sodaß mit*

$$i_0 = \begin{cases} \max\left\{i \mid \sum_{k=i}^{n} d_{j_k}^{s-1} \geqq c_1\right\} & \textit{falls} \quad \sum_{k=1}^{n} d_{j_k}^{s-1} \geqq c_1 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

gilt: $J_N(\omega) \leqq c_2 \cdot \left(\sum_{k=i_0}^{n} \sigma_{j_k} \cdot d_{j_k}^{s-1}\right) + 1 - \lambda(U)$.

Bemerkung 1. Es gibt insbesondere ein c_3 mit:

$$J_N(\omega) \leqq c_3 \cdot \sigma + 1 - \lambda(U).$$

Bemerkung 2. Ein erster Wert für die Konstanten c_1, c_2, c_3 kann leicht aus den folgenden Beweisen erhalten werden, bzw. können die Konstanten durch genauere Überlegungen oder durch direkte Herleitung von Bemerkung 1 verbessert werden.

Zum Beweis benötigt man folgendes Lemma:

Lemma. *Sei* $B \subseteqq I^s$ *meßbar,* $Q \subseteqq I^s$ *konvex und* $\lambda(B \cap Q) = 0$. *Ist* $\sup_{b \in B} \inf_{q \in Q} d(b, q) \leqq t \leqq \sqrt{s}/2$, *dann gilt:*

$$\lambda(B) \leqq c_4(s) \cdot d(B)^{s-1} \cdot t.$$

Beweis. Für $M \subseteqq \{1, 2, \dots, s\} := S$ sei $B_M := \{x = (x_1, \dots, x_s) \in B \mid 0 \leqq x_i < \frac{1}{2} \leftrightarrow i \in M\}$ dann ist $m(B_M) := \sup_{x, y \in B_M} m(x, y) \leqq d(B)$. Sei für $L \subseteqq R^s$: $L_t := \{x \in R^s \mid \inf_{l \in L} m(x, l) \leqq t\}$, $\bar{L}$ die konvexe Hülle von L und sei $Y_M := \{z \in Z^s \mid z + x \in Q_t$ für ein $x \in B_M\}$. Dann hat Y_M höchstens $(\sqrt{s} + 1)^s$ Elemente, und:

$$\lambda(B) \leqq \sum_{M \subseteqq S} \sum_{z \in Y_M} \lambda((z + B_M) \cap (Q_t \backslash Q)).$$

Sei für festes $M \subseteqq S$ und $z \in Y_M$: $B' := (z + B_M) \cap (Q_t \backslash Q)$, dann ist $m(B') \leqq d(B)$ und daher $\lambda(B') \leqq c_4 \cdot d(B)^{s-1} \cdot t$ falls $d(B) \leqq t$. Ist $t < d(B)$: Sei $P := \bar{B}'_t \cap Q$, dann ist $m(P_t) \leqq 4t + d(B)$ und $B' \subseteqq P_t \backslash P$. Bezeichnet $O(P_t)$ den s-1-dimensionalen Inhalt der Oberfläche von P_t dann ist (da P_t konvex ist):

$$\lambda(B') \leqq \lambda(P_t \backslash P) \leqq O(P_t) \cdot t \leqq c'_4 \cdot (4t + d(B))^{s-1} \cdot t \leqq c_4 \cdot d(B)^{s-1} \cdot t.$$

Beweis des Satzes. Die Anzahl der Punkte in $\omega \backslash \bar{\omega}$ ist $N \cdot (1 - \lambda(U))$. Sei C eine konvexe Teilmenge in I^s, $x_{i_r} \in \bar{\omega}$, $x_{i_r} \in C$ und $\varphi(i_r) = B_i$, dann ist:

$$\sup_{b \in B_i} \inf_{c \in C} d(b, c) \leqq \sigma_i. \tag{1}$$

Sei B^c die Vereinigung aller B_i für die (1) erfüllt ist. Die Anzahl der Folgenpunkte in C ist dann kleiner oder gleich $N \cdot (1 - \lambda(U)) + N \cdot \lambda(B^c)$.

Sei $C_{j_i} := \{x \in R^s \mid \inf_{c \in C} d(x, c) \leqq \sigma_{j_i}\}$, dann ist $d(C_{j_n}) \leqq 1 + 2\sigma \leqq 1 + 2 \cdot \sqrt{s} := c'_5(s)$ und:

$$\begin{aligned}
\lambda(B^c) &\leqq \lambda(C) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda((C_{j_{i+1}} \backslash C_{j_i}) \cap B^c) \\
&\leqq \lambda(C) + \sum_{i=0}^{n-1} \min(c_5 \cdot (\sigma_{j_{i+1}} - \sigma_{j_i}),\ c_4 \cdot \sum_{k=i+1}^{n} d_{j_k}^{s-1} \cdot (\sigma_{j_{i+1}} - \sigma_{j_i}) \\
&\leqq \lambda(C) + \sum_{i=0}^{i_0-2} c_5 \cdot (\sigma_{j_{i+1}} - \sigma_{j_i}) + \sum_{i=i_0-1}^{n-1} c_4 \cdot \sum_{k=i+1}^{n} d_{j_k}^{s-1} \cdot (\sigma_{j_{i+1}} - \sigma_{j_i})) \\
&\leqq \lambda(C) + c_2 \cdot \sum_{k=i_0}^{n} d_{j_k}^{s-1} \cdot \sigma_{j_k} \text{ und daher:}
\end{aligned}$$

$$A_N(C) - N \cdot \lambda(C) \leqq N \cdot (1 - \lambda(U)) + N \cdot c_2 \cdot \sum_{k=i_0}^{n} \sigma_{j_k} \cdot d_{j_k}^{s-1}.$$

Ganz analog erhält man:

$$-N\cdot(1-\lambda(U))-N\cdot c_2\cdot\sum_{k=i_0}^{n}\sigma_{j_k}\cdot d_{j_k}^{s-1}\leqq A_N(C)-N\cdot\lambda(C).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Beispiele. (a) $\omega:=\left(\frac{k}{N},\Phi_{r_1}(k),\ldots,\Phi_{r_{s-1}}(k)\right)$, $k=1,2,\ldots,N$ sei die s-dimensionale Hammersleyfolge, wie sie etwa in [2] definiert ist. Dabei seien $2\leqq r_1<r_2<\cdots<r_{s-1}$ und die r_i paarweise prim.

Behauptung. *Es gibt eine Konstante $c_6(s)$, sodaß für alle N gilt:*

$$N^{1/s}\cdot J_N(\omega)\leqq c_6\cdot r_{s-1}.$$

Beweis. Für $N\leqq r_{s-1}^s$ ist $N^{1/s}\cdot J_N(\omega)\leqq r_{s-1}$. Sei $N>r_{s-1}^s$ und seien natürliche Zahlen $e_1,e_2,\ldots,e_{s-1}$ so bestimmt, daß gilt: $r_i^{s\cdot e_i}\leqq N<r_i^{s\cdot(e_i+1)}$ für $i=1,2,\ldots,s-1$, sei $R(e):=r_1^{e_1}\cdots r_{s-1}^{e_{s-1}}$ und

$$B_{j_0,\ldots,j_{s-1}}:=\left[j_0\cdot\frac{R(e)}{N},(j_0+1)\cdot\frac{R(e)}{N}\right)\times\prod_{i=1}^{s-1}[j_i\cdot r_i^{-e_i},(j_i+1)\cdot r_i^{-e_i})$$

$$B:=\left\{B_{j_0,\ldots,j_{s-1}}\,|\,j_0=0,\ldots,\left[\frac{N}{R(e)}\right]-1,j_i=0,\ldots,r_i^{e_i}-1\text{ für }i\neq 0\right\}.$$

Dann ist $1-\lambda(U)=\left\{\frac{N}{R(e)}\right\}\cdot\frac{R(e)}{N}\leqq N^{-1/s}$, in jedem $B_{j_0,\ldots,j_{s-1}}$ liegt genau ein Folgenpunkt, also ist $v_{j_0,\ldots,j_{s-1}}$ stets $=0$, weiters $d(B_{j_0,\ldots,j_{s-1}})\leqq\frac{s^{1/2}\cdot r_{s-1}}{N^{1/s}}$ und damit:

$$N^{1/s}\cdot J_N\leqq c_6\cdot r_{s-1}.$$

Bemerkung. Für $\omega:=\left(\frac{k}{N},\Phi_r(k)\right)$ $k=0,1,2,\ldots,N-1$ gilt:

$$N^{1/2}\cdot J_N\geqq r^{-1/2}\quad\text{für alle }N.$$

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $N<r$. Sei für ein $e\geqq 0: r^{e+1}\leqq N<r^{e+2}$ und $k<r^{e+1}$, $k=a_e\cdot r^e+\cdots+a_1\cdot r+a_0$, dann ist

$$\Phi_r(k)=\frac{a_0\cdot r^e+a_1\cdot r^{e-1}+\cdots+a_{e-1}\cdot r+a_e}{r^{e+1}}.$$

Ist $a_0,a_1,\ldots,a_{e-1},a_e$ symmetrisch, also gleich $a_e,a_{e-1},\ldots,a_1,a_0$ so liegt $\left(\frac{k}{N},\Phi_r(k)\right)$ auf der Geraden $g(t)=t\cdot\left(\frac{1}{N},r^{-e-1}\right)$. Für mindestens $r^{(e+1)/2}$ der $k<r^{e+1}$ ist die zu k gehörende Ziffernfolge symmetrisch. Auf g liegen daher mindestens $r^{-1/2}\cdot N^{1/2}$ Folgenpunkte. Daraus folgt die Behauptung.

(b) $\omega(N):=(\Phi_{r_1}(k),\ldots,\Phi_{r_s}(k))$ $k=1,2,\ldots,N$ sei die s-dimensionale Haltonfolge. (r_i und Φ wie in Beispiel (a)).

Behauptung. *Für alle $s\geqq 2$ gibt es eine Konstante c_7, sodaß für alle N gilt:*

$$N^{1/s}\cdot J_N\leqq c_7\cdot r_1^2\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_{s-1}\cdot r_s^s.$$

Beweis. Für $e_s \in \mathbb{N}$ seien $e_i \in \mathbb{N}$ $i = 1, 2, \ldots, s-1$ gegeben durch $r_i^{e_i} < r_s^{e_s} < r_i^{e_i+1}$. Weiters sei $N(e_s) := \prod_{i=1}^{s} r_i^{e_i}$. Es ist $r_1 \cdot r_2 \cdots r_s \leqq N(e+1)/N(e) \leqq r_1 \cdot r_2 \cdots r_{s-1} \cdot r_s^s$.

Sei e so, daß gilt: $N(e) \leqq N < N(e+1)$ und $N = a_e \cdot N(e) + \cdots + a_1 \cdot N(1) + a_0$ mit $a_i \leqq r_1 \cdot r_2 \cdots r_{s-1} \cdot r_s^s$. Analog zu [2], Seite 115 gilt: $N \cdot J_\omega \leqq \sum_{\mu=1}^{e} a_\mu \cdot N(\mu) \cdot J_{\omega(\mu)}$ wobei mit $\omega(\mu)$ die Folge der ersten $N(\mu)$ Glieder der Haltonfolge und mit $J_{\omega(\mu)}$ deren isotrope Diskrepanz bezeichnet wird. Für festes $\mu := \mu_s$ sei $B_{j_1, \ldots, j_s} := \prod_{i=1}^{s} [j_i \cdot r_i^{-\mu_i}, (j_i + 1) \cdot r_i^{-\mu_i})$. $B^\mu := \{B_{j_1, \ldots, j_s} | j_i = 0, 1, \ldots, r_i^{\mu_i} - 1\}$. Also $1 - \lambda(U) = 0$, $\lambda(B_{j_1, \ldots, j_s}) = 1/N(\mu)$ und $d(B_{j_1, \ldots, j_s}) \leqq \dfrac{s^{1/2} \cdot r_1}{N(\mu)^{1/s}}$.

In jedem Quader liegt genau ein Folgenpunkt, also ist $v_{j_1, \ldots, j_s}$, stets gleich 0 und $J_{\omega(\mu)} \leqq c_7' \cdot r_1 \cdot N(\mu)^{-1/s}$. Daher ist:

$$N \cdot J_\omega \leqq c_7' \cdot r_1^2 \cdot r_2 \cdots r_{s-1} \cdot r_s^s \cdot \sum_{\mu=1}^{e} N(\mu)^{(s-1)/s}$$

und wegen

$$\sum_{\mu=1}^{e} N(\mu)^{(s-1)/s} \leqq N(e)^{(s-1)/s} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (r_1 \cdots r_s)^{i(1-s)/s} \leqq N(e)^{(s-1)/s} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}$$
$$\leqq 2 N^{(s-1)/s}$$

folgt die Behauptung.

(c) ω sei die s-dimensionale Folge $\left(\dfrac{k}{N}, \{k\alpha_1\}, \ldots, \{k\alpha_{s-1}\}\right)$,

$$k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \underline{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}) \in \mathbb{R}^{s-1}.$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ die sukzessiven Minima bezüglich der euklidischen Metrik des von $x_1 := \left(\dfrac{1}{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\right)$, $e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_s := (0, 0, \ldots, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^s$ aufgespannten Gitters Λ (bzw. werden dadurch die Vektoren durch die diese Minima erreicht werden bezeichnet.)

Behauptung: *Es gibt Konstante c_8, c_9, sodaß für alle N und alle $\underline{\alpha}$ gilt:*

$$c_8 \cdot \lambda_s \leqq J_N \leqq c_9 \cdot \lambda_s.$$

Beweis. Die Punkte des Gitters Λ die in I^s liegen sind gerade die Folgenpunkte von ω. Λ wird auch von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ erzeugt. Sei F ein Fundamentalbereich der von obigen Vektoren erzeugt wird. $\lambda(F) = \det(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) = \det(x_1, e_2, \ldots, e_s) = 1/N$. Eine Ecke E von F werde ausgezeichnet. Sei B die Menge aller F die ganz in I^s liegen. Jedem F in B kann eindeutig der in der Ecke E liegende Folgenpunkt zugeordnet werden. Also $v = 0$, $d(F) \leqq s \cdot \lambda_s$, $\lambda(I^s \backslash U) \leqq 2 \cdot s^2 \cdot \lambda_s$ und daher $J_N \leqq c_9 \cdot \lambda_s$.

Für jede Dimension s gibt es eine Konstante c_8' sodaß gilt: Sei L die zwischen zwei Hyperebenen H_1, H_2, die von $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$ aufgespannt werden und Abstand

$\dfrac{1}{N \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{s-1}}$ zueinander haben, gelegene Teilmenge von R^s. Man kann einen Gitterpunkt P von Λ so finden, daß gilt: Legt man L so, daß H_1 durch P geht, dann ist $\lambda(L \cap I^s) \geqq \dfrac{c_8'}{N \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{s-1}}$. In $L \cap I^s$ liegt kein Folgenpunkt. Daher ist nach dem Satz von Minkowski über sukzessive Minima:

$$J_N \geqq \frac{c_8'}{N \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{s-1}} \geqq c_8 \cdot \lambda_s.$$

Bemerkung. $J_N \leqq c_9 \cdot \lambda_s \leqq \dfrac{c_9'}{N \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{s-1}} \leqq \dfrac{c_9'}{N \cdot \lambda_1^{s-1}}$.

Bemerkung. Seien $q_1, q_2, \ldots$ die simultanen Näherungsnenner von $\underline{\alpha}$ bezüglich der Maximumsnorm, dann gilt:

$$\min_{q_i} \max\left(\frac{q_i}{N}, \|q_i \alpha_1\|, \ldots, \|q_i \alpha_{s-1}\|\right) \leqq \lambda_1$$
$$\leqq s^{1/2} \cdot \min_{q_i} \max\left(\frac{q_i}{N}, \|q_i \alpha_1\|, \ldots, \|q_i \alpha_{s-1}\|\right)$$

mit $\|x\| := \min(\{x\}, 1 - \{x\})$.

Korollar. *Für $s = 2$ sei $\omega := \left(\dfrac{k}{N}, \{k\alpha\}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. α sei irrational. Es gibt Konstante c_{10} und $c_{11} > 0$, sodaß für alle α und N gilt: Seien $q_1, q_2, \ldots$ Näherungsnenner an α, $q_{i+1} = a_i \cdot q_i + q_{i-1}$ und $l := l(N)$ sodaß $q_l \leqq N^{1/2} < q_{l+1}$, dann ist $N^{1/2} \cdot J_N \leqq c_{11} \cdot a_l^{1/2}$ und $c_{10} \cdot \limsup_{l \to \infty} a_l^{1/2} \leqq \limsup_{N \to \infty} N^{1/2} \cdot J_N \leqq c_{11} \cdot \limsup_{l \to \infty} a_l^{1/2}$.*

Beweis. Es ist $\|q_i \cdot \alpha\| > \dfrac{1}{2 \cdot q_{i+1}}$ und daher:

$$c_{11}' \cdot \min_{q_i} \max\left(\frac{q_i}{N}, \frac{1}{q_{i+1}}\right) \leqq \lambda_1 \leqq c_{10}' \cdot \min_{q_i} \max\left(\frac{q_i}{N}, \frac{1}{q_{i+1}}\right).$$

$$\min_{q_i} \max\left(\frac{q_i}{N}, \frac{1}{q_{i+1}}\right) = \max\left(\frac{q_{l(N)}}{N}, \frac{1}{q_{l(N)+1}}\right) \geqq c_{11}'' \cdot (a_l \cdot N)^{-1/2}.$$

Ist $N = q_l \cdot q_{l+1}$ dann ist $\max\left(\dfrac{q_{l(N)}}{N}, \dfrac{1}{q_{l(N)+1}}\right) \leqq c_{10}'' \cdot (a_l N)^{-1/2}$. Also ist $N^{1/2} \cdot J_N \leqq c_{11} \cdot a_l^{1/2}$ für alle N, und $N^{1/2} \cdot J_N \geqq c_{10} a_l^{1/2}$ für unendlich viele N.

(d) Die Folge $\omega := (\{k\alpha_1\}, \{k\alpha_2\}, \ldots, \{k\alpha_s\})$, $k = 1, 2, \ldots, N$ mit $\underline{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ und $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Behauptung. *Seien $q_1, q_2, \ldots$ die simultanen Näherungsnenner von $\underline{\alpha}$ bezüglich der Maximumsnorm, $N = a_r \cdot q_r + \cdots + a_1 \cdot q_1 + a_0$ mit $a_i \leqq q_{i+1}/q_i$ und für jedes $i \in N$ und jedes*

$j = 1, 2, \ldots, s$ *ein* $p_i(j) \in \mathbb{N}$ *so bestimmt, daß* $\max_j \|q_i \alpha_j - p_i(j)\| \leqq q_i^{-1/s}$ *gilt. Für jedes* i *bestimme man ein* $j(i)$ *und* u_i *so, daß* $(p_i(j(i)), q_i) = 1$ *und* $u_i \cdot p_i(j(i)) \equiv 1 \pmod{q_i}$ *ist.*

Sei für $Q \in \mathbb{N}$: $M_i(Q) := \max_{k \neq j(i)} \left\| Q \cdot \frac{u_i \cdot p_i(k)}{q_i} \right\|$ *und*

$$B_{q_i}(Q) := \begin{cases} \min\left(\dfrac{q_i^{(s-1)/s}}{Q}, \dfrac{q_i^{-1/s}}{M_i(Q)}\right) & \text{für } M_i(Q) \neq 0 \\ \dfrac{q_i^{(s-1)/s}}{Q} & \text{für } M_i(Q) = 0 \end{cases}$$

sowie $A_{q_i} := \max_Q B_{q_i}(Q)$, *dann gilt für alle* $\underline{\alpha}$ *alle* N *und mit einer Konstanten* c_{12}:

$$N \cdot J_N \leqq c_{12} \cdot \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot q_i^{(s-1)/s} \cdot A_{q_i}^{s-1}.$$

Beweis. Bezeichne $\omega_i := (\{k \cdot \underline{\alpha}\})$, $k = 1, 2, \ldots, q_i$ dann gilt wie schon in (b):

$$N \cdot J_N \leqq \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot q_i \cdot J_{q_i}(\omega_i).$$

Im folgenden betrachte man ein festes $q := q_i$ und lasse überall den Index i weg. O.B.d.A sei $j(i) = 1$.

Sei $\omega_i' := \left(k \cdot \frac{1}{q}, \left\{k \cdot \frac{u \cdot p(2)}{q}\right\}, \ldots, \left\{k \cdot \frac{u \cdot p(s)}{q}\right\}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. ω_i' gibt die gleiche Punktmenge wie $\left(\left\{k \cdot \frac{p(1)}{q}\right\}, \left\{k \cdot \frac{p(2)}{q}\right\}, \ldots, \left\{k \cdot \frac{p(s)}{q}\right\}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Jedem Folgenelement x' von ω_i' kann daher eindeutig ein Element x von ω_i zugeordnet werden, mit $d(x, x') \leqq s^{1/2} \cdot q^{-1/s}$. Verwendet man für die Folge ω_i, eine Partition wie sie in (c) für eine Folge der Art von ω_i', konstruiert wurde, dann ist v stets kleiner oder gleich $s^{1/2} \cdot q^{-1/s}$, und wegen der beiden Bemerkungen in (c) und da A_{q_i} stets $\geqq 1$ ist, gilt:

$$q \cdot J_q(\omega_i) \leqq c_{12}' \cdot q \cdot \left(s^{1/2} \cdot q^{-1/s} + \frac{c_{12}''}{q \cdot \lambda_1^{s-1}}\right)$$
$$\leqq c_{12}' \cdot q^{(s-1)/s} \cdot (s^{1/2} + c_{12}'' \cdot A_q^{s-1}) \leqq c_{13} \cdot q^{(s-1)/s} \cdot A_q^{s-1}$$

und daraus folgt das Ergebnis.

Behauptung. *Mit den Bezeichnungen von vorher gilt: Für alle* $\varepsilon > 0$ *ist für fast alle* $\underline{\alpha} \in I^s$ *(im Sinn des Lebesguemaßes):*

$$A_{q_i} = O((\log q_i)^{1/s+\varepsilon}).$$

Beweis. Für $q \in N$ sei $m := m(q, \varepsilon, c)$ das Maß und die Menge der $\underline{\alpha}$ die q als simultanen Näherungsnenner haben und für die $A_q > f := f(q, \varepsilon, c) := c \cdot c \log q)^{1/s+\varepsilon}$ ist, für mindestens eine Wahl von $j(i)$. Alle diese $\underline{\alpha}$ liegen in einem Würfel um einen Gitterpunkt $\frac{p(1)}{q}, \ldots, \frac{p(s)}{q}$ mit Volumen $2^s/q^{s+1}$ wobei mindestens eines der $p(j)$ relativ prim zu q ist.

Sei $m(j)$ das Maß bzw. die Menge der $\underline{\alpha}$ in m für die $(p(j), q) = 1$ ist. Wir betrachten etwa $m(1)$: Sei $p(1)$ mit $(p(1), q) = 1$ fest und $u \cdot p(1) \equiv 1 \pmod q$. Durchlaufen $p(2), \dots, p(s)$ alle q^{s-1} möglichen Werte modulo q dann durchlaufen $u \cdot p(2), \dots, u \cdot p(s)$ alle Werte $r_2, \dots, r_s$ modulo q.

Sei $\xi(q, c, \varepsilon, p_1) =: \xi(p_1)$ die Anzahl der s-1-Tupel $\left(\frac{r_2}{q}, \dots, \frac{r_s}{q}\right)$ für die $A_q > f$ ist. Liegt $\underline{\alpha}$ in $m(1)$, so muß es im Würfel um einen dieser Gitterpunkte liegen.

Sei $\xi_1(p_1)$ die Anzahl der s-1-Tupel $r_2, \dots, r_s$ für die ein Q existiert mit:

$$f \leqq \frac{q^{(s-1)/s}}{Q} \leqq \frac{1}{q^{1/s} \cdot M(Q)} \quad \text{also mit}$$

$$(1) \qquad Q \leqq \frac{q^{(s-1)s}}{f} \quad \text{und} \quad (2) \quad \frac{M(Q)}{Q} \leqq \frac{1}{q}.$$

Für ein festes Q gibt es höchstens $2 \cdot Q^{s-1}$ s-1-Tupel $r_2, \dots, r_s$ so, daß (2) erfüllt ist. Daher:

$$\xi_1(p_1) \leqq 2 \cdot \sum_{i=1}^{(q^{(s-1)/s})/f} i^{s-1} < c_{14} \cdot \frac{q^{s-1}}{f^s}.$$

Sei $\xi_2(p_1)$ die Anzahl der $r_2, \dots, r_s$ für die ein Q existiert mit

$$f \leqq \frac{1}{q^{1/s} \cdot M(Q)} \leqq \frac{q^{(s-1)/s}}{Q} \quad \text{also mit}$$

$$(1) \qquad Q \leqq \frac{q^{(s-1)/s}}{f} \quad \text{und} \quad (2) \quad \frac{M(Q)}{Q} \leqq \frac{1}{Q \cdot q^{1/s} \cdot f}.$$

Für ein festes Q gibt es höchstens $\left(\frac{2q}{Q \cdot q^{1/s} \cdot f}\right)^{s-1} \cdot Q^{s-1}$ s-1-Tupel, die (2) erfüllen. Also ist:

$$\xi_2(p_1) \leqq c_{15} \cdot \frac{q^{(s-1)/s}}{f} \cdot \frac{q^{s-1}}{q^{(s-1)/s} \cdot f^{s-1}} \leqq c_{15} \cdot \frac{q^{s-1}}{f^s} \quad \text{und damit:}$$

$$\xi(p_1) \leqq c_{16} \cdot \frac{q^{s-1}}{f^s} \quad \text{sowie } m(1) \leqq \frac{c_{17}}{q \cdot f^s(q, \varepsilon, c)}.$$

Eine analoge Abschätzung erhält man für alle $m(j)$, und somit: $m \leqq \frac{c_{18}}{q \cdot f^s(q, \varepsilon, c)}$. Das Maß der $\underline{\alpha}$ für die für einen Näherungsnenner q, A_q mindestens einmal größer als f ist, ist also kleiner als $c_{18} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q \cdot f^s(q, \varepsilon, c)} \leqq \frac{c_{19}(\varepsilon, s)}{c^s}$. Daraus folgt die Behauptung.

Korollar. *Für alle $\varepsilon > 0$ ist für fast alle $\underline{\alpha} \in I^s$*

$$N^{1/s} \cdot J_N = O((\log N)^{1+\varepsilon}).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für fast alle $\underline{\alpha}$ ist $A_{q_i} = O((\log q_i)^{1/s+\varepsilon})$ nach der vorigen Behauptung und weiters folgt etwa aus [1], Seite 120 Theorem I, mit $\Psi(q) := q^{1/s} \cdot (\log q)^{(1+\varepsilon)/s}$

und aufgrund des Dirichletschen Approximationssatzes: $\frac{q_{i+1}}{q_i} = O((\log q_i)^{1+\varepsilon})$. Weiters gilt für alle $\underset{\sim}{\alpha} \in R^s$ nach [3] Theorem 2.2 für die simultanen Näherungsnenner bezüglich der Maximumsnorm: $\frac{q_{i+2^{s+1}}}{q_i} \geqq 3$ für alle i. Für fast alle $\underset{\sim}{\alpha}$ ist daher:

$$N \cdot J_N \leqq c_{20} \cdot \sum_{i=1}^{r} a_i^{1/s} \cdot (a_i \cdot q_i)^{(s-1)/s} \cdot A_{q_i}^{s-1}$$

$$= O((\log N)^{1+\varepsilon}) \cdot \left(N^{(s-1)/s} + \sum_{i=1}^{r} q_i^{(s-1)/s}\right).$$

Schließlich ist:

$$\sum_{i=1}^{r} q_i^{(s-1)/s} \leqq q_r^{(s-1)/s} \cdot \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{q_i}{q_r}\right)^{(s-1)/s}$$

$$\leqq \left(2^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{i(s-1)/s}\right) \cdot N^{(s-1)/s}$$

und das Ergebnis folgt.

Die Ergebnisse der Beispiele könnten zu der Vermutung führen, daß die Ungleichung $J_N \leqq c_s \cdot D_N^{1/s}$ nicht bestmöglich ist. Zaremba [9] hat zwar gezeigt, daß der Exponent $1/s$ nicht zu verbessern ist, es wäre aber immerhin möglich, daß etwa eine Ungleichung der Form $J_N \leqq c_s \cdot \left(\frac{1}{-\log D_N} \cdot D_N\right)^{1/s}$ richtig sein könnte. Es ist jedoch zumindest im Fall $s = 2$ leicht einzusehen, daß die Ungleichung abgesehen von der Konstanten c_s wirklich bestmöglich ist.

Denn sei ω_N eine beliebige Folge von N Punkten in I^2 mit Diskrepanz D_N. Verschiebt man jeden Punkt der Folge der zwischen den beiden Geraden $g_1(x) = D_N^{1/2} + x$ und $g_2(x) = -D_N^{1/2} + x$ liegt, parallel zur y-Achse in I^2 auf die Gerade g_1 oder auf g_2, so erhält man eine neue Folge ω'_N. Sei R ein Rechteck in I^2, so liegen in R höchstens $N \cdot \lambda(R) + 5 \cdot D_N$ und mindestens $N \cdot \lambda(R) - 5 \cdot D_N$ Punkte. Also ist $D'_N \leqq 5 \cdot D_N$ und $J'_N \geqq D_N^{1/2}$ und somit

$$J'_N \geqq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (D'_N)^{1/2}.$$

Literaturverzeichnis

[1] J. W. S. Cassels, An Introduction to Diophantine Approximation. Cambridge 1957.

[2] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform Distribution of Sequences. New York 1974.

[3] J. C. Lagarias, Best Simultaneous Diophantine Approximations I. Trans. Amer. Math. Soc. (2) **272**, 545–554 (1982).

[4] H. Niederreiter, Methods for estimating discrepancy. In: Applications of Number Theory to Numerical Analysis (S. K. Zaremba ed.), 203–236, New York 1972.

[5] H. Niederreiter und J. Wills, Diskrepanz und Distanz von Maßen bezüglich konvexer und Jordanscher Mengen. Math. Z. **144**, 125–134 (1975).

[6] W. M. Schmidt, Lectures on Irregularities of Distribution. Tata Institute, Bombay 1977.

[7] W. M. SCHMIDT, Irregularities of Distribution IX. Acta Arith. **27,** 385–396 (1975).
[8] W. M. SCHMIDT, Metrical theorems on fractional parts of sequences. Trans. Amer. Math. Soc. **110,** 493–518 (1964).
[9] S. K. ZAREMBA, Good Lattice Points in the Sense of Hlawka and Monte-Carlo Integration. Monatsh. Math. **72,** 264–269 (1968).

Eingegangen am 2. 1. 1985*)

Anschrift des Autors:

Gerhard Larcher
Institut für Mathematik
der Universität Salzburg
Petersbrunnstraße 19
A-5020 Salzburg

*) Eine Neufassung ging am 21. 8. 1985 ein.