

8. Theorie der Resonanz phasewechselnder Schwingungen; von W. Rogowski.

In der vorhergehenden Arbeit haben die Herren B. Strasser und J. Zenneck den Nachweis der Existenz phasewechselnder Oberschwingungen in der Kurve der elektromotorischen Kraft von Drehstrom- und Wechselstrommaschinen erbracht. Sie haben die Erscheinungen beschrieben, welche sie beobachteten, wenn sie diese Schwingungen auf einen Stromkreis mit Widerstand (W), Selbstinduktion (L) und Kapazität (C) wirken ließen. Die vorliegende Arbeit, die auf Anregung von Hrn. Prof. Zenneck unternommen wurde, beschäftigt sich mit der Theorie jener Erscheinungen.

Wirkt auf den Stromkreis eine der Zeit (t) nach veränderliche elektromotorische Kraft $E = f(t)$ ein, so lautet bekanntlich die Differentialgleichung für die Ladung (Q) des Kondensators

$$(1) \quad L \frac{d^2 Q}{dt^2} + W \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = f(t).$$

Die für uns in Betracht kommende Funktion $f(t)$ sei von der Art wie die in Fig. 1. gezeichnete. Ihre wesentlichsten Merk-

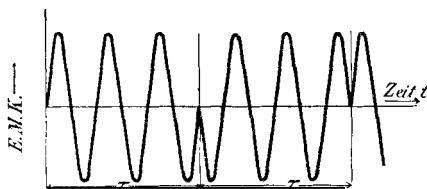


Fig. 1.

male bestehen darin, daß sie im allgemeinen sich nach einem Sinusgesetze ändert, nach gewissen Zeitintervallen τ — im folgenden einfach als Intervalle bezeichnet — indessen einen Phasensprung von 180° macht.

Um nun einen mathematischen Ausdruck für die Funktion $f(t)$ zu gewinnen, könnte man sie in eine Fouriersche

Reihe entwickeln. Dieser Weg verbietet sich aber wegen der mit ihm verbundenen Unübersichtlichkeit, wie schon die Herren Strasser und Zenneck auseinandergesetzt haben. Es soll deshalb die Funktion $f(t)$ für jedes Intervall τ besonders definiert werden und zwar in der folgenden Weise:

Für das erste Intervall ($t = 0$ bis $t = \tau$) sei

$$f(t) = E_0 \sin n t,$$

für das zweite Intervall ($t = \tau$ bis $t = 2 \tau$) sei

$$f(t) = - E_0 \sin n t,$$

für jedes folgende ungeradzahlige Intervall sei

$$f(t) = E_0 \sin n t,$$

für jedes folgende geradzahlige Intervall sei

$$f(t) = - E_0 \sin n t.$$

Die Differentialgleichungen für alle Intervalle haben die Form

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + W \frac{d Q}{dt} + \frac{Q}{C} = \pm E_0 \sin n t.$$

Ihre Lösung für irgend ein Intervall, z. B. das λ^{te} , ist von der Form

$$(2) \quad Q = e^{-\frac{W}{2L}t} \cdot \{A_\lambda \sin \gamma t + B_\lambda \cos \gamma t\} \pm D \sin(n t + \varphi).$$

Hier wie im ganzen folgenden gilt das obere Vorzeichen bei ungerader, das untere Vorzeichen bei gerader Zahl λ . Es bedeutet

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{W^2}{4L^2}}$$

die Zahl der Eigenschwingungen des Stromkreises in 2π Sek. und es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{W}{Ln - \frac{1}{Cn}}, \\ D &= - \frac{E_0}{n \sqrt{W^2 + \left(Ln - \frac{1}{Cn}\right)^2}}. \end{aligned}$$

In dem Ausdruck für Q sind für jedes neue Intervall neue Werte der Konstanten A_λ und B_λ zu wählen. Alle diese Konstanten bestimmen sich aus dem anfänglich gegebenen elektrischen Zustande und aus der in der Natur des Vorganges

begründeten Forderung, daß sich der elektrische Zustand auch in der Umgebung des Phasenwechsels stetig ändere. Es soll nur der Fall durchgerechnet werden, daß zur Zeit des Stromschlusses $t = 0$ im Kondensatorkreis weder Ladung noch Strom vorhanden, d. h. $Q = 0$ und $i = dQ/dt$ für $t = 0$ gilt.

Diese Bedingung legt zunächst die Werte der Konstanten A_1 und B_1 fest, und es lassen sich mit Hilfe der Formel (2) die Werte von Q und i zu Ende des ersten Intervalles berechnen. Die Konstanten für das zweite Intervall sind dann so zu wählen, daß zu Anfang dieses Intervalls die Werte von Q und i mit den Werten am Ende des ersten Intervalls übereinstimmen etc. Es läßt sich zeigen, daß die Konstanten gewissen Grenzwerten zustreben und daß der sich hierdurch kundgebende stationäre Zustand in höchst einfacher Weise beschrieben werden kann.

1. Stromverlauf bei Resonanz ($\gamma = n$).

Bei Resonanz wird $\varphi = \pi/2$, $D = -E_0/Wn$ und es werden die Ladung Q und der Strom i für irgend ein Intervall λ durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$(3a) \quad Q = e^{-\frac{W}{2L}t} \{A_\lambda \sin nt + B_\lambda \cos nt\} \mp \frac{E_0}{Wn} \cos nt,$$

$$(3b) \quad \begin{cases} i = -e^{-\frac{W}{2L}t} \left\{ \left(A_\lambda \frac{W}{2L} + B_\lambda n \right) \sin nt \right. \\ \left. + \left(B_\lambda \frac{W}{2L} - A_\lambda n \right) \cdot \cos nt \right\} \pm \frac{E_0}{W} \sin nt. \end{cases}$$

Die Forderung, zur Zeit $t = 0$ sei der Strom $i = 0$, hat zur Folge, daß zwischen den Konstanten A_1 und B_1 die Beziehung $B_1(W/2L) = A_1 n$ besteht. Dann muß aber der Strom zu Ende des ersten und somit auch zu Anfang des zweiten Intervalles den Wert Null annehmen. Die Konstanten A_2 u. B_2 müssen daher durch die analoge Beziehung miteinander verknüpft sein. Bei weiterer Fortsetzung dieser Schlußfolge überzeugt man sich, daß zwischen irgendwelchen zusammengehörigen Konstanten A_λ und B_λ die Beziehung

$$(4) \quad \frac{B_\lambda W}{2L} = A_\lambda n$$

besteht.

Um der weiteren Forderung, daß zur Zeit $t = 0$ auch die Ladung $Q = 0$ sei, gerecht zu werden, berechnen wir zunächst aus der zu Anfang des λ^{ten} Intervalles gegebenen Ladung Q'_λ die am Ende desselben Intervalles vorhandene Ladung Q''_λ . Bei ungerader Zahl λ erhalten wir offenbar mit Rücksicht auf Gleichung (3a)

$$B_\lambda = \left(Q'_\lambda + \frac{E_0}{Wn} \right) e^{\frac{W}{2L} \lambda \tau}$$

und somit

$$Q''_\lambda = - \frac{E_0}{Wn} \left\{ 1 - a \left(\frac{Q'_\lambda}{\frac{E_0}{Wn}} + 1 \right) \right\},$$

wo

$$a = e^{-\frac{W}{2L} \tau}$$

gesetzt wurde. Ähnlich wird bei gerader Zahl λ

$$Q''_\lambda = \frac{E_0}{Wn} \left\{ 1 + a \left(\frac{Q'_\lambda}{\frac{E_0}{Wn}} - 1 \right) \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln können wir leicht die aufeinanderfolgenden Werte der Ladungen angeben; wir finden für das erste Intervall

$$Q'_1 = 0, \quad Q''_1 = - \frac{E_0}{Wn} (1 - a);$$

für das zweite Intervall

$$Q'_2 = - \frac{E_0}{Wn} (1 - a), \quad Q''_2 = \frac{E_0}{Wn} (1 - 2a + a^2);$$

für das dritte Intervall

$$Q'_3 = \frac{E_0}{Wn} (1 - 2a + a^2), \quad Q''_3 = - \frac{E_0}{Wn} (1 - 2a + 2a^2 - a^3).$$

Mit wachsender Zeit wird daher der Wert der Ladung am Ende irgend eines Intervalles durch den Ausdruck

$$Q'' = \mp \frac{E_0}{Wn} \{ 1 - 2a + 2a^2 - 2a^3 + 2a^4 - + \dots \}$$

gegeben. a ist nun stets eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl. Der Wert Q'' strebt daher einem bestimmten in geschlossener Form angebbaren Grenzwert zu, nämlich

$$(5) \quad Q'' = \mp \frac{E_0}{Wn} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right).$$

Ist dieser Wert erreicht, so haben wir stationären Zustand. Es ist dann

$$B_{\lambda} = \pm \frac{2 E_0}{W n} \cdot \frac{1}{1 + a} e^{\frac{W}{2 L} \cdot \lambda \tau},$$

$$A_{\lambda} = \pm \frac{E_0}{L n^2} \cdot \frac{1}{1 + a} e^{\frac{W}{2 L} \cdot \lambda \tau}$$

und der Ausdruck für den Strom lautet

$$i = \pm \frac{E_0}{W} \cdot \sin n t \left\{ 1 - e^{-\frac{W}{2 L} t} \cdot \frac{2}{1 + a} \left(1 + \frac{W}{4 L^2 n^2} \right) \right\},$$

worin die Zeit t der Beschränkung $0 \leq t \leq \tau$ unterliegt. Mit jedem neuen Intervall hat aber die Zeitrechnung aufs neue anzufangen.

Bei den hohen Oberschwingungen, um die es sich im vorliegenden Fall handelt, ist in einem Stromkreis, der im wesentlichen durch Spulen aus nicht extrem dünnem Kupferdraht gebildet wird, das Verhältnis $W^2/4 L^2 n^2$ klein gegen 1 (bei der Anordnung von Strasser und Zenneck war es gleich $3,1 \cdot 10^{-4}$). Darf es gegen 1 vernachlässigt werden, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$(6) \quad i = \pm \frac{E_0}{W} \cdot \sin n t \left\{ 1 - e^{-\frac{W}{2 L} t} \cdot \frac{2}{1 + a} \right\}.$$

Die Stromkurve kann dem Wesentlichen nach als eine Sinuskurve mit veränderlicher Amplitude aufgefaßt werden; sie verläuft symmetrisch zur Zeitachse. Ihre Maxima und Minima liegen auf dem durch den Faktor

$$x = 1 - e^{-\frac{W}{2 L} t} \cdot \frac{2}{1 + a}$$

gegebenen Liniestück. Dieser sinkt innerhalb eines jeden Intervalles einmal auf Null hinunter. Zu Anfang und zu Ende eines Intervalles nimmt er numerisch gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte an, und zwar liegt daselbst sein numerischer Betrag um so näher der Einheit, je weiter a an Null heranrückt und umgekehrt. Der Faktor x gibt außerdem das Verhältnis des Stromes i zu dem bei gewöhnlicher Resonanz vorhandenen Strom an. Gerade bei kleinem Werte des Widerstandes kann dieses Verhältnis ein recht kleines sein, so daß ein Anschwellen des Stromes i im Resonanzpunkt nicht eintreten braucht. In den Fig. 2,

3 und 4 sind drei Stromkurven als Beispiele für den behandelten Fall aufgezeichnet. Fig. 2 entspricht einem mittleren Werte von a , nämlich $a = 0,368$, Fig. 3 einem großen, nämlich $a = 0,90$, Fig. 4 einem kleinen, nämlich $a = 4,5 \cdot 10^{-5}$.

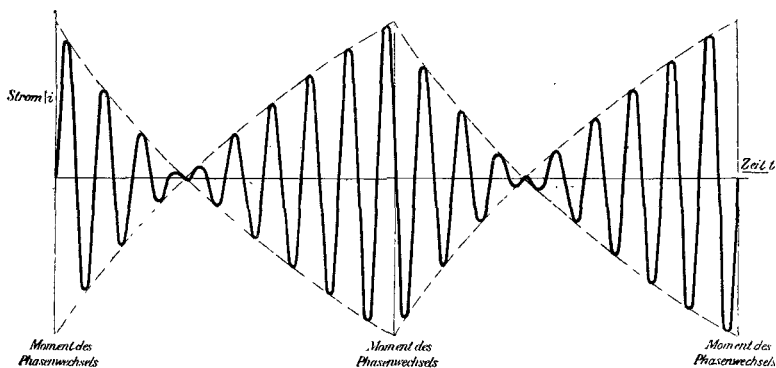


Fig. 2.

$W = 160 \, \Omega$. $L = 0,80$ Henry. $n = \gamma = 5660$; $\tau = 1/100$ sec.
(Werte bei den Versuchen von Strasser u. Zenneck.)

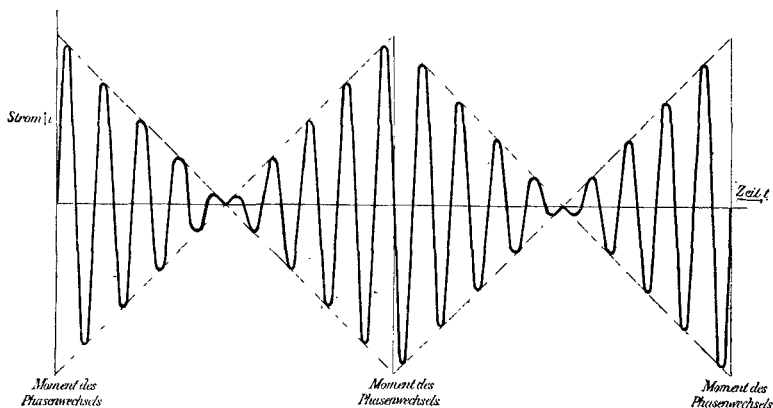


Fig. 3.

Verhältnisse wie in Fig. 2, nur $W = 16 \, \Omega$.

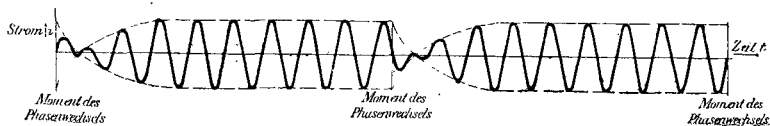


Fig. 4.

Verhältnisse wie in Fig. 2, nur $W = 1600 \, \Omega$.

2. Stromverlauf im allgemeinen Fall ($n \geq \gamma$).

Wir setzen $\gamma = n + \varepsilon$ und rechnen anstatt mit φ mit dem Winkel $\alpha = (\pi/2) - \varphi$. Es gelten dann für die Ladung Q und den Strom i des λ^{ten} Intervalles die Ausdrücke

$$(7a) \quad \left\{ \begin{aligned} Q &= e^{-\frac{W}{2L}t} \{ \sin nt (A_\lambda \cos \varepsilon t - B_\lambda \sin \varepsilon t) \\ &\quad + \cos nt (A_\lambda \sin \varepsilon t + B_\lambda \cos \varepsilon t) \pm D \cos (nt - \alpha) \}, \end{aligned} \right.$$

$$(7b) \quad \left\{ \begin{aligned} i &= -e^{-\frac{W}{2L}t} \{ \sin nt (R_\lambda \cos \varepsilon t - S_\lambda \sin \varepsilon t) \\ &\quad + \cos nt (R_\lambda \sin \varepsilon t + S_\lambda \cos \varepsilon t) \mp D n \sin (nt - \alpha) \}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$R_\lambda = A_\lambda \frac{W}{2L} + B_\lambda \gamma, \quad S_\lambda = B_\lambda \frac{W}{2L} - A_\lambda \gamma$$

gesetzt wurde.

Wir bestimmen wieder ähnlich wie vorhin die Beziehungen, die zwischen den zu Anfang des λ^{ten} Intervalles gegebenen Werten der Ladung Q'_λ , des Stromes i'_λ und den zu Ende desselben Intervalles vorhandenen Werten dieser Größen Q''_λ und i''_λ bestehen.

Setzt man zur Abkürzung

$$Q' - D \cos \alpha = G,$$

$$-(i' - D n \sin \alpha) = F,$$

$$\frac{F}{\gamma} - \frac{W}{2L} G = H,$$

$$G \gamma - H \frac{W}{2L} = K,$$

so drücken sich bei *ungerader* Zahl λ die Konstanten $A_\lambda, B_\lambda, R_\lambda, S_\lambda$ nach den Gleichungen (7a) u. (7b) folgendermaßen aus:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\lambda &= e^{\frac{W}{2L} \lambda \tau} \{ G \sin \varepsilon \lambda \tau - H \cos \varepsilon \lambda \tau \}, \\ B_\lambda &= e^{\frac{W}{2L} \lambda \tau} \{ H \sin \varepsilon \lambda \tau + G \cos \varepsilon \lambda \tau \}, \\ R_\lambda &= e^{\frac{W}{2L} \lambda \tau} \{ F \sin \varepsilon \lambda \tau + K \cos \varepsilon \lambda \tau \}, \\ S_\lambda &= e^{\frac{W}{2L} \lambda \tau} \{ F \cos \varepsilon \lambda \tau - K \sin \varepsilon \lambda \tau \}. \end{aligned} \right.$$

Wir erhalten somit für die gesuchten Größen die Werte

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} Q'_\lambda &= D \cos \alpha + a \{ G \cos \varepsilon \tau - H \sin \varepsilon \tau \}, \\ i'_\lambda &= D n \sin \alpha - a \{ F \cos \varepsilon \tau + K \sin \varepsilon \tau \}. \end{aligned} \right.$$

Bei gerader Zahl λ haben wir nur nötig, in den vorigen Formeln $+D$ mit $-D$ zu vertauschen. Das ergibt

$$(10) \quad \begin{cases} Q''_{\lambda} = -D \cos \alpha + a \{g \cos \varepsilon \tau - h \sin \varepsilon \tau\}, \\ i''_{\lambda} = -D n \sin \alpha - a \{f \cos \varepsilon \tau + k \sin \varepsilon \tau\}, \end{cases}$$

worin von den analogen Abkürzungen

$$\begin{aligned} g &= Q' + D \cos \alpha, \\ f &= -(i' + D n \sin \alpha), \\ h &= \frac{f}{\gamma} - \frac{W}{2 L \gamma} g, \\ k &= g \gamma - \frac{W}{2 L} \gamma \end{aligned}$$

Gebrauch gemacht ist.

In den Gleichungen (9) und (10) haben wir wieder ein einfaches Schema zur Niederschrift der zeitlich aufeinanderfolgenden Werte von Q''_{λ} und i''_{λ} gewonnen. Ausgehend von der Forderung, daß zur Zeit $t = 0$ die Ladung $Q = 0$ und der Strom $i = 0$ sein sollen, finden wir nämlich für das erste Periodenintervall

$$\begin{aligned} Q'_1 &= D \cos \alpha + a M_1, \\ i'_1 &= D n \sin \alpha + a N_1. \end{aligned}$$

Darin sind die zur Abkürzung gebrauchten Ausdrücke $a M_1$ und $a N_1$ und ebenso später $a M_{\lambda}$ und $a N_{\lambda}$ Größen, die für den stationären Zustand, auf den es im folgenden ankommt, aus den Gleichungen verschwinden (vgl. p. 774).

Für das zweite Intervall folgt

$$\begin{aligned} Q'_2 &= Q'_1, \\ i'_2 &= i'_1, \\ Q''_2 &= -D \cos \alpha (1 - 2 a \delta_1 + a^2 M_2), \\ i''_2 &= -D n \sin \alpha (1 - 2 a \varepsilon_1 + a^2 N_2). \end{aligned}$$

Darin ist

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \cos \varepsilon \tau + \frac{1}{\gamma} \left(n \operatorname{tg} \alpha + \frac{W}{2 L} \right) \sin \varepsilon \tau, \\ \varepsilon_1 &= \cos \varepsilon \tau - \left(\frac{\gamma}{n \operatorname{tg} \alpha} + \frac{W}{2 L \gamma} \left(1 + \frac{W}{2 L n \operatorname{tg} \alpha} \right) \right) \sin \varepsilon \tau \end{aligned}$$

gesetzt worden.

Für das dritte Intervall ergibt sich ebenso:

$$Q_3' = Q_2'',$$

$$i_3' = i_2'',$$

$$Q_3'' = D \cos \alpha (1 - 2 a \delta_1 + 2 a^2 \delta_2 + a^3 M_3),$$

$$i_3'' = D n \sin \alpha (1 - 2 a \varepsilon_1 + 2 a^2 \varepsilon_2 + a^3 N_3),$$

worin

$$\delta_2 = \delta_1 \cos \varepsilon \tau + \frac{1}{\gamma} \left(n \operatorname{tg} \alpha \varepsilon_1 + \frac{W}{2L} \delta_1 \right) \sin \varepsilon \tau,$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cos \varepsilon \tau - \left(\frac{\delta_1 \gamma}{n \operatorname{tg} \alpha} + \frac{W}{2L\gamma} \left(\varepsilon_1 + \frac{\delta_1}{n \operatorname{tg} \alpha} \frac{W}{2L} \right) \right) \sin \varepsilon \tau \text{ etc.}$$

Mit wachsender Zeit gehen die Ausdrücke für Strom und Ladung am Ende irgend eines Intervalles in die folgenden über:

$$(11) \quad \begin{cases} Q'' = \pm D \cos \alpha (1 - 2 a \delta_1 + 2 a^2 \delta_2 - 2 a^3 \delta_3 + \dots) \\ \quad = \pm D \cos \alpha (1 + 2 l), \\ i'' = \pm D n \sin \alpha (1 - 2 a \varepsilon_1 + 2 a^2 \varepsilon_2 - 2 a^3 \varepsilon_3 + \dots) \\ \quad = \pm D n \sin \alpha (1 + 2 m). \end{cases}$$

Zwei Werte δ_λ und ε_λ sind mit den Größen $\delta_{\lambda-1}$, $\varepsilon_{\lambda-1}$ durch die Rekursionsformeln:

$$\delta_\lambda = \delta_{\lambda-1} \cdot \cos \varepsilon \tau + \frac{1}{\gamma} \left(n \operatorname{tg} \alpha \varepsilon_{\lambda-1} + \frac{W}{2L} \delta_{\lambda-1} \right) \sin \varepsilon \tau,$$

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda-1} \cdot \cos \varepsilon \tau - \left(\frac{\delta_{\lambda-1} \gamma}{n \operatorname{tg} \alpha} + \frac{W}{2L\gamma} \left(\varepsilon_{\lambda-1} + \frac{\delta_{\lambda-1}}{n \operatorname{tg} \alpha} \frac{W}{2L} \right) \right) \sin \varepsilon \tau$$

verknüpft.

Die Berechnung der Grenzwerte Q'' und τ'' vereinfacht sich außerordentlich, wenn $\sin \varepsilon \tau$ verschwindet. Dieser Fall tritt ein, wenn die Differenz zwischen der Zahl der in einem Intervall vorhandenen erzwungenen Schwingungen und der Zahl der in demselben Intervall vorhandenen Eigenschwingungen ein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{2}$ beträgt.

Ist die Differenz ein gerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$, so ist $\cos \varepsilon \tau = 1$ und

$$Q'' = \pm D \cos \alpha [1 - 2 a + 2 a^2 - 2 a^3 \dots]$$

$$= \pm D \cos \alpha \left(\frac{1-a}{1+a} \right),$$

$$i'' = \pm D n \sin \alpha \left(\frac{1-a}{1+a} \right).$$

Beträgt jene Differenz aber ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$, so hat man $\cos \varepsilon \tau = -1$ zu setzen und erhält somit

$$Q'' = \pm D \cos \alpha \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right),$$

$$i'' = \pm D n \sin \alpha \left(\frac{1 + a}{1 - a} \right).$$

Man bestimmt nun zu den durch die Gleichungen (11) gegebenen Werten der Ladung und des Stromes nach den Gleichungen (8) die Konstanten $A_\lambda B_\lambda R_\lambda S_\lambda$ und setzt letztere in die für den Strom gültige Formel (7b) ein. Hierdurch gewinnt man bei passender Zusammenziehung der Glieder das gesuchte Resultat

$$(12) \quad i = \mp D n \left\{ \sin(n t - \alpha) - \frac{2 \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot (1 + m) \cdot e^{-\frac{W}{2L} t} \cdot \sin(\gamma t - \beta) \right\},$$

wo der Winkel β durch die Beziehung $\operatorname{ctg} \beta = -K/F$ bestimmt ist. Die Zeit t unterliegt wieder der Beschränkung $0 \leq t \leq \tau$ und es hat wieder mit jedem neuen Intervall die Zeitrechnung aufs neue zu beginnen.

In den besonderen Fällen, wo $\sin \varepsilon \tau$ verschwindet, wird

$$m = l = \pm \frac{a}{1 \pm a}.$$

Alsdann kann man mit genügender Annäherung, wenn man $W/2L\gamma$ gegen die Einheit vernachlässigt, $\alpha = \beta$ setzen, wodurch man die folgende Formel erhält:

$$(13) \quad i = \mp D n \left\{ \sin(n t - \alpha) - \frac{2}{1 \pm a} e^{-\frac{W}{2L} t} \cdot \sin(\gamma t - \alpha) \right\},$$

und zwar ist für a das positive oder negative Vorzeichen zu wählen je nachdem die Differenz zwischen der Zahl der innerhalb eines Intervalles vorhandenen erzwungenen und Eigenschwingungen ein gerades oder ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ beträgt.

Nach Gleichung (12) ist der Strom die Resultante einer ungedämpften und gedämpften Schwingung. Die erstere ist völlig mit der erzwungenen Schwingung identisch, die durch

eine nicht phasewechselnde elektromotorische Kraft derselben Amplitude und Wechselzahl erregt würde; die letztere ist die Eigenschwingung des Stromkreises. Die Stromamplitude kann daher nicht konstant sein; liegt die Größe a sehr nahe bei Null (starke Dämpfung), so kann sich die gedämpfte Schwingung nur zu Anfang eines Intervalles wirksam zeigen und es muß somit die Stromamplitude im allgemeinen konstante Größe haben, nur unmittelbar nach einem Phasenwechsel einen starken Abfall zeigen (ähnlich wie in Fig. 4). Bei sehr großen und mittleren Werte

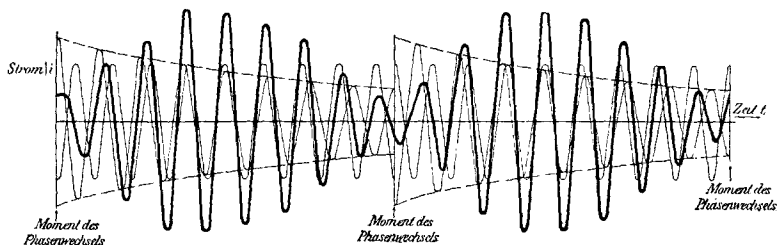


Fig. 5.

$$W = 160 \, \Omega. \quad L = 0,80 \, \text{Henry}. \quad n = 5660. \quad \gamma = 5032. \quad \tau = \frac{1}{100} \, \text{sec.}$$

Die Differenz der innerhalb der Zeit τ erfolgenden erzwungenen und Eigenschwingungen beträgt eine einzige ganze Schwingung. Mittlere Dämpfung.

der Größe a (sehr schwacher und mittlerer Dämpfung) erhält man *Schwebungen* und es hängt die Stärke der Schwebungen von dem gegenseitigen Verhältnis der Amplituden beider Schwingungen ab. Über dieses läßt sich am einfachsten eine Aussage machen für die Fälle, für welche Gleichung (13) gilt.

Es liege a nahe bei 1: sehr *schwache* Dämpfung.

α) Ist alsdann die Differenz zwischen der Zahl der in einem Intervall vorhandenen erzwungenen und Eigenschwingungen eine ganze Zahl, so sind die Amplituden der interferierenden Schwingungen nahezu gleich. Die Stromamplitude schwankt zwischen sehr kleinen und dem doppelten Betrag der vorher erwähnten Amplitude (Fig. 6, stark ausgezogene Kurve).

β) Beträgt aber die erwähnte Differenz ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$, so überwiegt die Amplitude der gedämpften

Schwingung weit die Amplitude der ungedämpften. Praktisch haben wir dann konstante Amplitude (Fig. 8).

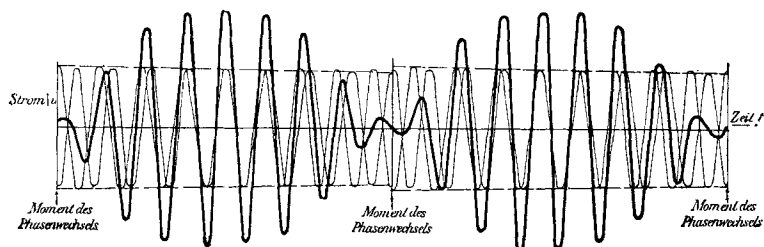


Fig. 6.

Verhältnisse wie in Fig. 5, nur $W = 16 \Omega$. Geringe Dämpfung.

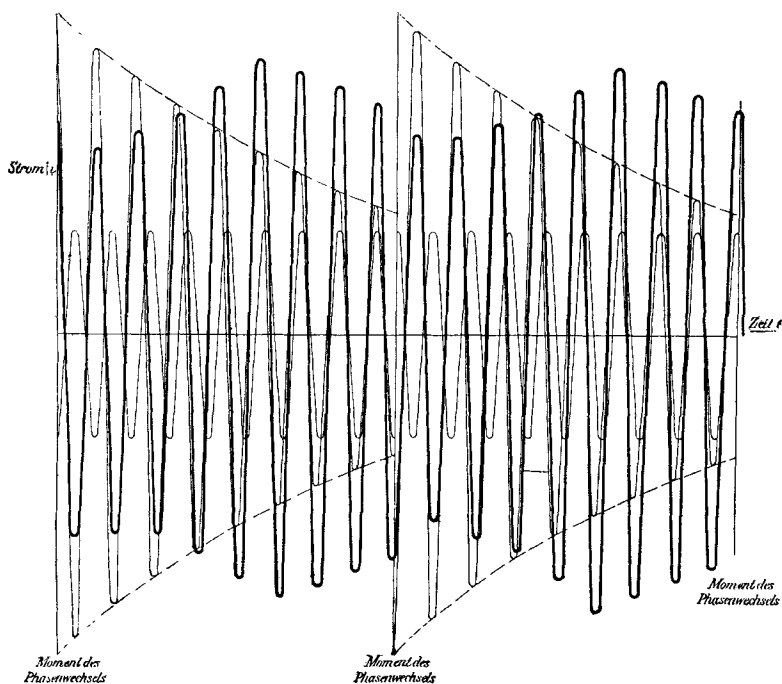


Fig. 7.

$W = 160 \Omega$. $L = 0,80$ Henry. $n = 5660$. $\gamma = 5346$. $\tau = 1/100$ sec.

Die Differenz der innerhalb der Zeit τ erfolgenden erzwungenen und Eigenschwingungen beträgt gerade eine halbe Schwingung. Mittlere Dämpfung.

Mit zunehmender Dämpfung (abnehmender Größe von α) schwächen sich für den Fall α die Schwankungen der Stromamplitude ab (Fig. 5), während sie für den Fall β zunehmen (Fig. 7), bis wir bei großer Dämpfung die schon besprochene Erscheinung erhalten.

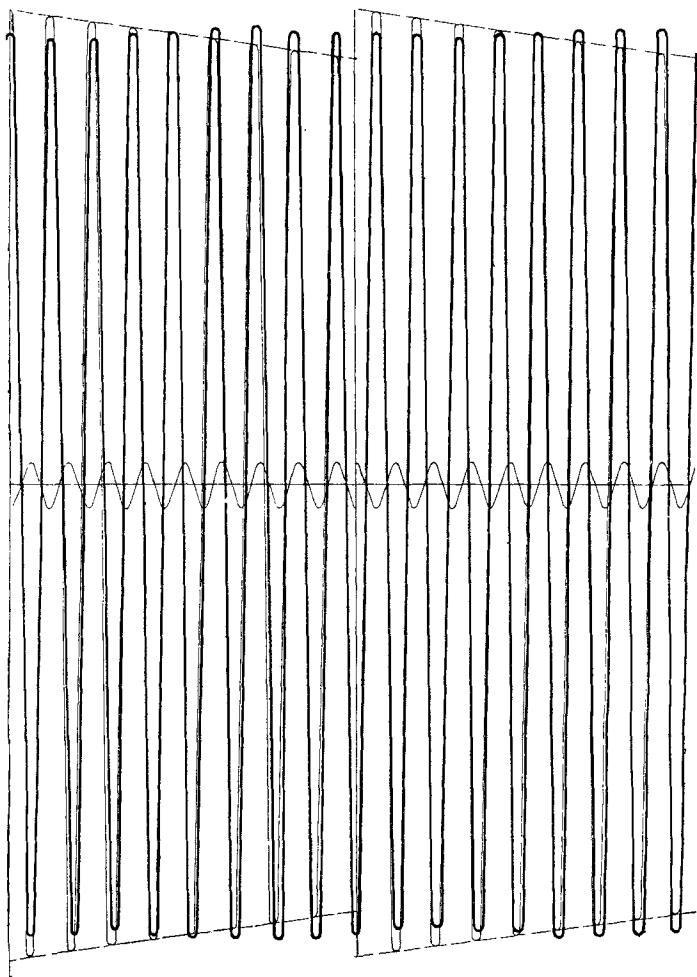


Fig. 8.

Verhältnisse wie in Fig. 7, nur ist $W = 16 \, \Omega$ (geringe Dämpfung) und der Ordinatenmaßstab $\frac{1}{5}$ des vorigen.

3. Resonanzkurven.

Für den Ausschlag eines auf den Effekt ansprechenden Meßinstrumentes ist der Effektivwert des Stroms d. i. in unserem Falle der über ein ganzes Intervall genommene quadratische Mittelwert des Stromes

$$J = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i^2 dt}$$

maßgebend. Trägt man diesen Effektivwert als Ordinate, die Periodenzahl der Eigenschwingung des Stromkreises, die durch Zu- und Abschalten von Kapazität geändert werden möge, als Abszisse auf, so erhält man eine Kurve, die man als Resonanzkurve bezeichnen kann. Die für den Effektivwert J im allgemeinen Falle sich ergebenden Formeln sind äußerst unübersichtlich; sie vereinfachen sich jedoch bei der Voraussetzung, daß die Differenz der innerhalb eines Intervalles erfolgenden erzwungenen und Eigenschwingungen ein ganzes Vielfaches einer halben Schwingung beträgt und daß die Induktanz des Resonanzkreises groß ist gegen den Widerstand (vgl. p. 770). Mit dieser Beschränkung werden wir aber schon die wesentlichsten Eigenschaften der Resonanzkurve wenigstens für die unmittelbare Umgebung des Resonanzpunktes angeben können. Nun erhält man bei Benutzung der Formel (13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 n^2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i^2 dt = & \frac{1}{2} + \frac{2(1 \mp a)}{\tau(1 \pm a)} \left\{ \frac{L}{W} - \frac{\frac{W}{2L(n-\gamma)}}{(n-\gamma) \left(1 + \left(\frac{W}{2L(n-\gamma)} \right)^2 \right)} \right\} \\ & + \frac{2(1 \mp a)}{\tau(1 \pm a)} \left\{ \frac{1}{n+\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{W}{2L(n+\gamma)} \right)^2} \frac{\sin(2\alpha + \gamma)}{\cos \gamma} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\gamma \left(1 + \left(\frac{W}{2L\gamma} \right)^2 \right)} \frac{\sin(2\alpha + \delta)}{\cos \delta} \right\}, \end{aligned}$$

wo

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{W}{2L(n+\gamma)}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{W}{2L\gamma}$$

gesetzt ist. Das obere Vorzeichen ist zu wählen, wenn die in Rede stehende Differenz eine ganze Zahl ist, das untere Vorzeichen, wenn sie ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.

Der Winkel 2α liegt nun nahe bei π , wenn, wie oben vorausgesetzt wurde, die Induktanz Ln groß ist gegen den Widerstand W . Aus demselben Grunde sind δ und γ kleine Winkel, außerdem sind $1/\gamma$ und $1/n + \gamma$ auch noch im Vergleich zu $\frac{1}{2}\tau$ im allgemeinen kleine Zahlen. Man darf deshalb die mit den Faktoren

$$\frac{1}{n + \gamma} \sin(2\alpha + \gamma), \quad \frac{1}{\gamma} \sin(2\alpha + \delta)$$

behafteten Größen vernachlässigen. Das Resultat wird dann

$$J = Dn \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2(1 \mp a)}{\tau(1 \pm a)} \left\{ \frac{L}{W} - \frac{\frac{W}{2L(n-\gamma)}}{(n-\gamma) \cdot \left(1 + \left(\frac{W}{2L(n-\gamma)}\right)^2\right)} \right\}},$$

oder wenn wir mit J' den Effektivwert des unter gleichen Verhältnissen durch nicht phasewechselnde Schwingungen hervorgerufenen Stromes bezeichnen

$$J = J' \sqrt{1 + \frac{4(1 \mp a)}{\tau(1 \pm a)} \left\{ \frac{L}{W} - \frac{\frac{W}{2L(n-\gamma)}}{(n-\gamma) \cdot \left(1 + \left(\frac{W}{2L(n-\gamma)}\right)^2\right)} \right\}}.$$

Im Falle der Resonanz $n = \gamma$ erhält man

$$J = J' \sqrt{1 - \frac{4(1-a)}{\tau(1+a)} \frac{L}{W}} = J' \sqrt{1 + \frac{2(1-a)}{(1+a) \lg a}}.$$

Der Wert des durch diese Gleichung gegebenen Stromes ist für sehr nahe bei 1 gelegene Werte von a

$$J = J' \frac{(1-a)}{3,46}.$$

Für einen sehr nahe bei Null gelegenen Wert von a verläuft die Resonanzkurve bei phasewechselnden Schwingungen überall aber nur sehr wenig unterhalb der ihr entsprechenden gewöhnlichen Resonanzkurve. Für mittlere und nahe bei 1 gelegene Werte von a verläuft sie — abgesehen von der un-

mittelbaren Umgebung des Resonanzpunktes im allgemeinen oberhalb der gewöhnlichen Resonanzkurve. An denjenigen

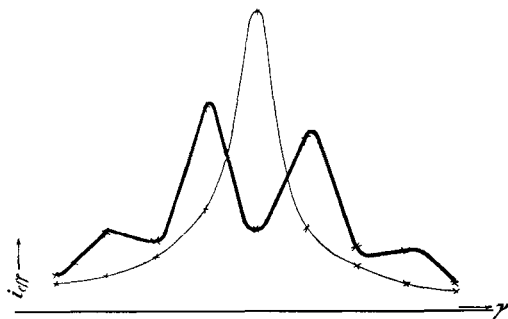


Fig. 9. $W = 160 \, \Omega$. $L = 0,80$ Henry. $n = 5660$. $\tau = \frac{1}{100}$ sec.

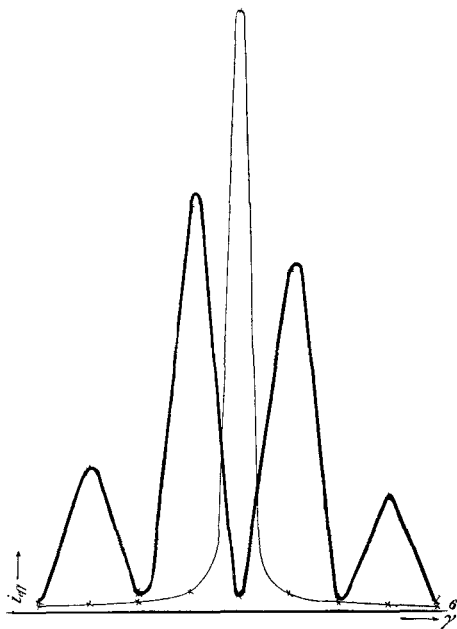


Fig. 10. Verhältnisse wie in Fig. 9, nur ist $W = 16 \, \Omega$ und der Ordinatenmaßstab $\frac{1}{5}$ des vorigen.

Stellen, an denen die Differenz zwischen der Zahl der in einem Intervall vorhandenen erzwungenen und der Zahl der Eigenschwingungen ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ beträgt, steigt

sie stark an; ihre höchsten Erhebungen können bei geeigneter Wahl der Konstanten W und L das Maximum der gewöhnlichen Resonanzkurven noch übertreffen. Im Resonanzpunkt jedoch sinkt sie tief unter die gewöhnliche Resonanzkurve hinab. In den Figg. 9 und 10 sind zwei Resonanzkurven für einen mittleren und großen Wert von a (mittlere und kleine Dämpfung) und zum Vergleich die entsprechenden gewöhnlichen Resonanzkurven (dünn ausgezogene Kurven) gezeichnet.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule.

(Eingegangen 16. Mai 1906.)
