

Bestimmung des Widerstandsgesetzes an submikroskopischen Platin-Probekörpern der Größenordnung 10^{-5} cm.

Von **S. Virtel** in Wien.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1929.)

Im Ehrenhaftschen Kondensator wurden Platinteilchen der Größenordnung 10^{-5} cm nach der Evakuierungsmethode untersucht. Es gelang dabei zum ersten Male im elektrischen Flammenbogen Platin-Probekörper zu erzeugen, die reguläre Struktur und Beschaffenheit aufweisen. Die $A^2\sigma$ -Werte sind bei allen diesen Partikeln dem spezifischen Gewichte von Platin proportional. Die Resultate der Messungen wurden dann nach einem linearen (Stokes-Cunninghamschen) und einem exponentiellen Gesetz (Knudsen-Weberschen) ausgewertet. In beiden Fällen zeigen die elektrischen Ladungen wesentliche Unterschreitungen; durch eine angeschlossene Fehlerrechnung wird der Beweis erbracht, daß diese nicht durch Versuchsfehler verursacht werden. Die — nach den Methoden der Ausgleichsrechnung — gewonnenen Mittelwerte für $A^2\sigma$ und A liegen in den theoretisch postulierten Grenzen.

§ 1. Einleitung. Die in den letzten Jahren ausgeführten Messungen führten zur einheitlichen Bestimmung der Konstanten des Widerstandsgesetzes für verschiedene Substanzen. Nachdem bereits Messungen an festen und flüssigen Kugeln geringer Dichte veröffentlicht wurden, sollten nun Untersuchungen an Kugeln hoher Dichte, an Edelmetallen, ausgeführt werden. Eine solche Arbeit an submikroskopischen Silberpartikeln erschien bereits im letzten Jahre. In weiterer Folge fiel die Wahl auf Platin; nicht allein wegen des großen spezifischen Gewichtes, sondern vielmehr infolge des Umstandes, daß trotz mehrmaliger Verwendung von submikroskopischen Platinteilchen zu Messungszwecken bis jetzt keine einheitlichen Resultate erzielt werden konnten.

F. Ehrenhaft* beobachtete nach der Schwebemethode mehrere Pt-Probekörper bei Atmosphärendruck und fand dabei wesentliche Unterschreitungen der elektrischen Ladungen.

Infolge verbesserter Beobachtungstechnik gelang es in weiterer Folge Edgar Meyer und Walther Gerlach** dasselbe Materieteilchen bei mehreren Drucken zu messen. In den drei elektrisch zerstäubten, nach der neuen Evakuierungsmethode bei zwei bis drei Unterdrucken ge-

* F. Ehrenhaft, Wien. Ber. **119** [2a], 815, 1910; Phys. ZS. **11**, 619, 1910.

** E. Meyer und W. Gerlach, Ann. d. Phys. **45**, 177, 1914; **47**, 227, 1915; J. Elster und H. Geitel-Festschrift, April 1915, S. 196; Phys. ZS. **22**, 615, 1921.

messenen Pt-Partikeln untersuchten sie die Konstanz der einzelnen Radian unter Zugrundelegung acht verschiedener Widerstandsgesetze und fanden „einen systematischen Gang der Radian mit dem Druck des umgebenden Gases. Diese Abhängigkeit vom Druck verschwindet, wenn für die Pt-Teilchen etwa das halbe spezifische Gewicht des reinen Platins angenommen wird.“ — So zogen sie aus unregulären Probekörpern ($A = 0,6$ oder $\sigma = 11,56$) den Schluß, „daß wahrscheinlich die bisher angegebenen Widerstandsgesetze für derartig hergestellte Pt-Teilchen keine Gültigkeit besitzen“. — Die Unhaltbarkeit dieser Überlegungen bewies bereits an demselben Messungsmaterial K. Konstantinowsky*, indem er auf eine Reihe von theoretischen Vernachlässigungen hinwies. Nun wird gezeigt, daß auch Versuchsmängel bestanden, da bei entsprechender Anordnung leicht reguläre Partikeln zu erzeugen sind, die allen Widerstandsgesetzen entsprechen.

Längere Messungen an Platin führte R. Bär aus. Er untersuchte zuerst** sechs im Wechselstrom und neun im Kontaktfunken des elektrischen Gleichstromes erzeugte Pt-Teilchen; nachher*** ergänzte er sein Beobachtungsmaterial durch weitere Messungen an 27 nur im Wechselstrom zerstäubten Pt-Probekörpern. Alle Teilchen wurden bei mehreren Unterdrücken beobachtet. Diese ausführlichen Messungen ergaben für submikroskopische Pt-Probekörper unwahrscheinlich kleine Dichten, zwischen 0,18 und 8,52, weisen also Unterschreitungen auf, welche um viele hundert Prozent von der normalen Pt-Dichte abweichen. Er zieht daraus den Schluß, „daß diese Teilchen gewaltige Abweichungen von der Kugelgestalt oder eine schwammartige Struktur zeigen (Perrin). Es ist also prinzipiell unzulässig, an solchen Metallteilchen Absolutmessungen ihrer elektrischen Ladung nach der Ehrenhaft-Millikanschen Methode vorzunehmen“ (S. 398). — Da es ihm nicht gelang reguläre Probekörper zu bekommen, und da auch keiner von den vielen Autoren, die sich schon früher mit zerstäubten Edelmetallpartikeln beschäftigten, bis dahin zufriedenstellende Ladungsmessungen ausführen konnte, nahm er an, daß alle diese Beobachtungen an irregulärem Material vor sich gingen und daß die elektrischen Ladungsunterschreitungen nur durch falsche Annahme über die Dichte von gemessenen Materieteilchen verursacht werden. Daß diese Annahme nicht zutrifft, beweist die inzwischen erschienene Arbeit

* K. D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 48, 57, 1915; 49. 881, 1916.

** R. Bär, ebenda 59, 393, 1919.

*** Derselbe, ebenda 67, 157, 1922.

von O. Trauner*, wo im elektrischen Lichtbogen erzeugte Silberteilchen bei regulärem $A^2\sigma$ der Metallprobekörper große Unterschreitungen des Elementarquants aufweisen. Über elektrisch zerstäubte Pt-Partikeln wird im weiteren die Rede sein.

Gelegentlich seiner Untersuchungen an Nebelteilchen bei Überdruck unterzog K. Wolter** auch 67 verschiedene Pt-Probekörper Beobachtungen bei einem Druck von 1 und 5 Atmosphären, konnte aber die Ladungsmessungen nie an ein und demselben Teilchen ausführen. Aus dem Vergleich der Größe einzelner Ladungen, die er jeweils beim Atmosphärendruck berechnete, mit der Größe der Subelektronen, die er an anderen Teilchen desselben Materials im komprimierten Gase gefunden hatte, fand er, daß diese vom Gasdruck unabhängig sind, was als Beweis der Gültigkeit des Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetzes anzusehen ist. Die auftretenden Unterschreitungen erklärt er mit unregelmäßiger Dichte des beobachteten Materials. Tatsächlich scheinen einerseits das sehr ausgedehnte Radienintervall (von 2 bis $45 \cdot 10^{-6}$ cm), andererseits die ganz minimalen Ladungswerte vieler Teilchen (in der Größenordnung 10^{-11}) diese Annahme zu bekräftigen.

Solchen Beobachtungen über unregelmäßige Gestalt der Probekörper standen Behauptungen anderer Forscher gegenüber, die an der kugelförmigen Form von Edelmetallpartikeln nicht zweifelten***. Dieselhorst und Freundlich**** bestätigen, daß die nach der Methode der Schlierenbildung in Lösungen von ihnen untersuchten Pt-Teilchen, die nach dem Bredigischen Verfahren suspendiert waren, sich als vollkommen kugelförmig erwiesen. Auch die von Calatroni† ausgeführten spektralphotometrischen Absorptionsmessungen, die nach der Gansschen Theorie zur Bestimmung der Gestalt von Kolloidteilchen ausgewertet wurden, ergaben, daß Pt-Teilchen, sowohl elektrisch zerstäubt als auch auf rein chemischem Wege erzeugt, Kugelgestalt besitzen. K. Konstantinowsky †† fertigte Mikrophotographien von Pt-Partikeln, die er durch Zerstäuben des Elektrodenmaterials in der Luft bekam, an und bestätigte vollkommen die vorliegenden Untersuchungen. Die von ihm veröffent-

* O. Trauner, ZS. f. Phys. **46**, 237, 1927.

** K. Wolter, ebenda **6**, 339, 1921.

*** In den nachfolgenden Angaben sind nur die Platin betreffenden Arbeiten erwähnt.

**** H. Dieselhorst und H. Freundlich, Phys. ZS. **17**, 117, 1916.

† R. Gans und R. Calatroni, Ann. d. Phys. **61**, 465, 1920.

†† K. D. Konstantinowsky, ebenda **49**, 893, 1916.

lichten Aufnahmen lassen keinen Zweifel über angenäherte Kugelgestalt der zerstäubten Pt-Teilchen zu.

Diese entgegengesetzten Behauptungen und Erfahrungen sollten nun in der vorliegenden Arbeit aufgeklärt werden. Es wurden zu diesem Zwecke an elektrisch zerstäubten Pt-Teilchen der Größenordnung 10^{-5} cm Messungen durchgeführt, in deren Verlaufe 29 Probekörper bei mehreren Unterdrücken ausgemessen wurden*. Über die Resultate wird in den nächsten Abschnitten ausführlich berichtet.

§ 2. Versuchsanordnung. Die vorliegenden Messungen wurden in einem Ehrenhaftschen Kondensator (Plattendurchmesser etwa 10 mm) bei einer Plattenentfernung von 2,2 mm ausgeführt. Wie in den Arbeiten Ehrenhafts und seiner Schüler ausführlich berichtet wurde**, beruht der wesentliche Meßvorgang darauf, daß die im Dunkelfelde des Kondensators befindlichen Materieteilchen senkrecht zur Beleuchtungsrichtung beobachtet werden. Als Untersuchungsmaterial kam Platin zur Verwendung, welches durch Überspringen des elektrischen Funkens zerstäubt wurde. Die Teilchen wurden nun im Strome sorgfältig gereinigten*** Stickstoffs in die Beobachtungskammer zwischen den horizontal parallelen Platten des Kondensators geleitet und sodann die Fallgeschwindigkeiten eines Probekörpers unter dem Einfluß der Schwere, sowie seine Steiggeschwindigkeiten in einem elektrischen Felde von bekannter Intensität gemessen. Durch langsames Auspumpen des Gases — nach der schon beschriebenen Methode**** — war es möglich, das betreffende Teilchen bei verschiedenen Unterdrücken (bis 100 mm Hg) zu messen, wobei am Schluß der Messung Wert darauf gelegt wurde, denselben Probekörper — nach Einlassen von Gas in den Kondensator — wieder beim Atmosphärendruck zu beobachten. Die gleichen Geschwindigkeiten waren dann nämlich ein sicherer Beweis für die Massenkonstanz während der ganzen Dauer der Messung.

* Die 66 Druckseiten umfassenden Protokolle der Messungen können wegen Platzmangel hier nicht zum Abdruck gebracht werden. Sie befinden sich im III. Physikalischen Institut der Universität Wien und stehen jedermann zur Einsicht frei.

** Z. B.: F. Ehrenhaft, Wien. Ber. **123** [2a], 53, 1914; Ann. d. Phys. **44**, 657, 1914; Ehrenhaft-Konstantinowsky, Ann. d. Phys. **63**, 773, 1920; J. Mattauch, ZS. f. Phys. **32**, 439, 1925.

*** Die Anordnung zum Reinigen und Trocknen des Gases ist angegeben: z. B. F. Ehrenhaft, l. c. 1914, S. 17; Ehrenhaft-Konstantinowsky, l. c. S. 807; E. Wasser, ZS. f. Phys. **27**, 203, 1924.

**** Z. B.: J. Mattauch, l. c. S. 447 und 454; S. Kwartin, ZS. f. Phys. **38**, 600, 1926.

Als Lichtquellen wurden zwei Siemens-Schuckertsche Kohlenbogenlampen von etwa 15 Ampere Stromstärke als Beleuchtungsobjektiv des Mikroskops Reichert 3 benutzt.

Die Ablesungen der auf elektromagnetisch auslösbaren Sekundenuhren jeweilig gestoppten je 20 Fall- und 20 Steigzeiten wurden — der Ehrenhaftschen Anordnung entsprechend — unabhängig vom Beobachter ausgeführt. Ebenso die Ablesungen der meßbaren Größen, wie Spannung, Druck und Temperatur, die überdies immer zweimal — am Anfang und Ende einer jeden Messung — gemacht wurden, um sich vor etwaigen Störungen zu schützen*.

Der elektrische Lichtbogen wurde anfangs mit verschiedenen Stromstärken von 3 bis 15 Amp. (bei einer 110 Volt-Gleichstromspannung) erzeugt; im weiteren Verlaufe der Arbeit jedoch nur mit 10 bis 11 Amp., da es sich zeigte, daß die bei dieser Stromstärke gewonnenen Pt-Teilchen, die sofort nach erfolgter Zerstäubung in den Kondensator eingelassen wurden, immer angenäherte Kugelgestalt hatten. Diese beobachtete Erfahrungstatsache legt die Vermutung nahe, daß wahrscheinlich bei der elektrischen Zerstäubung oder zumindest im ersten Moment ihres Einsetzens unter gegebenen Bedingungen, die für das untersuchte Material charakteristisch sind, immer reguläre Teilchen entstehen, die erst später — wenn auch in kurzer Zeitspanne — im Zerstäubergefäß zu aus Kugeln zusammengesetzten Gebilden koagulieren. Zur Bekräftigung dieser Beobachtung wurden Versuche angestellt, die im Endresultat ergaben, daß etwa fünf Minuten nach erfolgter Zerstäubung nur vereinzelte Teilchen im Kondensator noch vorhanden waren, die eine dem spezifischen Gewicht von Platin entsprechende Fallgeschwindigkeit hatten (was als Kriterium für angenäherte Kugelgestalt dienen kann), während nach Ablauf von etwa zehn Minuten kein einziges von den unzähligen Teilchen im Gesichtsfelde den gestellten Anforderungen entsprechen konnte.

Diese Erklärung wäre auch auf die Arbeiten von R. Bär** anzuwenden, welcher gelegentlich seiner Pt-Messungen nur Partikeln finden konnte, deren ausgerechnete Dichte ganz selten Werte über ein Sechstel der normalen Pt-Dichte ergab. Es ist also anzunehmen, daß entweder die Stromstärke bei der Zerstäubung eine viel zu geringe war — genaue diesbezügliche Mitteilungen wurden von Bär nicht veröffentlicht — oder

* Für die Mitarbeit und Ausführung sämtlicher Ablesungen während der viele Monate andauernden Messungen bin ich dem Herrn cand. phil. Ernst Reeger zum herzlichsten Dank verpflichtet.

** R. Bär, Ann. d. Phys. **67**, 157, 1922.

auch, daß die Teilchen lange nach der Zerstäubung zur Messung herangezogen worden sind, nachdem sie bereits im Zerstäubergefäß koaguliert hatten. Diese Annahmen erscheinen desto wahrscheinlicher, da Bär* selbst in seiner früheren Arbeit angibt, daß Pt-Teilchen, welche mit einer scheinbaren Dichte von 0,5 bis 1,5 sehr häufig zu beobachten waren, infolge ihrer kleinen Fallgeschwindigkeit erst ziemlich lange nach dem Überspringen des elektrischen Funkens ins Gesichtsfeld des Fernrohres kamen. Ähnliches wurde in den vorliegenden Messungen auch beobachtet. Immer erschienen zuerst sofort nach der Zerstäubung vereinzelte Probekörper von großer Fallgeschwindigkeit in rascher Nacheinanderfolge im Kondensator, und erst bedeutend später kamen ins Gesichtsfeld in großer Menge viel langsamer fallende Teilchen.

Alle Probekörper, die in die Beobachtungskammer gelangten, waren immer geladen. Vermittelt eines Radiumpräparates wurden sie auf die kleinste Ladung gebracht. Etwaige spontane, oft vorkommende Ladungszunahmen oder gänzliche Abladungen wurden im Laufe der Messung in der Regel auf dieselbe Weise behoben. Nur bei Partikeln von sehr kleiner Kapazität oder bei tiefen Unterdrucken wurden Messungen mit mehreren Elektronen vorgenommen. Die ganzzahligen Verhältnisse sind aus der Tabelle der Schwebespannungen ersichtlich. Besonders klar kommt dies zum Vorschein beim Probekörper Nr. 37, wo sowohl die Grundladung als auch eine doppelte, drei-, vier- und fünffache gemessen werden konnten, sowie beim Teilchen Nr. 39, wo bis zur sechsfachen Ladung gute Übereinstimmung gefunden wurde. Diese Beobachtung deckt sich vollkommen mit den Mitteilungen von Wolter** über seine Pt-Messungen.

§ 3. Ausgleich nach dem linearen Gesetz. Als unmittelbares Resultat der Messungen ergaben sich Kurvenscharen, welche die Abhängigkeit der mittleren freien Weglänge l von der Fallgeschwindigkeit v_f darstellen. Da die Teilchen nur unter dem Einfluß der Schwere fallen, ist ihre Fallgeschwindigkeit

$$v_f = m g \cdot B, \quad (1)$$

wobei m die Masse, g die Erdbeschleunigung und B die Beweglichkeit ist. Dieser letzte Proportionalitätsfaktor, für Kugeln und Flüssigkeiten von Stokes zu $B = \frac{1}{6 \pi \mu a}$ angegeben, wurde später von Cunningham

* R. Bär, Ann. d. Phys. **59**, 393, 1919.

** K. Wolter, ZS. f. Phys. **6**, 351, 1921.

für Gase — wo die Beweglichkeit nicht nur eine Funktion des Teilchenradius a , sondern auch eine der mittleren freien Weglänge l ist — ergänzt zu:

$$B = \frac{1}{6 \pi \mu a} \cdot \left[1 + A_1 \frac{1}{a} + A_2 \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2)$$

Hier ist A eine Konstante, die bei einem Teilchenradius, der klein gegen die mittlere freie Weglänge ist, um 1,0 liegen soll. Setzt man nun unter Annahme der Kugelgestalt und molarer Dichte — was sowohl von Ehrenhaft als auch seinen Schülern auf verschiedenen Wegen bewiesen wurde* — das Gewicht des Teilchens $mg = \frac{4}{3} a^3 \pi \sigma g$ in die Gleichung (1) ein, dann erhalten wir

$$v_f = \frac{2 \sigma g}{9 \mu} \cdot (a^2 + A a l), \quad (3)$$

als lineare Beziehung zwischen der Fallgeschwindigkeit und der mittleren freien Weglänge**. Der Einfachheit halber setzen wir für

$$\frac{2 \sigma g}{9 \mu} a^2 = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{2 \sigma g}{9 \mu} A a = \beta \quad (4)$$

und benutzen die Gleichung in der allgemeinen Form: $v_f = \alpha + \beta l$. Das entsprechende v_f, l -Kurvendiagramm ist in Fig. 1 a, b dargestellt. Obwohl die eingezeichneten, gemessenen Punkte im allgemeinen recht gut an den betreffenden Kurven liegen, läßt sich doch eine kleine Streuung vereinzelter Punkte nicht verkennen. Dies dürfte auf Störungen der Messung, wie Brownsche Bewegung, Temperaturänderungen usw., zurückzuführen sein. Deshalb wird es für die Genauigkeit der Berechnungen sicherlich von Vorteil sein, wenn man auch die gleichzeitig gemessenen Steiggeschwindigkeiten zur Berechnung heranzieht. Da die Geschwindigkeit bei einer Bewegung im gaserfüllten Raume der einwirkenden äußeren Kraft direkt proportional ist***, bekommen wir****

$$v_s = B \cdot (E e - m g). \quad (5)$$

* Mikrophotographie: F. Ehrenhaft, Wien. Ber. **123** [2a], 53, 1914; Ann. d. Phys. **44**, 657, 1914; Phys. ZS. **16**, 227, 1915; **18**, 352, 1917; Ann. d. Phys. **56**, 1—80, 1918; **56**, 132, 1918; Phys. ZS. **27**, 859, 1926; F. Ehrenhaft und E. Wasser, Phil. Mag. **11**, 30, 1926; ZS. f. Phys. **37**, 820, 1926. — Aus der Farbe der Partikeln: F. Ehrenhaft, Phys. ZS. **15**, 952, 1914; **16**, 227, 1915. — Aus der Brownschen Bewegung: D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. **46**, 261, 1915; Phys. ZS. **16**, 369, 1915.

** R. Bär und F. Luchsinger, Phys. ZS. **22**, 225, 1921.

*** Vgl. F. Ehrenhaft und D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. **63**, 773, 1920; Yu Chen Yang, ZS. f. Phys. **26**, 374, 1924; Ann. d. Phys. **76**, 333, 1925.

**** Darin ist $E \cdot e$ die einwirkende elektrische Kraft und $m \cdot g$ das Gewicht des Teilchens.

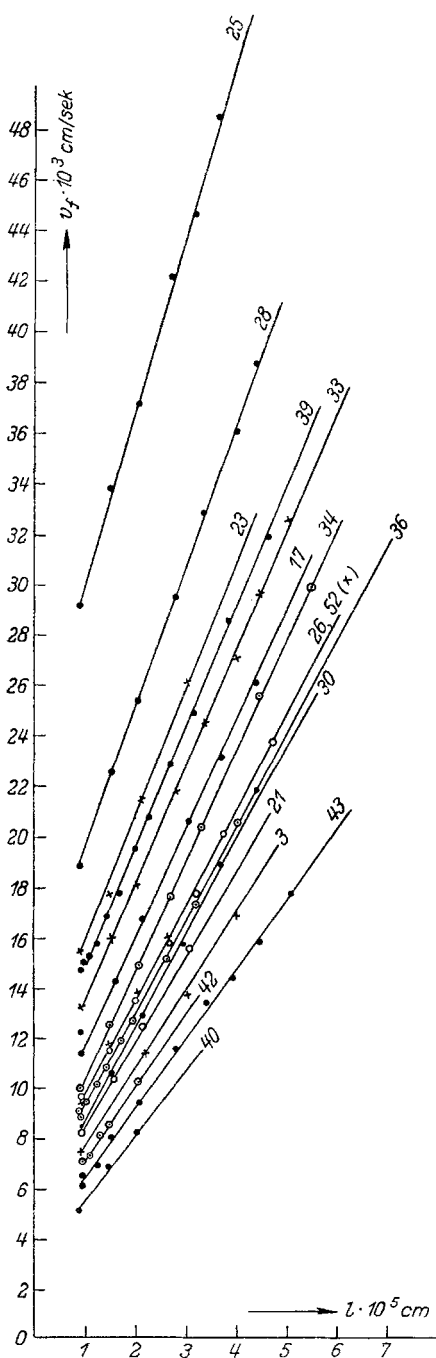


Fig. 1a.

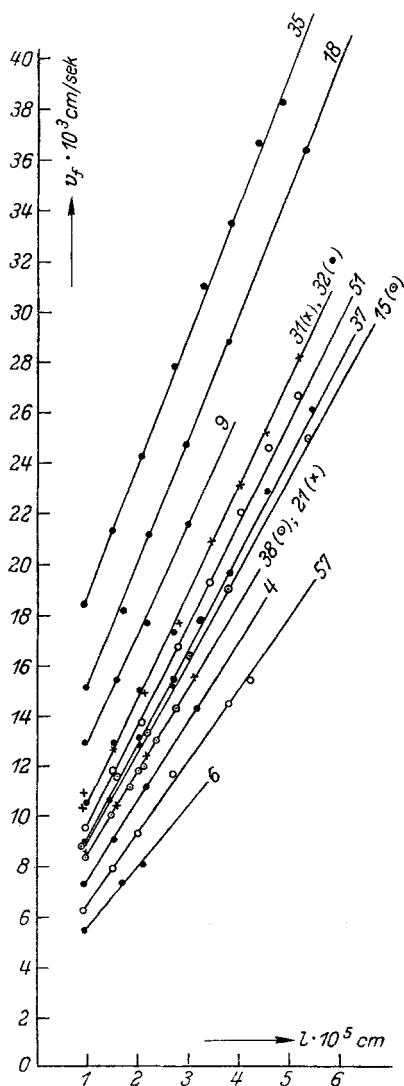


Fig. 1b.

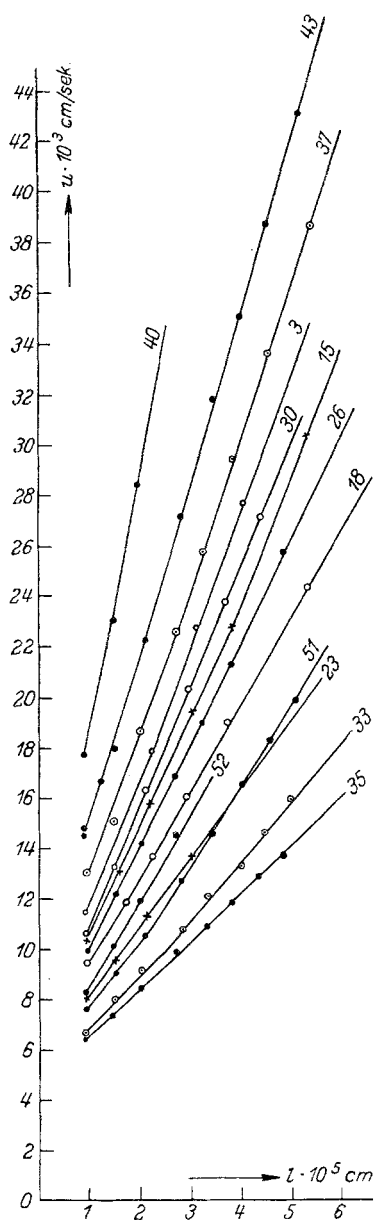


Fig. 2 a.

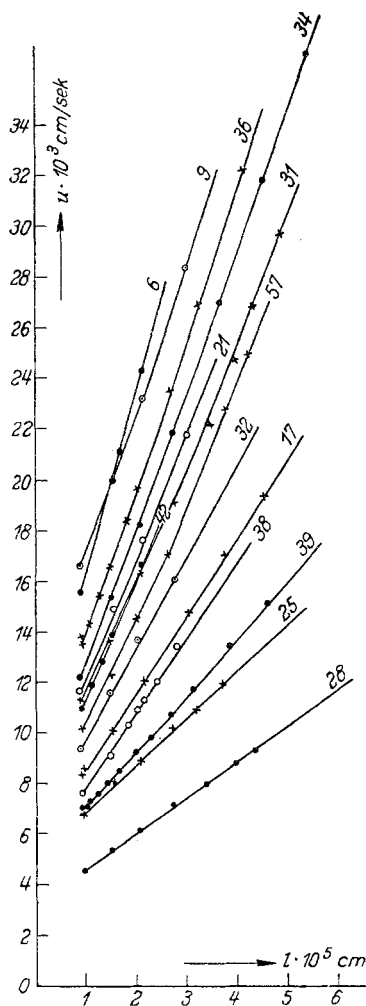


Fig. 2 b.

Durch Addition der Gleichungen (1) und (5) und Division durch die bekannte Feldstärke E erhält man die von Sexl† angegebene Beziehung:

$$\frac{v_f + v_s}{E} = B \cdot e = u, \quad (6)$$

die den Vorteil hat, daß man aus dem Verhältnis der Fall- und Steiggeschwindigkeiten $\frac{v_f}{v_f + v_s}$ sofort etwaige Schwankungen der Teilchenmasse oder sonstige Störungen der Messung (was bei stundenlanger Beobachtung desselben Probekörpers, beim Auspumpen des Gases oder Temperaturänderung leicht eintreten kann) bemerkt. Dieser Quotient nämlich, multipliziert mit der abgelesenen Feldstärke am Kondensator, ergibt die sogenannte Schwebespannung E^* , d. i. diejenige Spannung, welche der Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Die Konstanz der Schwebespannung, die bei einem jeden Unterdrucke gesondert ausgerechnet wird, gibt also ein sicheres Kriterium für die Verlässlichkeit des Messung. Da sie bei gleichbleibender Ladung des gemessenen Teilchens der Masse direkt proportional ist, dient sie auch als ein weiterer Beweis der Massenkonzanz.

Sämtliche Schwebespannungen für alle gemessenen Teilchen und jeden Druck sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Die Mittelwerte der Schwebespannungen für die einzelnen Probekörper beinhaltet Tabelle 2.

Die entsprechenden u , l -Kurven sind in Fig. 2 a, b angegeben. Die gemessenen Punkte schmiegen sich gut an die eingezeichneten Kurven und zeigen vereinzelt eine leichte Krümmung konkav zur u -Achse, was in den weiteren Erwägungen berücksichtigt wird. Für die erste Näherung aber begehen wir sicherlich keinen allzu großen Fehler, wenn wir aus der linearen Beziehung die angenäherten Werte für die Konstante des Widerstandsgesetzes A , den Radius jedes gemessenen Teilchens a und dessen Ladung e berechnen.

Setzt man nun in die bereits abgeleitete Gleichung $u = e \cdot B$ den Wert für B nach Stokes-Cunningham ein, dann erhält die u -Gleichung — analog (3) — die Form

$$u = \frac{e}{6 \pi \mu a} \cdot \left(1 + A \frac{1}{a}\right), \quad (7)$$

† Th. Sexl, ZS. f. Phys. **26**, 371, 1924.

Tabelle 1.

Ausweis der Schwebespannungen E^* für alle Teilchen und jeden Druck.

Pk-Nr.	Druck mm Hg	Schwebespannung		Pk-Nr.	Druck mm Hg	Schwebespannung	
		E^*	reduziert			E^*	reduziert
3	755,02	0,6418		23	755,54	1,9142	
	313,76	0,6351			460,99	1,8672	
	223,59	0,6132			323,66	1,8965	
	172,84	0,6065			228,60	1,9174	
4	738,48	0,7960		25	761,75	4,1661	
	450,56	0,7811			457,53	4,1661	
	326,20	0,8146			334,86	4,1604	
	222,17	0,7744			257,54	4,1206	
6	745,96	0,3481			218,90	4,0523	
	418,16	0,3515			188,22	4,0580	
	338,20	0,3288		26	761,04	0,9772	
9	751,73	0,7819			472,75	0,9499	
	453,04	0,7745			345,09	0,9473	
	325,94	0,7633			258,99	0,9455	
	235,08	0,7646			214,94	0,9361	
12	742,98	0,9309			184,85	0,9403	
	448,47	0,9244			144,60	0,9221	
	374,08	0,9050		28	750,99	2,1817	4,3634
	331,55	0,9034			459,71	2,2000	4,4000
	256,79	0,9147			335,70	2,1942	4,3884
	221,46	0,8985			251,69	2,2004	4,4008
15	753,96	0,8421			205,64	1,4685	4,4055
	447,56	0,8732			175,24	1,4686	4,4058
	316,40	0,8421			158,82	1,4602	4,3806
	229,81	0,8329		30	744,24	0,4049	0,8098
	183,51	0,8348			454,73	0,4081	0,8162
	130,28	0,8201			328,04	0,7856	0,7856
17	751,90	1,4783	1,4783		236,02	0,7757	0,7757
	448,70	0,7134	1,4268		188,45	0,7998	0,7998
	321,91	0,6948	1,3896		157,96	0,8055	0,8055
	228,99	0,7010	1,4020	31	751,86	1,0412	
	184,99	0,6784	1,3568		460,70	0,9245	
	153,23	0,6737	1,3474		331,68	0,9152	
	751,76	0,6925	1,3850		247,32	0,9301	
18	726,72	1,5361			202,86	0,9488	
	404,25	1,5457			172,32	0,9474	
	317,07	1,5528		32	154,93	0,9406	
	237,21	1,5337			135,18	0,9510	
	186,29	1,5265			756,10	1,1142	
	132,09	1,5433			469,76	1,1200	
21	746,44	0,7241			348,98	1,0999	
	746,44	0,7204			254,40	1,0870	
	442,09	0,7133		33	254,40	1,0651	
	322,90	0,7133			755,22	2,0143	
	231,47	0,7166			467,16	1,9919	
					338,79	2,0065	

Pk-Nr.	Druck mm Hg	Schwebespannung		Pk-Nr.	Druck mm Hg	Schwebespannung	
		E*	reduziert			E*	reduziert
33	244,70	2,0351		39	622,46	0,7012	2,1036
	207,62	2,0374			556,69	0,6989	2,0967
	175,33	2,0294			482,64	0,7023	2,1069
	156,04	2,0294			414,97	0,7077	2,1231
	138,74	2,0426			414,97	0,5315	2,1260
34	749,80	0,8176			346,58	0,4253	2,1265
	468,34	0,8125			303,16	0,4253	2,1265
	339,98	0,8193			260,12	0,4304	2,1520
	257,50	0,8108			220,06	0,4244	2,1220
	191,57	0,8091			180,48	0,4253	2,1265
	156,04	0,8022			150,69	0,3528	2,1168
	130,28	0,7954					
35	759,16	1,4345	2,8690	40	767,18	0,2962	
	470,83	1,4371	2,8742		474,46	0,2972	
	342,64	0,9573	2,8719		344,56	0,2851	
	256,19	1,4216	2,8432	42	767,18	0,2851	
	213,32	1,4293	2,8586		755,64	0,6534	
	182,72	1,4250	2,8500		627,98	0,6203	
	161,08	1,4302	2,8604		536,67	0,6371	
	145,50	1,4044	2,8088		468,01	0,6119	
36	757,30	0,6593	0,6593		337,08	0,6136	
	473,48	0,6396	0,6396	43	753,91	0,4375	0,4375
	345,64	0,6365	0,6365		558,22	0,2088	0,4176
	261,88	0,6345	0,6345		467,19	0,4503	0,4503
	216,79	0,6391	0,6391		336,38	0,4239	0,4239
	171,74	0,6354	0,6354		249,26	0,4261	0,4261
	384,82	0,6366	0,6366		205,39	0,2110	0,4220
	555,93	0,6475	0,6475		176,27	0,2048	0,4096
	640,66	0,6446	0,6446		155,33	0,2038	0,4076
	764,95	0,2197	0,6591		137,28	0,2052	0,4104
					753,43	0,2135	0,4270
37	769,21	0,6883	0,6883	51	750,64	1,2688	1,2688
	474,44	0,7049	0,7049		466,64	1,3207	1,3207
	347,04	0,7136	0,7136		335,14	0,6456	1,2912
	347,04	0,3388	0,6776		249,10	0,6584	1,3168
	260,00	0,2260	0,6780		204,08	0,6648	1,3296
	260,00	0,1347	0,6735		174,06	0,6692	1,3384
	213,60	0,1682	0,6728		152,73	0,6713	1,3426
	183,56	0,1668	0,6672		136,41	0,6735	1,3470
	154,21	0,1709	0,6836				
	128,74	0,1695	0,6780				
				52	759,60	1,1709	1,1709
38	761,94	1,0895			474,46	0,3851	1,1553
	471,91	1,1000			342,87	0,3851	1,1553
	341,77	1,0979		57	257,50	0,3663	1,0989
	254,94	1,0706			766,53	0,6132	0,6132
	296,44	1,0832			469,37	0,1283	0,6415
	326,27	1,0727			346,34	0,1610	0,6440
	378,67	1,0853			263,43	0,1363	0,6815
39	760,44	1,0713	2,1426		185,51	0,1283	0,6415
	693,68	1,0662	2,1324		165,29	0,1240	0,6200

wobei nach Berücksichtigung der Kugelgestalt des Probekörpers die beiden Koeffizienten dargestellt werden können in der Form:

$$\frac{e}{6\pi\mu\alpha} = \frac{2\sigma g}{9\mu E^*} a^2 = \alpha, \quad (8a)$$

$$\frac{e}{6\pi\mu a^2} = \frac{2\sigma g}{9\mu E^*} A a = \beta. \quad (8b)$$

Im allgemeinen liefert aber der Ansatz $u = \alpha + \beta l$ so viele Gleichungen, als Punkte von dem betreffenden Teilchen gemessen wurden. Die ausgeglichenen Werte werden gewonnen aus der Ausgleichsrechnung nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate zu:

$$\alpha = \frac{\Sigma l^2 \Sigma u - \Sigma l \Sigma l u}{n \Sigma l^2 - (\Sigma l)^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{n \Sigma l u - \Sigma l \Sigma u}{n \Sigma l^2 - (\Sigma l)^2}. \quad (9)$$

Gleich an dieser Stelle möge bemerkt werden, daß dieselben Nenner einmal mit dem Zähler Σl^2 für α , das zweite Mal mit dem Zähler n (Anzahl der Punkte, die bei jedem einzelnen Teilchen gemessen wurden) für β die reziproken Werte der Gewichte angeben, von denen in den weiteren Ausführungen die Rede sein wird.

Durch Quadrieren der einzelnen Gleichungen (8) und Division durch die jeweils zweite Gleichung, gelangt man zu:

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} A^2 \sigma &= \frac{9\mu E^*}{2g} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \\ \frac{e}{A} &= 6\pi\mu \cdot \frac{\alpha^2}{\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

zwei Gleichungen, allerdings mit drei Unbekannten, aus denen die gesuchten Absolutwerte berechnet werden können. Zu diesem Zwecke müssen wir für eine der drei Größen A , e , σ einen bestimmten Wert einsetzen. Die bisherigen Erfahrungen auf diesem Gebiet rechtfertigen dies vollauf. In der Hauptsache handelt es sich darum, ob e konstant anzusetzen ist, oder die beiden anderen Größen als solche anzusehen sind.

Der bekannte Einwand von Ehrenhaft† trifft auch in der vorliegenden Arbeit zu, was aus dem Vergleich der Diagramme 1 und 2 klar hervorgeht. Während nämlich im v_f , l -Diagramm, wo nur die α -Werte als Parameter vorkommen, sämtliche Kurven ohne Schnittpunkte verlaufen, schneiden sich im u , l -Diagramm, wo auch die Ladungen e mitbestimmend sind, die meisten Kurven mehrere Male miteinander. Dies beweist, daß

† F. Ehrenhaft, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1187, 1913; Ann. d. Phys. l. c. S. 75, 1918; Phys. ZS. **21**, 675, 1920; **22**, 617, 1921.

die Konstante, die überall annähernd gleich ist, die normale Reihenfolge der Kurvenscharen, geordnet nach der Größe der Partikelchen, nirgends nennenswert stört; eine solche Störung wird aber verursacht, wenn die e -Werte dazukommen. Nun scheint es plausibel zu sein, daß diese dann nicht gleich sind und ein Ansatz etwa in der Millikanschen Form unbegründet wäre. Würde man dennoch in unserem Falle einen solchen machen, so käme man bei der Mehrzahl der gemessenen Teilchen zu Konstanten A , welche weit die Grenzen überschreiten würden, die sowohl durch die Theorie aufgestellt, als auch durch bisherige experimentelle Untersuchungen bewiesen wurden.

Die zuerst von Cunningham* für die Teilchen unserer Größenordnung theoretisch berechneten Grenzen zwischen $A = 0,7$ und $1,7$ wurden nachher durch eine lange Reihe weiterer Arbeiten ergänzt. Es wären etwa zu erwähnen: Zerner** und Lenard***, die in ihren Berechnungen die obere Grenze mit $1,58$ angeben, ferner Sexl**** und Epstein†, welche, für unseren Fall angewendet, die Grenzen der Konstante des Widerstandsgesetzes zwischen $0,85$ und $1,16$ ziehen. In seiner letzten Arbeit nimmt Wasser †† an, daß diese beiden Grenzfälle für Probekörper von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge stetig und monoton ineinander übergehen.

Die experimentellen Ermittlungen ergaben durchwegs Werte, welche in den engsten von der Theorie postulierten Grenzen liegen †††. Um nur einige einschlägige Arbeiten anzuführen, seien etwa erwähnt: Die Messungen an Wachsteilchen von Mc Keehan††††, die den A -Wert $1,05$ aufweisen; an Schellackteilchen von Lee§, wo $A = 1,07$ ist; an Ölteilchen von Schidloff und Murzynowska§§: $A = 0,88$; an Hg-Partikelchen von Schidloff-Karpowicz§§§, von Targonski§§§§

* E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. London (A) **83**, 357, 1910.

** Fr. Zerner, Phys. ZS. **20**, 546, 1919.

*** P. Lenard, Ann. d. Phys. **60**, 329, 1919; **61**, 665, 1920.

**** Th. Sexl, Phys. ZS. **26**, 305, 1925; Ann. d. Phys. **81**, 855, 1926.

† P. S. Epstein, Phys. Rev. (2) **22**, 721, 1923.

†† E. Wasser, ZS. f. Phys. **45**, 561, 1927.

††† Nur bei Messungen an Hg-Kugeln in Luft fand J.B. Derieux eine kleinere Konstante ($A = 0,7$). Phys. Rev. **11**, 203, 1918 (vgl. auch die Kritik dieser Ergebnisse von Th. Sexl, ZS. f. Phys. **26**, 371, 1924; Phys. Rev. **26**, (1), 92, 1925).

†††† L. W. Mc Keehan, Phys. ZS. **12**, 707, 1911.

§ Y. J. Lee, Phys. Rev. **4**, 420, 1914.

§§ A. Schidloff und J. Murzynowska, Arch. sc. phys. et nat. **40**, Nov. 1915.

§§§ A. Schidloff und A. Karpowicz, ebenda **41**, Febr. 1916.

§§§§ A. Targonski, ebenda **41**, März 1916.

und von Silvey*, deren unabhängig voneinander ausgerechnete Werte die Konstante zu 0,88 bestimmen. Von den Wiener Arbeiten der letzten Zeit seien hervorgehoben: Messungen an Selen im Stickstoff von Ehrenhaft-Konstantinowsky**, wo $A = 0,956 \pm 0,019$ ist, von Mattauch-Trebitsch***: $A = 1,034 \pm 0,091$, von E. Wasser****: $A = 0,974 \pm 0,006$; Messungen an Öltröpfchen von Mattauch†, wo $A = 0,898 \pm 0,042$, an der schweren Touletschen Lösung von Ehrenhaft-Wasser††: $A = 0,943 \pm 0,061$ und Bariumquecksilberjodidlösung von Reiss†††: $A = 0,879 \pm 0,051$, schließlich an Edelmetallen, Silber von Trauner††††, wo $A = 1,07$ und Goldpartikelchen von M. Slopkowitzer§ mit dem A -Wert 1,00.

Diese augenfällige Übereinstimmung der Theorie mit experimentellen Untersuchungen beweist, daß das Fallgesetz mit großer Wahrscheinlichkeit für alle Teilchengrößen bekannt ist. P. Lenard§§ hebt diese Tatsache gelegentlich seiner Überlegungen über die Möglichkeiten des Zusammenstoßes von Probekörpern mit Gasmolekülen hervor und bemerkt auch anschließend, daß die Ehrenhaftschen Subelektronen nicht durch das Nichtzutreffen des verwendeten Widerstandsgesetzes zu erklären seien. Dieselbe Meinung teilt auch R. Bär§§§, der die Dichte der gemessenen Teilchen zu klein findet und sie dafür verantwortlich macht, was durch die vorliegenden Messungen widerlegt wird. Wenn wir noch am Ende den sicher richtigen Einwand von Ehrenhaft§§§§ hervorheben, daß man nicht die atomistische Struktur der Elektrizität voraussetzen darf, wenn man eben bestrebt ist, die Größe der elektrischen Ladung zu bestimmen, wird es verständlich, daß wir keinen Grund haben, eine konstante Größe

* O. W. Silvey, Phys. Rev. **7**, 87, 1916.

** F. Ehrenhaft und K. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. **63**, 773, 1920.

*** J. Mattauch und H. Trebitsch, ZS. f. Phys. **39**, 607, 1926.

**** E. Wasser, ZS. f. Phys. **45**, 561, 1927.

† J. Mattauch, ebenda **32**, 439, 1925.

†† F. Ehrenhaft und E. Wasser, ebenda **37**, 820, 1926.

††† M. Reiss, Z. f. Phys. **39**, 623, 1926.

†††† O. Trauner, ebenda **46**, 237, 1927.

§ Siehe F. Ehrenhaft, ebenda **45**, 557, 1927.

§§ P. Lenard, l. c. 1919, S. 335.

§§§ R. Bär, l. c. 1922, S. 166: „In dem einzigen Falle, wo wir Ladungsunterschreitungen begegnen werden, nämlich bei Pt-Teilchen, diese durch die ganz falsche Dichte der Partikeln und nicht durch ein falsches Widerstandsgesetz verursacht sein müssen.“

§§§§ F. Ehrenhaft, Phys. ZS. **12**, 264, 1911; Ann. d. Phys. **56**, 1—80, 1918 („Über die Teilbarkeit der Elektrizität“); Phys. ZS. **22**, 617, 1921 (Diskussion des Vortrages von Bär auf dem Deutschen Physikertag in Jena 1921).

für e festzulegen. Die Konstante des Widerstandsgesetzes würde dann nämlich Werte erreichen, welche in der überwiegenden Mehrzahl zwischen 1,2 und 2,6 liegen müßten.

Es bliebe also entweder die Konstante A als bekannt oder die Dichte σ der zerstäubten Teilchen gleich der des molaren Materials anzunehmen. In beiden Fällen würden jedoch die Ladungen dieselben Unterschreitungen zeigen und die jeweils zu berechnende zweite Größe eine Schwankung bis etwa 10 % aufweisen. Nun stehen uns aber Anhaltspunkte zur Verfügung, welche von den genannten zwei Größen (A , σ) als konstant zu betrachten ist. Einerseits scheint es nämlich sehr unwahrscheinlich zu sein, daß ein derart inertes Element, wie Platin, im Flammenbogen irgendwelche chemische Veränderungen erleiden sollte, die eventuell zur Beobachtung herangezogen werden könnten; andererseits aber waren wir bestrebt, durch langandauernde Untersuchungen über die Zerstäubungsmethoden die möglichste Sicherheit über die Kugelgestalt der beobachteten Teilchen zu erreichen. Da überdies keine Stickstoffverbindungen des zerstäubten Platins bekannt sind, ist kein triftiger Grund anführbar, weswegen die Dichte der Teilchen nicht jener des molaren Materials gleich sein sollte. Auf Grund dieser Überlegungen nun setzen wir in die bereits bekannten Gleichungen (8) und (10) die normale Platindichte ein und berechnen die gesuchten Absolutwerte zu:

$$A = \sqrt{\frac{9 \mu E^*}{2 g \sigma}} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha}, \quad a = \sqrt{\frac{9 \mu E^*}{2 g \sigma}} \cdot \alpha, \quad e = 6 \pi \mu a \cdot \alpha. \quad (11)$$

Die entsprechenden Werte für $A^2 \sigma$ und e/A sind in Tabelle 2 angegeben. Dasselbst befinden sich auch die Daten, von denen diese beiden Größen abhängen. Die $A^2 \sigma$ -Werte schwanken sichtlich regelmäßig um 21,4 — die normale Dichte von Platin, während die e/A -Werte um $3,0 \cdot 10^{-10}$ elst. Einh. zu liegen scheinen.

In der Tabelle 3 sind die Absolutwerte für A , a und e zusammengestellt. Die berechneten Konstanten des Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetzes schwanken von 0,90 bis 1,17, also in den theoretisch postulierten Grenzen für unsere Größenordnung, und liegen — nach dem bis jetzt benutzten arithmetischen Mittel — klar um 1,0. Die Radien der untersuchten Teilchen füllen das Gebiet zwischen 1,0 und $3,0 \cdot 10^{-5}$ cm aus und dürften bei Wiederholung derselben Messungen an der gegebenen Versuchsanordnung nur schwerlich nach oben oder nach unten überschritten werden. Kleinere Teilchen, die durch große Brownsche Bewegung sofort erkannt werden, beeinträchtigen eben wegen dieser Be-

Tabelle 2.

Pk-Nr.	1	2	3	4	5	6
	$n \dagger$	$\alpha \cdot 10^3$	ρ	$\overline{E^*}$	$A^2 \sigma$	$e/A \cdot 10^{10}$
3	4	6,430	524,063	0,6242	21,524	2,617
4	4	4,943	426,299	0,7915	23,493	1,902
6	3	8,327	769,689	0,3428	19,692	2,986
9	4	10,989	579,347	0,7711	19,014	6,900
12	6	5,425	435,059	0,9128	25,710	2,245
15	6	5,884	450,920	0,8409	23,463	2,548
17	7	5,345	307,506	1,3980	19,968	3,082
18	6	5,996	344,427	1,5397	24,594	3,463
21	4	7,067	484,972	0,7164	19,249	3,417
23	4	5,527	264,890	1,8988	19,462	3,826
25	6	5,323	177,715	4,1206	19,739	5,289
26	7	6,039	405,557	0,9455	20,792	2,983
28	7	3,227	137,844	4,3921	20,880	2,506
30	6	5,849	482,177	0,7988	25,635	2,354
31	8	6,619	446,896	0,9499	23,140	3,252
32	4	5,959	370,126	1,1017	20,448	3,183
33	8	4,428	225,957	2,0233	18,885	2,878
34	7	6,873	557,198	0,8096	29,523	2,813
35	8	4,667	187,931	2,8545	17,441	3,845
36	10	7,869	591,937	0,6432	23,125	3,470
37	10	6,979	583,528	0,6838	26,933	2,769
38	7	4,494	317,860	1,0856	19,705	2,108
39	12	4,778	221,032	2,1232	17,528	3,426
40	3	9,024	952,386	0,2909	23,608	2,836
42	5	6,236	503,127	0,6273	19,544	2,564
43	10	8,013	688,930	0,4232	20,237	3,092
51	8	4,488	298,509	1,3194	21,150	2,238
52	4	4,795	355,664	1,1451	24,392	2,144
57	6	5,632	450,265	0,6403	18,609	2,337
Summe:	184				627,483	89,073
				Arithm. Mittel:	21,637	3,071

wegung die Genauigkeit der Messung und sind überdies infolge geringer Lichthelligkeit schwer im Gesichtsfelde zu halten. (Zum Unterschiede von den koagulierten Teilchen, die außerordentlich lichtstark sind, unverhältnismäßig langsam zu ihrer Größe fallen und gar keine Brownsche Bewegung zeigen ††.) Größere Teilchen fallen beim hohen spezifischen Gewicht von Platin immens rasch, so daß sie nicht einmal aufgefangen

† n bedeutet hier die Anzahl der bei verschiedenen Drucken ausgeführten Messungen.

†† Diese Beobachtung stimmt übrigens mit der von Bär gemachten überein, der über Pt-Teilchen berichtet: „Aus ihrer großen Helligkeit konnte man schon vermuten, daß sie nicht die Dichte des Platins haben konnten, da sich aus ihrer Fallgeschwindigkeit dann ein Radius von 0,8 bis $1,5 \cdot 10^{-5}$ cm ergeben hätte“ [Ann. d. Phys. (4) 59, 399, 1919]. Auch diese Mitteilung beweist, daß Bär nur unreguläre Probekörper untersucht und verwertet hatte.

werden können. — Die Ladungen zeigen verschiedene Werte, von $1,99 \cdot 10^{-10}$ elst. Einh. angefangen, und lassen gar keine Annahme über irgendeine bestehende Gesetzmäßigkeit zu. Auch konnte die von Ehrenhaft* hervorgehobene und von Wolter** bestätigte Abhängigkeit der Ladung vom Volumen des Probekörpers nicht festgestellt werden, da gerade die kleinsten Ladungen nicht mit den kleinsten Radien auftreten.

Tabelle 3.
Absolutwerte und deren Fehler.

Pk-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A	$a \cdot 10^5$	$e \cdot 10^{10}$	$\pm m_A$	$\pm m_A$ o/o	$\pm m_a$	$\pm m_a$ o/o	$\pm m_e$	$\pm m_e$ o/o
3	1,003	1,231	2,625	0,034	3,42	0,080	6,48	0,286	10,89
4	1,047	1,215	1,993	0,047	4,44	0,098	8,08	0,260	13,05
6	0,965	1,037	2,865	0,023	2,33	0,040	3,81	0,166	5,78
9	0,942	1,788	6,519	0,025	2,67	0,078	4,35	0,401	6,15
12	1,096	1,367	2,461	0,052	4,71	0,117	8,54	0,337	13,70
15	1,047	1,366	2,666	0,031	2,93	0,077	5,65	0,256	9,58
17	0,966	1,679	2,977	0,013	1,38	0,038	2,28	0,104	3,51
18	1,072	1,866	3,712	0,014	1,29	0,044	2,35	0,141	3,79
21	0,948	1,382	3,240	0,010	1,04	0,025	1,79	0,088	2,73
23	0,954	1,990	3,649	0,017	1,83	0,058	2,92	0,147	4,02
25	0,960	2,877	5,080	0,024	2,49	0,112	3,88	0,260	5,12
26	0,986	1,468	2,940	0,020	2,00	0,055	3,71	0,179	6,10
28	0,988	2,312	2,475	0,013	1,30	0,051	2,19	0,081	3,25
30	1,094	1,328	2,576	0,017	1,53	0,038	2,89	0,125	4,86
31	1,040	1,540	3,382	0,023	2,18	0,062	4,01	0,226	6,67
32	0,978	1,574	3,112	0,047	4,76	0,125	7,91	0,358	11,51
33	0,938	1,838	2,700	0,017	1,86	0,062	3,35	0,144	5,33
34	1,175	1,449	3,304	0,016	1,39	0,040	2,73	0,155	4,69
35	0,903	2,242	3,471	0,008	0,89	0,034	1,50	0,077	2,23
36	1,040	1,382	3,607	0,014	1,30	0,032	2,31	0,131	3,64
37	1,122	1,342	3,107	0,031	2,78	0,073	5,46	0,291	9,38
38	0,960	1,357	2,022	0,045	4,66	0,110	8,07	0,249	12,33
39	0,905	1,956	3,100	0,011	1,26	0,041	2,07	0,093	2,98
40	1,050	0,995	2,979	0,026	2,46	0,043	4,30	0,201	6,75
42	0,956	1,215	2,514	0,022	2,32	0,046	3,75	0,135	5,38
43	0,972	1,131	3,007	0,014	1,47	0,031	2,78	0,142	4,71
51	0,994	1,495	2,226	0,024	2,38	0,068	4,51	0,168	7,56
52	1,068	1,439	2,289	0,027	2,49	0,060	4,19	0,145	6,35
57	0,933	1,167	2,180	0,036	3,87	0,085	7,29	0,266	12,18
Summe:					69,43		123,15		194,22
Durchschnittlicher Fehler:					2,39		4,25		6,70

* F. Ehrenhaft, Wien. Ber. 1914, I. c.; Ann. d. Phys. **44**, 657, 1914; **56**, 1—80, 1918.

** K. Wolter, I. c.

Das Vorhandensein eines einheitlichen Fallgesetzes dokumentiert auch Fig. 3, wo als Abszisse die zusammenhängenden Werte von l/a und als Ordinate die u/α -Werte für ein jedes Teilchen und jeden Druck aufgetragen wurden. Diese erhält man aus der allgemeinen Gleichung

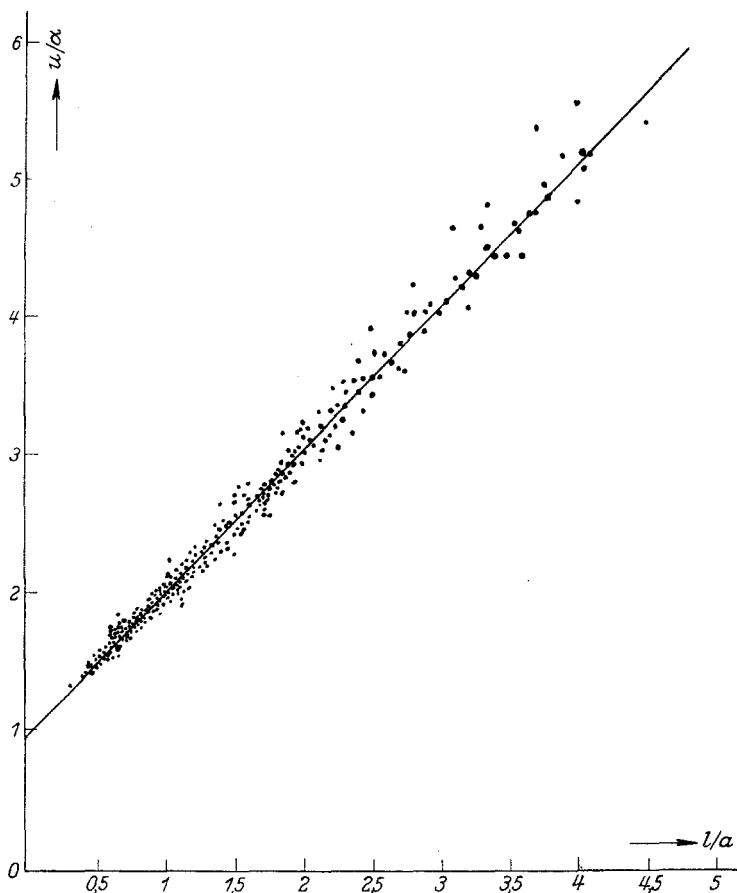


Fig. 3.

$u = \alpha + \beta l$, wenn man beide Seiten der Gleichung mit α dividiert und die Ausdrücke für α und β berücksichtigt, zu:

$$\frac{u}{\alpha} = 1 + A \cdot \frac{l}{a}. \quad (12)$$

Die Punkte scharen sich sehr gut um die gemeinsame, eingezeichnete Kurve und beweisen in weiterer Folge die lineare Abhängigkeit beider Größen voneinander. Die Neigung dieser Geraden entspricht dem Werte

für die Konstante A , von dem im nächsten Paragraphen berichtet wird. Die Streuung der Punkte um die Kurve wird bloß verursacht durch den Fehler der Konstanten einzelner Probekörper.

§ 4. Auswertung der Ergebnisse auf Grund der Fehler-schätzung. a) Fehlerrechnung. Wir gehen nun daran, die Fehler zu bestimmen, die den einzelnen Werten anhaften. Es steht außer Zweifel, daß nicht eine jede Messung mit derselben Genauigkeit gemacht wurde, so daß es unstatthaft wäre, sich auf das arithmetische Mittel zu beschränken, wodurch ja stillschweigend der Ansatz gemacht wird, daß alle Ergebnisse von gleicher Präzision sind. Es erscheint vielmehr notwendig, den Fehler jedes einzelnen Teilchens separat zu bestimmen, wobei auch die Fehler der bei der Messung gewonnenen Beobachtungsdaten in Betracht zu ziehen sind. Aus dieser Erwägung heraus hat Wasser* gelegentlich seiner Selenmessungen die Methode der Fehlerbestimmung aufgestellt, die auch diesen Berechnungen zugrunde liegt.

Da es sich in unserem Falle um Messungen handelt, die sich auf Größen beziehen, welche Funktionen eines und desselben Systems von Unbekannten sind und aus der gleichen Anzahl von Beobachtungen gewonnen wurden, also von gleicher Genauigkeit sind, bekommen wir — nach der Ausgleichsrechnung — die Bedingung, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum sein muß**. Nun erhalten wir aber in unserem Falle — wie bereits bemerkt — für einen jeden gemessenen Punkt einen besonderen Wert in der allgemeinen Gleichung $u = \alpha + \beta l$. Die Differenz dieser u -Werte und der aus der Gleichung (6) gewonnenen, gibt die Abweichung d der einzelnen Punkte von der Kurve bekannt. Danach wird der Fehler F für ein jedes Teilchen berechnet nach der Formel:

$$F = \pm \sqrt{\frac{\sum (d)^2}{n-2}} \quad (13)$$

und da die Gewichte für α und β — wie im vorigen Paragraphen berichtet wurde — sich zu:

$$\left. \begin{aligned} p_\alpha &= \frac{n \sum l^2 - (\sum l)^2}{\sum l^2}, \\ p_\beta &= \frac{n \sum l^2 - (\sum l)^2}{n} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

* E. Wasser, l. c. 1927.

** Vgl. F. R. Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3. Aufl. Leipzig, Verlag B. G. Teubner, 1924.

stellen, bekommen wir für die Fehler in α und β die Beziehungen:

$$m_\alpha = \pm F \cdot \sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}; \quad m_\beta = \pm F \cdot \sqrt{\frac{1}{p_\beta}}. \quad (15)$$

Die so berechneten mittleren Fehler des Achsenabschnittes α und der Neigung der Geraden β sind in Tabelle 4 angegeben. Daneben befinden sich die mittleren Fehler der Schwebespannungen, die nach der Formel:

$$m_{\overline{E^*}} = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n(n-1)}} \quad (16)$$

berechnet wurden[†].

Aus den Gleichungen (10) folgt unmittelbar, daß sich die Fehler in $A^2\sigma$ und e/A nur aus den Fehlern in α , β und $\overline{E^*}$ zusammensetzen, da die übrigen Konstanten (μ Reibungskoeffizient im Stickstoff und g Erdbeschleunigung) ihnen gegenüber als fehlerlose Größen anzusehen sind. Da aber in der einen Gleichung das α , in der anderen das β im Quadrat steht, so werden sich die betreffenden mittleren Fehler nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz in den entsprechenden Ausdrücken verdoppeln. So entstehen:

$$\left. \begin{aligned} m_{A^2\sigma} &= A^2\sigma \cdot \sqrt{\left(\frac{m_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2m_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{m_{\overline{E^*}}}{\overline{E^*}}\right)^2} \\ \text{und} \\ m_{e/A} &= \frac{e}{A} \cdot \sqrt{\left(\frac{2m_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{m_\beta}{\beta}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

deren Werte auch in der Tabelle 4 zusammengestellt sind. Ferner folgt nach der bisherigen Überlegung aus denselben Gleichungen, daß der Fehler in den Konstanten des Widerstandsgesetzes dem halben Fehler in $A^2\sigma$ gleich ist.

Der Fehler im Radius des Probekörpers wird errechnet aus dem Verhältnis der bekannten Größen in den Gleichungen (8) nach gegenseitiger Division und stellt sich dann zu:

$$m_a = a \cdot \sqrt{\left(\frac{m_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{m_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{m_\beta}{\beta}\right)^2}, \quad (18)$$

[†] In dieser Formel bedeutet Δ die Differenz zwischen der bei einem jeden gemessenen Punkte ermittelten Schwebespannung und dem arithmetischen Mittelwerte derselben für das ganze Teilchen; n ist die Anzahl der gemessenen Punkte.

während der Fehler in der Ladung des Probekörpers, der aus den Fehlern in A , β und α , doppelt vorkommend — nach Gleichung (10 b) —, zusammengesetzt ist, die Form hat:

$$m_e = e \cdot \sqrt{\left(\frac{m_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{2 m_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{m_\beta}{\beta}\right)^2}. \quad (19)$$

Die auf diese Weise ermittelten Fehler für A , a und e sind in der Tabelle 3 neben den Absolutwerten angegeben.

b) Diskussion. Die in Tabelle 4 ausgewiesenen Daten beweisen eine etwas größere Unsicherheit der α -Werte, deren durchschnittlicher mittlerer Fehler $\pm 2,98\%$ beträgt, im Vergleich zu den β -Werten, die nur mit einem durchschnittlichen Fehler von $\pm 1,78\%$ behaftet sind. Daraus folgt unmittelbar die etwas kleinere Genauigkeit der e/A -Werte, da ja bei diesen der mittlere Fehler in α doppelt vorkommt, während er sich in den $A^2\sigma$ -Werten nur einmal auswirkt. Aus derselben Tabelle ist ersichtlich, daß der durchschnittliche mittlere Fehler in E^* $\pm 0,80\%$ beträgt, also gegenüber den Fehlern in α und β im allgemeinen sehr klein ist. Deswegen wird er auf die Bestimmung des Fehlers in $A^2\sigma$ nur einen ganz geringen Einfluß haben. Die Fehler dieser Größe setzen sich hauptsächlich aus den Fehlern in α und β zusammen und bewegen sich in den Grenzen von 1,78 bis 9,42%. Ihr durchschnittlicher mittlerer Fehler stellt sich zu $\pm 4,79\%$, wie aus der Tabelle 4 zu ersehen ist. Da die Fehler in e/A in den breiteren Grenzen zwischen 2,04 und 12,86% liegen und da ihr durchschnittlicher mittlerer Fehler mit $\pm 6,25\%$ größer ist als der in $A^2\sigma$, erscheint die oben angeführte Überlegung von der größeren Unsicherheit der e/A -Werte bestätigt.

Der mittlere Fehler in A ist dem halben Fehler in $A^2\sigma$ gleich, da wir σ fehlerlos angenommen und dadurch A mit dem gesamten dieser Größe anhaftenden Fehler belastet haben. Dieser beträgt also $\pm 2,39\%$ im Durchschnitt (Tabelle 3).

Die Fehler in den Radien der einzelnen Probekörper ergeben Werte zwischen 1,50 und 8,54%, wobei der durchschnittliche mittlere Fehler bei $\pm 4,25\%$ liegt.

Die mittleren Fehler der Ladungen, die sich in den Grenzen von 2,23 bis 13,70% bewegen und im Durchschnitt den Wert von $\pm 6,70\%$ annehmen, beweisen, daß die Ladungen aller Teilchen mit zwei Ausnahmen unterhalb der des Elektrons liegen. Was die beiden Ausnahmen betrifft, so ist zu bemerken, daß das Teilchen Nr. 25 das größte von allen gemessenen ist und an der oberen Grenze der für die Evakuierungsmethode

in Betracht kommenden Teilchengrößen liegt, während die Ladung des Probekörpers Nr. 9 allem Anschein nach eine doppelte ist, was aus dem Vergleich mit anderen Probekörpern derselben Kapazität (z. B. Nr. 17, 18, 23, 31, 32, 33, 39) als wahrscheinlich erscheint. Daß bei den vier daselbst gemessenen Punkten dies nicht sofort experimentell ermittelt wurde, ist darauf zurückzuführen, daß bei den ersten Messungen, die im allgemeinen — mit Rücksicht auf die Erfahrungen von Bär — unter großer Unsicherheit vor sich gingen, kein besonderer Wert darauf gelegt wurde, die beobachteten Teilchen auf die kleinste Ladung zu bringen.

Da jedoch bereits bewiesen wurde, daß diese Unterschreitungen weder auf Fehler der Messungen zurückzuführen sind oder — wie weiter gezeigt wird — im sonstigen Beobachtungsmaterial liegen, noch im Widerstandsgesetz zu suchen sind, wenn dieses linear angenommen wird, so müssen wir zur Überzeugung hinneigen, daß die Ehrenhaftschen Unterschreitungen der Ladungen auch bei submikroskopischen Pt-Teilchen bestätigt werden. Es scheint dies desto sicherer der Fall zu sein, als auch R. Bär, der einzige von den übrigen Autoren, der längere und genügendes Material liefernde Messungen an zerstäubten Pt-Teilchen vorgenommen hat, nicht das Stokes-Cunninghamsche Fallgesetz*, sondern nur die auffallend geringe Dichte** seiner Koagula*** für die Unterschreitungen der Ladungswerte verantwortlich macht. Da aber in den vorliegenden Mitteilungen bezüglich der Dichte der beobachteten Pt-Teilchen keine Bedenken vorliegen dürften, muß auch der von Bär gezogene Schluß für entkräftet betrachtet werden.

c) Mittelwertsbildung. Die auf Grund der Fehlerrechnung gewonnenen Daten ermöglichen uns nun Mittelwerte für $A^2\sigma$, e/A , A zu bilden. Die betreffenden Daten für das Produkt $A^2\sigma$ sind in der Tabelle 5 zusammengestellt. In der Kolonne 1 befinden sich daselbst

* R. Bär, l. c. 1922, S. 166.

** Derselbe, S. 191: „Wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist, erfüllte sich die Hoffnung, nun Partikeln großer Dichte zu erhalten, im allgemeinen nicht. Die Dichte schwankt außerdem für die einzelnen Teilchen innerhalb Grenzen, die sich wie 1:100 verhalten, so daß man auf eine fetzenförmige Gestalt oder schwammartige Struktur der Teilchen schließen muß.“ S. 193: „Wie die Tabelle 8 zeigt, werden die großen Ladungsunterschreitungen einzig durch die unrichtige Annahme über die Dichte der Partikeln hervorgerufen. Darin liegt vielleicht eine gewisse Schwierigkeit, da man sich nicht leicht »Platinteilchen von der Dichte 0,2« vorstellen kann.“

*** Dieselbe Seite unten: „Zur Erklärung unserer Versuchsergebnisse unter Annahme einer Partikeldichte von 21,4 müßten wir mit einem A bis herab zu dem unmöglichen Betrag von 0,07 rechnen.“

Tabelle 5. Berechnung der Fehler, der Mittelwerte und Schwankungen vom Mittelwerte für $A^2 \sigma$.

Pr.-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\pm m A^2 \sigma$	$p A^2 \sigma$	$A^2 \sigma \cdot p A^2 \sigma$	$\Delta A^2 \sigma$	$p A^2 \sigma \cdot \Delta A^2 \sigma$	$p A^2 \sigma \cdot (\Delta A^2 \sigma)^2$	$\pm M A^2 \sigma$	$\pm M A^2 \sigma \%$
3	1,472	0,044	0,955	-1,263	-0,056	0,070	5,844	27,15
4	2,086	0,022	0,519	-3,232	-0,071	0,230	8,275	35,22
6	0,918	0,114	2,246	+0,569	+0,065	0,037	3,648	18,53
9	1,015	0,093	1,773	+1,247	+0,116	0,145	4,043	21,26
12	2,421	0,016	0,421	-5,449	-0,089	0,475	9,633	37,47
15	1,735	0,032	0,749	-3,202	-0,102	0,328	6,888	29,36
17	0,550	0,318	6,343	+0,293	+0,093	0,027	2,186	10,95
18	0,634	0,239	5,878	-4,333	-1,036	4,487	2,521	10,25
21	0,399	0,604	11,618	+1,012	+0,611	0,619	1,587	8,25
23	0,712	0,190	3,690	+0,799	+0,151	0,121	2,834	14,56
25	0,982	0,100	1,967	+0,522	+0,052	0,027	3,902	19,77
26	0,833	0,138	2,879	-0,531	-0,074	0,039	3,315	15,94
28	0,542	0,327	6,828	-0,619	-0,202	0,125	2,156	10,33
30	0,784	0,156	4,008	-5,374	-0,840	4,505	3,122	12,18
31	1,008	0,095	2,188	-2,879	-0,272	0,788	4,003	17,30
32	1,947	0,025	0,518	-0,187	-0,005	0,001	7,755	37,93
33	0,703	0,194	3,673	+1,376	+0,268	0,367	2,796	14,81
34	0,819	0,143	4,230	-9,262	-1,327	12,267	3,253	11,02
35	0,310	1,0	17,441	+2,820	+2,820	7,952	1,233	7,07
36	0,602	0,265	6,133	-2,864	-0,760	2,174	2,394	10,35
37	1,497	0,043	1,155	-6,672	-0,286	1,914	5,957	22,12
38	1,836	0,028	0,562	+0,556	+0,016	0,009	7,296	37,03
39	0,441	0,494	8,660	+2,733	+1,350	3,690	1,754	10,01
40	1,162	0,071	1,681	-3,347	-0,238	0,795	4,618	19,56
42	0,905	0,117	2,293	+0,717	+0,084	0,060	3,595	18,39
43	0,596	0,271	5,474	+0,024	+0,006	0,001	2,371	11,72
51	1,006	0,095	2,009	-0,889	-0,084	0,075	4,003	18,93
52	1,213	0,065	1,594	-4,131	-0,270	1,109	4,816	19,74
57	1,441	0,046	0,861	+1,652	+0,076	0,126	5,735	30,82
Summe:		5,345	108,346		-5,712 +5,708 -0,004	42,563		558,02
							Durchschnittl. Fehler:	19,24

die linear berechneten Fehler, von denen die weitere Berechnung ausgeht. In der Kolonne 2 sind die Gewichte aller Einzelteilchen angegeben, die berücksichtigt werden müssen, da — wie schon gesagt — einzelnen Messungen verschiedene Genauigkeit zukommt. Diese Gewichte ergeben sich aus dem Verhältnis der Fehler, wenn wir einer beliebigen Beobachtung das Gewicht 1 erteilen, was wir tun dürfen, da am Mittelwerte nichts geändert wird, wenn man die betreffenden Gewichte mit einer konstanten Zahl multipliziert. In unserem Falle haben wir dem Probekörper Nr. 35, der den kleinsten Fehler besitzt, die Gewichtseinheit erteilt und durch Vergleich mit den anderen Fehlern aus dem Verhältnis

$$m_0 : m_1 = \sqrt{p_1} : \sqrt{p_0} \quad (20)$$

einzelne Gewichte ausgerechnet. Die nächste Kolonne beinhaltet die Produkte der eben berechneten Gewichte mit den ihnen zugehörigen $A^2\sigma$ -Werten. Aus der Beziehung

$$\overline{A^2\sigma} = \frac{\sum (A^2\sigma \cdot p_{A^2\sigma})}{\sum p_{A^2\sigma}} \quad (21)$$

stellt sich nämlich der Mittelwert in $A^2\sigma$ zu 20,261, welcher Wert um 6,5 % kleiner ist als der mit 21,64 berechnete arithmetische Mittelwert.

Den Mittelwertsfehler, der sich aus den mittleren Fehlern der Einzelbeobachtungen zusammensetzt, gibt die Formel:

$$\frac{1}{M^2} = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2} + \dots + \frac{1}{m_n^2} = \sum \frac{1}{m^2} \quad (22)$$

an. Die Unsicherheit des oben angeführten Mittelwertes beträgt $\pm 0,66$ %.

Auf Grund der experimentellen Daten bekommen wir also aus den vorliegenden Messungen

$$\overline{A^2\sigma} = 20,261 \pm 0,134.$$

In der Kolonne 4 sind die Schwankungen der einzelnen $A^2\sigma$ -Werte um den gemeinsamen Mittelwert berechnet. Sie sind von Wichtigkeit für die weiteren Berechnungen, um einerseits die Kontrolle der bisherigen Rechnungen durchzuführen, andererseits, falls sie etwa aus dem Bereiche ihrer Fehler, die unabhängig von ihnen bestimmt wurden, hinausfallen, um auch andere störende Einflüsse (wie die chemische Beschaffenheit des Materials) erkennbar zu machen. Die erste Aufgabe erfüllen die Angaben der Kolonne 5, wo die Summe des Produktes $p_{A^2\sigma} \cdot A_{A^2\sigma} = 0$ wird (im Gegensatz zum arithmetischen Mittel, wo allein die Summe der Schwankungen Null sein müßte); die zweite alle weiteren Berechnungen

in den Kolonnen 6 bis 8. Die Kolonne 6 gibt nämlich Werte an, welche zur Bestimmung der mittleren Abweichung der Gewichtseinheit

$$\Delta_{A^2\sigma}^0 = \pm \sqrt{\frac{\sum [p_{A^2\sigma} \cdot (\Delta_{A^2\sigma})^2]}{n-1}} \quad (23)$$

führen*. Diese beträgt bei $A^2\sigma: \pm 1,233$, hat also einen Wert, welcher den Fehler der Gewichtseinheit ($m_0 = \pm 0,310$) ums Vierfache übersteigt, was weiterhin die Annahme nahelegt, daß hier Abweichungen zutage treten, die nicht durch den Beobachtungsfehler allein bedingt sind. Dies erscheint bestätigt, wenn wir die Abweichungen vom Mittelwert (Kolonne 7 und 8) berücksichtigen, die aus der Beziehung

$$M_{A^2\sigma} = \pm \frac{\Delta_{A^2\sigma}^0}{\sqrt{p_{A^2\sigma}}} \quad (24)$$

berechnet wurden**. Wie aus den in Kolonne 8 wiedergegebenen Daten zu ersehen ist, bewegen sich diese Abweichungen in den breiten Grenzen zwischen 7,07 und 37,93 % und bilden einen Durchschnittswert von $\pm 19,24$ %, gegenüber dem durchschnittlichen Fehler dieser Größe, der — wie früher angegeben wurde — nur $\pm 4,79$ % beträgt. Ein so großer Wert der Schwankungen wirkt sich aber auch in der größeren Ungenauigkeit des Mittelwertes aus, der sich nun von 0,66 % nach der Beziehung

$$\Delta' = \frac{\Delta_{A^2\sigma}^0}{\sqrt{\sum p_{A^2\sigma}}} \quad (25)$$

auf 2,63 % erhöht***.

Berücksichtigen wir nun also alle möglichen Störungen, sowohl der Messungen und Beobachtungen, als auch durch die verschiedene Beschaffenheit des Materials und dergleichen verursachte, dann kommen wir auf Grund der vorliegenden Messungen an 29 Platinprobekörpern zum Endresultat für den Mittelwert in

$$\overline{A^2\sigma} = 20,261 \pm 0,533.$$

* In dieser Formel sind p die Gewichte (Kolonne 2), $\Delta_{A^2\sigma}$ die Abweichungen vom Mittelwerte (Kolonne 4) und n die Anzahl der Probekörper (bei uns 29).

** Hier hat $\Delta_{A^2\sigma}^0$ den oben erwähnten konstanten Wert 1,233, während die $p_{A^2\sigma}$ der Kolonne 2 zu entnehmen sind.

*** Ähnliche Verhältnisse kommen auch in den bereits zitierten Selenmessungen von Wasser zum Vorschein, wo bei Berücksichtigung der durch die Schwankungen verursachten Fehler die Unsicherheit im Mittelwerte für $A^2\sigma$ ums Doppelte, für e/A beinahe ums Vierfache gestiegen ist. Dies kann als Beweis dienen, daß sowohl durch die Bunsenflamme verdampfte als auch im Lichtbogen zwischen den Elektroden zerstäubte Materialien jederzeit Probekörper liefern, die untereinander gewisse Strukturunterschiede aufweisen. Diese sind aber bei weitem nicht so groß, daß etwa die Bedingungen des Widerstandsgesetzes dadurch nicht erfüllt werden könnten.

Die — unter Zuhilfenahme der übrigen Daten der Fehlerrechnung — analog berechneten Mittelwerte anderer Größen sind für e/A und für A in der Tabelle 6 in abgekürzter Form zusammengestellt.

Der Mittelwert für e/A beträgt 3,056 und stimmt vollkommen mit dem aus dem arithmetischen Mittel gewonnenen überein. Die Unsicherheit dieses Mittelwertes, bedingt nur durch Beobachtungsfehler, stellt sich zu: $\pm 0,83$ %, ergibt also den Mittelwert für

$$\overline{e/A} = (3,056 \pm 0,025) \cdot 10^{-10} \text{ elst. Einh.}$$

Aus den weiteren Berechnungen ist analog ersichtlich, daß auch hier die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit, die $\pm 0,358$ beträgt, um mehr als das Vierfache den mittleren Fehler derselben ($m_0 = \pm 0,075$) übersteigt, was also auch auf andere störende Einflüsse hinweist. Die Schwankungen der e/A -Werte nehmen alle möglichen Werte in den Grenzen 9,81 bis 61,34 % an und haben einen Durchschnittswert von $\pm 29,83$ % gegenüber dem durchschnittlichen Fehler dieser Größe, der nur $\pm 6,25$ % betragen hat. Demgemäß steigt auch der Fehler des Mittelwertes von $\pm 0,83$ % auf $\pm 3,95$ % und bildet den endgültigen Mittelwert für e/A zu:

$$\overline{e/A} = (3,056 \pm 0,121) \cdot 10^{-10} \text{ elst. Einh.}$$

in dem bereits sämtliche möglichen Fehler zusammengezogen sind.

Der mittlere Wert für die Konstante des Widerstandsgesetzes A beträgt 0,980 und ist mit einem Fehler von kaum $\pm 0,33$ % behaftet. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit stellt sich hier zu: $\mathcal{A}_A^0 = \pm 0,033$; die Durchschnittsschwankungen gruppieren sich um $\pm 9,94$ % und der größte Fehler des Mittelwertes ist $\pm 1,35$ %. Demnach hat die Konstante des Widerstandsgesetzes den endgültigen Wert:

$$\overline{A} = 0,980 \pm 0,013.$$

§ 5. Ausgleich nach dem exponentiellen Gesetz. Um der in § 3 erwähnten leichten Krümmung der u, l -Kurven (Fig. 2 a, b) Rechnung zu tragen, wurden die Resultate der Messungen an eine exponentielle Kurve angepaßt. Eine solche Beweglichkeitskurve fanden Knudsen und Weber, gelegentlich ihrer Untersuchungen über die Dämpfung von Schwingungen großer Glaskugeln in der Luft*, in der Form:

$$B = \frac{1}{6 \pi \mu a} \cdot \left[1 + \frac{l}{a} \cdot \left(A + D e^{-C \cdot \frac{a}{l}} \right) \right], \quad (26)$$

* M. Knudsen und S. Weber, Ann. d. Phys. **36**, 181, 1919.

Tabelle 6. Berechnung der Mittelwerte und der Schwankungen vom Mittelwerte für e/A und A .

Pk.-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$p_{e/A}$	$\Delta_{e/A}$	$p_{e/A} \cdot \Delta_{e/A}$	$\frac{p_{e/A}}{(\Delta_{e/A})^2}$	$\pm M_{e/A}$	$\pm M_{e/A}$ %	p_A	$\Delta_{(A)}$	$p_A \cdot \Delta_{(A)}$	$\frac{p_A}{(\Delta_{(A)})^2} \cdot 10^3$	$\pm M_A$	$\pm M_A$ %
3	0,077	+0,439	+0,034	0,015	1,292	49,37	0,055	-0,023	-0,001	0,029	0,141	14,09
4	0,103	+1,154	+0,119	0,137	1,115	58,62	0,030	-0,067	-0,002	0,133	0,193	18,44
6	0,226	+0,070	+0,016	0,001	0,754	26,25	0,127	+0,015	+0,002	0,029	0,093	9,66
9	0,038	-3,844	-0,146	0,562	1,827	26,48	0,102	+0,038	+0,004	0,148	0,104	11,01
12	0,068	+0,811	+0,055	0,045	1,377	61,34	0,024	-0,116	-0,003	0,319	0,216	19,67
15	0,104	+0,508	+0,053	0,027	1,112	43,64	0,067	-0,067	-0,005	0,299	0,129	12,29
17	0,575	-0,026	-0,015	0,0	0,472	15,32	0,378	+0,014	+0,005	0,074	0,054	5,59
18	0,372	-0,407	-0,151	0,062	0,587	16,95	0,326	-0,092	-0,030	2,760	0,058	5,42
21	0,760	-0,361	-0,274	0,099	0,411	12,03	0,640	+0,032	+0,021	0,655	0,042	4,38
23	0,299	-0,770	-0,230	0,177	0,654	17,09	0,232	+0,036	+0,006	0,150	0,070	7,39
25	0,100	-2,233	-0,223	0,499	1,133	21,42	0,111	+0,020	+0,002	0,044	0,100	10,39
26	0,190	+0,073	+0,014	0,001	0,321	27,52	0,160	-0,006	-0,001	0,006	0,083	8,42
28	1,0	+0,550	+0,550	0,303	0,358	14,29	0,378	-0,008	-0,003	0,024	0,054	5,46
30	0,473	+0,702	+0,332	0,233	0,520	22,09	0,232	-0,114	-0,025	2,883	0,070	6,44
31	0,134	-0,196	-0,026	0,005	0,978	30,07	0,121	-0,060	-0,007	0,436	0,095	9,17
32	0,051	-0,127	-0,006	0,001	1,591	49,98	0,029	+0,002	+0,0	0,0	0,195	19,97
33	0,271	+0,178	+0,048	0,009	0,687	23,87	0,222	+0,042	+0,009	0,391	0,070	7,52
34	0,354	+0,243	+0,086	0,021	0,602	21,40	0,250	-0,195	-0,049	9,506	0,066	5,65
35	0,901	-0,789	-0,711	0,561	0,377	9,81	1,0	+0,077	+0,077	5,929	0,033	3,67
36	0,404	-0,414	-0,167	0,069	0,563	16,23	0,352	-0,060	-0,021	1,266	0,056	5,38
37	0,091	+0,287	+0,026	0,008	1,185	42,80	0,067	-0,142	-0,010	1,342	0,129	11,47
38	0,097	+0,948	+0,092	0,087	1,151	54,60	0,032	+0,020	+0,001	0,013	0,187	19,43
39	0,650	-0,370	-0,241	0,089	0,444	12,96	0,529	+0,075	+0,040	2,973	0,046	5,05
40	0,177	+0,220	+0,039	0,009	0,850	29,97	0,095	-0,070	-0,007	0,465	0,108	10,27
42	0,360	+0,492	+0,177	0,087	0,597	23,28	0,132	+0,024	+0,003	0,076	0,091	9,54
43	0,295	-0,036	-0,011	0,0	0,659	21,31	0,326	+0,008	+0,003	0,021	0,058	5,98
51	0,217	+0,818	+0,178	0,145	0,768	34,32	0,111	-0,014	-0,002	0,022	0,100	10,03
52	0,360	+0,912	+0,328	0,299	0,597	27,85	0,088	-0,088	-0,008	0,678	0,112	10,50
57	0,077	+0,719	+0,055	0,040	1,288	55,11	0,049	+0,047	+0,002	0,109	0,150	16,03
Summe	8,824		+2,202	3,591	864,97	6,245			+0,175	30,780	288,31	
			-2,201	Durchschnittl. Fehler	29,83				-0,174	Durchschnittl. Fehler	9,94	
			+0,001						+0,001			

in der die Abhängigkeit der Konstante A vom Quotienten l/a zum Ausdruck kommt. Berücksichtigen wir nun die einwirkenden Kräfte [Gleichung (6)], so erhalten wir unsere Gleichung in der Form:

$$u = e \cdot B = \frac{e}{6 \pi \mu a} \cdot \left[1 + \frac{l}{a} \left(A + D e^{-C \cdot \frac{a}{l}} \right) \right], \quad (27a)$$

worin A , D und C Konstanten sind, die vom Material abhängen. Durch das Einsetzen der Näherungswerte wird dieses Problem auf die Lösung linearer Gleichungen nach dem Gaußschen Prinzip zurückgeführt, wobei für ein jedes Teilchen so viele lineare Gleichungen zur Verfügung stehen, als Messungen bei verschiedenen Drucken ausgeführt wurden. Die nun errechneten korrigierten Konstanten werden in die Gleichung neu eingesetzt und nachher die Radien nach dem Newtonschen Näherungsverfahren berechnet. Einer Anregung von E. Wasser zufolge wurden nun diese Berechnungen folgendermaßen vereinfacht.

Es handelt sich im wesentlichen um die Aufstellung von vier Gleichungen für die vier Unbekannten, in bezug auf welche der Ausgleich ausgeführt werden soll. Zu diesem Zwecke müssen wir zuerst die angeführte Beziehung für u linear machen, was durch Einstellung von Näherungswerten leicht durchgeführt wird. Als solche benutzen wir die im linearen Ausgleich gewonnenen Daten für die Konstante des Widerstandsgesetzes, sowie die Größen α und β (Tabelle 2 und 3) und die Knudsen-Weberschen Werte für D und C^* . Der leichteren Handhabung wegen wollen wir gleichzeitig unsere Gleichung in der allgemeinen Form:

$$u = k_1 + k_2 l + k_3 l e^{-\frac{k_4}{l}} \quad (27b)$$

schreiben, wobei:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } k_1 = \frac{e}{6 \pi \mu a} = \alpha \\ \text{b) } k_2 = \frac{e A}{6 \pi \mu a^2} = \beta \\ \text{c) } k_3 = \frac{e}{6 \pi \mu a^2} D = D \cdot \frac{k_2}{A} \text{ [aus der Beziehung b)],} \\ \text{d) } k_4 = C \cdot a = C \cdot D \cdot \frac{k_1}{k_3} \text{ [aus der Beziehung a) und b)].} \end{array} \right\} \quad (28)$$

Macht man nun für die Näherungswerte den Ansatz:

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = k_1^0 + \varphi, \\ k_2 = k_2^0 + \chi, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} k_3 = k_3^0 + \psi, \\ k_4 = k_4^0 + \omega, \end{array} \right\} \quad (29)$$

* $D \approx 0,3$ und $C \approx 2,0$.

so erhält man die Näherungskurve:

$$u^0 = k_1^0 + k_2^0 l + k_3^0 l e^{-\frac{k_4^0}{l}}. \quad (30)$$

Die Entwicklung von u nach der Taylorschen Reihe bis zu den Gliedern mit der ersten Potenz führt zu:

$$\begin{aligned} u_i - u^0 = r_i = & \varphi \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_1} \right)_{k_1 = k_1^0} + \chi \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_2} \right)_{k_2 = k_2^0} \\ & + \psi \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_3} \right)_{k_3 = k_3^0} + \omega \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_4} \right)_{k_4 = k_4^0} \end{aligned} \quad (31)$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung ergeben sich aus der partiellen Differenzierung nach k_1, k_2, k_3, k_4 der oben genannten Gleichung für u . Es ist dann:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_1} \right)_{k_1 = k_1^0} &= 1; & \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_2} \right)_{k_2 = k_2^0} &= l; \\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_3} \right)_{k_3 = k_3^0} &= l \cdot e^{-\frac{k_4^0}{l}}; \\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial k_4} \right)_{k_4 = k_4^0} &= -k_3^0 \cdot e^{-\frac{k_4^0}{l}}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Werden nun der einfacheren Schreibweise halber diese Koeffizienten mit m, n, s, t bezeichnet, dann gibt die Gleichung (31) im allgemeinen folgende Fehlergleichungen an:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \cdot m_1 + \chi \cdot n_1 + \psi \cdot s_1 + \omega \cdot t_1 &= r_1, \\ \varphi \cdot m_2 + \chi \cdot n_2 + \psi \cdot s_2 + \omega \cdot t_2 &= r_2, \\ \vdots & \\ \varphi \cdot m_n + \chi \cdot n_n + \psi \cdot s_n + \omega \cdot t_n &= r_n. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Nach Anwendung der Minimumbedingung ist:

$$\sum_{i=1}^n (\varphi \cdot m_i + \chi \cdot n_i + \psi \cdot s_i + \omega \cdot t_i - r_i)^2 = \text{Min.} \quad (34)$$

und die gesuchten vier Gleichungen für die vier Unbekannten lauten nun:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \cdot \Sigma m m + \chi \cdot \Sigma m n + \psi \cdot \Sigma m s + \omega \cdot \Sigma m t &= \Sigma m r, \\ \varphi \cdot \Sigma n m + \chi \cdot \Sigma n n + \psi \cdot \Sigma n s + \omega \cdot \Sigma n t &= \Sigma n r, \\ \varphi \cdot \Sigma s m + \chi \cdot \Sigma s n + \psi \cdot \Sigma s s + \omega \cdot \Sigma s t &= \Sigma s r, \\ \varphi \cdot \Sigma t m + \chi \cdot \Sigma t n + \psi \cdot \Sigma t s + \omega \cdot \Sigma t t &= \Sigma t r. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

In unserem Falle, wo ja doch die eben angeschriebenen Koeffizienten eine viel einfachere Form annehmen, da hier $m = 1$ und $n = l$ ist,

Tabelle 7.
a) Exponentieller Ausgleich.

Pk-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Näherungswerte für											
A	C	D	$k_1 \cdot 10^3$	$k_2 \cdot 10^{-2}$	$k_3 \cdot 10^{-2}$	$k_4 \cdot 10^5$	$q \cdot 10^3$	$\chi \cdot 10^{-2}$	$\psi \cdot 10^{-2}$	Korrekturen für	
										$\omega \cdot 10^5$	
33	0,88	2,0	0,3	4,7	2,07	0,706	4,000	+ 0,044	- 0,039	- 0,253	+ 0,344
36	1,00	2,0	0,3	8,6	5,50	1,650	3,127	+ 0,054	- 0,236	- 0,136	+ 0,908
39	0,90	2,0	0,3	5,2	1,90	0,633	4,926	- 0,071	+ 0,033	+ 0,015	- 0,188

b) Ergebnisse des exponentiellen Ausgleiches.

Pk-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ausgeglichenene Werte für											
A	D	C	$k_1 \cdot 10^3$	$k_2 \cdot 10^{-2}$	$k_3 \cdot 10^{-2}$	$k_4 \cdot 10^5$	$A^2 \sigma$	$e/A \cdot 10^{10}$	$a \cdot 10^5$	$e \cdot 10^{10}$	
33	0,822	0,182	2,281	4,744	2,031	4,344	14,452	3,644	1,903	2,995	
36	0,882	0,326	2,164	8,654	5,264	4,035	16,629	4,719	1,449	4,160	
39	0,763	0,256	2,340	5,129	1,933	4,738	12,488	4,515	2,025	3,445	

c) Fehlerrechnung des exponentiellen Ausgleiches.

Pk-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\pm m_\alpha 10^3$	$\pm m_\alpha 10^3$	$\pm m_\alpha 10^3$	$\pm m_\beta 10^{-2}$	$\pm m_\beta 10^0$	$\pm m_A^2 \sigma$	$\pm m_A^2 \sigma 10^0$	$\pm m_{e/A}$	$\pm m_{e/A} 10^0$	$\pm m_A$	$\pm m_A 10^0$	$\pm m_a$	$\pm m_a 10^0$	$\pm m_e$	$\pm m_e 10^0$
33	0,324	6,83	0,355	17,33	5,105	35,32	0,804	22,07	2,553	17,66	0,439	25,67	0,847	28,26
36	0,438	5,06	0,539	10,23	3,506	21,08	0,679	14,39	1,753	10,54	0,235	15,54	0,732	17,84
39	0,224	4,36	0,230	11,87	3,015	24,14	0,665	14,74	1,508	12,07	0,354	17,49	0,656	19,05

lassen sich die Berechnungen wesentlich abkürzen und wir bekommen folgende Normalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \cdot N^* + \chi \cdot \Sigma l + \psi \cdot \Sigma s + \omega \cdot \Sigma t &= \Sigma r, \\ \varphi \cdot \Sigma l + \chi \cdot \Sigma l^2 + \psi \cdot \Sigma ls + \omega \cdot \Sigma lt &= \Sigma lr, \\ \varphi \cdot \Sigma s + \chi \cdot \Sigma ls + \psi \cdot \Sigma s^2 + \omega \cdot \Sigma st &= \Sigma sr, \\ \varphi \cdot \Sigma t + \chi \cdot \Sigma lt + \psi \cdot \Sigma ts + \omega \cdot \Sigma t^2 &= \Sigma tr. \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

Aus diesen vier Gleichungen sind leicht die Korrekturen φ , χ , ψ , ω zu ermitteln. Diese ergänzen dann [nach Beziehung (29)] die Näherungswerte k_1^0 , k_2^0 , k_3^0 und k_4^0 zu den gesuchten ausgeglichenen Werten k_1 , k_2 , k_3 und k_4 .

Die entsprechenden Daten, sowohl angenommene, als auch ausgeglichene, sind in der Tabelle 7a und b wiedergegeben. Die weitere Berechnung bringt keine Schwierigkeiten und wird analog zum linearen Ausgleich ausgeführt, wobei für $\alpha = k_1$ und für $\beta = k_2$ die ausgeglichenen Werte eingesetzt werden. Auch die Absolutwerte für $A^2 \sigma$, e/A , a und e , ferner für die Konstanten A , D und C sind in der Tabelle 7b zusammengefaßt. Die von Wasser** gemachte Beobachtung, daß zum erfolgversprechenden Ausgleich nach der e -Potenz zumindest acht gemessene Punkte von dem betreffenden Probekörper, also gleichzeitig vier überschüssige Normalgleichungen notwendig sind, um eine eindeutige Krümmung konkav zur u -Achse festzustellen, wurde auch in den vorliegenden Messungen bestätigt. Zur möglichst großen Anzahl der Punkte, die aus der Messung gewonnen werden, ist aber auch die exakte Lage derselben an der exponentiellen Kurve von großer Wichtigkeit; eine Schwierigkeit, die sich allein aus der experimentellen Gewinnung der einzelnen Punkte von selber ergibt. Sehr geringe Abweichungen — nicht selten eines einzigen gemessenen Punktes —, verursacht etwa durch eine leichte Strömung bald nach dem Auspumpen des Gases, ergeben derart große Korrekturfehler, daß auch eine Krümmung in entgegengesetzter Richtung, also konvex zur u -Achse, als möglich erscheint. Aus diesem Grunde konnte von den zehn Probekörpern, bei denen mehr als acht gemessene Punkte zur Verfügung standen und die zur Berechnung herangezogen wurden, nur bei drei Teilchen eine eindeutige Krümmung festgestellt werden***. Diese sind in Fig. 4 aufgetragen, wo die Kreise

* N bedeutet hier die Anzahl der bei verschiedenen Gasdrucken ausgeführten Messungen an demselben Probekörper.

** E. Wasser, l. c. 1927.

*** An dieser Stelle erlaubt sich der Verfasser zu bemerken, daß auch bei den letzteren von H. Feiner ausgewerteten Messungen von J. Mattauch, welche der

die aus der Gleichung (27 b) berechneten Punkte ergeben, durch welche die theoretische Kurve gelegt ist, während die Kreuze (\times) die experimentell ermittelten, gemessenen Punkte der einzelnen Probekörper darstellen.

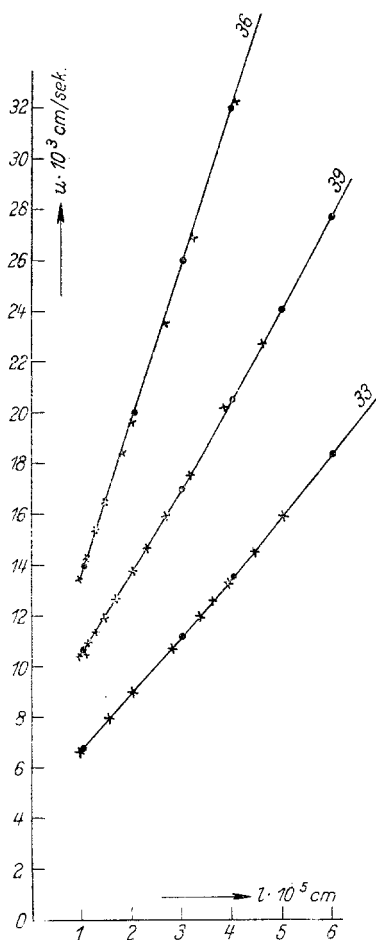


Fig. 4.

Aus den in Tabelle 7 b angegebenen Daten ersieht man, daß die Konstante des Widerstandsgesetzes durch den exponentiellen Ausgleich um etwa 15 % im Werte zurückgeht, was von Einfluß für die Größe der Ladung ist. Allerdings ergänzt die Knudsen-Webersche Konstante D , welche eine kleine Korrektur der Kurvenkrümmung darstellt, den Wert von A zu 1,0. Bildet man nämlich die Summe $A + D$, so erhält man Zahlenwerte, die mit den bisher im Ehrenhartschen Institut ermittelten gänzlich übereinstimmen*. Die Radien der einzelnen Partikeln werden durch diesen Ausgleich um 4 bis 5 % höher berechnet. Entsprechend der neuen Konstante — bei fehlerlosem σ — gehen auch die $A^2\sigma$ -Werte bedeutend zurück. Die c/A -Werte erhöhen sich um etwa 25 bis 30 % gegenüber den linearen Werten, wobei aber die Größe der Ladung — auch nach Berücksichtigung der betreffenden Fehler — noch immer in zwei Fällen eine etwa 20 %ige Unterschreitung vom Elementarquantum aufweist.

Letzgenannte in den Jahren 1923 bis 1925 im III. Physikalischen Institut der Wiener Universität ausgeführt hatte, analoge Verhältnisse bestehen. Auf zehn Teilchen nämlich, die Feiner nach der c -Potenz ausgeglichen hatte, konnte nur an drei Probekörpern die sichere konkave Krümmung zur u -Achse festgestellt werden. Bei allen übrigen Teilchen war auch eine entgegengesetzte Krümmung möglich. (Die betreffende Arbeit erscheint demnächst in der ZS. f. Phys.)

* F. Ehrenhaft, „Das Ergebnis der Untersuchung über die Beweglichkeit kleiner Kugeln im Gase und deren elektrische Ladungen“ (ZS. f. Phys. **39**, 603, 1926).

Um die Fehler der Absolutwerte zu berechnen, muß man wieder zuerst die Gewichte der einzelnen Größen bestimmen. Diese bekommen bei den drei in Betracht gezogenen Probekörpern für $k_1 = \alpha$ und $k_2 = \beta$ folgende Werte:

Pk Nr. 33.	$Q_{11} = + 11,169$	und	$Q_{22} \cdot 10^{-10} = + 13,399,$
„ „ 36.	$Q_{11} = + 84,175$	„	$Q_{22} \cdot 10^{-10} = + 127,533,$
„ „ 39.	$Q_{11} = + 14,413$	„	$Q_{22} \cdot 10^{-10} = + 15,143.$

Aus diesen Gewichtsdaten wurden nun die Fehler berechnet, die in Tabelle 7c zusammengestellt sind. Sie beweisen im allgemeinen eine ziemlich große Unsicherheit der da ermittelten Absolutwerte. Vergleicht man nämlich die Fehler des linearen mit denen des exponentiellen Ausgleiches derselben Größen, so kommt man zu dem Ergebnis, daß in den vorliegenden Protokollen die Werte von $A^2\sigma$ und e/A sowie der Konstante A , des Teilchenradius a und der Partikelladung e durch den linearen Ausgleich viel genauer wiedergegeben werden als durch Angleichung an ein exponentielles Gesetz.

§ 6. Zusammenfassung. Die Resultate dieser Arbeit lassen sich kurz so zusammenfassen:

1. Es wird im Gegensatz zu den bisherigen Erfahrungen an Platin (E. Meyer, W. Gerlach, K. Wolter, R. Bär) gezeigt, daß bei entsprechender Versuchsanordnung leicht im elektrischen Flammenbogen Platinprobekörper erzeugt werden können, die sämtlichen Bedingungen der Widerstandsgesetze entsprechen und deswegen als regulär bezeichnet werden.

2. Solche Platinteilchen der Radiengrößen $1 \cdot 10^{-5}$ bis $3 \cdot 10^{-5}$ cm konnten im Ehrenhaftschen Kondensator nach der Evakuierungsmethode gemessen werden. Die Resultate der experimentellen Untersuchungen wurden dann an eine lineare Funktion und an ein exponentielles Gesetz angeglichen. Dabei wurde die Gültigkeit der Widerstandsgesetze (Stokes-Cunningham und Knudsen-Weber) zum ersten Male auch für diese Metallteilchen bestätigt, da bei allen Probekörpern die richtige — theoretisch postulierte — Konstante des Widerstandsgesetzes gefunden wurde. Aus dieser Tatsache einerseits und deswegen, weil die berechneten $A^2\sigma$ -Werte durchwegs um 21,4 — die normale Platindichte — liegen andererseits, wird geschlossen, daß die Teilchen Kugelgestalt hatten und die Dichte der gemessenen Probekörper mit jener des Elektrodenmaterials identisch war.

3. Die ausgerechneten elektrischen Ladungen zeigen wesentliche Unterschreitungen des Elementarquantums; bei linearem Ausgleich bis auf etwa 60 % (kleinste Ladung: $1,99 \cdot 10^{-10}$ elst. Einh.), bei exponentiellem (wo allerdings die Statistik kleiner ist) bis auf etwa 35 % (kleinste Ladung: $2,99 \cdot 10^{-10}$ elst. Einh.). Auf Grund der anschließend ausgeführten Fehlerschätzung wird bewiesen, daß diese nicht auf Ungenauigkeiten der Beobachtungen oder unregelmäßige Beschaffenheit des untersuchten Materials zurückzuführen sind.

4. Nach den bekannten Methoden der Fehlerrechnung wurden ferner — bei Berücksichtigung der mittleren Fehler von Einzelbeobachtungen — Mittelwerte berechnet, die für Platin folgende Resultate ergaben:

Der Mittelwert in

$$A^2 \sigma = 20,261 \pm 0,533,$$

$$\frac{e}{A} = (3,056 \pm 0,121) \cdot 10^{-10} \text{ elst. Einh.},$$

$$A = 0,980 \pm 0,013.$$

Da nun die angeführten Fehler aus allen 29 Platinprobekörpern mit 184 gemessenen Punkten, also dem größten statistischen Material, das bis jetzt an einer und derselben Substanz zur Verfügung stand, berechnet wurden, können dieselben als charakteristisch nicht nur für dieses Element, sondern auch im allgemeinen für Probekörper dieser Größenordnung angesehen werden.

5. Drei gemessene Platinteilchen konnten an eine exponentielle Kurve angeglichen werden. Die jedoch aus dem Knudsen-Weberschen Gesetz berechneten Absolutwerte sind mit weitaus größeren Fehlern behaftet, als die linear ermittelten. Deswegen ist ihnen geringere Genauigkeit zuzuschreiben. Im besonderen wäre zu erwähnen, daß die Radien hier etwas höher berechnet werden, die $A^2 \sigma$ -Werte tiefer liegen und Zahlenwerte zwischen 12,5 und 16,6 annehmen. Die e/A -Werte erhöhen sich bedeutend gegenüber den linearen Berechnungen, dabei bleiben aber die elektrischen Ladungen auch bei Berücksichtigung ihrer weitesten Fehlergrenzen in einigen Fällen unter dem Elektronenwerte.

Wien, III. Physikalisches Institut, Juni 1929.