

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 87

1928

№ 24

1. Gegenseitige Induktion zwischen Wechselstrom- freileitungen von endlicher Länge;

von *Felix Pollaczek*

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt)

I. Tell

1. Allgemeines

Eine wechselstromdurchflossene Freileitung ruft bekanntlich im Erdboden Wirbelströme hervor, auf deren Feld es bei der Beurteilung der induktiven Störungen in Nachbarleitungen ebenso sehr ankommt, wie auf das primäre Magnetfeld der störenden Leitung.

Für die Rechnung pflegt man die Erde als elektrisch homogen (oder aus zwei homogenen Schichten bestehend) und von ebener Oberfläche vorauszusetzen und die Leitungen als unendlich dünn anzunehmen; außerdem wurde bisher die induzierende Leitung als unendlich lang vorausgesetzt.¹⁾ Diese letztere Annahme aber ist insbesondere dann nicht gerechtfertigt, wenn der Abstand zwischen den beiden einander induzierenden Leitungen von gleicher Größenordnung ist wie die Leitungslängen selbst, und wir verzichten hier auf sie, indem wir, unter Beibehaltung der sonstigen Idealisierungen des Problems, beide Leitungen als Drahtstücke von endlicher Länge voraussetzen.

Bezeichnet man, in komplexer Schreibweise, den induzierenden Wechselstrom mit $J = |J|e^{+i\omega t}$, so kann für die in

1) F. Pollaczek, „Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung“, ENT 3. S. 339. 1926. — „Über die Induktionswirkungen einer Wechselstromeinfachleitung“, ENT 4. S. 18. 1927. — J. R. Carson, „Wave propagation in overhead wires“, Bell Syst. Techn. Journ. 5. S. 539. 1926. — G. Haberland, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 6. S. 366. 1926.

einer sekundären Leitung induzierte, dem Strom J proportionale Spannung E formal geschrieben werden:

$$E = - M \frac{\partial J}{\partial t} = - i \omega M J,$$

und es handelt sich dann im wesentlichen um die Bestimmung des komplexen und frequenzabhängigen Proportionalitätsfaktors M , des „Gegeninduktionskoeffizienten“ zwischen induzierter und induzierender Leitung; M erweist sich,

$$k = e^{\frac{3 i \pi}{4}} \sqrt{4 \pi \omega \sigma}$$

(σ = elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit des Erdbodens) gesetzt, als eine analytische Funktion der mit k multiplizierten Koordinaten der Leitungsenden.

Wir berechnen hier insbesondere das M zweier paralleler Einfachleitungen und führen es zurück auf zwei andere Größen: 1. den (bereits bekannten)¹⁾ Gegeninduktionskoeffizienten M zwischen einer unendlich langen induzierenden Leitung und einem ihr parallelen Leiter von der Länge 1; 2. den Gegeninduktionskoeffizienten $\Psi(l)$ zwischen zwei parallelen Leitungen (Fig. 6), deren nahe Enden um l voneinander entfernt sind und deren ferne Enden im Unendlichen liegen.

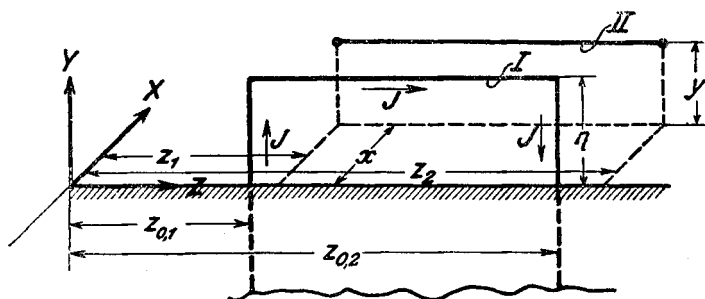
Weiter werden einige andere Gegeninduktionskoeffizienten, z. B. zwischen zwei horizontalen, einander rechtwinklig kreuzenden Leitungen, bestimmt. Unsere Formeln gelten auch für induzierende Leitungen von geringer Länge; dies ist von Bedeutung für die Induktivitätsmessungen an Versuchsleitungen, durch welche man klarzustellen sucht, wie weit die auf der Annahme konstanter Erdleitfähigkeit beruhende Theorie mit der Wirklichkeit im Einklange ist.

Ebenso wie die Annahme konstanter Bodenleitfähigkeit ist auch unsere Voraussetzung der idealen Erdung (§ 2) willkürlich; sie hat naturgemäß erheblichen Einfluß auf die Gestalt derjenigen Formeln, welche sich auf kürzere Leitungen mit zwei einander nahe liegenden Enden beziehen, was bei den Anwendungen zu beachten ist.

1) a. a. O. Anm. 1, S. 965.

2. Formeln für die Felder vertikal- und horizontalachsiger Dipole

Wir legen eine induzierende Wechselstromleitung von endlicher Länge zugrunde, die in der Höhe η oberhalb der Erdoberfläche verlaufe; die beiden Leitungsenden seien durch senkrechte Zuleitungen geerdet, und, um von unseren Formeln den Einfluß einer schlechten Erdung fernzuhalten, nehmen wir weiter an, daß diese Zuleitungen unendlich weit senkrecht ins Erdinnere fortgeführt sind (Fig. 1).



I induzierende geerdete Leitung
II induzierte Parallelleitung

Fig. 1

Um das elektromagnetische Feld dieser Leitung zu berechnen, kann man sie in wechselstromdurchflossene Leiterelemente, d. h. in oszillierende Dipole mit teils vertikaler, teils horizontaler Achse, zerlegt denken und über die Dipolfelder summieren. Was die Stromverteilung (die Größe der Dipolmomente) längs der induzierenden Leitung betrifft, so vernachlässigen wir im oberirdischen Teile die komplexe Leitungsdämpfung, und nehmen sie in den vertikalen unterirdischen Teilen gleich der Erddämpfung an, so daß, mit den im folgenden erklärten Bezeichnungen, an der Stelle $y_0 < 0$ der Strom $J e^{-ik_1 y_0}$ fließt. Die so beschaffene Leitung sei kurz als „ideal geerdet“ bezeichnet.

Das von einem vertikal- oder horizontalachsigen Dipole im Zusammenwirken mit der ebenbegrenzten und endlichleitfähigen Erde erzeugte Feld ist bekannt¹⁾, so daß das von

1) A. Sommerfeld, „Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie“, Ann. d. Phys. (IV. Folge) 28. S. 665. 1909 und 81. S. 1135. 1926.

der Leitung nach Fig. 1 im Raum induzierte elektrische Feld \mathfrak{E} durch Integration über bekannte analytische Ausdrücke zu gewinnen ist. Um weiter die in einer zweiten Leitung induzierte Spannung zu ermitteln, hat man längs deren Leitlinie das Integral

$$\int \mathfrak{E}_z ds$$

zu bilden.

Wir stellen nun zunächst unter Verwendung Gaußscher Einheiten die Formeln für die von den erwähnten Dipolen erzeugten elektrischen Felder zusammen, wobei wir die sogenannten „reflektierten“ Anteile der Felder als Aggregate aus ebenen Wellen (die vom Spiegelbild des betreffenden Dipols ausgehen) schreiben. Dies ist nur ein formaler Unterschied gegenüber der Sommerfeldschen Schreibweise als Zylinderwellen, ermöglicht aber, die im weiteren erforderliche zweimalige Integration (längs der Leitlinien der induzierenden, bzw. der induzierten Leitung) sogleich auszuführen.

a) Horizontalachsiger Dipol

Das Achsenkreuz liege gemäß Fig. 2, und in dem oberhalb der Erdoberfläche ($y_0 > 0$) gelegenen Punkte (x_0, y_0, z_0)

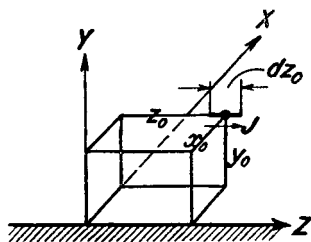


Fig. 2

sei ein wechselstromdurchflossenes horizontales Leiterstück von der Länge dz_0 vorhanden. Das von diesem Element in einem Aufpunkt (x, y, z) oberhalb der Erdoberfläche erzeugte „resultierende“ elektrische Feld (Luftfeld) bezeichnen wir mit $d\mathfrak{E}_{\text{res}}^{(2)}$. Das resultierende Feld kann zerlegt werden in einen primären Anteil $d\mathfrak{E}^*$ und einen reflektierten Anteil $d\mathfrak{E}^{(2)}$:

$$(1) \quad d\mathfrak{E}_{\text{res}}^{(2)} = d\mathfrak{E}^* + d\mathfrak{E}^{(2)}.$$

Die Formeln für $d\mathfrak{E}^*$ und $d\mathfrak{E}^{(2)}$, die zunächst noch die Verschiebungsströme in der Luft mitberücksichtigen, entnehmen wir einer früheren Arbeit.^{1,2)}

Dort wurden mit $-k_1$, bzw. $-k_2$ die Schwingungskonstanten der Erde bzw. Luft und mit $A dz_0$ das Dipolmoment bezeichnet:

$$(2a) \quad k_1^2 = \frac{-4\pi i \omega \sigma_1 + \epsilon_1 \omega^2}{c^2} \approx -\frac{4\pi i \omega \sigma_1}{c^2}$$

(σ_1, ϵ_1 : Leitfähigkeit bzw. Dielektrizitätskonstante der Erde),

$$(2b) \quad k_2^2 = \frac{-4\pi i \omega \sigma_2 + \epsilon_2 \omega^2}{c^2} \approx \frac{\omega^2}{c^2}$$

(σ_2, ϵ_2 : Leitfähigkeit bzw. Dielektrizitätskonstante der Luft).

$$(3) \quad A dz_0 = -\frac{i \omega J d z_0}{c^2 k_2^2} \left(\approx \frac{J d z_0}{i \omega} \right).$$

Es gilt nun³⁾:

$$(4) \quad \begin{cases} d\mathfrak{E}_x^* = A dz_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{i k_2 r}}{r}, & d\mathfrak{E}_y^* = A dz_0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{i k_2 r}}{r}, \\ d\mathfrak{E}_z^* = A dz_0 \left(k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{i k_2 r}}{r}, \\ r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}. \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} d\mathfrak{E}_{x(y,z)}^{(2)} \\ = A dz_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{i\lambda[(x-x_0)\cos\varphi + (z-z_0)\sin\varphi] - (y+y_0)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \\ \cdot f_{x(y,z)} \lambda d\lambda \end{cases}$$

1) Über die Felder der Wechselstromleitung mit Erde und der Horizontalantenne“, ENT 5. S. 295 u. 515. 1927.

2) Es werden die Bezeichnungen der in Anm. 1, S. 965 zitierten Arbeit, in der das sekundäre Luftfeld mit $\mathfrak{E}^{(2)}$ und das Erdfeld mit $\mathfrak{E}^{(1)}$ bezeichnet wurde, beibehalten.

3) a. a. O., Anm. 1, S. 969, Gl. (31a), (32).

mit

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f_x &= \frac{\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{II}} \cdot \frac{k_2^2 \sqrt{I} + (k_1^2 - k_2^2) \sqrt{II}}{k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I}} \\ &= \frac{\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{II}} \left(1 - \frac{2 k_2^2 \sqrt{II}}{k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I}} \right) \\ f_y &= i \lambda \sin \varphi \frac{k_1^2 \sqrt{II} - k_2^2 \sqrt{I}}{k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I}} \\ &= i \lambda \sin \varphi \left(1 - \frac{2 k_2^2 \sqrt{I}}{k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I}} \right) \\ f_z &= \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{II}} \cdot \frac{k_2^2 \sqrt{I} + (k_1^2 - 2 k_2^2) \sqrt{II}}{k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{II}} \cdot \frac{\sqrt{II} - \sqrt{I}}{\sqrt{II} + \sqrt{I}} \\ &= - \frac{k_2^2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{II}} + \frac{2 k_2^2}{\sqrt{I} + \sqrt{II}} - \frac{2 k_2^2 \lambda^2 \sin^2 \varphi}{k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I}}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(7) \quad \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = \sqrt{I}, \quad \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = \sqrt{II}.^{1)}$$

Wir führen nun zunächst (5), (6) in eine für die weitere Rechnung geeignete Form über, und ziehen hierzu die bekannte Formel:

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{i\lambda x \cos \varphi + i\lambda z \sin \varphi - y \sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(Aufspaltung einer Kugelwelle in ebene, i. a. gedämpfte Wellen) heran. Mittels (8) kann man in (5) die Integration über die ersten Summanden $\left(\frac{\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{II}} \right)$ usw.) der umgeformten Ausdrücke (6) sogleich vollziehen und erhält nach elementaren Zwischenrechnungen

$$(9) \quad d\mathfrak{E}^{(2)} = -d\mathfrak{E}^{**} + d\mathfrak{E}',$$

1) Bezüglich der Vorzeichen: In diesen Formeln ist k_1 eine Zahl vom arc $3\pi/4$ und k_2 eine negative Zahl ($-2\pi/k_2$ = Wellenlänge in Luft). Die Quadratwurzeln \sqrt{I} und \sqrt{II} sind stetige Funktionen von λ , für welche $\sqrt{I} \approx \lambda$, $\sqrt{II} \approx \lambda$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt; für $\lambda = |k_2|$ ist unter $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ eine positivimaginäre Zahl verstanden. Aus diesen Bestimmungen folgt insbesondere:

$$(7a) \quad (\sqrt{\lambda^2 - k^2})_{\lambda=0} = -ik.$$

mit

$$(10) \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{E}^{**} &= \left(A dz_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho}, \quad A dz_0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho}, \right. \\ &\quad \left. A dz_0 \left(k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right), \\ \varrho &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 + (z - z_0)^2} \end{aligned} \right.$$

und

$$(11) \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{E}' &= 2 A k_2^2 dz_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \lambda d\lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^v}{N}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^v \sqrt{I}}{N\sqrt{II}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^v}{N} + \frac{e^v}{\sqrt{I} + \sqrt{II}} \right); \end{aligned} \right.$$

zur Abkürzung ist hierin gesetzt:

$$(12) \quad k_1^2 \sqrt{II} + k_2^2 \sqrt{I} = N, \quad i\lambda [(x - x_0) \cos \varphi + (z - z_0) \sin \varphi] \\ - (y + y_0) \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = v.$$

Durch (9), (10) wird das reflektierte Feld $d\mathfrak{E}^{(2)}$ zerlegt in $-d\mathfrak{E}^{**}$, das Primärfeld eines zu dem gegebenen Dipole spiegelbildlichen und mit 180° Phasenverschiebung oszillierenden Dipols und $d\mathfrak{E}'$, einen Bestandteil, der bei ideal spiegelnder Erde ($\sigma_1 = \infty$, $|k_1| = \infty$) verschwindet.

Setzt man (4), (9), (10) in (1) ein, so folgt, mit \mathfrak{f} als Einheitsvektor der positiven z -Richtung:

$$d\mathfrak{E}_{\text{res}}^{(2)} = A dz_0 \text{grad} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) \\ + \mathfrak{f} A k_2^2 dz_0 \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) + d\mathfrak{E}',$$

oder, da hier $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z_0}$ ist,

$$(13) \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{E}_{\text{res}}^{(2)} &= -A dz_0 \text{grad} \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) \\ &\quad + \mathfrak{f} A k_2^2 dz_0 \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) + d\mathfrak{E}' \end{aligned} \right.$$

(elektrisches Luftfeld eines horizontalachsigen Dipols).

b) Vertikalachsiger Dipol

Das stromdurchflossene Leiterelement (Fig. 3) von der Länge dy_0 liege wieder in (x_0, y_0, z_0) mit $y_0 > 0$. Das von ihm in der Luft, bzw. in der Erde hervorgerufene Feld läßt

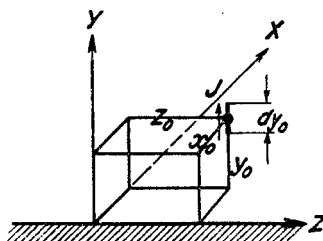


Fig. 3

sich aus je einer Hertzschen Funktion $\Pi^{(2)}$ bzw. $\Pi^{(1)}$ ableiten, und zwar ist, mit \mathbf{j} als Einheitsvektor der positiven y -Richtung:

$$(14a) \quad d\mathcal{E}_{\text{res}}^{(1)} = A dy_0 \text{grad} \frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} + \mathbf{j} A k_1^2 dy_0 \Pi^{(1)}, \quad y \leq 0,$$

$$(14b) \quad d\mathcal{E}_{\text{res}}^{(2)} = A dy_0 \text{grad} \frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial y} + \mathbf{j} A k_2^2 dy_0 \Pi^{(2)}, \quad y \geq 0;$$

hierbei gilt für die Hertzschen Funktionen¹⁾:

$$(15a) \quad \begin{cases} \Pi^{(1)} = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}) e^{y\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \\ \quad \cdot \frac{2k_2^2}{N} \lambda d\lambda, \quad y \leq 0, \end{cases}$$

$$15b) \quad \begin{cases} \Pi^{(2)} = \frac{e^{i k_2 r}}{r} + \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}) e^{-(y+y_0)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \\ \quad \cdot \frac{k_1^2 \sqrt{\Pi} - k_2^2 \sqrt{I}}{N} \cdot \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\Pi}}, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Zur Aufspaltung der hierin enthaltenen Zylinderwellen in ebene Wellen dient die folgende Integraldarstellung der Besselschen Funktion J_0 :

$$(16) \quad J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda[(x-x_0)\cos\varphi + (z-z_0)\sin\varphi]} d\varphi.$$

1) A. Sommerfeld, a. a. O.

Setzt man (16) in (15b) ein, zerlegt den dritten Faktor des Integranden folgendermaßen:

$$\frac{k_1^2 \sqrt{II} - k_2^2 \sqrt{I}}{N} = 1 - \frac{2k_2^2 \sqrt{I}}{N}$$

und wendet die Gl. (8) an, so folgt:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} II^{(2)} &= \frac{e^{ik_2 r}}{r} + \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \\ &- \frac{2k_2^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{i\lambda [(x-x_0)\cos\varphi + (z-z_0)\sin\varphi] - (y+y_0)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \\ &\cdot \frac{\sqrt{I}}{N\sqrt{II}} \lambda d\lambda. \end{aligned} \right.$$

Durch (17) wird die Hertzsche Funktion des resultierenden Luftfeldes zerlegt in die Hertzsche Funktion des gegebenen Dipols und die seines Spiegelbildes, nebst einem Bestandteil, der bei ideal spiegelnder Erde verschwindet. Setzt man (17) in die Gl. (14b) ein, so folgt, in formaler Analogie zu (13), (11):

$$(18) \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{E}_{\text{res}}^{(2)} &= -A dy_0 \text{grad} \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) \\ &+ j A k_2^2 dy_0 \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} + \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) + d\mathfrak{E}'', \end{aligned} \right.$$

$$(19) \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{E}'' &= -2 A k_2^2 dy_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \lambda d\lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^v \sqrt{I}}{N\sqrt{II}}, \right. \\ &\left. \left(k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{e^v \sqrt{I}}{N\sqrt{II}}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \frac{e^v \sqrt{I}}{N\sqrt{II}} \right) \end{aligned} \right.$$

(elektrisches Luftfeld eines vertikalachsigen Luftdipols).

Die Gl. (14a), (15a) liefern das Erdfeld eines in Luft befindlichen Dipols; um daraus das hier wegen der Erdungszuleitungen unserer Wechselstromleitung benötigte Luftfeld eines in der Erde, in (x_0, y_0, z_0) , $y_0 < 0$, befindlichen Dipols abzuleiten, hat man in ihnen die Materialkonstanten k_1 und k_2 zu vertauschen und die Vorzeichen der y - und z -Koordinaten, bzw. -Komponenten umzukehren und erhält:

$$\left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{E}''' &= 2 A k_2^2 dy_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \lambda d\lambda \\ &\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{i\omega}}{N}, \left(k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{e^{i\omega}}{N}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{i\omega}}{N} \right), \\ w &= i \lambda [(x - x_0) \cos \varphi + (z - z_0) \sin \varphi] - y \sqrt{H} + y_0 \sqrt{I} \end{aligned} \right.$$

(elektrisches Luftfeld eines vertikalachsigen Erddipols).

3. Die Formeln für den Gegeninduktionskoeffizienten zweier parallelen Einfachleitungen

Wir haben jetzt über die von den einzelnen Elementen unserer Leitung erzeugten Felder zu summieren. Die Leitung liege in der y - z -Ebene des Koordinatensystems, so daß $x_0 = 0$ zu setzen ist; die z -Koordinaten der beiden Erdzuleitungen seien mit $z_{0,1}$ und $z_{0,2}$ bezeichnet. Um das gesamte im Aufpunkt (x, y, z) vorhandene Feld $\mathfrak{E}(x, y, z)$ zu erhalten, hat man $\int d\mathfrak{E}_{\text{res}}^{(2)}$ längs der Wechselstromleitung (Fig. 1) zu bilden; man hat also den mit $e^{-ik_1 y_0}$ multiplizierten Ausdruck (20) für $z_0 = z_{0,1}$ von $y_0 = -\infty$ bis $y_0 = 0$ und für $z_0 = z_{0,2}$ von $y_0 = 0$ bis $y_0 = -\infty$ zu integrieren, den Ausdruck (18) für $z_0 = z_{0,1}$ von $y_0 = 0$ bis $y_0 = \eta$ und für $z_0 = z_{0,2}$ von $y_0 = \eta$ bis $y_0 = 0$, schließlich den Ausdruck (13) für $y_0 = \eta$ von $z_0 = z_{0,1}$ bis $z_0 = z_{0,2}$. Hierbei fällt das Integral über den ersten Summanden rechts in (13) und (18)

$$- A \left[\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right]_{z_{0,1}}^{z_{0,2}}, \quad y_0 = 0$$

fort, da für $y_0 = 0$ $r = \varrho$ ist. Für die hauptsächlich in Betracht kommende z -Komponente von $\mathfrak{E}(x, y, z)$ ergibt sich daher:

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= A k_2^2 \int_{z_{0,1}}^{z_{0,2}} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 \varrho}}{\varrho} \right) dz_0 \\ &\quad + \int_{z_{0,1}}^{z_{0,2}} d\mathfrak{E}_z' \Big|_{y_0=\eta} - \left[\int_{-\infty}^0 d\mathfrak{E}_z''' + \int_0^\eta d\mathfrak{E}_z'' \right]_{z_{0,1}}^{z_{0,2}}. \end{aligned} \right.$$

Wir befassen uns hier nur mit den Induktionswirkungen technischer Wechselströme von niederer Frequenz und setzen alle Koordinaten als klein gegen die entsprechende Wellen-

länge $\lambda = \frac{2\pi}{-k_2}$ voraus, also $(z_{0,2} - z_{0,1}) |k_2| \ll 1$ usw. Man darf daher $k_2 = 0$ setzen $\left(A k_2^2 = -\frac{i \omega J}{c^2} \right)$ und erhält für \mathfrak{E}_z , wenn man die Ausdrücke (11), (18), (19) einsetzt ($\sqrt{II} = \lambda$, $N = k^2 \lambda$, $x_0 = 0$) und statt k_1 von jetzt ab k schreibt,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z = & -\frac{i \omega J}{c^2} \\ & \cdot \left\{ \int_{z_{0,1}}^{z_{0,2}} dz_0 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{i\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+\eta)]} \right. \right. \\ & \quad \cdot \left. \left(-\frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{k_2^2 \lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2 + \lambda}} \right) \lambda d\lambda \right] \\ & - \left[-\int_{-\infty}^0 dy_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \right. \\ & \quad \cdot \int_0^\infty e^{i\lambda [x \cos \varphi + (z-z_0) \sin \varphi] - y\lambda + y_0 (\sqrt{\lambda^2 - k^2} - ik)} \frac{\lambda d\lambda}{k^2} \\ & + \int_0^\eta dy_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ & \quad \cdot \left. \left. \int_0^\infty e^{i\lambda [x \cos \varphi + (z-z_0) \sin \varphi] - (y+y_0)\lambda} \frac{\sqrt{II} d\lambda}{k^2} \right]_{z_{0,1}}^{z_{0,2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die in einer zweiten, der z -Achse parallelen Leitung (Fig. 1) mit den Endpunkten (x, y, z_1) und (x, y, z_2) induzierte Spannung ist gleich

$$(23) \quad E = \int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{E}_z dz = -M \frac{\partial J}{\partial t} = -i \omega J M,$$

so daß der Gegeninduktionskoeffizient M durch Integration des Klammerausdruckes $\{\dots\}$ von (22) nach z erhalten wird. Um nun die drei (φ, λ) -Doppelintegrale in (22) unter dem Integralzeichen nach z und z_0 bzw. η_0 integrieren zu dürfen, hat man einige formale Operationen vorzunehmen. In dem ersten Doppelintegral in (22) verlegen wir den φ -Integrations-

weg in eine die Punkte $i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) und $2\pi + i\varepsilon$ verbindenden Gerade¹⁾ und schreiben es so um:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} J^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} d\varphi \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+\eta)]} \\ &\cdot \left[\left(\frac{-\lambda^2 \sin^2 \varphi}{k^2 \lambda} + \frac{1}{-ik} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2 + \lambda}} - \frac{1}{-ik} \right) \right] \lambda d\lambda. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe der für $k=0$ zu nehmenden Formel (8) ergibt sich hier der erste Bestandteil als gleich

$$-\frac{2}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} \frac{1}{\varrho} + \frac{2}{ik} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varrho}$$

und der zweite Bestandteil, dessen Integrand für $\lambda=0$ so wie λ^2 verschwindet²⁾, darf unter dem \int -Zeichen nach z und z_0 integriert werden, also

$$(24a) \left\{ \begin{aligned} \iint J^{(1)} dz dz_0 &= -\frac{2}{k^2 \varrho} + \frac{2}{ik} \frac{\partial}{\partial y} \iint \frac{dz dz_0}{\varrho} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^\infty e^{i\lambda [x \cos \varphi + (z-z_0) \sin \varphi] - (y+\eta) \lambda} \\ &\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2 + \lambda}} + \frac{1}{ik} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Ähnlich wird für das dritte Integral in (22):

$$(25) \left\{ \begin{aligned} J^{(3)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+y_0)]} \frac{\sqrt{I} d\lambda}{k^2} = \frac{2}{ik \varrho} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+y_0)]} \frac{\sqrt{I} + ik}{k^2} d\lambda. \end{aligned} \right.$$

$$(25a) \left\{ \begin{aligned} \int_0^\eta J^{(3)} dy_0 &= \frac{2}{ik} \int_0^\eta \frac{dy_0}{\varrho} \\ &- \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+y_0)]} \frac{\sqrt{I} + ik}{k^2 \lambda} d\lambda \right]_{y_0=0}^{y_0=\eta}. \end{aligned} \right.$$

1) ε muß so klein gewählt werden, daß der Exponent

$$ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - y - \eta$$

für alle Punkte des neuen Integrationsweges negativen Realteil behält; andernfalls würde in (24) das Integral nach λ divergieren.

2) Vgl. Anm. 1, S. 970, (Gl. (7a)).

Mit Hilfe der Gl. (24a), (25a) erhält man aus (22), (23) für M folgenden Ausdruck:

$$26) \left\{ M = \frac{1}{e^2} [\Phi(z_2 - z_{0,2}) - \Phi(z_2 - z_{0,1}) - \Phi(z_1 - z_{0,2}) + \Phi(z_1 - z_{0,1})], \right.$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi(z - z_0) = & \int dz \int dz_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} \right) + \frac{2}{ik} \frac{\partial}{\partial y} \iint \frac{dz dx_0}{\varrho} - \frac{2}{k^2 \varrho} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+\eta)]} \\ & \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} + \lambda} + \frac{1}{ik} \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - y]} \frac{\lambda d\lambda}{k^2 (\sqrt{\lambda^2 - k^2} - ik)} \\ & - \frac{2}{ik} \int_0^\eta \frac{dy_0}{\varrho} \\ & + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{\lambda [ix \cos \varphi + i(z-z_0) \sin \varphi - (y+y_0)]} \right. \\ & \left. \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2} + ik}{k^2 \lambda} d\lambda \right]_{y_0=0}^{y_0=\eta}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke haben die beiden letzten Doppelintegrale den gleichen Integranden; weiter ist

$$\int^z dz \int^{z_0} dz_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} \right) = - (z - z_0) \log \frac{z - z_0 + r}{z - z_0 + \varrho} + r - \varrho,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int^z dz \int^{z_0} \frac{dx}{\varrho} = \frac{y + \eta}{z - z_0 + \varrho},$$

$$\int_0^\eta \frac{dy_0}{\varrho} = \log \frac{y + \eta + \varrho}{y + \varrho_0} \quad (r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + (y + \eta)^2 + (z - z_0)^2}, \quad \varrho_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2})$$

so daß sich nach elementaren Vereinfachungen ergibt

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \Phi(z) &= z \log \frac{\varrho + z}{r + z} + r - \varrho + \frac{2}{ik} \frac{y + \eta}{\varrho + z} - \frac{2}{k^2 \varrho} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi + i\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda u} (\sqrt{\lambda^2 - k^2} - \lambda + ik) \frac{d\lambda}{(-k^2)\lambda} \\ &- \frac{2}{ik} \log \frac{y + \eta + \varrho}{y + \varrho_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-\lambda u} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2} + ik}{k^2 \lambda} d\lambda. \\ &(u = -ix \cos \varphi - iz \sin \varphi + y + \eta). \end{aligned} \right.$$

4. Zurückführung auf den Gegeninduktionskoeffizienten zweier einseitig unendlich langer Parallelleitungen

Die Gl. (26), (27) lösen formal die Aufgabe, den Gegeninduktionskoeffizienten zwischen einer ideal geerdeten Wechselstromleitung und einem ihr parallelen Leiterstücke zu bestimmen; im weiteren handelt es sich nur noch darum, die Doppelintegrale in (27) durch solche Näherungsausdrücke zu ersetzen, welche elementare Funktionen der Leitungsdaten sind. Diese Rechnung bringen wir in einem Anhang (II. Teil) und fassen hier nur für die einzelnen zu unterscheidenden Fälle die Ergebnisse zusammen. Wir gehen dabei aus von dem für $|z| \rightarrow \infty$ geltenden Näherungsausdrücke.

Nach Gl. (28') des II. Teils gilt, bis auf einen Fehler von der Größenordnung $1/z$,

$$(28) \quad \Phi(z) \approx -|z| M_\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|} = \pm 1, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

wobei gesetzt ist

$$(29) \left\{ \begin{aligned} M_\varepsilon &= 2 \left[\frac{1-\varepsilon}{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + (y+\eta)^2}{x^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{\varepsilon}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_\varepsilon^2} d\lambda \right]^{1)}, \\ \zeta_\varepsilon &= -ik(y + \eta + i\varepsilon x), \quad \varepsilon = \frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|}. \end{aligned} \right.$$

Mittels dieser Formeln bestimmen wir nun den Gegeninduktionskoeffizienten zwischen zwei Leitungen, die gemäß Fig. 4

1) Vgl. Anm. 1, S. 979.

zueinander liegen (d. h. die überragenden Teile a , b der induzierenden Leitung mögen sehr lang sein.)

Mit den Bezeichnungen von Fig. 4 ist in (26) zu setzen:

$$\begin{aligned} z_2 - z_{0,2} &= -a, & z_2 - z_{0,1} &= b + l, & z_1 - z_{0,2} &= -(a + l), \\ & & z_1 - z_{0,1} &= b, \end{aligned}$$

daher:

$$M = \frac{1}{c^2} (\Phi(-a) - \Phi(b + l) - \Phi(-a - b) + \Phi(b)).$$

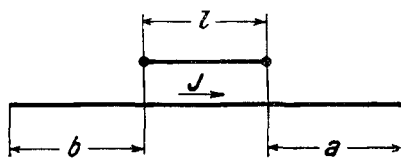


Fig. 4

Wendet man hierauf die asymptotische Formel (28) an, so folgt für $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$

$$M \rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot (-aM_{-1} + (b + l)M_1 + (a + l)M_{-1} - bM_1) = l \frac{1}{c^2} (M_1 + M_{-1}).$$

Die Größe

$$(30) \quad \begin{cases} M(x, y, z) = M_1 + M_{-1} = 2 \left(\log \sqrt{\frac{x^2 + (y + \eta)^2}{x^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{1}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_2^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{\zeta_1^2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_1^2} d\lambda + \frac{1}{\zeta_2^2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_2^2} d\lambda \right)^{1)} \end{cases}$$

ist daher (abgesehen von dem Faktor $1/c^2$) gleich dem Gegeninduktionskoeffizienten zwischen einer unendlich langen Leitung und einem ihr parallelen Leiterstück von der Länge 1, eine Formel, die schon aus der Theorie der Induktionswirkungen

1) Hätte unsere Theorie auch die längs des horizontalen Teils der induzierenden Leitung vorhandene Leitungsdämpfung berücksichtigt, so würde hier zu dem ersten Klammersummanden noch der Faktor

$$1 + \frac{\gamma^2 c^2}{\omega^2}$$

hinzutreten, mit γ als komplexem Dämpfungskoeffizienten; alle sonstigen Änderungen wären aber vernachlässigbar klein.

der unendlich langen Wechselstromleitung (Anm. 1, S. 965) bekannt ist.

Berechnet man in der eben durchgeführten Weise die Gegeninduktion zwischen zwei einseitig unendlich langen Lei-

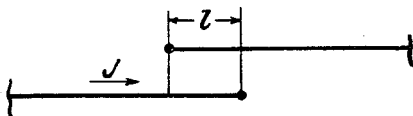


Fig. 5a

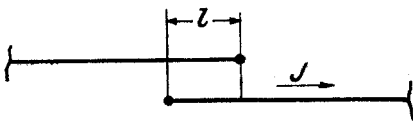


Fig. 5b

tungen, die einander nur auf eine endliche Distanz l überlappen (Figg. 5a, b), so folgt für die Anordnung nach Fig. 5.

$$M = \frac{1}{c^2} (l M_1 - \Phi(-l)),$$

und für die Anordnung nach Fig. 5b

$$M = \frac{1}{c^2} (l M_{-1} - \Phi(l)),$$

und daher, da beide Anordnungen das gleiche M erzeugen,

$$(31) \quad \Phi(l) - l M_{-1} = \Phi(-l) - l M_1, \quad l \geq 0.$$

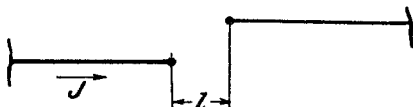


Fig. 6

Weiter folgt für den Gegeninduktionskoeffizienten zweier einseitig ins Unendliche gehender Leitungen, die sich nicht überlappen (Fig. 6) und deren nahe Enden in der z -Richtung den Abstand l haben,

$$(32) \quad M = \frac{1}{c^2} (-\Phi(l) - l M_1) = \frac{1}{c^2} (-\Phi(-l) - l M_{-1}).$$

Es empfiehlt sich nun, an Stelle von $\Phi(z)$, welches keine unmittelbare physikalische Bedeutung hat, die letzte Größe ein-

zuführen, die, wie aus ihrer physikalischen Bedeutung hervorgeht, immer klein ist und zufolge (32) nicht vom Vorzeichen ihres Argumentes abhängt; wir setzen also

$$(33) \quad \Psi(|z|) = -\Phi(z) - |z| M_\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{z}{|z|} = \pm 1.$$

Bei der Einführung von (33) in Gl. (26) sind wieder die beiden Fälle sich überlappender bzw. nicht überlappender Leitungen gesondert zu betrachten und man erhält, mit (30),

$$(34) \quad \left\{ M = \frac{1}{c^2} \{ l M - [\Psi(|z_2 - z_{0,2}|) - \Psi(|z_2 - z_{0,1}|) - \Psi(|z_1 - z_{0,2}|) + \Psi(|z_1 - z_{0,1}|)] \}, \right.$$

wobei $l \geq 0$ die Länge des überlappten Stückes bezeichnet. Für die Funktion $\Psi(|z|)$ folgen dann aus den Formeln (29'), (33'), (34') des Anhanges die nachstehenden Entwicklungen, in denen nur die Glieder höchster Größenordnungen angeschrieben wurden:

$$(35) \quad \Psi(|z|) \approx \frac{1}{k^2 |z|} + \frac{y + 3\eta}{ik |z|} + \frac{y\eta}{|z|}, \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty,$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &\approx \frac{2}{r_0 + |z|} \left(\frac{|z|}{r_0 k^2} - \frac{y + \eta}{ik} + y\eta \right) \\ &+ \frac{2\eta}{ik r_0} (r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}), \quad \text{für } |kx| \gg 1, \end{aligned} \right.$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &\approx |z| \log \frac{-i\gamma k(r + |z|)}{2} - \frac{2}{ik} \log(-i\gamma k(\rho_0 + y)) \\ &+ (y + \eta) \log \frac{-i\gamma k(\rho + y + \eta)}{4}, \quad |kx| \ll 1, \quad |kz| \ll 1 \\ &(r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + (y + \eta)^2 + z^2}, \\ &\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \gamma = 1,7811 \dots). \end{aligned} \right.$$

Falls, wie stets in den Anwendungen, $\frac{y + \eta}{\sqrt{x^2 + z^2}} \ll 1$ ist, kann $\Psi(|z|)$ durch seinen Grenzwert für $y = \eta = 0$ ersetzt werden; die Rechnung (II. Teil, § 5, Gl. 42') gibt

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &= \frac{2|z|}{k^2 r_0 (r_0 + |z|)} - \frac{2}{ik} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2} - 2|z| \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{(\lambda^2 + k^2 x^2)^{3/2}}, \\ y &= \eta = 0, \quad (r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}), \end{aligned} \right.$$

und diese Formel ermöglicht, den Verlauf von $\Psi(|z|)$, abgesehen von der unmittelbaren Nachbarschaft der induzierenden Leitung, genau zu verfolgen. Reihenentwicklungen des letzten Ausdruckes sind in § 5 des II. Teiles enthalten.

5. Ein Beispiel

Als Anwendungsbeispiel für diese Formeln sei die Gegeninduktion zwischen zwei gleich langen, einander auf ihre ganze Länge parallel laufenden Leitungen (Fig. 7) berechnet.

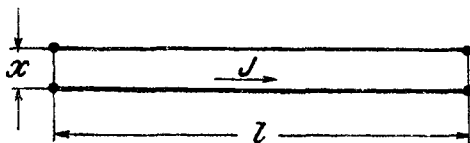


Fig. 7

Für den Gegeninduktionskoeffizienten folgt jetzt aus (34)

$$(39) \quad M = \frac{1}{c^2} \{ l M + 2 \Psi(l) - 2 \Psi(0) \}.$$

Die induzierende Leitung führe z. B. 50 periodigen Wechselstrom ($\omega = 314 \text{ sec}^{-1}$); setzt man weiter für σ den Wert der Leitfähigkeit des trockenen Erdbodens

$$\frac{\sigma}{c^2} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ sec/cm}^{-2},$$

so folgt aus (2a):

$$k = e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot 1,41 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}, \quad |k| = 1,41 \text{ km}^{-1}.$$

Beide Leitungen mögen in der üblichen Höhe über dem Erdboden verlaufen und es sei z. B. $y = \eta = 6 \text{ m} = 0,006 \text{ km}$, so daß die Zahlen $|ky|$, $|k\eta|$ von der Größenordnung 0,01, also klein gegen 1 sind; die Leitungslänge l sei groß, d. h. $|kl| \ll 1$, und es sind nun noch bezüglich des Leitungsabstandes x zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $|kx| \ll 1$, oder $\gg 1$ ist.

Liegen erstens beide Leitungen sehr nahe beieinander ($|kx| \ll 1$), so ist in (39) für $\Psi(0)$ die Formel (37) und für $\Psi(l)$ ($|kl| \gg 1$) die Formel (35) zu verwenden; man erhält näherungsweise ($\eta = y$):

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{l}{c^2} \left[M(x, y, \eta) + \frac{2}{k^2 l^2} + \frac{4}{i k l} \log(-i \gamma k (\sqrt{x^2 + y^2} + y)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4 y}{l} \log \frac{-i \gamma k (\sqrt{x^2 + 4 y^2 + 2 y})}{4} \right], \\ |k l| &\gg 1, \quad |k x| \ll 1, \quad |k y| = |k \eta| \ll 1, \end{aligned} \right.$$

und dieser Ausdruck zeigt, wie wenig bei großem l und kleinem x der Gegeninduktionskoeffizient pro Längeneinheit verschieden ist von $M(x, y, \eta)$, dem entsprechenden Koeffizienten, berechnet bei unendlich langer induzierender Leitung.

Ist zweitens $|k x| \gg 1$, so hat man für $\Psi(l)$ und $\Psi(0)$ entweder Gl. (36), oder auch, falls $\frac{y + \eta}{\sqrt{x^2 + l^2}} \ll 1$, die Gl. (38) anzuwenden, und erhält beide Male übereinstimmend in erster Näherung

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} M &\approx \frac{l}{c^2} \left[M(x, y, \eta) + \frac{4}{k^2 \sqrt{l^2 + x^2} (l + \sqrt{l^2 + x^2})} \right], \quad |k l| \gg 1, \\ &\quad \frac{y + \eta}{\sqrt{x^2 + l^2}} \ll 1, \quad |k x| \gg 1, \end{aligned} \right.$$

Für $\frac{y + \eta}{|x|} \ll 1$ darf in dem spezifischen Gegeninduktionskoeffizienten M ebenfalls $y = \eta = 0$ gesetzt werden, und aus Gl. (30) folgt dann nach einigen Umformungen

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} M(x, y, \eta) &\approx M(x, 0, 0) = -\frac{4}{k^2 x^2} + 2 \pi i \frac{H_1^{(1)}(k|x|)}{k|x|} \\ &\approx -\frac{4}{k^2 x^2} \\ &\text{für } |k x| \gg 1, \quad \frac{y + \eta}{|x|} \ll 1, \end{aligned} \right.$$

und dies gibt, in (41) eingesetzt,

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} M &\approx \frac{l}{c^2} \cdot \frac{-4 l}{k^2 x^2 \sqrt{l^2 + x^2}}, \quad |k l| \gg 1, \quad |k x| \gg 1, \\ &\quad \frac{y + \eta}{\sqrt{x^2 + l^2}} \ll 1. \end{aligned} \right.$$

Aus dem Vergleich von (42) und (43) folgt nun: Der spezifische (d. h. auf die Längeneinheit der induzierten Leitung bezogene) Gegeninduktionskoeffizient der Anordnung nach Fig. 7 ist bei großem Leitungsabstand x in erster Näherung gleich $\frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$ mal dem für eine unendlich lange induzierende Leitung berechneten spezifischen Gegeninduktionskoeffizienten $M(x, y, \eta)$.

6. Weitere Gegeninduktionskoeffizienten

In gleicher Weise wie im Falle paralleler Leitungen kann auch die Gegeninduktion zwischen windschiefen Leitungen berechnet werden. Z. B. ergibt sich für den Gegeninduktionskoeffizienten zwischen der wie früher beidseitig geerdeten

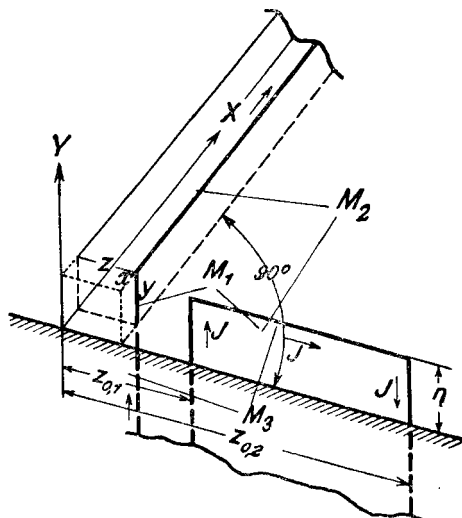


Fig. 8

Leitung nach Fig. 8 und einem vertikalen, bis zur Erde reichenden Luftdrahte von der Länge y und den Endpunktskoordinaten $(x, 0, z)$ und (x, y, z) :

$$(44a) \quad M_1 = \frac{1}{c^2} [F(z - z_{0,1}) - F(z - z_{0,2})].$$

Hierbei ist gesetzt

$$(44b) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) &= \int_0^\eta dy_0 \int_0^y dy \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho} \right) - \frac{2}{ik} \int_0^y \frac{dy}{\varrho_0} \\ &= (y + \eta) \log \frac{\varrho + y + \eta}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{y - \eta}{2} \log \frac{r - y + \eta}{r + y - \eta} \\ &\quad - \frac{2}{ik} \log \frac{\varrho_0 + y}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \\ (r &= \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + (y + y_0)^2 + z^2}, \\ &\quad \varrho_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \end{aligned} \right.$$

Ähnlich lautet der Gegeninduktionskoeffizient zwischen unserer induzierenden Leitung und einer zu ihrer Ebene senkrechten, im Punkte (x, y, z) beginnenden und ins Unendliche gehenden horizontalen Leitung (Fig. 8)

$$(45a) \quad M_2 = \frac{1}{c^2} [G(z - z_{0,1}) - G(z - z_{0,2})]$$

mit

$$(45b) \quad \left\{ \begin{aligned} G(z) = & -\frac{2}{k^2 q} - \frac{2}{ik} \int_0^{\eta} \frac{dy_0}{q} + I_v = -\frac{2}{k^2 q} \\ & - \frac{2}{ik} \log \frac{q + y + \eta}{q_0 + y} + I_v; \end{aligned} \right.$$

hierin ist wieder I_v durch (23'), (24') gegeben.

Schließlich kann man, um einen Anhaltspunkt für die Wirkung der Erdung der induzierten Leitung zu gewinnen, auch formal den Gegeninduktionskoeffizienten zwischen unserer Primärleitung und einem vertikal ins Erdinnere [von (x, y, z) nach $(x, -\infty, z)$ führenden] Drahte (Fig. 8) bestimmen. Mittels der Formeln für das Erdfeld vertikalachsiger Dipole und der hier nicht aufgeführten Formeln für das Erdfeld horizontalachsiger Luftdipole¹⁾ ergibt sich für diesen Koeffizienten [vgl. auch Gl. (46'')]

$$(46a) \quad M_3 = \frac{1}{c^2} [H(z - z_{0,1}) - H(z - z_{0,2})]$$

mit

$$(46b) \quad H(z) = -\frac{2}{ik} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda}, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Um nun den Gegeninduktionskoeffizienten zwischen zwei ideal geerdeten Parallelleitungen zu erhalten, hätte man in (26) $\Phi(z)$ zu ersetzen durch $\Phi(z) + F(z) + H(z)$; das so gewonnene M , welches, wie schon aus allgemeinen Sätzen hervorgeht, symmetrisch in y und η ist, weicht zahlenmäßig nur unwesentlich ab von (26), (27).

Für den Übergang zu dem praktischen Maßsystem ist zu bemerken: Werden in unseren Formeln, nach Streichung des Faktors $1/c^2$, die Koordinaten x, y, η, z in km und k (wie im vorigen Paragraphen) in km eingesetzt, so ergibt sich M in 10^{-4} Henry bzw. der spezifische Koeffizient M in 10^{-4} Henry/km.

1) Gl. (30), (30a) der in Anm. 1, S. 969 zitierten Arbeit.

II. Teil

Berechnung von $\Phi(x)$ [Gl. (27)] und $\Psi(|x|)$ [Gl. (33)]

1. Das Integral

$$(1') \quad I_h = \frac{2}{i k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2} - \lambda}{i k} + 1 \right) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

(herrührend von dem horizontalen Teile der induzierenden Wechselstromleitung)

mit

$$(2') \quad u = y + \eta - ix \cos \varphi - iz \sin \varphi.$$

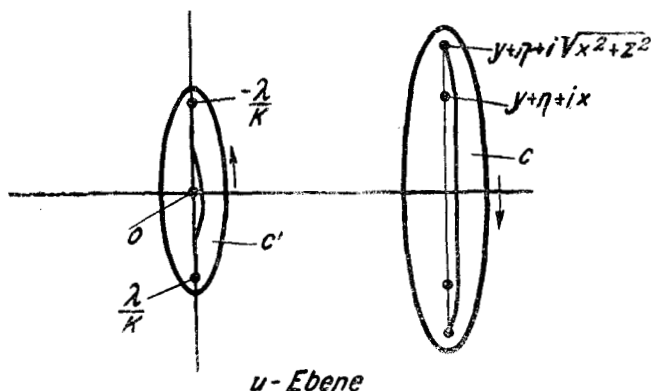


Fig. 9

Nach Anm. 1, S. 976 ist der Realteil von u positiv, d. h.

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \leq \arg u \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0;$$

wenn φ von $i\varepsilon$ nach $2\pi + i\varepsilon$ geht, durchläuft also u in der komplexen u -Ebene eine *rechts* von der imaginären Achse gelegene Ellipse C (Fig. 9), und zwar in negativem Sinne. Anstatt φ soll als Integrationsvariable u und als Weg C eingeführt, zuvor aber das Integral mittels partieller Integration vereinfacht werden.

Das innere Integral von (1') wird, mit λu als neuer Integrationsvariabler, zu

$$(3') \quad \int_0^{\infty e^{i \arg u}} e^{-\lambda} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2} - \lambda}{i k u} + 1 \right) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

In diesem Integrale ist die Lage der Verzweigungspunkte sowie der Integrationsweg noch von u abhängig: man macht sich aber leicht klar, daß jeder Strahl innerhalb des von den beiden Grenzlagen des Verzweigungsschnittes \overline{ku} , $-\overline{ku}$ gebildeten kleinen Winkels als Integrationsweg, gültig für alle u , genommen werden darf, z. B. also die Halbierende dieses Winkels, der Strahl

$$\lambda = |\lambda| e^{i \arccos k - \frac{i\pi}{2}} = |\lambda| e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Aus (1') wird so, unter Vertauschung der Integrationsfolge:

$$(4') \quad I_h = \frac{2}{ik} \int_0^{\infty e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2} - \lambda}{ik u} + 1 \right),$$

und durch partielle Integration $\left(\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -d \operatorname{ctg} \varphi \right)$:

$$I_h = \frac{2}{ik} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi ik} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \cdot \frac{-\lambda^2 du}{u^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}} - \frac{1}{2\pi ik} \int_C \operatorname{ctg} \varphi d\left(\frac{1}{u}\right) \right).$$

Hier integrieren wir im ersten Summanden partiell nach λ :

$$\begin{aligned} \iint &= \frac{1}{2\pi ik} \int_C \frac{\operatorname{ctg} \varphi du}{u^2} \int_0^{\infty e^{\frac{i\pi}{4}}} (-e^{-\lambda}) d(\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}) \\ &= \int_0^{\infty e^{\frac{i\pi}{4}}} e^{-\lambda} d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du - \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{du \operatorname{ctg} \varphi}{u}. \end{aligned}$$

Für den Ausdruck (4') oder (1') folgt daher:

$$(5') \quad \left\{ I_h = \frac{2}{ik} \left[\int_0^{\infty e^{\frac{i\pi}{4}}} e^{-\lambda} d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du - \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{du}{u} - \frac{1}{2\pi ik} \int_C \operatorname{ctg} \varphi d\left(\frac{1}{u}\right) \right] \right\}.$$

Hierin kann, nach (2'), das dritte Glied durch Differentiation des zweiten Gliedes nach y erhalten werden:

$$(6') \quad \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{du}{u^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{du}{u}.$$

Weiter folgt aus (2')

$$(7') \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{-i(u-y-\eta)\sqrt{x^2+z^2+(u-y-\eta)^2}-xx}{x^2+(u-y-\eta)^2},$$

und es wird nach dem Cauchyschen Satze

$$(8') \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i (\operatorname{ctg} \varphi \Big|_{u=0} - \operatorname{ctg} \varphi \Big|_{u=\infty}) \\ \quad = \frac{-ixx + (y+\eta)e}{x^2 + (y+\eta)^2} - 1. \end{cases}$$

Mit (6'), (8') wird dann der Ausdruck (5') zu

$$(9') \quad \begin{cases} I_h = \frac{2}{ik} \left[\int_0^{\infty e^{\frac{i\pi}{4}}} e^{-\lambda} d\lambda \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du + 1 \right. \\ \quad \left. - \left(1 + \frac{1}{2ik} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{-ixx + (y+\eta)e}{x^2 + (y+\eta)^2} \right]. \end{cases}$$

Es handelt sich jetzt nur noch darum, das Doppelintegral in (9') für die verschiedenen Werte der Koordinaten $x, y + \eta, z$ näherungsweise zu entwickeln und zwar kommen folgende Fälle in Betracht:

$$\begin{array}{lll} \alpha) & |kz| \gg 1, & |kx| \ll 1, \quad |k(y+\eta)| \ll 1, \\ \beta) & |kx| \gg 1, & |k(y+\eta)| \ll 1, \quad |kz| \text{ beliebig,} \\ \gamma) & |kx| \ll 1, & |k(y+\eta)| \ll 1, \quad |kz| \ll 1; \end{array}$$

für die ersten beiden Fälle werden semikonvergente Reihen, für den 3. Fall der Anfang einer konvergenten Entwicklung gegeben.

Das innere Integral von (9') geht mit (7') über in

$$(10') \quad \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} \cdot \frac{-i(u-y-\eta)\sqrt{x^2+z^2+(u-y-\eta)^2}-xx}{x^2+(u-y-\eta)^2} du;$$

dies ist ein vollständiges elliptisches Integral, dessen Integrand außer den vier Verzweigungspunkten $\left(\pm \frac{\lambda}{k}, y+\eta \pm \sqrt{x^2+z^2}\right)$ 3 Pole $(0, y+\eta \pm ix)$ besitzt. Die Quadratwurzeln sind mit

solchen Vorzeichen zu nehmen, daß sie für $u \rightarrow \infty$ gleich $-iku$, bzw. gleich u werden; hieraus folgt u. a., daß die Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + z^2 + (u - y - \eta)^2}$ auf der linken Ellipsenhälfte für $u - y - \eta \approx 0$ gleich $-\sqrt{x^2 + z^2}$ wird. Um nun die Entwicklung von (10') für $|z| \rightarrow \infty$, bei endlichem x und $y + \eta$ vorzubereiten, verzerren wir den (negativ durchlaufenen) Weg C in einen positiv zu nehmenden Umlauf C' um den Verzweigungsschnitt

$-\frac{\lambda}{k}, \frac{\lambda}{k}$ (als Schnitt darf wegen unserer Wahl $\arg \lambda = \frac{\pi}{4}$ ein Stück der imaginären u -Achse genommen werden) nebst dem Residuum im Punkte $u = \infty$. Das letztere ist (vgl. (8')) gleich $\frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi i)(-i) = -1$, und daher

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_C = -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-i k u^2} \\ \cdot \frac{-i(u - y - \eta) \sqrt{x^2 + z^2 + (u - y - \eta)^2} - xz}{x^2 + (u - y - \eta)^2} du. \end{cases}$$

a) Längs der mit den Koordinaten $x, z, y + \eta$ nicht mehr variierenden Kurve C' darf nun der letzte Integrand z. B. für großes $|z|$ in eine Taylorreihe entwickelt und sodann gliedweise integriert werden. Mit der Bezeichnung

$$(12) \quad \frac{z}{|z|} = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + z^2 + (u - y - \eta)^2} &= -|z| \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \frac{(x^2 + (u - y - \eta)^2)^\nu}{x^{2\nu}}, \\ &\frac{-i(u - y - \eta) \sqrt{x^2 + z^2 + (u - y - \eta)^2} - xz}{x^2 + (u - y - \eta)^2} \\ &= \frac{i|z|}{u - y - \eta - i\varepsilon x} - \frac{i}{|z|} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \frac{(u - y - \eta)(x^2 + (u - y - \eta)^2)^{\nu-1}}{x^{2\nu-2}} \end{aligned}$$

und kann die Integrale über die einzelnen Glieder dieser Reihe mittels des Residuumsatzes sogleich anschreiben (das erste als negatives Residuum in $u = y + \eta + i\varepsilon x$, die übrigen als Residuen in $u = \infty$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_C = -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} = -1 + \frac{-2\pi i}{2\pi} i |z| \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2(y + \eta + i\epsilon x)^2}}{-ik(y + \eta + i\epsilon x)^2} \\
+ \frac{2\pi i}{2\pi} \cdot \frac{-i}{|x|} \cdot \frac{-y - \eta}{2} + \frac{y + \eta}{8|x|^3} \left[x^2 + (y + \eta)^2 - \frac{3\lambda^2}{2k^2} \right] + \dots, \\
(13') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_C = -1 + |z| \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2(y + \eta + i\epsilon x)^2}}{-ik(y + \eta + i\epsilon x)^2} \\ - \frac{1}{|x|} \cdot \frac{y + \eta}{2} + \frac{y + \eta}{8|x|^3} \left[x^2 + (y + \eta)^2 - \frac{3\lambda^2}{2k^2} \right] + \dots \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Die asymptotische Entwicklung des Doppelintegrals

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda} d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_C e^{\frac{i\pi}{4}}$$

in (9') erhält man nun, wie mittels elementarer Abschätzungen gezeigt werden kann, dadurch, daß man an der letzten (konvergenten) Reihe (13) gliedweise die Operation $\int_0^{\infty} e^{-\lambda} \dots d\lambda$ ausübt.

So ergibt sich (man darf jetzt wieder ∞ als obere Grenze nehmen):

$$(14') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{ik} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} d\lambda \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du \\ \sim 2|z| \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2(y + \eta + i\epsilon x)^2}}{k^2(y + \eta + i\epsilon x)^2} d\lambda \\ - \frac{2}{ik} - \frac{y + \eta}{ik|x|} + \frac{y + \eta}{4ik|x|^3} \left[x^2 + (y + \eta)^2 - \frac{3}{k^2} \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Das erste, ausschlaggebende Glied dieser Entwicklung wurde (mit anderem Vorzeichen und in der Schreibweise

$$- \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^0 e^{s(ix - y - \eta)} \sqrt{s^2 - k^2} ds$$

schon in der ersten in Anm. 1, S. 965 genannten Arbeit (insbesondere § 4) behandelt. Mit

$$(15') \quad \zeta_{\epsilon} = -ik(y + \eta + i\epsilon x)$$

ergab sich dort

$$(16') \quad \left\{ \begin{aligned} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2(y + \eta + i s x)^2}}{k^2(y + \eta + i s x)^2} d\lambda &= \frac{1}{\zeta_e} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_e^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{\zeta_e} + \frac{i\pi}{2\zeta_e} (H_1^{(1)}(\zeta) - G_1(\zeta_e)) . \end{aligned} \right.$$

Hierin ist $H_1^{(1)}(\zeta)$ der Hauptzweig der Hankelschen Funktion erster Art vom Index 1; $G_1(\zeta)$ ist eine den Besselschen Funktionen verwandte ganze transzendente Funktion mit der Integraldarstellung

$$(17') \quad G_1(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-i\zeta \sin \tau} e^{i\tau} d\tau ,$$

der konvergenten Entwicklung

$$(18') \quad G_1(\zeta) = J_1(\zeta) + \frac{4}{i\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{s!(s+1)!}{(2s)!(2s+2)!} (2\zeta)^{2s} \right]$$

($J_1(\zeta) \equiv$ Besselsche Funktion erster Art vom Index 1)

und der asymptotischen Entwicklung

$$(19') \quad \left\{ \begin{aligned} G_1(\zeta) &\sim \frac{2}{i\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu-2)! (2\nu)!}{(\nu-1)! \nu!} 2^{-2\nu+1} \zeta^{-2\nu} , \\ |\zeta| &\rightarrow \infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg \zeta \leq \frac{\pi}{2} . \end{aligned} \right.$$

Die rechte Seite von (19') stellt auch die asymptotische Entwicklung von $G_1(\zeta) - H_1^{(1)}(\zeta)$ im Bereiche $-\pi \leq \arg \zeta \leq \pi$ dar.

β) Für den Fall, daß der Horizontalabstand x der beiden Leitungen sehr groß ist, gelangt man zu einer asymptotischen Formel dadurch, daß man die Integranden von (11'), so wie früher nach großem $|z|$, jetzt nach großem $|x|$ entwickelt, und hierbei $x/z = \text{const.}$, $y + \eta = \text{const.}$ voraussetzt; den entwickelten Integranden hat man wieder gliedweise nach u zu integrieren und auf die so entstehende Reihe gliedweise die

Operation $\int_0^{\infty} e^{-\lambda} \dots d\lambda$ auszuüben. Für das Doppelintegral in (9') ergibt sich auf diesem Wege:

$$(20') \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\lambda} d\lambda \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du \sim -1 - \frac{i\kappa}{x} \\ & + \frac{(y + \eta) \sqrt{x^2 + \kappa^2}}{x^2} + \frac{i\kappa}{x^3} \left((y + \eta)^2 - \frac{1}{k^2} \right) \\ & - (y + \eta) \frac{2\kappa^2 + x^2}{2x^4 \sqrt{x^2 + \kappa^2}} \left((y + \eta)^2 - \frac{3}{k^2} \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

für $|kx| \gg 1$.

γ) Um schließlich I_h auch für kleines $|kx|$ und $|kz|$ zu entwickeln, vertauschen wir in dem ersten Gliede von (9') die Reihenfolge der Integrationen, wobei wir uns statt u wieder φ als Integrationsvariable denken, und erhalten mittels der Formel (16'):

$$(21') \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{ik} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi du \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} d\lambda \\ & = -2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi \\ & \cdot \left[\frac{1}{-iku} + \frac{i\pi}{2(-iku)} (H_1^{(1)}(-iku) - G_1(-iku)) \right]. \end{aligned} \right.$$

Hier kann der Klammerausdruck mittels der bekannten Reihenentwicklung von $H_1^{(1)}$ und der in (18') angeführten Entwicklung von G_1 als eine nach u^ν und $u^\nu \log u$ fortschreitende Reihe geschrieben und auf diese gliedweise die Operation $\int_{i\varepsilon}^{2\pi+i\varepsilon} \operatorname{ctg} \varphi \dots du$ angewandt werden. So ergibt sich unter Vernachlässigung der in den Koordinaten kubischen Glieder:

$$(22') \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{ik} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi du \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} d\lambda \\ & = \frac{2}{k^2} \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{du}{u^2} + \varrho - (y + \eta) + z \log \frac{y + \eta + ix}{\varrho + x} \\ & \quad + \frac{ik}{3} (x^2 + 2ixz - z^2), \end{aligned} \right.$$

und hier ist der erste Summand schon früher durch (6') und (8') berechnet worden.

2. Das Integral

$$(23') \quad I_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-\lambda u} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2} + ik}{k^2 \lambda} d\lambda$$

(herrührend von den vertikalen Teilen der induzierenden Wechselstromleitung).

Für dieses Integral, welches in der gleichen Weise zu behandeln ist, wie I_h , ergibt sich

$$(24') \quad \left\{ \begin{aligned} I_v &\sim -\frac{y+\eta}{ik^3|x|^3}, & |kz| &\gg 1, \\ &\sim -\frac{y+\eta}{ik^3(x^2+\eta^2)^{3/2}}, & |kx| &\gg 1, \\ &\approx -\frac{2}{ik} + \frac{2}{k^2\rho} + \frac{2}{ik} \log(-i\gamma k(\rho+y+\eta)) \\ &\quad - (y+\eta) \log \frac{-i\gamma k(\rho+y+\eta)}{4} + \rho + \frac{y+\eta}{2} \\ &\quad - \frac{ik}{3} \cdot \left[(y+\eta)^2 - \frac{x^2+\eta^2}{2} \right], & |kx| &\ll 1, \quad |kz| \ll 1, \\ & & \gamma &= 1,7811 \dots \end{aligned} \right.$$

3. Entwicklung von $\Phi(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$

Aus (27), (9'), (23') folgt

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(z) &= z \log \frac{\rho+x}{r+x} + (r-\rho) + \frac{2}{ik} \cdot \frac{y+\eta}{\rho+x} - \frac{2}{k^2\rho} \\ &\quad + \frac{2}{ik} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{(y+\eta)\rho - ix\eta}{x^2 + (y+\eta)^2} \right] \\ &\quad + \frac{2}{ik} \int_0^\infty e^{-\lambda} d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg } \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2} u^2}{-ik u^2} du \\ &\quad - \frac{2}{ik} \log \frac{\rho+y+\eta}{\rho_0+y} + I_v. \end{aligned} \right.$$

Die Summe der ersten fünf Glieder dieses Ausdruckes (wir formen so um:

$$(26') \quad \frac{(y+\eta)\rho - ix\eta}{x^2 + (y+\eta)^2} = \frac{(y+\eta)\rho - ix\eta}{\rho^2 - \eta^2} = \frac{y+\eta}{\rho \pm \eta} \pm \frac{\eta}{y+\eta \pm ix}$$

wird für $|z| \rightarrow \infty$ bei Verwendung der Bezeichnungen (12') und (15') näherungsweise gleich

$$(27') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1-s}{2} 2|z| \log \sqrt{\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2}} + \frac{2\eta}{\zeta_1} + \frac{2|x|}{\zeta_2^2} + \frac{2}{ik} - \frac{1}{k^2|x|} \\ &- \frac{y\eta}{|x|} + \frac{y\eta(x^2 + y^2 + \eta^2)}{4|x|^3} + \frac{3x^2 + (y+\eta)^2}{4k^2|x|^3}, \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \right.$$

und das vorletzte Glied gleich

$$(28') \left\{ -\frac{2}{ik} \log \frac{\varrho + y + \eta}{\varrho + y} \approx \frac{2}{ik} \left(\frac{-\eta}{|x|} + \frac{\eta x^2}{2|x|^3} + \frac{(y + \eta)^3 - y^3}{6|x|^3} \right), \right. \\ \left. |z| \rightarrow \infty. \right.$$

Addiert man nun gemäß (25') die Ausdrücke (27'), (14'), (28') und die erste Entwicklung (24'), so folgt

$$(29') \left\{ \begin{aligned} \Phi(z) \sim 2|z| & \left\{ \frac{1-\varepsilon}{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2}} + \frac{\varepsilon}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \right. \\ & - \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_\varepsilon^2} d\lambda \Big\} - \frac{1}{k^2|x|} - \frac{y+3\eta}{ik|x|} - \frac{y\eta}{|x|} \\ & + \frac{7(y+\eta)}{4ik^3|x|^3} + \frac{3x^2 + (y+\eta)^2}{4k^2|x|^3} \\ & + \frac{7(y+\eta)^3 - 4y^3 + 3x^2(y+5\eta)}{12ik|x|^3} + \frac{y\eta(x^2 + y^2 + \eta^2)}{4|x|^3}, \end{aligned} \right. \\ |z| \rightarrow \infty. \quad \left. \right.$$

4. Entwicklung von $\Psi(|x|)$ für $|kx| \gg 1$, sowie für $|kx| \ll 1$, $|kx| \ll 1$.

Die Funktion $\Psi(|x|)$ ist (vgl. Gleichung (29) und (33)) definiert durch

$$(30') \left\{ \begin{aligned} \Psi(|x|) &= -\Phi(z) + z \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} \\ &= -\Phi(z) + 2|z| \left\{ \frac{1-\varepsilon}{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2}} + \frac{\varepsilon}{\zeta_1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} - \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_\varepsilon^2} d\lambda \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für den Klammerausdruck folgt mit (15'), (16'), (18'), (19') und mit der Entwicklung für $H_1^{(1)}(\zeta)$:

$$(31') \left\{ \begin{aligned} & \frac{1-\varepsilon}{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2}} + \frac{\varepsilon}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \\ & - \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \zeta_\varepsilon^2} d\lambda \sim (1-\varepsilon) \left(-\frac{y\eta}{x^2} + \frac{y\eta(y^2 + \eta^2)}{x^4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_\varepsilon^2} - \frac{1}{\zeta_\varepsilon} - \frac{1}{\zeta_\varepsilon^3} \right), \end{aligned} \right. \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty,$$

$$(32') \left\{ \begin{aligned} & \approx \frac{1-\varepsilon}{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2}} + \frac{\varepsilon}{\zeta_1} + \frac{1}{2} \log \frac{\gamma \zeta_1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\zeta_\varepsilon}{3}, \\ & \text{für } |kx| \ll 1, \quad |k(y+\eta)| \ll 1. \end{aligned} \right.$$

Aus (30'), (31'), (25'), (20'), (24') folgt schließlich

$$(33') \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &\sim \frac{2}{r_0 + |x|} \left\{ \frac{|x|}{r_0 k^2} - \frac{y + \eta}{ik} + y\eta \right\} + \frac{2\eta}{ik r_0} \\ &+ \frac{1}{r_0(r_0 + |x|)^2} \left\{ \frac{y + \eta}{ik} \left(-\frac{3}{k^2} + (y + \eta)^2 \right) + \frac{3(y + \eta)^2}{k^2} \right. \\ &\left. - y\eta(y + \eta)^2 \right\} - \frac{(y + \eta)^3 - y^3}{3ik r_0^3} + \frac{y + \eta}{ik^3 r_0^3} - \frac{(y + \eta)^3}{k^3 r_0^3}, \\ &(r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}), \quad |kx| \gg 1, \end{aligned} \right.$$

und aus (30'), (32'), (25'), (22'), (24')

$$(34') \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &= |z| \log \frac{-i\gamma k(r + |x|)}{2} \\ &- \frac{2}{ik} \log(-i\gamma k(\varrho_0 + y)) + (y + \eta) \log \frac{-i\gamma k(\varrho + y + \eta)}{4} \\ &- r - \varrho + \frac{y + \eta - |x|}{2} \\ &+ \frac{ik}{3} \left(\frac{x^2 - 3x^2}{2} + 2|z|(y + \eta) + (y + \eta)^2 \right), \\ &|kx| \ll 1, \quad |kz| \ll 1. \\ &(\varrho_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \gamma = 1,7811 \dots) \end{aligned} \right.$$

5. Berechnung von $\Phi(x)$ und $\Psi(|x|)$ für $y + \eta = 0$

Die beiden Doppelintegrale in $\Phi(z)$ [Gleichung (25')] können nach $(y + \eta)$ in Taylorreihen entwickelt werden, sobald

$$\frac{y + \eta}{\sqrt{x^2 + z^2}} < 1 \text{ ist.}$$

Von der zugehörigen, sehr gut konvergierenden Entwicklung von $\Phi(z)$ benutzen wir nur das Anfangsglied, d. h. wir setzen in (25')

$$y = \eta = 0$$

und erhalten

$$(35') \left\{ \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{2}{ik} + \frac{2z}{kx} + \frac{2r_0}{k^2 x^2} - \frac{2}{k^2 r_0} \\ &+ \frac{2}{ik} \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda} d\lambda \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{i\pi}{4}} \text{ctg } \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du \right]_{y+\eta=0} \\ &+ I_v \Big|_{y+\eta=0}, \quad (r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}), \quad y + \eta = 0. \end{aligned} \right.$$

Hier sind beim inneren Integral des vorletzten Summanden, dem Integral (11'), für den Grenzübergang $y + \eta \rightarrow 0$ je nach der Größe von $|\lambda|$ drei Fälle zu unterscheiden, deren Einzelheiten wir übergehen; man erhält

$$(36') \left\{ \begin{aligned} & \lim_{y+\eta=0} \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 u^2}}{-ik u^2} du \\ &= -1 + \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}}{ik x^2}, \quad 0 \leq \frac{i\lambda}{k} \leq |x| \\ & \quad (\sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} \approx kx, \quad \text{für } \lambda \approx 0) \\ &= -1 + \frac{|x| \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}}{ik x^2}, \quad |x| \leq \frac{i\lambda}{k} \leq r_0 = \sqrt{x^2 + z^2} \\ & \quad (\sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} \approx \lambda \text{ für } |\lambda| \rightarrow \infty) \\ &= \frac{\lambda r_0}{ik x^2}, \quad r_0 \leq \frac{i\lambda}{k} < \infty; \end{aligned} \right.$$

und hieraus

$$(37') \left\{ \begin{aligned} & \lim_{y+\eta=0} \frac{2}{ik} \int_0^\infty e^{-\lambda} d\lambda \frac{1}{2\pi} \int_C \operatorname{ctg} \varphi \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2 u^2}}{-ik u^2} du \\ &= \frac{2}{ik} \left[-1 + e^{ikr_0} \left(\frac{r_0}{ikx^2} - \frac{z^2}{x^2} \right) \right. \\ & \quad + \frac{z}{ikx^2} \int_0^{-ik|x|} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda \\ & \quad \left. + \frac{|x|}{ikx^2} \int_{-ik|x|}^{-ikr_0} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda \right]. \end{aligned} \right.$$

Aus dem Integral I_v (23') wird beim Grenzübergang $y + \eta = 0$ nach einigen Umformungen:

$$(38') \quad \lim_{y+\eta=0} I_v = \frac{2}{ik} \int_{-ikr_0}^\infty \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2}.$$

Aus (35'), (37'), (38') folgt

$$(39') \left\{ \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{2z}{xk} + \frac{2r_0}{k^2 x^2} - \frac{2}{k^2 r_0} \\ &+ \frac{2}{ik} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2} - \frac{2r_0 e^{ikr_0}}{k^2 x^2} - \frac{2x^2 e^{ikr_0}}{ik x^2} \\ &- \frac{2}{k^2 x^2} \left[z \int_0^{-ik|x|} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda \right. \\ &\left. + |z| \cdot \int_{-ik|x|}^{-ikr_0} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda \right], \quad y + \eta = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(40') \left\{ \begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{|z|} &= \frac{2s}{kx} + \frac{2}{k^2 x^2} - \frac{2s}{k^2 x^2} \int_0^{-ik|x|} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda \\ &- \frac{2}{k^2 x^2} \int_{-ik|x|}^{\infty} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda, \quad s = \frac{x}{|x|} \end{aligned} \right.$$

und nach (30')

$$(41') \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &= -\Phi(z) + |z| \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{|z|} \\ &= \frac{2|x|}{k^2 r_0 (r_0 + |x|)} - \frac{2}{ik} \int_{-kr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2} + \frac{2r_0 e^{ikr_0}}{k^2 x^2} \\ &+ \frac{2x^2 e^{ikr_0}}{ik x^2} - \frac{2|x|}{k^2 x^2} \int_{-ikr_0}^{\infty} e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2} d\lambda, \quad y = \eta = 0, \end{aligned} \right.$$

oder, nach zweimaliger partieller Integration,

$$(42') \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &= \frac{2|x|}{k^2 r_0 (r_0 + |x|)} - \frac{2}{ik} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2} \\ &- 2|z| \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{(\lambda^2 + k^2 x^2)^{3/2}}, \quad y = \eta = 0, \\ &\quad (r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}) \end{aligned} \right.$$

Zur näherungsweise Berechnung der beiden letzten Integrale ist zu sagen:

Es gilt asymptotisch für großes $|kr_0|$

$$(43') \left\{ \begin{aligned} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2} &\sim \frac{e^{ikr_0}}{(-ikr_0)^2} \left(1 - \frac{2!}{-ikr_0} + \frac{3!}{(-ikr_0)^2} - \dots \right), \\ &|kr_0| \rightarrow \infty. \end{aligned} \right.$$

und für großes $|kz|$ ($P_\nu(x)$ = ν -te Kugelfunktion;

$$P'_\nu(x) = \frac{dP_\nu(x)}{dx}; \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}, \text{ usw.})$$

$$(44') \left\{ \begin{aligned} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{(\lambda^2 + k^2 x^2)^{3/2}} &= \frac{e^{ikr_0}}{(-ik|x|)^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik|z|s} ds}{\left(1 + 2s \frac{r_0}{|x|} + s^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{e^{ikr_0}}{-k^2 x^2} \int_0^{\infty} e^{ik|z|s} ds \sum_{\nu=0}^{\infty} s^\nu P'_{\nu+1}\left(\frac{-r_0}{|x|}\right) \\ &\sim \frac{e^{ikr_0}}{-k^2 x^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} P'_{\nu+1}\left(\frac{-r_0}{|x|}\right) \int_0^{\infty} e^{ik|z|s} s^\nu ds \\ &= -\frac{e^{ikr_0}}{k^2 x^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(-ik|x|)^{\nu+1}} P'_{\nu+1}\left(\frac{-r_0}{|x|}\right), \\ &\quad |kz| \rightarrow \infty; \end{aligned} \right.$$

hieraus folgt in erster Näherung für das Integral (44') der Wert $\frac{e^{ikr_0}}{(-ik|x|)^3}$ und daher für (42'):

$$45') \quad \Psi(|z|) \approx \frac{2|x|}{k^2 r_0 (r_0 + |x|)} - \frac{2ix^2 e^{ikr_0}}{k^3 r_0^2 x^2}, \quad |kz| \gg 1, \quad y = \eta = 0.$$

Für kleines $|kr_0|$ ist zu benützen:

$$(46') \left\{ \begin{aligned} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^2} &= \frac{e^{ikr_0}}{-ikr_0} - \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{e^{ikr_0}}{-ikr_0} + \log(-i\gamma k r_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(ikr_0)^\nu}{\nu! \nu} \\ &= \log(-i\gamma k r_0) - \frac{1}{ikr_0} - 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(ikr_0)^\nu}{(\nu+1)! \nu}. \end{aligned} \right.$$

Falls $|kz|$ klein oder von der Größenordnung 1 ist, integrieren wir das letzte Integral in (41') einmal partiell:

$$(47') \left\{ \begin{aligned} \Psi(|z|) &= \frac{2|z|}{k^2 r_0 (r_0 + |z|)} - \frac{2}{ik} \int_{-ikr_0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda^3} + \frac{2r_0 e^{ikr_0}}{k^2 x^2} \\ &\quad - \frac{2|z|}{k^2 x^2} \left(\int_{-ik|x|}^{\infty} - \int_{-ik|x|}^{ikr_0} \frac{e^{-\lambda} \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}} \right). \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$(48') \quad \frac{2}{k|x|} \int_{-ik|x|}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}} = i\pi H_1^{(1)}(k|x|)$$

und das letzte Integral in (47') kann nach Einführung einer neuen reellen Integrationsvariablen $\mu = \frac{1}{-ik} \sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}$ in eine für $|kz| \approx 1$ rasch konvergierende Reihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \int_{-ik|x|}^{-ikr_0} \frac{e^{-\lambda} \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}} &= -ik \int_0^{|z|} e^{ik\sqrt{\mu^2 + x^2}} d\mu \\ &= -ik e^{ikr_0} \int_0^{|z|} e^{-ik(r_0 - \sqrt{\mu^2 + x^2})} d\mu \\ &= -ik e^{ikr_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{\nu}}{\nu!} \int_0^{|z|} (r_0 - \sqrt{\mu^2 + x^2})^{\nu} d\mu \\ (49') \left\{ \begin{aligned} \int_{-ik|x|}^{-ikr_0} \frac{e^{-\lambda} \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 x^2}} &= -ie^{ikr_0} \left[k|z| - \frac{ik^2}{2} (r_0|z| - x^2 \log \frac{r_0 + |z|}{|x|}) \right. \\ &\quad - \frac{k^3}{2} \left(\frac{|x|^3}{3} + x^2|z| - r_0 x^2 \log \frac{r_0 + |z|}{|x|} \right) \\ &\quad + \frac{ik^4}{48} (r_0|z|(15x^2 + 2z^2) \\ &\quad \left. - 3x^2(5x^2 + 4z^2) \log \frac{r_0 + |z|}{|x|} \right) + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Mittels der Gleichungen (46')—(49') ist dann $\Psi|z|$ für $|kz| \approx 1$ zu berechnen.

(Eingegangen 2. November 1928)