

# Analyse und Synthese der Axoide eines räumlich beweglichen starren Körpers

Bekir Dizioğlu\*)

*Die allgemeine zwangsläufige räumliche Bewegung eines starren Körpers ist durch die relative Schrotbewegung der Gangaxoide auf der Rastaxoide gegeben. Diese Achsenflächen berühren sich längs der momentanen Schraubenachse der Bewegung. Mit den Methoden der kinematischen Geometrie werden die gegenseitigen Bewegungen dieser Axoiden eingehend erörtert. Außerdem sind drei neuartige Grundaufgaben der räumlichen Getriebelehre formuliert. Es wird die Ermittlung der Wälzflächen bei einer bekannten charakteristischen Kurve angegeben.*

Bei den allgemeinen räumlichen Bewegungen starrer Körper relativ zueinander haben die entsprechenden Axoiden für die Analyse und Synthese dieser Bewegungen große Bedeutung. Im Verlauf des zwangsläufigen Bewegungsvorgangs vollführt die sogenannte bewegte Achsenfläche (Gangaxoide) auf der festen Achsenfläche (Rastaxoide) eine solche Bewegung, daß jeweils zwei infinitesimal benachbarte Erzeugende gemeinsam sind und die beiden Flächen sich längs der jeweiligen momentanen Schraubachse berühren. Die beiden Achsenflächen rollen hierbei jedoch im allgemeinen nicht gleitungslos aufeinander, sondern vollführen eine aus Rollen und Gleiten zusammengesetzte Bewegung, die man nach *F. Reuleaux* [1] als „Schroten“ bezeichnet.

Als Sonderfall findet gleitungsloses Rollen der beweglichen auf der festen Achsenfläche statt, wenn der Parameter der Momentanschraubung ständig verschwindet. Dies tritt insbesondere bei zwangsläufigen Drehvorgängen um einen festen Punkt ein, bei denen die Achsenflächen zwei Kegel mit dem gemeinsamen Scheitel sind. Auch die ebenen Bewegungsvorgänge können so aufgefaßt werden, daß zwei Zylinder mit Polbahnprofilen (und Erzeugenden senkrecht zur Ebene) aufeinander rollen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Schrotbewegung der Axoide eingehend aus der Sicht der kinematischen Geometrie untersucht.  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind Vektoren vom Betrag  $a$  bzw.  $b$ ;  $\vec{a} + \vec{b}$  ist der Summenvektor,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  das innere Produkt,  $\vec{a} \times \vec{b}$  das äußere Produkt (das vektorielle Produkt) der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

## 1. Die allgemeinste Bewegung eines starren räumlichen Systems [2 bis 6]

Zwei beliebige Systemanlagen  $S$  und  $S'$  seien durch die kongruenten Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  gegeben, Bild 1. Dann erhalten wir zur Anfangslage  $D$  irgendeines andern Systempunktes die entsprechende Lage  $D'$ , indem wir das Tetraeder  $A'B'C'D'$  dem Tetraeder  $ABCD$  kongruent machen. Um das System aus der Lage  $S$  in die Lage  $S'$  zu bringen, können wir es zunächst parallel zu sich in die Lage  $S''$  verschieben, in der  $A$  mit  $A'$  zusammenfällt; dadurch kommt das Dreieck  $ABC$  nach  $A'B''C''$ . Von hier aus gelangt das System in die Endlage  $S'$  mittels einer Drehung um eine durch  $A'$  gehende Achse, die Schnittlinie der mittelsenkrechten Ebenen von  $B'B''$  und  $C'C''$ , die wir zugleich mit  $v'$  und  $v''$  bezeichnen wollen. Ihr entspricht in  $S$  die zu  $v'$  parallele Gerade  $v$  durch den Punkt  $A$ . Alle Systemgeraden, die zu  $v$  parallel sind, bleiben beim Übergang von  $S$  in  $S'$  zu sich selbst parallel, und dasselbe gilt von allen Ebenen, die auf  $v$  senkrecht stehen, z.B. von der durch  $A$  senkrecht zu  $v$  gelegten Ebene  $E$ ; in unserem Bild geht also  $E'$  durch  $A'$  parallel zu  $E$ .

Verstehen wir nun unter  $A'''$  den Schnittpunkt von  $v'$  mit  $E$  und verschieben wir das System  $S'$  parallel zu  $v'$ , bis der Punkt  $A'$  nach  $A'''$  kommt, in die Lage  $S''' = A'''B'''C'''$ , so fällt  $E'''$  auf  $E$ , ohne daß entsprechende Punkte beider Ebenen einander decken; dies erreichen wir vielmehr erst durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt  $P$ , den Pol von  $E$  und  $E'''$ , den wir leicht konstruieren können: Sind nämlich  $B_1$ ,  $C_1$  und  $B'_1$ ,  $C'_1$  die senkrechten Projektionen von  $B$ ,  $C$  und von  $B'$ ,  $C'$  — oder von  $B'''$ ,  $C'''$  — auf die Ebene  $E$ , so ist  $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A'''B'_1C'_1$ , und dann ist  $P$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $AA'''$ ,  $B_1B'_1$  und  $C_1C'_1$ .

Jetzt können wir das System aus seiner Anfangslage  $S$  in die Endlage  $S'$  auch dadurch überführen, daß wir es zuerst um eine durch  $P$  gehende Achse  $\xi$ , die zu  $v'$  parallel ist, bis in die Lage  $S'''$  drehen und es dann parallel zu  $\xi$  um die Strecke  $A'''A'$  verschieben. Durch die Drehung wird jede Systemgerade zu ihrer Endlage parallel, und durch die Verschiebung kommt sie mit ihr zur Deckung. Die beiden Bewegungen lassen sich auch in ihrer Reihenfolge vertauschen, sie lassen sich aber auch gleichzeitig ausführen, etwa so, daß gleichen Drehungswinkeln immer gleiche Parallelverschiebungen entsprechen, und dann verschmelzen sie zu einer Schraubung um die Achse  $\xi$ . Wir erhalten demnach den Satz: Jede Ortsveränderung eines starren räumlichen Systems läßt sich hervorbringen durch eine Schraubung um eine Achse, die durch Anfangs- und Endlage bestimmt ist.

Bezeichnen wir mit  $h$  die Ganghöhe dieser Schraubung, mit  $\theta$  den im Bogenmaß gemessenen Drehungswinkel  $\angle APA'''$  und mit  $u$  die Parallelverschiebung von der Größe  $A'''A'$ , so verhält sich

$$h : u = 2\pi : \theta, \text{ also ist } h = \frac{2\pi u}{\theta}.$$

Die Achse  $\xi$  ist die selbstentsprechende Gerade der Systemlagen  $S$  und  $S'$ , als Systemgerade können wir sie also gleichzeitig mit  $x$  und  $x'$  bezeichnen. Aber die Systeme  $S$  und  $S'$  haben die Gerade  $x$  nicht Punkt für Punkt miteinander gemein, denn diese verschiebt sich in sich selbst um die Strecke  $u$ , während das System aus seiner Anfangslage in die Endlage übergeht.

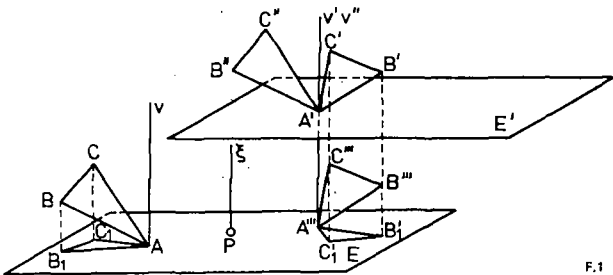


Bild 1. Zwei endlich benachbarte Lagen eines starren Körpers sind durch die kongruenten Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  gegeben

\*) Prof. Dr.-Ing. B. Dizioğlu, Institut für Getriebelehre und Maschinendynamik an der Technischen Universität Braunschweig

Wenn  $S$  und  $S'$  einander unendlich nahe rücken, wird  $\xi$  zur Achse der momentanen Schraubenbewegung oder zur Momentanachse der Systemlage  $S$ . Um uns von der kontinuierlichen Bewegung eines starren räumlichen Systems ein Bild zu machen, gehen wir aus von einer Reihe unendlich benachbarter Systemlagen  $S, S', S'', S''' \dots$  und verstehen unter  $\xi, \eta, \zeta \dots$  die dem festen Raum  $\Sigma$  angehörenden Schraubenachsen für den Übergang von  $S$  in  $S', S'$  in  $S'', S''$  in  $S''' \dots$ . Als selbstentsprechende Gerade der Systemlagen  $S$  und  $S'$  bezeichnen wir  $\xi$  wieder mit  $x$  und  $x'$  und nennen  $y, z, \dots$  die Anfangslagen der Systemgeraden, deren Lagen  $y'$  und  $y'', z''$  und  $z''' \dots$  bzw. mit  $\eta, \zeta, \dots$  zusammenfallen. Infolge der unendlich kleinen Schraubung um  $\xi$  verschiebt sich die Gerade  $x$ , die momentan auf  $\xi$  liegt, nur unendlich wenig in sich selbst und kommt so nach  $x'$ ; gleichzeitig gelangt  $y$  in die Lage  $y'$ , die sich mit  $\eta$  deckt. Bei der folgenden unendlich kleinen Schraubung um die Achse  $\eta$  entfernt sich die Systemgerade  $x$  wieder von der festen Geraden  $\xi$ ,  $y$  verschiebt sich in  $y'$  unendlich wenig bis  $y''$ , und die Gerade  $z$  fällt in der Lage  $z''$  mit der Achse  $\zeta$  zusammen usw.

Die unendlich dicht aufeinanderfolgenden Achsen  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , von denen im allgemeinen keine die benachbarte schneiden, sind die Erzeugenden einer windschiefen, geradlinigen Fläche  $R$  des festen Raumes  $\Sigma$ , und ebenso bilden die Geraden  $x, y, z, \dots$  eine dem bewegten System  $S$  angehörende windschiefe, geradlinige Fläche  $R'$ . Verstehen wir unter einem *windschiefen Flächenelement* den unendlich schmalen Streifen zwischen zwei benachbarten Erzeugenden einer windschiefen, geradlinigen Fläche, so folgt aus den vorhergehenden Darlegungen, daß die Fläche  $R$  und die Lage  $R'$  der Fläche  $R$  die Elemente  $\xi, \eta$  und  $x', y'$  miteinander gemein haben. Infolge der unendlich kleinen Schraubung um  $\eta$ , durch die  $R$  in die Lage  $R''$  gelangt, werden die beiden Flächenelemente wieder voneinander getrennt, dagegen fällt jetzt das Element  $y'' z''$  von  $R''$  mit dem Element  $\eta, \zeta$  von  $R$  zusammen usw.

Diese Bewegung der Fläche  $R$ , die aus einer Folge unendlich kleiner Drehungen und Parallelverschiebungen besteht, wird als ein *Rollen und Gleiten* oder auch als ein *Schroten* bezeichnet. Somit gelangen wir zu dem Satz: Die allgemeinste Bewegung eines starren räumlichen Systems kann immer erzeugt werden durch das Rollen und Gleiten einer dem System angehörenden geradlinigen Fläche  $R$  auf einer dem festen Raum angehörenden geradlinigen Fläche  $R$ . Die Flächen  $R$  und  $R$  heißen *Achsenflächen* oder *Achsoide*.

Wir bezeichnen jetzt mit  $XY$  den kürzesten Abstand der Erzeugenden  $x$  und  $y$  der Fläche  $R$ , also die unendlich kleine Strecke, die auf  $x$  und  $y$  bzw. in  $X$  und  $Y$  senkrecht steht, ebenso mit  $XY$  den kürzesten Abstand der Erzeugenden  $\xi$  und  $\eta$  von  $R$ . Wenn das windschiefe Flächenelement  $xy$  in der Lage  $x' y'$  mit  $\xi \eta$  zusammenfällt, so deckt sich die zugehörige Lage von  $XY$  mit  $XY$ , also ist

$$XY = XY$$

Ferner ist  $\angle xy = \angle \xi \eta$ . Zwischen den beiden Flächenelementen besteht demnach die Beziehung

$$\frac{XY}{\angle xy} = \frac{XY}{\angle \xi \eta}$$

Bei jeder windschiefen Fläche nennt man nun das Verhältnis zwischen dem kürzesten Abstand zweier unendlich benachbarter Erzeugenden und ihrem Winkel den *Parameter* der betrachteten Erzeugenden; dieses Verhältnis hat nämlich für die in Rede stehende Erzeugende einen bestimmten Wert, der

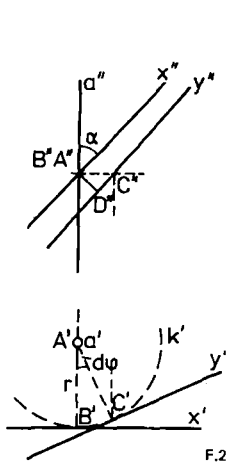
sich aber beim Übergang zu einer andern Erzeugenden im allgemeinen ändert. Dann folgt aus der letzten Gleichung: Die beiden Achsenflächen haben für je zwei Erzeugende, die im Lauf der Bewegung miteinander zusammenfallen, gleiche Parameter.

In der Theorie der windschiefen Flächen wird gezeigt, daß jede Ebene, die eine Erzeugende einer solchen Fläche enthält, eine Berührungsebene darstellt. Unter den durch die Erzeugende  $x$  gehenden Berührungsebenen der Fläche  $R$  befinden sich zwei ausgezeichnete: Die eine, die zur unendlich benachbarten Erzeugenden  $y$  parallel ist, berührt die Fläche im unendlich fernen Punkt von  $x$  und heißt die asymptotische Berührungsebene dieser Erzeugenden; die andre steht auf der ersten senkrecht, enthält also den kürzesten Abstand  $XY$  von  $x$  und  $y$  und berührt die Fläche in  $X$ , man nennt sie die *Zentralebene* und  $X$  den *Zentralpunkt* der Erzeugenden  $x$ .

Durch den Zentralpunkt und die Zentralebene sowie den Parameter einer Erzeugenden ist die Berührungsebene der Fläche für jeden Punkt dieser Geraden bestimmt. Hieraus folgt, daß die Achsenflächen  $R$  und  $R$  einander in allen Punkten ihrer gemeinsamen Erzeugenden berühren.

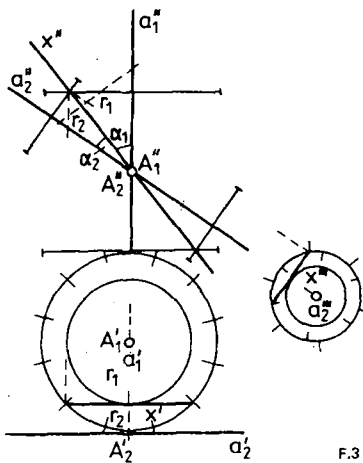
Die Achsenflächen haben für die allgemeinste Bewegung eines starren räumlichen Systems dieselbe Bedeutung wie die Polkurven für die ebene Bewegung und wie die Polkegel für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, nur mit einem bemerkenswerten Unterschied: Während man die beiden Polkurven und auch die beiden Polkegel unabhängig voneinander annehmen kann, sind die beiden Achsenflächen durch die Bedingung verknüpft, daß sie in je zwei entsprechenden Erzeugenden gleiche Parameter haben müssen. Ist also die eine von beiden Flächen beispielsweise abwickelbar, so ist es auch die andre; beide können ferner nur gleichzeitig in Zylinderflächen ausarten.

Wir wollen nun annehmen, die eine Achsenfläche sei ein *einschaliges Umdrehungshyperboloid*, das durch die Umdrehungsachse  $a$  und die Erzeugende  $x$  definiert ist, Bild 2.  $a$  steht auf der Grundrißebene senkrecht, während  $x$  zur Aufrißebene parallel liegt. Die Strecke  $AB$  mißt den kürzesten Abstand  $r$  beider Geraden,  $A$  ist also der Mittelpunkt des Hyperboloids. Um den Parameter der Erzeugenden  $x$  zu bestimmen, drehen wir  $x$  um  $a$  durch einen unendlich kleinen Winkel  $d\varphi$  in die Lage  $y$ . Dabei beschreibt der Punkt  $B$  auf dem Kehlkreis  $k$  der Fläche den Bogen  $BC$ , und der Zentriwinkel  $BAC = d\varphi$  erscheint im Grundriß in wahrer Größe;  $y'$  berührt  $k'$  in  $C'$ ,  $C''$  liegt auf der Parallelen durch  $A''$  zu  $x'$ , und die Gerade  $y''$  ergibt sich, indem wir zu einem zweiten Punkt von  $y$ , der im Grundriß beliebig gewählt wird, den Aufriß konstruieren. Nun ermitteln wir zunächst den kürzesten Abstand der Geraden  $x$  und  $y$ : Die asymptotische Berührungsebene von  $x$  berührt den Asymptotenkegel des Hyperboloids in seiner zu  $x$  parallelen Mantellinie, deren Aufriß sich mit  $x''$  deckt, also auf der Aufrißebene senkrecht steht. Mithin ist die Zentralebene von  $x$  parallel zur Aufrißebene; sie berührt demnach das Hyperboloid in  $B$ , d.h.  $B$  ist der Zentralpunkt der Erzeugenden  $x$ . Der kürzeste Abstand von  $x$  und  $y$  ist also das von  $B$  auf  $y$  gefällte Lot  $BD$ . Da dieses zugleich auf der Geraden  $x$  senkrecht steht und mit ihr in einer zur Aufrißebene parallelen Ebene liegt, so ist  $B''D'' \perp x''$  und gleich der wahren Länge von  $BD$ . — Jetzt können wir  $BD$  berechnen. Bezeichnen wir nämlich den von den Erzeugenden des Hyperboloids mit der Achse  $a$  gebildeten Winkel — den sogenannten Schränkungswinkel — mit  $\alpha$ , so ist auch  $\angle D''B''C'' = \angle x''B''a'' = \alpha$ . Da die Geraden  $x''$  und  $y''$  einen unendlich kleinen Winkel bilden, dürfen wir das Dreieck  $B''D''C''$  als rechtwinklig betrachten. Folglich ist

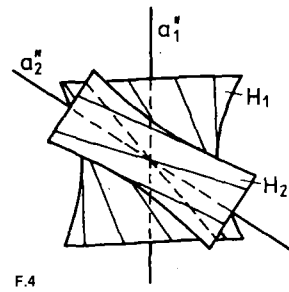


**Bild 2. Bestimmung eines einschaligen Umdrehungshyperboloides**

Die Umdrehungsachse  $a$  und die Erzeugende  $x$  sind im Grund- und Aufriss angegeben;  $a$  steht auf der Grundrißebene senkrecht, während  $x$  zur Aufrißebene parallel liegt



**Bild 3. Gegeben sind die zueinander windschiefen Achsen  $a_1$  und  $a_2$  sowie das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der zu konstruierenden Hyperboloide  $H_1$  und  $H_2$**



**Bild 4. Ermittlung der Erzeugenden der beiden Hyperboloide**

$$BD = B'D' = BC \cos \alpha = r \sin d\varphi \cos \alpha = r d\varphi \cos \alpha$$

Wir ermitteln außerdem den unendlich kleinen Winkel  $d\varepsilon$  zwischen den Erzeugenden  $x$  und  $y$ . Zu dem Zweck denken wir uns über dem Kehlkreis  $k$  einen geraden Kreiskegel konstruiert, dessen Mantellinien zu den Erzeugenden des Hyperboloids parallel laufen; dann entsprechen den zu  $x$  und  $y$  parallelen Mantellinien zwei Grundkreisradien, die den Zentriwinkel  $d\varphi$  einschließen, wir finden also

$$d\varepsilon = d\varphi \sin \alpha$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt für den Parameter der Erzeugenden  $x$  der Wert

$$\frac{BD}{d\varepsilon} = r \cot \alpha$$

Der Parameter ist demnach konstant für alle Erzeugenden desselben Hyperboloids, nämlich gleich der halben Nebenachse der Meridianhyperbel. Auf Grund unserer früheren Darlegungen erhalten wir hieraus den Satz: Zwei einschalige Umdrehungshyperboloide mit den Achsen  $a_1$  und  $a_2$ , den Kehlkreisradien  $r_1$  und  $r_2$  und den Schränkungswinkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  liefern dann und nur dann ein Paar von Achsenflächen für die Erzeugung der Bewegung eines starren räumlichen Systems, wenn  $r_1 \cot \alpha_1 = r_2 \cot \alpha_2$  ist.

Es seien nun  $H_1$  und  $H_2$  zwei einschalige Umdrehungshyperboloide, die der eben gefundenen Bedingung genügen, es verhalte sich also

$$r_1 : r_2 = \tan \alpha_1 : \tan \alpha_2 \quad (1)$$

Wir bezeichnen mit  $x_1$  und  $x_2$  irgend zwei Erzeugende beider Flächen, mit  $A_1 X_1$  und  $A_2 X_2$  ihre kürzesten Abstände von den Achsen  $a_1$  und  $a_2$ , also mit  $A_1$  und  $A_2$  die Mittelpunkte der Hyperboloide und mit  $X_1$  und  $X_2$  die Zentralpunkte von  $x_1$  und  $x_2$ . Dann können wir  $H_2$  so auf  $H_1$  legen, daß  $x_2$  und  $X_2$  auf  $x_1$  bzw.  $X_1$  fallen und daß  $X_2 A_2$  in der Verlängerung von  $A_1 X_1$  liegt; dabei sollen sich  $a_1$  und  $a_2$  auf verschiedenen Seiten der Ebene durch  $x_1$ ,  $x_2$  und  $A_1 A_2$  befinden. Die Flächen berühren sich jetzt in allen Punkten ihrer gemein-

samen Erzeugenden  $x_1$ ,  $x_2$ , das Hyperboloid  $H_2$  läßt sich also aus dieser Lage in der Weise fortbewegen, daß es an dem festen Hyperboloid  $H_1$  fortwährend rollt und gleitet. Wir können aber auch beide Achsen  $a_1$  und  $a_2$  festhalten und die beiden Hyperboloide als widerstandsfähige Körper betrachten – als hyperboloidische Räder, die um ihre Achsen drehbar sind. Drehen wir dann  $H_1$  um  $a_1$ , so rotiert auch  $H_2$  um  $a_2$ , und dabei berühren sich beide Flächen immer in den Erzeugenden, die gleichzeitig in die Lage  $x_1$ ,  $x_2$  gelangen. Sind  $y_1$  und  $y_2$  die beiden Erzeugenden, die nach Ablauf der Zeit  $dt$  infolge der Drehungen  $d\varphi_1$  und  $d\varphi_2$  miteinander zusammenfallen, so ist  $x_1 y_1 = x_2 y_2$ . Es ist aber  $x_1 y_1 = d\varphi_1 \sin \alpha_1$  und  $x_2 y_2 = d\varphi_2 \sin \alpha_2$ . Setzen wir also die Umdrehungsgeschwindigkeiten  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$  und  $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$ , so erhalten wir für die Übertragung der Drehung um die Achse  $a_1$  auf die zu ihr windschiefe Achse  $a_2$  – ganz wie für den Fall sich schneidender Achsen – die Proportion

$$\omega_1 : \omega_2 = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 \quad (2)$$

Aufgabe: Gegeben seien die zueinander windschiefen Achsen  $a_1$  und  $a_2$ ; zu konstruieren sind die Hyperboloide  $H_1$  und  $H_2$ , welche die Drehung um  $a_1$  in der Weise auf  $a_2$  übertragen, daß die Umdrehungsgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ein vorgeschriebenes Verhältnis haben. In Bild 3 steht  $a_1$  auf der Grundrißebene senkrecht,  $a_2$  liegt zur Aufrißebene parallel, und das Verhältnis  $\omega_1 : \omega_2$  möge gleich 1:2 sein. Die Mittelpunkte beider Flächen, also die Endpunkte der kürzesten Entfernung von  $a_1$  und  $a_2$ , sind wieder mit  $A_1$  und  $A_2$  bezeichnet. Die gemeinsame Erzeugende  $x_1$ ,  $x_2$  der beiden Hyperboloide – wir schreiben jetzt kurz  $x$  – ist senkrecht zu  $A_1 A_2$  und daher gleichfalls zur Aufrißebene parallel. Wir erhalten ihren Aufriss  $x''$  zufolge der Bedingung (2), indem wir einen Punkt ermitteln, dessen Abstände von  $a_1'$  und  $a_2'$  sich verhalten wie 2:1. Legen wir dann die Strecke  $A_1 A_2$ , die im Grundriß in wahrer Größe erscheint, senkrecht zu  $x''$  zwischen  $a_1'$  und  $a_2'$ , so sind die auf ihr durch  $x''$  erzeugten Abschnitte infolge der Bedingung (1) gleich den Kehlkreisradien  $r_1$  und  $r_2$ .

Um auf den so bestimmten Hyperboloiden eine Anzahl von Erzeugenden darzustellen, die bei der Übertragung der

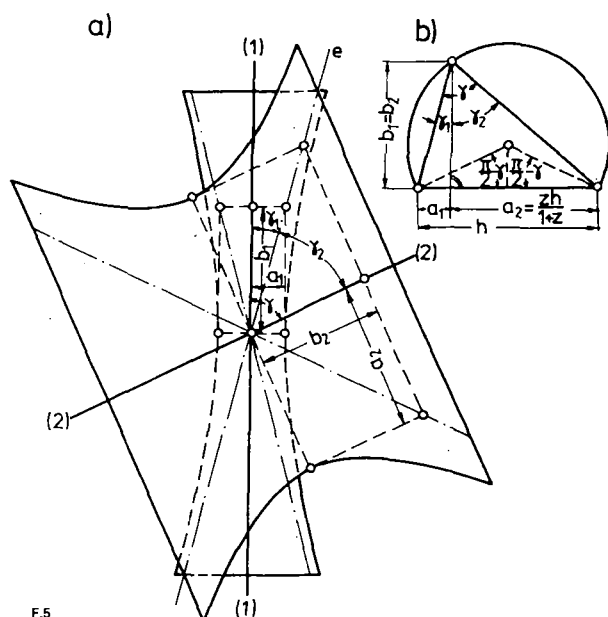


Bild 5. Abschrotende Hyperboloidräder zur Übertragung von Drehungen um windschiefe Achsen (1), (2)

Drehung paarweise miteinander zusammenfallen, wählen wir auf der Geraden  $x$  in gleichen Abständen von ihrem Zentralpunkt  $X$ , der auf  $A_1A_2$  liegt, zwei Punkte und begrenzen die beiden Flächen durch die zu ihnen gehörenden Parallelkreise, Bild 4. Da die Umdrehungsgeschwindigkeiten von  $H_1$  und  $H_2$  sich wie 1:2 verhalten sollen, teilen wir die beiden auf  $H_1$  liegenden Parallelkreise von  $x$  aus in doppelt so viel gleiche Teile wie die Parallelkreise auf  $H_2$ .

Die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen sind die *Hyperboloidräder*. Sie übertragen Drehungen um windschiefe Achsen (1), (2) dadurch aufeinander, daß zwei einschalige Drehhyperboloide derselben Schränkung mit den Drehachsen (1), (2) bei Drehungen um die Achsen aneinander abschroten, Bild 5.

Sind die Achsen (1), (2)  $[\angle(1, 2) = \gamma]$  gegeben und ist das Übersetzungsverhältnis  $z$  vorgeschrieben, so lassen sich die Halbachsen  $a_1, b_1$  und  $a_2, b_2$  der Hyperboloide sowie die Gerade  $e$ , längs deren sie sich ständig berühren (momentane Schraubenachse), folgendermaßen konstruieren: Die Drehachsen (1), (2) und die Gerade  $e$  haben eine gemeinsame Normale (die in Bild 5 senkrecht auf der Zeichenebene steht). Auf dieser Normalen liegen die Halbachsen  $a_1, a_2$  der Hyperboloide  $\left(\frac{r^2}{a_{1,2}^2} - \frac{y^2}{b_{1,2}^2} = 1, y\text{-Achse} = \text{Drehachse (1) bzw. (2), } r \text{ Abstand von der Drehachse}\right)$ , und es ist

$$a_1 + a_2 = h, \quad a_2 : a_1 = z \text{ Übersetzungsverhältnis,}$$

also

$$a_1 = \frac{h}{1+z}, \quad a_2 = \frac{zh}{1+z}$$

$h$  ist der kürzeste Abstand der vorgegebenen Achsen (1), (2). Die Schränkung eines einschaligen Drehhyperboloids ist, wie eine kurze Rechnung zeigt, gleich dem Reziprokwert der Halbachse  $b$ . Da beide Hyperboloide aneinander abschroten sollen, also dieselbe Schränkung haben, ist demnach

$$b_1 = b_2$$

Für die Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , welche die Erzeugende  $e$  mit den Achsen (1), (2) bildet, hat man die beiden weiteren Bedingungen

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma, \quad b_1 = b_2 = a_1 \cot \gamma_1 = a_2 \cot \gamma_2$$

Die graphische Ermittlung der gesuchten Größen  $\gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2$  und  $b_1 = b_2$  mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes bei Vorgabe der Achsen (1), (2) (also der Größen  $h$  und  $\gamma$ ) sowie des Übersetzungsverhältnisses  $z$  zeigt der rechte Teil von Bild 5.

Die Konstruktion der Verzahnung von Hyperboloidrädern ist naturgemäß erheblich mühsamer als die Zahnflankenkonstruktion der Stirnräder.

## 2. Untersuchung der Schrotbewegung des Körpers

### 2.1 Die Gleichung der Geraden im Raum

Wir nehmen in der gegebenen Geraden einen festen Punkt  $A$  und einen laufenden Punkt  $X$  an, Bild 6. Die Richtung der Geraden sei durch den Einheitsvektor  $\bar{e}$  festgelegt. Da die Strecke  $AX = \bar{x} - \bar{a}$  mit diesem Einheitsvektor keinen Richtungsunterschied hat, so ergibt sich sofort die Gleichung der Geraden in der Form

$$\bar{e}(\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

In der Mechanik tritt die Gleichung der Geraden zuweilen in der Form

$$\bar{e}(\bar{e} \cdot \bar{x}) = \bar{e} \bar{e}, \quad \bar{e}^2 \equiv 1 \quad (3)$$

auf. In diesem Falle führe man einen Vektor  $\bar{h}$  ein durch die Festsetzung  $\bar{e} \bar{e} = \bar{e}^2 \cdot \bar{h}$ . Jetzt wird

$$(\bar{e} \bar{x}) \cdot \bar{e} - \bar{e}^2 \cdot \bar{x} = -\bar{e}^2 \cdot \bar{h}$$

$$\text{d.h. } \bar{e}^2 (\bar{x} - \bar{h}) = (\bar{e} \bar{x}) \cdot \bar{e}.$$

Mithin ist

$$\bar{e}(\bar{x} - \bar{h}) = 0$$

die Gleichung der Geraden in der gewöhnlichen Form.

Man kann aus Gl. (3) auch unmittelbar auf die Form

$$\bar{e} \bar{x} = \bar{e} + l \cdot \bar{e}$$

schließen, worin  $l$  eine Länge bedeutet. Nun ist

$$0 = \bar{e} \bar{e} + l \cdot \bar{e}^2$$

$$\text{d.h. } l = -\frac{\bar{e} \bar{e}}{\bar{e}^2}$$

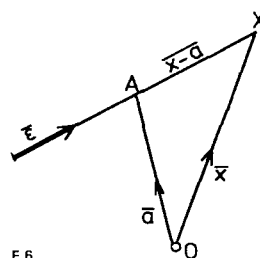


Bild 6. Die Darstellung einer Geraden im Raum

$$\text{mithin } \varepsilon x = \frac{\varepsilon(\varepsilon \bar{x})}{\varepsilon^2} = \bar{\varepsilon} \bar{h}$$

oder  $\varepsilon(\bar{x} - \bar{h}) = 0$  wie vorher.

Für eine Gerade, welche durch zwei feste Punkte  $A$  und  $B$  geht, ist

$$(\bar{b} - \bar{a})(\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

$$\text{oder } (\bar{b} - \bar{a})\bar{x} + \bar{a}\bar{b} = 0$$

Anstatt die Gerade

$$\varepsilon(\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

durch die Vektoren  $\bar{\varepsilon}$  und  $\bar{a}$  als bestimmt anzusehen, kann man die Gleichung auch auf die Form

$$\bar{\varepsilon}\bar{x} = \varepsilon a = \bar{c} \quad \text{bringen mit} \quad \bar{\varepsilon}\bar{c} = 0$$

und die Vektoren  $\bar{\varepsilon}$  und  $\bar{c}$  als ursprüngliche Bestimmungsgrößen (Koordinaten im vektoriellen Sinne) betrachten. Es handelt sich hierbei zunächst darum, die Gerade aus den gegebenen Koordinatenvektoren  $\bar{\varepsilon}$  und  $\bar{c}$  im Raum zu konstruieren. Zu diesem Zweck bilden wir aus der Gleichung  $\bar{\varepsilon}\bar{x} = \bar{c}$

$$\varepsilon(\bar{\varepsilon}\bar{x}) = \varepsilon\bar{c} \quad \text{oder} \quad (\bar{\varepsilon}\bar{x}) \cdot \bar{\varepsilon} - \bar{x} = \bar{\varepsilon}\bar{c}$$

Denn man kann stets  $\bar{\varepsilon}$  als Einheitsvektor nehmen. Es wird also

$$\bar{x} = (\bar{\varepsilon}\bar{x}) \cdot \bar{\varepsilon} + c\bar{\varepsilon}.$$

Nun wählen wir auf der Geraden einen bestimmten Punkt  $X_1$ , welcher der Bedingung  $\bar{\varepsilon}\bar{x}_1 = 0$  genügt, und erhalten

$$\bar{x}_1 = c\bar{\varepsilon}, \quad \text{d.h.} \quad x_1 = c.$$

Hiernach ergibt sich sofort die Konstruktion: Von dem festen Bezugspunkt  $O$  aus ziehe man senkrecht zueinander die gegebenen Vektoren  $\bar{c}$  und  $\bar{\varepsilon}$  und errichte in  $O$  zur Ebene dieser Vektoren eine Senkrechte  $\bar{x}_1$  von der Länge  $c$  entsprechend der Definition  $\bar{x}_1 = \bar{c}\bar{\varepsilon}$ , Bild 7. Eine Parallele durch den Endpunkt  $\bar{x}_1$  dieser Strecke zu  $\bar{\varepsilon}$  ist die Gerade, welche durch die Plücker'schen Koordinaten  $\bar{\varepsilon}$  und  $\bar{c}$  eindeutig bestimmt ist.

Die Parametergleichung der Geraden von der Richtung  $\bar{\varepsilon}$  durch den Punkt  $\bar{a}$  ist

$$\bar{x} = \bar{a} + l \cdot \bar{\varepsilon},$$

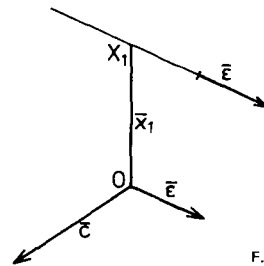
wenn  $l$  die Entfernung des laufenden Punktes  $X$  von dem Punkte  $A$  bedeutet.

In der Mechanik tritt die Gerade häufig als Träger eines Vektors auf in dem Sinne, daß dieser Vektor in der Geraden liegt, aber ohne Einfluß auf seine Wirkung beliebig innerhalb derselben verschoben werden kann. Ist nun

$$\varepsilon(\bar{x} - \bar{a}) = 0$$

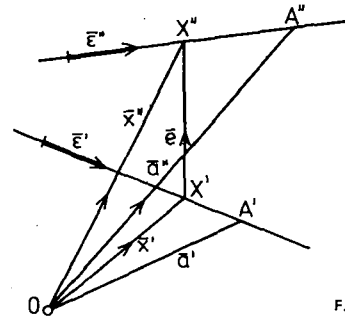
die Gleichung der Geraden, in welcher der Vektor  $\bar{k}$  liegt, so ist natürlich

$$\bar{k}(\bar{x} - \bar{a}) = 0.$$



F.7

Bild 7. Die Ermittlung einer Geraden mit Hilfe von Plücker'schen Koordinaten



F.8

Bild 8. Bestimmung des kürzesten Abstandes zwischen zwei Geraden

## 2.2 Kürzester Abstand zwischen zwei Geraden

Wir denken uns die beiden Geraden in der Plücker'schen Form gegeben:

$$\bar{\varepsilon}'\bar{x} = \bar{c}' \quad \text{und} \quad \bar{\varepsilon}''\bar{x} = \bar{c}'' \quad (4)$$

und nennen die Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke, welche wir nach Größe und Richtung mit  $\bar{\varepsilon}$  bezeichnen,  $X'$  und  $X''$ , Bild 8. Dann ist im Dreieck  $O X' X''$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{x}'' - \bar{x}', \quad \text{außerdem} \quad \bar{\varepsilon}'\bar{x}' = \bar{c}' \quad \text{sowie} \quad \bar{\varepsilon}''\bar{x}'' = \bar{c}''$$

Jetzt bilden wir das innere Produkt:

$$\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' = \bar{x}'' - \bar{x}' \cdot \bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' = \bar{x}''\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' - \bar{x}'\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''$$

Die Vertauschungsformel ergibt also

$$\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' = \bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''\bar{x}'' - \bar{x}'\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''$$

oder

$$\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' = \bar{\varepsilon}'\bar{c}'' + \bar{\varepsilon}''\bar{c}' \quad (5)$$

Mithin ist

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\varepsilon}'\bar{c}'' + \bar{\varepsilon}''\bar{c}'}{\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''} \cdot \bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' \quad (6)$$

denn es hat  $\bar{\varepsilon}$  die Richtung von  $\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''$ . Den absoluten Betrag des Momentproduktes  $\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''$  wollen wir durch das Zeichen  $\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''$  ausdrücken. Dann entsteht für den kürzesten Abstand die bekannte Formel

$$e = \frac{\bar{\varepsilon}'\bar{c}'' + \bar{\varepsilon}''\bar{c}'}{|\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''|}$$

Die Geraden  $\bar{\varepsilon}'(\bar{x} - \bar{a}') = 0$  und  $\bar{\varepsilon}''(\bar{x} - \bar{a}'') = 0$  schneiden sich also, wenn die Bedingung  $\bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}''\bar{a}'' + \bar{\varepsilon}''\bar{\varepsilon}'\bar{a}' = 0$  oder  $\bar{a}'' - \bar{a}' \cdot \bar{\varepsilon}'\bar{\varepsilon}'' = 0$  erfüllt ist, was man natürlich auch ohne jede Rech-

nung sehen kann. Die Größe  $\overline{e'e''}$  spielt in der Mechanik eine große Rolle, wenn es sich um Zusammensetzung von Geschwindigkeiten oder von Kräften handelt. Auch in der Liniengeometrie ist sie von wesentlicher Bedeutung. Hier nennt man

$$\overline{e'e''} = \overline{e'c''} + \overline{e''c'}$$

das „gegenseitige Moment“ der beiden Geraden  $\overline{e'x} = \overline{c}$ ,  $\overline{e''x} = \overline{c'}$ . Nach dieser Benennung kann man also auch sagen: Zwei Geraden schneiden sich, wenn ihr gegenseitiges Moment verschwindet.

### 2.3 Das Abschroten der Axoide

Während bei der Planbewegung die Spurkurve und Polkurve beliebig angenommen werden können, bestehen für die beiden Regelflächen, deren Abschroten einer allgemeinen Bewegung der betreffenden starren Körper äquivalent ist, gewisse Bedingungen des Anpassens (raccordement). Sie wurden vom Gesichtspunkt der Kinematik zuerst von Bour (Cours de mécanique et machines Bd. 1, S. 139) klar ausgesprochen.

Ein Axoid ist das Analogon zur Kurve im Raum und wird erhalten, indem man die Parameter der geraden Linie

$$\overline{\eta(x-e)} = 0$$

als eindeutige Funktionen einer unabhängigen Variablen  $\psi$  auffaßt. Dementsprechend stellen also die Gleichungen

$$\overline{\eta} = \overline{\lambda}(\psi), \quad \overline{e} = \overline{f}(\psi), \quad \eta^2 = 1 \quad (7)$$

eine bestimmte Regelfläche dar. Die einzelnen Geraden oder Erzeugenden derselben werden durchlaufen, wenn  $\psi$  die aufeinander folgenden Werte innerhalb eines bestimmten Intervalles annimmt. Da wir die Bedingungen des Abschreitens auf analytischem Wege ableiten wollen, müssen wir die in Betracht kommenden geometrischen Begriffe zunächst einführen.

### 2.4 Kürzester Abstand zwischen zwei benachbarten Erzeugenden einer Regelfläche

Aus Gl. (7), welche bei gegebenem  $\psi$  eine bestimmte Erzeugende definieren, leiten wir eine unendlich nahe folgende ab, indem wir

$$\overline{\eta'} = \overline{\eta} + \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial \psi} d\psi \quad \text{und} \quad \overline{e'} = \overline{e} + \frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} d\psi$$

nehmen. Nach Abschnitt 2.2 ist der kürzeste Abstand der Geraden

$$\overline{\eta'z} = \overline{m}, \quad \overline{\eta'z} = \overline{m'}$$

bestimmt durch den Ausdruck

$$k = \frac{\overline{\eta' m'} + \overline{\eta' m}}{|\overline{\eta' \eta'}|}$$

Setzt man hierin  $\overline{m} = \eta e$ ,  $\overline{m'} = \eta' e'$ , so wird

$$k = \frac{\overline{\eta' \eta'} \cdot \overline{e' - e}}{|\overline{\eta' \eta'}|}$$

also in unserem Fall, wenn wir  $k$  durch  $dk$  ersetzen,

$$dk = \frac{\frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta' \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}}{\left| \overline{\eta' \frac{\partial \eta}{\partial \psi}} \right|} d\psi$$

Hierin ist  $\left| \overline{\eta' \frac{\partial \eta}{\partial \psi}} \right| d\psi = d\gamma$  der Winkel zwischen den benachbarten Erzeugenden. Man bezeichnet nun die Größe

$$\pi^* = \frac{dk}{d\gamma} = \frac{\frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta' \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}}{\left| \overline{\eta' \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}} \right|} \quad (8)$$

als den Parameter der Erzeugenden.

### 2.5 Zentralpunkt und Zentralebene der Erzeugenden

Die Vektoren des laufenden Punktes der Geraden

$$\overline{\eta(z-e)} = 0, \quad \overline{\eta'(z-e')} = 0$$

sind  $\overline{z} = \overline{e} + l \cdot \overline{\eta}$ ,  $\overline{z'} = \overline{e'} + l' \cdot \overline{\eta'}$ , worin  $l$  und  $l'$  ihre Abstände von den Punkten  $\overline{e}$  und  $\overline{e'}$  bedeuten. Nun folgt aus der Anschauung unmittelbar die Beziehung

$$\overline{e} + l \cdot \overline{\eta} + \overline{k} = \overline{e'} + l' \cdot \overline{\eta'} \quad (9)$$

für diejenigen Werte von  $l$  und  $l'$ , welche den Fußpunkten des kürzesten Abstandes  $\overline{k} = \frac{k}{|\overline{\eta' \eta'}|} \cdot \overline{\eta' \eta'}$  entsprechen.

Setzen wir also  $\overline{\eta' \eta'} = \sin \gamma$ , so wird nach Gl. (9)

$$l = \overline{e' - e} \cdot \overline{\eta} + l' \cos \gamma$$

$$l \cos \gamma = \overline{e' - e} - \overline{\eta'} + l'$$

und  $\sin^2 \gamma \cdot \overline{z^* - e} = [(\overline{\eta} - \cos \gamma \cdot \overline{\eta'}) \cdot \overline{e' - e}] \cdot \overline{\eta}$  gibt den Vektor  $\overline{z^*}$  des Fußpunktes auf der Geraden  $\overline{\eta(z-e)} = 0$ . Dieses Resultat wenden wir auf unseren Fall der benachbarten Erzeugenden an, setzen

$$\overline{e' - e} = \frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} d\psi, \quad \overline{\eta' \eta'} = \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} d\psi$$

und erhalten sofort

$$\overline{z^* - e} = - \frac{\frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} \cdot \overline{\eta' \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}}{\eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}} - \overline{\eta} \quad (10)$$

Dieser durch den Vektor  $\overline{z^*}$  definierte Punkt der Erzeugenden wird von Bour der Zentralpunkt derselben genannt. Aus  $\overline{z} = \overline{e} + l \cdot \overline{\eta}$  folgt

$$d\overline{z} = \left( \frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} + l \cdot \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial \psi} \right) d\psi + \overline{\eta} dl$$

Mithin hat der Vektor

$$\overline{n} = \eta \frac{\partial \overline{e}}{\partial \psi} + l \cdot \eta \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial \psi} \quad (11)$$

die Richtung der Normale zur Tangentialebene der Regelfläche. Für den Zentralpunkt wird

$$\bar{n}^* = \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} + l^* \cdot \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}$$

$$\text{oder } \bar{n}^* = \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} - \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}{\eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}} \cdot \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi}$$

$$\text{d.h. } \bar{n}^* = \frac{\left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \left[ \left( \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} \right) \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \right]}{\eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}}$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung von Gl. (8)

$$\bar{n}^* = \pi^* \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} \quad (12)$$

Die Tangentialebene im Zentralpunkt heißt die *Zentralebene* der Erzeugenden.

## 2.6 Bedingungen des Abschrotens der Axoide

Es fragt sich nun, welche Neigung  $\chi^*$  die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt der Erzeugenden gegen die Zentralebene hat. Zu diesem Zweck bilden wir zunächst

$$\overline{nn}^* = \pi^* \left[ - \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}{\eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}} \left( \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} \right) \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + l \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \left( \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} \right) \right]$$

Da nach der Entwicklungsformel

$$\left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \left( \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} \right) = \left[ \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \right] \bar{\eta}$$

wird, so findet man

$$\overline{nn}^* = \pi^* \left[ \left( \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + l \left( \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2 \right] \bar{\eta}$$

Zweitens bilde man

$$\bar{n}\bar{n}^* = \pi^* \left( \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} \cdot \eta \frac{\partial e}{\partial \psi} \right)$$

Nach diesen Vorbereitungen ist der Neigungswinkel  $\chi^*$  bekannt, denn man hat

$$\tan \chi^* = \frac{\overline{nn}^*}{\bar{n}\bar{n}^*} = \frac{1}{\pi^*} \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + l \left( \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2}{\bar{\eta} \cdot \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}$$

Berücksichtigt man noch die Beziehung

$$l - l^* = l + \frac{\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}{\eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}} = \frac{l \cdot \eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi} + \frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}}{\eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \psi}}$$

so erhält man die Chaslessche Formel

$$\tan \chi^* = \frac{l - l^*}{\pi^*} \quad (13)$$

und den entsprechenden Satz:

*Haben zwei Regelflächen je eine ihrer Erzeugenden und die zugehörigen Zentralebenen gemeinsam, dann fallen auch die Tangentialebenen derjenigen Punkte der Erzeugenden zusammen, die gleichen Abstand von dem gemeinsamen Zentralpunkt haben, wenn die Parameter beider Flächen übereinstimmen.*

In diesem Fall können also auch die gegebenen Axoide voneinander abschrotten, und diese Bewegung setzt sich zusammen aus einer Translation längs der Erzeugenden, welche ihre Zentralpunkte zur Deckung bringt, und einer Rotation, deren Amplitude gleich dem Neigungswinkel der korrespondierenden Zentralebene ist.

Als ein sehr einfaches Beispiel sei der Fall

$$\bar{e} = \cos \psi \cdot \bar{a} + \sin \psi \cdot \bar{e}a, \quad \varepsilon^2 = 1 \quad (14)$$

$$\bar{\eta} = \cos \alpha \cdot \bar{e} + \frac{\sin \alpha}{a} (\cos \psi \cdot \bar{e}a - \sin \psi \cdot \bar{a}) \quad (15)$$

betrachtet. Alle Erzeugenden schneiden jetzt einen Kreis mit dem Radius  $a$ , auf dessen Fläche  $\bar{s}$  senkrecht steht. Aus  $\bar{\eta} \bar{e} = \cos \alpha$  schließt man, daß alle Erzeugenden einen konstanten Winkel  $\alpha$  mit der Achse  $\bar{s}$  bilden. Unsere Regelfläche ist also ein einschaliges Rotationshyperboloid. Man findet nun

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial \psi} = -\sin \psi \cdot \bar{a} + \cos \psi \cdot ea, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} = -\frac{\sin \alpha}{a} \cdot \bar{e}$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} = \bar{e} - \cos \alpha \cdot \bar{\eta}, \quad \eta \frac{\partial \eta^2}{\partial \alpha} = \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \psi} \cdot \eta \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = -a \sin \alpha \cos \alpha$$

folglich für den Parameter

$$\pi^* = -a \cot \alpha, \quad \bar{z}^* - \bar{e} = l^* = 0$$

Der durch Gl. (14) dargestellte Kreis (Kehlkreis) enthält alle Zentralpunkte. Zwei Hyperboloide mit den Kehlkreisradien  $a_1, a_l$  und den Neigungswinkeln  $\alpha_1, \alpha_l$  können daher nur dann aufeinander schrotten, wenn die Bedingung

$$a_1 \cot \alpha_1 = a_l \cot \alpha_l$$

erfüllt ist.

## 3. Das Rollen von Flächen aufeinander

Nachdem die Elementarvektoren der Planbewegung für unsere Zwecke genügend behandelt sind, wenden wir uns wieder der Raumbewegung des starren Systems zu und betrachten eine besondere Form derselben, welche man als Kontaktbewegung bezeichnen könnte. Wenn die Oberfläche eines Körpers sich beständig auf eine feste Fläche stützt, so hat der Berührungspunkt des beweglichen Systems entweder keine absolute Geschwindigkeit, oder dieselbe ist – wenigstens im allgemeinen – von Null verschieden. Im ersten Fall nennt man die Kontaktbewegung ein Rollen im weiteren Sinne des Wortes, im zweiten Fall findet Rollen und Gleiten statt.

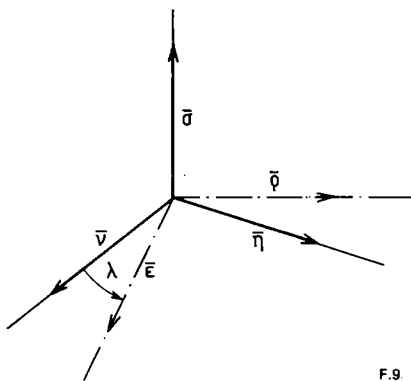


Bild 9. Koordinaten des Begleitkörpers des Kurvenstreifens

Die Entwicklungen (Zentralachse des Geschwindigkeitssystems) zeigen uns eine besonders interessante Form der Kontaktbewegung starrer Körper, die dem ebenen Rollen möglichst analog ist. Man kennt nämlich für die ganz allgemeine Bewegung des starren Systems in jedem Augenblick die Zentralachse der Geschwindigkeiten. Die stetige Folge derselben bildet sowohl im ruhenden Raum, als auch im bewegten Körper eine Regelfläche oder Axoid, welche einzeln der Spurkurve und Polkurve der Planbewegung entsprechen. Diese Axoide  $G_1$  und  $G_2$  rollen aufeinander ab und verschieben sich längs der gemeinsamen Berührungsgeraden (Zentralachse). Diese eigenartige Form der Kontaktbewegung wollen wir als *Axoidbewegung* oder *Abschrotung* bezeichnen.

Wenn ein Körper, welcher nicht von einer Regelfläche begrenzt ist, auf einer ruhenden Fläche rollt, so bilden die aufeinander folgenden Kontaktpunkte auf jeder Fläche eine Raumkurve (Rollspur), und man erkennt sofort, daß die Kinematik der Rollbewegung in der engsten Beziehung zur Geometrie der Flächenkurven steht. Damit ist aber auch der Weg dieser Untersuchung vorgezeichnet.

3.1 Der Begleitkörper einer freien Raumkurve

Zur Untersuchung der Flächenkurven (Rollspuren) und der allgemeinen Raumkurven, welche in keiner direkten Lagenbeziehung zu einer Fläche vorgestellt werden sollen, nennen wir die letzteren *freie* Raumkurven und die ersteren, indem wir ihnen eine (unendlich kleine) Breite auf der Fläche zuschreiben, *Kurvenstreifen*.

Als Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen denken wir uns die freie Raumkurve in der Parameterform

$$\vec{x} = \vec{f}(\psi)$$

gegeben und leiten daraus die Fundamentalvektoren

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{x}}{d\psi}, \quad \vec{v} = r \frac{d\vec{\sigma}}{d\psi}, \quad \vec{\eta} = \vec{\sigma} \times \vec{v}$$

ab. Diese Einheitsvektoren bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz, welches den auf der betrachteten freien Raumkurve fortschreitenden Punkt während seiner Bewegung begleitet. Identifizieren wir daher dieses Achsenkreuz mit einem starren System, so können wir kurz von einem *Begleitkörper* reden, welcher dem beweglichen Kurvenpunkt stets zugeordnet ist. Seine Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn man die Geschwindigkeit des Punktes in jeder Lage kennt. Insbesondere wird die Rotationsbewegung des Begleitkörpers aus den Gleichungen

$$\frac{d\vec{\sigma}}{d\tau} = \omega_{\sigma} \vec{\sigma}, \quad \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \omega_v \vec{v}, \quad \frac{d\vec{\eta}}{d\tau} = \omega_{\eta} \vec{\eta}$$

gefunden werden können. Denn aus diesen folgt sofort

$$\begin{aligned} \vec{\eta} \frac{d\vec{\sigma}}{d\tau} &= -\omega_{\eta} \vec{\sigma}, & \vec{\sigma} \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= -\omega_{\sigma} \vec{v}, & \vec{v} \frac{d\vec{\eta}}{d\tau} &= -\omega_v \vec{\eta} \\ \vec{v} \frac{d\vec{\sigma}}{d\tau} &= -\omega_v \vec{\sigma}, & \vec{\eta} \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= -\omega_{\eta} \vec{v}, & \vec{\sigma} \frac{d\vec{\eta}}{d\tau} &= -\omega_{\sigma} \vec{\eta} \end{aligned}$$

worin  $\omega_{\sigma}$ ,  $\omega_v$ ,  $\omega_{\eta}$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  in Richtung der Tangente, Biegungsnormale und Windungsnormale bedeuten.

Die absoluten Werte des Kontingenzwinkels  $d\psi$  und des Windungswinkels  $d\chi$  sind definiert durch

$$d\psi = \frac{ds}{r}, \quad d\chi = \frac{ds}{r'}$$

worin  $r$  den Biegunsradius und  $r'$  den Windungsradius bedeutet. Man hat also die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \vec{\eta} d\vec{\sigma} &= \frac{ds}{r} \vec{\eta} \vec{v} = d\psi \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} d\vec{v} &= v d\vec{\sigma} - d\vec{\eta} = d\vec{\eta} = d\chi \cdot \vec{v} \\ \vec{v} d\vec{\eta} &= 0 \end{aligned}$$

Die Vektoren  $-\vec{\eta} d\vec{\sigma}$  und  $\vec{\sigma} d\vec{v}$  betrachten wir als die orientierten Kontingenz- und Windungswinkel.

Ganz analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{v} d\vec{\sigma} &= 0 \\ \vec{\eta} d\vec{v} &= -d\psi \cdot \vec{v} \\ \vec{\sigma} d\vec{\eta} &= d\chi \cdot \vec{\eta} \end{aligned}$$

Man erhält demnach für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  des Begleitkörpers der freien Raumkurve:

$$\omega_{\sigma} = -\frac{d\chi}{d\tau}, \quad \omega_v = 0, \quad \omega_{\eta} = \frac{d\psi}{d\tau}$$

und es wird

$$\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \vec{\omega} = \frac{d\psi}{d\tau} \vec{\eta} - \frac{d\chi}{d\tau} \vec{\sigma}$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Begleitkörpers der freien Raumkurve fällt also stets in die rektifizierende Ebene (liegt senkrecht zur Normalen) derselben.

3.2 Der Begleitkörper des Kurvenstreifens

Liegt die Raumkurve auf einer Fläche mit der Normalen  $\vec{\epsilon}$  (Bild 9) und setzen wir  $\vec{\sigma} \vec{\epsilon} = \vec{\bar{\rho}}$ , so wird

$$\vec{\eta} = \vec{\epsilon} \sin \lambda + \vec{\bar{\rho}} \cos \lambda \tag{16}$$

wenn  $\lambda$  den Winkel zwischen der Kurvennormale  $\vec{v}$  und der Flächennormale  $\vec{\epsilon}$  bedeutet.



Die drei Einheitsvektoren  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\rho}$  bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz, welches den laufenden Punkt auf der Flächenkurve ebenso begleitet, wie das System  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\eta}$  die freie Kurve begleitet. Wir können daher jetzt auch von einem Begleitkörper der Flächenkurve (Rollspur, Kurvenstreifen) reden und denselben in gleicher Weise wie vorher den Begleitkörper der freien Raumkurve kinematisch verfolgen.

Aus dem Bild 9 folgen noch außer Gl. (16):

$$\bar{v} = \cos \lambda \cdot \bar{\varepsilon} - \sin \lambda \cdot \bar{\rho} \quad (17)$$

$$\bar{\varepsilon} = \cos \lambda \cdot \bar{v} + \sin \lambda \cdot \bar{\eta} \quad (18)$$

$$\bar{\rho} = -\sin \lambda \cdot \bar{v} + \cos \lambda \cdot \bar{\eta} \quad (19)$$

Für die Rotation ( $\bar{\omega}'$ ) des zweiten Begleitkörpers gilt das ganz analoge Formelsystem:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = \bar{\omega}'\bar{\sigma}, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} = \bar{\omega}'\bar{\varepsilon}, \quad \frac{d\bar{\rho}}{d\tau} = \bar{\omega}'\bar{\rho}$$

$$\bar{\varepsilon} \frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = -\omega'_\varepsilon \bar{\sigma}, \quad \bar{\rho} \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} = -\omega'_\rho \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\sigma} \frac{d\bar{\rho}}{d\tau} = -\omega'_\sigma \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = -\omega'_\rho \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} = -\omega'_\sigma \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} \frac{d\bar{\rho}}{d\tau} = -\omega'_\varepsilon \bar{\rho}$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$d\bar{\sigma} = -\sin \lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\rho} + \cos \lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\varepsilon}$$

$$d\bar{\varepsilon} = (d\lambda - d\chi) \bar{\rho} - \cos \lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma}$$

$$d\bar{\rho} = \sin \lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma} + (\sin^2 \lambda \cdot d\chi - d\lambda) \cdot \bar{\varepsilon} + \sin \lambda \cos \lambda \cdot d\chi \cdot \bar{\rho}$$

und dann auch die erforderlichen Momentprodukte:

$$\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = -(d\lambda - d\chi) \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\varepsilon} d\bar{\sigma} = -\sin \lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma}$$

$$\bar{\rho} d\bar{\sigma} = -\cos \lambda \cdot d\psi \cdot \bar{\sigma}$$

Hiermit ist die Berechnung der Komponenten von  $\bar{\omega}'$  beendet, denn man hat

$$\omega'_\sigma = \frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau}, \quad \omega'_\varepsilon = \sin \lambda \frac{d\psi}{d\tau}, \quad \omega'_\rho = \cos \lambda \frac{d\psi}{d\tau}$$

also

$$\bar{\omega}' = \left( \frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{d\chi}{d\tau} \right) \bar{\sigma} + \sin \lambda \frac{d\psi}{d\tau} \bar{\varepsilon} + \cos \lambda \frac{d\psi}{d\tau} \bar{\rho}$$

Außer der Biegung  $d\psi/ds$  und der Windung  $d\chi/ds$  ist jetzt noch eine dritte Größe  $d\lambda/ds$  aufgetreten, die bei den freien Raumkurven fehlt. Um ihre Bedeutung anschaulicher zu machen, als es nach den vorangehenden Festsetzungen ohne weiteres der Fall ist, denken wir uns mit  $d\psi/ds$  und  $d\chi/ds$  den Grenzübergang gegen Null ausgeführt, dann konvergiert  $\bar{\omega}'$  gegen den Wert

$$\bar{\omega} = \frac{d\lambda}{ds} \frac{ds}{d\tau} \bar{\sigma}$$

$d\lambda/ds$  stellt sich jetzt dar als das Maß der „Verdrehung“ des Flächenstreifens. Im allgemeinen Fall nennen wir die Größe

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{r''}$$

das Maß der „Drillung“ des Flächenstreifens. Die Drillung ist also die Differenz zwischen Verdrehung und Windung.

### 3.3 Zwei feste Körper rollen aufeinander

Auf jeder Oberfläche denken wir uns die Rollspur vorgeschrieben. Im Kontaktpunkt müssen dann die Normalen der Flächen sowie die Tangenten der Spuren übereinstimmen. Da also  $\bar{\sigma}$  und  $\bar{\varepsilon}$  für beide Oberflächen identisch sind, so ist dies auch mit  $\bar{\rho}$  der Fall, und man erkennt, daß für die Rollbewegung zweier Oberflächen aufeinander die Begleitkörper der Spuren momentan zusammenfallen. In jedem der rollenden Körper stellt das Achsenkreuz des Begleitkörpers ein in ihm bewegliches Achsenkreuz vor, auf welches die momentane Rotation desselben bezogen wird. Unterscheiden wir also die Größen  $\lambda$ ,  $d\lambda$ ,  $d\psi$ ,  $d\chi$ , je nachdem sie sich auf die eine oder die andere Spur beziehen, mit den Indizes 1 bzw. I, so sind die Winkelgeschwindigkeiten der rollenden Körper

$$\bar{\omega}'_1 = \left( \frac{d\lambda_1}{d\tau} - \frac{d\chi_1}{d\tau} \right) \bar{\sigma} + \sin \lambda_1 \frac{d\psi_1}{d\tau} \bar{\varepsilon} + \cos \lambda_1 \frac{d\psi_1}{d\tau} \bar{\rho}$$

$$\bar{\omega}'_I = \left( \frac{d\lambda_I}{d\tau} - \frac{d\chi_I}{d\tau} \right) \bar{\sigma} + \sin \lambda_I \frac{d\psi_I}{d\tau} \bar{\varepsilon} + \cos \lambda_I \frac{d\psi_I}{d\tau} \bar{\rho}$$

Hierin sind alle Größen bekannt, sobald die Geschwindigkeit  $u' = ds/d\tau$ , mit welcher der Kontaktpunkt fortschreitet, gegeben ist. Mit Einführung derselben nehmen die Formeln die folgende Gestalt an:

$$\bar{\omega}'_1 = \left[ \left( \frac{d\lambda_1}{ds} - \frac{d\chi_1}{ds} \right) \bar{\sigma} + \sin \lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds} \bar{\varepsilon} + \cos \lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds} \bar{\rho} \right] u'$$

$$\bar{\omega}'_I = \left[ \left( \frac{d\lambda_I}{ds} - \frac{d\chi_I}{ds} \right) \bar{\sigma} + \sin \lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} \bar{\varepsilon} + \cos \lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} \bar{\rho} \right] u'$$

In diesen Gleichungen ist die Kinematik des Rollens analytisch vollständig dargestellt, so daß alle weiteren Betrachtungen nur Folgerungen aus denselben sein können.

### 3.4 Rollen eines starren Körpers auf einer ruhenden Fläche bei gegebenen Spuren

Man erteile jetzt den beiden bisher in Bewegung gedachten Körpern die Winkelgeschwindigkeit  $-\bar{\omega}'_1$ , so kommt der eine zur Ruhe und die Rollbewegung des andern wird dargestellt durch die Rotation  $\bar{\omega}'_I - \bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}$  um eine durch den Kontaktpunkt gehende Drehachse. Es wird also

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = u' & \left[ \left( \frac{d\lambda_I}{ds} - \frac{d\lambda_1}{ds} \right) - \left( \frac{d\chi_I}{ds} - \frac{d\chi_1}{ds} \right) \right] \bar{\sigma} \\ & + u' \left[ \sin \lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \sin \lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds} \right] \bar{\varepsilon} \\ & + u' \left[ \cos \lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \cos \lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds} \right] \bar{\rho} \end{aligned}$$

Die kinematische Bedeutung der einzelnen Komponenten von  $\bar{\omega}$  ist vollkommen klar. Das erste Glied

$$\omega_\sigma = u' \left[ \frac{d\lambda_I}{ds} - \frac{d\lambda_1}{ds} - \left( \frac{d\chi_I}{ds} - \frac{d\chi_1}{ds} \right) \right]$$

entspricht dem Wanken des rollenden Körpers um die Achse der Spur. Das zweite Glied

$$\omega_e = u' \left( \sin \lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \sin \lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds} \right)$$

stellt das Schlingern des rollenden Körpers dar, und das dritte Glied

$$\omega_p = u' \left( \cos \lambda_I \frac{d\psi_I}{ds} - \cos \lambda_1 \frac{d\psi_1}{ds} \right)$$

gibt das Fortrollen um die Querachse der Spur. Man kennt auch jetzt die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  eines beliebigen Systempunktes des rollenden Körpers. Denn bezeichnet man die absolute Lage des momentanen Kontaktpunktes mit  $\bar{z}'$  und diejenige des Systempunktes mit  $\bar{z}$ , so ist

$$\bar{v} = \omega(\bar{z} - \bar{z}')$$

### 3.5 Freies Rollen

Bisher haben wir uns, um den Einblick in den Prozeß der Rollbewegung zu erleichtern, nach dem Vorgehen von *Thomson* und *Tait* auf das zwangsläufige Rollen beschränkt. Es bleibt nun zu zeigen, daß diese anscheinend spezielle Vorstellung tatsächlich ganz allgemein ist.

Wir denken uns die stützende Fläche und die rollende Fläche in der Parameterform gegeben, so daß

$$d\bar{x} = \bar{e}_1 d\varphi_1 + \bar{e}_2 d\varphi_2 = \bar{e}_I d\varphi_I + \bar{e}_{II} d\varphi_{II}$$

wird. Hier sind  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_I, \bar{e}_{II}$  die definierten Begleitvektoren. Die Einheitsstrecken  $\bar{\sigma}, \bar{v}, \bar{\eta}$  sind jetzt bekannte Funktionen der Parameter  $\varphi$ , und die Flächennormale wird ausgedrückt durch

$$\bar{e} = \bar{e}_1 \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \bar{e}_2$$

sowie die entsprechende Formel für die rollende Fläche. Aus

$$\bar{e} = \cos \lambda \cdot \bar{v} + \sin \lambda \cdot \bar{\eta}$$

folgt, indem wir die Indizes weglassen

$$\cos \lambda = \bar{v} \bar{e}$$

$$\text{also } \cos \lambda = \frac{r}{ds^2} \bar{e} d^2 \bar{x}.$$

Ebenso einfach erhält man

$$\sin \lambda = \bar{e} \bar{\sigma} v = \frac{r}{ds^2} \bar{e} d\bar{x} d^2 \bar{x}$$

Hieraus gewinnt man durch Differenzieren

$$\cos \lambda \cdot d\lambda = d\bar{e} \bar{\sigma} v + \bar{e} \bar{\sigma} dv$$

und da  $\bar{\sigma} v = \bar{\eta}$  und  $d\bar{\sigma} v = 0$  ist,

$$\cos \lambda \cdot d\lambda = d\bar{e} \bar{\eta} + (\cos \lambda \cdot \bar{v} + \sin \lambda \cdot \bar{\eta}) d\bar{\eta}$$

$$\text{also } \cos \lambda \cdot d\lambda = d\bar{e} \bar{\eta} + \cos \lambda \cdot \bar{v} d\bar{\eta}.$$

Es ist aber

$$\bar{v} d\bar{\eta} = ds/r'$$

und demnach

$$\cos \lambda \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\bar{e}}{ds} \bar{\eta} + \frac{\cos \lambda}{r'}$$

Setzt man hier noch

$$\bar{\eta} = \frac{r}{ds^3} \overline{dx d^2 x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r'} = \frac{d\chi}{ds}$$

so wird

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\cos \lambda} \frac{r}{ds^4} d\bar{e} \overline{dx d^2 x}$$

und man erkennt, daß alle in den Entwicklungen vorkommenden Größen durch die Parameter der stützenden und rollenden Fläche, sowie ihre Differentiale explizit darstellbar sind. Durch Einführen derselben in die Formel für  $\omega$  gewinnt man den fertigen Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit bei der freien Rollbewegung [7].

### 3.6 Analytischer Ansatz des allgemeinen Rollproblems

Durch einen festen Punkt  $O$  des Raumes legen wir ein rechtwinkliges ruhendes Achsenkreuz  $O_{1,2,3}$  und beziehen darauf die Koordinaten der ruhenden Fläche. Sie mögen durch zwei Parameter  $\varphi_1, \varphi_2$  ausgedrückt sein, so daß

$$x'_1 = F_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad x'_2 = F_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad x'_3 = F_3(\varphi_1, \varphi_2) \quad (20)$$

die ruhende Fläche darstellen.

In dem rollenden Körper wählen wir einen beliebigen, mit ihm fest verbundenen Punkt  $C$ , dessen absolute Koordinaten  $c_1, c_2, c_3$  sind, und ein Achsenkreuz  $C_{I,II,III}$ , auf welches wir die Punkte der beweglichen Oberfläche beziehen. Ihre Koordinaten seien ausgedrückt durch die Gleichungen

$$z'_I = f_I(\varphi_I, \varphi_{II}), \quad z'_{II} = f_{II}(\varphi_I, \varphi_{II}), \quad z'_{III} = f_{III}(\varphi_I, \varphi_{II}) \quad (21)$$

Zwischen den beiden Koordinatensätzen bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} x'_1 - c_1 &= \varepsilon_{I1} z'_I + \varepsilon_{II1} z'_{II} + \varepsilon_{III1} z'_{III} \\ x'_2 - c_2 &= \varepsilon_{I2} z'_I + \varepsilon_{II2} z'_{II} + \varepsilon_{III2} z'_{III} \\ x'_3 - c_3 &= \varepsilon_{I3} z'_I + \varepsilon_{II3} z'_{II} + \varepsilon_{III3} z'_{III} \end{aligned} \quad (22)$$

worin die neun Koeffizienten  $\varepsilon$  Funktionen der drei Eulerschen Positionswinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  sind.

Für beide Spurkurven führen wir jetzt die Begleitvektoren

$$\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varphi_1} = \bar{e}_1, \quad \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varphi_2} = \bar{e}_2, \quad \frac{\partial (\bar{x}' - c)}{\partial \varphi_I} = \bar{e}'_I, \quad \frac{\partial (\bar{x}' - c)}{\partial \varphi_{II}} = \bar{e}'_{II}$$

ein. Damit nun die Wegelemente des Kontaktpunktes übereinstimmen, muß

$$\bar{e}'_I d\varphi_1 + \bar{e}'_2 d\varphi_2 = \bar{e}'_I d\varphi_I + \bar{e}'_{II} d\varphi_{II} \quad (23)$$

sein, gleichbedeutend mit den Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} e'_{11} d\varphi_1 + e'_{21} d\varphi_2 &= e'_{11} d\varphi_I + e'_{111} d\varphi_{II} \\ e'_{12} d\varphi_1 + e'_{22} d\varphi_2 &= e'_{12} d\varphi_I + e'_{112} d\varphi_{II} \\ e'_{13} d\varphi_1 + e'_{33} d\varphi_2 &= e'_{13} d\varphi_I + e'_{113} d\varphi_{II} \end{aligned} \quad (24)$$

Hierzu tritt noch die Forderung, daß die Normalen beider Flächen in dem Kontaktpunkt übereinstimmen müssen, was durch die Gleichung

$$\frac{\overline{e'_1 e'_2}}{|\overline{e'_1 e'_2}|} = \frac{\overline{e'_I e'_{II}}}{|\overline{e'_I e'_{II}}|} \quad (25)$$

zum Ausdruck gebracht wird oder, wenn man die Zerlegung nach dem Koordinatensystem  $O_{1,2,3}$  einführt, durch

$$\frac{e'_{12}e'_{23} - e'_{13}e'_{22}}{e'_{12}e'_{113} - e'_{13}e'_{112}} = \frac{e'_{13}e'_{31} - e'_{11}e'_{23}}{e'_{13}e'_{111} - e'_{11}e'_{113}} = \frac{e'_{11}e'_{22} - e'_{12}e'_{21}}{e'_{11}e'_{112} - e'_{12}e'_{111}} \quad (26)$$

Diese Doppelgleichung enthält zwei unabhängige Relationen zwischen den Eulerschen Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und den Parametern  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_I, \varphi_{II}$ .

Offenbar genügen zur Positionsbestimmung des rollenden Körpers die sieben Größen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_I, \varphi_{II}, \alpha, \beta, \gamma$ . Unter diesen sieben Variablen bestehen nach Gl. (25) zwei Gleichungen, so daß fünf unabhängige Bestimmungsstücke bleiben, durch die sich dann auch nach Gl. (22) die Größe  $\bar{c}$  ausdrücken läßt. Wenn nun Rollen ohne Gleiten stattfinden soll, so liefert Gl. (23) noch zwei weitere unabhängige Gleichungen zwischen den Differentialen, so daß der rollende Körper im unendlich Kleinen noch drei Freiheitsgrade hat, womit ausgedrückt ist, daß  $\bar{\omega}$  in jedem Moment noch willkürlich gewählt werden kann.

Ist im besonderen Fall die ruhende Fläche eine Ebene, dann nimmt man die Achse 3 senkrecht darauf und setzt  $\varphi_1 = x'_1, \varphi_2 = x'_2$ . Der Vektor der Flächennormale  $\overline{e'_I e'_{II}}:|\overline{e'_I e'_{II}}|$  fällt demnach in die Achse 3 und Gl. (26) wird durch die folgenden ersetzt:

$$e'_{12}e'_{113} - e'_{13}e'_{112} = 0, \quad e'_{13}e'_{111} - e'_{11}e'_{113} = 0 \quad (27)$$

mit

$$\begin{aligned} e'_{11} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{111} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{1111} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \\ e'_{12} &= \varepsilon_{12} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{112} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{1112} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \\ e'_{13} &= \varepsilon_{13} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{113} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} + \varepsilon_{1113} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \\ e'_{111} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{111} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{1111} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} \\ e'_{112} &= \varepsilon_{12} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon'_{112} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{1112} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} \\ e'_{113} &= \varepsilon_{13} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{113} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} + \varepsilon_{1113} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} \end{aligned}$$

Nach einer leichten Umformung lassen sich die Gleichungen (27) auch in der folgenden Weise schreiben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \left( \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \right) + \varepsilon_{111} \left( \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} \right) \\ + \varepsilon_{1111} \left( \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} \right) = 0 \\ \varepsilon_{12} \left( \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \right) + \varepsilon_{112} \left( \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_I} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial z'_{III}}{\partial \varphi_{II}} \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} \right) \\ + \varepsilon_{1112} \left( \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_I} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_{II}} - \frac{\partial z'_I}{\partial \varphi_{II}} \frac{\partial z'_{II}}{\partial \varphi_I} \right) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Man hätte dieselben auch ohne weiteres ansetzen können, denn sie drücken unmittelbar aus, daß die Flächennormale des rollenden Körpers auf der ruhenden Ebene beständig senkrecht steht.

Die Gleichungen (24) werden ersetzt durch

$$\begin{aligned} dx'_1 &= e'_{11} d\varphi_I + e'_{111} d\varphi_{II} \\ dx'_2 &= e'_{12} d\varphi_I + e'_{112} d\varphi_{II} \\ 0 &= e'_{13} d\varphi_I + e'_{113} d\varphi_{II} \end{aligned} \quad (29)$$

#### 4. Drei Grundaufgaben aus der räumlichen Getriebelehre im Zusammenhang mit der Axoide

1. *Grundaufgabe*: Es sind gegeben die ruhende Achsenfläche (Rastaxoide) und die Bahnkurve eines Systempunktes, gesucht ist die bewegliche Achsenfläche (Gangaxoide).

2. *Grundaufgabe*: Es sind gegeben der Richtkegel der ruhenden Achsenfläche und die Bahnkurven zweier Systempunkte, zu bestimmen sind die ruhende Achsenfläche und die bewegliche Achsenfläche.

3. *Grundaufgabe*: Es sind gegeben die ruhende Achsenfläche und die von einer Geraden erzeugte Regelfläche, zu ermitteln ist die bewegliche Achsenfläche.

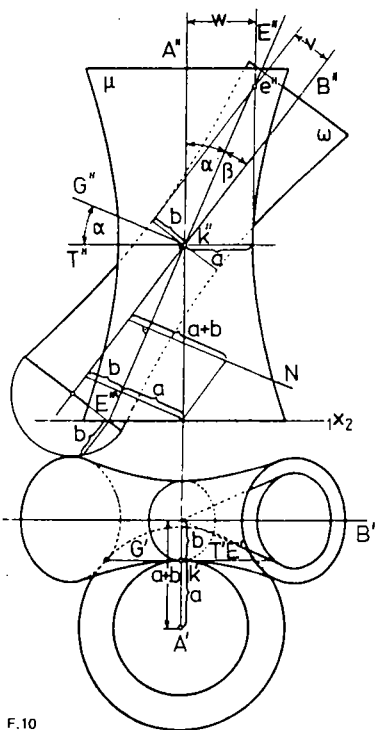
Die Lösungen dieser Grundaufgaben werden im Rahmen dieser Arbeit nicht erörtert [8 bis 12].

#### 5. Rotationshyperboloide als zugeordnete Achsenflächen [13 bis 15]

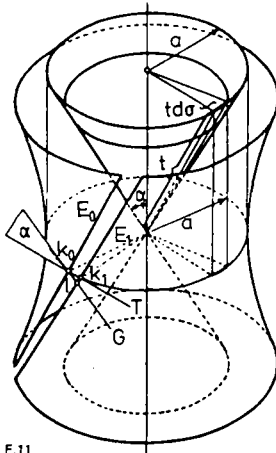
Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Rotationshyperboloide  $\mu$  und  $\omega$  einander zugeordnete Achsenflächen sein können. Dazu ist notwendig, daß sie zwei unendlich benachbarte Erzeugende gemeinsam haben, also einander entlang allen Punkten einer Erzeugenden berühren. Ist dies der Fall, dann berühren sie einander auch in jeder Lage, wenn  $\mu$  um seine Achse  $A$  oder  $\omega$  um seine Achse  $B$  rotiert oder wenn sowohl  $\mu$  um  $A$  als auch  $\omega$  um  $B$  rotieren; denn durch diese Rotationen bleiben die beiden Flächen als Ganzes unverändert. Dreht sich etwa nur  $\mu$  um  $A$ , so kann mittels Reibung an  $\omega$  die drehende Bewegung um  $A$  auf  $\omega$  übertragen, also in eine drehende Bewegung um  $B$  übersetzt werden. Die beiden Flächen  $\mu$  und  $\omega$  führen relativ zueinander die obengenannte „schrotende“ Bewegung aus.

Um die Konstruktion zweier solcher Rotationshyperboloide durchzuführen, die zugeordnete Achsenflächen sind, sei an einige Eigenschaften des Rotationshyperboloides erinnert, die für die Konstruktion wesentlich sind: Die Striktionslinie<sup>1)</sup>

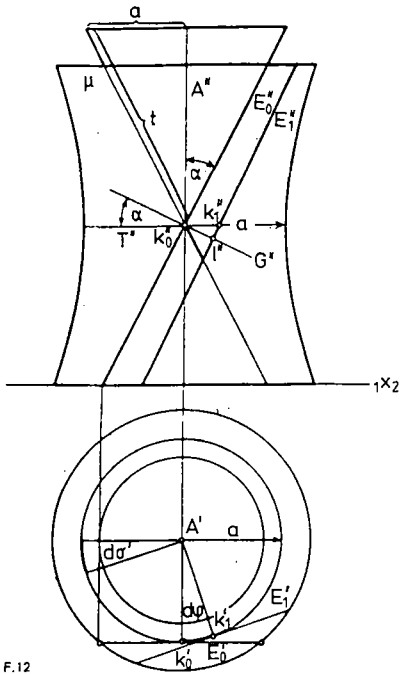
<sup>1)</sup> Konstruiert man das Gemeinlot für irgend zwei windschiefe Erzeugende  $E_0, E_1$  derselben Schar, so nähern sich die Endpunkte dieses Gemeinlotes dem Kehlkreispunkt  $k_0$  auf  $E_0$ , wenn die Erzeugende  $E_1$  sich unbegrenzt der anderen Erzeugenden  $E_0$  nähert;  $k_0$  heißt der Zentralpunkt von  $E_0$ . Die Striktionslinie ist der Ort der Zentralpunkte.



F.10  
Bild 10. Die Darstellung in der Grundrißebene sowie in der Aufrißebene der Rotationsachsen  $A$  und  $B$  sowie das Gemeinlot dieser Achsen



F.11  
Bild 11. Der Schrägwinkel und Kehlkreis des Hyperboloids



F.12  
Bild 12. Ein Paar benachbarter Erzeugender des Hyperboloids

eines Rotationshyperboloides ist der Kehlkreis. Die Zentralebenen, d.h. die Tangentialebenen in den Punkten der Striktionslinie (des Kehlkreises), sind parallel zur Rotationsachse. Die asymptotischen Ebenen der Erzeugenden<sup>2)</sup> des Rotationshyperboloides umhüllen einen coaxialen Rotationskegel, dessen Scheitel im Mittelpunkt des Hyperboloides liegt (Asymptotenkegel). Da die beiden Flächen  $\mu$ ,  $\omega$  zwei unendlich benachbarte Erzeugende gemeinsam haben, sich also längs einer Erzeugenden  $E$  berühren, haben sie auch das Gemeinlot und somit den Zentralpunkt und dessen Tangentialebene („Zentralebene“) und die Flächennormale im gemeinsamen Zentralpunkt gemeinsam. Da andererseits die Flächennormale im Zentralpunkt<sup>3)</sup> beide Rotationsachsen schneidet und die Zentralebene zu den Achsen parallel ist, so ist die gemeinsame Flächennormale auch das Gemeinlot für die beiden Rotationsachsen  $A$  und  $B$ .

Wählt man die Grundrißebene senkrecht zu  $A$  und die Aufrißebene parallel  $B$ , so erscheint das Gemeinlot im Aufriß als Punkt, vgl. Bild 10. Bei dieser Annahme schneidet die Zentralebene im vordersten Punkt des Kehlkreises aus dem Rotationshyperboloid  $\omega$  (zwei Erzeugende  $E$ ,  $F$  aus, deren Aufriß mit dem scheinbaren zweiten Umriß des Asymptotenkegels übereinstimmt. Die Winkel zwischen der Rotationsachse  $A$  bzw.  $B$  mit der gemeinsamen Erzeugenden der beiden Hyperboloide – die beiden sogenannten „Schräkwinkel“ – erscheinen im Aufriß in richtiger Größe.

Da für die Geraden  $A$ ,  $E$ ,  $B$  alle drei Gemeinlote in eine Gerade fallen, die sich bei obiger Annahme als gemeinsamer Schnittpunkt ihrer Aufrisse abbildet, folgt

$$\widehat{AE} + \widehat{EB} = \widehat{AB}.$$

<sup>2)</sup> Das sind die Berührungsebenen in den unendlich fernen Punkten der Erzeugenden. Wie bei jeder Regelfläche sind sie die durch die Erzeugende normal zur Zentralebene dieser Erzeugenden gelegten Ebenen.  
<sup>3)</sup> wie jede Flächennormale einer Rotationsfläche

- a) Die Summe der Schräkwinkel zweier Hyperboloide, die einander längs einer Erzeugenden berühren, ist gleich dem Winkel der beiden Rotationsachsen.
- b) Die Länge des Gemeinlotes der Achsen  $A$ ,  $B$  ist gleich der Summe  $a + b$  der Kehlkreisradien  $a$ ,  $b$  (Bild 10).

Legt man in der Zentralebene einer Erzeugenden  $E$  eines Kehlkreispunktes  $k$  ein Lot  $G$  auf  $E$ , so liegt in  $G$  das Gemeinlot von  $E$  und der unendlich benachbarten Erzeugenden. Die Tangente  $T$  im Punkt  $k$  an den Kehlkreis ist  $\perp A$ , und es ist daher  $\widehat{TG} = \widehat{EA}$  als Normalwinkel, Bild 10 und 11.

Das Gemeinlot zweier unendlich benachbarter Erzeugender schließt mit der Tangente in dem zu diesem Gemeinlot gehörigen Zentralpunkt einen Winkel ein, der dem Schräkwinkel des Hyperboloids gleich ist.

Wir haben die Aufgabe, für gegebene Rotationsachsen  $A$ ,  $B$  zwei Rotationshyperboloide  $\mu$  und  $\omega$  als zugeordnete Achsenflächen zu konstruieren, welche einander entlang allen Punkten einer Erzeugenden berühren und für welche also die Längen der Gemeinlote unendlich benachbarter Erzeugender für beide Hyperboloide gleich sind, für welche ferner die Winkel benachbarter Erzeugender für beide Hyperboloide gleich sind; und wir fügen die Bedingung hinzu, daß die Drehgeschwindigkeiten der Hyperboloide sich wie  $v:w$  verhalten. Da die Endpunkte des Gemeinlotes von  $A$ ,  $B$  Kehlkreismittelpunkte sind, die Länge  $l$  des Gemeinlotes der Summe  $a + b$  der Kehlkreisradien  $a$ ,  $b$  gleich ist, so brauchen wir nur die Kehlkreisradien und die Schräkwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  ermitteln, wobei noch die Beziehung verwertbar ist, daß die Summe der Schräkwinkel dem Winkel der Achsen beider Hyperboloide gleich ist. In Bild 10 ist im Grundriß von  $\mu$  nur jener Teil gezeichnet, der unterhalb seines Kehlkreises liegt.

Es seien  $E_0$ ,  $E_1$  (vgl. Bild 11 und 12) ein Paar benachbarter Erzeugender, die miteinander den Winkel  $d\sigma$  einschließen. Dann erscheint  $d\sigma$  als Flächenelement des Asymptotenkegels. Die zugehörigen Zentralpunkte auf  $E_0$ ,  $E_1$  seien  $k_0$ ,  $k_1$ , dann

ist die Kehlkreistangente  $T$  gleich  $(k_0 k_1)$ ,  $d\varphi$  sei der unendlich kleine Zentriwinkel des Kehlkreises für den Bogen  $k_0 k_1$ ,  $G$  das Gemeinlot für  $E_0, E_1$  und  $l$  der Lotfußpunkt auf  $E_1$ . Dann ist  $k_0 k_1 = ad\varphi$  und die Länge des Gemeinlotes  $\overline{k_0 l} = \overline{k_0 k_1} \cos \alpha = ad\varphi \cos \alpha$ . Analog ist die Länge des Gemeinlotes des zweiten Hyperboloids  $bd\psi \cos \beta$ , wobei  $d\psi$  für  $\omega$  die analoge Bedeutung hat wie  $d\varphi$  für  $\mu$ . Da die Gemeinlote gleiche Länge haben, ist

$$ad\varphi \cos \alpha = bd\psi \cos \beta \quad (30)$$

Schneiden wir den Asymptotenkegel von  $\mu$  normal zu seiner Achse in solcher Entfernung ab, daß sein Schnittkreis einen Radius hat, der gleich dem Kehlkreisradius  $a$  ist und bezeichnet  $k$  die zugehörige Erzeugendenlänge des Asymptotenkegels, so ist für  $\mu$

$$kd\sigma = ad\varphi^4), \quad \text{und da} \quad a/k = \sin \alpha$$

ist, gilt

$$d\sigma = \sin \alpha d\varphi$$

und analog für  $\omega$

$$d\tau = \sin \beta d\psi^5)$$

Da  $d\sigma = d\tau$  ist, gilt

$$\sin \alpha d\varphi = \sin \beta d\psi \quad (31)$$

Durch Division von Gl. (30) durch Gl. (31) folgt

$$a \cot \alpha = b \cot \beta \quad (32)$$

Sollen sich die Geschwindigkeiten wie  $v:w$  verhalten, so verhält sich, da  $d\varphi$  und  $d\psi$  Maße für die Umdrehungsgeschwindigkeiten sind,  $d\varphi:d\psi = v:w$  und nach Gl. (31)

$$\sin \alpha : \sin \beta = w : v \quad (33)$$

Wählen wir die Aufrißebene zu  $A$  und  $B$  parallel, so ergeben Gl. (32) und (33) die in Bild 10 angegebene Konstruktion, die planimetrisch aufzufassen ist. Zuerst wurde der Punkt  $e''$  von  $E''$  mittels  $v$  und  $w$  konstruiert, woraus sich  $\alpha$  und  $\beta$  ergeben. Bild 10 zeigt auch die Ermittlung von  $a$  und  $b$ .  $N$  ist eine beliebige Normale zu  $E''$ , auf der von ihrem Schnittpunkt mit  $B''$  die Länge  $(a+b)$  aufgetragen ist; sie wurde  $\parallel B''$  verschoben, so daß der zweite Endpunkt dieser Strecke in  $A''$  liegt.  $E''$  teilt dann gemäß Gl. (32) diese Strecke in  $a$  und  $b$ .

## 7. Wälzungsflächen [13]

Gegeben sei die Achse  $A$  einer Rotationsfläche  $\alpha$  und bezüglich  $A$  windschief die Achse  $B$  einer zweiten zu suchenden Rotationsfläche  $\beta$ , von der gefordert wird, daß sie die Rotationsfläche  $\alpha$  entlang einer Kurve  $C$  berühre. Dreht sich dann  $\alpha$  um  $A$ , so kann mittels Reibung der Fläche  $\alpha$  und  $\beta$  die Rotation von  $\alpha$  um  $A$  auf die Achse  $B$  übertragen werden. Die Rotationsfläche  $\beta$  heißt dann die „Wälzungsfläche“ von  $\alpha$  für die Achse  $B$  und  $\alpha$  die Wälzungsfläche von  $\beta$  für die Achse  $A$ . Läßt man  $\beta$  um die Achse  $A$  rotieren, so wird sie in allen Lagen  $\alpha$  berühren, und die Berührungskurve  $C$  macht die Rotation mit, nimmt somit verschiedene Lagen  $C_0$ ,

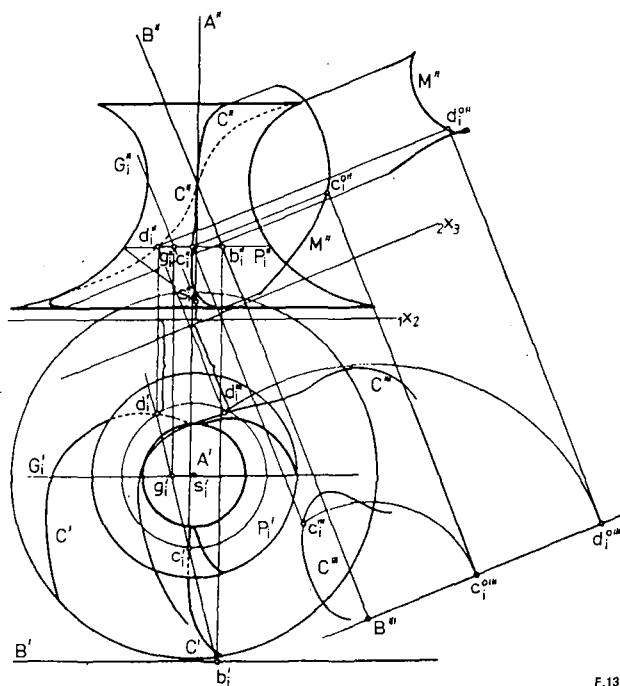


Bild 13. Gegeben ist die Achse  $A$  einer Rotationsfläche  $\alpha$  und bezüglich  $A$  windschief die Achse  $B$  einer zweiten zu suchenden Rotationsfläche  $\beta$ , die  $\alpha$  entlang einer Kurve  $C$  berührt

$C_1, \dots, C_i$  ein, in denen  $\alpha$  von den verschiedenen Lagen  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i$  der Fläche  $\beta$  berührt wird. Die Fläche  $\alpha$  ist daher die Einhüllende, welche  $\beta$  bei der Rotation um  $A$  erzeugt, und umgekehrt ist  $\beta$  die Einhüllende, welche von  $\alpha$  bei der Rotation um  $B$  erzeugt wird.  $C$  heißt die „Charakteristik“ der Einhüllenden.

### Ermittlung der Charakteristik $C$ :

Da in  $C$  die beiden Rotationsflächen  $\alpha$  und  $\beta$  einander berühren, haben sie in allen Punkten von  $C$  eine gemeinsame Flächennormale. Jede Normale einer Rotationsfläche schneidet die Rotationsachse. Daher muß die gemeinsame Normale beide Achsen  $A$  und  $B$  schneiden. Ordnen wir die Flächennormalen von  $\alpha$  in der Weise, daß wir die Gesamtheit aller Flächennormalen längs eines jeden Parallelkreises  $P$  von  $\alpha$  zusammenfassen, so bilden diese einen Rotationskegel (Normalenkegel  $v$ ) mit der Achse  $A$ . Die durch die beiden Schnittpunkte  $m$  und  $n$  von  $B$  mit  $v$  gehenden Erzeugenden von  $v$  sind die gemeinsamen Normalen beider Rotationsflächen, und die zugehörigen Schnittpunkte  $c$  und  $d$  dieser Erzeugenden mit dem Parallelkreis  $P$  gehören der Kurve  $C$  an. — Bezeichnet man die Parallelkreise  $P$  mit  $P_0, P_1, \dots, P_i$ , die zugehörigen Normalenkegel mit  $v_0, v_1, \dots, v_i$ , die auf den Parallelkreisen liegenden Punkte  $c, d$  mit  $c_0, d_0; c_1, d_1; \dots; c_i, d_i$ , so bildet die Mannigfaltigkeit der Punkte  $c_i, d_i$  ( $i$  laufend) die Kurve  $C$ , entlang der die beiden Rotationsflächen  $\alpha$  und  $\beta$  einander berühren. Ob die hierdurch erzeugte Mannigfaltigkeit  $C$  aus einem oder aus mehreren Zweigen,  $\beta$  daher aus einer oder mehreren Schalen besteht, hängt von der besonderen Annahme der Meridiankurve von  $\alpha$  ab.

Faßt man die Gesamtheit der Flächennormalen eines Meridianes von  $\alpha$  (Ebene  $\mu$ ) zusammen, so sind die durch den Schnittpunkt  $[B\mu]$  gehenden Flächennormalen beider Rotationsflächen gemeinsam. Die Anzahl der Schnittpunkte von  $C$  mit einer Meridianebene  $\mu$  von  $\alpha$  ist gleich der Anzahl

<sup>4)</sup> Bild 12; der Grundriß von  $d\sigma$  ist gleich  $d\varphi$ .

<sup>5)</sup>  $\tau$  bedeutet das Analoge für den Asymptotenkegel von  $\omega$  wie  $\sigma$  für den von  $\mu$ .

der Lösungen des „Normalenproblems“<sup>6)</sup> der Meridiankurve von  $\alpha$ . Hierbei ist eine  $n$ -fache Normale  $n$ -fach zu zählen.

Zur konstruktiven Durchführung wählt man zweckmäßig die Grundrißebene  $\Pi_1 \perp A$  und die Aufrißebene  $\Pi_2 \parallel B$ , Bild 13. Um die Schnittpunkte von  $B$  mit einem Normalenkegel  $v_i$  zu finden, legt man durch die Spitze  $s_i$  von  $v_i$  zu  $B$  eine Parallele  $G_i$ . Die Ebene  $(BG_i)$  schneidet dann  $v_i$  in zwei Erzeugenden. Sucht man die Schnittpunkte  $b_i$  und  $g_i$  der Geraden  $B$  und  $G_i$  mit der Ebene des Parallelkreises  $P_i$ , so schneidet die Gerade  $(b_i g_i)$  den Kreis  $P_i$  in den gesuchten Punkten  $c_i$  und  $d_i$ , die der Charakteristik  $C$  angehören. Bei der besonderen Wahl der Grundrißebene fallen die Grundrisse  $G'_0, G'_1, \dots, G'_i$  aller Geraden  $G$  in eine Gerade  $G'_i$  durch  $A' \parallel X_{12}$ .

Um den Meridian von  $\beta$  zu finden, führt man eine dritte Rißebe  $\Pi_3 \perp B$  ein und überträgt zunächst die Punkte  $c_i, d_i$  in den dritten Riß<sup>7)</sup>. Die zweite Hauptmeridianebe<sup>8)</sup>  $\mu$  von  $\beta$  bildet sich im dritten Riß als Gerade durch  $B'' \parallel X_{23}$  ab. Dreht man nun die Punkte  $c_i, d_i$  um  $B$  in die zweite Hauptmeridianebe, wodurch sie die Lagen  $c''_i, d''_i$  einnehmen<sup>9)</sup>, so bildet die Mannigfaltigkeit der Aufrisse  $c''_i, d''_i$  der Punkte  $c_i, d_i$  den Aufriß  $M''$  der Hauptmeridiankurve  $M$  der gesuchten Wälzfläche.

<sup>6)</sup> Das Normalenproblem ist die Aufgabe, von einem Punkt die Normale auf eine Kurve zu konstruieren.

<sup>7)</sup> Der Abstand  $c'_i \parallel X_{12}$  ist gleich dem Abstand  $c''_i \parallel X_{23}$ ; ebenso  $d'_i \parallel X_{12} = d''_i \parallel X_{23}$ .

<sup>8)</sup> Ebene durch  $B \parallel \Pi_2$ .

<sup>9)</sup>  $c''_i, d''_i$  in der Geraden durch  $B'' \parallel X_{23}$ .

## Literatur

- [1] Reuleaux, F.: Theoretische Kinematik. Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens Teil 1. Braunschweig: Vieweg-Verlag 1875.
- [2] Müller, R.: Einführung in die theoretische Kinematik. Berlin: Springer-Verlag 1932.
- [3] Müller, H.R.: Kinematik. Sammlung Göschen Bd. 584/84a, Berlin 1963.

- [4] Meyer zur Capellen, W.: Die Antriebsbewegung bei Raumgetrieben und die Extrema der Übersetzungen. Mechanism and Machine Theory Bd. 21 (1986) Nr. 2, S. 199.
- [5] Skreiner, M.: A study of the geometry and the kinematics of instantaneous spatial motion. J. Mechanisms Bd. 1 (1966) S. 115.
- [6] Garnier, R.: Cours de cinématique, Band II. Paris: Gauthier-Villars 1956.
- [7] Heun, K.: Lehrbuch der Mechanik, Teil I: Kinematik. Leipzig: Göschen'sche Verlagshandlung 1906.
- [8] Federhofer, K.: Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. Wien: Springer-Verlag 1928.
- [9] Dizioğlu, B.: Die kinematische Geometrie der allgemein räumlichen Relativbewegung von drei Gliedern. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 52 (1986) Nr. 2, S. 37/56.
- [10] Beyer, R.: Technische Raumkinematik. Berlin: Springer-Verlag 1963.
- [11] Hartmann, W.: Die Maschinengetriebe. Stuttgart und Berlin: Deutsche Verlagsanstalt 1913.
- [12] Antomari, X.: Application de la méthode à l'étude des surfaces réglées. Mouvement d'un corps solide à cinq conditions (thèses). Paris: Librairie nony 1894.
- [13] Mack, K.: Geometrie der Getriebe. Berlin: Springer-Verlag 1932.
- [14] Dizioğlu, B.: Die kinematische Theorie der Hyperboloidenreibungsräder. Ingenieur-Archiv Bd. 54 (1984) S. 114.
- [15] Dizioğlu, B.: Kinematische Geometrie einer speziellen zweiparametrischen Bewegung. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 37 (1985) S. 131.
- [16] Dizioğlu, B.: Unveröffentlichte Vorlesungsniederschriften über höhere Getriebelehre von 1982 bis 1986.

Eingegangen am 16.3.1987

F 3890

## Relaxation einer komplexen, turbulenten Grenzschicht

Udo R. Müller

Die Relaxation einer zweidimensionalen, inkompressiblen, turbulenten Scherströmung, die durch die Wechselwirkung einer Plattengrenzschicht (Dicke: 26 mm; Reynoldszahl, gebildet mit Impulsverlustdicke: 3800) mit dem Nachlauf eines querangeströmten, wandparallel liegenden Kreiszylinders (Durchmesser: 10 mm, Wandabstand der Achse: 13 mm) entstand, wurde in einem Windkanalexperiment detailliert vermessen. Im Bereich zwischen zwanzig und siebenzig Zylinderdurchmessern stromab vom Störzylinder wurden Profile aller Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors, des Reynoldsschen Spannungstensors und des Tensors der Dreifachkorrelationen der Schwankungen mit Hitzdrahtanemometrie, insbesondere auch mit einer im Verlauf der Untersuchung entwickelten Dreisensor-Dreikomponenten-Meß-

technik, aufgenommen. Die Datenerfassung und -auswertung erfolgte mit einem digitalen Datenverarbeitungssystem. Die Verteilung der Wandschubspannung wurde mit einem neuartigen Ölfilm-Laser-Interferometer ermittelt. Die Druckverteilungsmessungen an der Wand ergaben verschwindende Druckgradienten.

Die gestörte Strömung zeigte Eigenschaften, die von denen einer Gleichgewichtsgrenzschicht abwichen. Die Profile von gemittelter Geschwindigkeit, turbulenter Schubspannung und kinetischer Schwankungsenergie zeigten keinerlei Ähnlichkeitsverhalten, außerdem lieferten Gradienten der Schwankungsgeschwindigkeit in Längsrichtung vor allem in der Nähe des Zylinders einen nicht vernachlässigbaren Beitrag zur Impulsbilanz. Anhand der Transportgleichungen wurden die Bilanzen aller

Reynoldsschen Spannungen erstellt. Die Annahme von Isotropie der Energiedissipation, die aus der Bilanz für die Turbulenzenergie ermittelt wurde, führte zu Abschätzungen der bisher nicht direkt meßbaren Druckscherkorrelationen. Die ermittelten Ergebnisse hatten im stromaufliegenden Teil der Strömung große Maxima von Erzeugung und Vernichtung in der Mitte der Grenzschicht, die schnell abgebaut wurden und in Wandnähe zur Ausbildung eines für Plattengrenzschichten charakteristischen Gleichgewichts von Produktions- und Dissipationstermen führten.

Die numerische Simulation der untersuchten Grenzschicht erforderte zur detaillierten Beschreibung der Strömungsentwicklung die Verwendung eines Reynolds-Stress-Turbulenzmodells. Die Grenzschichtgleichungen und das  $\bar{k}, \bar{\epsilon}$ ,