Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
45, 135–157 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Fonctions de concentration sur certains groupes localement compacts

Philippe Bougerol

Université de Paris VII, UER Mathematiques, 2 Place Jussieu, F-75221 Paris Cedex 05

Un aspect de la théorie des marches aléatoires sur les groupes localement compacts est la détermination de la structure des groupes récurrents, c'est-à-dire des groupes G portant une probabilité μ, dont le support engendre G et telle que la mesure $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}$ ne soit pas de Radon, où μ^{*n} désigne la n-ième puissance de convolution de μ.

Une façon d'aborder ce problème est d'étudier, si K est un compact de G, le comportement asymptotique de la suite $\{\mu^{*n}(K), n \in \mathbb{N})$ en fonction de la structure de G et, en quelque sorte, indépendamment des propriétés de la probabilité μ elle même. Plus précisément si, K étant un compact d'intérieur non vide de G fixé, on appelle fonction de concentration de μ, et on note F_μ, l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_\mu(n) = \sup_{x, y \in G} \mu^{*n}(x K y),$$

nous cherchons à associer au groupe G une classe $\mathscr{C}$, la plus large possible, de probabilités sur G et une suite non triviale de réels positifs $\{c(n), n \in \mathbb{N}\}$ telles que:

(A) Pour toute probabilité μ de $\mathscr{C}$, il existe une constante α_μ strictement positive vérifiant

$$F_\mu(n) \leqq \alpha_\mu c(n) \quad \text{pour tout entier } n.$$

Dans le cas où G est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, par exemple, A.N. Kolmogorov [12], puis C.G. Esseen [6] ont montré que si $\mathscr{C}$ est la classe des probabilités qui ne sont pas portées par un point, l'assertion (A) est vraie si $c(n)$ est égal à $1/\sqrt{n}$.

On peut trouver une exposition detaillée de la théorie classique des fonctions de concentration sur $\mathbb{R}^n$ dans le livre de W. Hentgartner et R. Theodorescu [9].

La première partie de cet article est consacrée à l'étude de ce problème dans le cas où G est extension compacte d'un sous groupe abélien distingué fermé de rang r. On y montre, (théorème 16), que si $\mathscr{C}$ est la classe des probabilités

0044-3719/78/0045/0135/$04.60

adaptées étalées, (A) est vérifiée pour $c(n)=n^{-r/2}$. On doit, pour cela, déterminer la structure de ces groupes (Paragraphe C), de certaines de leurs représentations unitaires (Paragraphe E), des probabilités de $\mathscr{C}$ (Paragraphe D). Les résultats de cette partie ont été annoncés dans P. Bougerol [3].

Dans la deuxième partie on montre que si G est non moyennable, si $\mathscr{C}_\rho$ est la classe des probabilités adaptées telles que (A) est vérifié pour $\alpha(n)$ égal à ρ^n, alors la classe $\mathscr{C}$ des probabilités adaptées est réunion des classes $\{\mathscr{C}_\rho, \rho\in]0,1[\}$.

Sur un groupe localement compact G, un compact K d'intérieur non vide étant toujours fixé, définissons, pour une probabilité μ, la fonction de concentration à droite D_μ et la fonction de concentration à gauche $\mathscr{G}_\mu$ par:

$$D_\mu(n)=\operatorname*{Sup}_{x\in G}\mu^{*n}(Kx) \qquad \mathscr{G}_\mu(n)=\operatorname*{Sup}_{x\in G}\mu^{*n}(xK).$$

Bien que dans les cas traités dans les deux premières parties, les fonctions F_μ, D_μ et $\mathscr{G}_\mu$ aient le même comportement asymptotique, on montre par un exemple sur le groupe affine de la droite réelle, dans la troisième partie, que l'on peut avoir $D_\mu(n)$ (et donc $F_\mu(n)$) de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ alors que $\mathscr{G}_\mu(n)$ décroit exponentiellement. Ces fonctions peuvent donc avoir des comportements radicalement différents.

Je tiens à remercier tout particulièrement Pierre Crepel et Daniel Revuz qui m'ont intéressé à ce problème et aidé de leurs conseils.

Première partie: Fonctions de concentrations sur les extensions compactes de groupes abéliens

A. Définitions.

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable (LCD) μ une probabilité sur G.

On dit que: *μ est étalée* si une puissance de convolution de μ n'est pas étrangère à une mesure de Haar de G.

μ est adaptée si le plus petit sous groupe fermé de G portant μ est G.

μ est apériodique si le support de μ (noté Supp μ) n'est contenu dans aucune classe latérale d'un sous groupe fermé distingué propre de G et si μ est adaptée.

Proposition 1. *Soient G et G' deux groupes LCD, φ un homomorphisme continu surjectif de G sur G', μ une probabilité sur G, ν son image par φ.*

Alors si μ est étalée, ν l'est aussi et si μ est apériodique toutes les puissances de convolution non nulles de ν le sont aussi.

Démonstration. Montrons que si μ est apériodique les puissances de convolution de ν le sont aussi. Puisque si Supp ν est contenu dans la classe xL d'un sous groupe L de G', Supp μ est contenu dans un translaté du sous groupe $\varphi^{-1}(L)$, il suffit de montrer que toute puissance de convolution μ^{*n} de μ est apériodique.

Si Supp μ^{*n} est contenu dans une classe gH d'un sous groupe fermé distingué de G, alors Supp μ est contenu dans $g'H$ où $g'=(a^{n-1})^{-1}g$ si a est un élément de Supp μ.

Le seul point délicat de la démonstration est donc de vérifier que μ^{*n} est adaptée.

Supposons que pour un entier strictement positif n_0, Supp μ^{*n_0} engendre un sous groupe fermé propre L de G. Nous allons montrer qu'alors L est distingué, ce qui est absurde d'après ce qui précède.

Soit A le support de μ, notre hypothèse est que A engendre topologiquement G et que $A^{n_0}=\{y\in G/\exists x_1,x_2,\dots,x_{n_0}\in A,\ y=x_1x_2\dots x_{n_0}\}$ engendre L. Notons $A^{-1}=\{x\in G/x^{-1}\in A\}$ et pour $m\in\mathbb{N}$, $A^{-m}=(A^{-1})^m$.

Puisque $A^{n_0}\subset L$, $\forall m\in\mathbb{Z}$, $A^{mn_0}\subset L$ donc si $a\in A$

$$aA^{n_0}a^{-1}=aA^{n_0}a^{n_0-1}a^{-n_0}\subset A^{2n_0}A^{-n_0}\subset L$$

de même $a^{-1}A^{n_0}a\subset L$ et donc a $La^{-1}=L$.

Alors $\{g\in G/gLg^{-1}=L\}$ est un sous groupe fermé de G contenant A donc égal à G, ce qui prouve que L est distingué.

Soient K et A deux espaces polonais, $B=A\times K$ leur produit cartésien muni de la topologie produit et de la tribu borélienne associée, μ une probabilité sur B. On dit que $\mu=\int_K \mu_k\, d\bar{\mu}(k)$ est une désintégration de μ de base K si

(i) $\bar{\mu}$ est l'image de μ par la projection de $A\times K$ sur K

(ii) Pour tout élément k de K, μ_k est une probabilité sur B portée par $A\times\{k\}$

(iii) Si f est une fonction borélienne positive, définie sur B, l'application $k\to\int f\ d\mu_k$ est borélienne et

$$\int f\,d\mu=\int_K\{\int_B f\,d\mu_k\}\,d\bar{\mu}(k)$$

Une telle désintegration existe toujours (cf. J. Neveu [13] paragraphe V.4)

Lemme 2. *Soient K et A deux espaces polonais, $B=A\times K$, μ une probabilité sur B, $\mu=\int_K \mu_k\,d\bar{\mu}(k)$ une désintégration de μ de base K.*

Si $S_k=B_k\times\{k\}$ est le support de μ_k, $\bigcup_{k\in K} S_k$ est un borélien de B. Si, de plus, A est égal à $\mathbb{R}^d$, l'application qui à tout élément k de K associe la dimension du sous espace affine de $\mathbb{R}^d$ engendré par B_k est borélienne.

Démonstration. Nous ne montrons que la première assertion, la seconde s'établissant par des arguments similaires.

Soit d une distance sur A compatible avec la topologie et

$$f_n(a,k)=\{1-n\,d(a,B_k)\}^+ \quad \text{si } a\in A, k\in K, n\in\mathbb{N}.$$

La fonction indicatrice de l'ensemble $\bigcup_{k\in K} S_k$ étant la limite simple de la suite f_n il suffit de vérifier que

$$(a,k)\to d(a,B_k) \text{ est une fonction, définie sur } B\text{, borélienne.}$$

Puisque pour k fixé, $a\to d(a,B_k)$ est continue, la mesurabilité de la fonction $k\to d(a,B_k)$ entraîne la mesurabilité par rapport au couple. Mais, si $B(a,\beta)$

désigne la d-boule ouverte de centre a et de rayon β dans A, remarquons que

$$\{k\in K/d(a,B_k)<\beta\}=\{k\in K/\mu_k(B(a,\beta)\times K)\neq 0\}.$$

Le (iii) de la définition de la désintegration permet de conclure.

Grace au lemme 2 nous pouvons donner la définition suivante:

Définition 3. Si K est un compact à base dénombrable, une probabilité μ sur $\mathbb{R}^n \times K$ est dite *vectoriellement apériodique* si l'ensemble des éléments k de K tels que le seul sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ contenant B_k est $\mathbb{R}^n$ tout entier n'est pas $\bar{\mu}$ négligeable.

Une probabilité sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^m\times K$ sera dite vectoriellement apériodique si, considérée comme probabilité sur $\mathbb{R}^{n+m}\times K$, elle l'est au sens plus haut. Nous emploierons aussi cette définition pour une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{Z}^n$), qui correspond au cas où K est réduit à l'élément neutre et s'exprime simplement en disant que le support de cette probabilité n'est contenu dans aucun sous espace affine propre. Remarquons enfin qu'on peut exprimer le fait qu'une probabilité μ sur $\mathbb{R}^n\times K$ est vectoriellement apériodique en écrivant que:

$\bar{\mu}\{k\in K/\mu_k$ est, en tant que probabilité sur $\mathbb{R}^n\times\{k\}$, vectoriellement apériodique$\}$ est non nul.

B. Un Théorème sur les groupes compacts

Nous allons établir une caractérisation des probabilités étalées apériodiques sur certains groupes compacts qui nous sera utile ensuite.

Théorème 4. *Soit G un groupe compact ayant un nombre fini de composantes connexes. Une probabilité sur G est étalée apériodique si et seulement si une de ses puissances de convolution majore un multiple non nul de la mesure de Haar de G.*

Démonstration. Soit n_0 le nombre de composantes connexes de G, m sa mesure de Haar normalisée. Montrons d'abord que si un ouvert V de G a une mesure de Haar strictement supérieure à $\frac{n_0-1}{n_0}$, il existe un entier n tel que V^n soit égal à G.

Si G est connexe, soit W un voisinage ouvert de l'élément neutre de G tel que pour un élément a de G, $aW=V$. G étant compact, $\bigcap_{x\in G} xWx^{-1}=W'$ est ouvert et $a^n W'^n\subset a^n a^{1-n}Wa^{n-1}a^{2-n}Wa^{n-2}\dots a^{-1}WaW=V^n$. W' étant un voisinage de l'élément neutre dans le groupe connexe G, il existe un entier n tel que W'^n est égal à G et alors $V^n=G$.

Si n_0 est différent de un, les composantes connexes étant translatées l'une de l'autre leur mesure de Haar vaut $1/n_0$; La condition $m(V)>\frac{n_0-1}{n_0}$ nous assure donc que V les rencontre toutes. Si G_0 est la composante connexe de l'élément neutre, il existe d'après ce qui précède un entier n tel que $(V\cap G_0)^n=G_0$. En particulier $G_0\subset V^n$ et $G=V^{n+1}$.

Soit μ une probabilité étalée apériodique sur G, la marche aléatoire droite de loi μ est une chaine de Harris de mesure invariante m n'ayant qu'une classe cyclique (cf. D. Revuz [15]). Le théorème d'Orey nous indique qu'alors $\|\mu^{*n}-m\|$ tend vers zéro (si $\| \; \|$ désigne la norme de la variation totale). Soit $\mu^{*n}=f_n\cdot m+v_n$ une décomposition de Radon-Nikodym de μ^{*n} par rapport à m, L_n borélien de G tel que $m(L_n)=1$ et $v_n(L_n)=0$.

$$m(\{f_n=0\})=m(\{f_n=0\}\cap L_n)-\mu^{*n}(\{f_n=0\}\cap L_n) \quad \text{tend vers zéro.}$$

Pour tout entier n_1 et n_2,

$$\mu^{*n_1}\geqq\frac{1}{n_2}1_{\{f_{n_1}\geqq\frac{1}{n_2}\}}\cdot m$$

et donc

$$\mu^{*2n_1}\geqq\frac{1}{n_2^2}1_{\{f_{n_1}\geqq\frac{1}{n_2}\}}*1_{\{f_{n_1}\geqq\frac{1}{n_2}\}}\cdot m$$

La fonction $f=1_{\{f_{n_1}\geqq\frac{1}{n_2}\}}*1_{\{f_{n_1}\geqq\frac{1}{n_2}\}}$ étant continue positive inférieure à un d'intégrale égale à $\left(m\left\{f_{n_1}\geqq\frac{1}{n_2}\right\}\right)^2$, puisque $m(f_n=0)$ tend vers zéro, on peut choisir n_1 et n_2 de telle sorte que pour α suffisamment petit, $\{f>\alpha\}$ soit un ouvert de masse strictement supérieure à $\frac{n_0-1}{n_0}$.

D'après ce qui précède on peut trouver un entier l tel que $\{f>\alpha\}^l$ soit égal à G. La fonction $(1_{\{f>\alpha\}})^{*l}$ est alors continue strictement positive et il suffit de remarquer que

$$\mu^{*2ln_1}\geqq\left(\frac{\alpha}{n_2^2}\right)^l(1_{\{f>\alpha\}})^{*l}\cdot m \text{ pour conclure.}$$

Le support de la mesure de Haar étant G la réciproque est claire.

Corollaire 5. *Si μ est une probabilité étalée apériodique sur un groupe compact G ayant un nombre fini de composantes connexes de mesure de Haar normalisée m, il existe deux constantes $a\in\mathbb{R}^+$, $\rho\in]0,1[$ telles que pour tout entier n $\|\mu^{*n}-m\|$ soit inférieur à $a\rho^n$.*

La démonstration est facile à partir du théorème 4. Ce résultat a été obtenu par des méthodes différentes dans le cas des groupes compacts connexes par Bhattacharya [1].

C. Structure des extensions compactes de groupes Abéliens à génération compacte

Rappelons d'abord que tout groupe abélien localement compact à génération compacte est isomorphe à un groupe de la forme $K\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{Z}^p$ où K est un groupe compact et qu'on appelle rang de ce groupe l'entier $m+p$.

Si H et H' sont deux groupes topologiques et σ un homomorphisme continu de H dans le groupe des automorphismes continus de H' on note $H' \times_\sigma H$ le produit semi-direct de ces deux groupes, c'est-à-dire l'ensemble $H' \times H$ muni du produit $(h'_1, h_1)(h'_2, h_2) = (h'_1 \cdot \sigma(h_1)\{h'_2\}, h_1 h_2)$.

En particulier $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$ désigne le groupe des isométries de $\mathbb{R}^d$ ($O(d)$ est le groupe des matrices orthogonales $d \times d$ opérant naturellement par σ sur $\mathbb{R}^d$).

Proposition 6. *Soit G un groupe localement compact admettant un sous groupe abélien distingué fermé à génération compacte H de rang r. Si G/H est compact, il existe un sous groupe compact distingué K de G tel que G/K soit isomorphe à un sous groupe fermé du groupe des isométries de $\mathbb{R}^r$ coupant $\mathbb{R}^r \times \{e\}$ suivant un groupe abélien de rang r.*

Démonstration. (On peut trouver dans [8] une autre preuve.) Le sous groupe compact maximal de H étant uniforme dans G, on peut remplacer G par le quotient suivant ce sous groupe et supposer que H est de la forme $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{Z}^p$ (avec $n+p=r$). Soit $\mathscr{A}(H)$ le groupe des automorphismes continus de H et $\Psi: G \to \mathscr{A}(H)$ l'application qui fait correspondre à l'élément g de G l'automorphisme intérieur associé à g, restreint à H. $\Psi(g)$ étant continu, on peut le prolonger en un élément de $Gl(r, \mathbb{R})$ noté encore $\Psi(g)$. L'application Ψ étant continue et se factorisant par le groupe compact G/H, $\Psi(G)$ est un sous groupe compact de $Gl(r, \mathbb{R})$. On sait qu'alors on peut munir $\mathbb{R}^r$ d'un produit scalaire qui fait des éléments $\Psi(g)$, $g \in G$, des isométries de $\mathbb{R}^r$. On peut donc considérer Ψ comme une application continue de G dans $O(r)$.

D'après la proposition 2.2, chapitre III de (G. Hochschild [10]), l'injection canonique de H dans $\mathbb{R}^r$ se prolonge en une application continue f de G dans $\mathbb{R}^r$ telle que $f^*(xy) = \Psi(x) f^*(y) + f^*(x)$, $x \in G$, $y \in G$.

Si on pose $\varphi(g) = (f^*(g), \Psi(g))$ on définit ainsi un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}^r \times_\sigma O(r)$.

Il est clair que $\varphi(G)$ coupe $\mathbb{R}^r \times \{e\}$ suivant un sous groupe abélien de rang r.

Montrons que $\varphi(G)$ est fermé. Il est clair que $\varphi(H)$ est fermé dans $\mathbb{R}^r \times_\sigma O(r)$; considérons $\pi: \mathbb{R}^r \times_\sigma O(r) \to \mathbb{R}^r \times_\sigma O(r)/\varphi(H)$ la projection canonique. Puisque $\pi(\varphi(G))$ est isomorphe à $\varphi(G)/\varphi(H)$ (munis des topologies induites) et est compact, $\varphi(G)$ est localement compact donc fermé (cf. Ch. 1 Prop. 2.1 de G. Hochschild [10]). Enfin puisque $\operatorname{Ker} \varphi \cdot H = \varphi^{-1}(H \times \{e\})$ il est fermé, donc $\operatorname{Ker} \varphi \cdot H/H$ est compact. Ceci prouve que $\operatorname{Ker} \varphi$ est compact.

Le théorème suivant précise la structure des groupes envisagés et sera un outil important dans la suite.

Théorème 7. *Soit $\mathscr{G}$ un groupe* LCD *à génération compacte admettant un sous groupe abélien $\mathscr{A}$ distingué fermé de rang r tel que $\mathscr{G}/\mathscr{A}$ soit compact. Il existe alors un quotient G de $\mathscr{G}$, par un sous groupe compact distingué, isomorphe à un sous groupe ferme noté encore G de $(\mathbb{R}^p \times_\sigma K_1) \oplus (\mathbb{R}^q \times_\sigma K_2)$ où*

1) *p et q sont deux entiers dont la somme est r.*

2) *$\mathbb{R}^p \times_\sigma K_1$ (resp. $\mathbb{R}^q \times_\sigma K_2$) est un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^p \times_\sigma O(p)$ (resp. $\mathbb{R}^q \times_\sigma O(q)$) et $\oplus$ désigne le produit direct de groupes topologiques*

3) *La projection de G sur K_1 est le groupe compact K_1. La projection de G sur K_2 est le groupe fini K_2*

4) *$G \cap \mathbb{R}^p \times \{e\} \times \mathbb{R}^q \times \{e\} = \mathbb{R}^p \times \{e\} \times \mathbb{Z}^q \times \{e\}$.*

Remarque. Il existe donc des éléments de $\mathbb{R}^q$ $\{a_{k_1,k_2}\}_{k_1\in K_1, k_2\in K_2}$ tels que $a_{e,e}=0$ et

$$G=\bigcup_{\substack{k_1\in K_1\\ k_2\in K_2}} \mathbb{R}^p\times\{k_1\}\times\{a_{k_1,k_2}+\mathbb{Z}^q\}\times\{k_2\}$$

Démonstration. D'après la proposition 6 il suffit d'étudier le cas où G est un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^r\times_\sigma O(r)$ coupant $\mathbb{R}^r\times\{e\}$ suivant un sous groupe abélien de rang r. Soit H tel que $H\times\{e\}=G\cap\mathbb{R}^r\times\{e\}$, $H\times\{e\}$ est distingué et G opère sur lui, par automorphismes intérieurs, par isométries. Soit H_0 la composante neutre de H, c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^r$, et $H_0^\perp$ l'orthogonal de H_0. Si $H_1=H_0^\perp\cap H$ on vérifie immédiatement que H_0 et H_1 sont distingués dans G, que $H=H_0\oplus H_1$, que H_0 est isomorphe à $\mathbb{R}^p$ et que H_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}^q$ pour un couple (p,q) d'entiers tel que $p+q=r$.

Notons K_1 (resp. K_2) le sous groupe compact de $O(p)$ (resp. $O(q)$) image de G par l'application qui a un élément g de G associe l'automorphisme intérieur $\sigma(g)$ restraint à H_0 (resp. H_1). Il est clair que G est isomorphe à un sous groupe de $(\mathbb{R}^p\times_\sigma K_1)\oplus(\mathbb{R}^q\times_\sigma K_2)$ satisfaisant aux conditions du théorème. K_2 étant formé d'isométries de $\mathbb{R}^q$ laissant $\mathbb{Z}^q$ invariant il est clair qu'il est fini.

D. Apériodicite des probabilités sur les extensions compactes de groupes Abéliens

Le théorème que nous cherchons à montrer dans ce paragraphe est le suivant:

Théorème 8. *Soit $\mathscr{G}$ un groupe* LCD *à génération compacte, extension compacte d'un groupe abélien distingué de rang r, G le quotient de $\mathscr{G}$ (par un sous groupe compact) introduit dans le théorème 7, π la surjection canonique de $\mathscr{G}$ sur G.*

Si μ est une probabilité étalée apériodique sur $\mathscr{G}$, il existe une puissance de convolution de μ dont l'image par π, considérée comme probabilité sur $\mathbb{R}^r\times_\sigma O(r)$, est vectoriellement apériodique.

Afin d'établir ce résultat, nous allons commencer par étudier, dans une série de lemmes, des cas particuliers. Nous nous servirons du résultat suivant:

Lemme 9. *Soient f et g deux applications mesurables d'un groupe compact séparable G, muni de sa tribu borélienne, dans un groupe abélien H isomorphe à $\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{Z}^q$, telles que $f(x)+f(y)=g(xy)$, $m\otimes m$ presque partout si m est la mesure de Haar de G. Alors f et g sont deux fonctions presque surement constantes.*

Démonstration. (due à J.L. Sauvageot). On a

$$f(k_1^{-1})+f(k_1k_2)=g(k_2)\qquad m\otimes m\ \ ps \tag{1}$$

Il existe en effet par hypothèse un borélien N de $G\times G$ négligeable tel que si (x,y) n'est pas dans N, $f(x)+f(y)=g(xy)$.

Puisque, par invariance de la mesure de Haar,

$$m\otimes m\,\{(k_1,k_2)\in G\times G/(k_1^{-1},k_1k_2)\in N\}=0$$

on peut prendre $x=k_1^{-1}$ et $y=k_1k_2$ pour obtenir la relation (1).

De même

$$f(k_1 k_2)+f(k_2^{-1})=g(k_1) \quad m\otimes m \ ps \text{ donc}$$
$$g(k_1)+f(k_1^{-1})=g(k_2)+f(k_2^{-1}) \quad m\otimes m \ ps.$$

Il existe alors une constante C telle que

$$g(k)+f(k^{-1})=C\,ps \tag{2}$$

De (1) et (2) on tire

$$g(k_1)+g(k_2)=C+f(k_1 k_2) \quad ps$$

donc si

$$\Psi(k)=f(k)+g(k)-C, \ \Psi(k_1 k_2)=\Psi(k_1)+\Psi(k_2) \quad m\otimes m \ ps.$$

Ψ étant presque surement un homomorphisme mesurable, le théorème 5.1 de Ramsey [14] affirme qu'il esiste un homomorphisme mesurable G dans H presque surement égal à Ψ. G étant compact, un homomorphisme mesurable étant continu, Ψ est preque surement nul, c'est-à-dire:

$$f(k)+g(k)=C\,ps \tag{3}$$

et (2) entraine alors $f(k)=f(k^{-1})$ ps.

Soit

$$f'(k)=f(k)-\frac{c}{3}$$

$$f'(k_1)+f'(k_2)+f'(k_1 k_2)=f(k_1)+f(k_2)+f(k_1 k_2)-c=g(k_1 k_2)-g(k_1 k_2)=0$$

p.s. Donc si

$$A=\{k\in G \text{ tel que } f'(k^{-1})=f'(k) \text{ et } f'(k)+f'(k_2)+f'(k k_2)=0, k_2\, ps\}$$

$m(A)=1$ et si $(k, k')\in A\times A$, pour presque tout k_2,

$$f'(k k_2)-f'(k' k_2)=f'(k')-f'(k),$$

soit, par invariance de la mesure de Har:

Pour presque tout k_2,

$$f'(k_2)-f'(k' k^{-1} k_2)=f'(k')-f'(k).$$

Le terme de gauche ne dépendant de (k, k') que par $k'k^{-1}$, il existe g' tel que

$$f'(k')-f'(k)=g'(k' k^{-1}) \quad \forall (k, k')\in A\times A$$

ou

$$f'(k')-f'(k)=g'(k' k) \quad \forall (k, k')\in A^{-1}\times A$$

Or

$$f'(k')+f'(k)=f(k')+f(k)-\frac{2c}{3}=g(k'k)-\frac{2c}{3}$$

donc

$$2f'(k')=g'(k'k)+g(k'k)-2\frac{c}{3} \qquad \forall (k,k')\in A^{-1}\times A$$

et f' ne peut être que presque surement constante.

On va commencer par démontrer le théorème dans le cas où (avec les notations du théorème 7) $K_1=\{e\}$, $p=0$.

Lemme 10. *Soit K un sous groupe fini de $O(q)$ laissant $\mathbb{Z}^q$ invariant, G un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^q\times_\sigma K$ dont la projection sur K est K et dont l'intersection avec les translations est $\mathbb{Z}^q$. Si $\mu=\int\limits_K \mu_k\, d\bar{\mu}(k)$ est une désintégration de base K d'une probabilité aperiodique μ sur G, en remplaçant au besoin μ par une de ses puissances de convolution on peut supposer que*

a) *$\bar{\mu}(e)$ est non nul*

b) *μ_e est vectoriellement apériodique.*

Isolons d'abord un détail de la démonstration qui nous sera utile ailleurs.

Lemme 11. *Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^d\times_\sigma K$, $\mu^{*n}=\int\limits_K \mu_k^n\, d\bar{\mu}^{*n}(k)$ une désintégration de μ^{*n} de base K, alors*

$$\bar{\mu}^{*p}\otimes\bar{\mu}^{*q}\{(k,k')\in K\times K/\operatorname{Supp}\mu_k^p\operatorname{Supp}\mu_{k'}^q\subset\operatorname{Supp}\mu_{kk'}^{p+q}\}=1$$

Démonstration. D'après le lemme 2 on sait que $\bigcup\limits_{k\in K}\operatorname{Supp}\mu_k^{p+q}$, que nous noterons S, est un borélien. On peut donc écrire;

$$1=\mu^{*(p+q)}(S)=\int\limits_K \mu_k^{p+q}(S)\, d\bar{\mu}^{*(p+q)}(k)=(\mu^{*p}*\mu^{*q}(S)$$
$$=\int\{\int 1_S(x\,y)\, d\mu_k^p(x)\, d\mu_{k'}^q(y)\}\, d\bar{\mu}^{*p}(k)\, d\bar{\mu}^{*q}(k')$$

Donc,

$$\bar{\mu}^{*p}\otimes\bar{\mu}^{*q}\{(k,k')/\mu_k^p*\mu_{k'}^q(S)=1\}=1.$$

La probabilité $\mu_k^p*\mu_{k'}^q$ étant portée par $\mathbb{R}^d\times\{k\,k'\}$,

$$\mu_k^p*\mu_{k'}^q(S)=\mu_k^p*\mu_{k'}^q(\operatorname{Supp}\mu_{kk'}^{p+q}).$$

Comme dire que cette quantité vaut un équivaut à dire que

$$\operatorname{Supp}\mu_k^p*\mu_{k'}^q\subset\operatorname{Supp}\mu_{kk'}^{p+q} \quad \text{et que} \quad \operatorname{Supp}\mu_k^p\operatorname{Supp}\mu_{k'}^q\subset\operatorname{Supp}\mu_k^p*\mu_{k'}^q$$

le lemme 11 est démontré.

Démonstration du lemme 10. a) Puisque, par définition, $\bar{\mu}$ est la projection de μ sur K, on peut, grâce à la proposition 1 et au théorème 4, supposer que $\bar{\mu}$ charge tous les éléments de K (en remplaçant au besoin μ par une de ses puissances).

b) Soit $\mu^{*n}=\int_K \mu_k^n \, d\bar{\mu}^{*n}(k)$ une désintégration de μ de base K. Ecrivons le support de μ_k^n sous la forme $(a_k^n+A_k^n)\times\{k\}\subset\mathbb{R}^q\times_\sigma K$ avec A_k^n contenant 0. Si H_n est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^q$ engendré par A_e^n, la suite $\{H_n, n\in\mathbb{N}\}$ est croissante:

D'après le lemme 11, $\bar{\mu}^{*n}(e)$ étant non nul pour tout n.

$$\operatorname{Supp}\mu_e^1 \operatorname{Supp}\mu_e^n \subset \operatorname{Supp}\mu_e^{n+1}$$

ce que l'on peut écrire

$$a_e^1+A_e^1+a_e^n+A_e^n\subset a_e^{n+1}+A_e^{n+1}\subset a_e^{n+1}+H_{n+1}$$

d'où successivement,

$$a_e^1+a_e^n\in a_e^{n+1}+H_{n+1} \quad \text{et} \quad A_e^1+A_e^n\subset H_{n+1}.$$

En particulier $H_n\subset H_{n+1}$. Notons H la limite de la suite H_n. Le lemme sera démontré si on prouve que $\dim H=q$.

c) En remplaçant μ par une de ses puissances on est donc ramené à la situation suivante: $\bar{\mu}$ charge tous les éléments de K et pour tout entier n, A_e^n engendre H.

– Remarquons qu'alors H est invariant par K. Pour simplifier l'écriture nous noterons $k\cdot a$ l'élément $\sigma(k)a$, $k\in K$, $a\in\mathbb{R}^q$. De la relation $kek^{-1}=e$ et de l'analogue à trois variables du lemme 11 on tire

$$(a_k^1+A_k^1, k)(a_e^1+A_e^1, e)(a_{k^{-1}}^1+A_{k^{-1}}^1, k^{-1})\subset(a_e^3+A_e^3, e)$$

d'où

$$a_k^1+A_k^1+k\cdot a_e^1+k\cdot A_e^1+k\cdot A_{k^{-1}}^1+k\cdot a_{k^{-1}}^1\subset a_e^3+A_e^3$$

en particulier

$$a_k^1+k\cdot a_e^1+k\cdot a_{k^{-1}}^1+k\cdot A_e^1\subset a_e^3+H$$

d'où $k\cdot A_e^1\subset H$ et $k\cdot H=H$ puisque A_e^1 engendre H.

– $\forall n>0, \quad \forall k\in K, \quad A_k^n\subset H.$

En effet de la relation $kk^{-1}=e$ on tire:

$$a_k^n+A_k^n+k\cdot a_{k^{-1}}^n+k\cdot A_{k^{-1}}^n\subset a_e^{2n}+H \qquad \text{d'où } A_k^n\subset H$$

– $\forall k_1, k_2\in K$

$$a_{k_1}^1+k_1\, a_{k_2}^1\in a_{k_1k_2}^1+a_e^1+H \tag{1}$$

$$a_{k_1}^1+k_1\, a_{k_1^{-1}}^1\in 2\, a_e^1+H \tag{2}$$

$$a_e^1+H=k_1\, a_e^1+H \tag{3}$$

De $e(k_1k_2)=k_1k_2$ on tire $a_e^1+A_e^1+a_{k_1k_2}^1+A_{k_1k_2}^1\subset a_{k_1k_2}^2+A_{k_1k_2}^2$ donc il existe un élément h de H tel que $a_e^1+a_{k_1k_2}^1=a_{k_1k_2}^2+h$. Puisque de $k_1\cdot k_2=k_1k_2$ on tire $a_{k_1}^1+A_{k_1}^1+k_1\cdot a_{k_2}^1+k_1\cdot A_{k_2}^1\subset a_{k_1k_2}^2+H$ on obtient $a_{k_1}^1+k_1a_{k_2}^1\in a_{k_1k_2}^2+H=a_{k_1k_2}^1+a_e^1+H$ ce qui donne (1).

(2) est évidemment un cas particulier de (1), et (3) s'obtient de manière analogue en écrivant que $k\cdot e=e\cdot k=k$.

– Ces relations vont nous permettre de montrer que

$$\mathscr{H}=\{(a_k^1-a_e^1+h,k)\in\mathbb{R}^q\times_\sigma K/h\in H,k\in K\}$$

est un sous groupe de $\mathbb{R}^q\times_\sigma K$. Si h est un élément de H,

$$(a_k^1-a_e^1+h,k)^{-1}=(-k^{-1}\cdot a_k^1+k^{-1}\cdot a_e^1-k^{-1}h,k^{-1}).$$

Or grâce à (2) et (3) $a_k^1+k\,a_{k^{-1}}^1\in 2\,a_e^1+H$ et

$$-k^{-1}a_k^1\in a_{k^{-1}}^1-2\,a_e^1+H$$

d'où

$$\begin{aligned}-k^{-1}a_k^1+k^{-1}a_e^1-k^{-1}h&\in a_{k^{-1}}^1+k^{-1}(a_e^1+H)-2(a_e^1+H)\\&\in a_{k^{-1}}^1-a_e^1+H\end{aligned}$$

c'est-à-dire $(a_k^1-a_e^1+h,k)^{-1}\in\mathscr{H}$.

On montre de même que $\mathscr{H}$ est stable par produit.

Donc $\mathscr{H}$ est un groupe tel que $\operatorname{Supp}\mu\subset(a_e^1,e)\,\mathscr{H}$.

d) En faisant pour toutes les puissances de μ le même raisonnement on voit qu'il existe une suite $\mathscr{H}_n$ de sous groupes de $\mathbb{R}^q\times_\sigma K$ telle que $\mathscr{H}_n\cap\mathbb{R}^q\times\{e\}=H\times\{e\}$ et $\operatorname{Supp}\mu^{*n}\subset g_n\mathscr{H}_n$ où g_n est un élément de $\operatorname{Supp}\mu^{*n}$.

Notons alors $\mathscr{H}_n'$ le sous groupe fermé de $G\cap\mathscr{H}_n$ engendré par $g_n^{-1}\operatorname{Supp}\mu^{*n}$. La suite $(\mathscr{H}_n', n\in\mathbb{N})$ est croissante et il existe un entier n_0 tel que $\mathscr{H}_{n_0}'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n'$.

Montrons que $\mathscr{H}_{n_0}'$ est distingué:

On a

$$\operatorname{Supp}\mu^{n_0}\operatorname{Supp}\mu^{n_0}\subset g_{n_0}^2\mathscr{H}_{2n_0}'=g_{n_0}^2\mathscr{H}_{n_0}'$$

d'où

$$g_{n_0}^{-1}\operatorname{Supp}\mu^{n_0}\subset g_{n_0}^{-1}(g_{n_0}^2\mathscr{H}_{n_0}')\,g_{n_0}^{-1}$$

et

$$\mathscr{H}_{n_0}'\subset g_{n_0}\mathscr{H}_{n_0}'g_{n_0}^{-1},\qquad\forall g_{n_0}\in\operatorname{Supp}\mu^{*n_0}.$$

Ces deux groupes ayant même intersection avec $\mathbb{R}^q\times\{e\}$ ils sont en fait égaux. La proposition 1 nous indiquant que μ^{*n_0} est adaptée on en déduit que $\mathscr{H}_{n_0}'$ est distingué dans G.

e) En conclusion, nous avons montré que $\operatorname{Supp}\mu^{*n_0}$ est contenu dans une classe $g_{n_0}\mathscr{H}_{n_0}'$ d'un sous groupe distingué de G contenu dans $\mathscr{H}_{n_0}$. Puisque μ^{*n_0} est apériodique et que $\mathscr{H}_{n_0}$ coupe $\mathbb{R}^q\times\{e\}$ suivant $H\times\{e\}$ ceci n'est possible que si la dimension de H est q, ce qu'on voulait montrer,

Lemme 12. *Soit μ une probabilité sur le groupe $K \oplus \mathbb{R}^q$, produit direct d'un groupe K compact ayant un nombre fini de composantes connexes et de $\mathbb{R}^q$. Si la projection de μ sur K est étalée apériodique et la projection sur $\mathbb{R}^q$ vectoriellement apériodique, il existe une puissance de μ vectoriellement apériodique.*

Démonstration. Soit $\mu^{*n} = \int_K \mu_k^n \, d\bar{\mu}^{*n}(k)$ une désintégration de μ^{*n} de base K, $\{k\} \times (a_k^n + A_k^n)$ le support de μ_k^n, avec A_k^n contenant 0.

a) On va d'abord montrer qu'il est impossible que pour tout entier n, le support de μ_k^n soit réduit à un point, $\bar{\mu}^{*n}$ p.s.

Soit m la mesure de Haar de K; on peut supposer d'après le théorème 4 et en remplaçant au besoin μ par une de ses puissances que $\bar{\mu}$ majore un multiple de m.

Supposons que $\bar{\mu}^{*n}$ presque surement, $\operatorname{Supp} \mu_k^n = \{(k, a_k^n)\}$. Le lemme 2 permet de supposer que les applications $k \to a_k^n$ sont mesurables. Puisque d'après le lemme 11,

$$\operatorname{Supp} \mu_{k_1}^1 \operatorname{Supp} \mu_{k_2}^1 \subset \operatorname{Supp} \mu_{k_1 k_2}^2 \quad \bar{\mu} \otimes \bar{\mu} \text{ p.s.}$$

on a $a_{k_1}^1 + a_{k_2}^1 = a_{k_1 k_2}^2$ $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ p.s. donc $m \otimes m$ p.s.

Le lemme 9 montre qu'alors a_k^1 est m presque surement constant. Il est clair qu'il existe un suite $(a_n, n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathbb{R}^q$ telle que, pour tout entier n, $a_k^n = a_n$ m p.s.

Si $\bar{\mu}^{*n} = f_n \cdot m + \nu_n$ est une décomposition de $\bar{\mu}^{*n}$ en partie absolument continue et en partie étrangère à m, $\nu_n(K)$ tend vers zéro (cf. corrolaire 5 par exemple). Puisque

$$\begin{aligned} |\mu^{*n}(K \times A) - \delta_{a_n}(A)| &\leq \left| \int \delta_{a_n}(A) \, d(f_n \cdot m)(k) + \int \mu_k^n(K \times A) \, d\nu_n(k) - \delta_{a_n}(A) \right| \\ &\leq \left| \delta_{a_n}(A) \int (f_n - 1) \, dm \right| + \nu_n(K) \end{aligned}$$

si δ_a désigne la masse de Dirac au point a_n de $\mathbb{R}^q$, on voit que si $\tilde{\mu}$ est la projection de μ sur $\mathbb{R}^q$,

$\sup_{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)} |\tilde{\mu}^{*n}(A) - \delta_{a_n}(A)|$ tend vers zéro. Ceci contredit l'apériodicité vectorielle de $\tilde{\mu}$ comme on peut le vérifier par transformation de Fourier.

b) Montrons maintenant le résultat général. Appelons Δ_k^n le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^q$ engendré par A_k^n. D'après le lemme 2, $k \to \dim \Delta_k^n$ est mesurable.

Supposons qu'il existe un entier d, $d \in]0, q[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bar{\mu}^{*n}\{k \in K / \dim \Delta_k^n \leq d\} = 1$$

et

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } \bar{\mu}^{*n_0}\{k \in K / \dim \Delta_k^{n_0} = d\} \neq 0.$$

En remplaçant μ par μ^{*n_0} on peut supposer que n_0 est égal à un. Grâce au lemme 11,

$$\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}\{(k_1, k_2) \in K \times K / \Delta_{k_1}^1 + \Delta_{k_2}^1 \subset \Delta_{k_1 k_2}^2 \quad \text{et} \quad \dim \Delta_{k_1 k_2}^2 \leq d\} = 1.$$

Soit alors k_1 tel que

$$\dim \Delta_{k_1}^1 = d$$

$$k_2 \text{ p.s. } \Delta_{k_1}^1 + \Delta_{k_2}^1 \subset \Delta_{k_1 k_2}^2 \quad \text{et} \quad \dim \Delta_{k_1 k_2}^2 \leq d.$$

Il est clair qu'alors $\bar{\mu}$ p.s. Δ_k^1 est contenu dans $\Delta_{k_1}^1$. Si D est un sous espace supplémentaire de $\Delta_{k_1}^1$ dans $\mathbb{R}^q$ et si v est la projection de μ sur $K \times D$, la projection de μ sur K est étalée et sa projection sur D vectoriellement apériodique. Puisque v_k^n n'est autre que la projection de μ_k^n sur D, cette mesure est $\bar{\mu}^{*n}$ (donc $\bar{v}^{*n}$) p.s. une masse de Dirac, ce que est absurde d'après le point a).

Lemme 13. *Soit G un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^q \otimes \{\mathbb{R}^p \times_\sigma O(p)\}$ dont l'intersection avec $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \times \{e\}$ est $\mathbb{Z}^q \times \mathbb{R}^p \times \{e\}$ et dont la projection sur $O(p)$ est un groupe compact K. Soit μ une probabilité étalée sur G dont la projection sur K est apériodique et la projection sur $\mathbb{R}^q$ vectoriellement apériodique. Alors il existe une puissance de μ vectoriellement apériodique.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il existe une famille $(\alpha_k, k \in K)$ d'éléments de $\mathbb{R}^q$ telle que $G = \bigcup_{k \in K} (\alpha_k + \mathbb{Z}^q) \times \mathbb{R}^p \times \{k\}$.

Notons m la mesure de Haar normalisée sur K, m_k la mesure sur $(\alpha_k + \mathbb{Z}^q) \times \mathbb{R}^p$ produit de la mesure de comptage sur $\alpha_k + \mathbb{Z}^q$ et de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$. Alors $m' = \int_K m_k \, dm$ est une mesure de Haar de G. Grace aux hypothéses et au théorème 4 on peut supposer que μ n'est pas étrangère à m' et que la projection $\bar{\mu}$ de μ sur K majore un multiple de m. Soit $\mu^{*n} = \int_K \mu_k^n \, d\bar{\mu}^{*n}(k)$ une désintégration de μ^{*n} et $B_k^n \times \{k\}$ le support de μ_k^n

a) $\bar{\mu}\{k \in K / m_k(B_k^1) \neq 0\}$ est non nul.

En effect cette expression a un sens grace au lemme 2 et au théorème de Fubini. Si elle était nulle $m'(\bigcup_k B_k^1 \times \{k\})$ serait nulle donc μ serait étrangére à m'.

b) Soit v la projection de μ sur $\mathbb{R}^q \oplus K$, $v = \int_K v_k \, d\bar{v}(k)$ une désintégration de v de base K. Puisque $\bar{\mu}$ est égal à $\bar{v}$, le lemme 12 permet de supposer que $\bar{\mu}\{k \in K / v_k$ est vectoriellement apériodique$\}$ est non nul.

c) D'après le lemme 11, $B_{k_1}^1 + k_1 \cdot B_{k_2}^1 \subset B_{k_1 k_2}^2$ et

$$\operatorname{Supp} v_{k_1}^1 \operatorname{Supp} v_{k_2}^1 \subset \operatorname{Supp} v_{k_1 k_2}^2, \qquad \bar{\mu} \otimes \bar{\mu} \text{ p.s.}$$

A l'aide des points précédents on en déduit que l'ensemble des éléments k de K tels que $m_k(B_k^2)$ est non nul et la projection de μ_k^2 sur $\mathbb{R}^q \times \{k\}$ est vectoriellement apériodique n'est pas $\bar{\mu}^{*2}$ négligeable. Pour conclure vérifions que sous ces conditions μ_k^2 est vectoriellement apériodique:

Si il existe un hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$, un élément (a, b) de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ tels que $\operatorname{Supp} \mu_k^2$ soit contenu dans $((a, b) + H) \times \{k\}$, puisque qu'alors $m_k(H)$ est non nul H est de la forme $H_1 \times \mathbb{R}^p$ où H_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}^q$. Mais alors la projection de μ_k^2 sur $\mathbb{R}^q \times \{k\}$ ne peut être vectoriellement apériodique.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème 8:

Démonstration du théorème 8. Grace à la proposition 1 il suffit de considérer le cas d'une probabilité μ sur le groupe G introduit dans l'énoncé du théorème 7. Notons $\bar{\mu}$ la projection de μ sur $K_1 \oplus K_2$. D'après la proposition 1 et le théorème 4 on peut supposer (en remplaçant μ par une de ses puissances) que pour tout élément k_2 du groupe fini K_2, $\bar{\mu}(K_1 \times \{k_2\})$ est non nul. Si $\mu^{*n} = \int_{K_1 \oplus K_2} \mu^n_{(k_1,k_2)} d\bar{\mu}^{*n}(k_1,k_2)$ est une désintégration de μ^{*n} de base $K_1 \oplus K_2$ on va montrer qu'il existe un entier n tel que

$$\bar{\mu}^{*n}\{k_1,k_2) \in K_1 \times K_2 / k_2 = e,\ \mu^n_{(k_1,k_2)} \text{ vectoriellement apériodique}\}$$

est non nul, ce qui établira le théorème.

Soit λ_1 la restriction de μ à $\mathbb{R}^p \times K_1 \times \mathbb{R}^q \times \{e\}$ que l'on peut considérer comme le multiple non nul d'une probabilité λ sur $(\mathbb{R}^p \times_\sigma K_1) \times \mathbb{R}^q$. Vérifions qu'elle satisfait aux hypothèses du lemme 13 em remplaçant au besoin μ par une de ses puissances.

a) λ_1 est étalée.

Si μ n'est pas étangère à la mesure de Haar de G il existe un élément k_2 de K_2 telle que la restriction λ_2 de μ à $\mathbb{R}^p \times K_1 \times \mathbb{R}^q \times \{k_2\}$ ne soit pas étrangère à cette mesure. K_2 étant fini il existe un entier n tel que $k_2^n = e$; λ_2^{*n} est alors une mesure non étrangère à la mesure de Haar, portée par $\mathbb{R}^p \times K_1 \times \mathbb{R}^q \times \{e\}$, majorée par μ^{*n}. Il est clair qu'alors la mesure λ_1 construite à partir de μ^{*n} est étalée.

b) La projection de λ_1 sur K_1 est apériodique puisque $\bar{\mu}$ majore un multiple de la mesure de Haar de $K_1 \oplus K_2$.

c) La projection de λ_1 sur $\mathbb{R}^q$ est vectoriellement apériodique: Soit ν la projection de μ sur $\mathbb{R}^q \times_\sigma K_2$. Grâce au lemme 10 on peut supposer que si $\nu = \int_{K_2} \nu_k d\bar{\nu}(k)$ est une désintégration de ν de base K_2, $\bar{\nu}(e)$ est non nul et ν_e vectoriellement apériodique. Mais, si A est un borélien de $\mathbb{R}^q$, $\nu_e(A \times \{e\}) = \{\bar{\mu}(K_1 \times \{e\})\}^{-1} \lambda_1(\mathbb{R}^p \times K_1 \times A \times \{e\})$ donc est un multiple de la projection de λ_1 sur $\mathbb{R}^q$.

– On peut donc appliquer le lemme 13 à λ (égal à $\{\bar{\mu}(K_1 \times \{e\})\}^{-1} \lambda_1$): Il existe un entier n tel que si $\lambda^{*n} = \int_{K_1} \lambda_k^n d\bar{\lambda}^n(k)$ est une désintégration de λ^{*n} de base K,

$$\bar{\lambda}^{*n}\{k \in K_1 / \lambda_k^n \text{ est vectoriellement apériodique}\} \text{ est non nul.}$$

Puisque, $\bar{\lambda}^{*n}$ p.s., λ_k^n est porté par B_k, sous ensemble fermé de $(\mathbb{R}^p \times K_1) \times \mathbb{R}^q$ tel que $B_k \times \{e\}$ est le support de $\mu^n_{(k,e)}$, on en déduit immédiatement que

$$\bar{\mu}^{*n}\{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2 / k_2 = e \text{ et } \mu^n_{(k_1,k_2)} \text{ est vectoriellement apériodique}\}$$

est non nul.

E. Représentations unitaires des groupes $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$

Nous ne cherchons pas, dans ce paragraphe, à faire une étude complète des représentations unitaires du groupe des isométries de $\mathbb{R}^d$ mais établissons les outils nécessaires aux fonctions de concentration.

Définition. Soit λ la mesure de Haar de $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$, m la mesure de Haar de $O(d)$.

Pour tout élément ξ de $\mathbb{R}^d$ et tout élément g de $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$ on définit l'operateur linéaire T_g^ξ: $L^2(O(d), m) \to L^2(O(d), m)$ par:

Si $g=(x, k) \in \mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$, $\varphi \in L^2(O(d), m)$, $u \in O(d)$,

$$(T_g^\xi \varphi)(u) = \varphi(k^{-1} u) \exp i \langle \xi, u^{-1} x \rangle$$

On vérifie immédiatement que $\{T_g^\xi, g \in \mathbb{R}^d \times_\sigma O(d), \xi \in \mathbb{R}^d\}$ forme un système de représentations unitaires du groupe $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$ et on définit, comme d'habitude, si f est un élément de $L^1(\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d), \lambda)$ et μ une probabilité sur $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$ muni de sa tribu borélienne,

$$(T_f^\xi \varphi)(u) = \int (T_g^\xi \varphi)(u) f(g)\, d\lambda(g)$$

$$(T_\mu^\xi \varphi)(u) = \int (T_g^\xi \varphi)(u)\, d\mu(g)$$

Proposition 14. *Avec les notations de la définition ci-dessus, si μ est une probabilité vectoriellement apériodique (cf. Définition 3) sur $\mathbb{R}^d \times_\sigma O(d)$ il existe une constante a strictement positive et un voisinage $\mathscr{U}$ de l'originele dans $\mathbb{R}^d$ tels que, si $\|\ \|$ désigne la norme des opérateurs de $L^2(O(d)), m)$ dans lui-même, et $|\ |$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$,*

$$\forall \xi \in \mathscr{U}, \qquad \|T_\mu^\xi\| \leqq \exp(-a|\xi|^2)$$

Démonstration. Soit $\mu = \int_{O(d)} \mu_k\, d\bar{\mu}(k)$ une désintégration de μ base $O(d)$. Puisque μ_k est une probabilité portée par $\mathbb{R}^d \times \{k\}$ il existe une probabilité η_k sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mu_k = \eta_k \otimes \delta_k$ (où δ_k désigne la masse de Dirac au point k de $O(d)$). On notera $\hat{\eta}_k(t)$ le nombre $\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x\rangle} d\eta_k(x)$, c'est-à-dire la transformée de Fourier de η_k au point t de $\mathbb{R}^d$. Si φ est un élément de $L^2(O(d), m)$ et ξ un élément de $\mathbb{R}^d$ on a:

$$\begin{aligned}
\|T_\mu^\xi \varphi\|^2 &= \int_{O(d)} \Big| \int_{\mathbb{R}^d \times O(d)} e^{i\langle \xi, u^{-1} x\rangle} \varphi(k^{-1} u)\, d\mu(x, k)\Big|^2 dm(u) \\
&= \int_{O(d)} \Big| \int_{O(d)} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^d \times O(d)} e^{i\langle \xi, u^{-1} x\rangle} \varphi(k^{-1} u)\, d\mu_k(x, k)\Big\}\, d\bar{\mu}(k)\Big|^2 dm(u) \\
&= \int_{O(d)} \Big| \int_{O(d)} \Big\{\varphi(k^{-1} u) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, u^{-1} x\rangle} d\eta_k(x)\Big\}\, d\bar{\mu}(k)\Big|^2 dm(u) \\
&\leqq \int_{O(d)} \Big\{ \int_{O(d)} |\hat{\eta}_k(u \cdot \xi)|^2\, d\bar{\mu}(k)\Big\} \Big\{ \int_{O(d)} |\varphi(k^{-1} u)|^2\, d\bar{\mu}(k)\Big\}\, dm(u) \\
&\leqq \|\varphi\|^2 \operatorname*{Sup}_{u \in O(d)} \int_{O(d)} |\hat{\eta}_k(u \cdot \xi)|^2\, d\bar{\mu}(k)
\end{aligned}$$

Donc

$$\|T_\mu^\xi\|^2 \leqq \operatorname*{Sup}_{u \in O(d)} \int_{O(d)} |\hat{\eta}_k(u\, \xi)|^2\, d\bar{\mu}(k) \tag{1}$$

Rappelons alors que si ν est une probabilité sur $\mathbb{R}^d$ telle que les plus petit sous espace vectoriel engendré par le support de ν est $\mathbb{R}^d$, il existe une constante

$c>0$ et un voisinage V de 0 tels que

$$\operatorname{Re}(1-\hat{v}(t)) \geqq c|t|^2 \quad \text{sur } V \quad \text{(cf. Revuz [15] III prop. 5.6)}$$

Si η est une probabilité vectoriellement apériodique sur $\mathbb{R}^d$ on peut appliquer ce résultat à $\eta * \check{\eta}$ (η étant l'image de $\check{\eta}$ par symétrie) pour obtenier que $1-|\hat{\eta}(t)|^2 \geqq c|t|^2$ sur V.

Posons alors, si $V_n = \left\{x \in \mathbb{R}^d / |x| \leqq \frac{1}{n}\right\}$, pour m et n entiers,

$$A_{m,n} = \left\{k \in O(d) / \forall t \in V_n,\ |\hat{\eta}_k(t)|^2 \leqq 1 - \frac{1}{m}|t|^2\right\}.$$

Puisque μ est vectoriellement apériodique, $\bar{\mu}(\bigcup_{m,n} A_{m,n})$ est non nul et on peut choisir deux entiers m_0, n_0 tels que $\bar{\mu}(A_{m_0,n_0})$ soit non nul. On a, en utilisant (1), si $\xi \in V_n$,

$$\begin{aligned}\|T_\mu^\xi\|^2 &\leqq \int_{A^c_{m_0,n_0}} d\bar{\mu}(k) + \operatorname{Sup}_u \int_{A_{m_0,n_0}} |\hat{\eta}_k(u\xi)|\, d\bar{\mu}(k)\\ &\leqq 1 - \frac{\bar{\mu}(A_{m_0,n_0})}{m_0}|\xi|^2 \leqq \exp -\left\{\frac{\bar{\mu}(A_{m_0,n_0})}{m_0}|\xi|^2\right\}\end{aligned}$$

ce qui montre la proposition.

F. Fonctions de concentration

Donnons d'abord un lemme général dont la démonstration est facile:

Lemme 15. *Soit μ une probabilité sur un groupe $\mathscr{G}$, G un groupe quotient de $\mathscr{G}$, v la projection de μ sur G, p une puissance de convolution de v. Si il existe un entier r tel que, pout tout compact $\mathscr{C}$ de G, il existe une constante $k(\mathscr{C})$ vérifiant: Pour tout n, $\operatorname{Sup}_{x,y \in G} p^{*n}(x\mathscr{C}y) \leqq \frac{k(\mathscr{C})}{n^r}$; alors, pour tout compact K de $\mathscr{G}$, il existe une constante $c(K)$ telle que, pour tout n,*

$$\operatorname{Sup}_{x,y \in \mathscr{G}} \mu^{*n}(xKy) \leqq \frac{c(K)}{n^r}.$$

Enonçons alors l'un des théorèmes principaux de cet article:

Théorème 16. *Soit G un groupe* LCD *extension compacte d'un sous groupe distingué fermé abélien à génération compacte de rang r. Si μ est une probabilité étalée apériodique sur G et $\mathscr{C}$ un compact de G, il existe une constante c strictement positive telle que, pour tout entier n positif*

$$\operatorname{Sup}_{x,y \in G} \mu^{*n}(x\mathscr{C}y) \leqq c\, n^{-r/2}$$

Démonstration. D'après le lemme 15 et le théorème 8 on peut supposer que G est un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^r \times_\sigma O(r)$ et que μ, considérée comme probabilité sur $\mathbb{R}^r \times_\sigma O(r)$ est vectoriellement apériodique. Grâce à la proposition 14 dont on reprend les notations on peut donc supposer $\|T_\mu^\xi\|$ inférieur à $\exp\{-a|\xi|^2\}$ pour tout élément ξ d'un ouvert $\mathscr{U}$ contenant l'origine.

Soit B une boule centrée en O de $\mathbb{R}^r$ contenue dans $\mathscr{U}$, φ_0 une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}^r$ dont le support de la transformée de Fourier est contenu dans B. Si ν est une probabilité sur $\mathbb{R}^r$ la formule d'inversion permet d'écrire:

$$\int \varphi_0\, d\nu = \frac{1}{(2\pi)^r} \int \hat{\varphi}_0(t)\, \hat{\nu}(-t)\, dt \leqq b \int_B |\nu(t)|\, dt$$

si $b=(2\pi)^{-r} \operatorname{Sup}|\hat{\varphi}_0|$.

Remarquons alors que si g et g' sont deux éléments de G et si ν est la projection de $\delta_g * \mu^{*n} * \delta_{g'}$ sur $\mathbb{R}^r$, pour tout élément u de $O(r)$,

$$(T^\xi_{\delta_g * \mu^{*n} * \delta_{g'}} 1)(u) = \int_G e^{i\langle u\xi, x\rangle}\, d(\delta_g * \mu^{*n} * \delta_{g'})(x,k) = \hat{\nu}(u\xi).$$

Posons $\Psi(x,k)=\varphi_0(x)$ si (x,k) est un élément de G. Les deux inégalités précédentes permettent d'écrire que

$$\begin{aligned}
\int_G \Psi\, d(\delta_g * \mu^{*n} * \delta_{g'}) &= \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_0\, d\nu \leqq b \int_{B\times O(d)} |(T^\xi_{\delta_g * \mu^n * \delta_{g'}} 1)(u)|\, d\xi\, du \\
&\leqq b \int_B \|T_g^\xi \circ T^\xi_{\mu^{*n}} \circ T^\xi_{g'}\|\, d\xi \leqq b \int_B \|T_\mu^\xi\|^n\, d\xi \\
&\leqq b \int_B e^{-an|\xi|^2}\, d\xi \leqq \frac{b}{n^{r/2}} \int e^{-a|\xi|^2}\, d\xi
\end{aligned}$$

et il est alors facile de conclure.

Remarque. Le théorème précédent établit une relation entre le comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur G et la croissance de ce groupe (cf. Y. Guivarc'h [7]), puisque G est à croissance polynomiale de degré r. Nous verrons que l'on ne peut espérer un tel résultat quand le groupe est à croissance exponentielle.

Corollaire 17. *Soit μ une probabilité adaptée et étalée sur un groupe* LCD *extension compacte d'un sous groupe abélien distingué fermé à génération compacte de rang supérieur ou égal à trois. Alors les marches aléatoires associées à μ sont transientes et leur potentiel tend vers zéro à l'infini.*

Nous renvoyons à (D. Revuz [15]) pour ce qui concerne les marches aléatoires.

Démonstration. Il faut montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n} = \nu$ est une mesure de Radon telle que $\delta_x * \nu$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Pour étudier ceci on peut remplacer μ par $\sum_{n\geqq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \mu^{*n}$ qui est étalée apériodique. Le fait que la série $\sum_{n=0}^{l}$

$\mu^{*n}(x\mathscr{C})$, où $\mathscr{C}$ est un compact, converge uniformément en x donne alors ce résultat.

Remarque. Ce résultat a été démontré par des méthodes différentes dans (Y. Guivarc'h, M. Keane, B. Roynette [8]).

Deuxième partie : Fonctions de concentration sur les groupes non moyennables

Théorème 18. *Soit G un groupe* LCD *non moyennable, μ une probabilité sur G adaptée. Il existe alors un réel ρ strictement compris entre zéro et un tel que, pour tout compact K de G il existe une constante $c(K)$ vérifiant:*

$$\operatorname*{Sup}_{x,y\in G} \mu^{*n}(xKy) \leqq c(K)\,\rho^n$$

Démonstration. Soit λ une mesure de Haar à gauche sur G, $\{T_g, g\in G\}$ la représentation régulière gauche de G. Pour toute probabilité ν sur G et tout élément f de $L^2(G,\lambda)$ on pose donc

$$(T_\nu f)(x) = \int_G f(gx)\,d\nu(g) \qquad \text{si } x\in G$$

Si φ est une fonction positive à support compact sur G et $\check{\varphi}$ est la fonction définie par $\check{\varphi}(x)=\varphi(x^{-1})$ on voit immédiatement que

$$\nu(\varphi*\check{\varphi}) = \langle T_\nu\varphi, \varphi\rangle_{L^2} \leqq \|\varphi\|^2\,\|T_\nu\|.$$

Si V est un voisinage de l'élément neutre de G tel que 1_V soit majoré par $\alpha(\varphi*\check{\varphi})$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Sup}_{x,y\in G} \mu^{*n}(xVy) &= \operatorname*{Sup}_{x,y\in G} (\delta_{x^{-1}}*\mu^{*n}*\delta_{y^{-1}})(V)\\ &\leqq \alpha\,\|\varphi\|^2\,\|T_{\delta_{x^{-1}}*\mu^{*n}*\delta_{y^{-1}}}\| \leqq \alpha\,\|\varphi\|^2\,\|T_{\mu^{*n}}\|\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit d'appliquer le théorème 1 de (Y. Derriennic et Y. Guivarc'h [5]) qui nous indique que μ étant adaptée, il existe un réel a et une constante ρ de $]0,1[$ tels que $\|T_{\mu^{*n}}\| \leqq a\,\rho^n$.

Remarque 1. Les groupes non moyennables sont les seuls pour lesquels toutes les probabilités (adaptées) ont des fonctions de concentration à décroissance exponentielle. On sait en effet (cf. C. Berg et J.P.R. Christensen [2]) que si μ est une probabilité symétrique sur un groupe moyennable, $\lim\{\mu^{*n}(V)\}^{1/n}$ est égal à un pour tout voisinage compact de l'unité.

Remarque 2. Malgré la remarque précédente on peut trouver des groupes moyennables et des probabilités adaptées pour lesquels la fonction de concentration décroit exponentiellement.

Donnons un exemple. Soit $H=\mathbb{R}\times_\tau\mathbb{R}_*^+$ le groupe affine de la droite réelle (le produit est donné par $(x,a)(y,b)=(x+ay,ab)$), α et β deux réels strictement positifs tels que $\{\alpha^n\beta^m, n\in\mathbb{N}, \beta\in\mathbb{N}\}$ soient des éléments indépendants dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$. Le groupe G, sous groupe dénombrable de H engendré par $(1,\alpha)$ et $(1,\beta)$ est résoluble donc moyennable. Si μ est $\frac{1}{2}\{\delta_{(1,\alpha)}+\delta_{(1,\beta)}\}$, μ est adaptée à G et on vérifie facilement que $\mu^{*n}(\{g\})$ ne prend que les valeurs 0 et $\frac{1}{2^n}$.

Troisième partie: Fonctions de concentration à gauche et à droite

Comme nous l'avons dit dans l'introduction nous allons montrer qu'il existe de nombreuses probabilités sur le groupe affine de la droite $H=\mathbb{R}\times_\tau\mathbb{R}_*^+$ telles que $\mathscr{D}_\mu(n)$ est de l'ordre de $n^{-1/2}$ alors que $\mathscr{G}_\mu(n)$ décroit exponentiellement vite.

Commençons par établir un résultat général:

Lemme 19. *Soient K et S deux sous groupes fermés d'un groupe* (LCD) *G tels que $G=KS$ et $K\cap S=\{e\}$. Pour tout k de K, soit φ_k l'application borélienne de S dans S définie par $\varphi_k(s)=s'$ si et seulement si ks est un élément de $s'K$. Si K est compact et μ est une probabilité adaptée sur S, égale à son image par toutes les applications $\{\varphi_k, k\in K\}$, il existe une probabilité adaptée ν sur G telle que, pour tout compact A de S, pour tout entier n,*

$$\sup_{s\in S}\mu^{*n}(sA)=\sup_{s\in S}\nu^{*n}(sAK)$$

Démonstration. Sur un espace $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ on définit $(S_n, n\in\mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans S de loi μ et $(K_n, n\in\mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans K ayant pour loi la mesure de Haar de K, indépendante de la première. On va montrer que le lemme est vérifié si ν est la loi de $K_n S_n$.

Si $K_n S_n = S'_n K'_n$ où S'_n est dans S et K'_n dans K,

$$\begin{aligned}\nu^{*n}(sAK)&=P(K_1S_1K_2S_2..K_nS_n\in sAK)\\&=P(S'_1K'_1K_2S_2..K_nS_n\in sAK)\\&=P(S'_1K_2S_2..K_nS_n\in sAK)\end{aligned}$$

car K_2 est indépendante des autres variables et de loi la mesure de Haar. En continuant ce calcul on obtient:

$$\begin{aligned}\nu^{*n}(sAK)&=P(S'_1S'_2..S'_nK'_n\in sAK)\\&=P(S'_1..S'_n\in sA)\end{aligned}$$

Puisque $S'_n=\varphi_{K_n}(S_n)$, l'indépendance de K_n et S_n montre que S_n et S'_n ont même loi donc que

$$\nu^{*n}(sAK)=\mu^{*n}(sA).$$

Soit G le groupe unimodulaire $Sl(2,\mathbb{R})$. Si $K=SO(2)$ et

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}_*^+,\ b\in\mathbb{R}\right\},$$

ces trois groupes satisfont aux hypothèses de lemme 19. Rappelons que le groupe G opère sur le groupe affine $\mathbb{R} \times_\tau \mathbb{R}_*^+ = H$ par:

$$\text{Si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R}), \text{ si } x = (\beta, \alpha) \in H, \text{ si } z = \beta + i\alpha,$$

$$g \cdot x = \left(\operatorname{Re} \frac{az+b}{cz+d}, \, Im \frac{az+b}{cz+d}\right).$$

En particulier $SO(2)$ opère sur le groupe affine.

Proposition 20. *Si λ est une probabilité sur le groupe affine H, adaptée et invariante sous l'action de $SO(2)$, si A est un compact de H, il existe une constante a strictement positive et un réel ρ de $]0,1[$ tels que, pour tout entier n,*

$$\sup_{h \in H} \lambda^{*n}(hA) \leqq a\, \rho^n$$

Démonstration. Soit $e = (0,1)$ l'élément neutre de H. L'application f de S dans H définie par $f(s) = s \cdot e$ est un isomorphisme de groupe vérifiant, si $h \in H$ et $k \in K$, $(f \circ \varphi_k \circ f^{-1})(h) = k \cdot h$ (On utilise les notations introduites dans le lemme 19 et avant l'énoncé de la proposition). Il est facile d'en déduire que l'image μ par f^{-1} de λ sur S vérifie les hypothèses du lemme. Le groupe G, semi-simple non compact, n'étant pas moyennable le théorème 18 montre alors que si A' est un compact de S, il existe a et ρ telles que $\sup_{s \in S} \mu^{*n}(sA') \leqq a\, \rho^n$. La proposition en découle immédiatement.

La proposition suivante peut être considérée comme un théorème local pour certaines probabilités sur le groupe affine de la droite réelle.

Proposition 21. *Soit $\{(Y_n, X_n), n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ telle que, la loi de X_1 est apériodique de variance σ^2 et d'espérance a, a strictement négatif.*

2) *Il existe un réel $\alpha > 0$, tel que $E(e^{\alpha X_1}) < 1$ et $0 < E(|Y_1|^\alpha) < +\infty$*

Alors, si λ_n est la loi de $(Y_1 + e^{X_1} Y_2 + e^{X_1 + X_2} Y_3 + \cdots + e^{X_1 + \cdots + X_{n-1}} Y_n, X_1 + \cdots + X_n - na)$, si m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, il existe une probabilité λ sur $\mathbb{R}$ telle que la suite de mesure $\sqrt{n}\, \lambda_n$ converge vaguement vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (\lambda \otimes m)$.

Démonstration. Si on note $\mathscr{U}_n$ la variable aléatoire $Y_1 + e^{X_1} Y_2 + \cdots + e^{X_1 + \cdots + X_{n-1}} Y_n$, le théorème 6 de H. Kesten ([11]) affirme que la suite $(\mathscr{U}_n, n \in \mathbb{N})$ converge presque surement vers une variable aléatoire $\mathscr{U}$ dont on note la loi λ.

D'après le théorème 10.7 de Breiman ([4]) il suffit, pour établir la proposition, de montrer que si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ à support compact,

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma \sqrt{2\pi n} \int f(x)\, g(y)\, d\lambda_n(x,y) = \int f(x)\, g(y)\, d\lambda(x)\, dm(y)$$

On note $r(n)$ la partie entière de $\sqrt{n}$, μ la loi de X_1-a, S_n la somme $X_1+X_2+\cdots+X_n$.

a) Vérifions d'abord que

$$\sqrt{n-r(n)}\, E\{f(\mathscr{U}_{r(n)})\, g(S_n-n\,a)\}$$
converge vers $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\int f(x)\, g(y)\, d\lambda(x)\, dm(y)$

On sait que si Ψ est une fonction sur $\mathbb{R}^2$ à transformée de Fourier $\hat{\Psi}$ intégrable et η une probabilité sur $\mathbb{R}^2$, la formule d'inversion permet d'écrire que

$$\int \Psi(x,y)\, d\eta(x,y)=\int \frac{1}{4\pi^2}\, \Psi(-x,-y)\, \hat{\eta}(x,y)\, dx\, dy.$$

On a donc $\sqrt{n-r(n)}\, E\{f(\mathscr{U}_{r(n)})\, g(S_n-n a)\}$

$$=\frac{\sqrt{n-r(n)}}{4\pi^2}\int \hat{f}(-x)\, \hat{g}(-y)\, E(e^{i\,x\,\mathscr{U}_{r(n)}+iy(S_n-na)})\, dx\, dy$$

$$=\frac{\sqrt{n-r(n)}}{4\pi^2}\int \hat{f}(-x)\, \hat{g}(-y)\, \{\hat{\mu}(y)\}^{n-r(n)}\, \hat{\lambda}_{r(n)}(x,y)\, dx\, dy$$

en utilisant les propriétés d'indépendance.

La probabilité μ étant apériodique il existe deux réels strictement positifs t_1 et l tels que

$$|\hat{\mu}(y)|\leqq e^{-ly^2} \quad \text{si } |y|\leqq t_1 \quad \text{et}$$
$$\operatorname{Sup}\{|\hat{\mu}(y)|: y\in\mathbb{R},\ |y|>t_1,\ \hat{g}(y)\neq 0\}=\gamma<1.$$

Si on découpe l'intégrale précédente en intégrale sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}/|y|\leqq t_1\}$ et intégrale sur le complémentaire, cette dernière étant majorée par

$$\frac{\sqrt{n-r(n)}}{4\pi^2}\, \gamma^{n-r(n)}\int |\hat{f}(x)\, \hat{g}(y)|\, dx\, dy$$

tend vers zéro. Il reste donc à étudier la première qui est égale à:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{|y|<(\sqrt{n-r(n)})\,t_1} \hat{f}(-x)\, \hat{g}\left(\frac{-y}{\sqrt{n-r(n)}}\right) \hat{\mu}^{n-r(n)}\left(\frac{y}{\sqrt{n-r(n)}}\right) \hat{\lambda}_{r(n)}\left(x,\frac{y}{\sqrt{n-r(n)}}\right) dx\, dy$$

La loi des grands nombres montrant que

$$\hat{\lambda}_{r(n)}\left(x,\frac{y}{\sqrt{n-r(n)}}\right)=E\left(e^{i\,x\,\mathscr{U}_{r(n)}+iy\sqrt{\frac{r(n)^2}{n-r(n)}}\frac{S_{r(n)}-r(n)\,a}{r(n)}}\right)$$

tend vers $\hat{\lambda}(x)$ et le théorème central limite que $\hat{\mu}^{n-r(n)}\left(\frac{y}{\sqrt{n-r(n)}}\right)$ tend vers $\exp\left(-\frac{\sigma^2 y^2}{2}\right)$, quand n tend vers l'infini, en restant majoré par $\exp(-l\,y^2)$ sur le domaine d'intégration, le théorème de Lebesgue montre que cette intégrale converge vers

$$\frac{1}{4\pi^2}\int \hat{f}(-x)\,\hat{g}(-y)\,\hat{\lambda}(x)\,e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2}}\,dx\,dy,$$

c'est-à-dire vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int f(x)\,d\lambda(x)\int g(y)\,dm(y).$$

b) Montrons alors, ce qui établira la proposition, que sous les mêmes hypothèses sur f et g,

$$\sqrt{n}\,\{\int f(x)\,g(y)\,d\lambda_n(x,y)-E(f(\mathscr{U}_{r(n)})\,g(S_n-na))\}$$

tend vers zéro. Ceci étant égal à: $\frac{\sqrt{n}}{4\pi^2}\int \hat{f}(-x)\,\hat{g}(-y)\;E[(\exp iy(S_n-na))(e^{i\times\mathscr{U}_n}-e^{i\times\mathscr{U}_{r(n)}})]\,dx\,dy$, il suffit de montrer que $\sqrt{n}\,E[|e^{i\times\mathscr{U}_n}-e^{i\times\mathscr{U}_{r(n)}}|]$ tend vers zéro uniformément quand $\times$ reste dans un compact. Or, $\mathscr{U}$ étant la limite de $(\mathscr{U}_n, n\in\mathbb{N})$,

$$\sqrt{n}\,E[|e^{i\times\mathscr{U}_n}-e^{i\times\mathscr{U}_{r(n)}}|]\leqq\sqrt{n}\,E[|1-e^{i\times(\mathscr{U}-\mathscr{U}_n)}|]+\sqrt{n}\,E[|1-e^{i\times(\mathscr{U}-\mathscr{U}_{r(n)})}|].$$

Si on remarque que $\mathscr{U}-\mathscr{U}_n$ s'écrit $e^{S_n}\,\mathscr{U}'$ et $\mathscr{U}-\mathscr{U}_{r(n)}$, $e^{S_{r(n)}}\,\mathscr{U}''$, où $\mathscr{U}'$ et $\mathscr{U}''$ soit deux variables aléatoire de loi λ, il suffit de montrer que $n\,E(|1-e^{i\times e^{S_n}\mathscr{U}'}|)$ tend vers zéro uniformément sur les compacts.

On peut supposer que α est inférieur à un. L'inégalité

$$(x+y)^\alpha\leqq x^\alpha+y^\alpha\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

montre que $E(|\mathscr{U}'|^\alpha)=E(|\mathscr{U}|^\alpha)\leqq\sum_{n\geqq 0}E(e^{\alpha X_1})^{n-1}\,E(|Y_1|^\alpha)$ est finie.

La majoration suivante permet alors de conclure:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,n\,E(|1-e^{i\times e^{S_n}\mathscr{U}'}|)&\leqq n\,E(|x\,e^{S_n}\mathscr{U}'|^\alpha)\leqq n\,|x|^\alpha\,E(|\mathscr{U}'|^\alpha)\\&\leqq n\,E(|x\,e^{S_n}\mathscr{U}'|^\alpha)\leqq n\,|x|^\alpha\,E(|\mathscr{U}'|^\alpha)\,E(e^{\alpha X_1})^n.\end{aligned}$$

Montrons alors le résultat principal de cette partie:

Proposition 22. *Soit μ une probabilité à support compact sur le groupe affine de la droite réelle H, invariante par $SO(2)$, non portée par un point. Si K est un compact d'intérieur non vide de H il existe trois constantes strictement positives $c_1(K)$, $c_2(K)$, $c_3(K)$ et un nombre réel ρ de $]0,1[$ tels que, pour tout entier n,*

$$\operatorname*{Sup}_{x\in H}\mu^{*n}(xK)\leqq c_1(K)\,\rho^n,\ \frac{c_2(K)}{\sqrt{n}}\leqq\operatorname*{Sup}_{x\in H}\mu^{*n}(Kx)\leqq\frac{c_3(K)}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration. Soit $\{(Y_n, T_n),\ n\in\mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ sur $\mathbb{R}\times_\tau\mathbb{R}_*^+=H$. L'application qui à $(\beta,\alpha)\in H$ associe $\frac{\beta+i\alpha-i}{\beta+i\alpha+i}$, élément du disque unité D du plan complexe, transporte l'action de $SO(2)$ sur H en l'action naturelle de $SO(2)$ par rotations sur D.

La loi μ étant invariante par $SO(2)$, il existe donc une variable aléatoire Θ, uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et une variable aléatoire L indépendante de Θ, à valeurs dans D telles que $\frac{Y_1 + iT_1 - i}{Y_1 + iT_1 + i}$ soit égal à $L \exp i\Theta$. Il est facile d'en déduire que la suite $\{(Y_n, X_n), n \in \mathbb{N}\}$, où $X_n = \operatorname{Log} T_n$, vérifie les hypothèses de la proposition 21 avec α égal à un. Utilisons les notations de cette proposition.

Si on remarque que, le produit étant effectué dans le groupe H,

$$\left\{\prod_{i=1}^{n} (Y_i, T_i)\right\}(0, e^{-na}) = (Y_1 + T_1 Y_2 + \cdots + T_1 T_2 \ldots T_{n-1} Y_n, T_1 \ldots T_n e^{-na})$$

a pour loi $\mu^{*n} * \delta_{(0, e^{-na})}$, la proposition 21 affirme que $\sqrt{n}(\mu^{*n} * \delta_{(0, e^{-na})})$ converge vaguement vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \lambda \otimes e^m$ (si e^m désigne l'image de la mesure de Lebesgue par l'exponentielle).

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de H contenu dans K, h un point de H, tels que $\mathcal{O}h$ soit chargé par $\lambda \otimes e^m$ mais de frontière négligible.

Puisque $\sqrt{n} \sup_{x \in H} \mu^{*n}(Kx)$ majore $\sqrt{n}(\mu^{*n} * \delta_{(0, e^{-na})})(\mathcal{O}h)$ et que cette quantité a une limite non nulle quand n tend vers l'infini, il existe $c_2(K)$ vérifiant la proposition.

Si ν est la projection de μ sur $\mathbb{R}_*^+$ et si K est contenu dans un compact de la forme $A \times B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}_*^+$, $\sup_{x \in H} \mu^{*n}(Kx)$ étant majoré par $\sup_{y \in \mathbb{R}_*^+} \nu^{*n}(By)$, le théorème 16, par exemple, donne l'existence de $c_3(K)$. La proposition 20 montrant la première inégalité (faisant intervenir $c_1(K)$) la proposition est établie.

Bibliographie

1. Bhattacharya, R.N.: Speed of convergence of the n-fold convolution of a probability measure on a compact group. Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **25**, 1–10 (1972)
2. Berg, C., Christensen, J.P.: Sur la norme des opérateurs de convolution. Invent. Math. **23**, 173–178 (1974)
3. Bougerol, P.: Fonctions de concentrations sur les extensions compactes de groupes abéliens. C.R. Acad. Sci. Paris **283**, 527–529 (1976)
4. Breiman, L.: Probability. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1968
5. Deriennic, Y., Guivarc'h,Y.: Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables. C.R. Acad. Sci. Paris **277**, 613 (1973)
6. Essen, C.G.: On the Kolmogorov-Rogozin inequality for the concentration function. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **5**, 210–216 (1966)
7. Guivarc'h, Y.: Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France **101**, 333–379 (1973)
8. Guivarc'h, Y., Keane, M., Roynette, B.: (A paraître dans Lecture Notes, Springer Verlag
9. Hentgartner, W., Theodorescu, R.: Concentration functions. New York: Academic Press 1973
10. Hochschild, G.: The structure of Lie Groups. San Francisco: Holden Day 1965
11. Kesten, H.: Random difference equations and renewal theory for products of Random matrices. Acta Mathematika **131**, 207–248 (1973)
12. Kolmogorov, A.N.: Sur les propriétés des fonctions de concentration de M.P. Lévy. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B **16**, 27–34 (1958)
13. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris: Masson 1970
14. Ramsey, A.: Virtual groups and groups actions. Advances in Math. **6** (1971)
15. Revuz, D.: Markov chains. Amsterdam: North-Holland 1975

Reçu le 18 Mai 1977; en forme révisée le 22 Mai 1978