ZAMM 55, 47 – 58 (1975)

HERBERT BECKERT

Zur ersten Randwertaufgabe in der nichtlinearen Elastizitätstheorie

Herrn Prof. Dr. Dr. HEINRICH zum 70. Geburtstag

In der Arbeit wird eine neue konstruktive Methode zur mathematischen Beschreibung endlicher Deformationen eines elastischen Körpers in der nichtlinearen Elastizitätstheorie entwickelt. Ausgangspunkt ist die Kenntnis eines analytischen Ausdrucks für die zweite Variation des elastischen Potentials im verallgemeinerten Sinne von E. Trefftz. Zunächst wird die Deformation approximativ über ein Differenzenverfahren entlang der Datenkette über stabile Zustände beschrieben und anschließend ein strenger Konvergenzbeweis erbracht, dessen Gültigkeitsbereich im Großen durch natürliche Schrankenbedingungen eingegrenzt wird.

This paper contains a new constructive method for describing finite deformations of an elastic body in nonlinear elasticity. The starting point is the second variation of the elastic potential in a generalized sense of E. Trefftz. Firstly the deformation is approximately described by a difference scheme along the data chain over states of stability. For this procedure a strong convergence proof is given limited by natural conditions.

В работе развивается новый конструктивный метод для математического описания конечных деформаций некоторого упругого тела в нелинейном теории упругости. Исходным пунктом является знание аналитического выражения для второй вариации упругого потенциала в обобщенном смысле по Треффтцу. Сначала деформация аппроксимативно описывается с помощью некоторого метода конечных разностей вдоль последовательности данных по устойчивым состояниям и в заключение приводится строгое доказательство сходимости, область действительности которой в общем ограничивается естественными условиями.

In dieser Arbeit entwickeln wir eine neue konstruktive Methode zur mathematischen Beschreibung endlicher Deformationen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie. Diese geht nicht von der problematischen expliziten Kenntnis eines global eindeutigen Ausdrucks für das elastische Potential als Funktion der Komponenten des Verzerrungstensors bezogen auf den entspannten Zustand des Körpers aus, sondern postuliert vielmehr in jedem Deformationszustand nur einen im lokalen Sinn gültigen eindeutigen analytischen Ausdruck des elastischen Potentials. Deren zweite Variation erweist sich dann als der tragende Pfeiler für die mathematische Beschreibung endlicher Deformationen in der Kontinuumsmechanik. Bei der Begründung der Stabilitätstheorie leitete E. TREFFTZ [14] unter einer plausiblen Annahme (T) den analytischen Ausdruck für die zweite Variation des elastischen Potentials her. Ausgehend vom entspannten Zustand Z_0 des elastischen Körpers zerlegen wir daraufhin den Deformationsweg in eine Folge von Zwischenzuständen $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n = Z_e$ im stabilen Datenbereich. Bei Gültigkeit von (T) kann man die Übergänge $Z_i \to Z_{i+1}$ approximativ durch die Lösungen von linearen elliptischen Randwertproblemen beschreiben und zugleich die neuen Spannungen rekursiv berechnen. Wir lassen die Abstände benachbarter Schritte in dem zugrundegelegten Funktionalraum des Datenbereichs gegen Null konvergieren und beweisen die Konvergenz unseres Differenzenverfahrens für die auf den Ausgangszustand bezogene Deformationsschar im BANACH-Raum $C^{2+\mu}$. Die Grenzschar definiert die gesuchte Deformation des elastischen Körpers unter den sich verändernden Bedingungen im Gültigkeitsbereich des TREFFTZschen Modells. Unser Konvergenzbeweis rechtfertigt nachträglich, die Übergänge $Z_i \to Z_{i+1}$ einzuführen und diese durch lineare numerischen Verfahren zugängliche Randwertprobleme zu beschreiben. Wir illustrieren die Methode an Hand der ersten Randwertaufgabe der nichtlinearen Elastizitätstheorie. Man kann ohne Schwierigkeiten unsere Methode auf wesentlich allgemeinere Strukturen übertragen, als sie durch (T) vorgezeichnet sind, vgl. Satz II.[1])

Bezeichnungen:

$C^{k+\mu}(G)$ ist der bekannte BANACH-Raum der k-mal über dem Gebiet G $\mu - H$-stetig differenzierbaren Vektorfunktionen $u(x) = (u_1, u_2, u_3)$ mit der üblichen Maximumnorm $||u||_{k+\mu}(G)$, $0 < \mu < 1$. $H_{1,2}(G)$ bezeichnet den SOBOLEV-Raum der Vektorfunktionen $u(x)$ über G mit verallgemeinerten Ableitungen erster Ordnung und der üblichen Norm $||u||_{1,2}(G)$. Für die Ableitungen verwenden wir die bekannte Multiindizesschreibweise $\mathrm{D}_i = \partial/\partial x_i$. D^k bezeichnet eine allgemeine k-te Ableitung nach den Veränderlichen x_1, x_2, x_3. Volumen- und Oberflächenelemente kürzen wir durch $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$ und $\mathrm{d}\sigma$ ab. Über doppelt auftretende Indizes vereinbaren wir zu summieren.

Sei G ein elastischer Körper, S sein Rand, im unverzerrten Zustand Z_0, welcher unter dem Einfluß von Volumenkräften $X = (X_1, X_2, X_3)$, Oberflächenkräften $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ oder Oberflächenverschiebungen

$$u_j(\sigma) = \varphi_j(\sigma)\,, \qquad \sigma \in S \tag{1}$$

in $G' + S'$ deformiert werde. Die endlichen Verschiebungen $u(x) = (u_1, u_2, u_3)$ der Punkte $P(x) \in G + S$ in die Bildpunkte $P'(x') \in G' + S'$ seien auf ein raumfestes Dreibein $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3)$ im Koordinatenursprung 0 bezogen,

[1]) Der Verf. hat auf der Tagung in Rathewalde im Oktober 1972 erstmals über den Inhalt dieser Arbeit vorgetragen.

so daß

$$\vec{OP} = \sum_j^3 x_j e_j \qquad \text{im Zustand } Z_0$$

$$\vec{OP'} = \sum_j^3 x_j' e_j \qquad \text{im Endzustand } Z \tag{2}$$

$$x_j + u_j(x) = x_j', \qquad \vec{PP'} = \sum_j^3 e_j u_j(x)$$

gilt. Der Zuwachs des elastischen Potentials dU, den das Volumenelement dx unter der als isotherm und reversibel vorausgesetzten Deformation $Z_0 \to Z_e$ erfährt, läßt sich bekanntlich durch eine Funktion der Invarianten des Verzerrungstensors

$$e_{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_l}$$

ausdrücken, vgl. etwa [4]:

$$dU = \chi_1(I_1, I_2, I_3)\, dx = \chi(e_{kl})\, dx\,,$$

woraus man für die gesamte Änderung des elastischen Potentials bezogen auf den Ruhezustand Z_0 in G

$$U = \int_G \chi(e_{kl})\, dx = \int_G F\left(x_j\,;\, \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right) dx \tag{3}$$

erhält. Macht man, wie üblich, zunächst die vereinfachende Annahme, daß die auf ein Volumenelement dx wirkende Volumenkraft $X_i(x)\, e_i\, dx$ und auf ein Oberflächenelement $d\sigma \in S$ wirkende Flächenkraft $Q_i(\sigma)\, e_i\, d\sigma$ sich während der Deformation nicht ändert unabhängig von Lage und Verzerrung von dx bzw. $d\sigma$, so wird ein stabiler Gleichgewichtszustand Z_e durch die Extremalen des Variationsproblems

$$\Phi(u) = U - A \to \text{Min} \tag{4}$$

unter den Randbedingungen (1) bei der ersten Randwertaufgabe oder unter freien Bedingungen im Falle der zweiten Randwertaufgabe beschrieben. A ist die Arbeit der äußeren Kräfte:

$$\begin{aligned} A &= A_1(u) + A_2(u)\,, \\ A_1(u) &= \int_G X_k(x)\, u_k(x)\, dx\,, \\ A_2(u) &= \int_{\delta G} Q_k(\sigma)\, u_k(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{5}$$

Beispiele, auf welche die gemachten Annahmen zutreffen, sind Schwerkraft und Druckkräfte auf die Oberfläche. Bekanntlich kann man im Gegensatz zur linearen Elastizitätstheorie einen allgemeingültigen analytischen Ausdruck für das elastische Potential (3) aus geometrischen, mechanischen und thermodynamischen Prinzipien allein nicht herleiten. Man findet daher in der Literatur die verschiedenartigsten Ansätze unter mehr oder weniger plausiblen Annahmen für spezielle Stoffklassen, [2], [4], [11], [17].

Die bedeutenden Fortschritte der Variationsrechnung in den letzten Jahrzehnten lassen sich nur in beschränktem Umfang auf die Variationsprobleme (4) der nichtlinearen Elastizitätstheorie ausdehnen. Die Gründe liegen in dem in der nichtlinearen Elastizitätstheorie natürlichen Auftreten von Instabilitätsbereichen, Mehrdeutigkeiten und Lösungsverzweigungen hin bis zum Typenwechsel des LAGRANGEschen Operators mit einer starken Fernwirkung auf den regulären Lösungsbereich. Wir wollen in dieser Arbeit eine neue Methode zur Behandlung der Randwertaufgaben der nichtlinearen Elastizitätstheorie darstellen, welche den Vorteil besitzt, daß sich die Kräfte mit der Deformation ändern dürfen. Unser Lösungsweg verfolgt nicht, wie in (4) die direkte Konstruktion der Verschiebung zum Endzustand Z_e, wir beschreiben vielmehr, wie es natürlicher erscheint, die Deformation selbst vom Anfangszustand Z_0 über einen vorgeschriebenen Datenweg zum geforderten Endzustand. Statt vom elastischen Potential gehen wir längs des Deformationsweges von dessen zweiter Variation aus, die ja auch die Stabilitätsgrenzen und Instabilitätsbereiche des Systems bestimmt. Im Rahmen seiner Stabilitätstheorie berechnet E. TREFFTZ in [14] auf Grund durchsichtiger Annahmen die zweite Variation des elastischen Potentials eines deformierten Körpers. Wir legen zunächst dieses TREFFTZsche Modell zugrunde und verallgemeinern es dann auf eine weite Klasse nichtlinearer Systeme, vgl. Satz II.

Es möge sich der elastische Körper G^*, bezogen auf das raumfeste Dreibein (e_i) im entspannten oder gespannten Ausgangszustand $Z^*(y)$, der durch die Spannungsverteilung $\sigma_{\mu\nu}(y)$ charakterisiert sei, mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht befinden. Beim Übergang zu einem Nachbarzustand

$$Z_1^*\colon\ y^1 = y + u(y)\,; \qquad u(\sigma^*) = \Delta\varphi(\sigma^*)\,, \qquad \sigma^* \in S^*$$

macht E. Trefftz in [14] die Annahme (T), daß man die Spannungsverteilung $k_{\mu\nu}(y^1)$ im Zustand Z_1^* nach

$$k_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \tag{6}$$

zerlegen kann, wobei $\sigma_{\mu\nu}$ die Spannungen des Ausgangszustands $Z^*(y)$ sind und sich die bei der Deformation $Z^* \to Z_1^1$ ergebenden Zusatzspannungen $\tau_{\mu\nu}$ nach der linearen Theorie berechnen. Bei Isotropie bestehen also die klassischen Spannungs-Dehnungsgleichungen

$$\tau_{kk} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_k}, \quad \tau_{ik} = \frac{\partial a}{\partial \gamma_{ik}}, \quad i \neq k,$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i}, \quad \varepsilon_k = \frac{\partial u_k}{\partial y_k}, \quad \vartheta = \operatorname{div} \mathfrak{u}$$

mit

$$a = \left\{\frac{m-1}{m-2}\vartheta^2 - 2\,(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \cdots) + \frac{1}{2}\,(\gamma_{12}^2 + \cdots)\right\} G\,,$$

G = Schubmodul, m = Querkontraktion.

Im allgemeinen Fall ist bekanntlich a eine positiv definite quadratische Form der linearen Verzerrungskomponenten bei Inhomogenität mit variablen Koeffizienten. Die Annahme (T) ist sicher nur approximativ in einem genügend kleinen endlichen Deformationsbereich $(u(y),\ \partial u/\partial y) \subset V(\sigma_{\mu\nu})$ erfüllt, der von $\sigma_{\mu\nu}(y)$ abhängt.

G^* sei aus G durch die Verschiebung

$$y = x + v(x) \tag{*}$$

hervorgegangen. Wir denken uns das elastische Potential im Zustand Z^* durch (*) auf G^* bezogen, ebenso für Z_1^*, und entwickeln die Potentialdifferenz

$$\varDelta U = U(u) - U(0) = V(0, u) + \tilde{Q}(0, u, u) \tag{8}$$

bis zur zweiten Ordnung mit

$$\tilde{Q}(0, u, u) = \int_{G^*}\int_0^1\int_0^t F''(t')\,dt'\,dt\,dy\,, \tag{9}$$

$$F(t') = F\left(y, t'\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

In [14] leitet E. Trefftz unter seiner Annahme (T) für (9) den Ausdruck

$$\tilde{Q}\,(0,u,u) = \frac{1}{2}\int_{G^*} \sigma_{\mu\nu}(y)\,\frac{\partial u_k}{\partial y_\mu}\,\frac{\partial u_k}{\partial y_\nu} + 2a\,dy \tag{10}$$

her. Da die Koeffizienten der quadratischen Form im Integranden (10) nur vom Zustand $Z^*(y)$ abhängen, schließt man leicht auf

$$Q(0, u, u) = \tilde{Q}(0, u, u)\,, \tag{11}$$

wo $Q(0, u, u)$ die zweite Variation von U im Zustand Z^* ist. Das von E. Trefftz im Rahmen seiner Stabilitätstheorie zugrundegelegte Modell (T) basiert also auf dem analytischen Ausdruck (10) für die zweite Variation des elastischen Potentials im Zustand Z^*.

Bekanntlich kann man die Lösungen eines regulären nichtlinearen Variationsproblems in Nachbarschaft einer vorgegebenen Lösung durch ein auf das Integral der zweiten Variation führendes Randwertproblem konstruieren, vgl. [1], [12], [18]. Man benötigt hierzu die explizite Kenntnis des Variationsintegrals selbst nicht. Um dies für unser Problem nutzbar zu machen — wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die erste Randwertaufgabe und verschieben die Behandlung der zweiten Randwertaufgabe auf eine folgende Mitteilung — seien Z und Z' Gleichgewichtszustände unter zugehörigen Randverschiebungen und Volumenkräften $f(y)$ bzw. $f(y) + \varDelta f(y)$. Die Verschiebungen $v = 0$ und $u(y)$ sind dann Lösungen der ersten Variationsgleichungen:

$$V(0, \xi) - (f, \xi)_0 = 0\,,$$

$$V(u, \xi) - (f + \varDelta f, \xi)_0 = 0 \tag{12}$$

für alle $\xi(y) \subset H_{1,2}(G)$.

Nach Subtraktion der beiden Gleichungen folgt, $u(y)$ löst das Variationsproblem

$$Q_2(0, u, u) - 2(\varDelta f, u)_0 \to \text{Min} \tag{13}$$

unter den Randbedingungen

$$u(\sigma^*) = \varDelta\varphi(\sigma^*)\,, \qquad \sigma^* \subset S \subset \partial G\,,$$

wobei

$$Q_2(0, u, u) = \int_G \int_0^1 F''(t)\, dt\, dy ,$$

$$F(t) = F\left(y, t\, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

und die Koeffizienten nicht variiert werden, vgl. [18].

Wir ersetzen jetzt in (13) $Q_2(v; u, u)$ durch die zweite Variation $Q(v; u, u)$ von $U(v)$ des TREFFTZschen Modells und erhalten offenbar durch Lösung dieses quadratischen Variationsproblems eine naheliegende Approximation für den Übergang $Z \to Z'$.

Bei der ersten Randwertaufgabe des im entspannten Zustand Z_0 befindlichen Körpers $G + S$ seien die Randverschiebungen $u(\sigma) = \varphi(\sigma) \in C^{2+\mu}$, $\sigma \in S$ und wirkenden Volumenkräfte $X(X_1, X_2, X_3) \in C^\mu$ vorgeschrieben, in dem Sinn, daß diese Daten im Endzustand der Deformation realisiert seien. Jeder stetigen Kurve in $C^{2+\mu} \times C^\mu$ vom Ursprung zum Endpunkt $\varphi(\sigma) \times X$ entspricht beim monotonen Durchlaufen eine mögliche stetige Deformation von G in einen gewünschten Endzustand Z_e, der vom Wege abhängen kann. Der Einfachheit halber wollen wir hier den geradlinigen Weg

$$\lambda\varphi(\sigma) \times \lambda X , \qquad I_1 : 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

zugrundelegen. Zur genäherten Beschreibung der zugehörigen Deformation $Z_0 \to Z_e$ von G unter (T) sei das Intervall I_1 in die Teilpunkte

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = 1 , \qquad \operatorname{Max} \lambda_{j+1} - \lambda_j = \varepsilon$$

zerlegt, wir definieren hierzu die Folge $Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_n$ von Deformationen wie folgt:

Beim ersten Schritt berechnen wir nach der linearen Theorie das Verschiebungsfeld $v_j^0(x)$ zu $Z_0 \to Z_1$ aus dem Variationsproblem

$$\int_G a\left(\frac{\partial v^0}{\partial x}, \frac{\partial v^0}{\partial x}\right) dx - \lambda_1 (X, v^0)_0 \to \text{Min} , \tag{14}$$

$$v_j^0(\sigma) = \lambda_1 \varphi(\sigma) , \qquad \sigma \in S ;$$

$G + S$ gehe durch

$$x_j^1 = x_j + v_j^0(x) , \qquad j = 1, 2, 3 , \tag{15}$$

in $G^1 + S^1$ über. Die entstehenden Zusatzspannungen $\tau^0_{\mu\nu}$ nach der linearen Theorie (7) definieren über $G^1 + S^1$ die Spannungsverteilung

$$\sigma^1_{\mu\nu}(x^1) = \tau^0_{\mu\nu}(x) .$$

Sind die Deformationsschritte $Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_l$ bereits definiert: $G \to G^l \to \cdots \to G^l$ und die Spannungen

$$\sigma^l_{\mu\nu}(x^l) \quad \text{über} \quad G^l$$

nach (T) berechnet, dann bestimmen wir die Verschiebungen $v^l(x^l)$, $x^l \in G^l$ induktiv auf Grund von (10), (11), (13) aus dem Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \int_{G^l} \sigma^l_{\mu\nu}(x^l)\, \frac{\partial v_k^l}{\partial x_\mu^l} \frac{\partial v_k^l}{\partial x_\nu^l} + 2a\left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) dx^l - (\lambda_{l+1} - \lambda_l)\, (X, v^l)_0 \to \text{Min} \tag{16}$$

unter den Randbedingungen

$$(\lambda_{l+1} - \lambda_l)\, \varphi(\sigma^l) = v^l(\sigma^l) , \qquad \sigma^c \in S^l .$$

Hieraus folgen die Zusatzspannungen $\tau^l_{\mu\nu}(x^l)$ nach der linearen Theorie (7):

$$\tau^l_{\mu\nu} = G\gamma^l_{\mu\nu} = G\left(\frac{\partial v^l_\mu}{\partial x^l_\nu} + \frac{\partial v^l_\nu}{\partial x^l_\mu}\right) \tag{17}$$

und der Übergang $G^l \to G^{l+1}$ durch die Abbildung:

$$x^{l+1} = x^l + v^l(x^l) \tag{18}$$

mit der neuen Spannungsverteilung

$$\sigma^{l+1}_{\mu\nu}(x^{l+1}) = \sigma^l_{\mu\nu}(x^l) + \tau^l_{\mu\nu}(x^l) \tag{19}$$

über G^{l+1} nach (T) und (18). Das Verfahren führt offenbar beim Durchlaufen der Kette $l = 0, 1, \ldots, l - 1$ zum Endzustand $\lambda_n = 1$, wenn erstens die linearen Probleme lösbar und zweitens die Übergänge $Z_l \to Z_{l+1}$ (18) topologisch sind. Zum ersten haben wir außer der starken Elliptizität der LAGRANGEschen Operatoren zu (16) noch zu fordern, daß längs der errechneten Spannungsverteilungen und Gebietsränder keine Regularitätsverluste eintreten.

Nach E. TREFFTZ ist ein Gleichgewichtszustand $v(y)$ dann stabil, wenn für alle zulässigen Verschiebungen $w(y)$ die Arbeit der äußeren Kräfte $A(w)$ kleiner als die verursachte Zunahme ΔU des elastischen Potentials U ist oder stets

$$Q(v; w, w) > 0 \tag{20}$$

nach (8), (11) ausfällt. Existiert mindestens eine „gefährliche Verschiebung" $w(y)$, wofür

$$Q(v; w, w) = 0$$

gilt, ist die Stabilitätsgrenze im Zustand $U(v)$ erreicht. Aus einem bekannten Theorem von HESTENES entnimmt man, vgl. [5], der Gleichgewichtszustand eines elastischen Körpers ist genau dann elliptisch und stabil im Sinne von (20), wenn die zweite Variation in $\overset{\circ}{H}_{1,2}$ positiv definit ist:

$$Q(v; w, w) \geqq c' \|w\|_{1,2}^2 , \qquad c' > 0 . \tag{21}$$

Unter (21) sind bekanntlich die Variationsprobleme (16) eindeutig lösbar. Solange wir uns also längs der Deformationskette $Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_l$ im stabilen elliptischen Bereich des elastischen Systems befinden, bleiben die linearen Probleme (16) sachgemäß. Beim ersten Schritt (14) ist die positive Definität des Integrals der zweiten Variation mit der KORNschen Ungleichung in $\overset{\circ}{H}_{1,2}$ identisch. Es existiert daher im BANACH-Raum C der sechs Spannungskomponenten $\sigma_{\mu\nu}$ ein Bereich E derart, daß hierüber die Form $Q(v; u, u)$ positiv definit ist. E bestimmt dann die stabilen Zustände des Elastikums im Sinne von (20) während der Deformation.

Bei $S^l \in C^{2+\mu}$ und $\sigma^l_{\mu\nu} \in C^{1+\mu} \cap E$ gehören nach bekannten Sätzen die Lösungen $v^l(x^l)$ des Variationsproblems (16) zu $C^{2+\mu}(G^l)$. Es bestehen ferner die fundamentalen Abschätzungen vom SCHAUDERschen Typ [1]:

$$\|v^l(x^l)\|_{2+\mu} \leqq \Delta\lambda L(H_{1+\mu}, c, R_{2+\mu})\,(A + \|v^l\|_{0,2}) , \tag{22}$$
$$\Delta\lambda = \lambda_{l+1} - \lambda_l , \qquad A = \left(\|X\|_\mu + \|\varphi\|_{2+\mu}(S)\right) .$$

Die Konstante L hängt von den $C^{1+\mu}$-Normen $H_{1+\mu}$ der Spannungskomponenten $\sigma^l_{\mu\nu}(x^l)$, von der Elliptizitätskonstanten c und im wesentlichen von den $C^{2+\mu}$-Normen $R_{2+\mu}$ der Randdarstellungen von S^l ab. Wegen (22), (17), (19) folgt aus

$$\sigma^l_{\mu\nu}(x^l) \in C^{1+\mu}(G^l)$$

leicht

$$\sigma^{l+1}_{\mu\nu}(x^{l+1}) \in C^{1+\mu}(G^{l+1}) .$$

Offenbar verbleibt hiernach $v^l(x^l) \in C^{2+\mu}(G^l)$ für $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, wenn der Deformationsweg $Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_n$ im elliptisch stabilen Bereich E verläuft und die Übergänge $G^l + S^l \to G^{l+1} + S^{l+1}$ topologisch erfolgen. Wir gelangen in diesem Fall unter (T) über die n Zwischenschritte Z_i zum Endzustand der vorgeschriebenen Daten. Die so konstruierte Approximation des tatsächlichen Deformationszustands unter den vorgeschriebenen Bedingungen ist um so besser desto hinreichend enger die Zwischenschritte gewählt werden.

Wir wollen im Folgenden die zu fordernde Homöomorphie während der Deformation ins Große von vornherein als erfüllt ansehen, zumal man sie nicht aus der Lösungstheorie von (4), (16) erschließen kann, vgl. zu dieser wichtigen Frage die Bemerkungen von F. JOHN in [6]. Im übrigen läßt sich leicht der für unsere Übergänge wichtige Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz: *Die Verschiebung $x' = x + u(x)$, $x \subset G + S$, $x' \subset G' + S'$ definiert eine Homöomorphie zwischen $G + S$ und $G' + S'$ bei hinreichender Kleinheit der Verschiebungen längs S und Deformationsgrößen über $G + S$, etwa roh abgeschätzt:*

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| < \frac{1}{15} . \tag{23}$$

Bei Konvexität von G genügt die Annahme (23) allein.

Bei eindeutiger Lösbarkeit der Probleme (16), welche in unserem Fall erfüllt ist, kann in (22) $\|v^l\|_{0,2}$ weggelassen werden, nachdem man L durch eine neue Schranke L' ersetzt hat. Im allgemeinen Fall ist eine explizite Berechnung von L' unbekannt. Wir benötigen für unseren Konvergenzbeweis aber eine derartige Abschätzung und machen uns den Umstand zunutze, daß man bei positiv definiten Variationsproblemen vom Typ (16) in der Abkürzung

$$Q(v^l, v^l) - 2\Delta\lambda(X, v^l) \to \text{Min} \tag{24}$$

bei verschwindendem Verschiebungsvektor längs S^l durch Variation mit v^l selbst und Anwendung der Ungleichung von POINCARÉ mit festen Konstanten c_i

$$c_3\|v^l\|_{0,2}^2 \leqq c_3'\|v^l\|_{1,2}^2 \leqq Q(v^l, v^l) \leqq \Delta\lambda\|X\|_{0,2}\,\|v^l\|_{0,2}, \tag{25}$$
$$\|v^l\|_{0,2} \leqq \frac{\Delta\lambda}{c_3}\|X\|_{0,2}$$

erhält.

Bei inhomogenen Randbedingungen

$$v^l(\sigma^l) = \Delta\lambda\varphi^l(\sigma^l) , \qquad \sigma^l \in S^l ,$$

denken wir uns die Funktion $\varphi^l(x) \in C^{2+\mu}(G^l)$ über $G^l + S^l$ vorgeschrieben und die neue Funktion

$$w^l(x^l) = v^l(x^l) - \Delta\lambda\varphi^l(x^l)$$

in (24) substituiert. $w^l(x^l)$ genügt dann dem Variationsproblem

$$Q(w^l, w^l) - 2\Delta\lambda(X, w^l)_0 - 2\Delta\lambda(L_1\varphi^l, w^l)_0 \to \text{Min} ,$$

$$w^l(\sigma^l) = 0 , \qquad \sigma^l \in S^l ,$$

wobei L_1 den LAGRANGEschen Vektordifferentialoperator von (24) bezeichnet. Wir erhalten nach (25):

$$||v^l||_{0,2} \leqq ||w^l||_{0,2} + \Delta\lambda||\varphi^l||_{0,2} \leqq \frac{\Delta\lambda}{c_3} (||X||_{0,2} + ||L_1\varphi^l||_{0,2} + c_3||\varphi^l||_{0,2}) .$$

Setzt man dies unter Beachtung der trivialen Ungleichungen

$$||X||_{0,2} \leqq c_4||X||_\mu , \qquad ||L_1\varphi^l||_{0,2} \leqq c_5||\varphi^l||_{2+\mu}$$

in die Hauptungleichung (22) ein, so folgt

$$||v^l||_{2+\mu} \leqq \Delta\lambda L^*(H_{1+\mu}, c, R_{2+\mu}) \big(||X||_\mu (G^l) + ||\varphi^l||_{2+\mu}(G^l)\big) ; \tag{26}$$

c_5 hängt offensichtlich von den C^1-Normen der Spannungskomponenten ab, und daher die Schranke L^* wie L von denselben in der Klammer ausgeführten Konstanten.

In (26) tritt rechts die $C^{2+\mu}$-Norm von φ^l über G^l auf statt über S^l. Dies ist für den folgenden Konvergenzbeweis von Bedeutung. Bei der Formulierung unseres Anfangswertproblems wollen wir den die Randverschiebung definierenden Vektor $\varphi(x) \in C^{2+\mu}(G)$ über $G + S$ vorschreiben und während der Übergänge $G^l \to G^{l+1}$, $l = 0, 1, \ldots, (n-1)$, durch die Transformation (18) von G^l auf G^{l+1} verpflanzen:

$$\varphi(x) = \varphi^1(x^1) = \cdots = \varphi^l(x^l) .$$

Offenbar kann man die Norm $||\varphi^l||_{2+\mu}(G^l)$ durch die Norm $||\varphi||_{2+\mu}(G)$ und die $C^{2+\mu}$-Normschranken der Abbildung $G^l \to G$, d. h. der Inversion von (27) abschätzen. Zu letzterem genügt es, eine vorgegebene untere Schranke der Funktionaldeterminante von (27) nicht zu unterschreiten und ebenso eine vorgegebene $C^{2+\mu}$-Normschranke von (27) nicht zu überschreiten.

Als wesentlichstes Ergebnis dieser Arbeit werde jetzt die Konvergenz des vorgeschlagenen diskreten Verfahrens im BANACH-Raum $C^{2+\mu}(G)$ für $\varepsilon \to 0$ bewiesen. Wir gelangen so zu einer strengen Beschreibung der endlichen Deformationen eines elastischen Körpers im Gültigkeitsbereich der TREFFTZschen Annahme, wonach in jedem Zwischenzustand Z_l über G^l die zweite Variation des elastischen Potentials durch das quadratische Funktional (16) beschrieben wird.

Für den Übergang $G + S \to G^l + S^l$ in der zusammengefaßten Darstellung

$$x_k^l = f_k^l(x) \tag{27}$$

erhält man aus (18) die Rekursion

$$x_k^l = f_k^l(x) = f_k^{l+1}(x) + v_k^{l-1}\big(f_k^{l-1}(x)\big) . \tag{28}$$

Wir machen jetzt die Voraussetzungen (V):

$$\sigma_{\mu\nu}^i \in E_1 \subset E , \tag{a}$$

$$||\sigma_{\mu\nu}^i||_{1+\mu} < \hat{H}_{1+\mu} , \tag{b}$$

$$||f_k^i(x)||_{2+\mu} (G) < F , \tag{c}$$

$$\left\| \frac{\partial f_k^i(x)}{\partial x_j} \right\| > \delta > 0 , \tag{d}$$

mit genügend großen, den Bereich der Anfangsbedingungen umfassenden Konstanten F und $\hat{H}_{1+\mu}$. Solange (V) zutrifft, liegen offenbar die $C^{2+\mu}$-Normen der Randdarstellungen von S^r unter einer festen Zahl $\hat{R}_{2+\mu}$ und die Elliptizitätskonstanten der LAGRANGEschen Systeme von (16) oberhalb einer positiven Zahl c. Hierdurch legen wir die Schranke $L^*(\hat{H}_{1+\mu}, c, \hat{R}_{2+\mu})$ in (26) fest.

Unter Berücksichtigung von (V) (c), (d) gewinnen wir nach den vorigen Bemerkungen die Abschätzung

$$||\varphi^l||_{2+\mu} (G^l) \leqq c_6(F, \delta) \, ||\varphi||_{2+\mu} (G) \tag{29}$$

mit einer festen Schrankenfunktion c_6. Wir setzen $A = \big(||X||_\mu + ||\varphi||_{2+\mu}(G)\big)$. Setzt man (29) in (26) ein, so folgt für die Lösungen $v^l(x^l)$ von (16), solange sämtliche Voraussetzungen (V) erfüllt bleiben, die Abschätzung

$$||v^l||_{2+\mu} (G^l) \leqq \Delta\lambda \, L'A , \qquad \text{mit} \quad L' = \max(c_6, 1) \, L^* . \tag{30}$$

Unter Benützung dieser Ungleichung ermitteln wir eine positive Zahl s, so daß über I_s: $0 \leqq \lambda \leqq s \leqq 1$ unabhängig von der Zerlegung die nach unserem Verfahren berechneten Verschiebungen und Spannungen die sämtlichen Voraussetzungen (V) erfüllen.

Nach Addition von (28) über l folgt aus (30):

$$|f_k^r(x)| \leqq x_k + r\,\Delta\lambda\, L'A\,, \qquad 0 \leqq r\,\Delta\lambda \leqq s\,. \tag{31}$$

Zur Abschätzung von $f_k^r(x)$ in $C^{2+\mu}(G)$ unter (V) über I_s differenzieren wir (28) zunächst einmal nach der Veränderlichen x_i,

$$\mathrm{D}^1 x_k^l - \mathrm{D}^1 x_k^{l-1} = \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1})\, \mathrm{D}^1 x_j^{l-1}\,, \tag{32}$$

und nach (30) weiter

$$\left|\frac{|\mathrm{D}^1 x_k^l| - |\mathrm{D}^1 x_k^{l-1}|}{\Delta\lambda}\right| \leqq \left|\frac{\mathrm{D}^1 x_k^l - \mathrm{D}^1 x_k^{l-1}}{\Delta\lambda}\right| \leqq A L' \sum_{j=1}^{3} \mathrm{D}^1 x_j^{l-1}\,.$$

Die Lösungen dieser Differenzenungleichung werden offenbar durch die Lösung

$$z(t) = \exp 3L'At$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = 3L'Az \tag{33}$$

unter den gleichen Anfangsbedingungen $z(0) = 1$ majorisiert unabhängig von der Zerlegung von I_s unter (V):

$$\sum_{k=1}^{3} |\mathrm{D}^1 f_k^r(x)| \leqq z(t)\,, \qquad 0 \leqq r\,\Delta\lambda \leqq t \leqq s\,. \tag{34}$$

Zur analogen Abschätzung der zweiten Ableitungen $\mathrm{D}^2 x_k^l$ differenzieren wir (32) und erhalten mit der Abkürzung $\mathrm{D}^1\mathrm{D}^1 = \mathrm{D}^2$

$$\mathrm{D}^2 x_k^l - \mathrm{D}^2 x_k^{l-1} = \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1})\, \mathrm{D}^2 x_j^{l-1} + \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1})\, \mathrm{D}^1 x_j^{l-1} \mathrm{D}^1 x_i^{l-1} \tag{35}$$

und weiter unter Beachtung der bereits gewonnenen Abschätzungen (34) sowie (30) die Differenzenungleichungen

$$\left|\frac{|\mathrm{D}^2 x_k^l| - |\mathrm{D}^2 x_k^{l-1}|}{\Delta\lambda}\right| \leqq AL' \left\{\sum_{j=1}^{3} |\mathrm{D}^2 x_j^{l-1}| + 9 \exp 6AL't\right\} \tag{36}$$

bei $\Delta\lambda(l-1) \leqq t \leqq s$.

Die Lösung $z_1(t)$ des Anfangswertproblems der Majorantendifferentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = 3AL'\,(z + 9 \exp 6AL's)\,, \qquad z(0) = 0 \tag{37}$$

majorisiert über I_s unter (V) und (34) die zweiten Ableitungen unabhängig von der gewählten Zerlegung:

$$\sum_{k=1}^{3} |\mathrm{D}^2 f_k^r(x)| \leqq z_1(t)\,, \qquad 0 < r\,\Delta\lambda \leqq t \leqq s\,. \tag{38}$$

In ähnlicher Weise kann man auch noch die μ-H-Konstanten der zweiten Ableitungen $\mathrm{D}^2 f_k^r(x)$ abschätzen. Zu diesem Zweck subtrahieren wir die entsprechenden in zwei verschiedenen Punkten $x_k = a_k$ und $x_k = b_k$ gebildeten Gleichungen (35) voneinander und erhalten für die Differenzen

$$\Delta x_k^l = \mathrm{D}^2 x_k^l(b) - \mathrm{D}^2 x_k^l(a)$$

nach geeigneter Umformung das System

$$\begin{aligned}
&\Delta x_k^l - \Delta x_k^{l-1} \\
&= \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1}(a))\,\big(\mathrm{D}^2 x_k^{l-1}(b) - \mathrm{D}^2 x_j^{l-1}(a)\big) + \mathrm{D}^2 x_j^{l-1}(b)\,\big(\mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1}(b)) - \\
&- \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1}(a))\big) + \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1}(a))\,\big(\mathrm{D}^1 x_i^{l-1}(b)\, \mathrm{D}^1 x_j^{l-1}(b) - \mathrm{D}^1 x_i^{l-1}(a)\, \mathrm{D}^1 x_j^{l-1}(a)\big) + \\
&+ \mathrm{D}^1 x_i^{l-1}(b)\, \mathrm{D}^1 x_j^{l-1}(b)\,\big(\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1}(b)) - \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j v_k^{l-1}(x^{l-1}(a))\big)\,.
\end{aligned} \tag{39}$$

Eine analoge Abschätzung auf Grund von (30), (34), (38) führt hiernach auf die Differenzenungleichung

$$\left|\frac{|\Delta x_k^l| - |\Delta x_k^{l-1}|}{\Delta\lambda}\right| \leqq L'A \sum_{i=1}^{3} |\Delta x_i^{l-1}| + B|b-a|^{\mu}\,. \tag{40}$$

Hierbei bezeichnet B eine genügend große Schranke, in die L', A und die soeben gefundenen Schranken für (34), (38) über I_s eingehen.

Aus (40) entnehmen wir wie früher, daß die Größen

$$\Delta z_k^l = \frac{\Delta x_k^l}{|b-a|^{\mu}}$$

durch die Lösung $z_2(t)$ des Anfangswertproblems der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = 3(L'Az + B)\,, \qquad z(0) = 0\,, \tag{41}$$

majorisiert werden:

$$|\Delta z_k^r| \leqq z_2(t): \quad 0 \leqq r\,\Delta\lambda \leqq t \leqq s\,, \tag{42}$$

solange (V) zutrifft.

Faßt man die Abschätzungen (31), (34), (38), (42) zusammen, so sieht man sofort, daß bei hinreichend kleiner Wahl von s die schrittweise berechneten Deformationsgrößen entlang des Intervalls I_s unabhängig von dessen Zerlegung stets (V) (c), (d) erfüllen. Desweiteren bleiben die Spannungen

$$\sigma_{\mu\nu}^r(x^r)$$

über I_s stets unter der geforderten Normschranke $\hat{H}_{1+\mu}$ und liegen in E_1, (V) (a), (b). Der Bereich für L^* wird nicht verlassen. Aus den Anfangsbedingungen $f_k^0(x) = x_k$ und den Majorantendifferentialgleichungen (34), (38) folgt nämlich sofort eine rohe Abschätzung der Gestalt

$$||\mathrm{D}^1 f_k^r(x)||_\mu \leqq 1 + L''s\,, \qquad 0 \leqq r\,\Delta\lambda \leqq s\,, \tag{43}$$

mit einer geeigneten von L' und A abhängigen Konstanten L'' und weiter auf (19) und (43) auf G bezogen

$$||\sigma_{\mu\nu}^r(f_k^r(\cdot)) - \sigma_{\mu\nu}^{r-1}(f_k^{r-1}(x)))||_{1+\mu} \leqq L'AN\,(1 + L''s)\,\Delta\lambda \tag{44}$$

mit einer festen Konstanten N. Nach Addition über r von 1 bis l folgt

$$||\sigma_{\mu\nu}^l(f^l(x)) - \sigma_{\mu\nu}^0(x)||_{1+\mu} \leqq sL'AN\,(1 + L''s)\,, \qquad l\,\Delta\lambda \leqq s\,. \tag{45}$$

Unsere Behauptung ergibt sich hieraus durch Rücktransformation von $\sigma_{\mu\nu}^l(f^l(x))$ auf G^l.

Nach Sicherung unserer Voraussetzungen (V) interpolieren wir

$$f_k^r(x), \quad \mathrm{D}^1 f_k^r(x), \quad \mathrm{D}^2 f_k^r(x)$$

zwischen $\lambda_r \leqq \lambda \leqq \lambda_{r+1}$, $0 \leqq r\,\Delta\lambda \leqq s$ linear und erhalten die bezüglich λ über I_s stetige Funktionenschar

$$f_{n,k}(x)\,, \quad \mathrm{D}^1 f_{n,k}(x)\,, \quad \mathrm{D}^2 f_{n,k}(x)\,. \tag{46}$$

Der Index n charakterisiert die gewählte Zerlegung von I_s.

Jede der Funktionen (46) ist auf Grund unserer Abschätzungen bezüglich der Variablen x, λ über $I_s \times G$ beschränkt und gleichgradig stetig. Nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge $\varepsilon_n' \to 0$ konvergieren sie gleichmäßig über $I_s \times G$:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} f_{n,k}(x) \Rightarrow f_k(\lambda, x) \in C^{2+\mu}(G) \times C_0(I_s)\,, \\ &\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^1 f_{n,k}(x) \Rightarrow \mathrm{D}^1 f_k(\lambda, x)\,, \\ &\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^2 f_{n,k}(x) \Rightarrow \mathrm{D}^2 f_k(\lambda, x)\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Satz I: *Die über das diskretisierte Verfahren* (18) *konstruierte Deformationsschar* $x_k^\lambda(x) = f_k(\lambda, x)$ *beschreibt den stetigen Verformungsprozeß des elastischen Körpers G in Abhängigkeit der linear anwachsenden Volumenkräfte* λX *und Randverschiebungen* $\lambda\varphi$ *unter der Annahme, daß in jedem Zwischenzustand der Deformation die zweite Variation des elastischen Potentials durch den Ausdruck* (10) *darstellbar ist.*

Beweis: Die Quotienten $\frac{1}{\Delta\lambda} v_k^l(x^l) = w_k^l(x^l)$ genügen in jedem Zwischenschritt Z_l dem Variationsproblem

$$\frac{1}{2}\int\limits_{G^l} \sigma_{\mu\nu}^l(x^l)\,\frac{\partial w_k^l}{\partial x_\mu^l}\,\frac{\partial w_k^l}{\partial x_\nu^l} + 2a\,\mathrm{d}x^l - (X, w^l)_0 \to \mathrm{Min}\,, \tag{48}$$

$$w_k^l(\sigma^l) = \varphi_k^l(\sigma^l)\,, \qquad \sigma^l \in S^l\,,$$

und wegen $w^l(x^l) \in C^{2+\mu}(G^l)$, $\sigma_{\mu\nu}^l \in C^{1+\mu}(G^l)$ dem zugehörigen LAGRANGEschen System

$$L_l(w^l) = X(x^l) \tag{49}$$

über G^l. Wir betrachten für dieselbe Zerlegung von I_s in zwei Teilpunkten λ_i, λ_j, $\Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_i$ die Variationsprobleme (48) und beziehen sie durch die Transformationen

$$x_k^i = f_k^i(x)\,, \qquad x_k^j = f_k^j(x)$$

auf G. Auf Grund der Majorantendifferentialgleichungen (33), (37), (41) erhält man sofort mit einer von der Zerlegung von I_s unabhängigen Konstanten M

$$||f_k^i(x) - f_k^j(x)||_{2+\mu} \leqq M\,\Delta\lambda\,. \tag{50}$$

Daher unterscheiden sich die $C^{1+\mu}$ Normen entsprechender Koeffizienten der umgerechneten Variationsprobleme um Terme der Größenordnung $O(\Delta\lambda)$. Durch Differenzenbildung der entsprechenden LAGRANGEschen Systemgleichungen und naheliegende Umformung schließt man über die Hauptungleichung (30) hieraus leicht auf

$$||w^j(x) - w^i(x)||_{2+\mu} = O(\Delta\lambda)\,. \tag{51}$$

(51) hängt nicht von der gewählten Zerlegung der λ-Achse ab, daher ist längs der Folge:

$$\frac{1}{\Delta\lambda}\, v_k^l(f_{k'}^l(x)) = \frac{x_k^l - x_k^{l-1}}{\Delta\lambda} \tag{52}$$

einschließlich der ersten und zweiten Ableitungen nach x über $G \times I_s$ gleichgradig stetig. Längs einer geeigneten Teilfolge konvergieren daher die Differenzenquotienten (52) gleichmäßig gegen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial\lambda}(\lambda, x) \in C^{2+\mu}(G) \times C^0(I)$ einschließlich ihrer ersten und zweiten Ableitungen über G.

Aus (48) folgt leicht, daß die Ableitungen

$$\frac{\partial f_k}{\partial\lambda}(\lambda, x)_{x=h(\lambda,x^\lambda)} = \overline{w}_k(\lambda, x^\lambda),$$

$x = h(\lambda, x^\lambda)$ bezeichnet die Auflösung von $x^\lambda = f(\lambda, x^\lambda)$,
über G^λ und I_s: $0 \leqq \lambda \leqq s$ dem Variationsproblem

$$\frac{1}{2}\int_{G\lambda} \sigma_{\mu\nu}^\lambda(x^\lambda)\, \frac{\partial\overline{w}_k}{\partial x_\mu^\lambda}\frac{\partial\overline{w}_k}{\partial x_\nu^\lambda} + 2a\, dx^\lambda - (X, \overline{w})_0 \to \text{Min}\,, \tag{53}$$

$$\overline{w}_k(\sigma^\lambda) = \varphi^\lambda(\sigma^\lambda)\,, \qquad \sigma^\lambda \in S^\lambda\,,$$

genügen, q.e.d..

Man beweist leicht, daß entlang unserer Deformation die Spannungen $\sigma_{\mu\nu}^\lambda(x^\lambda) = \sigma_{\mu\nu}^\lambda(f(\lambda, x))$ in $C^{1+\mu}$ stetig von λ abhängen.

Offenbar können wir die Deformation unseres elastischen Körpers in Abhängigkeit weiter über sX bzw. $s\varphi$ hinaus anwachsender Volumenkräfte bzw. Randverschiebungen solange nach unserer Methode beschreiben, bis für $\lambda \to s_e$ mindestens einer der Fälle eintritt:

a) Der Deformationszustand nähert sich für $\lambda \to s_e$ der Stabilitätsgrenze oder die Elliptizitätskonstante des LAGRANGEschen Systems konvergiert gegen Null.
b) Mindestens eine der Spannungskomponenten $\sigma_{\mu\nu}^\lambda$ strebt für $\lambda \to s_e$ in der $C^{1+\mu}$-Norm gegen Unendlich.
c) Die Oberfläche des elastischen Körpers strebt gegen eine Fläche mit mehrfachen Punkten. (m.a.W.: die Homöomorphiebedingung läßt sich nicht aufrechterhalten).

Geht man unseren Konvergenzbeweis durch, so sieht man sofort, daß der Gültigkeitsbereich des Satzes I wesentlich erweitert werden kann. Wir dürfen nämlich erstens als zweite Variation für das elastische Potential statt des TREFFTZschen Ausdrucks (10) ein allgemeines quadratisches Funktional (54) mit beliebig von den Spannungen abhängigen Koeffizienten zugrundelegen:

$$Q(\nabla, u, u) = \frac{1}{2}\int A_{i,j,k,l}(\sigma_{\mu\nu}(y), y)\, \frac{\partial u_i}{\partial y_k}\frac{\partial u_j}{\partial y_l}\, dy\,, \qquad A_{i,j,k,l} \in C^{1+\mu}\,. \tag{54}$$

Hierbei ist natürlich die positive Definitität in $\overset{0}{H}_{1,2}$ von (54) für die stabilen Deformationszustände zu sichern.

Zweitens dürfen wir die lineare Annahme (T) von TREFFTZ (6) fallenlassen und die Zusatzspannungen bei den Übergängen von G^l zu G^{l+1} in (19) durch allgemeine nichtlineare Funktionen $\varphi_{\mu\nu}\left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \sigma_{\mu\nu}^l, x^l\right)$ der Deformationsgrößen $\frac{\partial v_i^l}{\partial x_k^l}$ Spannungen $\sigma_{\mu\nu}^l$ und Variablen x^l für $G^l \to G^{l+1}$ beschreiben:

$$\sigma_{\mu\nu}^{l+1}(x^{l+1}) = \sigma_{\mu\nu}^l(x^l) + \varphi_{\mu\nu}\left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \sigma'_{\mu\nu}\, x^l), x^l\right). \tag{55}$$

Dabei seien die Funktionen $\varphi_{\mu\nu}$ bzgl. ihrer Veränderlichen zweimal μ-H-stetig differenzierbar und mögen in Hinblick auf (55)

$$\varphi_{\mu\nu}(0, \sigma_{\mu\nu}^l, x^l) = 0 \tag{56}$$

erfüllen. Offenbar umfaßt dieses verallgemeinerte Modell (54), (55), (56) mit den Fall, in dem man jeweils bei den Übergängen $Z_i \to Z_{i+1}$ in (19) die Umtransformation der Spannungskomponenten auf die neuen Veränderlichen x^{l+1} auf Grund von (18) mit berücksichtigt. Wir erhalten schließlich den allgemeinen

Satz II: *Legt man für das Berechnungsschema* (16), (18), (19) *der Deformationsschritte* $G^l \to G^{l+1}$, $1 = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ *statt* (16) *jeweils das quadratische Funktional* (54) *über* G^l *zugrunde und berechnet die Spannungen für die Übergänge nach* (55), (56), *dann konvergieren die Funktionen* (47) *wie früher, und es treffen die analogen Aussagen des Satzes I zu.*

Zum Beweis verwenden wir in den Abschätzungen (44), (45) die aus (56) folgende Mittelwertformel

$$\varphi_{\mu\nu}(\xi_{i,j}^l, \sigma_{\mu\nu}^l(x^l), x^l) = \int_0^1 D_{\xi_{i,j}^l}\varphi_{\mu\nu}(t\,\xi_{i,j}^l, \sigma_{\mu\nu}^l, x^l)\, \xi_{i,j}^l\, dt\,. \tag{57}$$

Bei der Abschätzung von (57) und deren Ableitungen nebst μ-H-Konstanten im Verlauf der Schlüsse zu (44), (45) benützen wir jeweils globale Schranken für die Ableitungen unter dem Integralzeichen von (57) auf Grund der Majoranten in (V) b. Nunmehr ergeben sich die Aussagen des Satzes II für ein hinreichend kleines Fortsetzungsintervall leicht nach der Schlußweise zu Satz I. Aus Gründen der Einfachheit wurde angenommen, daß sich die Kräfte während der Deformation nicht ändern. Offenbar kann man sich leicht von dieser *Einschränkung* befreien.

Satz II läßt sich weiter auf nichtlineare Modelle der „fading memory theory" im Sinne von B. Colemann und W. Noll ausdehnen, indem wir die Koeffizienten $A_{i,j,k,l}$ der zweiten Variation (54) über G^λ und die Zusatzspannungen $\varphi_{\mu\nu}$ in (55) bei Gültigkeit von (56) in gewisser Weise noch von den Spannungsverteilungen $\sigma^\lambda_{\mu\nu}$ der bereits durchlaufenen Zustände $Z_{\lambda'}[\lambda' X, \lambda'\varphi]$ $0 < \lambda' < \lambda$ abhängen lassen:

$$A_{i,j,k,l} = A_{i,j,k,l}(\sigma^\lambda_{\mu\nu}, \sigma^{\lambda'}_{\mu\nu}, \ldots),$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}\left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \sigma^l_{\mu\nu}, \sigma^j_{\mu\nu}, \ldots\right), \qquad j \leqq l .$$

Zum Beweis von Satz II insbesondere zu (51) fordern wir dabei außer der Gültigkeit von (56) noch eine Abschätzung des Typs

$$\|A_{i,j,k,l}(\sigma^\lambda_{\mu\nu}, \sigma^{\lambda'}_{\mu\nu}, \ldots) - A_{i,j,k,l}(\sigma^\eta_{\mu\nu}, \sigma^{\eta'}_{\mu\nu}, \ldots)\|_{1+\mu} \leqq M\{\|\sigma^\lambda_{\mu\nu} - \sigma^\eta_{\mu\nu}\|_{1+\mu} + \|\sigma^{\lambda'}_{\mu\nu} - \sigma^{\eta'}_{\mu\nu}\|_{1+\mu}\},$$

$$\lambda - \eta \geqq \alpha(\lambda' - \eta') > 0, \qquad \alpha \text{ fest},$$

wobei M von den Schranken in V abhängt, solange längs unserer Berechnungskette V (a), (b), (c), (d) erfüllt bleiben. Man erkennt leicht, daß hierunter genügend allgemeine Systeme fallen.

Nach Konstruktion der Deformationsschar

$$x^\lambda = f(\lambda, x), \qquad G \to G^\lambda, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq s \tag{58}$$

unter (6), (10) bzw. (54), (55) entsteht die Frage, ob die bisherige Deutung der Funktionale (10) bzw. (54) als zweite Variation des elastischen Potentials im jeweiligen Deformationszustand $Z(y)$ nach dem Konvergenzbeweis aufrechterhalten werden kann. Unsere Methode folgte aus (12). Dabei bezogen wir der Einfachheit halber zunächst beide Nachbarzustände auf G^*. Wir müssen uns jetzt noch vergewissern, daß trotz dieser Vereinfachung entlang der Deformation (58) die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt bleiben, oder was dasselbe ist, daß jeweils die erste Variation (59) des auf G^λ transformierten Variationsproblems (4) verschwindet, wenn wir die Funktionale (10) bzw. (54) als zweite Variation des elastischen Potentials in $Z(y)$ deuten:

$$W(\lambda) = V_\lambda(v = 0, \xi) - \lambda(X, \xi)_0 = 0 \qquad \text{für alle } \xi \in H^0_{1,2}(G^\lambda). \tag{59}$$

Zum Beweis subtrahieren wir die Gleichungen (59) in zwei Nachbarzuständen Z_λ, $Z_{\lambda'}$, $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$

$$G^\lambda \to G^{\lambda'}: \quad y + u(y) = z \subset G^{\lambda'}, \qquad y \subset G_k \tag{60}$$

voneinander und transformieren zu diesem Zweck das elastische Potential

$$U(v) = \int\limits_{G^\lambda} F^\lambda\left(y, \frac{\partial v}{\partial y_\mu}\right) dy \tag{61}$$

über G^λ nach (60) auf $G^{\lambda'}$:

$$U'(w) = \int\limits_{G^\lambda} F^{\lambda'}\left(z, \frac{\partial w}{\partial z_\mu}\right) dz, \tag{62}$$

$$v_i(y) = u_i(y) + w_i(z) = u_i(y) + w_i(y + u(y)).$$

Hieraus folgt

$$F^{\lambda'}\left(z, \frac{\partial w_i}{\partial z_\mu}\right) = F^\lambda\left(y(z), \frac{\partial u_i}{\partial y_\mu} + \frac{\partial w_i}{\partial z_l}\left(\delta_{l\mu} + \frac{\partial u_l}{\partial y_\mu}\right)\right)\left\|\frac{\partial y}{\partial z}\right\|. \tag{63}$$

Wir transformieren hiernach die erste Variation von (62)

$$V_{\lambda'}(w, \eta) = \int\limits_{G^\lambda} F^{\lambda'}_{p'_{i,k}}\left(z, \frac{\partial w_i}{\partial z_\nu}\right) \frac{\partial \eta_i}{\partial z_k} dz$$

über $G^{\lambda'}$ mit

$$\eta(z) = \eta(y + u(y)) = \xi(y) \in H^0_{1,2}, \qquad p'_{i,k} = \frac{\partial w_i}{\partial z_k}, \tag{64}$$

auf G^λ zurück und erhalten nach (63) (64)

$$V_{\lambda'} = \int\limits_{G^\lambda} F^\lambda_{p_{i,k}}\left(y, \frac{\partial u_i}{\partial y_\nu} + \frac{\partial w_i}{\partial z_l}\left(\delta_{l\nu} + \frac{\partial u_l}{\partial y_\nu}\right)\right) \frac{\partial \xi_i}{\partial y_k} dy, \quad p_{i,k} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k}. \tag{65}$$

Es ergibt sich daher für $v = 0$, bzw. $w = 0$ entsprechend (8), (12):

$$W(\lambda') - W(\lambda) = \int_0^1 \int_{G\lambda} F^\lambda_{p_{i,k} p_{j,s}}\left(y, t\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial u_j}{\partial y_s} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_k} \, dt \, dy - (\lambda' - \lambda)(X, \xi)_0 = 0 . \tag{66}$$

Bedenken wir, daß nach (52)

$$\frac{u_j(y)}{\Delta\lambda} \to \overline{w}_j(y) \quad \text{für } \Delta\lambda \to 0 \text{ in } C^2 ,$$

so folgt aus (63):

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{W(\lambda') - W(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{dW}{\partial\lambda} = Q(\overline{w}, \xi) - (X, \xi)_0 = 0 . \tag{67}$$

Hierbei bezeichne $Q(\overline{w}, \xi)$ die erste Variation des TREFFTZschen Ausdrucks (53) bzw. (54). Nach (53) verschwindet (67) längs der Deformationsschar (58). Wir erschließen hieraus leicht, daß in der Tat (58) die gesuchte Deformation unseres elastischen Körpers entlang des Datenweges $\lambda X \times \lambda\varphi$, $0 \leqq \lambda \leqq s$, über Gleichgewichtszustände streng beschreibt, wenn (10) bzw. (54) jeweils die zweite Variation des elastischen Potentials im jeweiligen Deformationszustand $Z(y)$ bedeutet.

Literatur

1 AGMON, S., DOUGLIS, A., NIRENBERG, L., Estimate near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II. Commun. pure appl. Math. **12** (1959), 623–727; **17** (1964), 35–92.
2 FLÜGGE, S., Elastizität und Plastizität, Handbuch d. Physik Bd. 6 (Springer) 1958.
3 GREEN, A. E., RIVLIN, S., Multipolar continuum mechanics, Arch. Rat. Mech. Analysis **17** (1964), 113–147.
4 GREEN, A. E., ZERNA, W., Theoretical Elasticity, Oxford 1954.
5 HESTENES M. R., Applications of the theory of quadratic forms in HILBERT space to the calculus of variations, Pacific J. Math. **1** (1951), 524–581.
6 JOHN, F., Remarks on the non-linear theory of elasticity, Semin. Ist. Naz. Alta. Math. (1962), 474–482.
9 JOHN, F., Rotations and strain, Commun. pure appl. Math. **14** (1961), 391–413.
10 JOHN, F., Uniquenes of non linear elastic equilibrium for prescribed boundary displacements and sufficiently small strains. Commun. pure appl. Math. **25** (1972), 617–634.
11 KATSCHANOW, L. M., Die Mechanik der plastischen Medien, GITTL, M–L (1948) (russisch).
12 MORREY, C. B., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Grundl. d. Math. Wiss. (Springer), Bd. 130 (1966).
13 RIVLIN, R. S., The formulation of the theories in generalized continuum mechanics and their physical significance, Simp. Mat. I (1968–69), 357–373.
14 TREFFTZ, E., Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts, ZAMM **13** (1933), 160–165.
15 TREFFTZ, E., Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts, Verhandl. III. Intern. Kongr. für Techn. Mechanik, Stockholm 1930, **3**, 44–48.
16 TEODORESCU, P. P., SOOS, E., Discrete quasi-continuum and continuous models of elastic solids, ZAMM **53** (1973), 33–43.
17 TRUESDELL, C., NOLL, W., The Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handb. d. Physik Bd. III/3 (Springer) 1965.
18 BECKERT, H., Einige Bemerkungen zur lokalen Existenztheorie in der mehrdimensionalen Variationsrechnung, Beiträge zur Analysis 1973 (im Druck).
19 BECKERT, H., Über eine neue Existenztheorie in der nichtlinearen Elastizitätstheorie, Beiträge zur Analysis Tagungsband Kühlungsborn 1973 (im Druck).

Eingereicht am 2. 5. 1974

Anschrift: Prof. Dr. HERBERT BECKERT, Leipzig, Karl-Marx-Universität Leipzig, Sektion Mathematik, DDR