HOOFDSTUK II

ALGEMENE BEGINSELEN

1. GROOTHEDEN [1]

Wij denken ons een verzameling of „systeem" van bepaalde objecten $A, B, \ldots, N$. Wij achten deze objecten *vergelijkbaar*, wanneer van telkens twee dezer objecten op zinvolle wijze kan worden uitgemaakt, of ze „gelijk" dan wel „niet gelijk" zijn.

Hierbij moet men bedenken, dat „gelijkheid" niet hetzelfde is als logische identiteit. Twee objecten zijn nl. gelijk, indien zij met elkander overeenstemmen *ten aanzien van relevante eigenschappen*. Indien men twee hopen aardappelen met elkaar vergelijkt, bv. 20 kg „rode ster" en 20 kg „eigenheimers", dan zijn deze twee objecten niet identiek; doch in die gevallen, waarin slechts de gewichtshoeveelheid en niet de hoedanigheid van de aardappelen ter zake doet, zal men wèl zeggen, dat zij „gelijk" zijn.

De objecten $A, B, \ldots, N$ zijn *additief*, indien het zin heeft bij telkens twee objecten A en B een som C van deze deelverzameling aan te wijzen. We schrijven dan: $C = A + B$. Om additief te kunnen zijn moeten de objecten vergelijkbaar zijn. Additieve verzamelingen zijn bv. de verzameling van alle lijnsegmenten en de verzameling van alle tijdsduren of tijdvakken.

Wij noemen de objecten *grootheden*, indien bij twee willekeurige objecten A en B gehele getallen m en n zijn te vinden [2], zodat de volgende betrekking geldt:

$$mA = nB \tag{II.1.1}$$

[1] Bij het schrijven van de eerste negen secties van dit hoofdstuk hebben wij veel hulp ontvangen van Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, hoogleraar in de hogere meetkunde, de theorie der algebraïsche structuren en de topologie aan de Rijksuniversiteit te Groningen.

[2] Wij zien af van irrationele getallen, die in de praktijk toch niet relevant zijn.

Daarbij wordt met mA bedoeld: de som van m aan A gelijke objecten. We kunnen dan ook schrijven:

$$A = \frac{n}{m} B \tag{II.1.2}$$

2. Maatgetallen

A zij een willekeurig object uit een verzameling grootheden, die wij S noemen (het „systeem"). Voor ieder ander object K, dat tot de verzameling S behoort, kan men gehele getallen p en q vinden, zodat geldt:

$$qK = pA \tag{II.2.1}$$

dus:

$$K = \frac{p}{q} A = kA \tag{II.2.2}$$

Het getal $k = \frac{p}{q}$ heet de *grootte* van het object K ten opzichte van het object A. Het bepalen van het getal k noemt men *meten* [1]. Aangezien geldt:

$$A = 1A$$

is de grootte van A dus 1. Daarom wordt A de *eenheid* genoemd ten opzichte van A. Het object A definieert dus een *maatsysteem*. Het getal k is een *maatgetal* van dit maatsysteem.

Indien men een ander maatstelsel met eenheid A' kiest, waarbij geldt:

$$A = \lambda A'$$

$\left(\text{hierin is } \lambda = \frac{r}{s} \text{ en zijn } r \text{ en } s \text{ gehele getallen}\right)$, dus:

$$sA = rA' \tag{II.2.3}$$

dan volgt uit (II.2.1) en (II.2.3):

$$qsK = psA = prA'$$

dus:

$$K = \frac{pr}{qs} A' = k\lambda A' \tag{II.2.4}$$

zodat K de grootte $k\lambda$ heeft ten opzichte van A'.

[1] Wordt A niet gedacht als een willekeurig te kiezen eenheid, maar als een door de aard van de verzameling factisch noodzakelijk vaststaande eenheid, dan spreekt men niet van meten, maar van *tellen*. In dit geval is q steeds als 1 voorgeschreven.

3. Eerste benadering van het begrip dimensie

Van onderling vergelijkbare grootheden zeggen wij nu, dat zij dezelfde *dimensie* bezitten. Dit betekent, dat alle objecten van een verzameling S, welke aan de in II.1 gestelde eisen voldoen, dezelfde dimensie hebben. Men kan het ook aldus formuleren, dat ieder object van de verzameling S de dimensie van een willekeurig object A uit de verzameling heeft. In stede van het symbool S kan men dan ook het symbool $[A]$ gebruiken; $[A]$ stelt dan de verzameling van alle met A vergelijkbare grootheden voor. Zoals met zovele definities het geval is, is ook deze definitie van „dimensie" door abstractie verkregen; men spreekt dan van een indirecte definitie.

Het bovenstaande kan met enkele voorbeelden worden toegelicht. Als eerste kiezen wij de verzameling van alle lijnsegmenten; deze heeft de dimensie lengte, waarbij „lengte" is bedoeld als naam voor lijnsegment. Voor het aanduiden van deze verzameling gebruiken de natuurkundigen een afzonderlijk symbool, nl. $[L]$. Dit is dus het symbool voor de dimensie lengte. Om de getalwaarde van de lengte van een weg aan te geven, moet men eerst een maatsysteem definiëren. Als lengte-eenheid kan men naar keuze nemen: de centimeter, de meter, de kilometer, de mijl, enz. Men kan dan zeggen, dat de weg de lengte a heeft t.o.v. de gekozen lengte-eenheid. Kiest men vervolgens een andere lengte-eenheid, die b maal zo groot is als de vorige, dan wordt de lengte van de weg $\frac{a}{b}$.

Aan dit voorbeeld kan een opmerking over de notatie worden vastgeknoopt. Men kan schrijven

$$[a] = [L] \text{ of } a \in [L] \tag{II.3.1}$$

waarin $\in$, welk teken een ronde hoofdletter E is, betekent: „wordt gesubsumeerd onder" of „is een element van de verzameling...".

De formules (II.3.1) drukken uit: het object, waarvan de grootte t.o.v. het oorspronkelijk gekozen maatstelsel a is, behoort tot de verzameling $[L]$. Kortheidshalve formuleert men dit ook als volgt: *de grootheid a heeft de dimensie lengte.*

Hierbij moet worden bedacht, dat het vaststellen van de dimensie van een grootheid nog niet hetzelfde is als het vaststellen van de eenheden, waarin die grootheid is gemeten. Ten opzichte van het tweede maatstelsel geldt in ons voorbeeld immers, dat de lengte van de weg $\frac{a}{b}$ is; doch nu geldt evengoed:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = [L] \text{ of } \frac{a}{b} \in [L] \tag{II.3.2}$$

Een tweede voorbeeld is de verzameling van alle tijdsduren; deze heeft de dimensie tijd, waarbij „tijd" de benaming is van een tijdvak. Hiervoor gebruiken de natuurkundigen het symbool $[T]$.

Een derde voorbeeld is de verzameling van alle hoeveelheden stof; deze heeft de dimensie massa, waarbij „massa" de naam is, die men geeft aan een hoeveelheid stof. De fysici schrijven de dimensie massa als $[M]$.

Dimensies, zoals hier besproken, zullen wij in hoofdstuk III voor economische grootheden invoeren.

4. De algemene dimensieformule

Wij denken ons thans gegeven: een aantal (n) verzamelingen $S_1, S_2, \ldots, S_n$, waarbij de objecten van iedere afzonderlijke verzameling onderling vergelijkbare grootheden zijn, terwijl de objecten van S_i en S_j ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$) niet onderling vergelijkbaar zijn. Daarnaast beschouwen we nog een verzameling S.

Nopens S veronderstellen we het bestaan van een soort functierelatie, en wel als volgt. Aangenomen is, dat er een voorschrift bestaat, dat bij aan $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ontleende objecten telkens een object van S aanwijst. Anders gezegd: het is mogelijk bepaalde tot S behorende objecten met betrekking tot een bepaalde doelstelling volledig te omschrijven door gebruik te maken van begrippen, die de objecten van de verzamelingen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ karakteriseren.

Bijvoorbeeld: S_1 zij de verzameling van tijdvakken, S_2 de verzameling van lijnsegmenten en S de verzameling der snelheden. Een snelheid kan worden omschreven als een lijnsegment, doorlopen in een zeker tijdvak. Men kan dan zeggen, dat er een functionele afhankelijkheid bestaat tussen de objecten van $S_1, \ldots, S_n$ (waarbij in het zojuist gegeven voorbeeld $n = 2$) en S [1].

[1] De tot S behorende objecten zijn onderling vergelijkbaar. Nochtans kunnen twee van deze objecten op verschillende wijze worden gedefinieerd, bijvoorbeeld: noemen we de lengte van een lijnsegment s, de duur van een tijdvak t en de grootte van een snelheid

Past men deze wijze van beschrijven in het bijzonder toe op de eenheden $A_1, \ldots, A_n$ van $S_1, \ldots, S_n$, dan behoort daarbij een object A van S, dat we als *afhankelijke* eenheid van S kunnen kiezen. De in S geldende maatbepaling wordt dan door de in $S_1, \ldots, S_n$ gekozen eenheden ondubbelzinnig gedetermineerd.

Laat nu op grond van een bepaalde beschrijving bij $A_1, \ldots, A_n$ een object A van S zijn aangewezen en op grond van *diezelfde* beschrijving bij $A_1', \ldots, A_n'$ een object A' van S. Zij voorts:

$$A_1 = \lambda_1 A_1'; \ldots ; A_n = \lambda_n A_n'; A = \lambda A',$$

dan is λ uiteraard bepaald door $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; m.a.w.:

$$\lambda = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{II.4.1}$$

De functie f uit (II.4.1) noemen wij de *algemene dimensiefunctie*. Op grond van deze functie kunnen we A symbolisch weergeven door:

$$A = f(A_1, \ldots, A_n) \tag{II.4.2}$$

en we kunnen nu zeggen, dat de grootheden van S de dimensie

$$[f(A_1, \ldots, A_n)] \tag{II.4.3}$$

bezitten *ten opzichte van* het gekozen eenhedensysteem $A_1, \ldots, A_n$ (of ten opzichte van $S_1, \ldots, S_n$).

Het bovenstaande leidt tot de volgende praktische uitspraak: zij X een object van S met waarde x t.o.v. A. Vervangt men nu $A_1, \ldots, A_n$ door $A_1', \ldots, A_n'$, dan krijgt x de waarde $x' = \lambda x$ ten opzichte van A', zodat geldt:

$$x' = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).x \tag{II.4.4}$$

De dimensiefunctie (II.4.1) kan ons dus iets leren omtrent de structuur van X.

5. Dimensieloze systemen

Het kan voorkomen, dat de functie f in (II.4.1) een constante is, d.w.z. niet afhangt van $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Verbaal geformuleerd betekent

v, dan wordt het begrip „eenparige snelheid" gedefinieerd als $\frac{s}{t}$, terwijl het begrip momentane snelheid wordt gedefinieerd als $\frac{ds}{dt}$. Maar als *eenheid* van snelheid neemt men de eenparige snelheid.

Soms komt het voor, dat twee grootheden schijnbaar dezelfde dimensie bezitten, terwijl zij nochtans onvergelijkbaar zijn en dus in wezen tot verschillende systemen (dimensies) behoren; zie hierover sectie 6 van dit hoofdstuk.

dit, dat de „afhankelijke" eenheid A van S in feite *niet* afhankelijk is van de gekozen grondeenheden $A_1, \ldots, A_n$ van $S_1, \ldots, S_n$. In een dergelijk geval zeggen we, dat het systeem S *dimensieloos* is *ten opzichte van* $S_1, \ldots, S_n$.

Een dimensieloze grootheid kan worden verkregen als quotiënt van twee grootheden X en Y, die beide dezelfde dimensie hebben, bijvoorbeeld:

$$\frac{X}{Y} = \frac{a \text{ km}}{b \text{ m}} = \frac{1000a \text{ m}}{b \text{ m}} = 1000 \frac{a}{b}$$

De waarde van het quotiënt verandert niet, indien X en Y in andere eenheden worden uitgedrukt:

$$\frac{X}{Y} = \frac{10a \text{ hm}}{0{,}1b \text{ dam}} = \frac{100a \text{ dam}}{0{,}1b \text{ dam}} = 1000 \frac{a}{b}$$

Men merke hierbij op:

(1) dat de verhouding tussen twee grootheden X en Y, die van *dezelfde dimensie* zijn, wordt berekend door eerst X en Y beide te meten t.o.v. één en dezelfde, *willekeurig gekozen*, maateenheid en vervolgens X door Y te delen;

(2) dat bij de deelbewerking deze maateenheid in de teller en de noemer wegvalt, zodat het quotiënt – de verhouding tussen de beide maatgetallen – een onbenoemd getal is; in dit geval, waarbij het onbenoemde getal is ontstaan door het ten gevolge van deling wegvallen van de maateenheid, noemt men het quotiënt een *dimensieloze* entiteit;

(3) dat de getalwaarde van het quotiënt $\frac{X}{Y}$ onafhankelijk is van de maateenheid, waarin X en Y zijn uitgedrukt.

De sub (3) geformuleerde stelling is slechts geldig, indien X en Y van dezelfde dimensie zijn. Noemt men $\frac{X}{Y}$ een „relatieve grootheid" en overweegt men, dat de maatgetallen van de „absolute grootheden" X en Y wel degelijk afhankelijk zijn van de gekozen maateenheid en dus geen absolute betekenis hebben, dan kan men deze stelling ook als volgt formuleren: *slechts een relatieve grootheid kan absolute betekenis hebben; dit is met name het geval, indien de absolute grootheden van dezelfde dimensie zijn.*

Zijn de beide (absolute) grootheden, waarvan men de verhouding bepaalt, echter van *verschillende* dimensie, dan is de getalwaarde van hun quotiënt wèl afhankelijk van de gebruikte eenheden. Zo is de getalwaarde van $\frac{a \text{ kg}}{b \text{ dm}^3}$ gelijk aan $\frac{a}{b}$, doch als men het gewicht in grammen en het volume in kubieke meters uitdrukt, wordt de getalwaarde 10^6 maal zo groot.

Men kan het begrip (absolute) *grootheid* blijkbaar definiëren als het produkt van een onbenoemd getal en een maateenheid; bv.. 200 000 cm $\equiv$ 200 000 $\times$ 1 cm $\equiv$ 200 $\times$ 1 km. Een dimensieloze „relatieve grootheid" is volgens deze definitie in wezen geen grootheid, doch een onbenoemd getal; de dimensieformule hiervan is [1].

Getalwaarden van constanten maakt men veelal gelijk aan 1, omdat dit praktisch is. Zo meet men de oppervlakte van een rechthoek met zijden van resp. a cm en b cm lengte, met behulp van de eenheid 1 cm^2. Zou men echter als oppervlakte-eenheid het oppervlak van een cirkel met straal 1 cm kiezen en zou men deze eenheid de „centimeterschijf" noemen, dan zou de oppervlakte van bovengenoemde rechthoek niet als ab cm^2, maar als $\frac{ab}{\pi}$ centimeterschijven worden uitgedrukt. Met deze uitdrukking is het bij de beschouwing van rechthoeken e.d. echter in de praktijk onhandig werken.

Ten slotte moge er nogmaals de aandacht op worden gevestigd, dat een dimensie S geen absoluut begrip is, maar steeds in betrekking staat tot bepaalde systemen $S_1, \ldots, S_n$, die aan de beschrijving van S ten grondslag liggen. Derhalve is ook „dimensieloos" geen absoluut begrip. Dit kan met een voorbeeld worden toegelicht. Een hoek kan men meten in radialen, waarbij de eenheid „radiaal" is gedefinieerd als die hoek, waarbij de lengte van de bijbehorende cirkelboog gelijk is aan de straal, waarmee deze boog is beschreven; daar dit een verhouding van twee lijnsegmenten is, is de hoek een dimensieloze grootheid. Maar men kan een hoek ook meten in graden en dan wordt de hoek een grootheid met dimensie „hoek"; hier kunnen de eenheden worden gerelativeerd (men zou ook de rechte hoek als eenheid kunnen kiezen; tussen deze beide eenheden bestaat dan de betrekking: 90° = 1 „rechte hoek").

6. Aantallen

In sommige gevallen wordt er niet gemeten, maar louter geteld, omdat de gekozen eenheid nooit wordt gerelativeerd. Stelt men de vraag: „hoeveel appelen liggen er op die schaal?", dan kan deze vraag slechts door tellen worden beantwoord, waarbij uitsluitend de appel als eenheid relevant is. Hetzelfde is het geval in de economie, als men vraagt naar het aantal huishoudingen in de economische kringloop.

Een „aantal" is een onbenoemd getal, evenals een dimensieloze grootheid. Toch bestaat er tussen beide begrippen een karakteristiek verschil. Een „aantal" *kan* geen dimensie hebben, omdat er niet wordt gemeten in de zin, waarin dit begrip in II.2 is gedefinieerd. Een dimensieloze grootheid is weliswaar eveneens een onbenoemd getal, maar dat komt, doordat de dimensie er als het ware „uit is weggevallen", toen twee grootheden met dezelfde dimensie op elkaar werden gedeeld [1]. Slechts in het laatste geval zullen wij van „dimensieloze" grootheden spreken; deze term zal niet worden toegepast om „aantallen" aan te duiden.

Het onderscheid tussen aantallen en dimensieloze grootheden brengt mede, dat het kan voorkomen, dat twee grootheden, welker dimensies met hetzelfde dimensiesymbool worden aangeduid, nochtans onvergelijkbaar zijn. In de economie is dit het geval met de omloopfrequentie van het geld aan de ene kant en de interestvoet aan de andere.

De omloopfrequentie van het geld is het aantal malen, dat de geldeenheid gemiddeld per tijdeenheid van hand tot hand gaat; dit aantal malen wordt gevonden door tellen. De dimensie van de omloopfrequentie is dus een „aantal" gedeeld door de tijd, dus $[T^{-1}]$.

De interestvoet is een geldbedrag per kapitaal (dit laatste is eveneens een geldbedrag), te betalen per tijdeenheid; de interest van een kapitaal is in dit geval recht evenredig met de tijd. Het „geldbedrag per kapitaal" wordt gevonden door twee geldbedragen op elkaar te delen, hetgeen principieel een andere procedure is dan tellen. De dimensie van interestvoet is dus: „dimensieloos" gedeeld door tijd, hetgeen eveneens wordt geschreven als $[T^{-1}]$.

[1] Ook bij deling en vermenigvuldiging van meer dan twee grootheden kan een dimensieloze grootheid het resultaat zijn. Aangezien deling hetzelfde is als vermenigvuldiging met een getal, dat tot de macht -1 is verheven, duidt men dimensieloze grootheden algemeen aan als *dimensieloze produkten* (zie sectie 10 van dit hoofdstuk).

Men kan de omloopfrequentie niet op zinvolle wijze vergelijken met de interestvoet op de wijze, waarop het begrip „vergelijken" in hoofdstuk II, sectie 1 is gebruikt [1].

7. Dimensie als maatbegrip

De functie f in (II.4.1) is te algemeen om tot praktisch bruikbare resultaten te voeren. Doorgaans kan de aldaar bedoelde samenhang echter worden beschreven door een functie van het type, dat optreedt in de volgende vergelijking:

$$\lambda = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} \tag{II.7.1}$$

in welk produkt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rationele getallen zijn. De afgeleide eenheid kan men dan symboliseren door:

$$A = A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n} \tag{II.7.2}$$

Men zegt dan, dat het systeem S ten opzichte van $S_1, \ldots, S_n$ de dimensie

$$[A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}] \tag{II.7.3}$$

bezit, waarbij $[A_1], \ldots, [A_n]$ andere symbolen zijn voor hetgeen wij aanvankelijk schreven als $S_1, \ldots, S_n$ (zie II.3).

Het bovenstaande kan men met andere woorden ook als volgt formuleren. Indien een grootheid ten opzichte van de aanvankelijk gekozen groep eenheden $A_1, \ldots, A_n$ de waarde a, ten opzichte van de later gekozen groep eenheden $A_1', \ldots, A_n'$ de waarde a' heeft en indien de oude eenheden, gemeten ten opzichte van de nieuwe,

[1] Immers, men kan met betrekking tot de omloopfrequentie van het geld en de interestvoet niet op zinvolle wijze uitmaken, of ze gelijk dan wel ongelijk zijn (zie sectie 1); derhalve behoren deze twee grootheden niet tot dezelfde dimensie (zie sectie 3). Nu zou men kunnen aanvoeren, dat, indien V de omloopfrequentie van het geld, E het totaal der betalingen gedurende een zekere periode en M de geldvoorraad voorstelt, de volgende identiteit geldt: $V \equiv \frac{E}{M}$, zodat de dimensie van V schijnt te zijn: „dimensieloos" gedeeld door tijd, d.i. hetzelfde als voor de interestvoet geldt. Echter is hiermede niet het fundamentele feit van de onvergelijkbaarheid van omloopfrequentie en interestvoet weerlegd. De oplossing van deze paradox is, dat V in de *theorie* wordt *gedefinieerd* als een frequentie, d.i. een „aantal" malen per tijdeenheid, en hiervan is het *gevolg*, dat vermenigvuldiging van V met M het totaal der betalingen per tijdeenheid levert. De *definitie* van de interestvoet bij de interestrekening is echter *principieel* hiervan verschillend, nl. een geldbedrag per kapitaal per tijdeenheid; dit begrip kan onmogelijk als een „frequentie" worden opgevat. – Doch ook frequenties kunnen onderling onvergelijkbaar zijn, nl. indien de gebeurtenissen, die per tijdeenheid worden geteld, zelf onderling onvergelijkbaar zijn, zoals bv. het aantal malen, dat een geldeenheid gemiddeld per tijdeenheid van hand tot hand gaat en het aantal malen, dat gemiddeld per tijdeenheid mijn hart zich samentrekt; toch is beider dimensieformule $[T^{-1}]$.

de waarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezitten:

$$A_i = \lambda_i . A_i' \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dan geldt:

$$a' = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} . a \tag{II.7.4}$$

en in dat geval zegt men, dat de dimensie van onze grootheid is:

$$[A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}] \tag{II.7.3}$$

De $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in de transformatieformule (II.7.4) zijn getallen; daarentegen stellen de $[A_1], \ldots, [A_n]$ in de dimensieformule (II.7.3) verzamelingen voor.

Het hier ontwikkelde begrip dimensie noemt men de *dimensie als maatbegrip* [1].

8. SPECIFIEKE DIMENSIEFORMULE

Zoals wij in de vorige paragraaf opmerkten, hanteert men in de praktijk een dimensiefunctie van het type (II.7.1):

$$\lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n}$$

Men gebruikt dus een *specifieke* dimensiefunctie, nl. een *produkt van machten*. Dat in de dimensieformule (II.7.3) de gronddimensies inderdaad optreden in de vorm van een produkt van machten van deze dimensies, namelijk $[A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}]$, is een gevolg van het feit,

[1] „Dimensie als maatbegrip" is uitsluitend het onderwerp van dit boek. Daarnevens komt de term „dimensie" in de literatuur in een geheel andere betekenis voor, die men kan bestempelen als het begrip „dimensie als meetkundige kwaliteit". Aan dit tweede dimensiebegrip is deze voetnoot gewijd; daarna komt het niet meer ter sprake.

J. TINBERGEN, *Grondproblemen der theoretische statistiek*, Haarlem, 1936, p. 11, schrijft: „Een zeer belangrijke vraag bij het meten van een verschijnsel is het aantal dimensies, dat het heeft, d.w.z. het *aantal getallen*, dat minimaal nodig is om het volledig te beschrijven". Een balk heeft in deze betekenis drie dimensies, nl. lengte, breedte en hoogte; er zijn immers drie gegevens nodig om het voorwerp volledig te beschrijven. Is er een scheef stuk afgezaagd, dan is het aantal dimensies groter dan drie. Op p. 13 schrijft TINBERGEN: „In de natuurwetenschappen noemt men het aantal dimensies in onze zin veelal het *aantal vrijheidsgraden*". Dit begrip dimensie kan men dus bv. als volgt definiëren: de dimensie als meetkundige kwaliteit is het aantal onafhankelijken onder de coördinaten in de abstracte ruimte, dat nodig is om het voorwerp als een punt vóór te stellen (*cf.* TINBERGEN, p. 13). TINBERGEN gaat dus uit van het aantal dimensies in de zin, waarin de n-dimensionale meetkunde deze term gebruikt. Het is ditzelfde begrip dimensie, dat wordt gebruikt in de bekende zegswijze, dat arbeid van een bepaalde geschooldheid en bekwaamheid „drie dimensies" heeft, nl. het aantal hoofden, het aantal uren en de intensiteit, waarmee wordt gewerkt. Dit is heel wat anders dan de dimensie als maatbegrip, waaraan dit boek is gewijd.

Niet elk boek, dat de term „dimensie" in de titel voert, gaat over dimensieanalyse, getuige het werk van W. HUREWICZ en H. WALLMAN, *Dimension Theory*, Princeton & Londen, tweede druk, 1948, dat zich op het terrein van de topologie beweegt.

dat de maatsystemen zodanig zijn ingericht, dat bij vermenigvuldiging van de maateenheid met λ de meting van de grootheid een resultaat geeft, dat λ maal zo klein is. In de dimensieanalyse stelt men, zoals in sectie II.5 reeds is medegedeeld, de eis, dat alleen relatieve grootheden absolute betekenis hebben: indien in een functie het stel veranderlijken achtereenvolgens twee verschillende stellen waarden aanneemt, moet de verhouding van de bijbehorende functiewaarden onafhankelijk zijn van de eenheden, waarin de variabelen zijn uitgedrukt. Een streng bewijs, dat de specifieke dimensieformule (II.7.3) en de daarbij behorende transformatieformule (II.7.1) aan deze eis voldoen, is gegeven door BRIDGMAN [1].

Ter verduidelijking van de in deze sectie geformuleerde gedachtengang moge thans van dit bewijs, onder gebruikmaking van de door ons gebezigde notatie, een verkorte versie volgen. Men verliest echter niet de draad van het betoog, indien men dit klein gedrukte stuk overslaat.

In vergelijking (II.4.4) op blz. 13, alwaar de algemene dimensiefunctie is toegepast, geeft een bepaald stel waarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ een functiewaarde x'. Evenzo zal een ander stel waarden $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ een functiewaarde x'' leveren. Er wordt nu geëist, dat de verhouding van deze beide functiewaarden niet afhangt van de gekozen eenheden. Zou men deze eenheden resp. $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots, \frac{1}{p_n}$ maal zo groot maken, dan zouden de functiewaarden worden:

$$x' = f(p_1\lambda_1, p_2\lambda_2, \ldots, p_n\lambda_n)x$$
$$x'' = f(p_1\lambda_1', p_2\lambda_2', \ldots, p_n\lambda_n')x$$

De eis luidt dus:

$$\frac{f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}{f(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n')} = \frac{f(p_1\lambda_1, p_2\lambda_2, \ldots, p_n\lambda_n)}{f(p_1\lambda_1', p_2\lambda_2', \ldots, p_n\lambda_n')}$$

welke functionaalvergelijking moet gelden voor elke waarde van de daarin voorkomende veranderlijken. Voor het oplossen van deze vergelijking schrijven we haar in de vorm:

$$f(p_1\lambda_1, p_2\lambda_2, \ldots, p_n\lambda_n) = f(p_1\lambda_1', p_2\lambda_2', \ldots, p_n\lambda_n') \times \frac{f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}{f(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n')}$$

waarna wij partieel differentiëren naar p_1 en de afgeleide van de functie naar haar eerste argument ($p_1\lambda_1$ resp. $p_1\lambda_1'$) aangeven met f_1. Hierdoor krijgt men:

$$\lambda_1 f_1(p_1\lambda_1, p_2\lambda_2, \ldots, p_n\lambda_n) = \lambda_1' f_1(p_1\lambda_1', p_2\lambda_2', \ldots, p_n\lambda_n') \frac{f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}{f(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n')}$$

[1] BRIDGMAN, pp. 21 en 22.

Vervolgens stellen wij $p_1 = p_2 = \ldots = 1$, zodat

$$\lambda_1 \frac{f_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}{f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)} = \lambda_1' \frac{f_1(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n')}{f(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n')}$$

hetgeen moet gelden voor elke waarde van de variabelen; nu is in het linkerlid $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_1}$ (wegens $p_1 = 1$).

Aan deze voorwaarde kan natuurlijk alleen maar worden voldaan, indien het linker- en rechterlid gelijk zijn aan een constante, die we α_1 noemen. Derhalve:

$$\lambda_1 \frac{f_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}{f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)} = \alpha_1$$

of wel:

$$\frac{\lambda_1}{f} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = \alpha_1, \text{ zodat } \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}$$

waaruit na integratie volgt:

$$f = C_1 \lambda_1^{\alpha_1}$$

Hierin is C_1 de integratieconstante, die een functie is van de overige variabelen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

Herhaalt men het bovenstaande proces door partiële differentatie naar $p_2, \ldots, p_n$, dan resulteert ten slotte:

$$f = C \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_n^{\alpha_n}$$

waarmede vergelijking (II.7.1) is bewezen.

Dat de specifieke dimensiefunctie bij deze eis een produkt van machten moet zijn, kan men, iets minder streng, ook als volgt illustreren. Stel, dat een grootheid met dimensie $[L^{\alpha}T^{\beta}]$ eerst de waarde $L_1^{\alpha}T_1^{\beta}$ en daarna de waarde $L_2^{\alpha}T_2^{\beta}$ aanneemt. Nu maakt men de maateenheid voor L p maal zo klein en die voor T q maal zo klein. De nieuwe waarden worden dan

$$(pL_1)^{\alpha}(qT_1)^{\beta} \text{ resp. } (pL_2)^{\alpha}(qT_2)^{\beta}.$$

Ten aanzien van de onderlinge verhoudingen geldt dus:

$$\frac{(pL_1)^{\alpha}(qT_1)^{\beta}}{(pL_2)^{\alpha}(qT_2)^{\beta}} = \frac{L_1^{\alpha}T_2^{\beta}}{L_2^{\alpha}T_2^{\beta}}$$

m.a.w., deze onderlinge verhouding blijft bij wijziging van de gekozen eenheden onveranderd.

Zou men echter in plaats van het produkt van machten een andere functie gebruiken, bv. $\log L \log T$, dan blijft de onderlinge verhouding bij wijziging van de gekozen eenheden niet constant; immers:

$$\frac{\log pL_1 \log qT_1}{\log pL_2 \log qT_2} \neq \frac{\log L_1 \log T_1}{\log L_2 \log T_2}$$

Met betrekking tot het optreden van transcendente functies zij opgemerkt, dat men theoretisch een dimensie kan toekennen aan bv. $\log L$ of e^L, en dus kan schrijven $[\log L]$ of $[e^L]$. Dit betekent dus, dat men een dimensie toekent aan bv. log (a cm). In de praktijk is dit echter weinig zinvol; men kan weliswaar log (a cm) definiëren als de macht, waartoe men 10 moet brengen om a cm te krijgen, doch deze procedure is in feite onuitvoerbaar. De dimensie $\log L$ valt kennelijk niet onder het speciale karakter van het begrip dimensie, zoals wij dit in het voorgaande hebben ontwikkeld; vermenigvuldiging van x in de gelijkheid $y = \log x$ met λ levert *geen multiplicatieve* constante voor y.

Als transcendente functies optreden, zal hun argument dus een onbenoemd getal moeten zijn.

Het gebruik van ons maatsysteem brengt met zich, dat bij een systeem, dat gekarakteriseerd wordt door een zekere dimensiefunctie, een dimensieloos produkt slechts kan ontstaan, als alle daarin voorkomende dimensies door *deling* (of vermenigvuldiging met hun omgekeerde) tegen elkaar wegvallen.

Ondanks het bovenstaande kan bv. de logaritme in de praktijk nog wel voorkomen zonder last te geven. Indien bv. twee grootheden zodanig van elkaar afhangen, dat, bij toeneming van x volgens een meetkundige reeks, y volgens een rekenkundige reeks toeneemt, dan geldt een relatie van de vorm:

$$y - y_0 = a.(\log x - \log x_0)$$

In het rechterlid treden nu weliswaar logaritmen op, doch dit lid is te herleiden tot de logaritme van het onbenoemde getal $\frac{x}{x_0}$, welke zonder enig bezwaar genomen kan worden. De dimensie van de constante a zal noodzakelijk dezelfde als die van y moeten zijn.

9. Gronddimensies en samengestelde dimensies

In sectie 4 is uiteengezet, dat het mogelijk is de objecten, die behoren tot een zekere verzameling S, met betrekking tot een bepaalde doelstelling volledig te omschrijven door gebruik te maken van begrippen, die de objecten van de verzamelingen $S_1, \ldots, S_n$ karakteriseren. In sectie 7 is deze stelling ten behoeve van de objectsbepaling van de dimensieanalyse op een gespecificeerde wijze geformuleerd, (II.7.3):

$$[A] = [A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}] \tag{II.9.1}$$

waarin $[A]$ de verzameling S symboliseert, terwijl $[A_1], \ldots, [A_n]$ de verzamelingen $S_1, \ldots, S_n$ voorstellen. In bovenstaande betrekking is $[A]$ blijkbaar omschreven als afhankelijk van de onafhankelijken $[A_1], \ldots, [A_n]$.

Deze onafhankelijken noemt men de primaire dimensies of *gronddimensies*. Een hiervan afhankelijke $[A]$ noemt men een secundaire of *samengestelde dimensie*, indien althans niet alle exponenten α_i (waarin $i = 1, \ldots, n$) de waarde 0 hebben (want dan heeft men een dimensieloos produkt), en indien niet één der α_i gelijk is aan 1, terwijl alle andere exponenten 0 zijn (want dan heeft men wederom een gronddimensie).

In elke wetenschap, waar men dimensieanalyse kan en wil toepassen, is men in beginsel vrij de gronddimensies te kiezen, zoals men wil. Het is echter de kunst deze keuze op de doelmatigste wijze te doen. Immers, een wetenschap, alwaar men dimensieanalyse kan toepassen, is een wetenschap, die metingen verricht; het maatstelsel dient dan zodanig te worden gekozen, dat het toepasbaar is op de meest uiteenlopende verzamelingen, waarmede deze wetenschap krijgt te maken. Bovendien is het gewenst de keuze der gronddimensies zodanig te doen, dat de vormen der samengestelde dimensies zo eenvoudig mogelijk zijn.

In de *natuurkunde* kiest men tegenwoordig [1] als gronddimensies: lengte $[L]$, massa $[M]$, tijd $[T]$ en temperatuur $[\Theta]$. Een eenvoudig

[1] LORD RAYLEIGH, „The Principle of Similitude", deed met betrekking tot de gronddimensies een andere keuze – zoals BRIDGMAN op p. 10 van zijn boek meedeelt – nl. de hoeveelheid warmte $[H]$, de temperatuur $[\Theta]$, de lengte $[L]$ en de tijd $[T]$. LANGHAAR zegt op p. 119, dat J. CLERK-MAXWELL echter reeds in zijn boek *Theory of Heat*, Londen, 1894, had aangetoond, dat het eenvoudiger is $[H]$ te vervangen door $[ML^2T^{-2}]$ om vervolgens $[M]$, $[\Theta]$, $[L]$ en $[T]$ als gronddimensies te kiezen; dit laatste doet men tegenwoordig gewoonlijk.

LANGHAAR vermeldt op p. 6 een derde mogelijkheid, die soms wordt gevolgd: men vervangt $[M]$ door $[FT^2L^{-1}]$ ingevolge de stelling, dat kracht $[F]$ = massa $[M] \times$ $\times$ versnelling $[LT^{-2}]$, en kiest dan als gronddimensies: $[F]$, $[\Theta]$, $[L]$ en $[T]$. Over een en ander bestaat een omvangrijke literatuur, waarop wij, gegeven de doelstelling van deze studie, niet ingaan.

Het is soms handig een afzonderlijk symbool in te voeren voor een samengestelde dimensie, die dikwijls voorkomt; zo kan men het symbool $[Q]$ hanteren voor elektrische lading $[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}]$.

voorbeeld van een samengestelde dimensie ziet men bij het meten van de oppervlakte van bv. een stuk land. Dit geschiedt met behulp van een oppervlakte-eenheid, die echter zelf weer is afgeleid van een lengte-eenheid. Een rechthoekig stuk land met een lengte van a m en een breedte van b m heeft een oppervlakte van ab m^2. De dimensie van de oppervlakte is dus $[L].[L] = [L^2]$. Per analogie zal het terstond duidelijk zijn, dat de dimensie van een volume kan worden gesymboliseerd door $[L^3]$. De dimensies $[L^2]$ en $[L^3]$ zijn eenvoudige voorbeelden van samengestelde dimensies; zij zijn eenvoudig, omdat zij machten (verschillend van 1) zijn van één en dezelfde gronddimensie, $[L]$.

Meet men een object in massa-eenheden, dan heeft dit object de dimensie massa, $[M]$. De soortelijke massa van een stof [1], d.i. de massa per volume-eenheid, heeft derhalve de dimensie $[ML^{-3}]$; dit is een voorbeeld van een samengestelde dimensie, waarin twee verschillende gronddimensies voorkomen; van deze beide is in dit geval bovendien één verheven tot een macht $\neq 1$.

Ook snelheden hebben hun eigen dimensie. Indien een voorwerp met eenparige snelheid v in een tijd t een weg s aflegt, is $v = \dfrac{s}{t}$; de dimensie van snelheid is dus $[LT^{-1}]$. De momentane snelheid $v = \dfrac{ds}{dt}$ heeft dezelfde dimensie (zie secties 3 en 8). Een versnelling is de verandering van een snelheid als functie van de tijd, bij een rechtlijnige beweging. Voor de versnelling a geldt dan $a = \dfrac{dv}{dt}$ en de dimensie van versnelling is dus $\dfrac{[LT^{-1}]}{[T]} = [LT^{-2}]$.

In het bovenstaande pasten wij reeds de algemene regel toe, dat de dimensie van een differentiaalquotiënt $\dfrac{dy}{dx}$ gelijk is aan de dimensie van $\dfrac{y}{x}$, hetgeen volgt uit:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] = \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] = \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] = \left[\frac{y}{x}\right]$$

[1] Hetzelfde geldt voor het soortelijk gewicht van een stof, d.i. het gewicht per volume-eenheid, want het aantal kilogrammassa-eenheden is steeds gelijk aan het gewicht, uitgedrukt in kilogramkrachten. Bij het wegen *meet* men het gewicht, maar *bepaalt* men de massa; massa is „hoeveelheid stof" in de zin der natuurkunde. Wanneer men zegt „1 kg suiker" bedoelt men ook inderdaad een hoeveelheid stof. Zie J. MUILWIJK, „Enkele opmerkingen over het begrip massa", *Euclides*, XXX (1954/55), pp. 81–87

Voor de tweede afgeleide vindt men:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \left[\frac{y}{x^2}\right]$$

Voorts is de dimensie van $\int y\,dx$ gelijk aan de dimensie van yx, zoals blijkt uit:

$$[y] = \left[\frac{d\int y\,dx}{dx}\right] = \left[\frac{\int y\,dx}{x}\right], \text{ zodat } [\int y\,dx] = [yx]$$

Met betrekking tot *frequentieverdelingen* kan worden opgemerkt, dat de frequentiedichtheid y van een grootheid x de dimensie $[x^{-1}]$ heeft; immers, de frequentiedichtheid is gedefinieerd door: het aantal gevallen per eenheid van x. Voor de normale verdeling [1]:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

waarin σ de standaardafwijking en $\bar{x}$ de gemiddelde waarde van x voorstelt, is de dimensie van y dus ook $[x^{-1}]$, hetgeen men nog verifiëren kan door te bedenken, dat de dimensie van de standaardafwijking σ gelijk is aan $[x]$, zodat de exponent van e een onbenoemd getal is.

De totale frequentie in een bepaald interval Δx is echter een aantal en dus een onbenoemd getal.

Ten aanzien van determinanten [2] merken we nog op, dat een determinant alleen een dimensie heeft, als voor elke rij of voor elke kolom geldt, dat alle elementen dezelfde dimensie hebben. Bij een determinant van de n-de orde kunnen dan ten hoogste n verschillende dimensies voorkomen.

Van de dimensie van een matrix kan men als zodanig niet spreken; wel zal het in de praktijk veelal zo zijn, dat binnen de rijen of binnen de kolommen de elementen alle dezelfde dimensie hebben.

Niet alleen in de natuurwetenschappen, maar ook in de *economie*

[1] Zie hierover bv. J. H. C. LISMAN (met medewerking van L. M. KOYCK en L. H. KLAASSEN), *Wiskundige propaedeuse voor economisten*, Utrecht, 1957, pp. 238–240. – Volgens de *wet van de grote getallen* zal, in het geval van een normale verdeling, naarmate het aantal waarnemingen groter wordt, de kans, dat de frequentiedichtheid van x in het interval $(y - \delta, y + \delta)$ ligt, voor iedere bepaalde waarde van δ steeds dichter tot 1 naderen.

[2] De lezer, die niet op de hoogte is met de begrippen „determinant" en „matrix", moge worden verwezen naar blz. 32 e.v., alwaar een korte uiteenzetting van deze begrippen uit de algebra wordt gegeven.

wordt gemeten en vergeleken. In deze wetenschap kunnen eveneens verbanden worden gevonden van het type, dat is beschreven in sectie 7 en het heeft zin daarbij dimensieanalyse toe te passen. De behandeling van het probleem van de keuze van de gronddimensies in de economie zal in hoofdstuk III haar plaats vinden; aldaar zullen tevens voorbeelden van samengestelde dimensies in eenvoudige gevallen worden gegeven. De ingewikkeldere gevallen en de eigenlijke dimensieanalyse komen in de hoofdstukken IV en V aan de orde.

Alvorens ons echter met de dimensies in de economie bezig te houden zullen wij in de beide volgende paragrafen van dit hoofdstuk een elementaire uiteenzetting geven van de algemene beginselen van de tak van wiskunde, die de naam „dimensieanalyse" draagt.

10. Dimensionele homogeniteit en dimensieloos produkt; theorema van Buckingham

Indien de vorm van een vergelijking onafhankelijk is van de keuze van de fundamentele eenheden (grondeenheden), met behulp waarvan de in de vergelijking voorkomende grootheden zijn uitgedrukt, dan noemt men de vergelijking *dimensioneel homogeen*. Wij zullen dit demonstreren aan de hand van een voorbeeld uit de mechanica en wel de zg. slingerformule, die aangeeft, hoe de slingertijd t van een stoffelijk punt afhangt van de lengte l van de slinger en van de versnelling van de zwaartekracht g. De vergelijking voor t luidt:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(II.10.1)}$$

waarin π de verhouding omtrek/middellijn van een cirkel voorstelt (ca. $\frac{22}{7}$).

De dimensie van de slingertijd is $[T]$, die van de lengte van de slinger $[L]$ en die van de versnelling van de zwaartekracht $[LT^{-2}]$, zodat onder het wortelteken een grootheid staat met dimensie $[T^2]$, m.a.w. het rechter lid van (II.10.1) heeft dimensie $[T]$, evenals het linkerlid.

Maakt men de eenheid van tijd of de eenheid van lengte a maal zo groot, dan verandert er dus in de vergelijking niets. De vergelijking is dimensioneel homogeen, d.w.z. is formeel niet afhankelijk van de gekozen eenheden.

Een vergelijking, die een theoretisch verband uitdrukt, kan men een „theoretische vergelijking" noemen. *Ten aanzien van theoretische vergelijkingen geldt de belangrijke stelling, dat zij slechts theoretisch juist en volledig kunnen zijn, indien zij dimensioneel homogeen zijn.* Dimensionele homogeniteit van een theoretische vergelijking is aan de andere kant geen bewijs, dat deze vergelijking juist is; zij kan nog wel een theoretische fout bevatten. Slechts geldt, dat de stelling, welke leidt tot de theoretische vergelijking, *niet juist* is (waaronder hier tevens de mogelijkheid van onvolledigheid wordt gevat), indien de vergelijking dimensioneel *niet homogeen* is. Want in dit laatste geval zijn de dimensies van de beide leden van de vergelijking niet dezelfde, zodat de beide leden in wezen onderling niet vergelijkbaar zijn; derhalve is de zg. gelijkheid in wezen geen gelijkheid.

Is een theoretische vergelijking dimensioneel niet homogeen, dan kan een dimensieanalyse de richting aanwijzen, waarin men de fout moet zoeken. Een voorbeeld kan dit toelichten.

Stel, dat men met betrekking tot de slingertijd van een model van de enkelvoudige slinger empirisch de volgende relatie heeft vastgesteld:

$$t = 0{,}2\sqrt{l} \qquad \text{(II.10.2)}$$

waarbij t in seconden en l in centimeters is gemeten [1].

Deze *empirische vergelijking* is dimensioneel niet homogeen en kan dus ook geen juiste theorie voorstellen, want een tijdvak kan logisch onmogelijk gelijk zijn aan de wortel uit een lengte. Om de vergelijking dimensioneel homogeen te maken moet men in het rechterlid een grootheid of een samenstel van grootheden van de dimensie $[(LT^{-2})^{-\frac{1}{2}}]$ toevoegen, m.a.w. onder het wortelteken ontbreekt de reciproke van een versnelling. Het ligt voor de hand hiervoor de reciproke van de versnelling van de zwaartekracht te nemen, waarvan wij immers weten, dat deze laatste op de slinger werkt.

In de *empirische* vergelijking geldt de coëfficiënt 0,2 *alleen maar*, indien t in seconden en l in centimeters wordt gemeten. Men moet nu wel waken voor de fout pardoes aan het getal 0,2 de dimensie $[(LT^{-2})^{-\frac{1}{2}}]$ toe te kennen, want dan zou *elke* vergelijking *per definitie* dimensioneel homogeen zijn en dan zou de dimensionele homogeni-

[1] Deze vergelijking stemt overeen met (II.10.1), hetgeen men kan controleren door te substitueren: $\pi = 3{,}14$ en $g = 981{,}3$ cm/sec^2.

teit geen zinvol criterium voor de juistheid van een theorie meer kunnen zijn [1].

Keren we terug tot de dimensioneel homogene vergelijking (II.10.1):

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dan blijkt dus, dat de constanten 2 en π hier *numerieke constanten* zijn; zij zijn van de dimensie [1]: zij zijn onbenoemde getallen. Men kan de vergelijking ook schrijven in de vorm:

$$tl^{-\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}} = 2\pi \qquad \text{(II.10.3)}$$

Het linkerlid noemt men een *dimensieloos produkt.*

Constanten in vergelijkingen behoeven niet altijd numerieke constanten te zijn, zoals hierboven. Het kan ook voorkomen, dat er constanten optreden, waaraan men een dimensie moet toekennen; men spreekt dan van *dimensieconstanten.* Het volgende geval is hiervan een voorbeeld.

Een stoffelijk punt beweegt zich verticaal onder invloed van de zwaartekracht (versnelling $g = \frac{d^2s}{dt^2}$, waarin s de afgelegde afstand en t de tijd voorstelt). Gevraagd wordt, waar dit punt zich op een tijdstip t bevindt, als beginplaats en -snelheid gegeven zijn; men wenst dus het verband tussen s en t te kennen. Dit volgt uit:

$$\frac{ds}{dt} = \int g\, dt = gt + C_1$$

en

$$s = \int (gt + C_1)\, dt = \tfrac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

De integratieconstanten stellen blijkbaar voor: de snelheid resp. de plaats op het tijdstip $t = 0$. Deze constanten hebben dus de dimensie $[LT^{-1}]$ resp. $[L]$; de vergelijking is dimensioneel homogeen. Zij gaat na deling van de beide leden door s over in een som van dimensieloze produkten, welke gelijk aan 1 is. Algemeen kan men nu het volgende stellen. Als *voldoende* voorwaarde voor dimensionele homogeniteit van een vergelijking geldt, dat de vergelijking kan worden herleid tot een betrekking tussen dimensieloze produkten.

Deze voorwaarde is, zoals BUCKINGHAM heeft aangetoond, niet

[1] LANGHAAR, p. 13.

alleen voldoende, maar ook *noodzakelijk*. De in de vorige alinea vermelde stelling kan derhalve worden aangevuld en herschreven. In deze versie staat zij bekend als „het theorema van BUCKINGHAM", dat als volgt luidt [1]: *indien een vergelijking dimensioneel homogeen is, dan kan zij worden herleid tot een betrekking tussen een volledig stel onderling onafhankelijke dimensieloze produkten.*

Men noemt een dimensieloos produkt „onafhankelijk", indien dit produkt niet kan worden geschreven als een produkt van machten van de andere exemplaren van het stel dimensieloze produkten, dat men bezig is te beschouwen [2]. Een voldoende, zij het niet altijd noodzakelijke, voorwaarde hiertoe is, dat in het desbetreffende dimensieloze produkt ten minste één veranderlijke aanwezig is, die in geen enkel ander dimensieloos produkt uit het beschouwde stel voorkomt [3].

Een stel onderling onafhankelijke dimensieloze produkten is „volledig", indien elk ander – d.w.z. niet tot dit stel behorend – dimensieloos produkt kan worden geschreven als een produkt van machten van de dimensieloze produkten, die wèl tot het stel behoren [4].

11. DIMENSIECONSTANTEN

Zoals wij in het voorgaande hebben gezien, kan men aan een constante in bepaalde gevallen een dimensie toekennen, en men spreekt dan van een dimensieconstante. Voor de praktijk is het nu een belangrijke vraag, welke criteria gelden ter beslissing van de kwestie of men aan een bepaalde constante een dimensie moet toekennen, en zo ja, welke. Met name doet dit vraagstuk zich voor bij *empirische vergelijkingen*. Hierover maakt LANGHAAR twee opmerkingen.

(1) Empirische vergelijkingen bevatten veelal constanten, die slechts geldig zijn voor een bepaald eenhedenstelsel. Zo geldt bv. de empirische slingervergelijking (II.10.2) $t = 0{,}2\sqrt{l}$ uitsluitend, indien t in seconden en l in centimeters wordt gemeten.

(2) Bij de beschouwing van deze empirische slingervergelijking zou men de neiging kunnen gevoelen te beweren, dat de constante

[1] LANGHAAR, p. 18; voor een bewijs van dit theorema zij men verwezen naar LANGHAAR, hst. 4: „Algebraic Theory of Dimensional Analysis", pp. 47 e.v., alsmede naar BRIDGMAN, pp. 37 e.v.

[2] LANGHAAR, p. 17.

[3] LANGHAAR, pp. 36–37.

[4] LANGHAAR, pp. 17–18.

0,2 de dimensie $[L^{-\frac{1}{2}}T]$ heeft [1]; „echter" – aldus LANGHAAR – „men moet geen dimensie toekennen aan getallen, want dan zou men iedere vergelijking als dimensioneel homogeen kunnen beschouwen" [2].

BRIDGMAN wijdt aan deze kwestie uitvoerige beschouwingen [3], die er in feite op neerkomen, dat er op de vraag, of de constante 0,2 al dan niet een dimensie bezit, *twee verschillende* antwoorden zijn, nl. een *rekenkundig* en een *theoretisch* antwoord.

Men kan de gedachtengang van BRIDGMAN als volgt in vijf punten samenvatten.

(I) Een dimensieconstante is een proportionaliteitsfactor, die varieert, indien de eenheden veranderen, en wel volgens een transformatieformule, die kan worden gespecificeerd door aan deze factor een dimensieformule toe te kennen.

(II) Een empirische vergelijking is geldig te maken voor elk stel grondeenheden door aan elke meetbare grootheid een dimensieconstante toe te kennen met een dimensieformule, die de reciproke is van die van de desbetreffende gemeten grootheid. – Dit type van dimensieconstanten zullen wij *rekenkundige dimensieconstanten* noemen. In de empirische slingerformule (II.10.2) is 0,2 een rekenkundige dimensieconstante, die het quotiënt is van de oorspronkelijke rekenkundige dimensieconstanten, die men vóór de meetbare grootheden t en $\sqrt{l}$ kan schrijven en waarvan de dimensieformules de reciproken zijn van die van t resp. $\sqrt{l}$.

(III) In vergelijkingen, die langs theoretische weg zijn afgeleid, komen uitsluitend die dimensieconstanten voor, die ook reeds in de uitgangsvergelijkingen, waaruit het eindresultaat is afgeleid, waren gebruikt [4]. – Zulke constanten zullen we *theoretische dimensieconstanten* noemen.

[1] Immers, $t \in [T]$ en $\sqrt{l} \in [L^{\frac{1}{2}}]$. De in de tekst aangegeven dimensie van 0,2 laat zien, hoe de waarde van deze coëfficiënt verandert, indien men overgaat op andere grondeenheden.

[2] Hetzelfde geldt voor de empirische vergelijking, die de zg. wet van PARETO uitdrukt:

$$y = \frac{C}{x^{\alpha}}$$

waarin y het aantal personen voorstelt met een inkomen, dat groter is dan x. De coëfficiënt α is de zg. constante van PARETO. Rekenkundig beschouwd heeft C, indien $[M]$ thans een geldvoorraad en $[MT^{-1}]$ een geldstroom voorstelt, de dimensie $[M^{\alpha}T^{-\alpha}]$, waarbij men α opvat als een onbenoemd getal. Immers, $y \in [1]$.

[3] Men zie pp. 6, 14–16, 36, 49, 52, 53, 63 en 64 van zijn boek, alsmede de paragraaf „The Dimensional Constant" op p. 387 D van zijn encyclopedie-artikel.

[4] Een voorbeeld uit de mechanica is de stelling, dat de kracht, die op een vrij vallend lichaam wordt uitgeoefend (F), gelijk is aan het produkt van de massa van het lichaam

De constanten C_1 en C_2 in het laatste voorbeeld van sectie 10 zijn voorbeelden van theoretische dimensieconstanten; zij hebben, zoals aldaar is uiteengezet, een bepaalde theoretische betekenis en zijn niet louter omrekeningsfactoren. Hetzelfde geldt voor de gravitatieconstante g in de theoretische slingervergelijking (II.10.1).

(IV) Dimensieconstanten moeten worden beschouwd als een euvel, dat slechts moet worden geduld, indien zij meer informatie verschaffen over veranderlijken, die in de beschouwde betrekking optreden. – BRIDGMAN heeft hier kennelijk de constanten op het oog, die wij „theoretische dimensieconstanten" hebben genoemd.

(V) De mate, waarin men een bepaalde groep verschijnselen beheerst en waarin men in staat is ze in wetten te formuleren, is afhankelijk van de mate, waarin men in staat is een beperkte [1] groep (theoretische) dimensieconstanten te ontdekken, die geschikt zijn om alle verschijnselen te ordenen.

In het licht van deze vijf stellingen kan men onze op blz. 26 gemaakte en op LANGHAAR gebaseerde opmerking, dat men niet aan elke constante in een empirische vergelijking pardoes een dimensieformule moet toeschrijven, als volgt uitbreiden. Voor louter rekenkundige doeleinden mag, ja zelfs moet men een „dergelijke" formule wèl aan de bedoelde constante toekennen – doch deze formule is in wezen geen *dimensie*formule, doch slechts een *transformatie*formule. De conclusie, dat deze formule geen dimensieformule is [2], betekent in wezen, dat men de genoemde constante *niet* als een theoretische dimensieconstante mag opvatten.

Wij noemen een vergelijking slechts dan *dimensioneel homogeen, indien de vorm van de vergelijking onafhankelijk is van de gekozen eenheden, terwijl alle coëfficiënten, die in de vergelijking optreden, hetzij onbenoemde getallen zijn, hetzij het karakter van theoretische dimensieconstanten bezitten.*

(m) en de versnelling van de zwaartekracht (g), waarin $g = 981{,}3$ cm/sec^2 een dimensieconstante is. Deze g is echter slechts een speciaal geval van het begrip versnelling (a), dat voorkomt in de op blz. 22n. reeds vermelde uitgangsvergelijking $F = ma$, zodat g een theoretische dimensieconstante is. Wij hebben deze constante ook ontmoet in de theoretische vergelijking van de enkelvoudige slinger; zie vergelijking (II.10.1) op blz. 25. *Cf.* BRIDGMAN, pp. 51, 52.

[1] „Beperkt", d.w.z. dat het aantal van deze dimensieconstanten kleiner is dan het aantal meetbare grootheden, dat als variabelen in de vergelijking optreedt.

[2] In de bestaande literatuur wordt het onderscheid tussen transformatieformule en dimensieformule nergens gemaakt (zie boven, sectie 7).

12. Berekening van dimensieloze produkten

„De toepassing van de dimensieanalyse op een praktisch vraagstuk" – aldus Langhaar [1] – „is gebaseerd op de veronderstelling, dat de oplossing van het probleem kan worden uitgedrukt met behulp van een dimensioneel homogene vergelijking, luidende in gespecificeerde veranderlijken. Deze veronderstelling is gerechtvaardigd, omdat de fundamentele vergelijkingen of uitgangsvergelijkingen van de natuurkunde dimensioneel homogeen zijn en omdat betrekkingen, die uit deze vergelijkingen kunnen worden afgeleid, derhalve eveneens dimensioneel homogeen zijn. Echter is het logisch niet geoorloofd *a priori* aan te nemen, dat een onbekende vergelijking dimensioneel homogeen is, tenzij men weet, dat de vergelijking alle veranderlijken bevat, die zouden verschijnen bij een analytische afleiding van de vergelijking".

Bijvoorbeeld: men zou kunnen betogen, dat men bij het op blz. 25 behandelde probleem van de slingertijd t van een enkelvoudige slinger de versnelling van de zwaartekracht g gerust buiten beschouwing kan laten en genoegen kan nemen met een „verklaring" van t in de vorm:

$$t = 0{,}2\sqrt{l} \qquad \text{(II.10.2)}$$

aangezien g op een gegeven plaats op het aardoppervlak toch een constante is. Echter is, zoals op blz. 26 reeds is vastgesteld, deze vergelijking dimensioneel niet homogeen; de beide leden van de vergelijking zijn dus onvergelijkbare grootheden. Derhalve voldoet de vergelijking, strikt logisch beschouwd, niet aan het voorschrift „=", zodat zij een innerlijke tegenstrijdigheid bevat. Deze inconsistentie kan slechts worden opgeheven door de theoretische dimensieconstante g in te voeren:

$$t = 2\pi . \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(II.10.1)}$$

waardoor de „verklaring" van t bovendien tegelijkertijd wordt gecompleteerd en gegeneraliseerd: zij is nu ook geldig voor andere plaatsen, al dan niet op het aardoppervlak. In feite is (II.10.1) ook de vorm, die men verkrijgt als resultaat van een afleiding, met behulp van de wiskundige analyse, uit bepaalde uitgangsvergelijkingen van de natuurkunde.

[1] Langhaar, p. 14.

Hetgeen ons bij het opzetten van deze studie heeft bewogen, is de idee, dat hetgeen LANGHAAR over de dimensieanalyse zegt in het kader van de *natuurkunde*, evenzeer juist is voor elke andere wetenschap, die zich met metingen bezighoudt, en derhalve ook voor de *economie*.

Tegen de achtergrond van het bovenstaande kan men de dimensieanalyse omschrijven als een eenvoudige wiskundige techniek, die ten doel heeft de *vormvereisten* te bepalen, waaraan de vergelijking, die zeker verschijnsel [1] „verklaart", moet voldoen, zodra men weet, *welke* veranderlijken in deze vergelijking zullen moeten voorkomen. Uiteraard is dit laatste slechts mogelijk, indien men – bv. op intuïtieve gronden – voldoende inzicht in het innerlijke mechanisme van het te verklaren verschijnsel heeft om een indruk te hebben, *waarom* deze veranderlijken in de vergelijking zullen moeten optreden.

De techniek van de dimensieanalyse komt, globaal omschreven, op het volgende neer. Het uitgangspunt is, dat een theoretische vergelijking, indien zij juist is, dimensioneel homogeen *moet* zijn, zodat het theorema van BUCKINGHAM erop toepasselijk is (zie blz. 28). *Het gaat er nu om het volledige stel onderling onafhankelijke dimensieloze produkten*, dat men uit de intuïtief aangenomen variabelen kan samenstellen, *te berekenen*.

Het doel van deze paragraaf is de in de vorige alinea aangeduide techniek uiteen te zetten. Dit zal in twee stappen geschieden. De eerste stap is de uiteenzetting geheel *in abstracto* te geven en dus in een algemeen-geldige vorm te gieten. De tweede is deze abstracte versie toe te lichten aan de hand van het meerbesproken eenvoudige voorbeeld van de enkelvoudige slinger.

TUSSENSPEL: ENKELE BEGRIPPEN UIT DE ALGEBRA

Het is niet mogelijk een goede uiteenzetting van de techniek van de dimensieanalyse te geven zonder gebruik te maken van enkele begrippen uit de theorie van de matrices, determinanten en lineaire vergelijkingen. Ten behoeve van lezers, die niet met deze wiskundige begrippen op de hoogte zijn, biedt deze klein gedrukte tekst hiervan juist zoveel, als nodig is om de hierna in grote letter gedrukte uiteenzetting van de techniek van de dimensieanalyse te kunnen begrijpen [2].

[1] Onverschillig, of het de natuurkunde dan wel de economie is, die dit verschijnsel tracht te verklaren.

[2] Een grondigere en meer omvattende uiteenzetting vindt men bv. bij J. H. C. LISMAN, *Wiskundige propaedeuse voor economisten*, Utrecht, 1957, pp. 32–68.

Onder een *matrix* verstaat men een rechthoekig samenstel van getallen. Zo vormen bv. de coëfficiënten in de vergelijkingen:

$$2x + 3y - 5 = 0$$
$$3x - 2y + 7 = 0$$

de elementen van de matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Een matrix, bestaande uit m rijen of regels en n kolommen, noemt men een matrix van de *orde* $m \times n$, of kortweg een m, n-matrix. Is $m = n$, dan spreekt men van een vierkante matrix van de orde n.

Bovenstaande matrix van de orde 2×3 bevat drie vierkante matrices van de orde 2 en wel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Van een vierkante matrix kan men de zg. *determinant* Δ bepalen. Per definitie geldt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

Dit is een determinant van de tweede orde. Hij is één bepaald getal, in tegenstelling tot de matrix, welke alleen maar een opstelling van een aantal getallen is. De waarde van deze determinant is verkregen door elk van de beide elementen uit een *kolom* (hier bv. kolom 1) te vermenigvuldigen met het element, dat *zowel* in de andere kolom *als* in de andere rij staat, waarna de beide produkten worden opgeteld onder toekenning van een minteken, indien de som van de indices van het element uit de eerstgenoemde kolom oneven is. Men verkrijgt hetzelfde resultaat door elk van de beide elementen uit een *rij* (bv. rij 1) te vermenigvuldigen met het element, dat zowel in de andere rij als in de andere kolom staat en vervolgens de beide produkten op te tellen onder toekenning van een minteken, indien de som van de indices van het element uit de eerstgenoemde rij oneven is:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Op analoge wijze kan men de waarde van determinanten van „hogere orde" bepalen (d.w.z. van een orde > 2). Daartoe maakt men gebruik van het begrip *cofactor van een element*. Zij a_{ij} het element van een determinant van de orde n, dat staat zowel in rij i als in kolom j (waarbij $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$). De cofactor van het element a_{ij} is dan de determinant van de orde $n - 1$, die men verkrijgt door in de oorspronkelijke determinant van de orde n zowel rij i als kolom j weg te schrappen. Bijvoorbeeld: in de determinant van de derde orde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wordt de cofactor van het element a_{11} gevormd door de determinant van de tweede orde:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

De waarde van een determinant van hogere orde wordt nu verkregen door elk van de elementen uit een bepaalde, willekeurig gekozen kolom (of rij, naar keuze) te vermenigvuldigen met zijn eigen cofactor, waarna deze produkten worden opgeteld onder toekenning van een minteken, indien de som van de indices van het element uit de eerstgenoemde kolom (resp. rij) oneven is. Zo geldt voor de bovengenoemde determinant van de derde orde, indien we de eerste kolom als uitgangspunt kiezen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}.(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}.(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}.(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

Deze berekeningsprocedure van de waarde van een determinant noemt men de „ontwikkeling van LAPLACE".

In elke matrix kan men door weglating van rijen of kolommen vierkante matrices aanwijzen, aan elk waarvan weer een determinantwaarde kan worden toegekend. Zo bevat de matrix in het eerstgenoemde voorbeeld, zoals we reeds hebben gezien, drie vierkante matrices; hun determinantwaarden zijn resp. $2 \times (-2) - 3 \times 3 = -13$; $2 \times 7 - 3 \times (-5) = 29$; en $3 \times 7 - (-2) \times (-5) = 11$.

Soms hebben alle determinanten boven een bepaalde orde r, die men in een matrix kan vormen, de waarde nul. Dit belangrijke verschijnsel geeft men aan door te zeggen, dat de matrix dan de rang r heeft. Per definitie geldt namelijk:

indien een matrix ten minste één determinant van de orde r bevat, die ongelijk aan nul is, terwijl alle determinanten van een orde hoger dan r nul zijn, dan is de rang van deze matrix r.

Zo is de rang van onderstaande matrix 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

immers, er is een determinant van de tweede orde te vinden (er zijn er trouwens meer dan één), die ongelijk aan nul is, terwijl alle determinanten van de derde orde nul zijn. Een voorbeeld van een determinant van de tweede orde, die in de bovenstaande matrix voorkomt, wordt gevormd door het blokje van vier getallen in de linkerbovenhoek van de matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

De waarde van deze determinant is blijkbaar $\neq 0$.

Beschouwen we daarentegen een willekeurige determinant van de derde orde, die in dezelfde matrix voorkomt, dan zal men voor zulk een determinant altijd de waarde = 0 vinden. Kiezen we als voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

dan kan men met behulp van de hierboven uiteengezette ontwikkeling van LAPLACE onmiddellijk inzien, dat de waarde van deze determinant = 0 is. Immers, in de eerste kolom staat slechts één element, dat een waarde $\neq 0$ heeft; de cofactor van dit element is:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Deze cofactor bevat een kolom, die uit louter nullen bestaat; derhalve is zijn waarde = 0 – en dus is de waarde van de gehele determinant = 0. Het is altijd het gemakkelijkst uit te gaan van een kolom of een rij, die slechts één element $\neq 0$ bevat. In de bovenstaande determinant van de derde orde had men dus met evenveel gemak ook de eerste of de derde rij als uitgangspunt kunnen kiezen.

Voor de dimensieanalyse is het nauwkeurig uitrekenen van de waarde van een determinant slechts zelden of nooit nodig. Het is voldoende, dat men slechts uitzoekt, of de waarde van de determinant al dan niet gelijk is aan nul. Men kan zich daarom veel saai rekenwerk besparen door niet „automatisch" de ontwikkeling van LAPLACE toe te passen, maar eerst eens te proberen de te onderzoeken determinant te vervormen tot een andere, gelijkwaardige, die een kolom of een rij bevat, waarvan slechts één element $\neq 0$ is. Dit laatste kan geschieden door gebruik te maken van de volgende *stelling*.

De waarde van een determinant verandert niet, indien men bij de elementen van een kolom (of rij) de overeenkomstige elementen van een andere kolom (resp. rij), eventueel vermenigvuldigd met een factor, optelt.

Bij wijze van voorbeeld onderzoeken we, of de waarde van de volgende determinant – die we in hst. IV, sectie 4, op blz. 145 zullen tegenkomen – al dan niet gelijk is aan nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

We tellen nu $\frac{1}{3} \times$ rij 5 op bij rij 4; dit wil zeggen, dat we *rij 4 vervangen* door de optelsom van $\frac{1}{3} \times$ rij 5 en rij 4, terwijl we rij 5 ongewijzigd laten staan. Het resultaat is:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Hiermede is bereikt, dat rij 4 nog slechts één element $\neq 0$ bevat, namelijk $a_{42} = -1$. Door de vierde rij en de tweede kolom weg te vegen houden we de cofactor van a_{42} over:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Indien deze cofactor $= 0$ is, is de oorspronkelijke determinant van de vijfde orde eveneens $= 0$; immers, de waarde van de oorspronkelijke determinant is $a_{42} \times$ de cofactor.

In deze nieuwe determinant van de vierde orde bevat de eerste rij slechts één element $\neq 0$, namelijk $a_{11} = 1$. We vegen daarom de eerste rij en de eerste kolom weg en houden de cofactor van a_{11} over:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Indien deze determinant van de derde orde een waarde $= 0$ heeft, is ook de bovenstaande determinant van de vierde orde en derhalve evenzeer de oorspronkelijke determinant van de vijfde orde $= 0$.

In de determinant van de derde orde tellen we rij 2 op bij rij 1:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

en in de aldus verkregen nieuwe determinant van de derde orde tellen we $1\frac{1}{2} \times$ rij 1 op bij rij 3:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aangezien zich thans één rij met louter nullen voordoet, is de waarde van deze determinant nul, en derhalve ook die van de oorspronkelijke determinant van de vijfde orde.

Er bestaat nog een kortere methode om vast te stellen, dat de waarde van de oorspronkelijke determinant van de vijfde orde $= 0$ is, maar het vereist iets meer oefening deze binnen redelijk korte tijd te vinden. Indien men in de oorspronkelijke determinant eerst kolom 4 met het getal 2 vermenigvuldigt en daarvan vervolgens kolom 5 aftrekt, verkrijgt men:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

In deze nieuwe determinant van de vijfde orde zijn de kolommen 3 en 4 aan elkaar gelijk. Trekt men nu bv. kolom 3 af van kolom 4, dan bevat de laatstgenoemde kolom nog slechts nullen; derhalve is de waarde van de determinant $= 0$.

Het begrip „rang van een matrix" vindt toepassing in de *theorie van de lineaire vergelijkingen*. Stel, dat men m *homogene* lineaire vergelijkingen [1] heeft met n onbekenden:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

dan kan men drie gevallen onderscheiden.

(*a*) Indien $m > n$, zodat er meer homogene vergelijkingen dan onbekenden zijn, bestaat er in het algemeen geen oplossing. Het stelsel is overbepaald; de vergelijkingen zijn onderling strijdig.

(*b*) Indien $m = n$, dus bij gelijk aantal homogene vergelijkingen en onbekenden, bestaat er één oplossing, indien de determinant van de matrix van alle coëfficiënten nul is, terwijl er uit deze matrix ten minste één determinant van de orde $n - 1$ moet kunnen worden gevormd, die ongelijk nul is. Dit betekent dus, dat de rang r van de matrix van de coëfficiënten $n - 1$ moet zijn, zal er één oplossing kunnen worden gevonden. Dat dit zo moet zijn, kan men aannemelijk maken met behulp van het volgende voorbeeld. Stel, dat de volgende drie homogene vergelijkingen met drie onbekenden gegeven zijn:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{I}$$

Tussen deze drie vergelijkingen bestaat één graad van afhankelijkheid: vermenigvuldigt men alle termen van de eerste vergelijking met 2 en alle termen van de tweede vergelijking met -1, dan levert optelling van de beide nieuwe vergelijkingen de onderste van het bovenstaande drietal vergelijkingen. De drie vergelijkingen zijn dus lineair afhankelijk van elkander. Derhalve zijn er slechts twee onderling onafhankelijke en niet strijdige vergelijkingen met drie onbekenden. – Echter kan men alle termen van de drie homogene vergelijkingen delen door hetzelfde getal, bv. door x_3; men verkrijgt dan:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_3} - 5 &= 0 \\ \frac{x_1}{x_3} + 2\frac{x_2}{x_3} - 8 &= 0 \\ \frac{x_1}{x_3} \qquad\quad - 2 &= 0 \end{aligned} \tag{II}$$

[1] Een vergelijking van de eerste graad is homogeen, indien de bekende term nul is. Aan een stel homogene vergelijkingen met n onbekenden voldoet uiteraard altijd de oplossing $x_j = 0$ (waarbij $j = 1, \ldots, n$), die de triviale oplossing wordt genoemd. Deze blijft in de tekst geheel buiten beschouwing, omdat zij voor ons doel van geen belang is.

In (II) heeft men een stelsel van twee onderling onafhankelijke en niet-strijdige lineaire vergelijkingen met twee onbekenden, nl. $\frac{x_1}{x_3}$ en $\frac{x_2}{x_3}$, met daarbij nog een derde vergelijking, die lineair afhankelijk is van de beide eerder genoemde. De enige oplossing, die aan alle drie de vergelijkingen (II) voldoet, is:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_3} &= 2 \\ \frac{x_2}{x_3} &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

of, anders geschreven:

$$x_1 = 2x_3 \text{ en } x_2 = 3x_3 \qquad \text{(III')}$$

De waarden van x_1, x_2 en x_3 liggen dus niet geheel vast; slechts hun verhoudingen zijn bepaald. Dit betekent, dat men de waarde van één van de x'en – bv. x_3 – vrij kan kiezen, bv. $x_3 = a$; heeft men dit gedaan, dan liggen ook de waarden van x_1 en x_2 vast. Er zijn dus oneindig veel stellen x_1, x_2 en x_3 denkbaar, die voldoen aan de drie vergelijkingen (I); elk hunner wordt verkregen door in de oplossing:

$$x_1 = 2a;\ x_2 = 3a;\ x_3 = a \qquad \text{(III'')}$$

het getal a met een willekeurige constante λ te vermenigvuldigen. Uiteraard voldoen al deze oplossingen aan de ene oplossing (III), die de onderlinge verhoudingen tussen de x'en aangeeft. Daarom geldt slechts deze laatste als „de enige" oplossing; immers, alle andere oplossingen zijn „afhankelijk" van de oplossing (III). Zij komen alle op hetzelfde neer als (III) en (III'), aangezien zij slechts veelvouden van (III'') voorstellen.

De matrix van alle coëfficiënten van (I) is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV)}$$

Dit is een vierkante matrix ($m = n$) van de orde $n = 3$. De determinant van deze matrix, namelijk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{(V)}$$

heeft de waarde 0. Dit kan men als volgt snel aantonen. Trek in (V) 2 × rij 1 af van rij 2; er ontstaat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{(VI)}$$

In deze nieuwe determinant (VI) bevat kolom 2 slechts één element $\neq 0$, namelijk $a_{12} = 1$. Vegen we de eerste rij en de tweede kolom weg, dan houden we de cofactor van a_{12} over:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \tag{VII}$$

De waarde van deze cofactor is: $-1 \times (-2) - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$. Derhalve is de waarde van de oorspronkelijke determinant (V) van de derde orde eveneens $= 0$.

Men kan in de matrix (IV) echter een – en zelfs meer dan één – determinant van de *tweede* orde aanwijzen, die een waarde $\neq 0$ heeft. Derhalve is de rang van deze matrix 2. We hebben gezien, dat het stel vergelijkingen (I) één onafhankelijke oplossing heeft. Dit is in overeenstemming met de op blz. 37 achter letter (*b*) geponeerde uitspraak: indien $m = n$, is er één oplossing, indien $r = n - 1$.

Op analoge wijze kan men aantonen, dat er 2 oplossingen zijn, indien $r = n - 2$; 3 oplossingen, indien $r = n - 3$; enz. Voor $r = n$ is geen oplossing mogelijk. Men kan dus de volgende algemene conclusie formuleren: indien er evenveel homogene vergelijkingen zijn als onbekenden, zodat $m = n$, is het aantal onafhankelijke oplossingen $= n - r$, waarin r de rang van de matrix van alle coëfficiënten voorstelt.

Van de $n - r$ onafhankelijke oplossingen kan men, indien $n - r > 1$ is, door combinatie van oplossingen zoveel andere oplossingen maken, als men wil. De bedoelde „combinatie" geschiedt door het produkt te nemen van machten van de $n - r$ onafhankelijke oplossingen, eventueel vermenigvuldigd met een constante λ. Dergelijke door combinatie verkregen andere oplossingen noemt men „afhankelijk" t.o.v. de oorspronkelijke $n - r$ oplossingen. Zij bevatten niets nieuws en tellen daarom niet mede.

(*c*) Indien $m < n$, zodat er minder homogene vergelijkingen dan onbekenden zijn, heeft men een grote, zij het geen onbeperkte, vrijheid in het opstellen van onderling onafhankelijke oplossingen. Men kan als volgt met behulp van een voorbeeld aannemelijk maken, dat ook in dit geval het aantal onafhankelijke oplossingen $n - r$ bedraagt.

Zij het volgende samenstel van 2 vergelijkingen met 3 onbekenden gegeven:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{VIII}$$

In het algemeen is het in zulk een geval mogelijk twee van deze x'en uit te drukken in de derde: indien aan de laatstgenoemde een bepaalde waarde wordt toegekend (bijvoorbeeld a), dan liggen de beide eerstgenoemde x'en eveneens vast.

De matrix van alle coëfficiënten van (VIII) is:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{IX}$$

Laten we in dit geval eens proberen x_2 en x_3 uit te drukken in x_1. Dit is mogelijk, indien de determinant, gevormd door de kolommen van x_2 en x_3, een waarde $\neq 0$ heeft. Bij wijze van geheugensteun tekenen we een gestippeld kadertje om deze determinant heen:

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \\ -3 & \end{pmatrix}$$

De waarde van de determinant in het kader is $\neq 0$; derhalve moeten x_2 en x_3 kunnen worden uitgedrukt in x_1. Daartoe herschrijven we de vergelijkingen (VIII) eerst als volgt:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 2x_1 \\ x_2 + x_3 &= 3x_1 \end{aligned} \qquad \text{(X)}$$

Hieruit kan men x_3 elimineren door de beide vergelijkingen op te tellen:

$$3x_2 = 5x_1 \therefore x_2 = 1\tfrac{2}{3}x_1 \qquad \text{(XI)}$$

Substitutie van deze uitkomst in de bovenste vergelijking van (X) levert:

$$\begin{aligned} \tfrac{10}{3}x_1 - x_3 &= 2x_1 \therefore \\ \therefore x_3 &= 1\tfrac{1}{3}x_1 \end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Het stelsel (VIII) heeft dus één oplossing, nl. $x_2 = 1\frac{2}{3}x_1$ en $x_3 = 1\frac{1}{3}x_1$. Dit is in overeenstemming met de waarde van het verschil $n - r = 3 - 2 = 1$, waarin n het aantal onbekenden en dus ook het aantal kolommen van de matrix (IX) voorstelt en r de rang van deze matrix.

Indien $n - r > 1$ is, kan men de $n - r$ onafhankelijke oplossingen combineren tot andere oplossingen, die echter afhankelijk zijn t.o.v. de oorspronkelijke $n - r$ oplossingen en daarom niet meetellen.

(*A*) Algemene uiteenzetting van de techniek van de dimensieanalyse

Stel, dat men op grond van bepaalde, op enige voorkennis van het te onderzoeken probleem berustende overwegingen één (en niet meer dan één [1]) betrekking kan aannemen tussen n variabelen $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Laten er voorts m fundamentele grootheden zijn met dimensies

[1] Deze belangrijke restrictie houdt in, dat er in de vergelijking niet meer dan één functionele relatie tussen de grootheden mag zijn opgenomen - m.a.w., de vorm moet niet kunnen worden gesplitst in twee functies. Beschouwt men bv. de vergelijking:

$$(v - gt) + (s - \tfrac{1}{2}gt^2)^3 = 0$$

waarin v de snelheid van een vallend stoffelijk punt is, s de sedert het begin van zijn val afgelegde weg, g de versnelling van de zwaartekracht en t de tijd voorstelt, dan kan deze vergelijking worden gesplitst in:

$$v = gt \text{ en } s = \tfrac{1}{2}gt^2$$

De som

$$(v - gt) + (s - \tfrac{1}{2}gt^2)^3 = 0$$

behoeft uiteraard *niet* dimensioneel homogeen te zijn om juist te kunnen zijn. - Zie Bridgman, p. 41; ook p. 387 D van zijn encyclopedie-artikel.

$[D_1], [D_2], \ldots, [D_m]$ (gronddimensies). De dimensie van een variabele y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kan dan met behulp van de gronddimensies $[D_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ worden bepaald.

Men kan nu een zg. *dimensiematrix* opstellen, waarin elke kolom de exponenten aangeeft van de dimensies $[D_j]$, zoals zij voor de variabelen y_i gelden. Deze matrix van de exponenten a volgt hieronder.

	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
$[D_1]$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$[D_2]$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
$[D_m]$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Deze dimensiematrix geeft dus aan, dat de dimensie van de variabele y_i gelijk is aan $[D_1^{a_{1i}} D_2^{a_{2i}} \ldots D_m^{a_{mi}}]$.

Nu hebben wij tussen de grootheden y_i een betrekking aangenomen, die, in verband met het feit, dat wij de specifieke dimensieformule (II.9.1) van blz. 22 gebruiken, de vorm:

$$y_1^{x_1} y_2^{x_2} \ldots y_n^{x_n} = \text{constant}\ ^1$$

zal hebben, waarin we de constanten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zo moeten bepalen, dat dit produkt dimensieloos is. Dit laatste zal het geval zijn, indien de exponenten van $[D_1], [D_2], \ldots, [D_m]$ alle de waarde nul hebben. Deze voorwaarde leidt tot onderstaand stel van m lineaire homogene vergelijkingen in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, waaraan voldaan moet zijn [2]:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

[1] Deze constante is dus de getalwaarde van het dimensieloze produkt.

[2] De bovenste van het stel vergelijkingen heeft uitsluitend betrekking op $[D_1;]$ hierbij stellen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ de exponenten van $[D_1]$ met betrekking tot de variabelen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ voor, terwijl $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de exponenten van de y's zelf zijn.
Evenzo heeft de tweede vergelijking uitsluitend betrekking op $[D_2]$ en hier geldt een analoge interpretatie van de a's en x'en.

Dit stel vergelijkingen heeft $(n - r)$ onafhankelijke oplossingen, als r de rang van de matrix der coëfficiënten voorstelt [1]. Is deze rang $n - 1$, dan is er dus één oplossing, m.a.w. één dimensieloos produkt Π_B. In dit symbool hebben wij de index B (initiaal van BUCKINGHAM) toegevoegd om verwarring met andere betekenissen van de letter Π te voorkomen.

Natuurlijk kan men in het produkt Π_B alle exponenten met een factor vermenigvuldigen, waardoor weer een dimensieloos produkt ontstaat, dat echter niet essentieel van het eerste verschilt. Wij tellen een dergelijke nieuwe oplossing (waarvan er onbeperkt veel zijn) niet als zodanig, omdat zij niet „onafhankelijk" is (zie het slot van sectie 10).

Zijn er in een impliciet geschreven dimensioneel homogene vergelijking n variabelen, waarvan de dimensies $\neq 1$ *zijn, en bestaat er tussen deze n variabelen niet meer dan één functioneel verband, terwijl de rang van de dimensiematrix r is, dan kunnen deze variabelen worden gecombineerd tot* $n - r$ *onafhankelijke dimensieloze produkten* Π_{Bk} $(k = 1, 2, \ldots, n - r)$.

De oorspronkelijke vergelijking kan dan worden herschreven in de dimensieloze vorm:

$$F(\Pi_{B1}, \Pi_{B2}, \ldots, \Pi_{B,n-r}) = 0$$

De gecursiveerde regel noemt men wel het „uitgebreide theorema van BUCKINGHAM" of ook wel kortweg het „Π-theorema" [2]. De bovenstaande vergelijking lost men op naar één van de dimensieloze produkten, bv. Π_{B1}:

$$\Pi_{B1} = \Phi(\Pi_{B2}, \Pi_{B3}, \ldots, \Pi_{B,n-r})$$

Indien geldt:

$$\Pi_{B1} = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots$$

waarin $p_1, p_2, \ldots$ de grootheden zijn, die te zamen het dimensieloze produkt Π_{B1} vormen, kan men de zojuist vermelde verge-

[1] Op blz. 37 e.v., alwaar enkele hoofdzaken van de theorie der lineaire vergelijkingen in het kort zijn weergegeven, is reeds getracht deze stelling voor de lezer aannemelijk te maken.

[2] LANGHAAR, pp. 18, 32 e.v. Voor het bewijs van deze stelling zie pp. 55 e.v. Dit bewijs zullen wij hier niet herhalen. Het uitgebreide theorema van BUCKINGHAM is algemeen geldig. Daarnaast bestaat de zg. *vuistregel van Buckingham*, die zegt, dat een impliciet geschreven dimensioneel homogene vergelijking in n variabelen van dimensies $\neq 1$ kan worden herschreven als een vergelijking in $n - d$ dimensieloze produkten, waarbij d het aantal gronddimensies voorstelt. Deze regel is echter niet volstrekt betrouwbaar (LANGHAAR, pp. 20 en 29), zoals BRIDGMAN reeds in 1922 opmerkte (*l.c.*, p. 44). De in de tekst gegeven versie van het uitgebreide theorema van BUCKINGHAM is gebaseerd op LANGHAAR.

lijking herschrijven als:

$$p_1^{\alpha} = p_2^{-\beta} \ldots \varphi(\Pi_{B2}, \Pi_{B3}, \ldots, \Pi_{B,n-r})$$

waarin de functie φ louter dimensieloze produkten bevat. De dimensie van p_1^{α} is nu uiteraard dezelfde als die van het produkt $p_2^{-\beta} \ldots$.

(*B*) Een voorbeeld ter toelichting

Als voorbeeld kiezen we wederom het reeds eerder besproken probleem van de enkelvoudige slinger. Wil men een vergelijking opstellen ter „verklaring" van de slingertijd t, dan kan men bv. uitgaan van het vermoeden – al dan niet langs intuïtieve weg verkregen –, dat daarbij wel de volgende verklarende veranderlijken te pas zullen komen: de massa [1] van het stoffelijke punt m, de lengte van de slinger l, de versnelling van de zwaartekracht g en de hoekamplitude Θ, zodat dus vermoedelijk zal gelden:

$$t = f(m, l, g, \Theta) \tag{II.11.1}$$

of, in impliciete vorm:

$$F(t, m, l, g, \Theta) = 0$$

Zoals op blz. 15, 23 en 25 reeds is vastgesteld, zijn de dimensies, waartoe deze veranderlijken behoren, als volgt:

$$\begin{aligned} t &\in [T] \\ m &\in [M] \\ l &\in [L] \\ g &\in [LT^{-2}] \\ \Theta &\in [1] \end{aligned}$$

De dimensiematrix van de variabelen van dimensie $\neq 1$ is derhalve:

	t	m	l	g
$[L]$	0	0	1	1
$[M]$	0	1	0	0
$[T]$	1	0	0	-2

terwijl er voorts één dimensieloze variabele is, nl. Θ (uitgedrukt in radialen). Men merke op, dat in de *eerste* kolom van de dimensie-

[1] In hetgeen volgt is de letter m niet langer het symbool voor het aantal rijen van een matrix, maar voor de massa van het stoffelijke punt van de enkelvoudige slinger.

matrix die variabele is geplaatst, welke in de eindvergelijking, die we trachten te vinden, in het linkerlid moet worden geschreven: de *afhankelijke* of „te verklaren" veranderlijke. De bedoelde eindvergelijking zal blijken overeen te komen met vergelijking (II.10.1) op blz. 25.

Beschouwing van de dimensiematrix leidt zonder moeite tot de slotsom, dat de determinant van de derde orde, die wordt gevormd door de kolommen van m, l en g, een waarde $\Delta \neq 0$ heeft [1]; derhalve is de rang van de dimensiematrix $r = 3$. Aangezien het aantal veranderlijken $n = 4$ is, kan men volgens het uitgebreide theorema van BUCKINGHAM slechts één dimensieloos produkt van de variabelen vormen; immers, $n - r = 4 - 3 = 1$.

Dit dimensieloze produkt kan men algemeen als volgt schrijven:

$$\Pi_B = t^{x_t} . m^{x_m} . l^{x_l} . g^{x_g} = \gamma \qquad \text{(II.11.2)}$$

waarin γ een numerieke constante voorstelt. Toepassing van de dimensieanalyse leert ons de waarden van de x-en (de exponenten van de veranderlijken) kennen, doch niet die van γ; deze numerieke constante kan slechts met behulp van de desbetreffende vakwetenschap, *i.c.* de natuurkunde, worden bepaald.

Beschouwing van de drie rijen van de dimensiematrix leert, dat het middelste lid van (II.11.2) slechts dimensieloos kan zijn, indien:

$$[L^{x_l + x_g} . M^{x_m} . T^{x_t - 2x_g}] = [1] \qquad \text{(II.11.3)}$$

waarvoor is vereist, dat zal gelden:

$$\begin{aligned} x_l + x_g &= 0 \\ x_m &= 0 \\ x_t - 2x_g &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.11.4)}$$

Men merke op, dat de coëfficiënten in de eerste vergelijking van (II.11.4) overeenstemmen met de elementen in de eerste rij van de dimensiematrix; evenzo stemmen de coëfficiënten in de tweede

[1] Indien niet alle, maar wel ten minste één determinant met rang r van de dimensiematrix een waarde $\Delta \neq 0$ hebben resp. heeft, zorge men er steeds voor de kolommen van de dimensiematrix zodanig te groeperen, dat de meest naar *rechts* liggende determinant met rang r van de matrix een waarde $\Delta \neq 0$ heeft. Bovendien zorge men er, zo mogelijk, voor, dat de „te verklaren" variabele in de meest *linkse* kolom staat. Dit laatste is slechts dan niet mogelijk, indien de matrix slechts één determinant met rang r en waarde $\Delta \neq 0$ heeft, terwijl de kolom van de „te verklaren" variabele deel uitmaakt van deze ene determinant met rang r.

en de derde vergelijking overeen met de elementen in de tweede resp. de derde rij van de matrix.

Het stelsel (II.11.4) bevat drie homogene lineaire vergelijkingen met vier veranderlijken. Ten einde een overzichtelijke oplossingsprocedure te verkrijgen tekenen we eerst een gestippeld kader om de het meest naar rechts geplaatste determinant met rang $r = 3$, die in de dimensiematrix voorkomt, heen. In het verlengde van de linkerzijde van dit vierkant trekken we een verticale stippellijn in de kopregel van de dimensiematrix.

	t	m	l	g
$[L]$	0	0	1	1
$[M]$	0	1	0	0
$[T]$	1	0	0	-2

We weten, dat de in het kader staande determinant een waarde $\Delta \neq 0$ heeft; derhalve moet het mogelijk zijn de exponenten van de veranderlijken m, l en g op te vatten als onbekenden en ze uit te drukken in de exponent van de variabele t. Met het oog hierop herschrijven we het stelsel (II.11.4) zodanig, dat in de linkerleden van de vergelijkingen uitsluitend de exponenten der rechts van de verticale stippellijn in de kopregel van de dimensiematrix geschreven veranderlijken voorkomen:

$$\begin{aligned} x_l + x_g &= 0 \\ x_m \qquad\qquad &= 0 \\ -\,2x_g &= -x_t \end{aligned} \tag{II.11.5}$$

De coëfficiënten in de linkerleden van deze drie vergelijkingen stemmen overeen met de elementen binnen het kader, dat in de dimensiematrix is getekend.

De oplossing van het stelsel (II.11.5) kan op eenvoudige wijze worden gevonden met behulp van de eliminatiemethode. Zij is als volgt:

$$\begin{aligned} x_m &= 0 \\ x_l &= -\tfrac{1}{2}x_t \\ x_g &= +\tfrac{1}{2}x_t \end{aligned} \tag{II.11.6}$$

Men is vrij aan x_t elke willekeurige eindige waarde toe te kennen, die verschilt van nul. Aangezien x_t de exponent van de „te verklaren" veranderlijke t is, is het handig $x_t = 1$ te stellen [1]. Daardoor gaat (II.11.6) over in:

$$\begin{aligned} x_m &= 0 \\ x_l &= -\tfrac{1}{2} \\ x_g &= +\tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{(II.11.7)}$$

Substitutie van (II.11.7) in (II.11.2) levert:

$$\Pi_B = t.m^0.l^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}} = \gamma \qquad \text{(II.11.8)}$$

waaruit volgt:

$$t.l^{-\frac{1}{2}}.g^{\frac{1}{2}} = \gamma \qquad \text{(II.11.9)}$$

Nu bevat vergelijking (II.11.1) op blz. 43 nog een veranderlijke, welke in het bovenstaande niet is verwerkt, t.w. de hoekamplitude Θ, die een dimensieloze variabele is. Deze hoekamplitude thans mede in aanmerking nemende en voor het overige (II.11.9) herschrijvende verkrijgt men bv. één van de beide volgende vormen:

$$t = \gamma.l^{\frac{1}{2}}.g^{-\frac{1}{2}} + \varphi(\Theta)$$

of:

$$t = \gamma.l^{\frac{1}{2}}.g^{-\frac{1}{2}}.\varphi(\Theta)$$

Deze beide vergelijkingen kan men ook als volgt schrijven:

$$t = \gamma.\sqrt{\frac{l}{g}} + \varphi(\Theta) \qquad \text{(II.11.10)}$$

respectievelijk:

$$t = \gamma.\sqrt{\frac{l}{g}}.\varphi(\Theta) \qquad \text{(II.11.11)}$$

In de vergelijkingen (II.11.10) en (II.11.11) bezit men twee mogelijkheden voor een grof mathematisch model van de enkelvoudige slinger, die met behulp van uitsluitend de dimensieanalyse zijn afgeleid uit een globale intuïtieve voorkennis van de verschijnselen,

[1] In dit eenvoudige voorbeeld had men ook wel direct in het begin $x_t = 1$ kunnen stellen, waardoor een kortere procedure zou zijn verkregen. Zelfs is het in *dit* voorbeeld mogelijk vergelijking (II.11.9), zonder gebruikmaking van een dimensiematrix, door „proberen" te vinden. *De in de tekst gegeven,* iets omslachtigere, *oplossingstechniek is echter de algemene,* die ook bruikbaar is, indien het verschil tussen het aantal veranderlijken en de rang van de dimensiematrix groter dan 1 is – ja zelfs, indien de dimensiematrix een „singuliere" is, d.w.z. een matrix, waarvan de rang r kleiner is dan het aantal rijen. Een voorbeeld hiervan zal men ontmoeten in hst. IV, sectie 4, bij de behandeling van de vraagschaal naar een consumptiegoed.

die wel eens van invloed zouden kunnen blijken te zijn op de slingertijd t. Hiermede is echter tevens de grens van hetgeen men met behulp van dimensieanalyse vermag te doen, bereikt. Om te kunnen uitmaken, welke van deze beide grove modellen de beste „verklaring'' van t geeft, en om tevens de gekozen variant van het grove model verder te verfijnen kan men de dimensieanalyse *niet* gebruiken. Hiertoe moet men zijn toevlucht nemen tot natuurkundig onderzoek. Zulk een onderzoek voert tot de slotsom, dat vergelijking (II.11.11) in dit geval de beste is, en voorts, dat het produkt $\gamma . \varphi(\Theta)$ bij benadering een constante is met een getalwaarde 2π. De eindvergelijking wordt dus:

$$t = 2\pi . \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(II.10.1)}$$

welke vergelijking wij op blz. 25 reeds hadden geponeerd en die aldaar kan worden geacht te zijn geciteerd uit een willekeurig leerboek der natuurkunde, in gebruik bij het v.h.m.o.-B.

De bovenstaande dimensieanalyse van de enkelvoudige slinger toont intussen reeds aan, dat de variabele m niet in de vergelijking kan optreden. Deze conclusie, die met behulp van de dimensieanalyse is verkregen, stemt overeen met hetgeen de natuurkunde hierover leert. Laat men m direct weg, dan zijn er slechts drie variabelen van dimensies $\neq [1]$, terwijl de rang van de matrix 2 is, zodat men ook in dit geval één dimensieloos produkt van de veranderlijken kan vormen.

Het praktische nut van deze procedure is vooral groot in die gevallen, waar men de functionele samenhang tussen een aantal grootheden moet bepalen, zonder dat over deze samenhang een voldoende uitgewerkte, logisch sluitende theorie bestaat, waarin men enig vertrouwen kan stellen. Om eerst een eenvoudig, zij het fictief, voorbeeld te noemen: *indien* men slechts op intuïtieve gronden zou hebben beschikt over de voorkennis, die wordt uitgedrukt door de vergelijking

$$t = f(m, l, g, \Theta) \qquad \text{(II.11.1)}$$

terwijl men echter geen sluitende natuurkundige theorie van de enkelvoudige slinger zou hebben bezeten, dan zou het heel wat experimenteerarbeid kosten langs empirische weg alsnog de vorm

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

te vinden. Het voordeel van de dimensieanalyse is, dat deze de mogelijkheid biedt langs de weg van aprioristische deductie vast te stellen, dat de massa m niet van invloed op t kan zijn (mits de „intuïtieve voorkennis" juist is!), terwijl de vorm $\sqrt{\frac{l}{g}}$ langs dezelfde weg kan worden gevonden. Derhalve is het nu niet meer nodig te experimenteren met m en g [1]. Men behoeft slechts de vorm van $\gamma . \varphi(\Theta)$ experimenteel te bepalen. Dit bespaart de onderzoeker heel wat werk.

LANGHAAR deelt mede [2], dat toepassing van de dimensieanalyse het experimentele onderzoek van modellen van scheepsschroeven e.d. zodanig kan beperken, dat de kosten van het onderzoek aanzienlijk lager zijn, dan zonder gebruikmaking van dimensieanalyse het geval zou zijn geweest.

Nu rijst de voor economisten interessante vraag, of toepassing van de dimensieanalyse in de economische theorie en bij het econometrische onderzoek eveneens tot vereenvoudiging kan leiden en of er daarnaast misschien nog andere praktische voordelen zijn verbonden aan het gebruik van deze techniek. In hoofdstuk IV zullen we deze vraag onderzoeken. Voordat dit kan geschieden, moet echter eerst de mogelijkheid van toepassing van het begrip dimensie in de economie worden onderzocht en aangetoond; dit laatste is de doelstelling van hoofdstuk III.

[1] Experimenteren met g kan geschieden door van plaats te veranderen of door de slinger in een roterend vat te plaatsen.

[2] LANGHAAR, pp. 1, 2, 60 e.v.