PRINCIPI D'EQUIVALENZA GEOELETTRICA ED ERRONEITÀ DI ALCUNE LEGGI DI COMPOSIZIONE NEI SONDAGGI ELETTRICI SU TERRENI A PIÙ STRATI (*)

di ARNALDO BELLUIGI (**)

Riassunto — L'A. espone a titolo di sintesi, alcuni propri risultati che riguardano le questioni dei principi d'equivalenza nei sondaggi elettrici, e l'erroneità di alcune leggi di composizione relative a terreni a più strati.

Summary — The Author explais as a synthesis come own results about the equivalence principles of the electric soundings and the erronousness of some composition laws regarding grounds with more layers.

Zusammenfassung — Der Verfasser erklärt als Synthese einige Ergebnisse über die Equivalenzgrundlageu der elektrischen Sondierungen und den falschen Inhalt einiger Verteilungsgesetze betreffend die Boden mit mehrerer Schichten.

1 — In una Memoria presentata al Congresso Minerario Italiano del 1948 sui *Principi d'equivalenza*, per l'interpretazione delle curve di *resistività apparente* ρ_s nei *sondaggi elettrici*, svolgemmo alcune considerazioni per rimuovere il punto morto in cui da anni si stagnava su quest'argomento.

Purtroppo da quell'epoca ad oggi non si è fatto gran che, a parte qualche pubblicazione nostrana più o meno erronea. Si sa che qualora valessero incondizionatamente i classici principi di composizione elettrica di KIRCHHOFF in parallelo e in serie (tale situazione può esistere solo per strati sottili come rigorosamente dimostrabile), i correlazionabili principi d'equivalenza varrebbero integralmente nelle loro comuni enunciazioni. Non sussistendo invece (in tutti i casi almeno) tali proprietà, le equivalenze o non esistono, o dovranno essere debitamente condizionate.

Data la complessità degli argomenti che si dovrebbero passare in esame diciamo subito che qui non possiamo che limitarci ad una rapida esposizione dei nostri vecchi e recenti risultati.

Ci riallacciamo così all'esposto del 1948, che, benchè condotto allora con elementari considerazioni fisiche, rimane punto di partenza per un esatto orientamento.

(*) Relazione presentata il 5 Aprile 1956 alla Quarta Assemblea generale della *Società Italiana di Geofisica e Meteorologia* (Genova: 5-8 Aprile 1956).

(**) Prof. ARNALDO BELLUIGI, Direttore Istituto Fisica Terrestre, Facoltà di Scienze, Università di *Perugia*.

Si abbia un terreno formato da una successione di n strati orizzontali sovrapposti estesi: potenze singole di strato h_0, h_1..., resistività effettive relative ρ_1, ρ_2,... Alimentando il suolo con corrente continua (I), con un procedimento qualsiasi di misura si risalga alla grandezza ρ_s, che, costanti a parte, si può scrivere simbolicamente:

$$\rho_s = f(h_0, h_1, \dots ;\ \rho_0,\ \rho_1, \dots) . \tag{1}$$

Un'enunciazione empirica dei principi d'equivalenza, deducibili peraltro subito dalle leggi di rifrazione delle l.d.c. (la corrente tende a *scorrere orizzontalmente* nei conduttori orizzontali compresi tra terreni resistenti, piuttosto *verticalmente* nei *livelli resistenti* poggiante su conduttori) (v. Fig. 1), viene formulata nel seguente modo:

a) se le resistività singole ρ_0, ρ_1 ... degli strati più superficiali (poggianti su un substrato isolante ρ_s), sono relativamente piccole, le ρ_∞ « sembrano dipendere » più che dalle grandezze h_i, ρ_i separatamente prese, dai loro rapporti h_i/ρ_i, in simboli:

$$\rho_s = f(h_0/\rho_0,\quad h_1/\rho_1 \dots) ;\quad \rho_i \ll \rho_\infty . \tag{2}$$

b) se, al contrario, le ρ_i sono maggiori di quella del substrato σ_∞, le ρ_s « sembrano dipendere » invece dai prodotti ($h_i\ \rho_i$); in simboli:

$$\rho_s = f(h_0\rho_0,\quad h_1\rho_1, \dots) ;\quad \rho_i \gg \rho(0)\ (= \sigma_\infty) . \tag{3}$$

Tutto ciò è stato riconosciuto con casistiche nel tracciamento dei diagrammi teorici di resistività apparente, ove serie di curve, calcolate con diversi valori di spessore e di resistività effettiva degli orizzonti, possono sovrapporsi; quindi tali diagrammi non permettono unicità di soluzioni nei riguardi di (h_i, ρ_i).

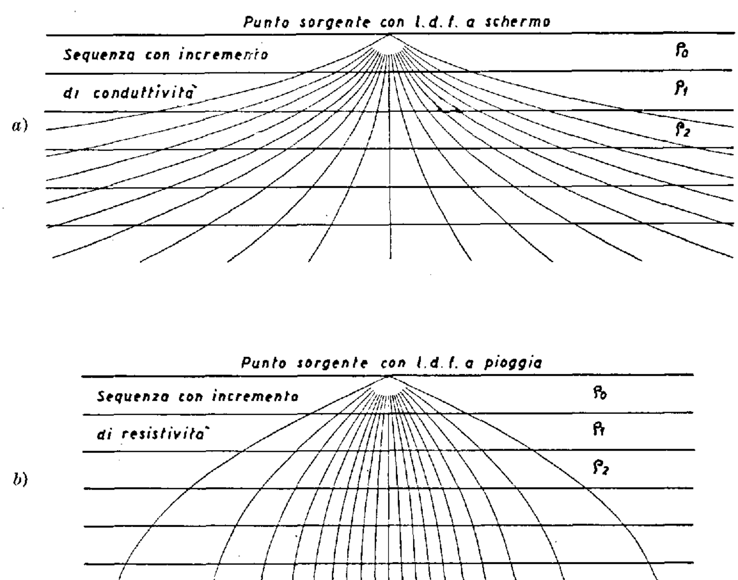

Fig. 1 (*a* & *b*)

Questi motivi sono stati poi ripresentati, specie dalla scuola SCHLUMBERGER a più riprese, sotto varie modulazioni: un'orizzonte sepolto (di spessore qualsiasi, sic !), a seconda che si verifichi la proposizione *a*) o *b*), sarebbe meno bene caratterizzato dal suo spessore h_n e dalla sua resistività ρ_n, singolarmente presi, che non dai parametri $C_n = h_n/\rho_n$ (conduttanza unitaria orizzontale), o $R_n = h_n\rho_n$ (resistenza verticale unitaria), parametri di ovvia indeterminazione perciò per h_n e ρ_n.

In coperture conduttive e base isolante, C_n avrebbe preponderanza su R_n, viceversa in coperture resistive a base conduttiva, R_n prevarrebbe su C_n trascurabile. Solo una riserva è stata avanzata circa la validità delle *a*) e *b*), subordinata, nel problema dei 3 strati ad es., a limitazioni di spessore h_2 dell'interstrato, che dovrebbe essere notevolmente superiore alla potenza del suo tetto.

Se infatti h_2/h_1 costituisse un rapporto alto, si sa che in tal caso si può determinare con l'esattezza che si vuole la resistività effettiva e la profondità del 2° strato impiegando ad es. cataloghi di curve (ρ_s) a 2 strati. Se invece il rapporto degli spessori h_2 e h_1 è basso, questo impreciso condizionamento implica l'esistenza di un interstrato « quasi sottile » quindi « equivalenze », per quel che abbiamo accennato. D'altra parte se il ramo iniziale ρ_s non raggiunge il valore asintotico ρ_2, la questione dell'interpretazione univoca o meno di tali profili, rimane del tutto oscura, come tante altre analoghe del resto, se non si conoscono i limiti in cui si verificano i principi d'equivalenza. Per di più si ritiene addirittura da molti che tali principi siano esatti entro limiti abbastanza ampi, e in tal caso le due proposizioni *a*) e *b*) importano cosìfatte indeterminazioni geometriche e fisiche substrutturali, da non poter risalire per nessun motivo ad indicazioni nè di profondità, nè di costituzione minero-litologica degli orizzonti.

Con semplici misure in superficie di « tensione elettrica », si potrebbe solo, d'uno strato sepolto, indicare la sua C_n o la sua R_n. E se pure tali riconoscimenti di soluzioni plurime sono talvolta attenuabili, con ausili di natura diversa (carotaggi fisici, dati geologici), il « sondaggio elettrico », che già è un procedimento di segnalazioni incerte e per così dire « sfocate », degraderebbe ancor più ad « *indicazioni stocastiche* », praticamente inutilizzabili.

2 — Ciò premesso ricordiamo il nostro esame fisico della proposizione *a*): dire che le varie resistività ρ_i degli strati superficiali sono molto piccole rispetto a quella del supporto (isolante al limite), si vuole significare che in siffatta copertura di terreno i filetti di corrente corrono tutti negli strati superficiali, parallelamente tra loro e alla superficie, purchè si considerino ovviamente da una certa distanza in poi dai poli energizzanti. Situazione uniforme di densità di corrente rigorosa allora solo se asintotica, alquanto meno se rilevata con dispositivi di misura simmetrici rispetto al centro delle tesate. Tracciamo pertanto una linea chiusa, di lunghezza l_1, in superficie, normalmente alle l.d.c. di un bipolo AB sufficientemente spaziato (v. Fig. 2).

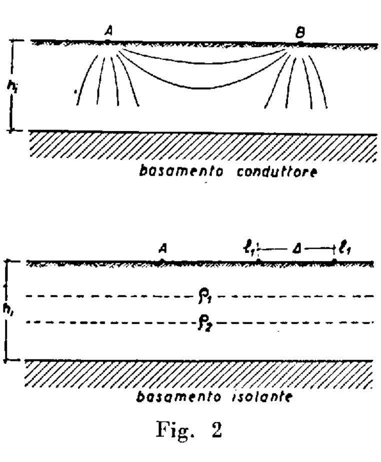

Fig. 2

Sia S_1 l'area (laterale) del cilindro che s'ottiene spostando verticalmente verso il basso l_1, fino a raggiungere il substrato isolante: essa risulterà sensibilmente equipotenziale. Analogamente S_2 sia una 2.a superficie equipotenziale, prossima a S_1, pur di lunghezza l_1. Sia V la d.d.p. tra S_1 e S_2 reciprocamente distanti Δ. Poichè la corrente totale I, che attraversa il terreno, si suddivide in flussi parziali i_0, i_1, ..., attraversanti gli strati h_0, h_1, ..., per la legge di Ohm si hanno le seguenti relazioni:

$$V = i_0\rho_0 \quad \Delta/l_1h_0 = i_1\rho_1\Delta/l_1h_1 = \dots\ ; \quad i_0 = Vl_1h_0/\rho_0\Delta\ , \quad i_1 = Vl_1h_1/\rho_1\Delta\ .$$

$$I = \frac{Vl_1}{\Delta}\,(h_0/\rho_0 + h_1/\rho_1 + \dots)\ ; \quad V = I\Delta/l_1\Sigma\,(h_i/l_i)\ ,$$

da cui la d.d.p. totale V tra gli elettrodi, e ρ_s saranno dati da:

$$\mathfrak{B} = \Sigma V = I\Sigma\,\frac{\Delta}{l_1}/\Sigma\left(\frac{h_i}{\rho_i}\right)\ ; \quad \rho_s = \mathfrak{B}/I \tag{4}$$

e ciò in conformità con la tesi *a*), enunciante *la validità del «principio di composizione in parallelo di* Kirchhoff ».

Veniamo alla proposizione *b*), che riguarda invece strati sepolti molto conduttivi rispetto quelli a tetto (al limite basamento infinitamente conduttivo). I filetti di corrente, che escono da un elettrodo, raggiungono (v. Fig. 1-*a*), con percorso più o meno verticale, la base, la percorrono per un certo tratto, e quindi attraversano verticalmente il terreno per rifluire all'altro elettrodo. Considerato pertanto un generico filetto di corrente, dette S_0, S_1 ... le sue sezioni in corrispondenza dei diversi strati sovrastanti al letto, la sua resistenza complessiva, (trascurando quella del letto ∞), si scriverà:

$$2\,(h_0\rho_0/S_0 + h_1\rho_1/S_1 + \dots) = 2\Sigma R_n/S_n$$

il coefficiente (2) giustificandosi col fatto che il filetto di corrente attraversa due volte il terreno. Per la ρ_s totale osservando che i filetti di corrente constano cadauno di parti in serie, collegati alla loro volta in parallelo, si avrà:

$$\rho_s = 2/\Sigma\,[1/\Sigma\,(R_n/S_n)]\ . \tag{5}$$

Il calcolo elementare delle sezioni S_n, si può condurre con riferimenti ai flussi elettrici conici, con vertici all'elettrodo (v. Fig. 2), angolo solido di apertura w, per cui si ha:

$$S_0 = \pi h^2_0\mathrm{tn}^2\alpha_0\ , \quad S_1 = \pi\,(h_0 + h_1)^2\mathrm{tn}^2\alpha_0\ ,\dots \quad \frac{\omega}{2\pi} = 1 - \cos\alpha_o,$$

(α_0 = cost. in 1.a approssimazione), quindi: $\Sigma\,(R_n/S_n) = \mathrm{ctn}^2\alpha_0/\pi_0\Sigma C_n$, e

$$\rho_s = 2/\Sigma\,[\pi_0/\mathrm{ctn}^2\,\alpha_0\Sigma C_n]\ , \tag{5'}$$

ove ricompaiono le conduttanze unitarie orizzontali C_n della (4), quindi dalla (5) o (5') non si potrà certamente derivare la formola di composizione in serie di Kirchhoff, *per cui la proposizione* b) *non si giustifica.*

2) L'argomento però non poteva esaurirsi con queste pur utili considerazioni generiche, aventi carattere soprattutto orientativo e cautelativo. È stato neces-

sario condurre per la prima volta, a quanto ci consta, un esame a fondo delle formole asintotiche d'equivalenza. Siamo partiti per questo dalla più generale formulazione del problema per la deduzione del potenziale elettrico in un suolo eccitato con c.c. a conduttività isotropa, che varia (con continuità o a salti) solo con la profondità, e che da una certa profondità a in poi, assume un valore costante ρ_{cost} (al limite infinitamente resistivo, o infinitamente conduttivo), oppure no.

Una delle impostazioni più rigorose del problema venne data dal LANGER (1), con soluzioni da noi di recente sviluppate in «Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit des Bodens bei bekannter Verteilung des Oberflächenpotential» in corso di

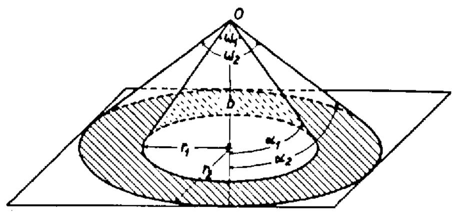

Fig. 3

stampa nei « Gerlands Beiträge zur Geoph. » e in altre successive Note sulle soluzioni del cosìdetto problema inverso geoelettrico, pure in corso di stampa.

Se I è l'intensità della c.c. immessa al suolo, da 1 o più elettrodi, per il potenziale elettrico abbiamo potuto ricavare « formole asintotiche » di agevole impiego, relative sia per basamenti a grande resistività, che a grande conduttività,

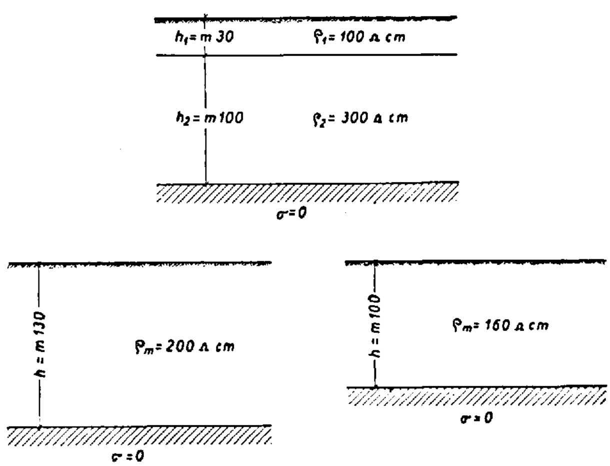

Fig. 3

espresse con funzioni di BESSEL di 2.a specie, d'ordine zero, e funzioni di STRUVE d'ordine zero.

Considerando una successione di n strati orizzontali distinti (ρ_i, h_i), infinitamente estesi, posti nell'intervallo verticale $(0, a)$ si è dedotto:

(1) R. E. LANGER, *An inverse Problem in Differential Equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1933.

1° *Substrato ad alta resistività*: è possibile sostituire asintoticamente al pacchetto di strati nell'intervallo $(0, a)$, uno equivalente, poggiante sulla stessa base ma con « spessore arbitrario », la cui conduttività si ricava dalla legge di KIRCHHOFF di « composizione in parallelo ».

Si abbiano ad esempio due strati orizzontali sovrapposti, con: $h_1 + h_2 = = a = 130$ m, $(h_1 = 30$ m, $h_2 = 100$ m), $\rho_1 = 100\ \Omega$cm ; $\rho_2 = 300\ \Omega$cm ; $\rho_n = \infty$. Lo strato unico equivalente poggiante su $\rho_n = \infty$ avrà una resistività media $\rho_m = 200\ \Omega$cm, $a = 130$ m, con la vecchia regola limitativa di KIRCHHOFF-HUMMEL; una $\rho_m = 160\ \Omega$cm, $a = 100$ m con la nuova nostra regola, generalizzante la prima, e così via, il che comporta l'equivalenza altresì dei complessi di composizione: $100/160 = 130/200 = a/\rho_m$ (v. Fig. 4).

2° *Susbrato a conduttività media o alta*: Si ottengono formole di composizione pure in parallelo come nel caso precedente, coll'unica variante che qui lo strato equivalente ha un ben determinato « spessore apparente » a_m, calcolabile secondo la formola:

$$a^2_m = 2\left[\frac{1}{2}a^2 + h_1 h_2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)\right] ; \quad a = h_1 + h_2$$

e quindi, stando alla sequenza precedente, $a_m = 170$ m; $\rho_m = 270\ \Omega$cm; v. (Fig. 5).

Facciamo presente che mentre finora l'esame delle situazioni stratigrafiche è stato sempre condotto con l'ipotesi di basi omogenee indefinite a conduttività

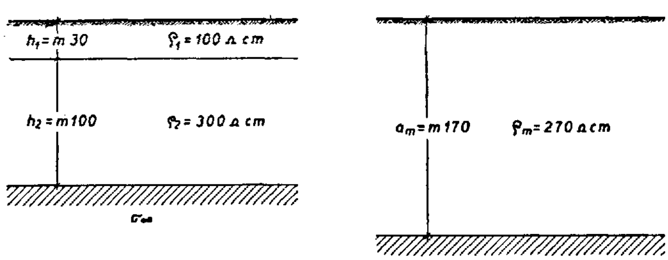

Fig. 5

uniformi, noi abbiamo potuto svolgere considerazioni che giustificano l'uso delle stesse formole di equivalenza quando all'intervallo del pacchetto di copertura $(0, a)$ segue una distribuzione non più omogenea ma arbitraria.

Inoltre il sottosuolo può contenere strati di « spessore finito » intercalati con « strati sottili » fortemente conduttivi, o fortemente isolanti: anzi queste situazioni sono spesso particolarmente importanti, inquanto ad esse si possono associare mineralizzazioni. E per strato sottile verrà inteso uno di spessore h tendente a zero, la cui conduttività σ è però talmente alta o talmente bassa che il prodotto $C = \sigma h$, o il rapporto $R = h/\sigma$ si manterranno finiti (prodotti o rapporti chiamati da qualche Autore impropriamente « potenze di strato »). Da un punto di vista strettamente analitico, i passaggi al limite (per $h \to 0$), devono avvenire contemporaneamente facendo tendere ρ all'infinito o a zero, in maniera che C o R appaiono grandezze determinate.

Ciò premesso, se alle nostre formule della funzione potenziale elettrica imponiamo le condizioni limiti caratterizzanti gli « strati sottili », se ne deducono altre permettenti di ricavare ulteriori, distinti « teoremi di composizione ». Si abbiano

n « strati sottili » orizzontali sovrapposti a partire da una profondità a', o tutti conduttivi, o tutti isolanti, interclusi tra il basamento a letto e strati finiti a tetto (v. Fig. 6).

Si suppone naturalmente che lo spessore complessivo di ciascun sandwich sia ancora tanto piccolo da potersi ritenere sottile. Se C_1, C_2, ... C_n, sono le potenze singole di tali strati quando conduttivi, R_1, R_2, ... R_n, quelle quando isolanti, allora le potenze totali C e R saranno $C = \Sigma C_i$, $R = \Sigma R_i$.

Ebbene si è potuto dimostrare ancora che, in tali casi, le caratteristiche di una « successione di strati sottili conduttivi » intervengono nel calcolo del potenziale solo attraverso la « potenza totale »: $C = \Sigma\,(h_n \sigma_n)$, e le caratteristiche di una « successione di strati sottili isolanti » intervengono solo attraverso la « potenza totale »: $R = \Sigma\,(h_n/\sigma_n)$. Da qui il teorema: due sistemi di strati sottili conduttivi (od isolanti) sono tra di loro equivalenti se hanno la stessa potenza totale. Si trova cioè che le « leggi di composizione » per gli « strati sottili » (purchè composti rimangano tali), sono analoghe a quelle di Kirchhoff in parallelo e in serie.

Abbiamo pertanto potuto dedurre rigorosamente *quattro formole asintotiche di composizione*, due per « strati di spessore finito » (una che potremmo dire di Kirchhoff-Hummel generalizzata, valevole per substrati resistivi, una nuova per

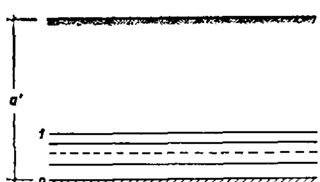

Fig. 6

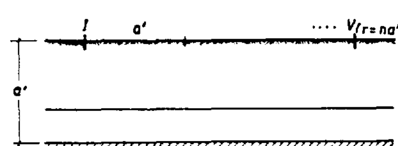

Fig. 7

substrati conduttivi che si riconduce poi alla precedente, imponendo in più una « profondità apparente calcolabile » dello strato composto sovrastante allo zoccolo), due per « strati sottili » analoghe a quelle di Kirchhoff in serie e in parallelo.

Per quel che comporta la teoria svolta allorquando si hanno « strati sovrapposti di spessore finito » a distanze elettrodiche grosso modo non troppo discoste dallo spessore della copertura (a') incombente sulla base, vien meno l'asintoticità: ($r \gg a$), e quindi cade l'indeterminazione conseguente all'equivalenza asintotica stessa (v. Fig. 7). Per determinati spessori di orizzonti, tanto più questi sono profondi, quanto più aumenta l'ambito di determinazione preasintotico.

Le ρ_s lontane dall'asintoticità risultano perciò quelle di caratterizzazione univoca della reale struttura stratigrafica, a prescindere dai vari tipi di sequenze stratiformi, dagli imbasamenti, date le generalizzazioni conseguite.

Il dominio delle equivalenze è maggiore nelle situazioni di basamenti poco profondi, mentre le specificazioni sono più sicure nei casi di orizzonti più profondi, univoche quando possibile prescindere dai substrati potenti.

Passando agli « strati sottili » invece l'equivalenza asintotica si pronuncia ovunque si misuri ρ_s (con le leggi classiche di composizione), pur dovendo essa, per definizione, esser contenuta in casistiche limitate. L'equivalenza d'uno « strato sottile », qualora si realizzasse per difetto di spessore, potrebbe giustificare la « soppressione » dello strato stesso.

Nè si devono confondere gli « strati sottili » sudefiniti, con quelli finiti di piccolo spessore; « sottili » cioè solo da un certo punto di vista pratico, qualora situati ad es. ad una maggiore profondità, obbedendo queste due categorie di strati, spessi e sottili, a leggi ben diverse di composizione.

Dopo i necessari chiarimenti teorici la fase applicativa d'interpretazione, già

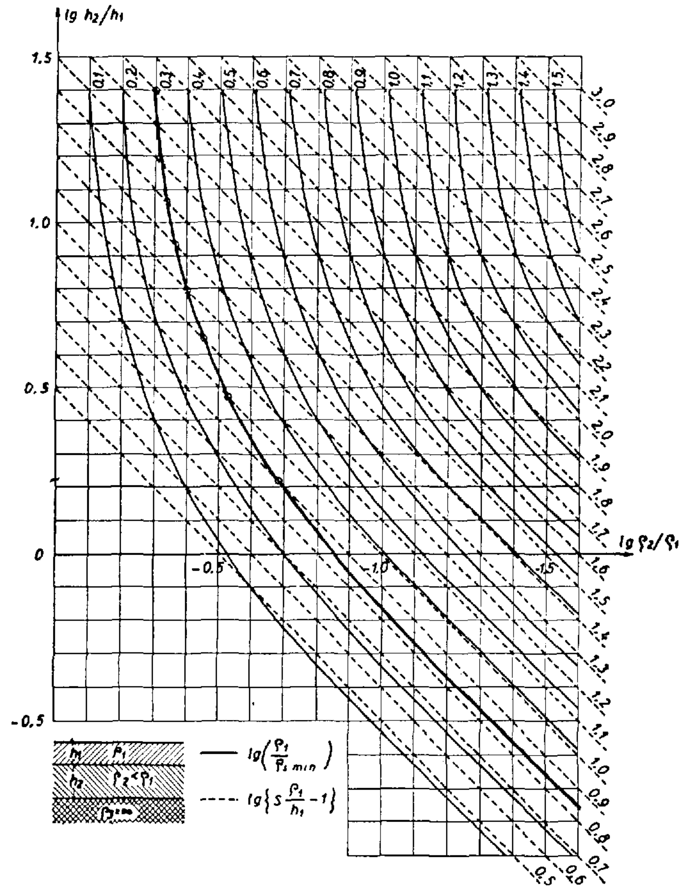

Fig. 8

accennata negli « Atti del Congresso Minerario Italiano » del 1948 ove si è dato il principio costruttivo di alcuni « nomogrammi » riportandone uno schematico da un esteso Album di cui disponiamo (Vedi Fig. 8) , è quanto mai agevole e sicura.

Data una curva ρ_s, rilevata sul terreno, si è in grado di ricavare immediatamente profondità e resistività effettive degli strati (se orizzontali sovrapposti) quando non soggetti ad equivalenze, oppure di dimostrare la non unicità delle soluzioni (almeno relativa al dispositivo elettrodico usato, non esistendo « equivalenze » non removibili, « strati sottili » a parte).

Il nomogramma esemplificativo (*A*) (v. Fig. 8), per tre strati ($\rho_2 < \rho_1$, $\rho = \infty$) (ad es. una falda acquifera poggiante su una base impermeabile molto resistiva), indica che nell'area del decorso parallelo delle curve di due famiglie, a tratto continuo e punteggiato, valgono le equivalenze, mentre nella parte superiore del grafico i punti d'intersezione delle curve delle due famiglie sono punti di determinazione e cioè le loro ascisse danno ρ_2 e l'ordinate h_2.

Ciò vuol dire che fermi restando i valori necessariamente negativi di lg ρ_1/ρ_2, inquanto $\rho_2 < \rho_1$, poichè nell'area inferiormente all'ascissa i lg h_2/h_1 risultano negativi, mentre nell'area superiore i lg h_2/h_1 sono positivi, si hanno le corrispondenze:

$\lg \frac{h_2}{h_1} = -0.2$	$\frac{h_2}{h_1} = 0.64$	$\lg \frac{h_2}{h_1} = 0.5$	$\frac{h_2}{h_1} = 3$
» $= -0.3$	» $= 0.51$	» $= 0.6$	» $= 4$
» $= -0.4$	» $= 0.40$	» $= 0.7$	» $= 5$
» $= -0.5$	» $= 0.32$	» $= 0.8$	» $= 6$
» $= -0.7$	» $= 0.20$	» $= 0.9$	» $= 8$
» $= -0.9$	» $= 0.12$	» $= 1.0$	» $= 10$
		» $= 1.2$	» $= 16$
		» $= 1.5$	» $= 35$

Perciò lo spessore h_2 è sempre inferiore a h_1, quando lg $(h_2/h_1) < 0$, con tendenza dunque a formare uno « strato sottile », per il qual caso la nostra teoria afferma che vale costantemente il principio d'equivalenza; h_2 è sempre maggiore di h_1 quando il lg $(h_2/h_1) > 0$, con caratterizzazione di « strato finito » per cui non vale il principio d'equivalenza, conforme alla possibilità di determinazioni univoche preasintotiche.

Dovendo interpretare un profilo ρ_s, rilevato sul terreno, riferibile ad una successione di tre orizzonti sovrapposti, poggianti su letto resistivo, intercluso conduttivo, il Nomogramma *A* (costruito relativamente ad un dispositivo WENNER), serve per l'immediata lettura delle profondità e resistività h_2, ρ_2 dell'interstrato quando univoche, o per la definizione della indeterminatezza di h_2, ρ_2. È evidente che in tal caso la nostra tecnica operativa non sosta nella constatazione di una semplice impossibilità di rilevamento, ma suggerisce come già detto modalità di superamento.

Entrare in merito a tutto ciò ci porterebbe un po' lontano; abbiamo solo qui voluto segnalare indirizzi italiani originali d'indagine, per interpretazioni dei sondaggi elettrici non più soffuse d'incertezze o di paradossi.

Siamo convinti che le nostre tecniche interpretative si differenziano notevolmente da quante almeno sono di pubblico dominio, più o meno fallaci sotto tanti rispetti.

(*Ricevuto il* 5 *Aprile* 1956)