DAS TYPISCHE ISOLINIENGRUNDFELD UND SEINE ANWENDUNG (2. TEIL)

BEDŘICH ŠALAMON

*Praha**)

Den ersten Teil dieser Studie [1] haben wir mit der Deduktion der singulären Eigenschaften abgeschlossen, durch die die orthogonalen Trajektorien eines Isoliniengrundfeldes in dessen isolierten Punkten und in den infinitesimal quadratischen Umgebungen um sie herum gekennzeichnet werden.

Jetzt wollen wir uns mit einer analogen Aufgabe in bezug auf die Doppelpunkte und ihre infinitesimal quadratischen Umgebungen befassen. Die Lösung geht wieder von der vereinfachten Gleichung für Dz in den erwähnten Umgebungen jedoch mit dem Unterschied aus, dass die Diskriminante ihrer rechten Seite positiv, d. h. $I^2 > 0$ ist. Es bestehen daher in den Doppelpunkten zwei reelle Asymptoten und die Isolinienschar in den Umgebungen dieser Punkte ist jetzt hyperbolisch und nicht mehr elliptisch. Überdies haben weiter die Unterschiede Dz kein einheitliches Vorzeichen mehr, sondern sie sind in den zwei gegenüberliegenden Winkeln zwischen den Asymptoten positiv und in den anderen zwei negativ. Deshalb muss die Gleichung für Dz doppelt erwogen werden und das hat den Zerfall der Isolinienschar in zwei voneinander durch die Asymptoten getrennte Komponenten zur Folge, denn für diese gilt D$z = 0$. Um die Doppelpunkte herum entsteht auf solche Weise eine hyperbolische Doppelisolinienschar. Diese wird durch die Asymptoten mit den Richtungswinkeltangenten k_a im Doppelpunkt hinreichend bestimmt. Deswegen fallen weiter die Achsen aller Kurven aus ihren beiden Komponenten auf die Symmetrieachsen beider Asymptoten, wobei diese Achsen mit den Hauptgeraden mit den Richtungswinkeltangenten k_0 im Doppelpunkt eins werden. Alle Kurven aus den beiden Komponenten sind auf diese Weise miteinander koaxial und dadurch gleichzeitig auch mit der Mitte im Doppelpunkt konzentrisch. Daraus erfolgt, dass alle jene Kurven, da sie nur innerhalb der infinitesimal quadratischen Umgebung ringsum den Doppelpunkt erwogen werden, gekrümmte Gipfelelemente auf einer jeden Kurve aus der hyperbolischen Doppelisolinienschar sein müssen.

Die soeben angeführten Gipfelelemente gehören zu ganzen Hyperbeln und diese ergänzen die Doppelschar jener Elemente zu einer Doppelhyperbelnschar, wobei diese die gleichen Eigenschaften aufweist, die wir oben für die erste von ihnen angeführt haben. Wir ersetzen nur die Differenzialgleichung für Dz durch ihr Integral, das wir überdies aus den Koordinaten x, y auf die Koordinaten ξ, η hinüberführen. Ihre Achsen setzen wir in die Hauptgeraden im Doppelpunkt, denn nach ihnen sind alle Kurven der hyperbolischen Doppelschar koaxial und konzentrisch und jede von ihnen kann deshalb nur durch die Längen ihrer reellen und imaginären Halbachse bestimmt werden. Es fallen z. B. in die Koordinatenachse ξ die reellen Halbachsen a

*) Anschrift: J. Plachty 1, Praha 5-Smíchov.

der Hyperbeln aus einer Komponente der Doppelschar; dann haben ihre imaginären Halbachsen b auf der Koordinatenachse η die Längen $b = k'_a a$, wo k'_a den absoluten Wert der goniometrischen Tangente des Winkels zwischen einer Asymptote und der ξ-Achse bedeutet. Wir können daher die einzelnen Hyperbeln aus der erwogenen Komponente nur nach dem Parameter a unterscheiden, der zwischen ihnen von 0 bis ∞ verläuft, während der Parameter b zu ihm nach der Konstante k'_a proportional ist. Diese Proportionalität bestimmt die Form der Hyperbeln und deshalb sind diese allen aus der erwogenen Komponente einander ähnlich und sind auch ähnlich gelegen, denn sie haben gemeinsame Asymptoten, d. h. sie sind zueinander homothetisch. Das analoge gilt auch, was die Hyperbeln aus der zweiten Komponente der Doppelhyperbelnschar anbelangt. Es ist üblich, diese Hyperbeln mit jenen aus der ersten Komponente und zwar derart in Paare zu stellen, dass ihre reellen Halbachsen längenmässig den imaginären Halbachsen b jener ersten gleichen. So kann man auch die Hyperbeln aus der zweiten Komponente nach dem Parameter a unterscheiden, der natürlich bei ihnen die Längen der imaginären Halbachsen ausdrückt. Die Proportionalitätskonstante k'_a kann man auf solche Weise als eine Charakteristik der Form oder Konfiguration der ganzen hyperbolischen Doppelschar betrachten. Im weiteren ersetzen wir sie in gleicher Bedeutung eindeutig durch die Charakteristik $q = 1/k'^2_a = a^2/b^2$. Mit ihrer Hilfe kann man die Gleichung der hyperbolischen Doppelschar in der Form $\xi^2 - q\eta^2 = \pm\, a^2$ schreiben. Auf der rechten Seite dieser Gleichung unterscheiden die Vorzeichen die zwei Komponenten des doppelhyperbolischen Gebildes voneinander. Der Parameter a fällt ausschliesslich in die Koordinatenachse ξ. Er ändert sich von 0 bis ∞ und bestimmt in der Bedeutung der reellen Halbachse einzelne Kurven aus einer Komponente und in der Bedeutung der Länge der imaginären Halbachse ergibt er einzelne Kurven aus der zweiten Komponente $a = 0$ definiert beide Asymptoten als einen stetigen Übergang zwischen den. Kurven beider Komponenten. Für den Parameter q gilt $0 < q < \infty$, bei $q = 1$ sind die Kurven beider Komponenten gleichseitige Hyperbeln.

Die orthogonalen Trajektorien zu den Kurven aus der analysierten Doppelhyperbelnschar haben in Normalen dieser Kurven ihre Tangenten und die Richtungswinkeltangenten dieser sind daher durch die Formel $k'_n = -\,q\eta/\xi$ bestimmt. Aus ihr wird die Gleichung der erwähnten Trajektorien in der Form $\eta = G\xi^{-q}$ oder $\xi^q\eta = G$ abgeleitet. Der Parameter q ordnet durch seine Werte den einzelnen Konfigurationen der hyperbolischen Doppelschar eindeutig die Formenart ihrer Trajektorien sowie der ganzen aus ihnen zusammengesetzten Gruppen zu. Die zweite von den angeführten Definitionsgleichungen ergibt für $q = 1$ eine Gruppe, deren Trajektorien gleichseitige Hyperbeln sind. Analog dazu werden wir die Kurven aller anderen Trajektoriengruppen allgemeine Hyperbeln nennen, deren Formenart sich eindeutig zwischen den Gruppen mit dem Wert für q ändert. Die Grösse G entstand als eine veränderliche Integrationskonstante, sie hängt vom q nicht ab und unterscheidet durch ihre Werte eindeutig die Kurven aus jeder Trajektoriengruppe. Ihren Bereich werden wir später anführen und in ihm erlangt sie auch bei jedem q den Wert $G = 0$.

In diesem Falle kann man die Trajektoriengleichung durch zwei voneinander unabhängige Gleichungen, nämlich $\xi = 0$ und $\eta = 0$ ersetzen, was die Gleichungen der Koordinatenachsen ξ, η sind. Diese Achsen und mit ihnen die Hauptgeraden des Doppelpunktes stellen so gemeinsam für alle Trajektoriengruppen ihre irreguläre Trajektorie dar, zum Unterschied von regulären Trajektorien, die in jeder Trajektoriengruppe für die nichtnullen G entstehen. Es lässt sich leicht beglaubigen, dass der Koordinatenanfangspunkt und mit ihm der Doppelpunkt des theoretisch typischen Isolinienfeldes nur zu den irregulären Trajektorien gehört, wogegen keine reguläre Trajektorie aus irgendwelcher ihrer Gruppe durch diesen Punkt durchgeht. Die isolierte Lage des Parameters G in der zweiten oben zitierten Definitionsgleichung beweist, dass die regulären Trajektorien in jeder ihren Gruppe eine Linienschar bilden. Die Regulärtrajektoriengruppen kann man auch und sogar treffender Trajektorienscharen nennen, obwohl es sich dabei ausschliesslich um reguläre orthogonale Trajektorien handelt. Die Trajektorienscharen werden durch die oben angeführte Gleichung ihrer Kurven bestimmt und durch die Formencharakteristik q dieser Kurven ändern sie eindeutig ihre Konfigurationen.

Die Analyse der Gleichung für die Trajektorienscharen führt zu weiteren interessanten Erkenntnissen, wenn man mit ihr noch zumindest die durch die Formel $k_t' = - qG\xi^{-q-1}$ gegebene Richtungswinkeltangente der geometrischen Tangenten zu Trajektorien in Erwägung zieht. Nach dieser Analyse stellen die Hauptgeraden des Doppelpunktes die für alle regulären Trajektorien aus jeder beliebigen Trajektorienschar gemeinsamen Asymptoten dar. Diese Eigenschaft hängt daher von den Werten des Parameters q nicht ab. Mit diesen Werten steht erst die Tatsache im Zusammenhange, dass durch eine jede von ihnen und durch die beiden Hauptgeraden des Doppelpunktes je eine Trajektorienschar hinreichend definiert wird. Ihre Kurven berühren beiderseitig die beiden Hauptgeraden in ihren Fluchtpunkten und diese teilen sie in vier einander kongruente Teile ein, was die Folge der rechten Winkel zwischen den Hauptgeraden ist. In jedem von diesen Winkeln entsteht aus jenen Teilen eine Trajektorienuntergruppe, die sich aus einem Quadranten in die anderen symmetrisch zu den Hauptgeraden überträgt. Es genügt daher den Parameter G nur bei den Kurven eines einzigen Quadranten zu erwägen und in dem gilt für den Parameter $0 < G \leqq \infty$. Eine weitere Eigenschaft der regulären Trajektorien besteht darin, dass sie die Asymptoten aus der Doppelhyperbelnschar rechtwinklig schneiden, der sie nach ihrer Formenart angehören. Bis auf den Fall von $q = 1$ bilden die erwähnten Asymptoten keine Symmetrieachsen der regulären Trajektorien. Regulären Trajektorien geben wir die Orientierung vom Fluchtpunkt der einen zum analogen Punkt der anderen Hauptgeraden. Bei den irregulären Trajektorien hat das nur für jene von ihnen, und dabei für jede ihre Hälfte abgesondert, Gültigkeit, die vom Anfangspunkt der Orientierung ausgehen. Jede von diesen Hälften hat die Bedeutung einer Scheidetrajektorie. Bei der zweiten irregulären Trajektorie haben ihre Hälften eine entgegengesetzte Orientierung mit dem Anfangspunkt im Doppelpunkt und sie stellen die Sammeltrajektorien dar.

Wenn wir aus der Doppelhyperbelnschar die infinitesimal quadratische Umgebung um ihre Mitte herum herausnehmen, erhalten wir ein Muster, das für die infinitesimal quadratische Umgebung des Doppelpunktes aus dem theoretisch typischen Isolinienfeld in ihm die Singularitäten der Isolinien und ihrer orthogonalen Trajektorien mit folgenden Eigenschaften bestimmt: Die Isolinien sind gekrümmte Gipfelelemente der Kurven aus der Doppelhyperbelnschar, die durch die Asymptoten des Doppelpunktes bestimmt ist und durch diese in zwei im allgemeinen gegenseitig inkongruente Komponenten geteilt ist; in jeder von diesen Komponenten sind die erwähnten Elemente zueinander homothetisch; einen kontinuierlichen Übergang zwischen den gekrümmten Gipfelelementen beider Komponenten bilden dreipunktige Elemente der Asymptoten des Doppelpunktes; die Hauptgeraden des Doppelpunktes sind Inflexionstangenten der Scheidetrajektorien, die in den erwähnten Punkt hineinlaufen, bzw. der von ihm auslaufenden Sammeltrajektorien. Die erwähnten Hauptgeraden bilden die Symmetrieachsen des ganzen soeben beschriebenen Isoliniengebildes und gleichzeitig liegen in ihnen die irregulären orthogonalen Trajektorien, von denen eine für alle Kurven aus der einen und die andere für alle Kurven aus der zweiten Komponente jenes Gebildes gemeinsam ist. Die regulären orthogonalen Trajektorien sind gekrümmte Elemente ringsum ihre Schnittpunkte mit den Asymptoten des Doppelpunktes, sie sind jedoch im allgemeinen zu diesen nicht symmetrisch, sie gehören zu den Kurven der allgemein hyperbolischen Art und die Hauptgeraden des Doppelpunktes werden für alle zu gemeinsamen Asymptoten; zwischen ihnen zerfallen sie in vier Untergruppen, die miteinander kongruent und zu den Hauptgeraden symmetrisch sind. Das Isolinien- und auch Trajektoriengebilde, die freilich nur in der infinitesimal quadratischen Umgebung des Doppelpunktes ausgebreitet sind, hängen durch ihre oben für sie angeführten Eigenschaften keineswegs von der Definitionsfunktion $z(x, y)$ des Isolinienfeldes ab. Es handelt sich bei ihnen um typische Eigenschaften. Erst ausserhalb ihres Flächenbereiches sind sie von der Form der Funktion $z(x, y)$, d. h. von der dort vorkommenden Isolinienkonfiguration abhängig.

Da im Rückkehrpunkt des Isolinienfeldes $J^2 = 0$ ist, liegt dieser Punkt auf irgendeiner parabolischen Kurve des Feldes oder auf irgendwelchem Teil von ihr, d. h. an der Grenze zwischen irgendeinem hyperbolischen und elliptischen Flächenteil im Felde. Die erwähnte Kurve berührt im Rückkehrpunkt, wie wir später beweisen werden, die zweite Hauptgerade im angeführten Punkt. Diese Gerade hat die Richtungswinkeltangente $k'_0 = z_{xy}/z_{xx}$, während für die erste Hauptgerade die Richtungswinkeltangente $k_0 = - z_{xx}/z_{xy}$ ist. Die Eigenschaften der Isolinien und ihrer orthogonalen Trajektorien um die singulären (Doppel- und isolierten) Punkte des Isoliniengrundfeldes herum, leiteten wir aus der Gleichung der infinitesimal quadratischen Umgebung dieser Punkte ab, in der bei den Doppel- als hyperbolischen Punkten $J^2 > 0$ und bei den isolierten als elliptischen Punkten $J^2 < 0$ war. Die quadratische

Umgebung des Rückkehrpunktes ist durch eine parabolische Kurve in einen hyperbolischen und einen elliptischen Teil geteilt. Deshalb wird seine Singularität im ersten von jenen Teilen die Eigenschaften eines Doppelpunktes und im zweiten Teil die eines isolierten Punktes haben, zwischen denen jedoch bei den Eigenschaften der Funktion $z(x, y)$ ein kontinuierlicher Übergang bestehen muss. Dieser muss auf den Isolinien des Feldes zum Ausdruck kommen, die über die quadratische Umgebung des Rückkehrpunktes übergehen, denn sie verlaufen über die parabolische Kurve kontinuierlich. Wir haben bereits früher angeführt, dass diese Isolinien innerhalb der quadratischen Umgebung die Form der zumindest dreipunktigen Inflexionselemente haben und so zu stationären Isolinientangenten gehören. Eben dieser stationäre Charakter vermittelt bei den erwähnten Isolinien den kontinuierlichen Übergang zwischen dem Verlauf der Tangenten längs ihrer hyperbolischen und elliptischen Teile, d. h. zwischen der Art der Krümmung jener und dieser Teile. Über diese Krümmungen entscheidet jedoch nicht mehr die Gleichung der quadratischen, sondern erst der kubischen Umgebung des Rückkehrpunktes, nach der sich in ihm dann auch die Konfiguration der orthogonalen Trajektorien richtet.

Zu den Doppelpunkten gehören immer zwei real verschiedene Asymptoten. Sie gehen in den Rückkehrpunkten in entgegengesetzter Richtung ineinander und bilden so eine Halbgerade mit der Doppelrichtungswinkeltangente $k_a = - z_{xx}/z_{xy}$. Es ist dies gleichzeitig die Isolinientangente im Rückkehrpunkt und sie identifiziert sich mit jener Hälfte der ersten Hauptgerade desselben Punktes, die auf der hyperbolischen Seite der parabolischen Kurve liegt.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der singulären Eingenschaften der Isolinien, die diese in der infinitesimal quadratischen Umgebung ringsum den Rückkehrpunkt haben. Die parabolische Kurve des Rückkehrpunktes teilt seine quadratische Umgebung in einen Teil auf ihrer hyperbolischen und in einen auf ihrer elliptischen Seite. In jedem von diesen Teilen äussert sich die gesuchte Singularität anders. Für beide Teile sind die beiden Hauptgeraden des Rückkehrpunktes gemeinsam, aber die hyperbolische und elliptische Hälfte der ersten von ihnen unterscheidet sich durch ihre Bedeutung. Die hyperbolische Hälfte erwähnten wir bereits im vorigen Text, die elliptische Hälfte ist demgegenüber nur eine einfache Hauptgerade für den elliptischen Teil der erwogenen quadratischen Umgebung um den Rückkehrpunkt herum. Analytisch kann man aus der vereinfachten Gleichung für Dz bei $J^2 = 0$ leicht feststellen, dass in den hyperbolischen Teil der quadratischen Umgebung von den Isolinien bloss ihre dreipunktigen, d. h. einfachen Inflexionselemente fallen. Die sind beiderseits des Inflexionselementes der Rückkehrtangente ausgebreitet, sie sind zu ihm parallel, sie haben gleiche Längen und halten mit ihm die Bedeutung der einfachen Inflexionselemente an den Isolinien des Feldes ein, zu denen sie gehören. Bei jeder von diesen Kurven ist es jedoch notwendig, sie doppelt, u. zw. die eine an einer Seite des Rückkehrpunktes und die zweite an seiner anderen Seite derart zu erwägen, dass die beiden gepaarten Elemente vom Rückkehrpunkt gleich entfernt, aber zugleich mit ihrem äusseren Ende zur parabolischen Kurve des Rückkehrpunktes verschoben seien. Durch die auf diese Art definierten Paare der Inflexionselemente wird die Singularität der Isolinien innerhalb des hyperbolischen Teiles der quadratischen Umgebung ringsum den Rückkehrpunkt ausgedrückt. — Für den elliptischen Teil der quadratischen Umgebung ist der Rückkehrpunkt ein isolierter Punkt. Um einen solchen Punkt in seiner quadratischen Umgebung herum bilden die Isolinien singulärweise, wie wir es schon erkannten, unendlich kleine, zueinander homothetische Ellipsen mit den Hauptachsen in der ersten Hauptgerade. Von diesem Gebilde kommt bei dem Rückkehrpunkt nur jener Teil zur Geltung, der auf der elliptischen Seite der parabolischen Kurve liegt. Es sind dies gewissermassen die Hälften der soeben erwähnten Ellipsen und eine jede von ihnen gehört zu einem Paar der Inflexionselemente auf dem hyperbolischen Teil der quadratischen Ungebung um den Rückkehrpunkt herum. Durch die erwähnten Halbellipsen werden die ihnen zugehörigen Paare der Inflexionselemente in Isolinien der ganzen quadratischen Umgebung ergänzt. Durch diese infinitesimalen Gebilde wird dann die Singularität der Isolinien in der ganzen infinitesimal quadratischen Umgebung des Rückkehrpunktes ausgedrückt. — In dem extremen Punkt der Interpolationsfläche oberhalb des Rückkehrpunktes entstehen zwei osculierende Gebilde der Fläche. Auf der hyperbolischen Seite der parabolischen Kurve ist das ein Zylinderparaboloid, das mit seinen Erzeugenden zur Skalarbasis parallel ist und dessen Gipfelerzeugende in die Isolinientangente des Rückkehrpunktes fällt. Auf der elliptischen Seite der parabolischen Kurve ist es ein gekrümmtes Flächenelement ringsum den Gipfel des osculierenden Ellipsoides, das längs der parabolischen Kurve das angeführte osculierende zylindrische Paraboloid berührt und mit ihm das osculierende Gesamtgebilde formiert. Anhand dieser Behelfe kann man leicht alles beglaubigen, was wir vorher in diesem Abschnitt anführten.

Durch die Folgerungen aus dem vorigen Abschnitt wollen wir jetzt die Ableitung der Singularitäten der orthogonalen Trajektorien zu den Isolinien innerhalb der infinitesimal quadratischen Umgebung um den Rückkehrpunkt des Feldes herum stützen. Auch diese Singularitäten erscheinen anders auf der hyperbolischen als auf der elliptischen Seite der parabolischen Kurve des erwähnten Punktes. Auf dieser zweiten Seite stimmen ihre singulären Eigenschaften mit den bei isolierten Punkten des Feldes aufgewiesenen Eigenschaften überein. Alle berühren sie im Rückkehrpunkt die elliptische Hälfte seiner ersten Hauptgerade und diese Hälfte gehört auch darunter. Auf dem hyperbolischen Teil der quadratischen Umgebung sind es Streckenelemente, die senkrecht auf die hyperbolische Hälfte der ersten Hauptgerade stehen und als Projektionen der orthogonalen Trajektorien des zylindrischen osculierenden Paraboloides entstehen. Diese Trajektorien sind zueinander parallel und stehen auf das Gipfelerzeugende des Paraboloides senkrecht, sowie sie mit dem parabolischen osculierenden Gipfelelement des zweiten Hauptschnittes der Interpolationsfläche in ihrem extremen Punkt oberhalb des Rückkehrpunktes übereinstimmen. Von allen diesen Trajektorien und ebenfalls von ihren Projektionen im Felde wird im Limit nur jene zur Geltung gebracht, die zum

Rückkehrpunkt gehört. Im Felde ist es ein Streckenelement der Tangente zur parabolischen Kurve, d. h. der zweiten Hauptgeraden im Rückkehrpunkt. – Die singulären Eigenschaften der Isolinien und ihrer orthogonalen Trajektorien sind wieder typisch für die infinitesimal quadratischen Umgebungen der Rückkehrpunkte, denn innerhalb der erwähnten Umgebung gelten sie bei beliebiger konkreter Form der Defininitionsgleichung $z = z(x, y)$ des theoretisch typischen Isolinienfeldes. Nach der erwähnten Gleichung regeln sich die Isolinien und ihre orthogonalen Trajektorien erst ausserhalb der angeführten Umgebung.

Eine bedeutsame quantitative Charakteristik der Isolinienfelder bildet der Vektor grad z, der zur Erfassung der Abänderungen der Skalarwerte z zwischen ihren Isolinien längs verschiedener Bahnen in ihrem Felde dient. Er wird durch die Komponenten z_x, z_y bestimmt. Durch diese wird er den Punkten (x, y) des Isolienienfeldes eindeutig zugeordnet, zwischen ihnen ändert er sich kontinuierlich, was die Grösse und Orientierung anbelangt, und bildet so ein Gradientfeld. In der Streckendarstellung geht der Vektor grad z von Punkten des Isolinienfeldes aus und in ihnen legt man ihn mit Rücksicht auf die Richtungswinkeltangente z_y/z_x seiner Orientierung in die äusseren Isoliniennormalen. Die orientierten Gradientstrecken umhüllen auf diese Weise die Kurven aus der Schar der orthogonalen Trajektorien des Isolinienfeldes und diese Schar bestimmt gemeinsam mit der Orientierung ihrer Kurven eindeutig die Richtungs- oder Orientierungskomponente des Gradientfeldes. Die Grösse des Gradienten ist $\sqrt{(z_x^2 + z_y^2)}$ und sie bildet daher die eindeutige und kontinuierliche skalare Funktion der Lage (x, y) der Punkte des Feldes, die die Intensitätskomponente des Gradientfeldes bestimmt und in diesem sind ihre Grössen nach den Intensitätsisolinien verteilt. Die Grösse des Gradienten, die bei dem längenmässig erwogenen z nulldimensional und nichtnegativ ist, kann man auch durch das Verhältnis $\mathrm{d}z : \mathrm{d}n$ ausdrücken, in dem $\mathrm{d}n$ das Element der äusseren Isoliniennormale bezeichnet. Dasselbe Verhältnis bestimmt jedoch, wie wir schon früher anführten, auch die Böschung tg σ der Interpolationsfläche oberhalb der Punkte (x, y). Mit Hilfe der an die Interpolationsfläche angewandten Behelfe der darstellenden Geometrie kann man diese Böschung und mit ihr auch die Gradientintensität graphisch bestimmen, sowie die Intensitätsisolinien konstruieren. Oberhalb dieser liegen auf der Interpolationsfläche ihre Böschungslinien.

Die Intensitätsisolinien bilden ebenfalls eine Schar und auch in ihr kommen im allgemeinen singuläre Punkte vor. Für ihre z_x, z_y gelten folgende Bedingungen: $z_x z_{xx} + z_y z_{xy} = 0$, $z_x z_{xy} + z_y z_{yy} = 0$. Am natürlichsten entspricht ihnen $z_x = 0$ und $z_y = 0$ und deshalb fallen die singulären Punkte der Intensitätsisolinien in die isolierten, Doppel- und Rückkehrpunkte der Isolinien aus dem Felde $z(x, y)$ und in ihnen ist die Grösse des Gradienten null. Wenn die Determinante J^2 beider Bedingungsgleichungen null ist, dann kommt aus ihnen die parabolische Kurve des Feldes $z(x, y)$ als eine singuläre Kurve des Gradientfeldes auf. Die Eigenschaften der auf solche Weise charakterisierten parabolischen Kurve kommen am einfachsten durch die Änderungen von grad z zum Ausdruck, die längs der orthogonalen Trajektorien des Isolinienfeldes in der Richtung ihrer Böschung verfolgt werden. Bei den Gradientgrössen handelt es sich dabei insbesondere um das Vorkommen ihrer extremen Werte. Befassen wir uns damit zunächst bei Trajektorien, die vom positiven isolierten Punkt[1]) ausgehen.

Da der Gradient in diesem Punkt den Nullwert hat und da wir seine Grösse überhaupt als eine nichtnegative erwägen, muss diese Grösse wenigstens anfangs zu irgendeinem Maximum anwachsen. Bei der eventuellen und häufigsten Fortsetzung der Trajektorie, u. zw. jetzt zwischen den hyperbolischen Punkten des Feldes, muss die Gradientgrösse anfangen zu sinken. Sie wird null, wenn die Trajektorie in einem Doppel- oder Rückkehrpunkt des Feldes endet, oder sie wird im irgendwelchen noch hyperbolischen Punkt der Trajektorie zum Minimum. Bei der eventuellen weiteren Fortsetzung der Trajektorie muss die Gradientgrösse anwachsen; wenn sie dabei das Maximum erreicht, widerholt sich nachher ein ähnlicher, soeben beschriebener Zyklus.

Analytisch beglaubigen wir die erwähnte Beschreibung, wenn wir die extremen Gradientgrössen als Funktionen der Lage (x, y) untersuchen werden, unter der Bedingung, dass durch sie gleichzeitig der Gleichung der orthogonalen Trajektorien des Isolienienfeldes entsprochen werden soll. Das Ergebnis der Untersuchung bietet eine einzige Gleichung zwischen den Koordinaten x, y in der Form

$$z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2 = 0\,.$$

Damit, dass ihr $z_x = z_y = 0$ entsprechen, befassten wir uns schon und deshalb wollen wir es jetzt nicht berücksichtigen. Da alle Glieder der Gleichung eindeutig kontinuierliche Funktionen der Koordinaten x, y sind, definiert die Gleichung drei, durch die Beziehung des Ausdrucks $J^2 = z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy}$ zur Null untereinander unterschiedene Arten der Kurven. Da weiter die Gleichung für z_x, z_y quadratisch homogen ist, bestimmt sie durch das Verhältnis z_y/z_x, d. h. durch die Richtungswinkeltangente der orthogonalen Trajektorien, die Weise, in der die Orientierung des Gradienten in jenen Punkten geändert wird, in denen die Trajektorien die einzelnen von den drei erwähnten Arten der Kurven schneiden. Die Gleichung dieser Kurven hat daher doppelte Bedeutung, sie bildet die Bedingung für nichtnulle extreme Werte der Gradientgrösse und bestimmt für sie gleichzeitig die Orientierung des Gradienten. Auf Grund dessen definiert die erwähnte Gleichung die s i n g u l ä r e n K u r v e n des Gradientfeldes. – Ihre durch die Forderung $J^2 < 0$ bedingte Art ergibt für das Orientierungsverhältnis z_y/z_x der Gradienten in seinen Punkten imaginäre Werte und deshalb kommt in den elliptischen Flächenteilen des Isolinienfeldes

[1]) Unterscheiden wir die isolierten Punkte des Isolinienfeldes im weiteren kurz als p o s i t i v e und n e g a t i v e. In den ersten hat der Skalar z maximale und in den zweiten minimale Werte in seiner elliptischen Umgebung, die durch den an ihr nächsten u. zw. geschlossenen Teil der parabolischen Kurve begrenzt ist.

keine singuläre Kurve des Gradientfeldes vor. – Für die zweite Art der erwogenen Kurven gilt $J^2 = 0$ und schon durch diese Forderung wird sie als eine parabolische Kurve definiert. Da diese Kurve einen Übergang vom elliptischen in den hyperbolischen Flächenteil bildet, erlangt die Gradientgrösse in ihren Punkten maximale und zwischen ihnen sich ändernde Werte. Das Orientierungsverhältnis z_y/z_x des Gradienten in den erwähnten Punkten wird zum Doppelwert $-z_{xy}/z_{yy} = -z_{xx}/z_{xy}$ reduziert, so dass die Tangenten zu den orthogonalen Trajektorien in ihnen Inflexionselemente haben. Die Singularität der parabolischen Kurve im Gradientfelde wird dadurch charakterisiert, dass die Gradientgrössen in den Punkten dieser Kurve zu den maximalen werden und die orthogonalen Trajektorien des Isolinienfeldes in ihnen Inflexionselemente haben, wodurch sich bei diesen Trajektorien die Folge ihres Überganges vom elliptischen in den hyperbolischen Flächenteil des Isolinienfeldes kundgibt. Beide Charakteristiken sind eindeutige und kontinuierliche Funktionen der Lage der Punkte auf der parabolischen Kurve. Wenn auf dieser Kurve ein Rückkehrpunkt des Isolinienfeldes vorkommt, fällt in seine erste Hauptgerade die Inflexionstangente der orthogonalen Trajektorie, die durch ihn durchgeht. Diese Trajektorie steht dort zugleich senkrecht auf die parabolische Kurve. – Für die dritte Art der erwogenen Kurven gilt $J^2 > 0$ und darum liegt eine solche Kurve ganz im hyperbolischen Flächenteil des Isolinienfeldes, ohne jedoch in ihm durch irgendwelchen seinen Doppelpunkt durchzugehen. Sie liegt dort jedesmal zwischen zwei verschiedenen Teilen der parabolischen Kurve, die die Grenzen des hyperbolischen Flächenteiles bilden. Aus diesem Grund erhält die Gradientgrösse in ihren Punkten und zwischen ihnen veränderliche Minimalwerte. Schon diese Eigenschaft charakteresiert die erwogene Kurve dritter Art als eine singuläre nichtparabolische Kurve im Gradientfelde, obzwar dazu möglicherweise noch andere Eigenschaften dieser Kurve beitragen. Mit ihrer Analyse, in die auch die dritten partiellen Ableitungen der Funktion $z(x, y)$ eintreten würden, befassen wir uns nicht.

Zu den singulären Kurven eines Gradientfeldes gehören noch die Scheide- und Sammeltrajektorien des theoretisch typischen Isolinienfeldes. Wir befassten uns schon mit ihren Teilen, die in die infinitesimal quadratischen Umgebungen ringsum die singulären Punkte aus dem Isolinienfeld, die auch für das Gradientfeld gemeinsam sind, einfallen. Jetzt handelt es sich um ihren Verlauf ausserhalb der erwähnten quadratischen Umgebungen. Wie in diesen, als auch im weiteren Verlauf weisen die singulären Trajektorien dieselbe wesentliche topologische Charakteristik auf; von den Scheidetrajektorien fort und in der Richtung ihrer Orientierung, d. h. in der Richtung des Rückganges der Skalarwerte auf ihnen, werden die umliegenden Trajektorien ausdrücklich und gewissermassen auf beide Seiten symmetrisch auseinandergekämmt; gegen die Sammeltrajektorien zu werden analog die umliegenden Trajektorien ausdrücklich und gewissermassen von beiden Seiten symmetrisch zusammengekämmt. Infolge dessen schneiden die singulären Trajektorien die Isolinien des Feldes in jenen von ihren Punkten, wo die Isolinien Extreme ihrer Krümmung haben. Auf den Isolinien sind es ihre lokalen Gipfel und die reihen sich zwischen den Isolinien des Feldes zueinander kontinuierlich längs der singulären Trajektorien. Längs der Scheidetrajektorien haben die Isolinien auf ihre Aussenseite konvexe Bogenelemente und längs der Sammeltrajektorien auf ihre Aussenseite konkave Bogenelemente. Auf Grund aller angeführten Merkmale kann man die analytische Gleichung der singulären Trajektorien ableiten. Die Lösung dieser Aufgabe ist kompliziert und wir befassen uns nicht mit ihr. Zur Analyse ihres Resultates wäre es überdies nötig, die innere Struktur der Funktion $z(x, y)$ bis wenigstens in ihre dritten partiellen Ableitungen zu verfolgen. – Auf die Interpolationsfläche gehen die singulären Trajektorien des Feldes in Rücken- oder Kammlinien oder in Rinnen- oder Tallinien über. Die Beziehung der singulären Fallinien zu den Höhenkurven der Interpolationsfläche stimmt mit der oben angeführten Beziehung singulärer Trajektorien zu Isolinien des Feldes überein.

Die Scheidetrajektorien laufen von positiven isolierten Punkten oder von Rückkehrpunkten des Feldes aus, bei diesen jedoch nur auf die elliptische Seite der parabolischen Kurve in ihnen. Ihre Tangenten fallen dort mit der ersten Hauptgeraden jener Punkte zusammen. Die Sammeltrajektorien laufen von den Doppel- oder Rückkehrpunkten, bei diesen jedoch nur an die hyperbolische Seite der parabolischen Kurve in ihnen, aus. Ihre Tangenten bilden dort in beiden Fällen die zweiten Hauptgeraden in den erwähnten Punkten. In den Anfangspunkten der singulären Trajektorien ist die Grösse grad z null. Eine Scheidetrajektorie, die in einem positiven isolierten Punkt beginnt und durch keinen Rückkehr- oder Doppelpunkt durchgeht, endet in irgendeinem negativen isolierten Punkt und zwar theoretisch berührungsweise zur ersten Hauptgeraden dieses Punktes. Wenn dieselbe Trajektorie in einem Rückkehrpunkt endet, nährt sie sich berührungsweise zu seiner ersten Hauptgeraden, was aber nur auf der hyperbolischen Seite der parabolischen Kurve in ihm geschieht. Wenn sie in einem Doppelpunkt endet, dann tritt das analoge ein, wie es bei dem Rückkehrpunkt der Fall war und die Näherung zum Doppelpunkt geht nur an einer Seite seiner zweiten Hauptgerade vor sich. In allen drei angeführten Fällen der Enden der Scheidetrajektorie erlangt die Grösse grad z wieder den Nullwert. Jede Sammeltrajektorie sinkt theoretisch in irgendeinen negativen isolierten Punkt. Man unterscheidet Haupt- und Nebensammeltrajektorien. Dabei erscheinen diese gegen jene und auch untereinander als Äste verschiedener Ordnungen. Der Endpunkt jeder Hauptsammeltrajektorie ist dann assymptotisch gemeinsam für alle ihre Äste. In der Regel fallen in einen negativen isolierten Punkt mehrere Hauptsammeltrajektorien und ihre Scheidetrajektorien ein, was eine komplizierte Gestaltung seiner infinitesimal quadratischen Umgebung zur Folge hat. Eine orthogonale Trajektorie, die von einem positiven isolierten Punkt, senkrecht auf alle andere von demselben Punkt ausgehende Trajektorien ausläuft, kann manchmal auf eine Isolinie in einem Punkt stossen, wo diese das vierpunktige Tangentenelement hat. Dann wird dieser Punkt zum Anfangspunkt einer Hangsammeltrajektorie und diese hat einen analogen Verlauf, wie die von einem Rückkehrpunkt ausgehende Sammeltrajektorie. – Alles, was wir soeben über die singulären

Trajektorien anführten, gilt auch für die singulären Fallinien der Interpolationsfläche. Setzen wir diese Fläche durch ihre Höhenkurven in horizontale Lage und halten wir sie für undurchlässig. Es seien in den gewöhnlichen positiven Gipfeln der Fläche die Quellen stationärer Reinpotentialströmung irgendwelcher idealen Flüssigkeit. Wenn diese Strömung in einer dünnen Schicht vor sich geht, d. h. wenn sie zweidimensional ist, stellt der Skalar $z = z(x, y)$ das Geschwindigkeitspotential und grad z die Strömungsgeschwindigkeit dar. Und weiter sind die Isolinien Äquipotentialkurven und die orthogonalen Trajektorien zu Isolinien sind Strömungskurven. Die Gesetze der geometrischen Konfiguration einer solchen Strömung führen zu den Eigenschaften der singulären Trajektorien, die wir oben beschrieben.

TANGENTEN-ISOLINIEN DES THEORETISCH TYPISCHEN ISOLINIENFELDES

Die geometrische Analyse eines theoretisch typischen Isolinienfeldes ist, soweit sie auf der Anwendung eines Gradientfeldes beruht, dadurch erschwert, dass die orthogonalen Trajektorien des ersten von diesen Feldern nicht anhand der Interpola-

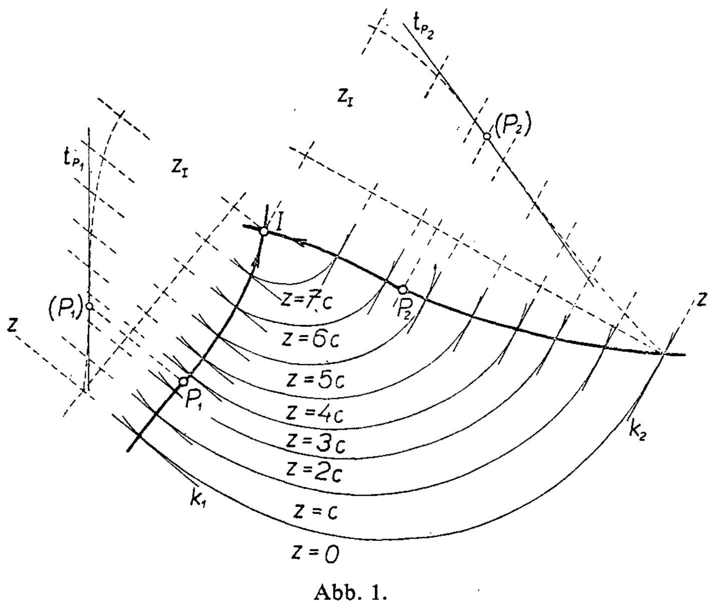

Abb. 1.

tion zwischen den Punkten konstruiert werden können. Das wird bei ihnen nur dadurch ersetzt, dass die Trajektorien senkrecht auf die Kurven des Isolinienfeldes verlaufen sollen und ihre empirische Konstruktion ist deshalb von minderer Qualität. Manches davon, wozu die orthogonalen Trajektorien bei der erwähnten Analyse als Unterlage dienen, kann man vorteilhafter durch Kurven verwirklichen, mit denen wir uns jetzt befassen wollen. Wir werden sie T a n g e n t e n - I s o l i n i e n nennen, obzwar sie nur die Richtungswinkeltangenten geometrischer Tangenten der Isolinien aus dem analysierten Feld betreffen. Wählen wir auf einer von diesen Kurven einen Punkt und in ihm eine Tangente zu ihr und führen wir mit dieser Tangente parallele Tangenten zu weiteren Feldisolinien. Dann liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten schon auf einer Tangenten-Isolinie und diese lässt sich durch die Interpolation zwischen ihnen konstruieren (Abb. 1). Wenn die Kurven des Ausgangsisolinienfeldes für dieses Feld wirklich Definitionskurven sind, dann muss die eben erwähnte Interpolation glatt verlaufen. Diese Forderung, die freilich an einer häufigeren Anzahl der Tangenten-Isolinien festgestellt wurde, bildet ein einfaches Kriterium dafür, ob das Ausgangsisolinienfeld durch seine gegebene Kurven hinreichend zumindest zwischen ihnen bestimmt ist.

Zu weiteren geometrisch analytischen Eigenschaften der Tangenten-Isolinien führt ihre Gleichung, die die Form

$$- z_x/z_y = k_t \quad \text{d. h.} \quad z_x + k_t z_y = 0$$

hat. In ihr ist k_t der veränderliche Parameter, der einzelne von den erwogenen Kurven unterscheidet und die Richtungswinkeltangenten aller möglichen gegenseitig nichtparallelen Lagen bei den Tangenten des Ausgangsisolinienfeldes angibt. Mit Rücksicht auf die Lage des Parameters k_t ausser den Funktionsausdrücken in der Gleichung der Tangenten-Isolinien kommt auf, dass diese Kurven eine Schar bilden, deren Charakter dem von orthogonalen Trajektorien ziemlich analog ist. Die Analyse dieser neuen Schar stützt sich, wie es auch bei den Trajektorien der Fall war, auf die Richtungswinkeltangente k'_t der geometrischen Tangente zu Tangenten-Isolinien. Sie ist durch die Formel

$$k'_t = -\left(z_{xx} + k_t z_{xy}\right) : \left(z_{xy} + k_z z_{yy}\right)$$

gegeben. In dieser Formel unterscheidet der Parameter k_t einzelne Tangenten-Isolinien eindeutig. Demgegenüber ändert sich die Veränderliche k'_t, trotzdem sie von k_t linear abhängig ist, nicht nur zwischen den Tangenten-Isolinien, sondern auf einer jeden von ihnen noch zwischen ihren Punkten. Es ist dies die Folge der Veränderlichkeit der zweiten Ableitungen des Skalars z in der Formel für k'_t. Das ergibt sich auch aus der Modellierung der Tangenten-Isolinien auf die Interpolationsfläche des Ausgangsisolinienfeldes. Die zueinander parallelen Isolinientangenten, die zur Konstruktion einer beliebigen von Tangenten-Isolinien dienen, gehen in gegenseitig parallele Tangenten zu den Höhenkurven der erwähnten Fläche über. Sie liegen daher auf irgendeiner Zylinderfläche, die die Interpolationsfläche längs ihrer bestimmten Kurve berührt und in diese geht die Tangenten-Isolinie durch die Modellierung über. Zu jeder Tangenten-Isolinie gehört je eine Zylinderfläche und ihre Berührungslinie mit der Interpolationsfläche. Diese Kurven bilden auf der Interpolationsfläche wieder eine durch den Parameter k_t wie die Tangenten-Isolinien, in die sie sich projizieren, charakterisierte Schar. Die angeführten zylindrischen Berührungsflächen sind zu der Skalarbasis parallel und fallen quer zu ihren Erzeugenden zu dieser Basis herab im Einklang mit der Interpolationsfläche in den

Punkten ihrer Berührungslinien mit ihnen. Die angeführten Zylinderflächen dienen in Verbindung mit ihren Berührungslinien zur graphischen Bestimmung der Böschungen tg σ in den Punkten jener Linien und dadurch auch der Gradientgrössen des Isolinienfeldes in den Punkten seiner Tangenten-Isolinien. Darin liegt die sehr wertvolle Bedeutung der soeben erwähnten Linien. Konstruktionsmässig wird diese Bedeutung folgendermassen ausgenützt: Jede von den angeführten Zylinderflächen projiziert sich in irgendwelche auf ihre Erzeugenden senkrechte Ebene als ihr Querschnitt und die Böschungen dieses Schnittes geben mit Rücksicht auf die Skalarbasis schon die Werte der Gradientgrössen in den Punkten der Tangenten-Isolinie an, zu der die Zylinderfläche gehört.

Aus der Definitionsgleichung der Tangenten-Isolinien erfolgt, dass ihr bei beliebigem Wert des Parameters k_t alle Punkte entsprechen, für die z_x und z_y im Ausgangsisolinienfeld gleichzeitig null sind. In ihm sind es nur seine isolierten, Doppel- und Rückkehrpunkte und die werden deshalb, analog wie bei den orthogonalen Trajektorien, zu singulären Punkten im Felde der Tangenten-Isolinien. Wenn sich wenigstens irgendwelche Umgebung, sei es schon eine infinitesimal quadratische, ringsum sie in allen Richtungen ausbreitet, verläuft der Parameter k_t von $-\infty$ bis ∞. Gegenseitig ändert sich mit ihm eindeutig und linear k'_t, das die Tangenten zu den in die angeführten singulären Punkte fallenden Tangenten--Isolinien bestimmt, und es ändert sich ebenfalls von $-\infty$ bis ∞. Diese Tangenten füllen deshalb in den erwähnten Punkten das ganze Strahlenbüschel an und zugleich mit ihm bilden die Tangenten-Isolinien in jenen Punkten ein volles Linienbüschel. So zeigen sich die singulären Punkte im Felde der Tangenten-Isolinien als Knotenpunkte und die sind durch beliebige zwei von den Tangenten-Isolinien bestimmt. Die Konstruktion eines solchen Paares ist ein wichtiger Analysenbehelf zum Finden der singulären Punkte im Ausgangsisolinienfeld, falls sie für dieses Feld nicht schon definitionsgemäss gegeben sind. — Solche Paare kann man jedoch noch zur Konstruktion der Grund- und Asymptotengeraden in denselben Punkten benutzen. In diesen Punkten haben die zweiten partiellen Ableitungen in der Formel für alle Werte k'_t und gleichzeitig für alle durch jene Punkte durchgehenden Tangenten-Isolinien die Bedeutung der gemeinsamen Konstanten. Darum ist die Beziehung zwischen k'_t und k_t einfach bilinear. Zu seiner geometrischen Bestimmung genügt es, in jenen Punkten zwei Tangenten-Isolinien und die einer jeden von ihnen zugehörigen Strahlen mit den Richtungswinkeltangenten k'_t und k_t zu kennen. Wenn solche Strahlenpaare für alle Tangenten-Isolinien konstruiert würden, die die erwogenen singulären Punkte durchlaufen, entstünden aus ihnen zwei vollständige und konzentrische Strahlenbüschel. Die oben angeführte bilineare Form charakterisiert diese beiden als ein-eindeutig konjugierte Büschel. Die Strahlen, bestehend aus Paaren, die solche Büschel bilden, heissen involutionsweise konjugierte Strahlen. Interpolieren wir durch den singulären Punkt eine Kreislinie mit beliebigem Mittelpunkt O. Die involutionsweise konjugierten Strahlen schneiden sie im Paare der Punkte und dann gehen die ein jedes solches Paar verbindenden Geraden alle durch den gemeinsamen Punkt S durch, der Involutionsmitte heisst. Um ihn zu finden, genügt es deshalb, nur zwei Paare der involutionsweise konjugierten Strahlen zu kennen und die haben die Richtungswinkeltangenten k_t, k'_t, die im singulären Punkt zu zwei Tangenten-Isolinien gehören. Soweit der Punkt S nicht in den Punkt O fällt, kommt unter allen involutionsweise konjugierten Strahlenpaaren nur ein einziges vor, das rechtwinklig ist und die Werte seiner Charakteristiken k_t, k'_t entsprechen der Gleichung für k_0 der Grundgeraden in den singulären Punkten. Durch das erwähnte rechtwinklige Paar sind also in den singulären Punkten ihre beiden Grundgeraden bestimmt und die schneiden die Hilfskreislinie in Punkten, die auf der Geraden SO liegen. Nur wenn die Punkte S, O eins werden, sind alle Involutionsstrahlenpaare rechtwinklig. Das tritt nur in den isolierten Kreispunkten des Ausgangsisolinienfeldes ein. – Wenn der Punkt S ausserhalb der Hilfskreislinie fällt, kann man von ihm aus zu dieser zwei Tangenten führen. Durch ihre Berührungspunkte gehen zwei Strahlen durch, für die sich die Angaben k_t, k'_t identifizieren und durch ihren Wert der Gleichung für die Richtungswinkeltangente der Asymptotengeraden des singulären Punktes entsprechen. Das erfolgt nur in den Doppel- und Rückkehrpunkten des Ausgangsisolinienfeldes. Bei den Rückkehrpunkten fällt S auf die Hilfskreislinie, so dass beide Asymptoten eins werden und mit der ersten Grundgeraden konjugiert sind. Daraus erfolgt gleichzeitig, dass in diesem Fall für alle involutionsweise konjugierten Strahlen einer von ihnen gemeinsam ist und auf dem vom singulären Punkt aus zum Punkt S verlaufenden Strahl liegt. In Abb. 2a,b,c bezeichnen h_1, h_2 die Grundgeraden und a_1, a_2 die Asymptotengeraden, während 1,1'; 2,2' gegebene konjugierte Strahlenpaare sind.

Verfolgen wir, analog wie bei den orthogonalen Trajektorien, den Verlauf der Gradientgrösse auch längs der Tangenten-Isolinien und ermitteln wir bei ihm besonders das Vorkommen der extremen Werte jener Grösse. Wir kommen so zur Feststellung, dass diese Extreme in Schnittpunkten der Tangenten-Isolinien mit den singulären Kurven zweiter und dritter Art aus dem Gradientfeld liegen. In den Schnittpunkten mit der parabolischen Kurve kommen so nicht nur die Maxima der Gradientgrösse vor, sondern es ist dort überdies gleichzeitig auch die Richtungswinkeltangente zur Tangenten-Isolinie durch die Beziehung $-z_{xx}/z_{xy}$ ausgedrückt. In diesen Schnittpunkten berührt deshalb die Tangenten-Isolinie die orthogonale Trajektorie und mit ihr geht sie inflexionsweise über die parabolische Kurve hinüber. Die Extreme der Gradientgrössen kann man an den bereits früher angeführten Querschnitten der zylindrischen Berührungsflächen zur Interpolationsfläche herausfinden, wo sie mit den Böschungen tg σ dieser Schnitte übereinstimmen. Wenn wir die Punkte der erwähnten Extreme zurück längs der Erzeugenden der zylindrischen Berührungsfläche auf die Tangenten-Isolinie hinüberführen, erhalten wir Punkte der singulären Kurven zweiter und dritter Ordnung im Gradientfelde des Ausgangsisolinienfeldes und man kann durch sie jene Kurven interpolieren. Eben darin besteht die weitere konstruktive Bedeutung der Tangenten-Isolinien. Wir bemerken noch zur Konstruktionskontrolle, dass die parabolische Kurve des Ausgangsisolinienfeldes durch die gegenseitig identischen Inflexionspunkte der orthogonalen Trajektorien und der Tangenten-Isolinien gehen muss. Inwiefern wir die Querschnitte der zylindrischen Berührungsfläche auch zur Bestimmung der Gradientgrössen benutzen, setzen wir voraus, dass der Skalar z nicht nur längengemäss, sondern auch im

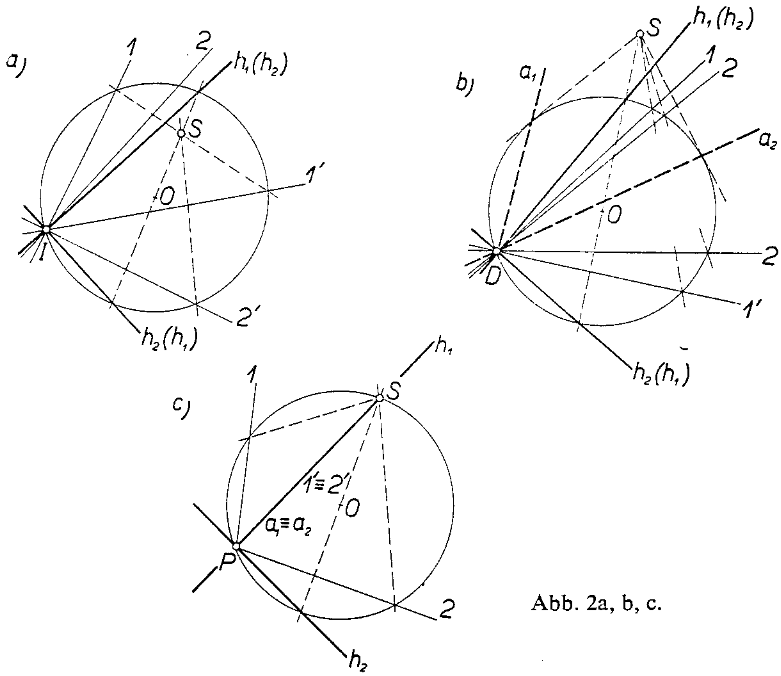

Abb. 2a, b, c.

gleichen Masse als die Koordinate x, y erwogen wird. Wenn wir aber zu seiner wirklichen Dimension zurückkehren, hängt dieser von Längen ab, die z direkt proportionell nach irgendeinem konstanten Koeffizienten ausdrücken; analog gilt es auch dann, wenn z im anderen Mass als x, y erwogen wurde. Wenn μ den Quotienten des ersten nach dem zweiten von den dazu notwendigen Koeffizienten bezeichnet, dann muss man die aus den zylindrischen Schnitten gewonnenen Gradientgrössen auf ihre richtigen Grössen überführen und die sind μ-mal grösser als ihre konstruktivmässig gewonnenen Werte. Für die Konstruktion der oben angeführten singulären Kurven ist es nicht nötig, solche Überführung zu berücksichtigen. — Aus allem, was in diesem Absatz angeführt wurde, ergeben sich klar die Vorteile, die die Tangenten--Isolinien zur Lösung der geometrischen Analyse der Isolinienfelder darbieten.

SCHLUSSWORT

Es fragt sich nun, welche Bedeutung das theoretisch typische Isolinienfeld und seine wesentlichen Merkmale oder Eigenschaften für die geometrische Analyse der Isolinienfelder haben, wenn diese nur durch eine beliebige Auswahl empirischer Definitionsisolinien bestimmt sind. Wir befassten uns damit einigermassen schon in der Einleitung dieser ganzen Studie, während wir jetzt, wenn auch nur im grossen und ganzen, beachten wollen, welche sachliche Tragfähigkeit das typische Feld für empirische Isolinienfelder hat. Mit dem im 1. Teil dieser Studie [1] enthaltenen Stoff befasste sich theoretisch eine Reihe von Mathematikern und Geometern aus älteren Generationen, was die Applikation auf praktische Probleme anbelangt, knüpften jedoch und knüpfen bis jetzt an ihn verschiedene Physiker, Geophysiker, Geometer-Mappeure und Kartographen an. Gehen wir vom Beispiel der topographischen Schichtenlinienkarten aus, die von Mappeuren verfertigt werden. Durch die Modellierung über den Schichtenlinien soll eine Interpolationsfläche entstehen, die ein geometrisch ähnliches Modell der Terrainoberfläche sein soll. Dieses kann jedoch die erwähnte Eigenschaft bis in die Einzelheiten nicht erfüllen, die schon in bezug auf seinen Massstab nicht erfasst werden können, oder die die Interpolationsmethode der Konstruktion der Schichtenlinien aus ihren Punkten verschuldete. Die Folgen dieser beiden Umstände können wir als spontane Generalisation bezeichnen. Die Schichtenlinien in den erwogenen Karten, wenn sie vom Mappeur durch die Interpolation zwischen den Punkten konstruiert werden, pflegen noch mit den Folgen der eingeprägten Generalisation belastet zu sein. Bei der Konstruktion der Schichtenlinien glättet er aber auf ihnen auch solche Hindernisse aus, die der Massstab der Karte zwar erfassen könnte, die jedoch der Mappeur als sachlich, z. B. geomorphologisch, unwesentliche betrachtet. Das erleichtert ihm einfacheren, glatten Verlauf der Schichtenlinien. Er darf aber auf diese Weise nicht solche Hindernisse des glatten Verlaufs der Schichtenlinien unterdrücken, die sachlich von Bedeutung sind und die die Singularitäten der Terrainoberfläche in ihrer Schichtenlinienkarte vorstellen. Beide angeführten Generalisationen verfolgen das Ziel, damit die Schichtenlinien in der Karte für das Modell sowie für sein Bild in der Karte vom Definitionscharakter in dem Sinne seien, den wir diesem Begriff schon in der Einleitung der Studie gegeben haben. Die Erreichung des erwähnten Zieles lässt bloss zu, dass es in der Schichtenlinienkarte möglich sei zu ihrer Analyse geometrische Behelfe zu benutzen. Und der Weg zu diesem Ziel gedeiht am besten, wenn es zur Idee der eingeprägten Generalisation, bis auf unentbehrliche Singularitäten, wird, ein Modell in der Gestalt der topographischen Fläche zu erreichen, d. h. einer Fläche mit den gleichen Zusammenhangseigenschaften, die die Interpolationsfläche über dem theoretisch typischen Isolinienfeld aufweist. Diese Richtschnur bewährt sich tatsächlich. Die beiden angeführten Generalisationen belasten alle empirischen Isolinienfelder, wenn ihre Kurven Definitionskurven sind. Eine Analogie zum vorigen Verfahren kann man deshalb auch entweder bei ihnen als ganzen, oder zumindest in ihren einzelnen Flächenteilen benutzen. Damit wird die am Anfang dieses Absatzes gestellte Frage, wenigstens durch ein einziges, aber praktisch sehr bewährtes Beispiel, beantwortet. — Die Isolinienfelder sind zwar in den Karten horizontal, soweit es jedoch keine Plan- oder topographische Karten sind, werden sie mit den durch ihre Darstellungsmethode hervorgerufenen Deformationen belastet und diese müssen bei ihrer geometrischen Analyse berücksichtigt werden. Damit können wir uns in dieser Studie nicht befassen. Inwiefern es sich nur um die geographische Verteilung des Skalars handelt, kommt es auf die Art der Kartendarstellung überhaupt nicht an. Für die eigentliche geometrische Analyse haben die konformen Karten den grössten Vorteil, denn in ihnen werden die originellen orthogonalen Trajektorien der Isolinien wieder als orthogonale Trajektorien zu Bildern der Isolinien dargestellt. Dabei ist es aber notwendig, die aus der Karte abgeleiteten Gradientgrössen in bezug auf längenmässige Verzeichnungen der konformen Karte zu korrigieren, was jedoch bei dieser sehr einfach ist[2]).

Eingegangen am 1. 6. 1963 *Rezensent: J. Pícha*

Literatur

[1] B. Šalamon: Das typische Isoliniengrundfeld und seine Anwendung (1. Teil). Studia geoph. et geod., 7 (1963), 93.

[2]) Russische Zusammenfassung zu den beiden Teilen dieser Arbeit ist dem 1. Teil [1] beigefügt.