

Iterationsverfahren bei der konformen Abbildung

Von

W. Niethammer, Tübingen

(Eingegangen am 21. September 1965)

Zusammenfassung. Bei der konformen Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet nach der Methode von THEODORSEN tritt eine singuläre nichtlineare Integralgleichung auf. Durch Diskretisation entsteht daraus ein nichtlineares Gleichungssystem, mit dessen iterativer Lösung wir uns beschäftigen. Es wird ein Satz bewiesen, der besagt, daß das Einzelschrittverfahren doppelt so schnell konvergiert wie das Gesamtschrittverfahren (für das ein Konvergenzsatz von OPITZ, OSTROWSKI und SALTZER bewiesen wurde). Im nächsten Abschnitt wenden wir das SOR-Verfahren (Successive Over-Relaxation) auf die beim NEWTON-Verfahren in jedem Schritt entstehenden linearen Gleichungssysteme an; der Rechenaufwand kann, verglichen mit direkten Verfahren, besonders bei großen Systemen stark reduziert werden. Schließlich wird vorgeschlagen, das SOR-Verfahren direkt beim nichtlinearen System anzuwenden. Vermutungen über die „Konvergenzgrenze“ und den „optimalen Relaxationsfaktor“ werden durch ein numerisches Beispiel erhärtet.

Summary. We consider the conformal mapping of the interior of the unit circle onto the interior of a general closed curve by the method of THEODORSEN. There is to solve a singular nonlinear integral equation. By discretisation one gets a system of nonlinear equations; we examine different iterative methods of solving this system. A theorem is proved which says that the single step iteration converges twice as fast as the total step iteration (on the latter a convergence theorem of OPITZ, OSTROWSKI and SALTZER is known). In the next section we apply the SOR-method (Successive Over-Relaxation) to the systems of linear equations which appear at every step of the NEWTON-method. Compared with direct methods the computational work is reduced, especially on great systems. Finally we propose to apply the SOR-method directly to the nonlinear system. Conjectures on the „limit of convergence“ and the „optimal relaxation factor“ are confirmed by an example.

Gesamt- und Einzelschrittverfahren

Es soll das Innere des Einheitskreises $z = \exp(i\varphi)$ konform auf das einfach zusammenhängende Gebiet mit dem Rand $R: \omega = \varrho(\Theta) \exp(i\Theta)$ nach der Methode von THEODORSEN abgebildet werden. Das Hauptproblem ist dabei die Bestimmung der sogenannten Ränderzuordnungsfunktion $\Theta = \Theta(\varphi)$, die der nichtlinearen Integralgleichung

$$\Theta(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \varrho(\Theta(t)) \cdot \operatorname{ctg} \frac{(\varphi - t)}{2} dt \quad (1)$$

genügt. Diese Integralgleichung ist singulär; es ist der CAUCHYSche Hauptwert zu nehmen. Man ersetzt nun das Integral durch eine Summe (vgl. GAIER [1], S. 85ff.) und bestimmt die Funktion $\Theta(\varphi)$ nur an den Stützstellen φ_i ($i = -N + 1, \dots, N$). Faßt man dann die Funktionswerte Θ_i zu einem Vektor X und die φ_i zu einem Vektor C zusammen, so erhält man das nichtlineare Gleichungssystem

$$X = C + W \log \varrho(X), \quad (2)$$

mit dessen iterativer Lösung wir uns beschäftigen. W ist dabei eine Matrix vom Grad $2N$, $\log \varrho(X)$ der Vektor, der durch Anwendung der Funktion $\log \varrho(x)$ auf die Komponenten von X entsteht.

Hinreichend für die Existenz einer Lösung von (1) und (2) ist die Bedingung

$$\text{Max}_{-\pi \leq \Theta \leq \pi} \left| \frac{\varrho'(\Theta)}{\varrho(\Theta)} \right| \leq \varepsilon < 1, \quad (3)$$

die bedeutet, daß der Rand R „kreisähnlich„ ist.

Zunächst gilt für das Gesamtschrittverfahren

$$X^{(m+1)} = C + W \log \varrho(X^{(m)}), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

der folgende Satz, der gleichzeitig von OPITZ [4], OSTROWSKI [5] und SALTZER [6] bewiesen wurde:

Ist $\varepsilon < 1$, so konvergiert das Gesamtschrittverfahren. Es gilt, falls X die exakte Lösung ist,

$$\text{a) } \|X^{(m+1)} - X^{(m)}\| \leq \varepsilon \|X^{(m)} - X^{(m-1)}\| \quad \text{und}$$

$$\text{b) } \|X - X^{(m)}\| \leq \frac{\varepsilon^m}{1 - \varepsilon} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|.$$

Dabei wird die Norm

$$\|X\| = \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=-N+1}^N x_i^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

benutzt. Der Beweis stützt sich auf die beiden Beziehungen

$$\|WY\| \leq \|Y\| \quad \text{für alle } Y, \quad \text{und} \quad (6)$$

$$\|\log \varrho(X) - \log \varrho(Y)\| \leq \varepsilon \|X - Y\| \quad \text{für alle } X, Y. \quad (7)$$

Diese beiden Beziehungen gewährleisten, daß die durch (4) vermittelte Abbildung kontrahierend ist; der Beweis entspricht dem Beweis für die Konvergenz der NEUMANNschen Reihe der Integralgleichung (1).

Legt man nun für das Einzelschrittverfahren eine bestimmte Anordnung der Gleichungen fest (s. u.), so läßt sich der folgende Satz aufstellen (X^m ($m = 0, 1, \dots$) seien die Iterationsvektoren des Einzelschrittverfahrens):

Satz: Das Einzelschrittverfahren konvergiert genau dann, wenn das Gesamtschrittverfahren konvergiert. Ist $\varepsilon < 1$ und ist X die exakte Lösung von (2), so gilt:

$$\text{a) } \|X^{m+1} - X^m\| \leq \varepsilon^2 \|X^m - X^{m-1}\|,$$

$$\text{b) } \|X - X^m\| \leq \frac{\varepsilon^{2m}}{1 - \varepsilon^2} \cdot \|X^1 - X^0\|.$$

Beweis: Wir benutzen, daß die Matrix W „schachbrettförmig“ ist, d. h. wenn w_{ij} ($i, j = -N+1, \dots, N$) die Elemente von W sind, dann ist $w_{ij} = 0$, falls $i - j$ gerade ist. Dabei nehmen wir noch o. B. d. A. an, daß N gerade ist und ordnen nun die Gleichungen des Systems (2) so um, daß links zuerst die x_i mit ungeradem i und dann die mit geradem i kommen. Innerhalb jeder einzelnen Gleichung werden auf der rechten Seite die Summanden in gleicher Weise vertauscht. Schreiben wir nun das System wieder in Vektorschreibweise, so hat die neue Matrix, die wir wieder W nennen, die Gestalt

$$W = \begin{pmatrix} O & W_Z \\ W_Y & O \end{pmatrix} \quad (0 : \text{Nullmatrix}). \quad (8)$$

Ähnlich zerlegen wir $X = Y + Z$ mit $Y^T = (x_{-N+1}, x_{-N+3}, \dots, x_{N-1}, 0, \dots, 0)$ und $Z^T = (0, \dots, 0, x_{-N+2}, x_{-N+4}, \dots, x_N)$ und entsprechend $C = C_Y + C_Z$, so daß das System (2) — wie schon ORTIZ [4] bemerkte — in die beiden folgenden Systeme zerfällt:

$$Y = C_Y + \begin{pmatrix} O & W_Z \\ O & O \end{pmatrix} \cdot \log \varrho(Z), \quad (9)$$

$$Z = C_Z + \begin{pmatrix} O & O \\ W_Y & O \end{pmatrix} \cdot \log \varrho(Y). \quad (10)$$

Beim Gesamtschrittverfahren erhalten wir nach (4) die Folgen

$$\begin{array}{ccccccc} Y^{(0)} & & Y^{(1)} & & Y^{(2)} & \dots & Y^{(2m)} & \dots \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ Z^{(0)} & & Z^{(1)} & & Z^{(2)} & \dots & Z^{(2m)} & \dots \end{array} \quad (11)$$

Die Pfeile deuten an, wie die Vektoren wechselseitig auseinander hervorgehen. Beim Einzelschrittverfahren, angewandt auf (10), erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccc} Y^{(0)} & & Y^{(1)} & & Y^{(3)} & & Y^{(2m-1)} & & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \dots & \nearrow & \searrow & \dots \\ Z^{(0)} & & Z^{(2)} & & Z^{(4)} & & & & Z^{(2m)} \end{array} \quad (12)$$

1. Iteration 2. Iteration m-te Iteration

Nach m Einzelschrittiterationen erhält man also die Vektoren $Y^{(2m-1)}$ und $Z^{(2m)}$ des Gesamtschrittverfahrens, d. h. das Einzelschrittverfahren

konvergiert praktisch — bis auf eine Halbiteration — doppelt so schnell wie das Gesamtschrittverfahren. Wir haben nun Y und Z so definiert, daß wir in (10) anstelle der dort eingeführten Matrizen auch W schreiben können (bei $\log \varrho(Z)$ sind die ersten N , bei $\log \varrho(Y)$ die letzten N Komponenten gleich 0 zu setzen). Damit läßt sich (6) auch für die Iterationsvektoren $Y^{(i)}$ und $Z^{(i)}$ heranziehen. Zusammen mit (7) erhalten wir

$$\|Y^{(2m+1)} - Y^{(2m-1)}\| \leq \varepsilon \|Z^{(2m)} - Z^{(2m-2)}\| \leq \varepsilon^2 \|Y^{(2m-1)} - Y^{(2m-3)}\|, \quad (13)$$

$$\|Z^{(2m+2)} - Z^{(2m)}\| \leq \varepsilon \|Y^{(2m+1)} - Y^{(2m-1)}\| \leq \varepsilon^2 \|Z^{(2m)} - Z^{(2m-2)}\| \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Beginnen wir nun beim Einzelschrittverfahren mit einem beliebigen Ausgangsvektor $Y^{(-1)}$ und berechnen daraus nach (10) den Vektor $Z^{(0)}$, so können wir die Iterationsvektoren

$$X^m = Y^{(2m-1)} + Z^{(2m)} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

eingeführen. Nach (5) gilt dann

$$\|X^m\|^2 = \|Y^{(2m-1)}\|^2 + \|Z^{(2m)}\|^2, \text{ und} \quad (15)$$

$$\|X^{m+1} - X^m\| \leq \varepsilon^2 \|X^m - X^{m-1}\| \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Mit (16) haben wir die Behauptung a) unseres Satzes bewiesen; daraus folgt die Beziehung b) wie beim Gesamtschrittverfahren (GAIER [1], S. 88).

Newton-Verfahren

Man kann das Gleichungssystem (2) auch nach dem NEWTON-Verfahren lösen. Dabei geht man von einem Ausgangsvektor X^0 aus, bestimmt dessen Residuum aus

$$X^0 - W \log \varrho(X^0) - C = R^0 \quad (17)$$

und versucht (vgl. GAIER [1], S. 90ff.), die Näherung durch einen korrigierten Vektor $X^1 = X^0 + H^0$ zu verbessern. H^0 erhält man, indem man Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, aus dem linearen Gleichungssystem

$$H^0 - W D^0 H^0 = -R^0. \quad (18)$$

D^0 ist eine Diagonalmatrix mit den Elementen $d(x_i^0) = \varrho'(x_i^0)/\varrho(x_i^0)$, $i = -N+1, \dots, N$. Mit $X^1 = X^0 + H^0$ bestimmt man wieder R^1 usw. Hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens ist wieder die Bedingung $\varepsilon < 1$. Es liegt quadratische Konvergenz vor.

Wir wollen nun das lineare System (9) mit dem SOR-Verfahren (Successive Over-Relaxation) oder Relaxation in Einzelschritten anwenden. Schreiben wir nun H anstelle von H^0 usw. und ist $WD = L + U$ die Zerlegung von WD in eine untere und eine obere Dreiecksmatrix, so lautet der Ansatz für das SOR-Verfahren

$$H^{(m+1)} = -dH^{(m)} + (1+d)(LH^{(m+1)} + UH^{(m)} - R), \quad -1 < d < 1, \\ m = 0, 1, \dots; H^{(0)} = R. \quad (19)$$

Für $d > 0$ spricht man auch von Überrelaxation, für $d < 0$ von Unterrelaxation.

Satz: Ist $\varepsilon < 1$, so konvergiert das SOR-Verfahren, angewandt auf (17), für $-1 < d < d_g = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Beweis: Die Matrix W hat die Eigenwerte $0, \pm i$ (GALER [1], S. 78ff.). D hat den Spektralradius ε (Spektralradius: Maximum der Beträge der Eigenwerte). Daraus folgt, daß WD einen Spektralradius besitzt, der höchstens gleich ε ist. Weiter benutzen wir, daß neben W auch WD die Gestalt (8) besitzt. Wir können ein Ergebnis von YOUNG [7] anwenden, das besagt: Hat bei einem linearen Gleichungssystem der Form (18) die Matrix WD die Gestalt (8) (WD ist eine Matrix mit der Eigenschaft „A“) und liegen alle Eigenwerte μ dieser Matrix in der komplexen μ -Ebene innerhalb der Ellipse

$$\operatorname{Re}(\mu)^2 + \frac{\operatorname{Im}(\mu)^2}{\varepsilon^2} = 1, \quad (20)$$

so konvergiert das SOR-Verfahren für $-1 < d < d_g = (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Nun liegen aber die Eigenwerte von WD innerhalb des Kreises mit Radius μ und dieser liegt für $\varepsilon < 1$ innerhalb der Ellipse (20), so daß die Behauptung bewiesen ist.

Bei der Anwendung des SOR-Verfahrens interessiert am meisten der „optimale Relaxationsfaktor“ d_0 , d. h. derjenige Wert von d , bei dem am wenigsten Iterationen zur Erreichung einer bestimmten Genauigkeit notwendig sind. Zu dieser Frage wollen wir einige zwar nur heuristische, aber numerisch erfolbringende Beobachtungen anschließen. Über den optimalen Relaxationsfaktor bei Matrizen mit der Eigenschaft „A“ gibt es u. a. Arbeiten von YOUNG [7], KJELLBERG [2] und NIETHAMMER [3]; die beiden letzteren wollen wir heranziehen.

Zunächst ist W schiefsymmetrisch, aber nicht WD . Sind w_{ij} die Elemente von W und $d(x_i)$ diejenigen der Diagonalmatrix D ($i, j = -N+1, \dots, N$), so hat ein Element des symmetrischen Anteils von WD die Form

$$0,5 \cdot w_{ij} \cdot (d(x_i) - d(x_j)) = \frac{1}{2N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} (i-j) \cdot (d(x_i) - d(x_j))$$

und ein Element des schiefsymmetrischen Anteils von WD die Form

$$0,5 \cdot w_{ij} \cdot (d(x_i) + d(x_j)) = \frac{1}{2N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} (i-j) \cdot (d(x_i) + d(x_j)).$$

Nun ist $w_{ij} = \frac{1}{N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} (i-j)$ betragsmäßig relativ groß, falls $i-j$ in der Nähe von 0, N oder $-N$ ist. Für diese Fälle wird aber die Größe $(d(x_i) + d(x_j))$ die Größe $(d(x_i) - d(x_j))$ dem Betrage nach überwiegen (weil die Funktion $d(x)$ stetig und periodisch ist), m. a. W. der schiefsymmetrische Anteil von WD wird den symmetrischen Anteil stark über-

wiegen. Dies wiederum bedeutet, daß die Eigenwerte μ von WD in einem relativ schmalen Streifen längs der imaginären μ -Achse liegen.

Man kann nun einer Abbildung bei KJELLBERG [2] entnehmen, daß bei gleichem Spektralradius es für die Lage des optimalen Relaxationsfaktors wenig ausmacht, ob die Eigenwerte auf einem Streifen längs der imaginären Achse oder auf der imaginären Achse selbst liegen. Der letzte Fall ist aber von NIETHAMMER [3] untersucht worden. Wir können jenes Ergebnis als Vermutung übernehmen:

Das SOR-Verfahren, angewandt auf (10), konvergiert „ungefähr optimal“ für

$$d_0 = - \left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \right)^2.$$

Numerische Untersuchungen erhärten diese Vermutung. Es zeigt sich, daß man mit jedem anderen d -Wert als d_0 mindestens gleichviel oder aber mehr Iterationen braucht, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen. Während der Rechnung setzt man

$$\text{Max}_{i=-N+1, \dots, N} |d(x_i)| = \varepsilon$$

und bestimmt daraus d_0 . Im allgemeinen reichen 6 bis 8 Iterationen, um eine genügend genaue Näherung für die Lösung des Gleichungssystems zu erhalten. Beim iterativen Vorgehen kann man auch die besondere Gestalt der Matrix WD berücksichtigen, während man bei der Elimination die „Schachbrettform“ nicht ausnutzt. Da W zyklisch ist (GAIER [1], S. 80), braucht man beim SOR-Verfahren die Matrix nicht zu speichern. Für $N = 6$ ist der Rechenaufwand bei Elimination und SOR-Verfahren etwa gleich, während das SOR-Verfahren für $N = 18$ etwa $\frac{1}{3}$ und für $N = 36$ nur $\frac{1}{6}$ der Rechenoperationen benötigt, die bei Elimination nötig sind (für $\varepsilon \geq 1$ wird das Verhältnis etwas ungünstiger, obwohl auch dann das SOR-Verfahren noch konvergiert).

Das SOR-Verfahren beim nichtlinearen System

Zum Schluß gehen wir noch kurz auf die von GAIER ([1], S. 105) aufgeworfenen Fragen ein, ob sich nicht bei diesem speziellen nichtlinearen System das SOR-Verfahren ähnlich erfolgreich anwenden läßt wie bei gewissen linearen Systemen. Drei Indizien sprechen dafür: Einmal zerfällt das nichtlineare System in die beiden Teilsysteme (9) und (10); bei linearen Systemen ist es gerade dieser Sonderfall, bei dem das SOR-Verfahren theoretisch untersucht und erfolgreich angewandt wurde (Matrizen mit der Eigenschaft „A“). Daß diese Übereinstimmung nicht nur äußerlich ist, zeigt unser erster Satz über das Einzelschrittverfahren, der für Systeme dieser Art im linearen wie im nichtlinearen Fall gleich lautet. Schließlich kann man sagen, daß die beim NEWTON-Verfahren entstehenden linearen Gleichungssysteme — wenn man so will — eine „Näherung“ des nichtlinearen Systems in der Nähe der Lösung darstellen. Und bei diesen läßt sich, wie wir vorhin sahen, das SOR-Verfahren erfolgreich anwenden.

Im nichtlinearen Fall lautet der Ansatz für das SOR-Verfahren, wenn wir von den Teilsystemen (9) und (10) ausgehen,

$$Y^{m+1} = -d Y^m + (1+d) \left(C_Y + \begin{pmatrix} 0 & W_Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \log \varrho(Z^m) \right), \quad (21)$$

$$Z^{m+1} = -d Z^m + (1+d) \left(C_Z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W_Y & 0 \end{pmatrix} \cdot \log \varrho(Y^{m+1}) \right) (m = 0, 1, \dots). \quad (22)$$

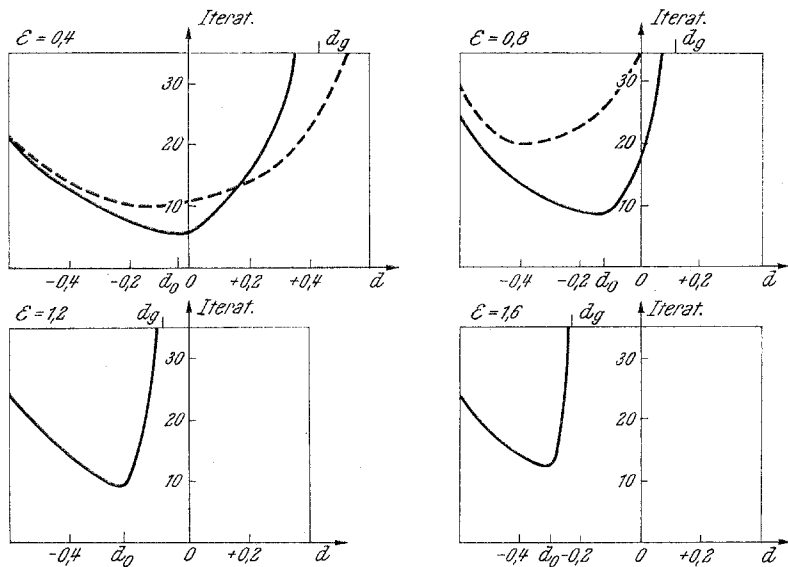


Abb. 1

Wir übertragen nun unsere Erfahrungen vom NEWTON-Verfahren und stellen die folgenden Vermutungen auf:

1. Das SOR-Verfahren, gegeben durch (21) und (22), konvergiert für $-1 < d < d_g - (1 - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$.
2. Das SOR-Verfahren konvergiert „ungefähr“ optimal für $d_0 = -\left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}\right)^2$.

Wir prüfen diese Vermutung an einem Beispiel. Es sei $\varrho(\Theta) = (1 - (1 - p^2) \cos^2 \Theta)^{1/2}$ mit $\varepsilon = (1 - p^2)/2p$ (es handelt sich um die am Einheitskreis gespiegelte Ellipse; vgl. GÄTER [1], S. 99ff.). An diesem Beispiel wurde auf der Tübinger Rechenanlage Siemens 2002 die Konvergenz des SOR-Verfahrens in Abhängigkeit von d für verschiedene Werte von ε geprüft. In der Abbildung ist für vier Werte von ε in Abhängigkeit von d die Anzahl der Iterationen aufgetragen, die notwendig ist, um jede Komponente des Residuums kleiner als 10^{-5} zu machen. Die sich aus unseren beiden Vermutungen ergebenden Werte von d_0 und

d_ε sind ebenfalls eingetragen. Man erkennt, daß für $\varepsilon = 1,2$ und $\varepsilon = 1,6$, wo Gesamt- und Einzelschrittverfahren divergieren, sich durch das SOR-Verfahren — genauer durch Unterrelaxation — noch Konvergenz erzielen läßt. Zum Vergleich sind noch, soweit es möglich ist, die Ergebnisse für die Relaxation in Gesamtschritten eingetragen (gestrichelte Linie). Für $d = 0$ erhält man Einzel- bzw. Gesamtschrittverfahren.

Literatur

- [1] GATER, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.
- [2] KJELLBERG, G.: On the convergence of successive overrelaxation applied to a class of linear systems of equations with complex eigenvalues. *Ericsson Technics* **2**, 245—258 (1958).
- [3] NIETHAMMER, W.: Relaxation bei Matrizen mit der Eigenschaft „A“. *Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech.* **44**, T 49—T 52 (1964).
- [4] OPITZ, G.: Zur Konvergenz bei genäherter konformer Abbildung. *Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech.* **30**, 337—346 (1950).
- [5] OSTROWSKI, A.: On a discontinuous analogue of Theodorsens and Garricks method. *Nat. Bur. Stand., Appl. Math. Ser.* **18**, 165—174 (1952).
- [6] SALTZER, C.: On the numerical determination of the conformal mapping function of a nearly circular region. Thesis, Brown University, (1949).
- [7] YOUNG, D.: Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type. *Trans. Am. Math. Soc.* **76**, 92—111 (1954).

Dr. W. Niethammer

*Mathematisches Institut der Universität Tübingen, Abteilung Rechenzentrum
74 Tübingen, Wilhelmstr. 7*