ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 72 (1992) 9, 431–444 Akademie Verlag

FROMMER, A.

Verallgemeinerte Diagonaldominanz bei nichtlinearen Funktionen. I

Streng oder irreduzibel diagonal dominante Matrizen und M-Matrizen sind alle in der Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Matrizen enthalten. Mit dem Begriff der verallgemeinert diagonal dominanten Funktion stellen wir hier ein analoges Konzept für nichtlineare Funktionen vor. Spezialfälle sind u. a. die für Anwendungen besonders wichtigen streng diagonal dominanten nichtlinearen Funktionen und M-Funktionen. Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Untersuchung charakteristischer Eigenschaften verallgemeinert diagonal dominanter Funktionen sowie deren Zusammenhänge mit anderen Funktionenklassen. In einer zweiten Arbeit werden wir dann zeigen, wie mit dem Konzept der nichtlinearen verallgemeinerten Diagonaldominanz diverse alte und mehrere neue Konvergenzresultate für nichtlineare (insbesondere asynchrone) Iterationsverfahren auf einheitliche Weise hergeleitet werden können.

Strictly or irreducibly diagonally dominant matrices as well as M-matrices are contained in the class of generalized diagonally dominant matrices. Introducing the notion of a generalized diagonally dominant function we here present an analogous concept for nonlinear functions. Special cases, among others, include strictly diagonally dominant functions and M-functions which are important for applications. In the present paper we concentrate on characteristic properties of generalized diagonally dominant functions and their relation with other classes of functions. In a subsequent paper we will show how the concept of nonlinear generalized diagonal dominance can be used to obtain, in a uniform manner, various known and several new convergence results for nonlinear iterative methods, in particular asynchronous iterations.

В классе обобщенно диагонально доминантных матриц содержаются и строго или неприводимо диагонально доминантные матрицы как и M-матрицы. Введя понятие обобщенно диагонально доминантной функции здесь дается аналогичная концепция для нелинейнъх функций. Особенные случаи включают в том числе строго диагонально доминантные функции и M-функции являющие важным для применения. В настоящей работе сосредоточиваем на характеристические свойства обобщенно диагонально доминантных функций и их соотношение к другим классом функций. В последующей работе будем показать, как концепция нелинейного обобщенно диагонального сосподства можно применить для получения в однородном форме несколько известных и различных новых результатов о сходимости для нелинейных итерационных методов, а в особенности для асинхроных итераций.

MC (1980): 65F10, 65F35, 15A18, 15A60, 65H15

Einleitung

Bekanntlich enthält die Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Matrizen neben den streng diagonal dominanten Matrizen auch die für Anwendungen besonders wichtigen irreduzibel diagonal dominanten Matrizen und M-Matrizen. Für verallgemeinert diagonal dominante Matrizen A ist bekannt, daß sowohl das Jacobi- als auch das Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = d$$

konvergieren (s. z. B. [1, 23]).

Für nichtlineare Funktionen $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind von MORÉ [14] bzw. RHEINBOLDT [17, 18] mit den streng diagonal dominanten bzw. den M-Funktionen nichtlineare Verallgemeinerungen der entsprechenden Matrizenklassen angegeben worden. In den zitierten Arbeiten werden u. a. Aussagen über die Konvergenz des nichtlinearen Jacobi- und des nichtlinearen Gauß-Seidel-Verfahrens zur Lösung der Gleichung

$$Fx = 0$$

für die jeweiligen Funktionenklassen hergeleitet.

Mit der vorliegenden Arbeit erweitern wir den Begriff der verallgemeinerten Diagonaldominanz auf nichtlineare Funktionen. In Analogie zu der Situation bei Matrizen erhalten wir so eine relativ große Klasse, die neben den streng diagonal dominanten Funktionen und gewissen M-Funktionen auch andere aus der Literatur bekannte Klassen (wie die schwach Ω-diagonal dominanten Funktionen) als Spezialfälle enthält. Die genauere Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den einzelnen Funktionenklassen bildet neben der Formulierung typischer Eigenschaften verallgemeinert diagonal dominanter Funktionen den Schwerpunkt dieser Arbeit.

Das Konzept der verallgemeinerten Diagonaldominanz gestattet es, eine ganze Reihe bekannter Konvergenzresultate (die bisher über mehrere verschiedene, prinzipiell unterschiedliche Zugänge erhalten wurden) für nichtlineare Iterationsverfahren auf einheitliche Art zu beweisen. Darüber hinaus können mit diesem Konzept auch relativ weitreichende, neue Konvergenzaussagen für nichtlineare Iterationsverfahren hergeleitet werden. Auf diese werden wir in der Arbeit FROMMER [7] am Beispiel nichtlinearer asynchroner Iterationsverfahren ausführlich eingehen. Der hier zu untersuchende Begriff der verallgemeinerten Diagonaldominanz dürfte insofern also auch allein von seiner Methodik her von Interesse sein.

Nach einem kurzen Abschnitt zur Klärung durchgängig verwendeter Bezeichnungen und einiger grundlegender Begriffe beleuchten wir in Abschnitt 2 mit Sätzen zu verallgemeinert diagonal dominanten Matrizen noch einmal den linearen Fall. Dieser Abschnitt ist als Motivation zu den dann folgenden nichtlinearen Analoga zu verstehen; Darstellung und Auswahl des vorgestellten Stoffes erfolgen vor diesem Hintergrund.

In Abschnitt 3 führen wir den Begriff der verallgemeinert diagonal dominanten Funktion ein. Wir werden u. a. zeigen, wie sich streng diagonal dominante Funktionen, M-Funktionen und andere Funktionenklassen unter diesen neuen Begriff einordnen. Darüber hinaus leiten wir in diesem Abschnitt wichtige typische Eigenschaften verallgemeinert diagonal dominanter Funktionen her.

Konkreten Beispielen zu (in Anwendungen auftretenden) verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen werden wir uns erst in FROMMER [7] zuwenden.

1. Notation und Terminologie

Wir verwenden das Symbol $\mathbb{N}_0$ für die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Anzahl der Elemente einer beliebigen endlichen Menge M bezeichnen wir mit $|M|$.

In $\mathbb{R}^n$ steht „$\leqq$" für die natürliche Halbordnung, d. h. für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Gilt für alle i die strenge Ungleichung, so schreiben wir $x < y$. Die Relationen „$\geqq$" und „$>$" sind entsprechend zu verstehen. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *nichtnegativ* bzw. *positiv*, falls $x \geqq 0$ bzw. $x > 0$ gilt. In $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind die Relationen „$\leqq$, $<$, $\geqq$, $>$" analog erklärt.

Die Betragsfunktion $|\cdot|$ in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n\times n}$ versteht sich komponentenweise, d. h. für einen Vektor $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ und eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n\,, \qquad |A| = (|a_{ij}|) \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnen wir die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, bedeutet $\|\cdot\|_u$ die gewichtete Maximumnorm

$$\|x\|_u := \max_{i=1}^{n} |u_i x_i|\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\operatorname{diag}(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Diagonalmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren i-tes Diagonalelement gerade gleich x_i ist.

In Abschnitt 3 steht das Symbol Q stets für einen Quader in $\mathbb{R}^n$, d. h. $Q \subseteqq \mathbb{R}^n$ ist von der Gestalt

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n\,.$$

Für $i = 1, \ldots, n$ ist hierin Q_i ein reelles Intervall, also eine Menge der Gestalt $[\alpha_i, \beta_i]$, $(\alpha_i, \beta_i]$, $[\alpha_i, \beta_i)$ oder (α_i, β_i), wobei an offenen Intervallgrenzen $\alpha_i = -\infty$ bzw. $\beta_i = +\infty$ zugelassen ist. Dabei sei Q_i stets ein echtes Intervall, d. h. es gelte stets $\alpha_i < \beta_i$. Mit Q ist gleichzeitig die Bedeutung von Q_i, $i = 1, \ldots, n$, festgelegt. Ober- und Untergrenze eines beliebigen Intervalls $J \subseteqq \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\sup J$ bzw. $\inf J$, wobei $\sup J = +\infty$, $\inf J = -\infty$ möglich ist.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir außerdem durchgängig das Symbol N für die Menge $\{1, \ldots, n\}$. Mit I bezeichnen wir die identische Abbildung.

Wir werden stets nur solche nichtlinearen Funktionen betrachten, die auf einem Quader definiert sind. Die einzelnen Komponenten einer derartigen Funktion $F\colon Q \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit F_i, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} F\colon\ & Q \to \mathbb{R}^m\,,\\ & x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \mapsto (F_1 x, \ldots, F_m x)^{\mathrm{T}}\,. \end{aligned}$$

Für eine gegebene Funktion $F\colon Q \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ schreiben wir ψ_{ij}^x, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, für die (eindimensionalen) Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^x\colon\ & Q_j \to \mathbb{R}\,,\\ & t \mapsto F_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)\,. \end{aligned}$$

Obwohl bei dieser Notation die Abhängigkeit der ψ_{ij}^x von F nicht explizit angegeben ist, wird sie immer einfach aus dem Zusammenhang im Text hervorgehen.

Wir erklären weiter einige Monotoniebegriffe für Funktionen in den beiden folgenden Definitionen.

Definition 1: Die Funktion $F: Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt
(i) *isoton* (auf Q), falls gilt

$$x, y \in Q, x \leqq y \Rightarrow Fx \leqq Fy ;$$

(ii) *streng isoton* (auf Q), wenn zusätzlich zu (i) außerdem gilt

$$x, y \in Q, x < y \Rightarrow Fx < Fy ;$$

(iii) *antiton* (auf Q), falls gilt

$$x, y \in Q, x \leqq y \Rightarrow Fx \geqq Fy ;$$

(iv) *streng antiton* (auf Q), falls zusätzlich zu (iii) gilt

$$x, y \in Q, x < y \Rightarrow Fx > Fy ;$$

(v) *invers isoton* (auf Q), falls gilt

$$x, y \in Q, Fx \leqq Fy \Rightarrow x \leqq y ;$$

(vi) *streng invers isoton* (auf Q), falls zusätzlich zu (v) gilt

$$x, y \in Q, Fx < Fy \Rightarrow x < y .$$

Definition 2: Die Funktion $F: Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt

(i) *außendiagonal antiton* (auf Q), falls für alle $x \in Q$ die Funktionen ψ_{ij}^x, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, antiton auf Q_j sind;
(ii) *diagonal isoton* (auf Q), falls für alle $x \in Q$ die Funktionen ψ_{ii}^x, $i = 1, \ldots, n$, isoton auf Q_i sind;
(iii) *streng diagonal isoton* (auf Q), falls für alle $x \in Q$ die Funktionen ψ_{ii}^x, $i = 1, \ldots, n$, streng isoton auf Q_i sind.

Schließlich halten wir in einer letzten Definition fest, was wir unter einer diagonalen Funktion verstehen wollen.

Definition 3: Die Funktion $U: Q \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *diagonal*, falls für $i = 1, \ldots, n$ die Komponente U_i nur von x_i abhängt, d. h. es gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$x, y \in Q, x_i = y_i \Rightarrow U_i x = U_i y .$$

Bei einer diagonalen Funktion U identifizieren wir die Komponente U_i mit der von x unabhängigen Funktion ψ_{ii}^x. In diesem Sinne ist die Schreibweise $U_i x_i$ zu verstehen, die wir häufig statt $U_i x$ verwenden werden.

2. Verallgemeinerte Diagonaldominanz bei Matrizen

Wir stellen hier bekannte Begriffe und bekannte Resultate zur Diagonaldominanz bei Matrizen vor. Unser Anliegen ist dabei, Eigenschaften verallgemeinert diagonal dominanter Matrizen so zu formulieren, daß die Analogien zum nichtlinearen Fall besonders deutlich werden. Insofern versteht sich dieser Abschnitt vor allem als Motivation für die später zu behandelnde Situation bei nichtlinearen Funktionen.

2.1. Begriffe

Definition 4: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *streng diagonal dominant*, falls gilt

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| , \qquad i = 1, \ldots, n . \tag{1}$$

Läßt man in (1) gewisse „Gewichte" in den einzelnen Summanden zu, so erhält man die Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Matrizen oder H-Matrizen.

Definition 5: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *verallgemeinert diagonal dominant* oder H-*Matrix*, falls ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, existiert mit

$$|a_{ii} u_i| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij} u_j| , \qquad i = 1, \ldots, n . \tag{2}$$

Für eine gegebene verallgemeinert diagonal dominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ werden wir in Zukunft mit u ohne weiteren Hinweis stets den positiven Vektor aus $\mathbb{R}^n$ bezeichnen, mit dem (2) erfüllt ist.

Bevor wir mit Definition 5 arbeiten werden, stellen wir einige für Anwendungen wichtige Matrizenklassen vor. Wir halten dann in Satz 1 fest, daß alle diese Matrizenklassen in der Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Matrizen enthalten sind. Zuvor erklären wir jedoch den Begriff des gerichteten Graphen einer Matrix.

Definition 6: Als *gerichteten Graphen* von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir das Paar $\Omega_A := (N, \Lambda_A)$ mit

$$\Lambda_A := \{(i,j) \in N^2 : a_{ij} \neq 0\}\,.$$

N ist die Menge der *Knoten*, Λ_A die Menge der *Kanten* des gerichteten Graphen Ω_A von A. Zwei Knoten $i, j \in N$ heißen *verbunden* in Ω_A, falls es Knoten $i_1, \ldots, i_r$ gibt mit $(i, i_1) \in \Lambda_A$, $(i_k, i_{k+1}) \in \Lambda_A$, $k = 1, \ldots, r-1$, und $(i_r, j) \in \Lambda_A$.

Definition 7: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *irreduzibel diagonal dominant*, falls gilt

(i) $|a_{i_0 i_0}| > \sum_{j=1, j \neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}|$ für ein $i_0 \in N$,

(ii) $|a_{ii}| \geqq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ für $i \in N \setminus \{i_0\}$,

(iii) zwei Knoten $i, j \in N$ mit $i \neq j$ sind stets in Ω_A verbunden.

Definition 8: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Ω-diagonal dominant*, falls eine Menge $J \subseteqq N$, $J \neq \emptyset$, existiert mit

(i) $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ für $i \in J$,

(ii) $|a_{ii}| \geqq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ für $i \in N \setminus J$,

(iii) für alle $i \in N \setminus J$ existiert $j \in J$, so daß die Knoten i und j in Ω_A verbunden sind.

Offensichtlich sind sowohl die streng als auch die irreduzibel diagonal dominanten Matrizen in der Klasse der Ω-diagonal dominanten Matrizen enthalten. (Man nehme $J = N$ bzw. $J = \{i_0\}$.)

Definition 9: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt M-*Matrix*, falls A nichtsingulär ist und zusätzlich gilt
(i) $a_{ij} \leqq 0$ für $i \neq j$,
(ii) $A^{-1} \geqq 0$.

Wir formulieren und beweisen nun den angekündigten Satz, welcher die soeben eingeführten Matrizentypen als spezielle verallgemeinert diagonal dominante Matrizen identifiziert.

Satz 1: *$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist verallgemeinert diagonal dominant in jedem der folgenden vier Fälle:*
(i) *A ist streng diagonal dominant.*
(ii) *A ist irreduzibel diagonal dominant.*
(iii) *A ist Ω-diagonal dominant.*
(iv) *A ist* M-*Matrix.*

Beweis: Teil (i) ergibt sich auf triviale Weise mit $u = (1, \ldots, 1)^\mathrm{T}$. Teil (ii) ist ein Spezialfall von (iii). Zum Beweis von (iii) halten wir fest, daß jedenfalls $a_{ij} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, gilt. Wäre nämlich $a_{ii} = 0$, so hätten wir (s. Definition 8) $i \in N \setminus J$, und die i-te Zeile von A wäre eine Nullzeile. Dies würde jedoch bedeuten, daß i in Λ_A mit keinem weiteren Knoten verbunden ist, was Definition 8 widerspricht. Nun sei $B = (b_{ij}) := D^{-1}A - I$ mit $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Für diese Matrix wurde in WALTER [25] ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, konstruiert mit

$$1 > \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{1}{u_i} b_{ij} u_j \right|, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

was gleichbedeutend ist zu

$$|\alpha_{ii} u_i| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij} u_j|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dies beendet den Beweis zu (iii). Teil (iv) findet sich z. B in BERMAN und PLEMMONS [1], S. 136. □

In der Literatur (z. B. in BERMAN und PLEMMONS [1] oder FROMMER [6]) verwendet man häufig einen anderen als den durch Definition 5 gegebenen Zugang zu verallgemeinert diagonal dominanten Matrizen. Er beruht auf dem folgenden Satz von FAN [5].

Satz 2: *Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfülle $a_{ij} \leqq 0$ für $i \neq j$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*
(i) *A ist eine* M-*Matrix.*
(ii) *Es existiert ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, mit $Au > 0$.*

Aus diesem Satz ergibt sich die nachstehende Charakterisierung verallgemeinert diagonal dominanter Matrizen.

Korollar 1: *Die Matrix* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ist genau dann verallgemeinert diagonal dominant, wenn die Matrix* $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit*

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}| & \text{für } i = j \\ -|a_{ij}| & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

eine M-*Matrix ist.*

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Satz 2, denn für $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, ist die Ungleichung

$$\tilde{A}u > 0$$

äquivalent zu

$$|a_{ii}u_i| > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}u_j|\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \qquad \square$$

Die Arbeit VARGA [24] vermittelt einen Überblick über zahlreiche andere äquivalente Charakterisierungen verallgemeinert diagonal dominanter Matrizen. Wie dort ausgeführt wird, enthalten zahlreiche Zeitschriftenartikel Resultate, die als Spezialfälle dieser Charakterisierungen für spezielle verallgemeinert diagonal dominante Matrizen aufgefaßt werden können. Aus den über 30 Referenzen aus [24] seien hier nur beispielhaft BRAMBLE und HUBBARD [2], DUFFIN [3], ELSNER [4], JAMES [10], JAMES und RIHA [11], KULISCH [12], MORÉ [14] und SCHÄFKE [20] zitiert. Nach Korollar 1 können in diesem Zusammenhang außerdem auch die 50 äquivalenten Bedingungen für das Vorliegen einer M-Matrix aus BERMAN und PLEMMONS [1], Kapitel 6, zur Charakterisierung verallgemeinert diagonal dominanter Matrizen herangezogen werden.

Für die hier angestrebte Verallgemeinerung auf nichtlineare Funktionen erweist sich jedoch die erste, in Definition 5 angegebene, Charakterisierung als besonders geeignet.

Wir beenden diesen Teil mit Bemerkungen zu den Bezeichnungen. Die Begriffe M-*Matrix* bzw. H-*Matrix* gehen auf OSTROWSKI [16] zurück, wo die Determinanten dieser Matrizen nach MINKOWSKI (aufgrund der Arbeit [13]) bzw. HADAMARD (wegen [9]) benannt werden. Die Bezeichnung *irreduzibel diagonal dominant* wird. z. B. in VARGA [23] verwendet; die Untersuchung irreduzibel diagonal dominanter Matrizen reicht jedoch wesentlich weiter zurück (s. z. B. die Referenzen in TAUSSKY [22]). Der Begriff der Ω-*diagonal dominanten* Matrix wurde in MORÉ [14] eingeführt.

2.2. Grundlegende Eigenschaften

In diesem Abschnitt sollen verallgemeinert diagonal dominante Matrizen auf eine Weise charakterisiert werden, die den Schlüssel zur Übertragung der verallgemeinerten Diagonaldominanz auf nichtlineare Funktionen liefert. Zunächst halten wir jedoch eine triviale Konsequenz aus Definition 4 fest.

Satz 3: *Alle Diagonalelemente einer verallgemeinert diagonal dominanten Matrix sind von Null verschieden.*

Beweis: Diese Aussage folgt direkt aus (2).

Satz 4: *Es sei* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in N$, *und* $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$. *Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $|a_{ii}u_i| > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}u_j|$.

(ii) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$x \neq 0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_i}{u_i}\right| < \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_j}{u_j}\right|\right\}. \tag{3}$$

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)": Es sei $x \neq 0$ mit $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x_i \neq 0$ voraussetzen, denn sonst ist (3) trivial. Für $x_i \neq 0$ erhalten wir mit (i) die Ungleichungskette

$$0 = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geqq |a_{ii}x_i| - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}x_j| = |a_{ii}u_i| \cdot \left|\frac{x_i}{u_i}\right| - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}u_j| \cdot \left|\frac{x_j}{u_j}\right|$$
$$> \left(\sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}u_j|\right) \left|\frac{x_i}{u_i}\right| - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}u_j| \cdot \left|\frac{x_j}{u_j}\right| \geqq \left(\sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}u_j|\right) \left(\left|\frac{x_i}{u_i}\right| - \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_j}{u_j}\right|\right\}\right),$$

woraus sich (3) ergibt.

„(ii) ⇒ (i)": Aus (ii) folgt sofort, daß a_{ii} von Null verschieden ist, denn sonst gälte für den Vektor x mit den Komponenten

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einerseits $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, andererseits $|x_i/u_i| = \max_{j=1}^{n} \{|x_j/u_j|\}$, im Widerspruch zu (ii). Angenommen, (i) gilt nicht. Dann ist

$$|a_{ii}u_i| = \alpha \cdot \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}u_j|$$

mit $\alpha \in [0, 1]$. Wir definieren den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$x_j := \begin{cases} u_i \cdot \operatorname{sgn}(a_{ii}) & \text{für } j = i \\ -\alpha \cdot u_j \cdot \operatorname{sgn}(a_{ij}) & \text{sonst}. \end{cases}$$

Wegen $a_{ii} \neq 0$ ist $x_i \neq 0$ und damit

$$1 = \left|\frac{x_i}{u_i}\right| = \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_j}{u_j}\right|\right\}.$$

Nun gilt jedoch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = |a_{ii}u_i| - \alpha \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}u_j| = 0,$$

was im Widerspruch zu (ii) steht. □

Satz 4 wurde für den Spezialfall $u = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ in MORÉ [14] bewiesen. Aus ihm erhalten wir sofort die beiden folgenden Korollare.

Korollar 2: *Die Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann verallgemeinert diagonal dominant, wenn ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, existiert, so daß für alle $i \in N$, $x \in \mathbb{R}^n$, gilt:*

$$x \neq 0,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_i}{u_i}\right| < \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_i}{u_i}\right|\right\}.$$

Korollar 3: *Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei verallgemeinert diagonal dominant. Dann ist A nichtsingulär.*

Beweis: Angenommen, es existiert $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, mit $Ax = 0$. Dann gilt nach Korollar 2 für $i = 1, \ldots, n$

$$\left|\frac{x_i}{u_i}\right| < \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_i}{u_i}\right|\right\},$$

woraus die falsche Ungleichung

$$\max_{i=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_i}{u_i}\right|\right\} < \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{x_j}{u_j}\right|\right\}$$

resultiert. □

3. Verallgemeinerte Diagonaldominanz bei nichtlinearen Funktionen

3.1. Begriffe

Wie in Abschnitt 1 vereinbart, bezeichnet im folgenden das Symbol Q stets einen Quader in $\mathbb{R}^n$. Für eine Funktion $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ erklären wir zunächst den auf MORÉ [14] zurückgehenden Begriff der strengen Diagonaldominanz.

Definition 10: $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ heißt *streng diagonal dominant* (auf Q), falls für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$x \neq y, F_i x = F_i y \quad \Rightarrow \quad |x_i - y_i| < \|x - y\|_\infty.$$

Eine affine Funktion $F\colon x \mapsto Ax - d$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$, ist genau dann streng diagonal dominant im Sinne der obigen Definition, wenn A streng diagonal dominant (im Sinne von Definition 4) ist. Diese Tatsache wurde in MORÉ [14] bewiesen. Sie folgt leicht aus Satz 4 mit $u = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

In Analogie zu der Situation bei Matrizen aus Abschnitt 2 führen wir nun die neue Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen ein. Dabei orientieren wir uns ganz wesentlich an den in Korollar 2 formulierten

Eigenschaften verallgemeinert diagonal dominanter Matrizen. Wie wir dann sehen werden (Satz 5), umfaßt die Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen neben den streng diagonal dominanten Funktionen weitere wichtige Klassen nichtlinearer Funktionen, die in Anwendungen auftreten. Das Konzept der verallgemeinerten Diagonaldominanz wird uns in FROMMER [7] gestatten, viele bekannte Konvergenzresultate für nichtlineare Iterationsverfahren einheitlich zu beweisen. Darüber hinaus erhalten wir in [7] mit unserem Zugang eine Reihe neuer Resultate, insbesondere zur Konvergenz asynchroner Iterationsverfahren.

Definition 11: $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ heißt *verallgemeinert diagonal dominant* (auf Q), falls für jedes $x \in Q$ eine Funktion $U^x\colon Q \to \mathbb{R}^n$ existiert mit

(i) U^x ist diagonal,
(ii) U_i^x ist stetig und streng isoton für $i = 1, \ldots, n$,
(iii) $U^x x = x$,
(iv) für $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$x \neq y, F_i x = F_i y \quad \Rightarrow \quad |U_i^x y_i - x_i| < \|U^x y - x\|_\infty .$$

Bei einer gegebenen verallgemeinert diagonal dominanten Funktion werden wir in Zukunft ohne weiteren Hinweis mit U^x stets die Funktion bezeichnen, für die (i)–(iv) aus Definition 11 erfüllt ist.

Die nachstehende Bemerkung zeigt, daß Definition 11 als „natürliche" Erweiterung der verallgemeinerten Diagonaldominanz bei Matrizen angesehen werden kann.

Bemerkung 1: *F sei affin, $Fx = Ax - d$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*
(i) *F ist verallgemeinert diagonal dominant* (im Sinne von Definition 11).
(ii) *Die Matrix A ist verallgemeinert diagonal dominant* (im Sinne von Definition 5).

Beweis:
„(ii) ⇒ (i)": Ist A verallgemeinert diagonal dominant, so sind mit der Wahl $U_i^x t := (t - x_i)/u_i + x_i$, $i = 1, \ldots, n$, $x \in Q$, nach Korollar 2 die Bedingungen (i)–(iv) aus Definition 11 erfüllt. Für die umgekehrte Richtung „(i) ⇒ (ii)" scheint es relativ schwierig zu sein, einen direkten Beweis anzugeben. Wir erhalten diese Aussage jedoch in FROMMER [7] indirekt in Korollar 5 zu Satz 5, weshalb wir den Beweis zu Bemerkung 1 hier beenden können. □

Mit den schwach Ω-diagonal dominanten Funktionen und den M-Funktionen sind in MORÉ [14] bzw. RHEINBOLDT [17, 18, 19] nichtlineare Verallgemeinerungen der entsprechenden Matrix-Eigenschaften aus Abschnitt 2 eingeführt worden. Wir erklären diese Funktionen in den beiden folgenden Definitionen. Danach zeigen wir, wie sich die Funktionen in die Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen unterordnen lassen.

Definition 12: $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ heißt *schwach Ω-diagonal dominant* (auf Q), falls für jedes $x \in Q$ ein Graph $\Omega_x = (N, A_x)$, *$A_x \subseteq N \times N$, und eine Menge $J_x \subseteq N$, $J_x \neq \emptyset$,* existiert mit
(i) für alle $i \in J_x$ gilt

$$x \neq y, F_i x = F_i y \quad \Rightarrow \quad |x_i - y_i| < \|x - y\|_\infty ,$$

(ii) für alle $i \in N \setminus J_x$ gilt

$$\begin{aligned} x \neq y, F_i x = F_i y \quad \Rightarrow \quad & |x_i - y_i| < \|x - y\|_\infty \quad \text{oder} \\ & |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty = |x_j - y_j| \text{ für alle } j \text{ mit } (i, j) \in A_x , \end{aligned}$$

(iii) jedes $i \in N \setminus J_x$ ist in Ω_x mit einem Knoten $j \in J_x$ verbunden.

Aus MORÉ [14], Theorem 2.12, folgt, daß eine affine Funktion $F\colon x \mapsto Ax - d$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$, genau dann schwach Ω-diagonal dominant ist, wenn die Matrix A Ω-diagonal dominant im Sinne von Definition 8 ist.

Bevor wir in der nächsten Definition den Begriff der M-Funktion erklären, erinnern wir daran, daß die Bedeutung von ψ_{ij}^x in Abschnitt 1 festgelegt wurde.

Definition 13: $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ heißt M-*Funktion*, falls für jedes $x \in Q$ die Funktionen $\psi_{ij}^x\colon Q_j \to \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, antiton sind und F invers isoton ist.

Eine affine Funktion $F\colon x \mapsto Ax - d$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$, ist genau dann eine M-Funktion, wenn A eine M-Matrix ist (s. RHEINBOLDT [17, 18], Lemma 2.9). Eine beliebige M-Funktion braucht nicht stetig zu sein. Stetige M-Funktionen sind nach einem Resultat von SCHRÖDER [21] (s. auch RHEINBOLDT [17, 18], Lemma 2.4) streng invers isoton. Wir halten diese Tatsache ohne Beweis in einem Hilfssatz fest.

Lemma 1: *Eine stetige* M-*Funktion $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ ist streng invers isoton.*

Wir formulieren nun den angekündigten Satz, mit dem wir in gewissem Umfang klären können, wie sich die bisher eingeführten Funktionenklassen in die Klasse der verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen einordnen. Dieser Satz kann als nichtlineares Analogon zu Satz 1 angesehen werden.

Satz 5: *Gegeben sei die Funktion* $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:*

(i) *Ist F streng diagonal dominant auf Q, so ist F verallgemeinert diagonal dominant auf Q.*

(ii) *Ist F schwach Ω-diagonal dominant und stetig auf Q, so ist F verallgemeinert diagonal dominant auf jedem kompakten Quader* $\tilde{Q}$ *mit* $\tilde{Q} \subseteq Q$.

(iii) *Ist* $Q = \mathbb{R}^n$ *und F eine stetige, surjektive* M-*Funktion, so ist F verallgemeinert diagonal dominant auf* $\mathbb{R}^n$.

Beweis: (i) folgt einfach, indem man $U^x = I$ nimmt für alle $x \in Q$. Die Beweise zu (ii) und (iii) sind relativ aufwendig und erfordern einige Vorbereitungen. Wir stellen sie deshalb bis zum Appendix (Satz 11 und Satz 12) zurück. □

3.2. Grundlegende Eigenschaften

Wir halten hier einige interessante Eigenschaften verallgemeinert diagonal dominanter Funktionen fest, welche wir z. T. später bei der Untersuchung von Iterationsverfahren benötigen werden.

Zunächst bemerken wir, daß jede streng monoton wachsende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ streng (und damit verallgemeinert) diagonal dominant ist. Verallgemeinert diagonal dominante Funktionen sind also nicht notwendig stetig. Sie sind jedoch injektiv, wie der erste Satz dieses Abschnitts zeigt. Man kann ihn als nichtlineares Analogon von Korollar 3 auffassen.

Satz 6: $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ *sei verallgemeinert diagonal dominant. Dann ist F injektiv.*

Beweis: Angenommen, es ist $Fx = Fy$ mit $x, y \in Q$ und $x \neq y$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$|U_i^x y_i - x_i| < \|U^x y - x\|_\infty ,$$

also $\|U^x y - x\|_\infty < \|U^x y - x\|_\infty$, was unmöglich ist. □

In zwei weiteren Sätzen wollen wir gewisse Monotonieaussagen für verallgemeinert diagonal dominante Funktionen herleiten. Wir benötigen dazu die beiden folgenden, eher technischen Lemmata.

Lemma 2: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *sei konvex,* $J \subseteq \mathbb{R}$ *sei ein Intervall. Die Funktion* $H\colon C \times J \to \mathbb{R}$ *erfülle*

(i) *für alle* $t \in J$ *ist* $H(\cdot, t)$ *stetig auf C,*

(ii) *für alle* $x \in C$ *ist* $H(x, \cdot)$ *stetig und injektiv auf J.*

Dann ist $H(x, \cdot)$ *auf J entweder streng isoton für alle* $x \in Q$ *oder streng antiton für alle* $x \in Q$.

Dieses Lemma stammt aus Moré [14], Theorem 3.4.

Lemma 3: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *sei zusammenhängend,* $J \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $H\colon C \times J \to \mathbb{R}$ *erfülle die beiden Bedingungen*

(i) *für alle* $t \in J$ *ist* $H(\cdot, t)$ *stetig auf C,*

(ii) *für alle* $x \in C$ *ist* $H(x, \cdot)$ *stetig auf J mit* $H(x, t) \neq 0$ *für alle* $t \in J$.

Dann gilt $H(x, t) > 0$ *für alle* $x \in C$, $t \in J$, *oder* $H(x, t) < 0$ *für alle* $x \in C$, $t \in J$.

Beweis: $z \in C$ sei fest. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $H(z, t) > 0$ für alle $t \in J$. Wir setzen

$$C_0 := \{x \in C : H(x, t) > 0 \text{ für alle } t \in J\} .$$

Wegen $z \in C_0$ ist C_0 nicht leer. Weil x genau dann in C_0 liegt, wenn $H(x, t)$ für ein $t \in J$ positiv ist, ist C_0 nach (i) relativ offen in C. Ist andererseits $\{x^k\}$ eine Folge aus C_0 mit dem Grenzwert $\bar{x} \in C$, so gilt $H(\bar{x}, t) \geqq 0$ für alle $t \in J$. Wegen (ii) folgt daraus $\bar{x} \in C_0$. C_0 ist also offen und abgeschlossen in C. Da C zusammenhängend ist, gilt $C = C_0$. □

Den nun folgenden Satz kann man als nichtlineares Gegenstück zu Satz 3 ansehen.

Satz 7: $F\colon Q \to \mathbb{R}^n$ *sei stetig und verallgemeinert diagonal dominant. Dann ist für* $i = 1, \ldots, n$ *die Funktion* $\psi_{ii}^x\colon Q_i \to \mathbb{R}$ *entweder streng isoton für alle* $x \in Q$ *oder streng antiton für alle* $x \in Q$.

Beweis: Für $i = 1, \ldots, n$ ist ψ_{ii}^x stetig. Wir zeigen zuerst, daß ψ_{ii}^x injektiv ist. Angenommen, es gilt $\psi_{ii}^x s = \psi_{ii}^x t$, $s \neq t$. Mit den Bezeichnungen

$$y := (x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} , \qquad z := (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

gilt also $z \neq y$ und $F_i y = F_i z$, woraus

$$|U_i^y z_i - y_i| < \|U^y z - y\|_\infty$$

folgt. Hier ist jedoch $0 \neq |U_i^y z_i - y_i| = |U_i^y t - s| = \|U^y z - y\|_\infty$, was die Annahme $s \neq t$ ad absurdum führt. Nun sei

$$C := Q_1 \times \ldots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \ldots \times Q_n , \qquad J := Q_i$$

und

$$H : C \times J \to \mathbb{R} ,$$
$$(x, t) \mapsto F_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) .$$

Dann erfüllt H die Voraussetzungen von Lemma 2, weshalb $H(x, \cdot) = \psi_{ii}^x$ auf Q_i entweder streng isoton für alle $x \in Q$ oder streng antiton für alle $x \in Q$ ist. □

Der nun folgende Satz liefert eine ähnliche Aussage, mit deren Hilfe wir nachher den Zusammenhang zwischen verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen und M-Funktionen weiter klären können.

Satz 8: *$F: Q \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und verallgemeinert diagonal dominant. Für $x, y \in Q$ gelte*

$$0 \neq |U_i^x y - x_i| = \|U^x y - x\|_\infty .$$

Dann ist $(x_i - y_i)(F_i x - F_i y) > 0$, falls ψ_{ii}^x streng isoton ist, und $(x_i - y_i)(F_i x - F_i y) < 0$, falls ψ_{ii}^x streng antiton ist.

Beweis: $x \in Q$ sei fest. Wir betrachten nur die $y \in Q$ mit $y_i > x_i$, wozu wir also $x_i \neq \sup Q_i$ annehmen. (Im Fall $y_i < x_i$ verläuft der Beweis analog, $x_i = y_i$ ist ausgeschlossen). Mit C bezeichnen wir die Menge

$$C := \{y \in Q: y_i > x_i, U_i^x y_i - x_i = \|U^x y - x\|_\infty\} .$$

Der aufwendigste Teil des Beweises ist der nun folgende Nachweis, daß C zusammenhängend ist. Ein Vektor y mit $y_i > x_i$ liegt in C genau dann, wenn für $j \in N$, $j \neq i$, gilt

$$x_j - (U_i^x y_i - x_i) \leqq U_j^x y_j \leqq x_j + (U_i^x y_i - x_i) . \tag{4}$$

Es bezeichne I_j das Intervall $U_j^x(Q_j)$, und für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$p_j(t) := \max\{\inf(I_j), t\} , \qquad q_j(t) := \min\{\sup(I_j), t\} .$$

Dann ist (4) äquivalent zu

$$(U_j^x)^{-1} p_j(x_j - (U_i^x y_i - x_i)) \leqq y_j \leqq (U_j^x)^{-1} q_j(x_j + (U_i^x y_i - x_i)) . \tag{5}$$

Mit f_j bzw. g_j bezeichnen wir die stetigen Funktionen

$$f_j: Q_i \cap \{t: t > x_i\} \to \mathbb{R} , \qquad t \mapsto (U_j^x)^{-1} p_j(x_j - (U_i^x t - x_i)) ,$$
$$g_j: Q_i \cap \{t: t > x_i\} \to \mathbb{R} , \qquad t \mapsto (U_j^x)^{-1} q_j(x_j + (U_i^x t - x_i)) .$$

Es ist $f_j(t) \leqq x_j \leqq g_j(t)$ für $t \in Q_i \cap \{t: t > x_i\}$. Nun sei D das kartesische Produkt der Mengen D_j, $j = 1, \ldots, n$, mit

$$D_j := \begin{cases} [0, 1] & \text{falls } j \neq i \\ Q_i \cap \{t: t > x_i\} & \text{falls } j = i . \end{cases}$$

Wir erklären die Funktion $G: D \to \mathbb{R}^n$ durch

$$G_j(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} t_j \cdot f_j(t_i) + (1 - t_j) \cdot g_j(t_i) & \text{falls } j \neq i \\ t_i & \text{falls } j = i . \end{cases}$$

Dann ist G stetig, und aus (5) folgt

$$G(D) = C .$$

Weil D (als kartesisches Produkt zusammenhängender Mengen) zusammenhängend ist, ist auch $G(D) = C$ zusammenhängend.

Wir definieren nun die Funktion $H: C \times (0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$H: (y, t) \mapsto F_i((U^x)^{-1}(x + t(U^x y - x))) - F_i x .$$

Dann ist $H(y, \cdot)$ stetig für alle $y \in C$ und $H(\cdot, t)$ stetig für alle $t \in (0, 1]$. Angenommen, es wäre $H(y, t) = 0$ für ein $y \in C$, $t \in (0, 1]$. Dann gälte also

$$F_i((U^x)^{-1}(x + t(U^x y - x))) = F_i x$$

und deshalb

$$|U_i^x (U^x)_i^{-1}(x_i + t(U_i^x y_i - x_i)) - x_i| < \|U^x (U^x)^{-1}(x + t(U^x y - x)) - x\|_\infty$$
$$\Leftrightarrow \quad |t(U_i^x y_i - x_i)| < \|t(U^x y - x)\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad |U_i^x y_i - x_i| < \|U^x y - x\|_\infty ,$$

was wegen $y \in C$ jedoch ausgeschlossen ist. Wir können damit Lemma 3 anwenden, was zeigt, daß entweder $H(y, t)$ für alle $y \in C$, $t \in (0, 1]$, positiv ist, oder $H(y, t)$ für alle $y \in C$, $t \in (0, 1]$, negativ ist. Wählen wir für y speziell einen Vektor $z = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T$ mit $z_i > x_i$, so liegt z in C. Ist ψ_{ii}^x streng isoton, so gilt also insbesondere $H(y, 1) = F_i y - F_i x > 0$ für alle $y \in C$; ist ψ_{ii}^x streng antiton, so folgt $H(y, 1) = F_i y - F_i x < 0$ für alle $y \in C$. Genau dies war zu zeigen. □

Als Folgerung aus dem letzten Satz erhalten wir einen weiteren Zusammenhang zwischen verallgemeinert diagonal dominanten Funktionen und M-Funktionen. Er kann als Umkehrung von Satz 5 (iii) aufgefaßt werden. Außerdem repräsentiert dieser Satz ein nichtlineares Gegenstück zu der Implikation „(ii) ⇒ (i)“ aus Satz 2.

Satz 9: *F sei stetig verallgemeinert diagonal dominant, außendiagonal antiton und diagonal isoton. Dann ist F eine* M-*Funktion.*

Beweis: Wegen Satz 7 ist F sogar streng diagonal isoton. Nach Theorem 4.4 aus Moré und Rheinboldt [15] genügt es zu zeigen, daß für $y \neq x$ ein Index $i = i(x, y)$ existiert mit

$$(F_i x - F_i y)(x_i - y_i) > 0 .$$

Für i können wir nach Satz 8 aber gerade den Index nehmen, für welchen $|U_i^x y_i - x_i| = \|U^x y - x\|_\infty$ gilt. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit hinreichenden Bedingungen, die bei differenzierbaren Funktionen die Zugehörigkeit zu den betrachteten Funktionenklassen garantieren.

Satz 10:

(i) *F sei Gâteaux-differenzierbar auf Q und F′(x) sei eine streng diagonal dominante Matrix für alle $x \in Q$. Dann ist F streng diagonal dominant.*

(ii) *F sei stetig differenzierbar auf Q und F′(x) sei eine Ω-diagonal dominante Matrix für alle $x \in Q$. Dann ist F schwach Ω-diagonal dominant.*

(iii) *F sei Fréchet-differenzierbar auf Q und F′(x) sei ein* M-*Matrix für alle $x \in Q$. Dann ist F eine* M-*Funktion.*

(iv) *F sei Gâteaux-differenzierbar auf Q. Es existiere ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, so daß unabhängig von x für die Matrix $F'(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt*

$$|\alpha_{ii}(x)\, u_i| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}(x)\, u_j| , \qquad i = 1, \dots, n .$$

Dann ist F verallgemeinert diagonal dominant auf Q.

Beweis: Die Teile (i) und (ii) finden sich in Moré [14], Theorem 2.5 und Theorem 2.14. Teil (iii) ist ein Resultat aus Gale und Nikaidô [8], Theorem 5. Zum Beweis von (iv) setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$U_i^x \colon Q_i \to \mathbb{R} , \qquad r \mapsto \frac{t - x_i}{u_i} + x_i .$$

Angenommen, es gilt $F_i x = F_i y$ und $x \neq y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein Vektor $\xi = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$, mit

$$0 = F_i'(\xi)(y - x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi)(y_j - x_j) .$$

Nach Voraussetzung folgt hieraus mit Satz 4

$$\left|\frac{y_i - x_i}{u_i}\right| < \max_{j=1}^{n} \left\{\left|\frac{y_j - x_j}{u_j}\right|\right\},$$

was äquivalent ist zu

$$|U_i^x y_i - x_i| < \|U^x y - x\|_\infty . \qquad \square$$

Nicht bekannt ist bisher, ob bei z. B. stetig differenzierbarem F die Bedingung “$F'(x)$ ist verallgemeinert diagonal dominant für alle $x \in Q$“ hinreichend dafür ist, daß F verallgemeinert diagonal dominant ist.

Appendix: Beweis zu Satz 7

Wir beweisen zunächst Teil (ii) von Satz 5. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4: *$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei außendiagonal antiton. Die Funktion $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sei streng isoton und erfülle $P(0) = 0$. Für $i = 1, \dots, n$ sei $P_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv. Weiter seien für festes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktionen*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto F_i(x + P(t)) \tag{6}$$

für $i = 1, \dots, n$ streng isoton. Dann gilt für $i = 1, \dots, n$

$$|P_i^{-1}(y_i - x_i)| = \max_{j=1}^{n} |P_j^{-1}(y_j - x_j)|, y \neq x \quad \Rightarrow \quad (F_i y - F_i x)(y_i - x_i) > 0 .$$

Beweis: Für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gelte $y \neq x$ und $|P_i^{-1}(y_i - x_i)| = \max_{j=1}^{n} |P_j^{-1}(y_j - x_j)|$. Dann ist sicher $y_i \neq x_i$, denn sonst wäre $\max_{j=1}^{n} |P_j^{-1}(y_j - x_j)|$ also $y = x$, was ausgeschlossen ist. Wir nehmen zuerst an, es gilt $y_i > x_i$. Dann ist die Zahl $t_i := P_i^{-1}(y_i - x_i)$ positiv. Wir definieren $z \in \mathbb{R}^n$ durch

$$z := x + P(t_i) .$$

Offensichtlich ist $z_i = y_i$, und für $j \neq i$ gilt

$$z_j = x_j + P_j(t_i) = x_j + P_j(|t_i|) \geqq x_j + P_j(|P_j^{-1}(y_j - x_j)|) \geqq x_j + P_j(P_j^{-1}(y_j - x_j)) = y_j .$$

Weil die in (6) definierten Funktionen streng isoton sind, erhalten wir

$$F_i x < F_i(x + P(t_i)) = F_i z \leqq F_i y ,$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil F außendiagonal antiton ist. Da wir $y_i > x_i$ angenommen haben, ergibt sich so

$$(F_i y - F_i x)(y_i - x_i) > 0 .$$

Ist nun $y_i < x_i$, so erhalten wir mit dem wie oben definierten Vektor z analog

$$z_j \leqq y_j , \qquad j = 1, \dots, n , \qquad z_i = y_i ,$$

und damit

$$F_i x > F_i y ,$$

woraus wieder

$$(F_i y - F_i x)(y_i - x_i) > 0$$

folgt. □

Nach dieser Vorbereitung sind wir jetzt in der Lage, mit dem folgenden Satz Teil (ii) von Satz 5 zu beweisen.

Satz 11: *Die Funktion $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetige, surjektive M-Funktion. Dann ist F verallgemeinert diagonal dominant.*

Beweis: Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ erklären wir die Funktion P^x durch

$$P^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n , \qquad t \mapsto F^{-1}(Fx + te) - x , \qquad e = (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}} .$$

Dann ist P^x stetig und nach Lemma 1 streng isoton. Damit ist insbesondere P_i^x streng isoton für $i = 1, \dots, n$. Außerdem sind die Funktionen

$$t \in \mathbb{R} \mapsto F_i(x + P^x(t)) = F_i(F^{-1}(Fx + te)) = F_i(x) + t$$

streng isoton für $i = 1, \dots, n$. Weil F außendiagonal antiton ist, folgt aus dieser Beziehung für $t \to \pm\infty$ außerdem $\lim\limits_{t \to \pm\infty} P_i^x(t) = \pm\infty$. Für $i = 1, \dots, n$ ist P_i^x demnach surjektiv, und es gilt

$$P^x(0) = 0 .$$

Nach Lemma 4 ist also die Implikation

$$|(P_i^x)^{-1}(y_i - x_i)| = \max_{j=1}^{n} |(P_j^x)^{-1}(y_j - x_j)|, y \neq x \quad \Rightarrow \quad (F_i y - F_i x)(y_i - x_i) > 0$$

richtig. Erklären wir nun die Komponenten der diagonalen Funktion $U^x: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$U_i^x t := (P_i^x)^{-1}(t - x_i) + x_i , \qquad i = 1, \dots, n ,$$

so ist U^x stetig und streng isoton mit $U^x x = x$ und

$$|U_i^x y_i - x_i| = \|U^x y - x\|_\infty, y \neq x \quad \Rightarrow \quad (F_i y - F_i x)(y_i - x_i) > 0 .$$

Hieraus folgt sofort, daß auch die Implikation

$$F_i x = F_i y, x \neq y \quad \Rightarrow \quad |U_i^x y_i - x_i| < \|U^x y - x\|_\infty$$

richtig ist, was zu zeigen war. □

Auch der Beweis zu Teil (iii) von Satz 5 erfordert einen vorbereitenden Hilfssatz.

Lemma 5: *Es sei $\{\delta^k\}$ eine Folge von Zahlen mit $1 < \delta^{k+1} < \delta^k$, $k \in \mathbb{N}$. $I^0 := [c^0, d^0]$ sei ein echtes, kompaktes Intervall, $t^0 \in I^0$ sei fest. Für $k \in \mathbb{N}$ seien in I^0 offene Intervalle I^k gegeben durch*

$$I^k := \begin{cases} [t^0, d^k) & \text{falls} \quad t^0 = c^0 \\ (c^k, t^0] & \text{falls} \quad t^0 = d^0 , \\ (c^k, d^k) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $c^k > c^{k-1}$, $d^k < d^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k \to \infty} c^k = \lim_{k \to \infty} d^k = t^0 .$$

(Für die Intervalle I^k gilt also $I^k \subset I^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, und $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} I^k = \{t^0\}$.) Dann existiert eine stetige, streng isotone Funktion $g: I^0 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t^0) = 0 , \qquad |t - t^0| < |g(t)| \leqq \delta^k |t - t^0| \quad \text{für} \quad t \in I^{k-1} \setminus \{t^0\} , \qquad k \in \mathbb{N} .$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz einer stetigen Funktion $h: I^0 \to \mathbb{R}$ mit

$$1 < h(t) \leqq \delta^k \quad \text{für} \quad t \in I^{k-1} \setminus \{t^0\} , \qquad k \in \mathbb{N} ,$$

die auf $[c^0, t^0)$ streng antiton, auf $(t^0, d^0]$ streng isoton ist. Dazu konstruieren wir h zuerst auf dem Intervall $(t^0, d^0]$, wozu wir $t^0 < d^0$ annehmen können. Es ist $(t^0, \delta^0] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (d^k, d^{k-1}]$. Wir definieren h auf $(t^0, d^0]$ stückweise linear durch

$$h(t) := \delta^{k+1} + (\delta^k - \delta^{k+1}) \frac{t - d^k}{d^{k-1} - d^k} , \qquad t \in (d^k, d^{k-1}] , \qquad k \in \mathbb{N} .$$

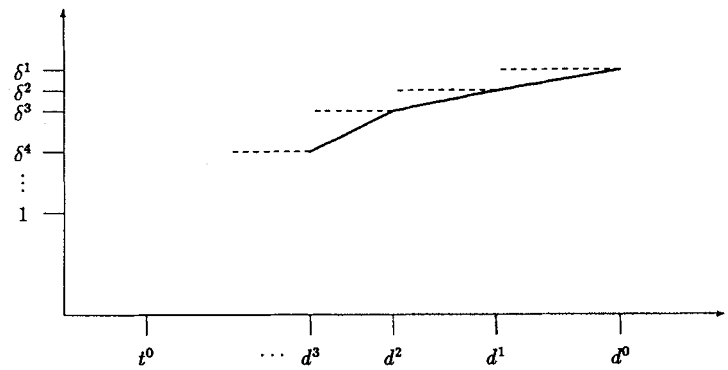

Abb. 1. Konstruktion von h

Weil die Folge $\{\delta^k\}$ streng monoton fällt und nach unten beschränkt ist, existiert $\lim\limits_{k\to\infty} \delta^k =: \bar{\delta} \geqq 1$. Man prüft nun leicht nach (s. auch Abb. 1), daß $h(t)$ auf $[t^0, d^0]$ stetig und streng isoton ist, und daß gilt

$$1 \leqq \bar{\delta} < h(t) \leqq \delta^k \quad \text{für} \quad t \in (t^0, d^{k-1}]\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Für $c^0 < t^0$ können wir in analoger Weise h auf dem Intervall $[c^0, t^0)$ so konstruieren, daß h auf $[c^0, t^0)$ stetig und streng antiton ist und (7) für $t \in [c^{k-1}, t^0)$, $k \in \mathbb{N}$, erfüllt ist. Setzen wir schließlich noch $h(t^0) := \bar{\delta}$, so ist h stetig auf I^0 und besitzt die gewünschten Eigenschaften.

Die gesuchte Funktion g erhält man nun einfach durch

$$g(t) := h(t)\,(t - t_0)\,, \qquad t \in I^0\,. \qquad \square$$

Um den nachfolgenden Beweis von Satz 12 nicht mit der Einführung zusätzlicher Notation zu belasten, legen wir bereits jetzt einige dort zu verwendende Bezeichnungen fest.

Definition 14:

(i) $\tilde{Q} := I_1^0 \times I_2^0 \times \ldots \times I_n^0$ bezeichnet einen kompakten Quader in $\mathbb{R}^n$ mit

$$I_i^0 := [a_i^0, b_i^0]\,, \qquad a_i^0 < b_i^0\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

(ii) $x \in \tilde{Q}$ bezeichnet einen festen Punkt aus $\tilde{Q}$ mit den Komponenten x_i, $i = 1, \ldots, n$.

(iii) Für $k \in \mathbb{N}$ seien die in I_i^0 offenen Intervalle I_i^k gegeben durch

$$\tilde{I}_i^k := \begin{cases} [x_i, b_i^k) & \text{falls} \quad x_i = a_i^0 \\ (a_i^k, x_i] & \text{falls} \quad x_i = b_i^0\,, \\ (a_i^k, b_i^k) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a_i^k > a_i^{k-1}$, $b_i^{k-1} < b_i^k$, $k \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^k = \lim\limits_{k\to\infty} b_i^k = x_i$. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt also $x_i \in I_i^k \subset I_i^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, und es ist $\{x_i\} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} I_i^k$.

(iv) Die Mengen $K^k \subseteqq \tilde{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, sind definiert als

$$K^k := \tilde{Q} \setminus I_1^k \times I_2^k \times \ldots \times I_n^k\,.$$

Diese Mengen sind alle kompakt; es gilt $K^{k+1} \supset K^k$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} K^k = \tilde{Q} \setminus \{x\}\,.$$

Damit kommen wir nun zum Beweis von Satz 5 (iii), dessen Aussage wir mit dem folgenden Satz noch einmal explizit aufschreiben.

Satz 12: *F sei stetig und schwach Ω-diagonal dominant, d. h. für jedes $x \in Q$ existiere ein Graph $\Omega_x = (N, A_x)$ und eine nichtleere Teilmenge J_x von N mit*

(i) *für $i \in J_x$ gilt*

$$F_i x = F_i y, x \neq y \quad \Rightarrow \quad |x_i - y_i| < \|x - y\|_\infty\,;$$

(ii) *für $i \in N \setminus J_x$ gilt*

$$F_i x = F_i y, x \neq y \quad \Rightarrow \quad |x_i - y_i| < \|x - y\|_\infty \quad \textit{oder} \quad |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty = |x_j - y_j| \quad \textit{für alle } j \textit{ mit } (i, j) \in A_x\,.$$

(iii) *Jeder Knoten $i \in N \setminus J_x$ ist in Ω_x mit einem Knoten $j \in J_x$ verbunden.*

Dann ist F verallgemeinert diagonal dominant auf jedem kompakten Quader $\tilde{Q} \subseteqq Q$, d. h. für jedes $x \in \tilde{Q}$ existiert eine Funktion $U^x\colon \tilde{Q} \to \mathbb{R}^n$ mit

(i') *U^x ist diagonal,*

(ii') *U_i^x ist streng isoton und stetig für $i = 1, \ldots, n$,*

(iii') *$U^x x = x$,*

(iv') *für $i = 1, \ldots, n$ gilt*

$$F_i x = F_i y, x \neq y \quad \Rightarrow \quad |U_i y_i - x_i| < \|Uy - x\|_\infty\,.$$

Beweis: $\tilde{Q}$ sei ein kompakter Quader mit $\tilde{Q} \subseteqq Q$; $x \in \tilde{Q}$ sei ein fester Vektor. Zur Vereinfachung der Notation lassen wir im folgenden den Index x stets weg. Wir setzen $r := |J|$ ($\leqq n$). Unser Ziel ist die induktive Konstruktion von Mengen J^l, $J \subseteqq J^l \subseteqq N$, $l = r, \dots, n$, mit

$$|J^l| = l\,, \qquad l = r, \dots, n\,,$$

und von Funktionen $U^l\colon \tilde{Q} \to \mathbb{R}^n$, welche die Eigenschaften (i'), (ii'), (iii') besitzen und für die außerdem gilt

(v') für $i \in J^l$ gilt

$$F_i x = F_i y, x \neq y \quad \Rightarrow \quad |U_i^l y_i - x_i| < \|U^l y - x\|_\infty\,,$$

(vi') für $i \in N \setminus J^l$ gilt

$$F_i x = F_i y, x \neq y \quad \Rightarrow \quad |U_i^l y_i - x_i| < \|U^l y - x\|_\infty \quad \text{oder} \quad |U_i^l y_i - x_i| = \|U^l y - x\|_\infty = |U_j^l y_j - x_j| \quad \text{für alle } j \text{ mit } (i, j) \in \Lambda_x\,.$$

Die Funktion U^n erfüllt dann (i')–(iv').

Für $l = r$ wählen wir $J^r := J$ und $U^r := I$. Wegen der Voraussetzungen (i)–(iii) sind bei dieser Wahl die Eigenschaften (i')–(iii'), (v') und (vi') trivial.

Zur Formulierung des Induktionsschlusses sei nun $r \leqq l < n$, und es seien die Menge J^l, $J \subseteqq J^l \subseteqq N$, $|J^l| = l$, und die Funktion $U^l\colon \tilde{Q} \to \mathbb{R}^n$ gegeben, so daß (i')–(iii'), (v') und (vi') gilt. Wir konstruieren zunächst die Funktion U^{l+1}. Dazu seien mit dem vorliegenden Quader $\tilde{Q}$ die Mengen I_i^k, $i \in N$, $k \in \mathbb{N}_0$ und K^k, $k \in \mathbb{N}$, wie in Definition 14 erklärt. Weil F stetig ist, sind die Mengen

$$M^{k,i} := \{y\colon F_i y = F_i x, y \in K^k\}\,, \qquad i = 1, \dots, n\,,$$

alle kompakt. Für $i \in J^l$ betrachten wir die auf $M^{k,i}$ stetige Funktion

$$h^i\colon M^{k,i} \to \mathbb{R}\,, \qquad y \mapsto \frac{|U_i^l y_i - x_i|}{\|U^l y - x\|_\infty}\,.$$

Wegen (v') ist $h^i(y) < 1$ für alle $y \in M^{k,i}$. Es gilt damit sogar

$$\max_{y \in M^{k,i}} \{h^i(y)\} < 1\,.$$

Es existiert deshalb eine Zahl $\delta^k > 1$, so daß für alle Vektoren $v^k \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten

$$v_i^k = \begin{cases} \eta_i^k \in [1, \delta^k] & \text{für} \quad i \in J^l \\ 1 & \text{für} \quad i \in N \setminus J^l \end{cases} \tag{8}$$

gilt

$$|v_i(U_i^l y_i - x_i)| / \max_{j=1}^{n} |v_j(U_j^l g_j - x_j)| < 1 \quad \text{für} \quad y \in M^{k,i}\,, \qquad i \in J^l\,. \tag{9}$$

Wir wählen die Zahlen δ^k in (8) so, daß $\delta^k > \delta^{k+1}$ (> 1) ausfällt für $k \in \mathbb{N}$. Bei festem $i \in J^l$ sei nun $\tilde{I}_i^k := \{U_i^l t\colon t \in I_i^k\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Diese Intervalle erfüllen, zusammen mit der Folge $\{\delta^k\}$, die Voraussetzungen von Lemma 5 (mit $x_i = U_i^l x_i$ anstelle von t_0, $\tilde{I}_i^k$ anstelle von I^k). Es existiert deshalb eine stetige, streng isotone Funktion $g_i\colon \tilde{I}_i^0 \to \mathbb{R}$ mit

$$g_i(x_i) = 0\,, \qquad |t - x_i| < |g(t)| \leqq \delta^k |t - x_i| \quad \text{für} \quad t \in \tilde{I}_i^{k-1} \setminus \{x_i\}\,.$$

Wir definieren die Komponenten der diagonalen Funktion V durch

$$V_i t := \begin{cases} g_i(t) + x_i\,, & t \in \tilde{I}_i^0\,, \quad \text{falls} \quad i \in J^l \\ t\,, & t \in I_i^0\,, \quad \text{falls} \quad i \in N \setminus J^l\,. \end{cases}$$

V ist diagonal und stetig, jede Komponente ist streng isoton. Außerdem gilt

$$\left.\begin{aligned} &|t - x_i| < |V_i(t) - x_i| \leqq \delta^k |t - x_i|\,, \quad t \in \tilde{I}_i^k\,, \quad \text{falls} \quad i \in J^l \\ &|V_i(t) - x_i| = |t - x_i|\,, \qquad\qquad\qquad t \in I_i^0\,, \quad \text{falls} \quad i \in N \setminus J^l\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aufgrund der Voraussetzung (iii) existieren Knoten $m \in N \setminus J^l$ und $j \in J^l$ mit $(m, j) \in \Lambda$. Wir setzen $J^{l+1} := J^l \cup \{m\}$ und $U^{l+1} := V \circ U^l$. Dann gilt $J \subseteqq J^{l+1} \subseteqq N$, $|J^{l+1}| = l + 1$, und die Funktion U^{l+1} besitzt die Eigenschaften (i')–(iii'). Zum Nachweis von (v') sei zunächst $i \in J^l$ und $F_i x = F_i y$, $x \neq y$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $y \in K^k$. Für $j \in N$ haben wir wegen (10)

$$|U_j^{l+1} y_j - x_j| = |V_j U_j^l y_j - x_j| = |v_j^k (U_j^l y_j - x_j)|$$

mit einem Vektor $v^k = (v_1^k, \dots, v_n^k)^\mathrm{T}$, welcher (8) erfüllt. Also gilt nach (9)

$$|U_j^{l+1} y_i - x_i| < \|U^{l+1} y - x\|_\infty\,.$$

Nun sei $i = m$, d. h. $i \in J^{l+1} \setminus J^l$ und $F_i x = F_i y$, $x \neq y$. Weil U^l die Eigenschaft (vi') besitzt, ist also eine der beiden Aussagen

$$|U_i^l y_i - x_i| < \|U^l y - x\|_\infty$$

oder

$$0 \neq |U_i^l y_i - x_i| = \|U^l y - x\|_\infty = |U_j^l y_j - x_j| \quad \text{für alle } j \text{ mit } (i, j) \in \Lambda$$

richtig. Im ersten Fall ergibt sich wegen (10) sofort

$$|U_i^{l+1} y_i - x_i| = |U_i^l y_i - x_i| < \|U^{l+1} y - x\|_\infty\,,$$

im zweiten Fall existiert aufgrund der Wahl von m ein Knoten $j \in J^l$ mit $(m, j) \in \Lambda$. Dann gilt aber, wieder wegen (10), mit diesem j

$$0 \neq |U_i^{l+1} y_i - x_i| = |U_i^l y_i - x_i| = |U_j^l y_j - x_j| < |U_j^{l+1} y_j - x_j| \leqq \|U^{l+1} y - x\|_\infty\,.$$

Damit ist nachgewiesen, daß U^{l+1} die Eigenschaft (v') besitzt.

Zum Nachweis von (vi') für U^{l+1} sei nun $i \in N \setminus J^{l+1}$ und $F_i x = F_i y$, $x \neq y$, mit $0 \neq |U_i^{l+1} y_i - x_i| = \|U^{l+1} y - x\|_\infty$. Aufgrund von (10) gilt dann sogar

$$0 \neq |U_i^{l+1} y_i - x_i| = |U_i^l y_i - x_i| = \|U^l y - x\|_\infty ,$$

woraus nach Voraussetzung für alle j mit $(i, j) \in A$ die Gleichung

$$|U_j^l y_j - x_j| = \|U^l y - x\|_\infty$$

folgt. Alle j mit $(i, j) \in A$ liegen deshalb in $N \setminus J^l$, denn andernfalls würde sich aus (10) wie vorhin $|U_i^{l+1} y_i - x_i| < \|U^{l+1} y - x\|_\infty$ ergeben. Wiederum aus (10) folgt so schließlich

$$|U_j^{l+1} y_j - x_j| = |U_j^l y_j - x_j| = \|U^l y - x\|_\infty = \|U^{l+1} y - x\|_\infty$$

für alle j mit $(i, j) \in A$, was (vi') für U^{l+1} beweist. □

Anmerkung: Es handelt sich bei dieser Arbeit um den ersten Teil der Habilitationsschrift des Autors an der Universität Karlsruhe, 1990.

Literatur

1 BERMAN, A.; PLEMMONS, B.: Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York 1979.
2 BRAMBLE, J.; HUBBARD, B.: On a finite difference analogue of an elliptic boundary value problem which is neither diagonally dominant nor of non-negative type. J. Math. Phys. **43** (1964), 117–132.
3 DUFFIN, R. J.: Nonlinear networks IIb. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 119–127.
4 ELSNER, L.: Bemerkungen zum Zeilensummenkriterium. ZAMM **49** (1969), 97.
5 FAN, K.: Topological proof for certain theorems on matrices with non-negative elements. Monatsh. Math. **62** (1958), 219–237.
6 FROMMER, A.: Lösung linearer Gleichungssysteme auf Parallelrechnern. Vieweg, Braunschweig 1990.
7 FROMMER, A.: Verallgemeinert diagonal dominante Funktionen II. Anwendung auf asynchrone Iterationsverfahren und Beispiele. ZAMM **72** (1992), 11 (im Druck).
8 GALE, D.; NIKAIDÔ, H.: The Jacobian matrix and global univalence of mappings. Math. Ann. **159** (1965), 81–93.
9 HADAMARD, J.: Leçons sur la propagation des ondes et l'hydrodynamique. Hermann, Paris 1903, pp. 13–14.
10 JAMES, K.: Convergence of matrix iterations subject to diagonal dominance. SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 478–484.
11 JAMES, K.; RIHA, W.: Convergence criteria for successive overrelaxation. SIAM J. Numer. Anal. **12** (1974), 137–143.
12 KULISCH, U.: Über reguläre Zerlegungen von Matrizen und einige Anwendungen. Numer. Math. **11** (1968), 444–449.
13 MINKOWSKI, H.: Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern (1900). In: HILBERT, D. et al. (Hrsg.): Gesammelte Abhandlungen I & II. Chelsea Publishing Company, New York 1967, pp. 316–317.
14 MORÉ, J.: Nonlinear generalizations of matrix diagonal dominance with application to Gauß-Seidel iterations. SIAM J. Numer. Anal. **9** (1972), 357–378.
15 MORÉ, J.; RHEINBOLDT, W.: On P- and S-functions and related classes of n-dimensional nonlinear mappings. Linear Algebra Appl. **6** (1973), 45–68.
16 OSTROWSKI, A.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helvet. **10** (1937), 69–96.
17 RHEINBOLDT, W.: On M-functions and their application to nonlinear Gauss-Seidel iterations and to network flows. Berichte der GMD, Nr. 23, 1969.
18 RHEINBOLDT, W.: On M-functions and their application to nonlinear Gauss-Seidel iterations and to network flows. J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 274–307.
19 RHEINBOLDT, W.: On classes of n-dimensional nonlinear mappings generalizing several types of matrices. In HUBBARD, B. (ed.): Numerical solution of partial differential equations-II 1970. Academic Press, New York 1971, pp. 501–545.
20 SCHÄFKE, F.: Zum Zeilensummenkriterium. Numer. Math. **12** (1968), 448–453.
21 SCHRÖDER, J.: Invers-monotone Operatoren. Arch. f. Rat. Mech. Anal. **10** (1962), 323–337.
22 TAUSSKY, O.: A recurring theorem on determinants. Amer. Math. Monthly **56** (1949), 672–676.
23 VARGA, R.: Matrix iterative analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1962.
24 VARGA, R.: On recurring theorems on diagonal dominance. Linear Algebra Appl. **13** (1976), 1–9.
25 WALTER, W.: Bemerkungen zu Iterationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Numer. Math. **10** (1967), 80–85.

Eingegangen am 6. Juni 1990

Anschrift: Dr. ANDREAS FROMMER, Universität Karlsruhe, Institut für Angewandte Mathematik, Kaiserstraße 12, D-W-7500 Karlsruhe, Deutschland